Übungsbegleiter

Inhaltsverzeichnis

Vorwort

Dieser Aufschrieb soll als Begleitinformationen zu den Übungsblättern verstanden werden. Ziel ist es, Inhalte aus den Übungen tiefer zu beleuchten als es das Vorrechnen im regulären Übungsbetrieb erlaubt. Insbesondere versuche ich neben dem rigorosen mathematischen Verständnis aus den Übungsaufgaben ein "intuitives" und weniger formellastiges Verständnis zu fördern.

Gemäß der Natur der Sache müssen einige Inhalte aus dem Skript wiederholt werden. Dennoch kann und soll dieser Aufschrieb das Vorlesungsskript (Spodarev 2020) bzw. die ältere, aber nicht ganz deckungsgleiche Version (Spodarev 2018) nicht ersetzen. Ebenso ist dies nicht als eine Art Zusammenfassung der "wichtigen Prüfungsinhalte" zu verstehen. Es ist lediglich mein Anliegen, einzelne grundlegende Aspekte auf eine weniger formale Weise zu beleuchten, da diese Dinge - meiner Erfahrung nach - notgedrungen durch Zeitmangel und Stoffdichte oftmals im Vorlesungs- und Übungsbetrieb zu kurz kommen.

In den vergangenen Semester habe ich versucht, diese Informationen über zusätzliche Folien in den Übungen darzustellen. Damit diese sich allerdings auch ohne meinen zugehörigen Vortrag als Lernunterlage eignen, musste ich einige Inhalte in Textform auf den Folien beschreiben. Ich habe zwar versucht, Texte in den Folien auf ein Minimum zu beschränken, dennoch musste ich - zu meinem eigenen Unwohl - feststellen, dass ich für meinen Geschmack immer noch zu viel Text auf den Folien einbringen musste.

Ich bin einer der größten Kritiker an Vorträgen mit vollgeschriebenen Folien. Leider sind solche Vorträge meiner Erfahrung nach leider eher die Norm als die Ausnahme. Daher bin ich erfreut darüber, diesen Übungsbegleiter als Lernunterlage aushändigen und meine Übungsfolien dadurch schlanker gestalten zu können.

Ob der Übungsbegleiter letztendlich eine sinnvolle Ergänzung zum Übungsbetrieb darstellt, dürft ihr als Übungsteilnehmer selbst entscheiden. Ich bin für Feedback immer offen und nehme auch Kritik (insbesondere bzgl. zu starken Ungenauigkeiten durch die umgangssprachliche Beschreibung mathematischer Inhalte) gerne an. Ihr dürft euch per Mail oder Übungsfeedback im Moodle immer mit euren Anregungen melden.

Abschließend möchte ich mich an dieser Stelle herzlichst bei Jun.-Prof. Dr. Marco Oesting für die aufmerksame Korrektur dieses Textes bedanken.

1 Wahrscheinlichkeitsmaße und Mengensysteme

Das stochastische Grundgerüst in einem Grundraum E basiert auf Mengen bzw. Ereignissen in einem Wahrscheinlichkeitsraum, der als ein Tripel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ definiert ist, das die Menge von Elementarereignissen bzw. die Grundmenge $\Omega \subset E$ mit einer σ-Algebra $\mathcal{F}$ und einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ kombiniert. Dabei sind die zwei hier noch unbekannten Begriffe definiert durch

Definition 1.1 (σ-Algebra)**.** Ein Mengensystem $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra, wenn alle drei der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Es gilt $\emptyset \in \mathcal{F}$.
2. Falls $A \in \mathcal{F}$, so gilt auch $A^c \in \mathcal{F}$.
3. Falls $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ so gilt auch $\cup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$.

Definition 1.2 (Wahrscheinlichkeitsmaß)**.** Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω. Eine Mengenfunktion $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ heißt Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$, wenn

1. $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$ für alle $A \in \mathcal{F}$,
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ und
3. Falls $A_1, A_2, ... \in \mathcal{F}$ paarweise disjunkt sind, so gilt
$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n).$$

Die σ-Algebra dient dabei als Sammelsurium von Mengen, denen wir eine Wahrscheinlichkeit zuordnen können und die wir daher als messbar bezeichnen. Der zentrale Punkt, warum wir das Konstrukt der σ-Algebra brauchen und uns bei dem zugrundeliegenden Mengensystem nicht mit der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ begnügen können, ist der Satz von Vitali. Grob formuliert besagt dieser, dass es Mengen gibt, die nicht messbar sind, d.h. diesen Mengen kann man kein sinnvolles Maß/Volumen zuordnen.

Stattdessen beschränkt man sich auf einige wenige Axiome, die messbare Mengen erfüllen sollten und landet damit bei der Definition der σ-Algebra, deren Bedingungen sich aus stochastischer Perspektive übersetzen lassen als

1. Einem unmöglichen Ereignis kann man eine Wahrscheinlichkeit zuordnen.
2. Falls man einem Ereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnen kann, so kann man auch dem Gegenereignis eine Wahrscheinlichkeit zuordnen.
3. Lassen sich einer abzählbaren Anzahl von Ereignissen jeweils eine Wahrscheinlichkeit zuordnen, so lässt sich auch dem Ereignis, dass irgendeines dieser Ereignisse eintritt, eine Wahrscheinlichkeit zuordnen.

Bei den bisherigen Überlegungen haben wir lediglich die Tatsache untersucht, ob man eine Wahrscheinlichkeit zuordnen kann und haben auf diese Weise die σ-Algebra beleuchtet. Jedoch kann man mit der σ-Algebra alleine keine sinnvolle Aussage über die Höhe der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses treffen.

Dafür benötigen wir eine Funktion, die genau diese Aufgabe erledigt und auch hier gehen wir wieder axiomatisch vor, damit die entsprechende Funktion möglichst intuitive Eigenschaften besitzt. Gerade diese Eigenschaften finden sich in der Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes und lassen sich wieder aus stochastischer Perspektive übersetzen als

1. Jede Wahrscheinlichkeit liegt zwischen 0 und 1.

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass irgendetwas passiert ist 1.

3. Falls man beliebig viele Ereignisse betrachtet, die nicht gleichzeitig eintreten können, so ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass eins dieser Ereignisse eintritt, als die Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse.

Betrachten wir nun zwei elementare Wahrscheinlichkeitsräume.

Beispiel 1.1. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}$ und A eine nichtleere Teilmenge von Ω. Dann ist $(\Omega, \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(B) = \begin{cases} 0 & , B = \emptyset \\ 1 & , B = \Omega \\ p & , B = A \\ 1-p & , B = A^c \end{cases}$$

ein Wahrscheinlichkeitsraum, falls $p \in [0, 1]$.

Beispiel 1.2 (Borelsche σ-Algebra)**.** Es sei $\mathcal{B}([0,1])$ die Borel-σ-Algebra auf $[0,1]$. Grob (und sehr vereinfacht) gesagt beinhaltet die Borel-σ-Algebra fast alle Mengen, die irgendwie von Interesse sein könnten,. In diesem Fall beschränken wir uns dabei auf Teilmengen aus dem Intervall $[0,1]$. Zeitgleich sind diese Mengen so "gutartig", dass man ihnen einen Volumen bzgl. des Lebegue-Maßes λ zuordnen kann.

Das Lebesgue-Maß ist hierbei ein elementares Maß, das einem Intervall dessen Länge als Maß zuordnet, d.h. $\lambda([a,b]) = b - a$ für alle $a < b$. Es gilt nun, dass $([0,1],\ \mathcal{B}([0,1]),\ \lambda)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Bibliografie

Spodarev, Evgeny. 2018. *Vorlesungsskript zur Elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik*.

———. 2020. *Vorlesungsskript zur Elementaren Wahrscheinlichkeitsrechnung und Stastistik*.