

BACHELORARBEIT

Geometrisch Nichtlineare Fachwerkstäbe

Thomas Alberti

Geometrisch Nichtlineare Fachwerkstäbe

Wissenschaftliche Arbeit zur Erlangung des Grades
B.Sc.
an der Ingenieurfakultät Bau Geo Umwelt der Technischen Universität München.

Betreut von Mitarbeiter*in
Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger
Dr.-Ing. Klaus Sautter
Lehrstuhl für Statik

Eingereicht von Thomas Alberti
Hanfelder Str. 12
81475 München
Matrikelnummer: 03742116

Eingereicht am München, den 30.09.2023

Abstract

In this paper, the core principle of the Finite Element Method is detailed, with particular emphasis on its application to trusses. Both linear and nonlinear strain measures are considered in the element formulation of the truss member. The Newton-Raphson method is derived and adapted for the minimization of the residual vector. Examples demonstrate the application of both the load-driven and displacement-driven calculation methods. Sources of error in both methods are discussed in detail, particularly addressing the issue of large residuals and their consequences. The software developed in the context of this paper offers a visual interface for performing force-driven calculations on trusses. It illustrates the differences between linear and nonlinear strain measures. Moreover, it emphasizes the importance of incremental load application. The code for this tool is publicly available on Github. A future modification could involve the implementation of the displacement-driven calculation method. However, such an expansion would exceed the scope of this paper.

Keywords

Finite Element Method; geometrically nonlinear; truss element; Newton-Raphson method; force-controlled; displacement-controlled

Kurzfassung

In dieser Arbeit wird das Kernprinzip der Finite-Elemente-Methode detailliert dargestellt, wobei besonders auf die Anwendung an Fachwerken eingegangen wird. Es wird sowohl das lineare, als auch ein nichtlineares Dehnmaß bei der Elementformulierung des Fachwerkstabes berücksichtigt. Das Newton-Raphson-Verfahren wird hergeleitet und zur Minimierung des Residualvektors angepasst. Anhand von Beispielen wird die Anwendung sowohl von der last-, als auch verschiebungsgesteuerten Rechenmethode demonstriert. Fehlerquellen in beiden Methoden werden ausführlich diskutiert, wobei insbesondere auf die Problematik großer Residuen und deren Auswirkungen eingegangen wird. Die im Kontext dieser Arbeit entwickelte Software bietet eine visuelle Schnittstelle, um Fachwerke kraftgesteuert zu berechnen. Sie veranschaulicht die Unterschiede zwischen dem linearen und nichtlinearen Dehnmaß. Zudem hebt sie die Relevanz der schrittweisen Lastapplikation hervor. Der Code dieses Tools ist für die Öffentlichkeit auf [Github](#) zugänglich. Eine zukünftige Modifikation könnte die Implementierung der verschiebungsgesteuerten Berechnungsmethode beinhalten. Eine solche Erweiterung würde den Umfang dieser Arbeit aber überschreiten.

Schlüsselwörter

Finite Elemente Methode; geometrisch Nichtlinear; Fachwerkstab; Newton-Raphson-Verfahren; Kraftgesteuert; Verschiebungsgesteuert

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Finite-Elemente-Methode	2
3	Newton-Raphson-Verfahren	3
4	Elementformulierung	5
4.1	Eigenschaften des Fachwerkstabes.....	5
4.2	Nichtlineares Dehnmaß	5
4.3	Lineares Dehnmaß.....	14
5	Software	21
6	Benchmark.....	28
6.1	Analyse mit Lastumschlag.....	28
6.1.1	Balken mit analytischer Lösung.....	28
6.1.2	Zweidimensionaler kreisförmiger Fachwerkbogen	32
6.2	Analyse bis Lastumschlag	37
6.2.1	Unsymmetrisches Dreigelenktragwerk	37
6.2.2	Kuppel-Raumfachwerk.....	38
7	Zusammenfassung und Ausblick	42

1. Einleitung

Viele Tragwerke, die unsere tägliche Umgebung gestalten, weisen verhältnismäßig geringe Verformungen auf. Hierzu gehören einfache Wohngebäude, übersichtliche Fußgängerbrücken sowie schlichte Holz- und Stahlstrukturen. Für diese Bauwerke geht man häufig von einem vereinfachten linearen Zusammenhang zwischen Belastung und Verformung aus. Allerdings ist diese Annahme nur bei minimalen Verformungen hinreichend. Verändert die Belastung die Geometrie deutlich, beeinflusst dies ebenfalls die Steifigkeit des Systems. Berücksichtigt man diesen Einfluss der Verformung auf die Steifigkeit, spricht man von einer geometrisch nicht linearen Betrachtung. [1]

In Fisch- und Spinnennetzen sowie im Silikatskelett der Aulonia hexagona [2] treten aufgrund signifikanter Verformungen die Effekte geometrischer Nichtlinearität zutage. Doch nicht nur in der Natur sind sie von entscheidender Bedeutung: Auch beim Olympiazeltdach in München [3], dem Radioteleskop in Arecibo und dem Trockenkühlturm in Uentrop-Schmehausen [4] spielen diese Phänomene eine tragende Rolle.

In dieser Arbeit wird die Methodik der geometrisch nichtlinearen Berechnung am Beispiel des Fachwerksstabs dargestellt, dem einfachsten Bauelement der Tragwerkslehre. Wegen seiner überschaubaren Komplexität eignet er sich hervorragend zur Illustration der Thematik - insbesonders da er oft in Tragwerken mit großen Verformungen, wie etwa Seiltragwerken, zur geometrisch nichtlinearen Modellierung verwendet wird. [1]

Die in dieser Arbeit entwickelte Software, sowie die am Ende diskutierten Benchmarks können auf [Github](#)¹ eingesehen werden.

¹ <https://github.com/AlbertiTrussAnalysis/nonlinearTruss>

2. Finite-Elemente-Methode

Die Finite-Elemente-Methode (FEM) hat sich in den letzten Jahrzehnten als die am häufigsten eingesetzte Methode im Ingenieurbereich etabliert. Das Kernprinzip der FEM ist die Zerlegung eines komplexen Gesamtproblems in eine Vielzahl einfacherer Einzelprobleme. Dafür wird eine Struktur in sogenannte Finite Elemente unterteilt, die an bestimmten geometrischen Punkten, den Knoten, miteinander verbunden sind. Diese Zerlegung in Knoten und Elemente wird als Diskretisierung bezeichnet, da hierbei eine kontinuierliche Struktur in viele endlich große (diskrete) Teile aufgebrochen wird. [5]

In jedem dieser Elemente werden (Polynom-)Ansätze zur näherungsweisen Darstellung der mathematischen Lösungsfunktion des betreffenden Feldproblems gewählt, die ausschließlich in diesem speziellen Element gelten. Mit steigender Anzahl an Elementen steigt die Genauigkeit der Gesamtlösung. Die Feldgrößen, wie zum Beispiel Temperatur, Verschiebungen oder elektrische Feldgrößen, liegen an den Knoten als unbekannte Polynomstützstellen, die berechnet werden müssen. Dies resultiert in einem (nicht-)linearen Gleichungssystem für die unbekannten Polynomstützstellen an den Knoten. Ist dieses Gleichungssystem gelöst, kann die Lösung für jeden gewünschten Punkt innerhalb der Elemente über die Polynomansätze näherungsweise bestimmt werden. [5]

Im Bauingenieurwesen wird die FEM zur Bestimmung von Biegelinien (Verschiebungsfürfigur) oder Kraftverläufen von Tragwerken angewandt. Hierbei müssen die Elemente sowohl kinematische Verträglichkeitsbedingungen als auch statische Gleichgewichtsbedingungen erfüllen. Zudem ist es essenziell, dass an jeglichen Diskontinuitäten diskretisiert wird, um abrupte Änderungen in Material oder Geometrie präzise abzubilden und so die Lösungsgenauigkeit zu garantieren. [1]

Durch die Berechnung der Verschiebung und Verdrehung der Knotenpunkte (Ränder der Elemente) lässt sich auf die Verschiebungsfürfigur des Tragwerks mithilfe der gewählten Polynomansätze schließen. Aus den ermittelten Verschiebungsgrößen kann rückwirkend der Kraftverlauf abgeleitet werden. Dieses Vorgehen wird auch Verschiebungsgrößenverfahren genannt, eine besondere Variante der FEM. Abhängig von der Dimension und des Elementtyps werden die Freiheitsgrade der Verschiebungsgrößen (Verschiebung und Verdrehung) entsprechend definiert. [1]

3. Newton-Raphson-Verfahren

Im Wesentlichen ist das Ziel des Verfahrens eine Nullstelle einer Nichtlinearen Beziehung zwischen zwei Größen zu finden. Zur Erläuterung der Methodik des Verfahrens nehmen wir an, dass r eine nichtlineare Funktion von u ist, wobei u^* eine Nullstelle von r ist [5]:

$$r(u^*) = 0 \quad (3.1)$$

Zu Beginn wird die Nullstelle u^0 geschätzt. Es bedarf bei dem Verfahren also eines Startwertes. In der Umgebung des Startwertes u^0 , beziehungsweise der geschätzten Lösung, wird eine Taylorreihe entwickelt. Die Reihe wird nach dem ersten Glied abgebrochen. So erhält man eine Lineare Funktion, welcher an der Stelle des Startwertes den gleichen Wert, sowie die gleiche Steigung der Nichtlinearen Beziehung hat [5]:

$$r(u) \approx r(u^0) + r'(u^0)(u - u^0) = 0 \quad (3.2)$$

Wird die Geradengleichung nach u aufgelöst ergibt sich:

$$u = u_0 - \frac{r(u_0)}{r'(u_0)} \quad (3.3)$$

Die gefundene Nullstelle dient als Ausgangspunkt für eine neue lineare Approximation, mithilfe der Taylorreihenentwicklung. Der Vorgang wird so oft wiederholt bis ein Abbruchkriterium greift. Die Iterationsvorschrift mit der Laufvariablen k sieht demnach wie folgt aus [5]:

$$u^{k+1} = u^k - \frac{r(u^k)}{r'(u^k)} \quad k \in \mathbb{N} \quad (3.4)$$

Eine maximale Anzahl an Wiederholen (Iterationen der Rechenvorschrift), eine maximale Differenz zwischen den gefundenen Nullstellen $|u^{k+1} - u^k| < \epsilon \approx 0$, oder ein maximaler Funktionswert, welcher sehr nahe null ist $|r(u^{k+1})| < \epsilon \approx 0$, sind die möglichen Abbruch-

kriterien. Je besser der Startwert gewählt wurde, desto schneller konvergiert das Verfahren, beziehungweise desto schneller wird das Abbruchkriterium ausgelöst. [5]

Das beschriebene Verfahren lässt sich auf mehrdimensionale Räume erweitern. Dabei werden aus den skalaren Größen r und u vektorielle Entitäten. Die Komponenten von \mathbf{r} stellen nichtlineare Funktionen der Komponenten von \mathbf{u} dar. Statt einer einzigen Nullstelle wird in diesem Kontext nach einer simultanen Lösung für alle Komponenten von \mathbf{r} gesucht. Um die Kopplung der Einträge in \mathbf{r} zu berücksichtigen und die Iterationsvorschrift um beliebige Dimensionen zu erweitern, muss die Ableitung der eindimensionalen Funktion durch die Jacobimatrix $J = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}}$ ersetzt werden. Die Koeffizienten der Jacobimatrix sind stets konstant. Im folgenden wird die Notation durch $\mathbf{r}(\mathbf{u}^k) = \mathbf{r}^k$ vereinfacht [5]:

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - \frac{\mathbf{r}^k}{\frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{u}}} \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u}^{k+1} = \mathbf{u}^k - \left(\frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \mathbf{r}^k \quad (3.6)$$

4. Elementformulierung

4.1. Eigenschaften des Fachwerkstabes

Zur Lösung von Fachwerken unterteilt die Finite-Elemente-Methode das Tragwerk in finite Fachwerksstäbe (Elemente).

Diese Elemente sind dadurch charakterisiert, dass sie an ihren Rändern (Knotenpunkten) an Vollgelenken angeschlossen sind. Die Belastung des Systems erfolgt lediglich an diesen Gelenken mit Einzellasten.

Basierend auf den vorliegenden Bedingungen lässt sich deduzieren, dass die Spannung im Stab einem eindimensionalen Spannungszustand entspricht. Folglich ist die einzige relevante Schnittkraft in diesem Zusammenhang die Normalkraft. Somit ist der Stab ausschließlich Zug- oder Druckbelastungen unterworfen. Infolgedessen müssen an den Knotenpunkten keine Verdrehungsfreiheitsgrade diskretisiert werden.

4.2. Nichtlineares Dehnmaß

Die Elementformulierung erfolgt mithilfe der virtuellen Arbeit δW in Form virtueller Verschiebungen. Mithilfe dieses Prinzips ist das statische Gleichgewicht am Element stets gewährleistet.

Das Konzept der virtuellen Verschiebung basiert auf der Idee einer gedanklichen, minimalen Verformung eines Elements. Bei dieser imaginären Verschiebung der Knotenpunkte führen die von außen wirkenden Kräfte eine sogenannte externe virtuelle Arbeit δW_{ext} aus. Im Gegensatz dazu beschreibt die virtuelle innere Arbeit δW_{int} die Energie, welche die tatsächlichen inneren Schnittkräfte des Systems während dieser hypothetischen Verformung aufbringen. [1]

Das grundlegende Prinzip lautet: In einem im Gleichgewicht befindlichen Element muss die Arbeit, die durch die echten äußeren Kräfte während einer virtuellen Verschiebung verrichtet werden, der Arbeit entsprechen, die durch die echten inneren Kräfte infolge der resultierenden virtuellen Deformation geleistet wird [1]:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad (4.1)$$

$$\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0 \quad (4.2)$$

Im Falle des Fachwerks wirken, wie in 4.1 beschrieben, als einzige externe Belastung nur Punktlasten F_i an den diskretisierten Knotenpunkten. Die virtuelle externe Arbeit δW_{ext} ergibt sich also als Multiplikation dieser mit den an der Diskretisierung gesetzten virtuellen Verschiebungen δu_i .

$$\delta W_{\text{ext}} = \sum_i F_i \cdot \delta u_i \quad (4.3)$$

Die innere Kraft beschränkt sich, ebenso wie in 4.1 erläutert, bei diesem Element auf die Normalkraft N . Folglich ist diese mit der virtuellen Dehnung $\delta\varepsilon$ die einzige Komponente, welche einen Beitrag zur inneren virtuellen Arbeit δW_{int} leistet.

$$\delta W_{\text{int}} = \int N \cdot \delta\varepsilon dx \quad (4.4)$$

Des Weiteren wird nach Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant der ebene Spannungszustand σ näherungsweise über der Querschnittsfläche A und entlang des Stabes als konstant angenommen. [6]

$$N = \sigma \cdot A \quad (4.5)$$

Daraus folgt für die virtuelle innere Arbeit:

$$\delta W_{\text{int}} = \int \sigma \cdot \delta\varepsilon dV \quad (4.6)$$

Nach dem zweiten Piola-Kirchhoff Spannungstensor besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der ebenen Spannung σ und der eindimensionalen Dehnung ε des Stabes. Dabei entspricht die Steigung dem Elastizitätsmodul E . [7]

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (4.7)$$

Folglich gilt:

$$\delta W_{\text{int}} = \int E \cdot \varepsilon \cdot \delta \varepsilon dV \quad (4.8)$$

In dieser Arbeit wird sowohl die Querschnittsfläche A , als auch das Elastizitätsmodul E als konstant angenommen.

$$A = \text{const.} \quad (4.9)$$

$$E = \text{const.} \quad (4.10)$$

Demnach ergibt sich:

$$\delta W_{\text{int}} = EA \int_0^L \varepsilon \cdot \delta \varepsilon dx \quad (4.11)$$

Die Dehnung wird durch das Green-Lagrange'sche Dehnmaß ε_{GL} charakterisiert. Dabei wird angenommen, dass diese Dehnung über die gesamte Länge des Stabes L konstant ist:

$$\delta W_{\text{int}} = EA \cdot L \cdot \varepsilon_{\text{GL}} \cdot \delta \varepsilon_{\text{GL}} \quad (4.12)$$

Das Green-Lagrange'sche Dehnmaß ε_{GL} ist folgendermaßen definiert [7]:

$$\varepsilon_{\text{GL}} = 0,5 \cdot \frac{l^2 - L^2}{L^2} \quad (4.13)$$

Dabei stellt L die ursprüngliche Länge des Stabes und l die Länge nach der Deformation dar. Die Dehnung lässt sich in Abhängigkeit der Koordinaten und Verschiebung der Knotenpunkte in globalen Koordinaten darstellen.

Die Darstellung erfolgt mithilfe eines Verschiebungs- und Koordinatenvektors. Die Einträge der Vektoren sind die zum Element zugehörigen Knotenkoordinaten und Knotenverschiebungen:

In 2D:

$$\mathbf{u} = [u_1, v_1, u_2, v_2]^T \quad (4.14)$$

$$\mathbf{x} = [x_1, y_1, x_2, y_2]^T \quad (4.15)$$

In 3D:

$$\mathbf{u} = [u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2]^T \quad (4.16)$$

$$\mathbf{x} = [x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2]^T \quad (4.17)$$

Die Länge L und Längenänderung l des Stabes kann über den Abstand der Knotenpunkte mithilfe des Pythagoras bestimmt werden:

In 2D:

$$L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad (4.18)$$

$$l^2 = (x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)^2 \quad (4.19)$$

In 3D:

$$L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 \quad (4.20)$$

$$l^2 = (x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)^2 + (z_2 + w_2 - z_1 - w_1)^2 \quad (4.21)$$

Somit ergibt sich die Dehnung zu:

In 2D:

$$\varepsilon_{\text{GL}} = 0,5 \cdot \frac{(x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4.22)$$

In 3D:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{GL}} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2 + u_2 - x_1 - u_1)^2 + (y_2 + v_2 - y_1 - v_1)^2 + (z_2 + w_2 - z_1 - w_1)^2}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \frac{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} \end{aligned} \quad (4.23)$$

Um die virtuelle Dehnung $\partial\varepsilon_{\text{GL}}$ in Abhängigkeit der virtuellen Verschiebungen δu_i darzustellen muss über die resultierenden Änderungen der Dehnung $\frac{\partial\varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_i}$ aufgrund jeder virtuellen Verschiebungsrichtung i aufsummiert werden:

$$\delta\varepsilon_{\text{GL}} = \sum_i \frac{\partial\varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_i} \cdot \delta u_i \quad (4.24)$$

Folglich gilt:

In 2D:

$$\delta W_{\text{int}} = EA \cdot L \cdot \varepsilon_{\text{GL}} \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_1} \cdot \delta u_1 + \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_1} \cdot \delta v_1 + \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_2} \cdot \delta u_2 + \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_2} \cdot \delta v_2 \right) \quad (4.25)$$

In 3D:

$$\delta W_{\text{int}} = EA \cdot L \cdot \varepsilon_{\text{GL}} \cdot \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} \cdot \delta u_1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} \cdot \delta v_1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_1} \cdot \delta w_1 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} \cdot \delta u_2 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_2} \cdot \delta v_2 + \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_2} \cdot \delta w_2 \right) \quad (4.26)$$

In vektorieller Schreibweise mithilfe des in 4.53 definierten Vektors kann die interne Arbeit wie folgt formuliert werden:

In 2D:

$$\delta W_{\text{int}} = EA \cdot L \cdot \varepsilon_{\text{GL}} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_2}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_2} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u} \right)^T \quad (4.27)$$

In 3D:

$$\delta W_{\text{int}} = EA \cdot L \cdot \varepsilon_{\text{GL}} \cdot \left(\begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial w_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_2}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_2}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial w_2} \end{bmatrix} \delta \mathbf{u} \right)^T \quad (4.28)$$

Um das Problem des statischen Gleichgewichts eines Arbeitssatzes zu adressieren, führt man das Konzept des Residuums \mathbf{r} ein. Das Residuum \mathbf{r} repräsentiert die Differenz zwischen den internen \mathbf{f}_{int} und den externen Kräften \mathbf{f}_{ext} eines Systems. In der mathematischen Formulierung dieses Konzepts werden die Komponenten des virtuellen Verschiebungsvektors $\delta \mathbf{u}$ gleich eins gesetzt. Diese Vorgehensweise ist gerechtfertigt, da es sich bei diesen Verschiebungen um imaginäre und somit frei wählbare Größen handelt.

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}}) = \mathbf{f}_{\text{int}} - \mathbf{f}_{\text{ext}} = \mathbf{r} = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

Somit ergibt sich der interne Kraftvektor zu:

In 2D:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = EA \cdot L \cdot \varepsilon_{\text{GL}} \cdot \left[\frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_2}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_2} \right]^T \quad (4.30)$$

In 3D:

$$\mathbf{f}_{\text{int}} = EA \cdot L \cdot \varepsilon_{\text{GL}} \cdot \left[\frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial w_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_2}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_2}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial w_2} \right]^T \quad (4.31)$$

Die Gleichung 4.3 lässt sich mithilfe von 4.53 wie folgt ausdrücken:

In 2D:

$$\delta W_{\text{ext}} = [F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}]^T \delta \mathbf{u} \quad (4.32)$$

In 3D:

$$\delta W_{\text{ext}} = [F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{z2}]^T \delta \mathbf{u} \quad (4.33)$$

Das Residuum ergibt sich demnach zu:

In 2D:

$$\mathbf{r} = EA \cdot L \cdot \varepsilon_{\text{GL}} \cdot \left[\frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_2}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_2} \right]^T - [F_{x1}, F_{y1}, F_{x2}, F_{y2}]^T \quad (4.34)$$

In 3D:

$$\mathbf{r} = EA \cdot L \cdot \varepsilon_{\text{GL}} \cdot \left[\frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial w_1}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u_2}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial v_2}, \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial w_2} \right]^T - [F_{x1}, F_{y1}, F_{z1}, F_{x2}, F_{y2}, F_{z2}]^T \quad (4.35)$$

Aus der geometrisch nichtlineare Betrachtung ergibt sich ein nichtlineares Gleichungssystem aus inneren und externen Kräften. Das Residuum, welches minimiert werden soll, ist ein nichtlinearer Vektor bezüglich der Deformation. Zur Lösung des nichtlinearen Vektors wird er mithilfe des in Kapitel 3 vorgestelltem Newton-Raphson-Verfahrens linearisiert. [5]

Die hergeleitete Iterationsvorschrift 3.6 betrachtet die Anpassung von \mathbf{u} mit dem Ziel \mathbf{r} zu reduzieren. Der Fokus der Finite-Elemente-Methode liegt auf der Beobachtung der Ungleichgewichtskräfte \mathbf{r} bezogen auf die Verschiebung \mathbf{u} . Die Beobachtung der Reduktion des Residuums \mathbf{r} ermöglicht die Bestimmung der Konvergenz des numerischen Verfahrens. Eine erfolgreiche Konvergenz ist indikativ für eine korrekte Elementformulierung und Implementierung. Des Weiteren bietet der Konvergenzverlauf Einblicke in die Qualität der zugrunde liegenden Annahmen und theoretischen Modelle. Da \mathbf{r} den Ungleichgewichten entspricht und \mathbf{u} den Verschiebungen muss die Rechenvorschrift neu formuliert werden. Um die Iterationsvorschrift für das Residuum \mathbf{r} zu erhalten, wird der Taylorschen Reihenansatz für das Residuum und dessen Ableitung nach der Verschiebung genutzt. Auch hier wird die Umgebung von \mathbf{r} linearisiert, wofür die Reihe nach dem ersten Glied abgebrochen wird [5]:

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k + \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{u}} \Delta \mathbf{u}^k \quad (4.36)$$

Dafür wird die inkrementelle Änderung der Verschiebungen $\Delta \mathbf{u}^k$ eingeführt. Sie gibt an wie groß die Differenzen zwischen den aktuellen und den vorherigen Verschiebungen sind:

$$\Delta \mathbf{u}^k = \mathbf{u}^{k+1} - \mathbf{u}^k \quad (4.37)$$

Die Jacobimatrix $J = \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{u}}$ versteht sich als die Sensitivität der Ungleichgewichtskräfte \mathbf{r}^k bezogen auf die Verschiebungen \mathbf{u}^k . Multipliziert mit der inkrementellen Änderung $\Delta \mathbf{u}^k$ entspricht sie der Änderung von \mathbf{r}^k im Iterationsschritt. [5]

Um die Konsistenz der Linearisierungen von \mathbf{u} in \mathbf{r} und von \mathbf{r} in \mathbf{u} nachzuweisen, setzen wir 3.6 in 4.37 ein:

$$\Delta \mathbf{u}^k = \mathbf{u}^k - \left(\frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \mathbf{r}^k - \mathbf{u}^k \quad (4.38)$$

$$\Delta \mathbf{u}^k = - \left(\frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \mathbf{r}^k \quad (4.39)$$

Setzten wir 4.39 in 4.36 ein erhalten wir:

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k + \frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{u}} \left[- \left(\frac{\partial \mathbf{r}^k}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \mathbf{r}^k \right] \quad (4.40)$$

$$\mathbf{r}^{k+1} = \mathbf{r}^k - \mathbf{r}^k = \mathbf{0} \quad (4.41)$$

4.41 bedeutet im Wesentlichen, dass das Residuum mit jeder Iteration gegen null konvergiert, wenn das Newton-Raphson-Verfahren konvergiert.

Für die Linearisierung von \mathbf{r} muss das Residuum partiell nach dem Verschiebungsvektor \mathbf{u} abgeleitet werden ($\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = J$).

Für den zweidimensionalen Fall ergibt sich die Matrix zu:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = EA \cdot L \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_1^2} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_1 \partial v_1} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_1 \partial u_2} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_1 \partial v_2} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v_1 \partial u_1} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v_1^2} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v_1 \partial u_2} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v_1 \partial v_2} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_2 \partial u_1} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_2 \partial v_1} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_2^2} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_2 \partial v_2} \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v_2 \partial u_1} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v_2 \partial v_1} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v_2 \partial u_2} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial v_2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial v_2^2} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

Im dreidimensionalen analog zu:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = EA \cdot L \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_1^2} & \dots & \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_1 \partial w_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial u_1} \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial u_1 \partial w_2} & \dots & \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial w_2} + \varepsilon \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial w_2^2} \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Mithilfe des hergeleiteten Iterationsverfahrens kann die Residualgleichung für den finiten Fachwerkstab gelöst werden. Entsprechend der Finite-Elemente-Methode werden die an den Knotenpunkten definierten Verschiebungsfreiheitsgrade den anliegenden Elementen zugewiesen. Die lokalen Residualvektoren der einzelnen Stabelemente werden in einem systematischen Prozess zusammengesetzt, um einen globalen Residualvektor zu erhalten. Dabei ist es unerlässlich die externen Kräfte erst nach der Assemblierung zu berücksichtigen und abzuziehen. Ein vorzeitiger Abzug dieser Kräfte auf der Elementebene könnte zu Fehlern führen, indem die äußeren Kräfte im Knotengleichgewicht mehrfach berücksichtigt werden. Des Weiteren werden die individuellen Jacobimatrizen der Stäbe kohärent in eine übergeordnete, globale Jacobimatrix integriert. [8]

4.3. Lineares Dehnmaß

In der Elementformulierung für den geometrisch Nichtlinearen Fachwerksstab wird, analog zur Herangehensweise in Abschnitt 4.2, das Prinzip der virtuellen Arbeit mittels virtueller Verschiebungen verwendet. Obwohl die zugrundeliegenden Theorien, Annahmen und Vereinfachungen unverändert bleiben, gibt es Unterschiede in Bezug auf das verwendete Dehnmaß. Daher gelten die Gleichungen 4.11 und 4.3 für virtuelle Arbeiten, wie sie bereits in Abschnitt

4.2 dargestellt wurden, auch in diesem Kontext:

$$\delta W_{\text{int}} = EA \int_0^L \varepsilon \cdot \delta \varepsilon dx$$

$$\delta W_{\text{ext}} = \sum_i F_i \cdot \delta u_i$$

In der geometrisch linearen Betrachtung wird ein proportionaler Zusammenhang zwischen der Änderungsrate der Verschiebung, bezogen auf die Länge, und der Dehnung ε angenommen [9].

$$\varepsilon = u' = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.44)$$

Um die Änderungsrate der Verschiebung bezüglich der Stablänge an jeder Position des Elements mithilfe der Verschiebung der Randknoten auszudrücken, werden lineare Polynomansätze gewählt. Da, wie in 4.1 beschrieben, der Stab nur den Ebenen Spannungszustand erfährt, kann die Fragestellung der Dehnung auf den eindimensionalen Fall reduziert werden. Dafür wird eine lokale Koordinate definiert, welche in Stabachsenrichtung orientiert ist. Die Verschiebungen der Knotenpunkte erfolgen in Richtung dieser Koordinatenachse.



Abbildung 1 Die eindimensionale Koordinate und die Knotenverschiebungen, Thomas Alberti

Um nun die Verschiebung über die Stablänge in Abhängigkeit der Verschiebungen u_1 und u_2 approximativ darzustellen, werden die Zustände $u_1 = 0 \wedge u_2 = 1$ sowie $u_1 = 1 \wedge u_2 = 0$ getrennt betrachtet. Die linearen Approximationen N_1 und N_2 der Zustände werden mit der jeweils am Knoten gesetzten Verschiebung skaliert. Superpositioniert ergibt sich dann die gesuchte Verschiebung im Stab in Abhängigkeit der Koordinate und den Punktverschiebungen.

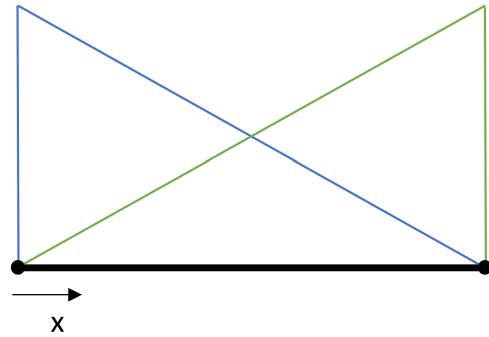


Abbildung 2 In blau Zustand $u_1 = 1 \wedge u_2 = 0$ und grün Zustand $u_1 = 0 \wedge u_2 = 1$, Thomas Alberti

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (4.45)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (4.46)$$

Skaliert und superpositioniert ergibt sich dann die Verschiebung zu:

$$u(x, u_1, u_2) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \cdot u_1 + \frac{x}{L} \cdot u_2 \quad (4.47)$$

Angewandt auf die Näherung von 4.44 ergibt sich demnach die Dehnung zu:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \left(-\frac{1}{L}\right) \cdot u_1 + \frac{1}{L} \cdot u_2 = \frac{1}{L} \cdot (u_2 - u_1) \quad (4.48)$$

Die virtuelle Dehnung ergibt sich analog zu:

$$\delta \varepsilon = \frac{1}{L} \cdot (\delta u_2 - \delta u_1) \quad (4.49)$$

Demnach gilt für die virtuelle innere Arbeit:

$$\delta W_{\text{int}} = EA \int_0^L \frac{1}{L} \cdot (u_2 - u_1) \cdot \frac{1}{L} \cdot (\delta u_2 - \delta u_1) dx \quad (4.50)$$

$$\delta W_{\text{int}} = \frac{EA}{L} \cdot (u_2 - u_1) \cdot (\delta u_2 - \delta u_1) \quad (4.51)$$

$$\delta W_{\text{int}} = \frac{EA}{L} \cdot (u_2 - u_1) \cdot \delta u_2 - \frac{EA}{L} \cdot (u_2 - u_1) \cdot \delta u_1 \quad (4.52)$$

Die Punktverschiebungen und Punktkoordinaten werden wie in 4.53 in einem Vektor zusammengefasst.

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2]^T \quad (4.53)$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T \quad (4.54)$$

Die virtuelle innere Arbeit sieht folglich in vektorieller Schreibweise wie folgt aus:

$$\delta W_{\text{int}} = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 - u_1 \end{bmatrix} \cdot \delta \mathbf{u} \quad (4.55)$$

Nach dem Zusammenhang aus der virtuellen Arbeit und den Kraftvektoren aus 4.29 ergibt sich der Residualvektor zu:

$$\mathbf{r} = \frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} u_1 - u_2 \\ u_2 - u_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Bei der geometrischen und materiellen Linearität, wie sie hier betrachtet wird, kann das nach dem Verschiebungsgrößenverfahren typische Gleichungssystem aus Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} , Kraftvektor \mathbf{f} und Verschiebungsvektor \mathbf{u} verwendet werden.

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (4.57)$$

Diese Herangehensweise harmoniert nahtlos mit der Betrachtung des Residualvektors und der Linearisierung innerhalb der Newton-Raphson Iteration. Es wird ersichtlich, dass die initiale Iteration des Newton-Raphson Verfahrens exakt mit dem herkömmlichen Gleichungssystem korrespondiert. Dies weiß Konsistenz beider methodischer Ansätze nach. Um die Iterationsvorschrift aus 4.36 durchzuführen muss die Jacobimatrix berechnet werden.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.58)$$

Für einen rigorosen mathematischen Nachweis, dass die erste Iteration der bekannten linearen Gleichung entspricht, wir die Rechenvorschrift basierend auf Gleichung 4.36 formuliert. Der Verschiebungsvektor entspricht in der ersten Iteration dem Nullvektor.

$$\frac{EA}{L} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{bmatrix} + \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad (4.59)$$

$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{u} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Aus der Gleichung 4.60 wird ersichtlich, dass dies dem bekannten Gleichungssystem entspricht, wobei

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \mathbf{f} = \begin{bmatrix} F_{x1} \\ F_{x2} \end{bmatrix} \text{ und } \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}$$

gilt.

Die Jacobimatrizen beziehungsweise Steifigkeitsmatrizen können nicht direkt gemäß der im Kapitel 4.2 genannten Methode assembliert werden. Das liegt daran, dass die Diskretisierung eines gesamten Fachwerks in globalen Koordinaten stattfindet, während die Elementformulierung der linearen Stäbe auf lokalen Koordinaten basiert. Deshalb wird eine Koordinatentransformation unabdingbar, um die jeweiligen Matrizen adäquat assemblieren zu können.

Wie die lokalen Koordinaten im globalen Raum orientiert sind ist abhängig von der Neigung des Elements. Die Neigung wird anhand des Winkels θ charakterisiert. Anhand von θ kann die erforderliche Rotationsmatrix \mathbf{T} wie folgt definiert werden:

$$\theta = \arctan\left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) \quad (4.61)$$

$$c = \cos(\theta) \quad (4.62)$$

$$s = \sin(\theta) \quad (4.63)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Die Rotationsvorschrift auf die lokale Steifigkeitsmatrix angewandt ergibt:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}_{\text{global}}} = \mathbf{T}^T \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}} \mathbf{T} \quad (4.65)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{u}_{\text{global}}} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Nach der Durchführung dieser Transformation ist die Steifigkeitsmatrix in globalen Koordinaten definiert. Dies ermöglicht das direkte Aufteilen äußerer Einzellasten in die globalen Richtungen und das Eintragen dieser Lasten in den Kraftvektor.

5. Software

Im Rahmen dieser Arbeit wurde eine Software entwickelt, die eine geometrisch nichtlineare Analyse von Fachwerksstrukturen ermöglicht. Diese Software bietet eine visuelle Schnittstelle, sowohl für die Eingabe, als auch für die Ausgabe der Ergebnisse. Das besagte Tool wurde zur öffentlichen Nutzung und Weiterentwicklung auf der Plattform GitHub bereitgestellt und kann unter der Bezeichnung "Hauptanwendung"¹ abgerufen werden. Ein signifikantes Merkmal dieser Software ist ihre Fähigkeit, Ergebnisse sowohl aus geometrisch nichtlinearen als auch aus linearen Berechnungen darzustellen, um Limitierungen der linearen Modellierung transparent zu machen.

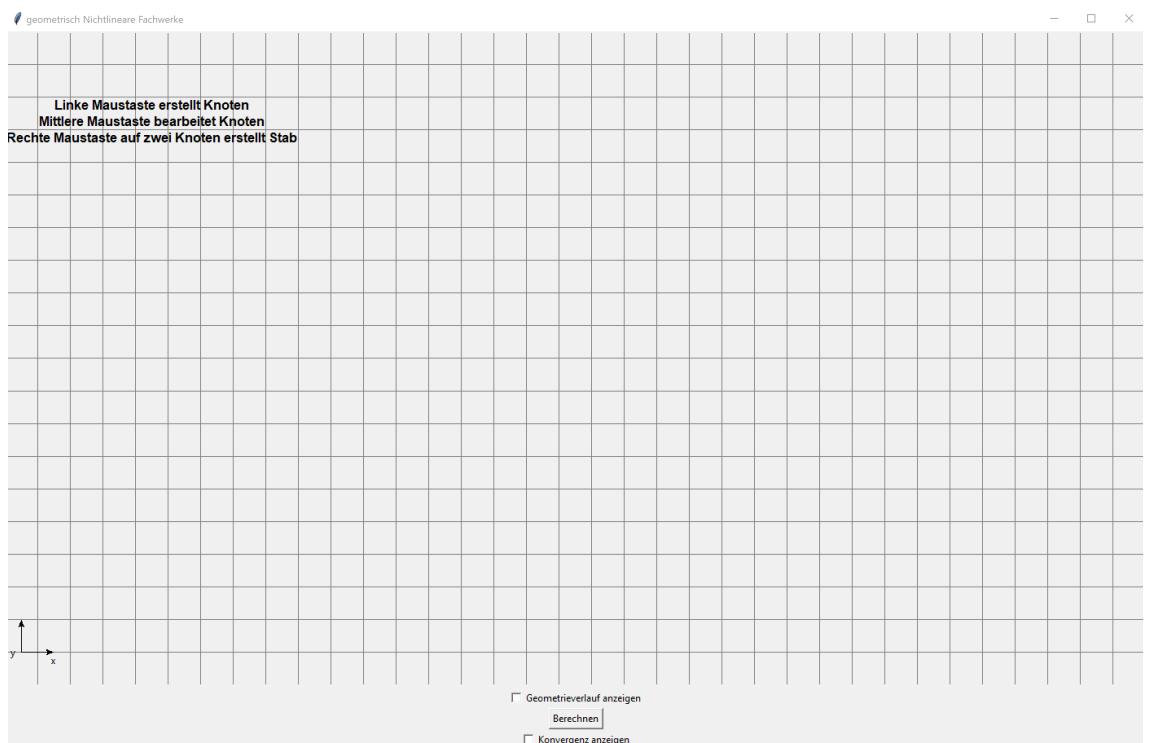


Abbildung 3 Startbildschirm, Thomas Alberti

Auf dem Startbildschirm wird ein kartesisches Rastersystem präsentiert. In der linken unteren Ecke sind die globalen Koordinatenachsen klar definiert. Die Beschriftung innerhalb des Rasters dient als didaktische Anleitung für den Anwender. Gemäß dieser Anleitung ermöglicht ein Klick mit der linken Maustaste die Generierung eines Knotenpunktes.

Bei Aktivierung mittels der linken Maustaste erscheint ein aufpoppendes Dialogfenster, welches die visuell detektierten Koordinaten in den bereitgestellten Eingabefeldern darstellt. Diese Koordinaten können bei Bedarf manuell modifiziert werden. Sollte keine Anpassung notwendig sein ermöglicht die Betätigung der Leertaste die Generierung eines Knotenpunktes, basierend auf den initial detektierten Koordinaten.

¹ <https://github.com/AlbertiTrussAnalysis/nonlinearTruss/blob/main/Hauptanwendung.py>

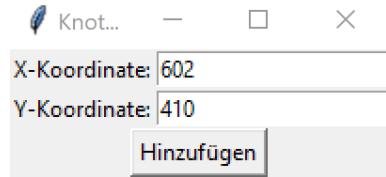


Abbildung 4 Pop-Up Fenster zum Erstellen von Knoten, Thomas Alberti

Nachdem die Knoten erstellt wurden können sie, durch Betätigen der Mittleren Maustaste, gelagert oder belastet werden. Dabei wird der Knotenpunkt zur Bearbeitung ausgewählt, welcher den minimalsten Abstand zum angeklickten Ort aufweist.

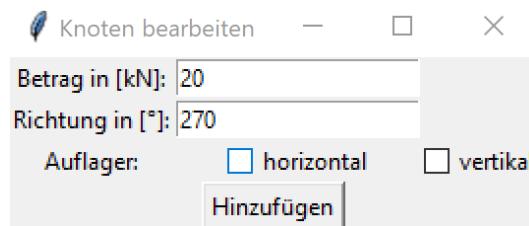


Abbildung 5 Pop-Up Fenster zum Bearbeiten von Knoten, Thomas Alberti

In dem Fenster können in den primären zwei Inputfeldern sowohl der Betrag, als auch die Richtung der extern auf den Knotenpunkt einwirkenden Kraft definiert werden. Im unteren Segment des Fensters ermöglichen selektierbare Checkboxen die Definition, sowohl einer horizontalen, als auch einer vertikalen Lagerung.

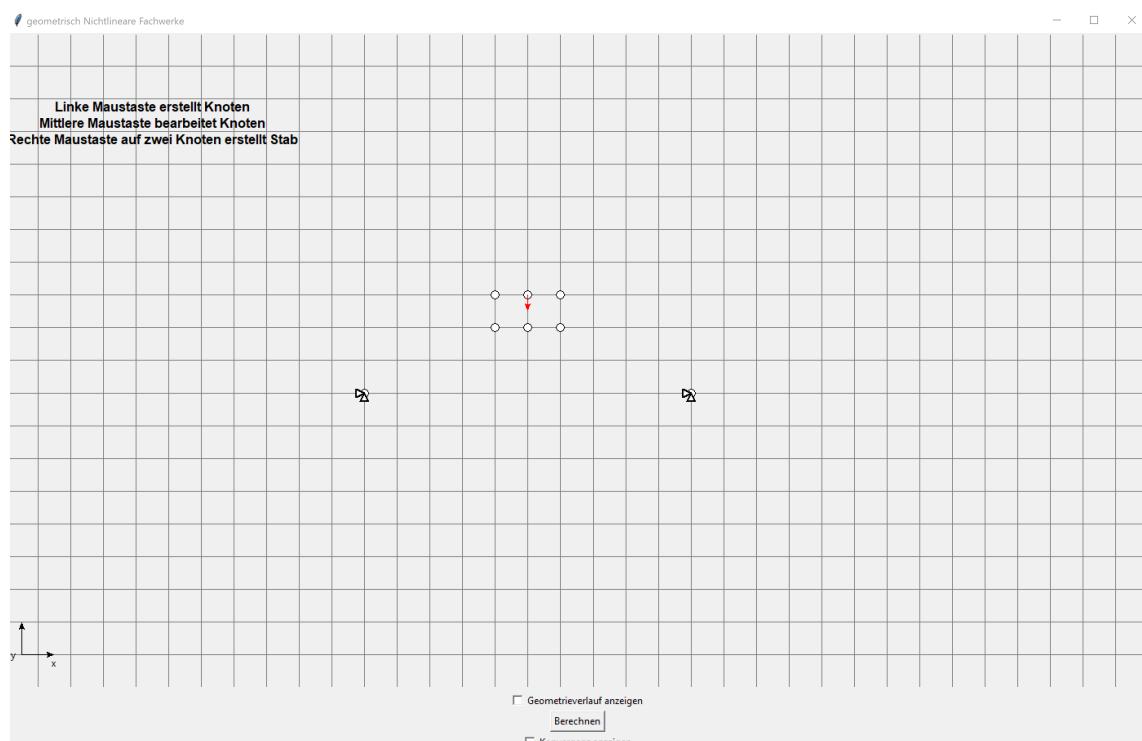


Abbildung 6 Die erstellten und bearbeiteten Knoten auf der Oberfläche, Thomas Alberti

Die roten Vektoren repräsentieren die Einzellasten, wobei die Orientierung des Vektors die Richtung der Kraft darstellt und die Länge des Vektors den Betrag dieser Kraft proportional wiedergibt. Die dargestellten Lagerungssymbole entsprechen den in der Statik etablierten Konventionen.

Die Generierung von Stäben zwischen den Knotenpunkten erfolgt durch die Betätigung der rechten Maustaste. Bei Auswahl von zwei distinkten Knotenpunkten öffnet sich ein zusätzliches Dialogfenster.

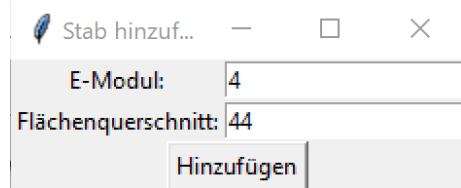


Abbildung 7 Pop-Up Fenster zum Erstellen von Elementen, Thomas Alberti

In den Eingabefeldern können die Werte des Elastizitätsmoduls (E-Modul) sowie des Flächenquerschnitts hinterlegt werden. Diese eingegebenen Parameter werden in einem Zwischenspeicher abgelegt. Beim Anlegen eines neuen Stabes werden die gespeicherten Werte im Eingabefeld präsentiert. Durch das Betätigen der Leertaste können die Nutzer direkt die vorgespeicherten Parameter übernehmen. Dies optimiert den Prozess der Staberstellung signifikant, insbesondere da in vielen Anwendungen Stäbe mit kongruenten Parametern verwendet werden.

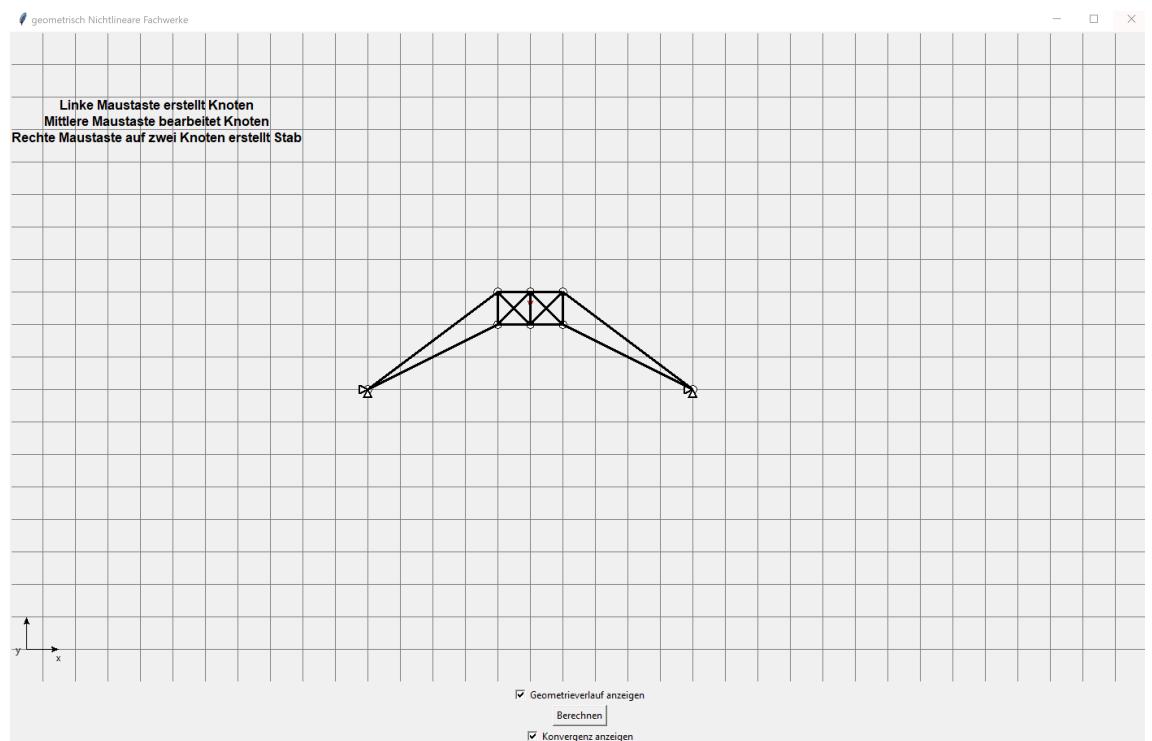


Abbildung 8 Das fertig implementierte Fachwerk, Thomas Alberti

Wie aus Abbildung 8 hervorgeht werden sowohl die einzelnen Elemente, als auch die Belastung und Lagerung der Knotenpunkte dargestellt.

Unmittelbar neben der Schaltfläche „Berechnen“ befinden sich Auswahlkästchen. Mit deren Hilfe kann der Anwender optional den geometrischen Verlauf und/oder die Konvergenz zusätzlich zur Edgegeometrie visualisieren.

Wird Berechnen gedrückt, obwohl es sich um ein kinematisches System handelt, erscheint folgendes Dialogfenster.

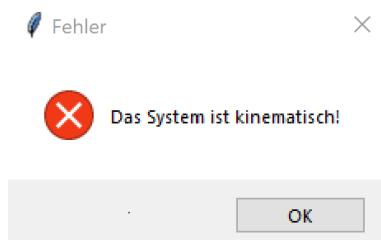


Abbildung 9 Das Dialogfenster bei kinematischen Fachwerken, Thomas Alberti

Um die Belastung präzise auszuwerten wird die Endlast in 100 feingliedrige Intervalle unterteilt und anschließend in einer iterativen Vorgehensweise sukzessive gesteigert. In jedem Lastschritt wird die Geometrie des vorherigen Schritts als Ausgangspunkt für die Linearisierung des Residualvektors herangezogen. Hierbei bleibt die Referenzgeometrie unverändert. Die Darstellung des geometrischen Verlaufs in sechs äquidistanten Intervallen illustriert, dass die Nutzung der vorangegangenen Geometrie als Startpunkt für den nächsten Lastschritt von essentieller Bedeutung ist. Das Erfordernis dieses Ansatzes, insbesondere bei beträchtlichen Verformungen, und die Gründe, warum nicht einfach die Referenzgeometrie als Ausgangsgeometrie genutzt werden sollte, werden im Kapitel 6.1.2 anhand eines Beispiels erläutert.

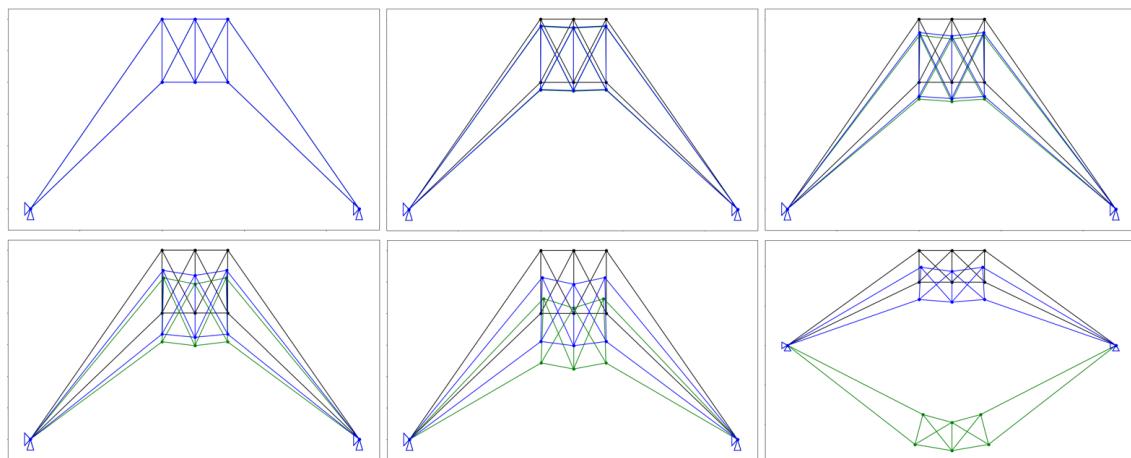


Abbildung 10 Geometrieverlauf der lineare Berechnung in grün und nichtlineare in blau, Thomas Alberti

Die in der Grafik präsentierte Analyse verdeutlicht eindrucksvoll die Unterschiede zwischen den beiden betrachteten Rechenmethoden. Insbesondere bei starken Deformationen zeigt sich, dass die lineare Berechnung an ihre Grenzen stößt und nicht mehr zulässig ist. Die sich daraus ergebenden Verschiebungsprofile unterscheiden sich zwischen den beiden Modellen erheblich. Dies hebt die kritische Bedeutung der Berücksichtigung geometrisch nichtlinearer Effekte bei derartigen Tragwerken hervor.

Bei der Untersuchung der Konvergenzeigenschaften fokussieren wir uns auf die Länge des Residualvektors, quantifiziert durch die zweite euklidische Norm, in Abhängigkeit von den Iterationsschritten. Die Norm dieses Vektors repräsentiert den Diskrepanzwert zwischen den inneren und äußeren Kräften des Systems. Sobald die Norm unter einen Wert von eins fällt ist die Erwartung, dass das Verfahren mindestens quadratisch konvergiert. Zur besseren Visualisierung und Analyse wird die Ordinate, welche die Residualnorm darstellt, logarithmisch skaliert. Eine Steigung von weniger als -2 in dieser Darstellung weist auf eine mindestens quadratische Konvergenz hin. Es ist essentiell nur Residuen kleiner als eins in diese Betrachtung einzubeziehen. Dies beruht auf der Tatsache, dass die lokale lineare Approximation des Verfahrens bei geringen Residuallängen eine erhöhte Genauigkeit aufweist. Zudem umgeht man potenzielle numerische Instabilitäten bei besonders großen Residuen. Das Auftreten erheblicher Residuen kann durch die Anwendung kleiner Intervalle, während der Laststeigerung, minimiert werden. Dies liegt daran, dass die durch die Startgeometrie induzierten inneren Kräfte einen Großteil der externen Belastung bereits kompensieren können. Für die Analyse wird eine lineare Regression auf Residuen mit einem Wert kleiner als eins angewendet, um den Konvergenzverlauf als Gerade zu approximieren und dadurch die durchschnittliche Konvergenzrate zu bestimmen. Bei Aktivierung des Kontrollkästchens visualisiert die Software die Konvergenz des 33. Lastschritts unter Anwendung der beschriebenen linearen Regression.

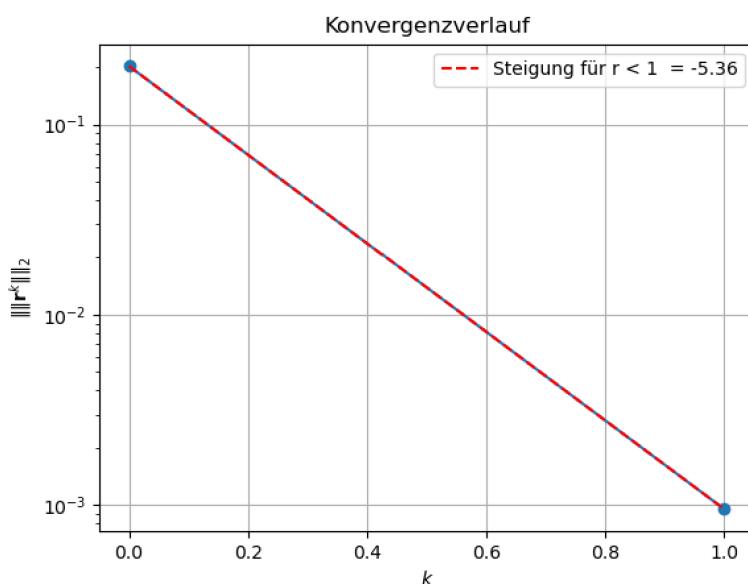


Abbildung 11 Konvergenzverlauf des 33. Lastschritts, Thomas Alberti

Das entwickelte Simulationsprogramm bietet umfassende Möglichkeiten zur weiterführenden Modifikation und Optimierung des Tragwerks. Hierbei können sowohl Knotenpunkte, als auch Stabelemente hinzugefügt oder modifiziert werden. Zudem besteht die Option bestehende Knotenpunkte mit bestimmten Lagerbedingungen zu versehen. Durch entsprechende Anpassungen kann das Tragwerk so optimiert werden, dass es externen Lasten effizienter widerstehen kann.

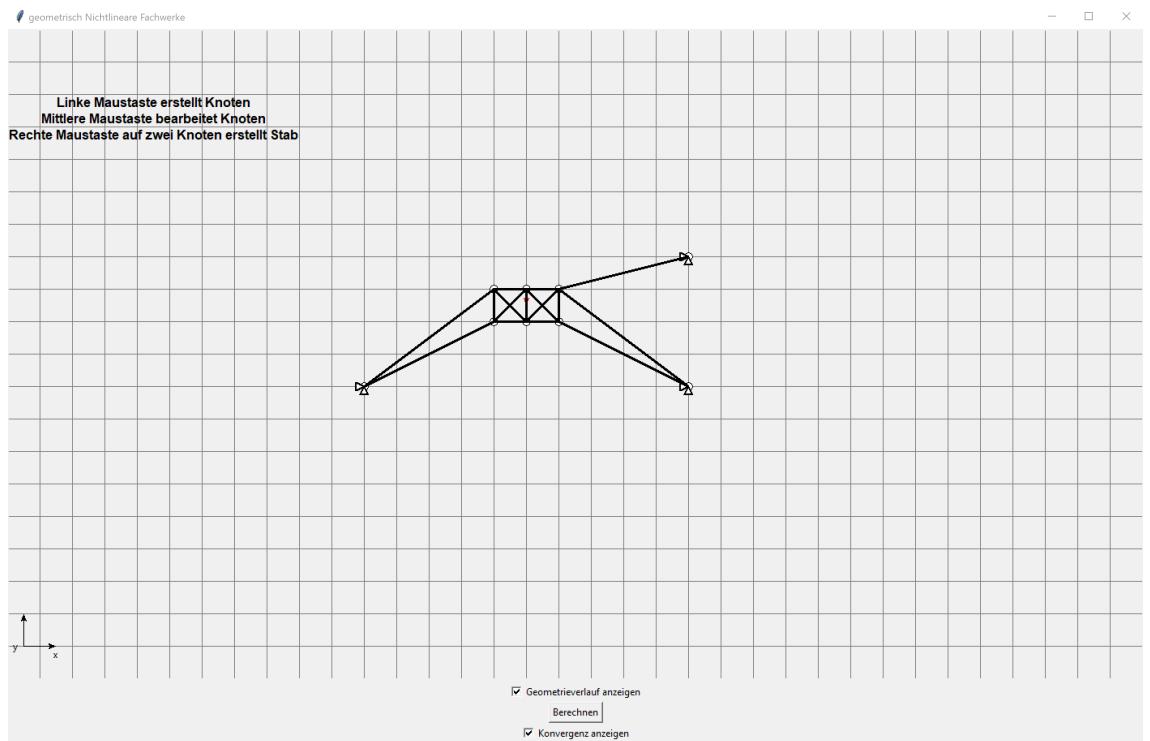


Abbildung 12 Optimiertes Strukturdesign des Tragwerks, Thomas Alberti

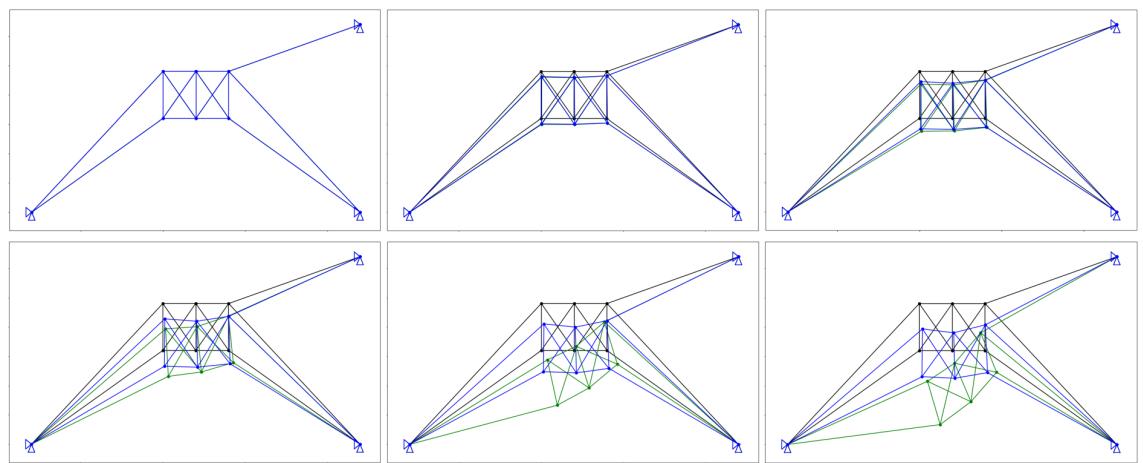


Abbildung 13 Geometrieverlauf der lineare Berechnung in grün und nichtlineare in blau, Thomas Alberti

Es ist bemerkenswert, dass trotz der fortgeschrittenen Verbesserungen, das Resultat aus linearer Theorie immer noch erhebliche Abweichungen von der nichtlinearen Analyse aufweist.

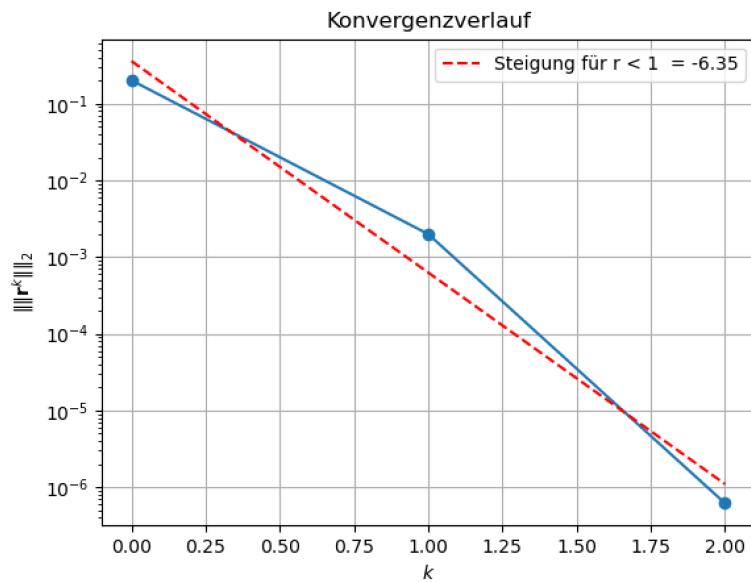


Abbildung 14 Aktualisierter Konvergenzverlauf des 33. Lastschritts, Thomas Alberti

Die quadratische Konvergenzrate wird auch für die modifizierte Struktur erreicht.

6. Benchmark

Um die Zuverlässigkeit und Genauigkeit des entwickelten Programms zu verifizieren ist die Durchführung von Benchmarks unabdingbar. Die Benchmarks dienen dazu die numerischen Ergebnisse des Programms mit analytischen Lösungen, oder mit Ergebnissen anderer etablierter Simulationssoftware, zu vergleichen.

6.1. Analyse mit Lastumschlag

Der Begriff Lastumschlag bezieht sich auf eine schlagartige Änderung der Geometrie einer Struktur unter Last. Dieses Phänomen ist besonders in der Analyse von nichtlinearen Systemen relevant, da es kritische Punkte im Last-Verformungsverhalten der Struktur offenlegt und somit für die Verifizierung von Simulationssoftware von Bedeutung ist.

6.1.1. Balken mit analytischer Lösung

Das betrachtete Tragwerk kann mit nur einem Freiheitsgrad diskretisiert werden, wodurch eine analytische Bestimmung des Kraft-Verschiebungsverlaufs am Knoten möglich ist.

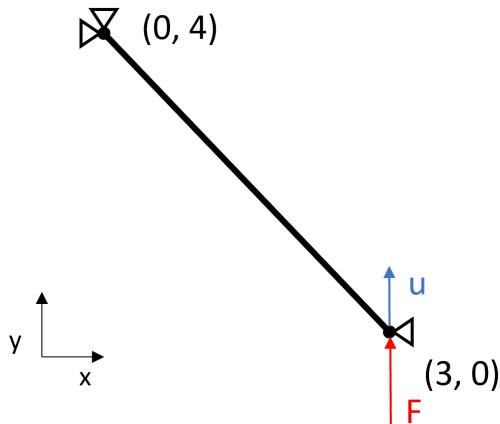


Abbildung 15 Statisch bestimmter Balken, Thomas Alberti

Neben den in Abbildung 15 gegeben Koordinaten gilt im Weiteren:

$$A = 4 \quad (6.1)$$

$$E = 20 \quad (6.2)$$

Wie in der Grafik veranschaulicht, wird Aufgrund der Lagerung nur eine Verschiebung diskretisiert. Die Residualgleichung aus 4.34 kann also folglich auf eine Dimension reduziert werden:

$$r = EA \cdot L \cdot \varepsilon_{\text{GL}} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u} - F = 0 \quad (6.3)$$

Zur Ermittlung der Dehnung wird die ursprüngliche Länge und die Länge nach der Deformation, mithilfe der Gleichungen aus 4.18 und 4.19, berechnet:

$$L = 5 \quad (6.4)$$

$$l = \sqrt{3^2 + (4 - u)^2} \quad (6.5)$$

Nach dem Green-Lagrange'schen Dehnmaß, wie in 4.13 beschrieben, kann die Dehnung bestimmt werden:

$$\varepsilon_{\text{GL}} = 0,5 \cdot \frac{3^2 + (4 - u)^2 - 5^2}{5^2} = \frac{(u - 8)u}{50} \quad (6.6)$$

Die Ableitung nach der Verschiebung ergibt:

$$\frac{\partial \varepsilon_{\text{GL}}}{\partial u} = \frac{u - 4}{25} \quad (6.7)$$

Die Residualgleichung ist demnach:

$$r = 4 \cdot 20 \cdot 5 \cdot \frac{(u - 8)u}{50} \cdot \frac{u - 4}{25} - F = 0 \quad (6.8)$$

Somit kann die Kraft in Abhängigkeit der Verschiebung ausgedrückt werden:

$$F(u) = \frac{8(u-8)(u-4)u}{25} \quad (6.9)$$

Durch Anwendung der Gleichung ist es möglich für einen gegebenen Verschiebungszustand der Struktur eine zugehörige Referenzbelastung zu identifizieren, welche den Residualvektor effektiv zu null reduziert. Die entwickelte Simulationssoftware erhöht die Belastung des Knotenpunktes in festgelegten Intervallen und ermittelt iterativ den korrespondierenden Verschiebungszustand. Es ist erforderlich, dass der vertikale Anteil der internen Kraft am belasteten Knotenpunkt betragsweise der externen Einzellast entspricht, um ein Residuum von null zu erreichen. Falls die Dehnung des Stabes durch eine Verkürzung seiner Länge nicht ausreicht, damit der vertikale Anteil der internen Kraft die Belastung kompensiert, vollzieht die Geometrie einen abrupten Übergang in einen Zustand, in dem eine Längenzunahme stattfindet. In diesem Zustand kann der benötigte vertikale Anteil der internen Kraft generiert werden.

In einem Tragwerk mit nur einem verschiebbaren Knoten ermöglicht die Analyse des Residualvektors des verschobenen und unbelasteten Systems, eine direkte Bestimmung der äußeren Lasten. Bei einer Deformation des Tragwerks resultieren aus den vorherrschenden Spannungszuständen interne Kräfte in den Stäben des Systems. Nach der Assemblierung der internen Kräfte in den Residualvektor entsprechen die jeweiligen Einträge den Einzellasten an den Knoten (mit Vorzeichenwechsel), welche es benötigt um die internen Kräfte auszugleichen und das System aus dem unverformten Zustand in die übergebene Symmetrie zu verschieben. Die Beziehung zwischen Deformation und Kraft kann also direkt ausgewertet werden, ohne, dass es einem Linearisierungsverfahren wie der Newton-Raphson Methode bedarf.

Ein System mit zwei oder mehreren verschiebbaren Knotenpunkten erhöht die Freiheitsgrade des Systems. Das Vorhandensein mehrerer Freiheitsgrade führt zu einer erhöhten Variabilität in den kinematischen Bedingungen des Systems. Konkret impliziert dies, dass eine spezifische Deformationskonfiguration durch mehrere Kombinationen von externen Lasten hervorgerufen werden kann. Dieses Mehrdeutigkeitsproblem bedeutet, dass das System im Hinblick auf die Bestimmung der äußeren Lasten nicht mehr eindeutig ist. Infolgedessen ist es nicht mehr möglich die äußeren Kräfte direkt aus dem Residualvektor abzuleiten, sowie es bei Systemen mit lediglich einem beweglichen Knoten der Fall ist. Weiterhin ist es erforderlich zu spezifizieren welche der Knoten belastet und unbelastet sind. Für die belasteten Knoten ist es unerlässlich die Zielkoordinaten exakt zu definieren. Die methodische Herangehensweise an diese Problematik wird detailliert im Abschnitt 6.1.2 erörtert.

Sollte es nicht möglich sein die Beziehung zwischen Kraft und Verschiebung als Funktion des jeweils anderen Parameters darzustellen, wird zur Entwicklung des gesamten Kraft-Verschiebungs-Pfads das Bogenlängenverfahren verwendet. Das Bogenlängenverfahren nutzt die geometrische Idee, dass die Bogenlänge zwischen zwei Punkten in einem Last-Verschiebungs-Diagramm konstant bleibt. Dafür wird ein zusätzlicher Parameter, die Bogenlänge s eingeführt, der sicherstellt, dass der Betrag des Inkrements in Last und Verschiebung einer vorgegebenen Größe entspricht. Indem man bei jedem Iterationsschritt die Bogenlänge konstant hält können das Gleichgewicht und die Kompatibilität über den gesamten nichtlinearen Pfad beibehalten werden. Die Methodik dieses Verfahrens wird im Rahmen dieser Arbeit nicht vertieft behandelt. [10]

Eine exemplarische Analyse eines Dreigelenktragwerks kann im Code [Balken](#)¹ eingesehen werden. Durch geschickte Ausnutzung der System- und Belastungssymmetrie lässt sich dieses Dreigelenktragwerk auf den hier diskutierten Balken reduzieren. Es ist zu beachten, dass das Dreigelenktragwerk den besagten Balken zweimal beinhaltet. Dementsprechend muss die aufgebrachte Kraft verdoppelt, beziehungsweise die berechnete Kraft halbiert werden, um eine Übereinstimmung mit dem analytischen Verlauf des Balkens zu gewährleisten.

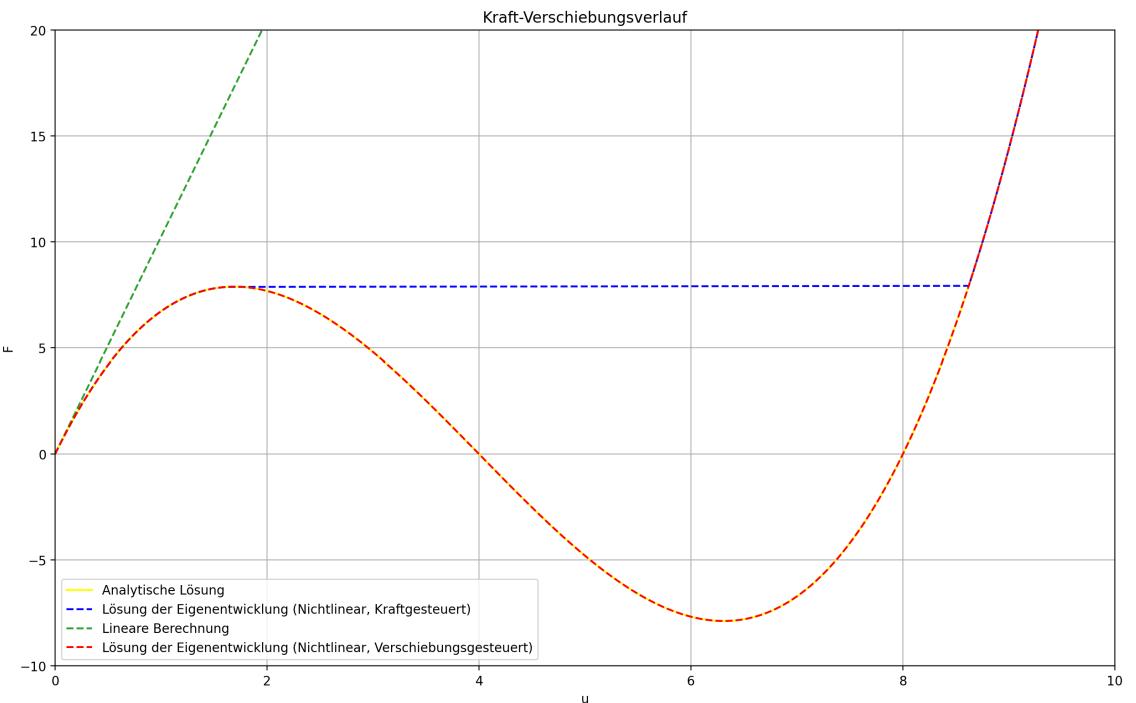


Abbildung 16 Kraft-Verschiebungsverlauf, Thomas Alberti

Aus der Grafik ist ersichtlich, dass der Lastumschlag bei $F = 7,8$ stattfindet. Die lineare Berechnung nach Theorie erster Ordnung ist, wie zu erwarten, nur für sehr kleine Verschiebungen beziehungsweise Belastungen annehmbar. Der vierte Eintrag des Residualvektors entspricht der vertikalen Belastung des freien Knotens mit gewechseltem Vorzeichen, wie der Vergleich mit der analytischen Lösung zeigt.

¹ <https://github.com/AlbertiTrussAnalysis/nonlinearTruss/blob/main/Balken.py>

Neben der Analyse der Last-Verschiebungskurve stellt die Untersuchung der Konvergenzeigenschaften ein essentielles Kriterium dar, das auf eine korrekte Elementformulierung und Implementierung hinweist.

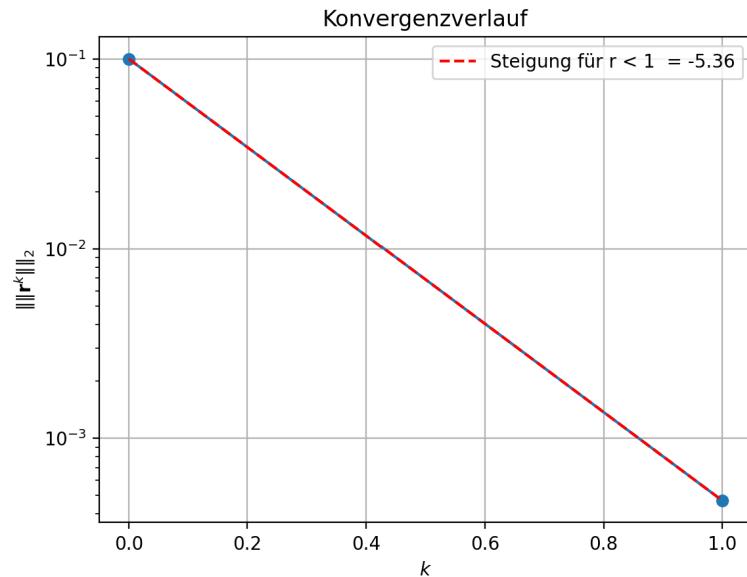


Abbildung 17 Konvergenzverhalten des Dreigelenktragwerks des 100. Lastschritts von insgesamt 300 Lastschritten, Thomas Alberti

Wie aus der Abbildung ersichtlich, erfüllt das untersuchte Fachwerk das Kriterium einer mindestens quadratischen Konvergenz.

6.1.2. Zweidimensionaler kreisförmiger Fachwerkbogen

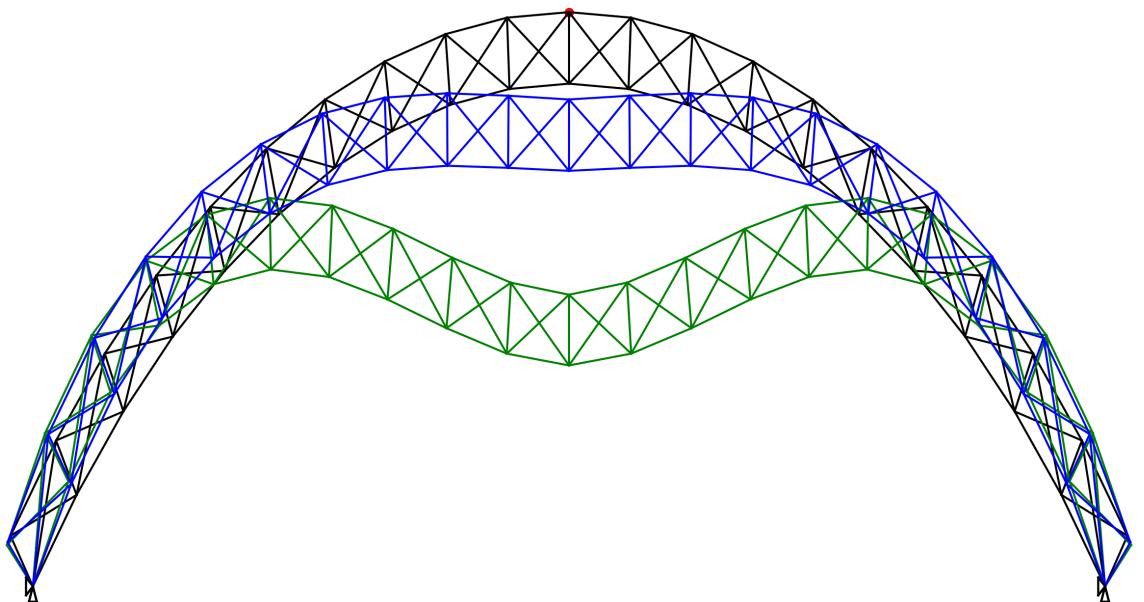


Abbildung 18 Der belastete und unbelastete Fachwerkbogen, Thomas Alberti

Der Fachwerkbogen setzt sich aus insgesamt 101 Stäben und 42 Knotenpunkten zusammen.

Dabei sind zwei dieser Knotenpunkte doppelt gelagert, wie aus der dazugehörigen Abbildung zu entnehmen ist. Die einzige Belastung ist eine vertikal nach unten wirkende Einzellast am Scheitelpunkt, dem roten Punkt der äußeren Konstruktion. Die exakten Koordinaten und Stabelemente können in der Textdatei "Koordinaten-Fachwerkbo**gen**"² nachvollzogen werden. Die Untersuchung des Fachwerks ist in der Python-Datei "Fachwerkbo**gen**".³ zu finden. Es gilt:

$$A = 0.01 \quad (6.10)$$

$$E = 5 * 10^9 \quad (6.11)$$

Des Weiteren illustriert die in grün dargestellte Verformung des Tragwerks den Zustand unmittelbar vor dem ersten Lastumschlag. Die in blau gezeigte Darstellung repräsentiert hingegen die lineare Vergleichsverformung, welche unter identischer Belastung entsteht. Danach wird der Last-Verschiebungspfad des belasteten Knotens analysiert und mit der Referenzsoftware von Mahmoud Zidan [11] gegenübergestellt.

Wie bereits in Kapitel 6.1.1 ausgeführt lässt sich für die verschiebungskontrollierte Berechnung die erforderliche Belastung des roten Knotens nicht unmittelbar aus dem Residualvektor ermitteln. Anstatt direkt auf den Residualvektor zuzugreifen wird bei der Startgeometrie (nicht Referenzgeometrie) das Tragwerk im gewünschten verschobenen Zustand betrachtet und der belastete Knoten, entsprechend seiner Belastungsrichtung, gelagert. Aufgrund der Symmetrie, sowohl in der Geometrie, als auch in der Belastung, kann der Knoten ebenso horizontal gelagert werden, ohne Auswirkungen auf das Ergebnis. Die initiale Geometrie, dargestellt auf der linken Seite, wird mittels des Newton-Raphson-Verfahrens analysiert, um eine Geometrie zu ermitteln, bei der die inneren Kräfte an den freien Knotenpunkten ausbalanciert sind und somit das System im Gleichgewicht ist. Diese Geometrie wird auf der rechten Seite dargestellt.

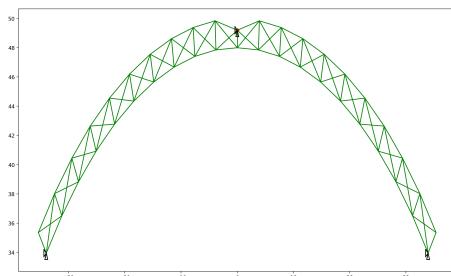


Abbildung 19 Initialgeometrie des Fachwerks, Thomas Alberti

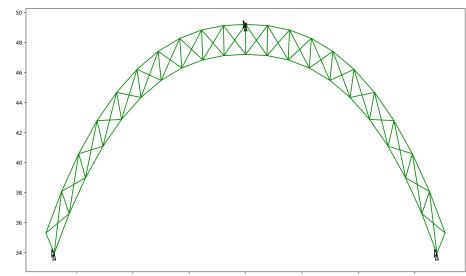


Abbildung 20 Geometrie im Gleichgewicht, Thomas Alberti

² <https://github.com/AlbertiTrussAnalysis/nonlinearTruss/blob/main/Koordinaten-Fachwerkbo%engen.txt>

³ <https://github.com/AlbertiTrussAnalysis/nonlinearTruss/blob/main/Fachwerkbo%engen.py>

Normalerweise wird der betrachtete Knoten deutlich weniger stark verschoben. Die Bedeutung dieser feinen Justierung wird im späteren Verlauf detailliert erörtert. Hier wurde eine große Verschiebung gewählt, um die Methodik besser zu veranschaulichen. Entfernt man das Auflager und kalkuliert den Residualvektor, basierend auf der aktuellen Geometrie, so entspricht der spezifische Eintrag im Vektor, der dem untersuchten Freiheitsgrad zugeordnet ist, jener Kraft (mit Vorzeichenwechsel), die von extern auf den Knoten appliziert werden muss, um die gegebene Geometrie zu realisieren und ein mechanisches Gleichgewicht zu erzielen. Diese methodische Vorgehensweise erlaubt es durch gezielte Setzung mehrerer Knoten in einem System mit einer Vielzahl von freien Knoten, präzise zu bestimmen wie die gesetzten Knoten belastet werden müssen.

Es ist von zentraler Bedeutung, dass in jedem Iterationsschritt der Last- oder Verschiebungszunahme, die Endgeometrie des vorangegangenen Schrittes als Startgeometrie für den folgenden Schritt verwendet wird. Dabei bleibt die Referenzgeometrie unverändert. Vor diesem Hintergrund wurde in der entwickelten Software besonderer Wert darauf gelegt, dass zur Bestimmung der Geometrie einer spezifischen Belastung, die Lastanwendung in inkrementellen Schritten erfolgt. Dies minimiert das Auftreten großer Residuen. Der Grund, warum erhebliche Residuen bei der kraftgesteuerten Methode zu fehlerbehafteten Ergebnissen führen können, wird in den nachstehenden Abbildungen dargelegt.

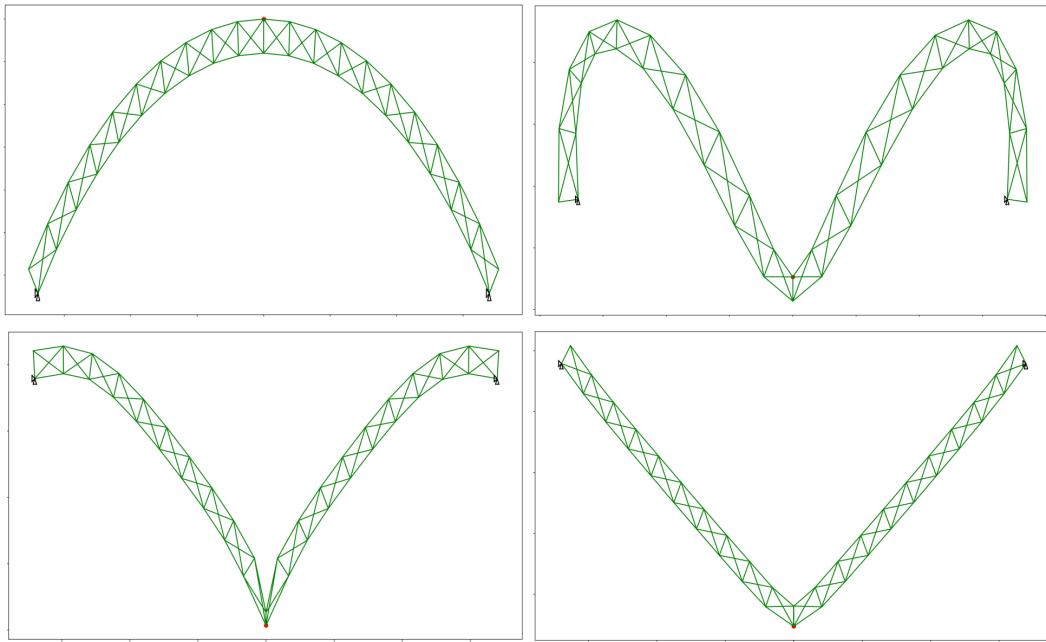


Abbildung 21 Geometrien aus den Iterationen der Linearisierung bei direkter Lastaufbringung, Thomas Alberti

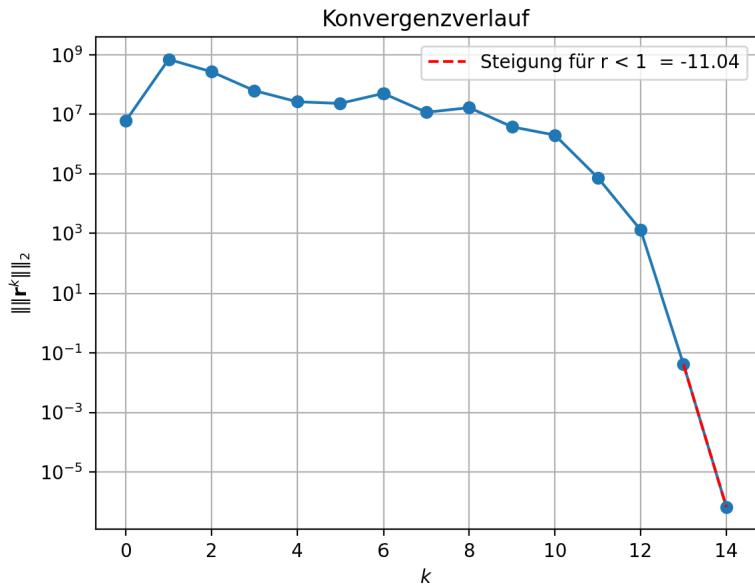


Abbildung 22 Konvergenzverlauf bei direkten Lastaufbringung von $0,6 \cdot 10^7$ N, Thomas Alberti

Aus dem Konvergenzverlauf geht hervor, dass der Residualvektor über viele Iterationen hinweg hohe Werte aufweist. Die Analyse des geometrischen Verlaufs zeigt, dass bei beträchtlichen Residuen die Linearisierung zu einer Geometrie führt, bei welcher der Knoten den zweiten Kraftumschlag vorzeitig vollzieht. Der zweite Kraftumschlag erfolgt, indem der belastete Knoten unter den darunterliegenden Knoten springt. Wenn diese Geometriekonfiguration erreicht wird reduziert sich das Residuum derart, dass seine Linearisierung den beschriebenen Sprung nicht mehr vollzieht. In diesem Zustand kann die zweite euklidische Norm des Residualvektors Werte unterhalb von 10^{-6} erreichen, aber sie fällt nicht unter 10^{-7} . Daraus folgt, dass das numerische Verfahren nicht konvergiert, wenn das Abbruchkriterium bei $\|\|r^k\|\|_2 < 10^{-6}$ angesetzt wird.

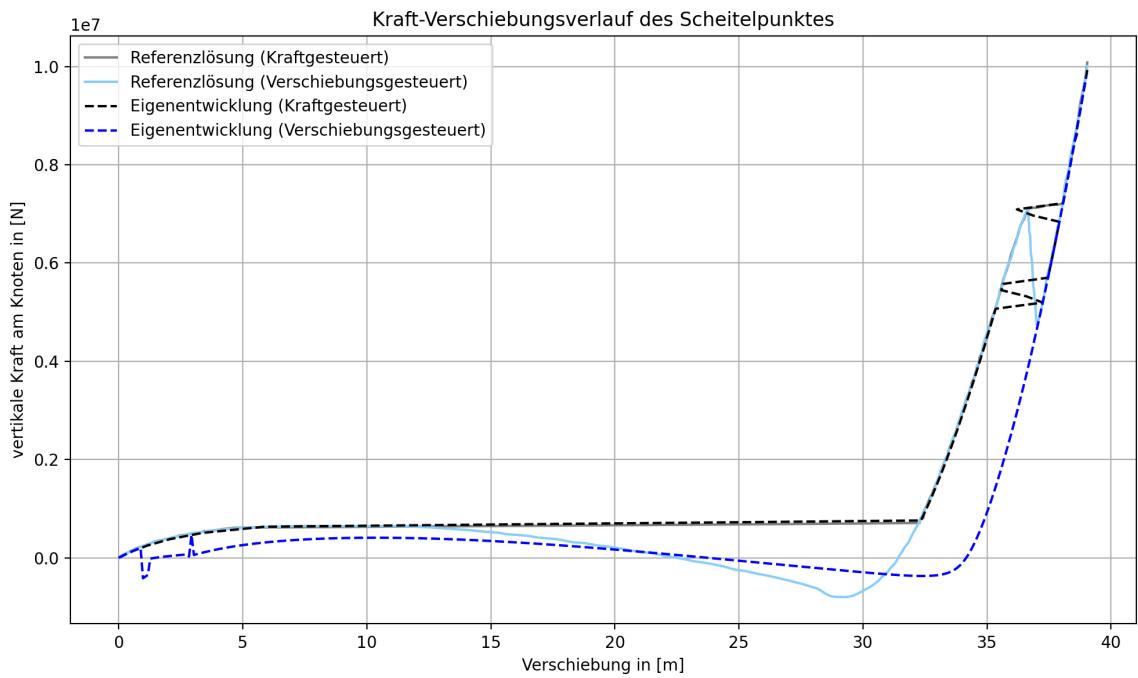


Abbildung 23 Kraft-Verschiebungsverläufe bei Verwendung der Referenzgeometrie als Initialgeometrie, Thomas Alberti

Bei Überprüfung der kraftgesteuerten Berechnung zeigt sich, dass das Ergebnis bis zu einer Kraft von $F = 5 \cdot 10^6$ akkurat ist. Bei der verschiebungsgesteuerten Methode hingegen lässt sich direkt feststellen, dass die Berechnung fehlerhaft ist.

Ein Verschieben des Knotens direkt in seine vorgesehene Position und dessen Fixierung führt rasch zu einer Geometrie, welche den zweiten Lastsprung induziert.

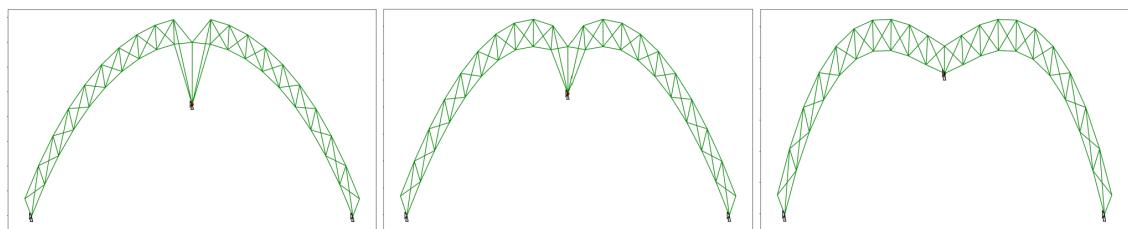


Abbildung 24 Beispielgeometriefehler bei zu hoher Inkrementverschiebung, Thomas Alberti

Der beobachtete Fehler manifestiert sich nicht ausschließlich bei der Verwendung der Referenzgeometrie als Ausgangsbasis. Er tritt ebenfalls auf wenn die Intervalle überdimensioniert sind, innerhalb derer die Verschiebung eskaliert wird. In Abbildung 19 ist eine Knotenverschiebung von 0,8 illustriert, um die angewandte Methodik zu verdeutlichen. Wird die Verschiebung auf 0,9 erhöht, so entsteht eine fehlerhafte Geometrie. Diese würde denselben Fehler aufweisen wie in Abbildung 24, bei dem der Knoten den zweiten Lastumschlag frühzeitig vollzieht. Daher ist bei der inkrementellen Verschiebung eine sorgfältige Auswahl adäquater Intervallgrößen nötig.

Sofern die diskutierten Fehlerquellen ausgeschlossen werden entspricht der Last-Verschiebungspfad der Referenzanalyse.

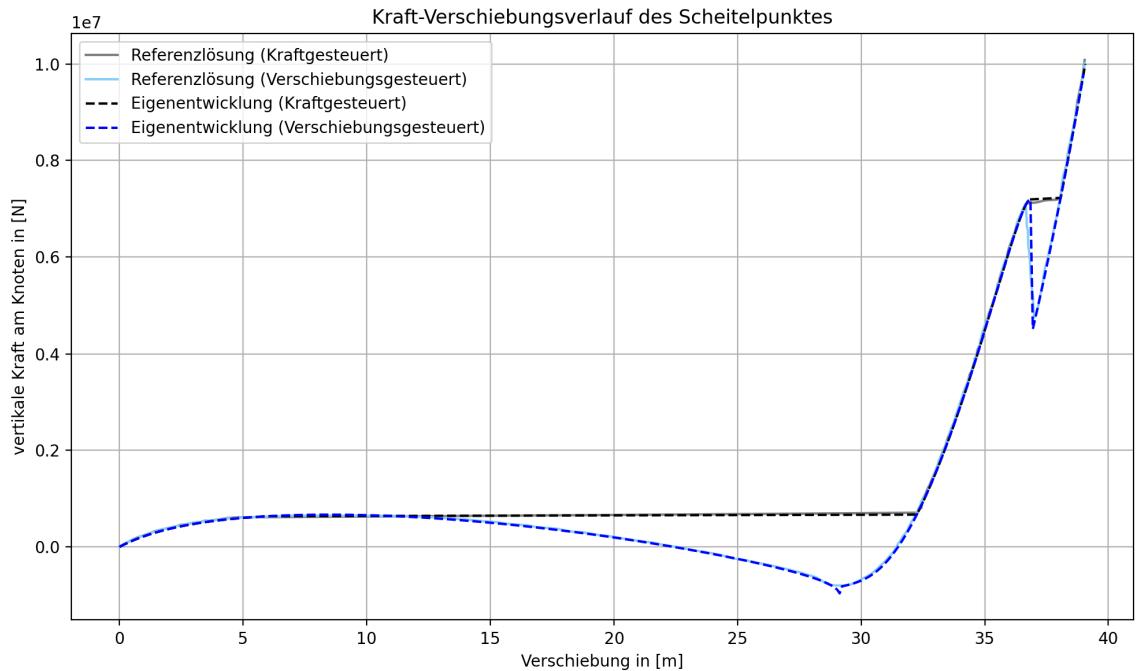


Abbildung 25 Last-Verschiebungspfad bei kleinen Intervallgrößen und korrekter Initialgeometrie, Thomas Alberti

Die beobachteten Diskrepanzen zwischen den Pfaden sind auf die Tatsache zurückzuführen, dass die Referenzkurve auf der Grundlage einer Bildapproximation erstellt wurde und keine absoluten Referenzwerte vorhanden waren.

6.2. Analyse bis Lastumschlag

Die im Folgenden vorgestellten Analysen werden mit den Referenzlösungen von A. Suleman und R. Sedaghati [12] gegenübergestellt. Die Analyse der Referenz wird exakt bis zu dem Punkt durchgeführt an dem ein Lastumschlag auftritt, oder um den entsprechenden Wert, wenn die Analyse verschiebungsgesteuert ist. In diesem Abschnitt gilt für alle Tragwerke:

$$E = 2068947572,8 \frac{kN}{m^2} \quad (6.12)$$

6.2.1. Unsymmetrisches Dreigelenktragwerk

Bei der Untersuchung dieses Tragwerks wurde sowohl in der Eigenentwicklung, als auch in der Referenzlösung, die kraftgesteuerte Analysemethode angewendet. Da die Referenzanalyse nur bis zum Lastsprung durchgeführt wird, würden die beiden Ansätze keine Differenzen in ihren Resultaten zeigen.

In den folgenden beiden Abbildungen können die Parameter des Fachwerks entnommen und die Last-Verschiebungsverläufe miteinander verglichen werden.

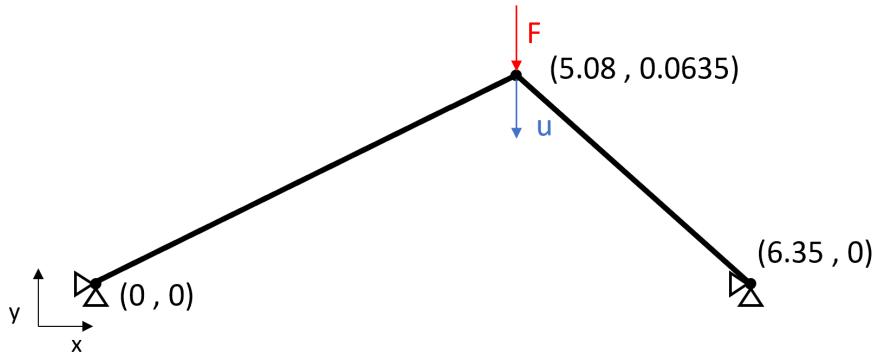


Abbildung 26 Die Diskretisierung, Belastung, Lagerung und Geometrie in [m] der Struktur, Thomas Alberti

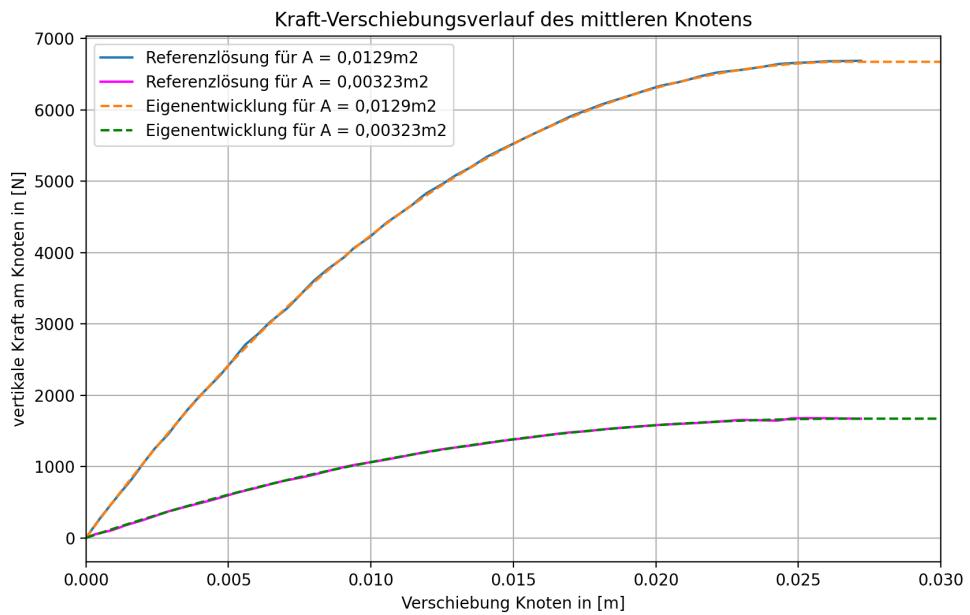


Abbildung 27 Der Kraftverschiebungsverlauf, in Abhängigkeit der Querschnittsfläche, Thomas Alberti

Wie erwartet, ist bei einer Erhöhung der Querschnittsfläche, bei gleichbleibender Belastung, eine reduzierte Verformung zu beobachten. Dies ist auf eine gesteigerte Steifigkeit des Systems bei größerem Querschnitt zurückzuführen.

6.2.2. Kuppel-Raumfachwerk

Das untersuchte Tragwerk ist durch eine Zusammensetzung von 30 Stäben und 19 Knotenpunkten charakterisiert. Hierbei sind 12 der Knotenpunkte dreifach gelagert. Die genauen Ko-

ordinaten und Stabelemente sind in der Textdatei "Koordinaten-Raumfachwerk"⁴ dokumentiert. Die systematische Untersuchung des Tragwerks kann in der Datei "Raumfachwerk"⁵ eingesehen werden. Um eine klare Unterscheidung zwischen den dreifach gelagerten und den freien Knoten zu gewährleisten, sind die erstgenannten durch ein schwarzes Rechteck markiert. In gestricheltem Schwarz ist die unverformte Geometrie zu erkennen. Die grüne Geometrie ergibt sich nach einer Belastung von 9 kN am obersten Punkt (höchster Z-Wert) der Konstruktion.

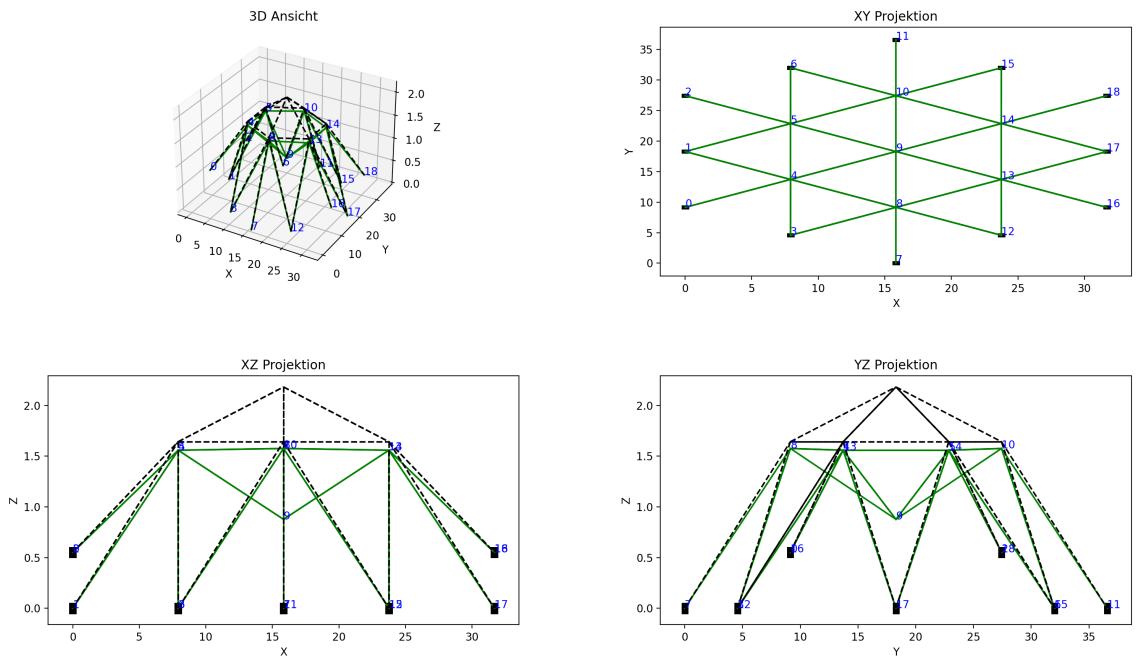


Abbildung 28 Die Geometrie des Fachwerk vor der Belastung (schwarz gestrichelt) und nach der Belastung von $F = 9 \text{ kN}$ (grün), Thomas Alberti

Es sei darauf hingewiesen, dass die Querschnittsflächen der Stäbe in der betrachteten Konstruktion nicht homogen verteilt sind. In den nachstehenden Darstellungen ist das Tragwerk in die XY-Ebene projiziert. Dabei repräsentieren die rot markierten Stäbe jeweils die in der Bildlegende angegebene Querschnittsfläche.

⁴ <https://github.com/AlbertiTrussAnalysis/nonlinearTruss/blob/main/Koordinaten-Raumfachwerk.txt>

⁵ <https://github.com/AlbertiTrussAnalysis/nonlinearTruss/blob/main/Raumfachwerk.py>

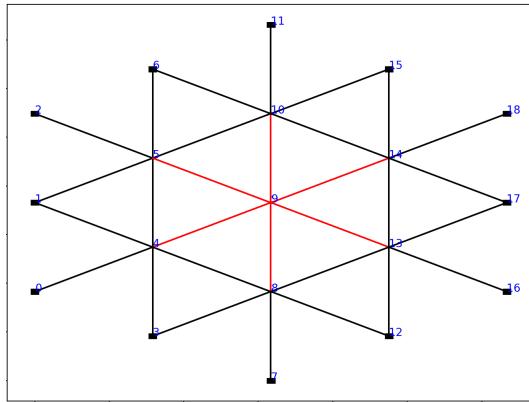


Abbildung 29 $A = 0.001091030076 \text{ m}^2$, Thomas Alberti

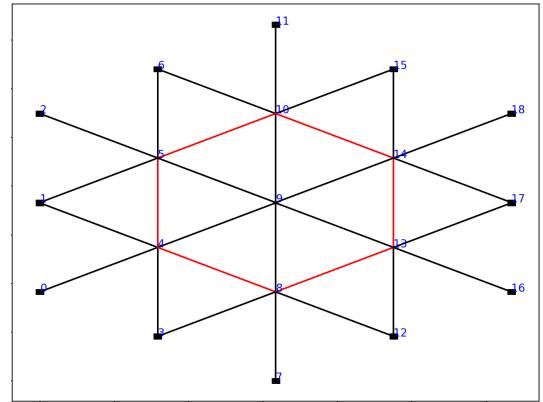


Abbildung 30 $A = 0.0008926434 \text{ m}^2$, Thomas Alberti

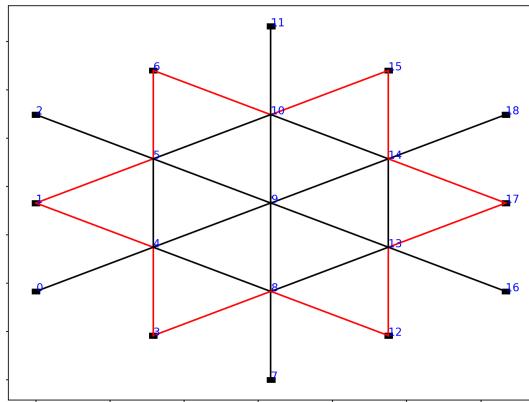


Abbildung 31 $A = 0.000064516 \text{ m}^2$, Thomas Alberti

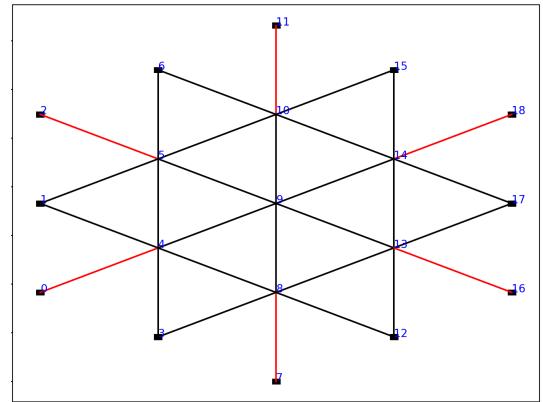


Abbildung 32 $A = 0.0001586448 \text{ m}^2$, Thomas Alberti

Zur Analyse des Fachwerks wurde sowohl die kraftgesteuerte, als auch verschiebungsgesteuerte Methode eingesetzt. Es ist zu beachten, dass die Referenzkurve durch eine Approximation einer Grafik gewonnen wurde, weshalb geringfügige Abweichungen auftreten können.

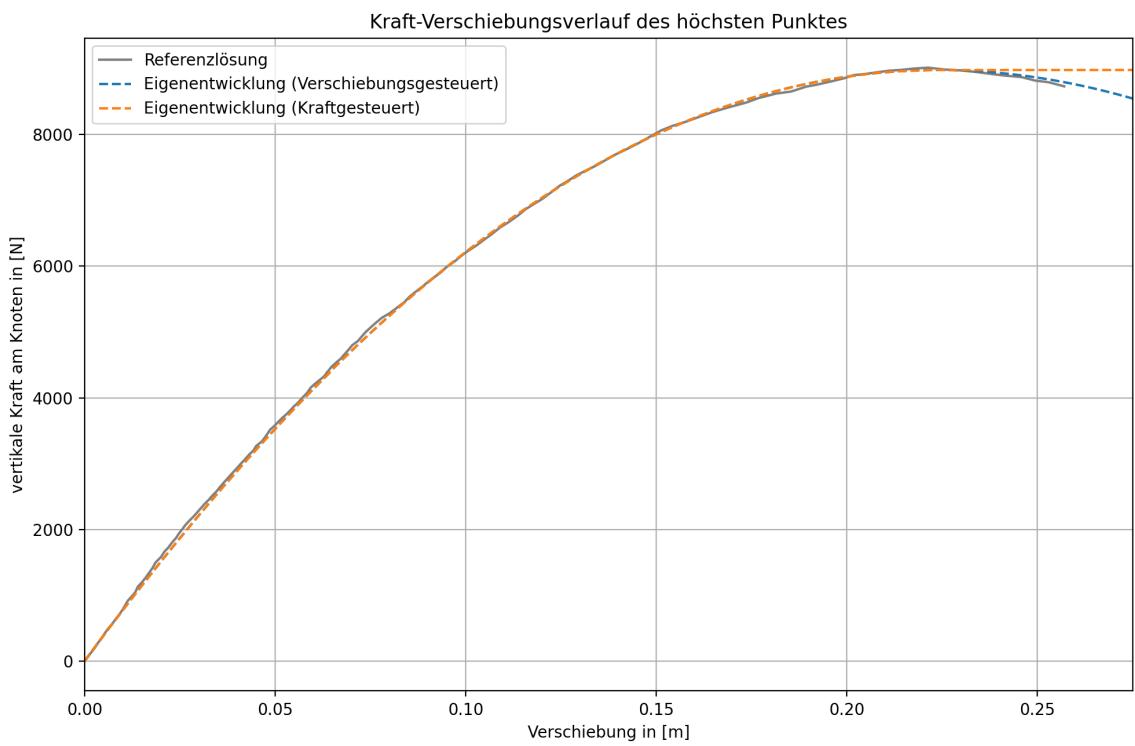


Abbildung 33 Kraft-Verschiebungspfad des Spitzenspunkts der Konstruktion, Thomas Alberti

Bei einer Last von 1500 N wurde eine Konvergenzanalyse durchgeführt. Für die Konvergenzanalyse wurde die angelegte Kraft in 50 diskreten Intervallen gesteigert.

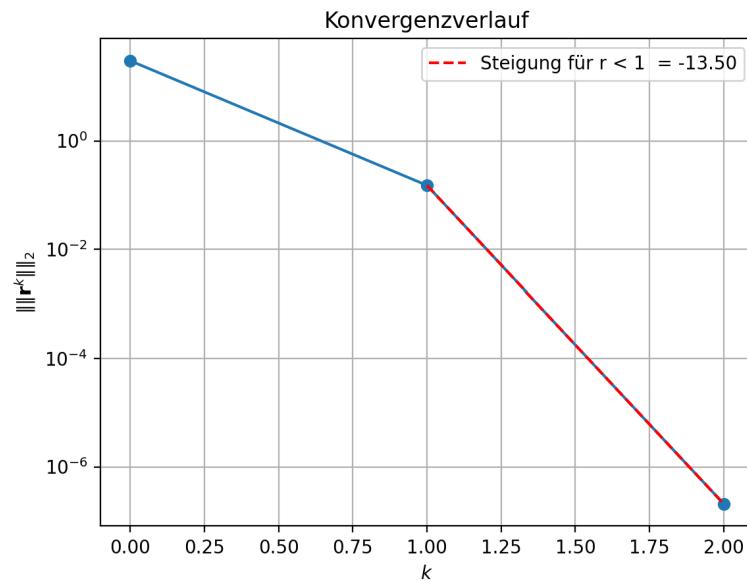


Abbildung 34 Konvergenzverhalten unter einer Last von 1500 N, aufgeteilt in 50 Intervalle, dargestellt vom letzten Lastschritt, Thomas Alberti

Wie der obigen Abbildung entnommen werden kann, zeigt das dreidimensionale Tragwerk nicht nur eine quadratische Konvergenzrate, sondern übertrifft diese sogar.

7. Zusammenfassung und Ausblick

In der Arbeit ist es gelungen das Kernprinzip der Finite-Elemente-Methode und dessen Methodik zu erläutert. Speziell wurde die Anwendung dieser Methode auf die Berechnung von Fachwerken, mittels des Verschiebungsgroßenverfahrens, herausgearbeitet. Bei der Elementformulierung des Fachwerkstabes wurde sowohl ein lineares, als auch ein nichtlineares Dehnmaß berücksichtigt. Des Weiteren wurde zwischen den Herleitungen in lokalen und globalen Koordinaten differenziert und die Methode der Koordinatentransformation von lokal zu global erläutert. Das Newton-Raphson-Verfahren wurde nicht nur hergeleitet, sondern auch spezifisch zur Minimierung des Residualvektors angepasst. Dabei wurde eine Linearisierung des Residualvektors im Hinblick auf den Verschiebungsvektor vorgenommen. Dieses Vorgehen erlaubt es die Konvergenzeigenschaften des Residualvektors genau zu analysieren, was wiederum ein entscheidendes Indiz für eine korrekte Elementformulierung und Implementierung liefert. Es wurde erfolgreich demonstriert, dass die durchgeführte Linearisierung des Verschiebungsvektors im Residualvektor konsistent mit der Linearisierung des Residualvektors im Verschiebungsvektor ist. Zudem wurde bestätigt, dass die Iterationsvorschrift des Newton-Raphson-Verfahrens und die Betrachtung des Residuals im Einklang mit dem typischen linearen Gleichungssystem ($\mathbf{Ku} = \mathbf{f}$) eines linearen Stabes steht. Der Leser wurde in die Nutzung, der im Rahmen der Arbeit entwickelten Software, eingeführt und erhielt zudem Anleitungen zur Interpretation der Ergebnisse anhand einer Beispielimplementierung. An Beispielen von Fachwerken wurden die Unterschiede zwischen last- und verschiebungsgesteuerten Rechenmethoden beleuchtet. Zudem wurden die Grenzen dieser Methoden erörtert und das Bogenlängenverfahren als Lösungsansatz für diese Grenzen vorgestellt. Am Beispiel eines statisch bestimmten Balkens wurde der mechanische Kontext des Lastumschlages erläutert. Zudem wurde die Methode der verschiebungsgesteuerten Berechnung eingeführt. Es wurde erläutert wie bei Fachwerken mit nur einem verschiebbaren Knoten die Kraft direkt aus dem Residualvektor abgeleitet werden kann. Der Kraft-Verformungsverlauf wurde mit einer analytischen Lösung gegenübergestellt. Am Beispiel eines Fachwerkbogens wurde die Methodik der verschiebungsgesteuerten Berechnung weiter ausgearbeitet. Dabei wurden potenzielle Fehlerquellen bei der Implementierung sowohl der kraft- als auch der verschiebungsgesteuerten Methode detailliert dargestellt und erörtert. Bei der kraftgesteuerten Methode lag der Fokus besonders auf den fehlerhaften Geometrien, welche durch die Linearisierung großer Residuen entstehen können. Solche großen Residuen treten auf, wenn als Ausgangsgeometrie die Referenzgeometrie des Tragwerks herangezogen wird. Bei der Anwendung der verschiebungsgesteuerten Methode wurde neben der Umgehung dieses Problems die Notwendigkeit kleiner Inkremente hervorgehoben, um ungewollte geometrische Fehler zu minimieren. Es wurde, neben den zweidimensionalen Tragwerken, auch an einem dreidimensionalen Tragwerk die quadratische Konvergenz nachgewiesen, welche indikativ für eine korrekte Elementformulierung und Implementierung ist.

In weiterer Folge könnte das Hauptprogramm um eine visuelle Ein- und Ausgabe der verschiebungskontrollierten Berechnung erweitert werden. Dabei würden die Knoten in kleinen Intervallen an ihre Zielposition verschoben werden. Es ist wichtig zu betonen, dass die Punkte nicht nacheinander, sondern simultan verschoben werden sollten, um die Möglichkeit fehlerhafter Geometrien zu verringern. Mögliche weitere Fehlerquellen in der Geometrie müssten noch erörtert und diskutiert werden. Zusätzlich könnte man die vorgestellte Green-Lagrange-Dehnung mit anderen Dehnmaßen, wie der Cauchy-Dehnung oder der Almansi-Dehnung, vergleichen. In dieser Arbeit wurde die Total Lagrange Formulierung angewandt, bei welcher die ursprüngliche, unverformte Geometrie als Referenz verwendet wird. Zusätzlich könnte die Updated Lagrange Formulierung angewandt und verglichen werden, bei der die verformte Geometrie nach jedem Berechnungsschritt als neue Referenz verwendet wird. Bei dieser Formulierung werden die in der Referenz vorhandenen Spannungen gespeichert, anstelle der unverformten Geometrie. [8]

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1	Die eindimensionale Koordinate und die Knotenverschiebungen, Thomas Alberti	15
Abbildung 2	In blau Zustand $u_1 = 1 \wedge u_2 = 0$ und grün Zustand $u_1 = 0 \wedge u_2 = 1$, Thomas Alberti	16
Abbildung 3	Startbildschirm, Thomas Alberti.....	21
Abbildung 4	Pop-Up Fenster zum Erstellen von Knoten, Thomas Alberti	22
Abbildung 5	Pop-Up Fenster zum Bearbeiten von Knoten, Thomas Alberti	22
Abbildung 6	Die erstellten und bearbeiteten Knoten auf der Oberfläche, Thomas Alberti	22
Abbildung 7	Pop-Up Fenster zum Erstellen von Elementen, Thomas Alberti	23
Abbildung 8	Das fertig implementierte Fachwerk, Thomas Alberti.....	23
Abbildung 9	Das Dialogfenster bei kinematischen Fachwerken, Thomas Alberti	24
Abbildung 10	Geometrieverlauf der lineare Berechnung in grün und nichtlineare in blau , Thomas Alberti.....	24
Abbildung 11	Konvergenzverlauf des 33. Lastschritts, Thomas Alberti	25
Abbildung 12	Optimiertes Strukturdesign des Tragwerks, Thomas Alberti.....	26
Abbildung 13	Geometrieverlauf der lineare Berechnung in grün und nichtlineare in blau , Thomas Alberti.....	26
Abbildung 14	Aktualisierter Konvergenzverlauf des 33. Lastschritts, Thomas Alberti.....	27
Abbildung 15	Statisch bestimmter Balken, Thomas Alberti	28
Abbildung 16	Kraft-Verschiebungsverlauf, Thomas Alberti	31
Abbildung 17	Konvergenzverhalten des Dreigelenktragwerks des 100. Lastschritts von insgesamt 300 Lastschritten, Thomas Alberti	32
Abbildung 18	Der belastete und unbelastete Fachwerkboegen, Thomas Alberti	32
Abbildung 19	Initialgeometrie des Fachwerks, Thomas Alberti	33
Abbildung 20	Geometrie im Gleichgewicht, Thomas Alberti	33
Abbildung 21	Geometrien aus den Iterationen der Linearisierung bei direkter Lastaufbringung, Thomas Alberti	34
Abbildung 22	Konvergenzverlauf bei direkten Lastaufbringung von $0,6 \cdot 10^7$ N, Thomas Alberti	35

Abbildung 23 Kraft-Verschiebungsverläufe bei Verwendung der Referenzgeometrie als Initialgeometrie, Thomas Alberti	36
Abbildung 24 Beispielgeometriefehler bei zu hoher Inkrementverschiebung, Thomas Alberti	36
Abbildung 25 Last-Verschiebungspfad bei kleinen Intervallgrößen und korrekter Initialgeometrie, Thomas Alberti.....	37
Abbildung 26 Die Diskretisierung, Belastung, Lagerung und Geometrie in [m] der Struktur, Thomas Alberti	38
Abbildung 27 Der Kraftverschiebungsverlauf, in Abhängigkeit der Querschnittsfläche, Thomas Alberti.....	38
Abbildung 28 Die Geometrie des Fachwerk vor der Belastung (schwarz gestrichelt) und nach der Belastung von $F = 9 \text{ kN}$ (grün), Thomas Alberti	39
Abbildung 29 $A = 0.001091030076 \text{ m}^2$, Thomas Alberti	40
Abbildung 30 $A = 0.0008926434 \text{ m}^2$, Thomas Alberti	40
Abbildung 31 $A = 0.000064516 \text{ m}^2$, Thomas Alberti	40
Abbildung 32 $A = 0.0001586448 \text{ m}^2$, Thomas Alberti	40
Abbildung 33 Kraft-Verschiebungspfad des Spitzenpunkts der Konstruktion, Thomas Alberti	41
Abbildung 34 Konvergenzverhalten unter einer Last von 1500 N, aufgeteilt in 50 Intervalle, dargestellt vom letzten Lastschritt, Thomas Alberti	41

Literaturverzeichnis

- [1] Horst Werkle. *Finite Elemente in der Baustatik: Statik und Dynamik der Stab- und Flächentragwerke*. Springer Fachmedien, Wiesbaden, 4 edition, 2021.
- [2] D'Arcy W. Thompson. *Über Wachstum und Form*. Wissenschaftliche Kultur. Birkhäuser, Basel, Stuttgart, 1973.
- [3] T. Angelopoulos. *Statische und dynamische Berechnung von vorgespannten Netzwerk-Konstruktionen (Olympia-Zeltdach): Kongress über Finite-Elemente-Methoden*. IKO Software Service, Baden-Baden, 1972.
- [4] G. Hirschfelder. *Der Trockenkühlturm des 300-MW-THTR-Kernkraftwerks in Schmehausen-Uentrop*. 1973.
- [5] Marcus Wagner. *Lineare und nichtlineare FEM: Eine Einführung mit Anwendungen in der Umformsimulation mit LS-DYNA*. Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature, Wiesbaden, 3 edition, 2022.
- [6] Prof. Dr.-Ing. Gerhard Müller. *Technische Mechanik 1, Teil 2 - Bauingenieure*. München, 2022.
- [7] Gerhard A. Holzapfel. *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. JOHN WILEY & SONS, LTD, Chichester, Weinheim, New York, Brisbane, Singapore, Toronto, 2000.
- [8] Ted Belytschko, Wing Kam Liu, Brian Moran, and Khalil I. Elkhodary. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. John Wiley & Sons, Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, United Kingdom, 2 edition, 2014.
- [9] Prof. Dr.-Ing. Kai-Uwe Bletzinger. *Statik Ergänzungsmodul*. Lehrstuhl für Statik, Technische Universität München, München, 2018.
- [10] Javier Bonet and Richard D. Wood. *NONLINEAR CONTINUUM MECHANICS FOR FINITE ELEMENT ANALYSIS*. Cambridge University Press, 2 edition, 2008.
- [11] Mahmoud Zidan. Two-dimensional circular truss-arch snapthrough, 2019.
- [12] A. Suleman and R. Sedaghati. *Benchmark case studies in optimization of geometrically nonlinear structures*. Springer-Verlag, 2005.