

Hawking輻射の機構

竹田 大地 (京都大学)

2020/8/26

Review : S. W. Hawking, "Particle Creation by Black Holes" *Commun. Math. Phys.* **43**, 199 (1975)

目次

1. イントロダクションと準備 (背景時空) (5)
2. 量子化とBogoliubov変換 (8)
3. 粒子の軌跡と粒子数 (5)
4. 結論とまとめ (1)

Hawking輻射とは

Hawking輻射とは

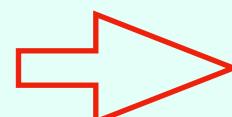
- ・ 星の球対称な重力崩壊によって、十分時間が経った後にBHから遠方への粒子の輻射が見られる現象。
- ・ 古典的にはBHは吸収はするが放出はしない。
→ 量子効果で輻射する
- ・ ブラックホールの温度を示唆(BH熱力学)

ストーリー

背景時空：星の外部はSchwarzschild時空

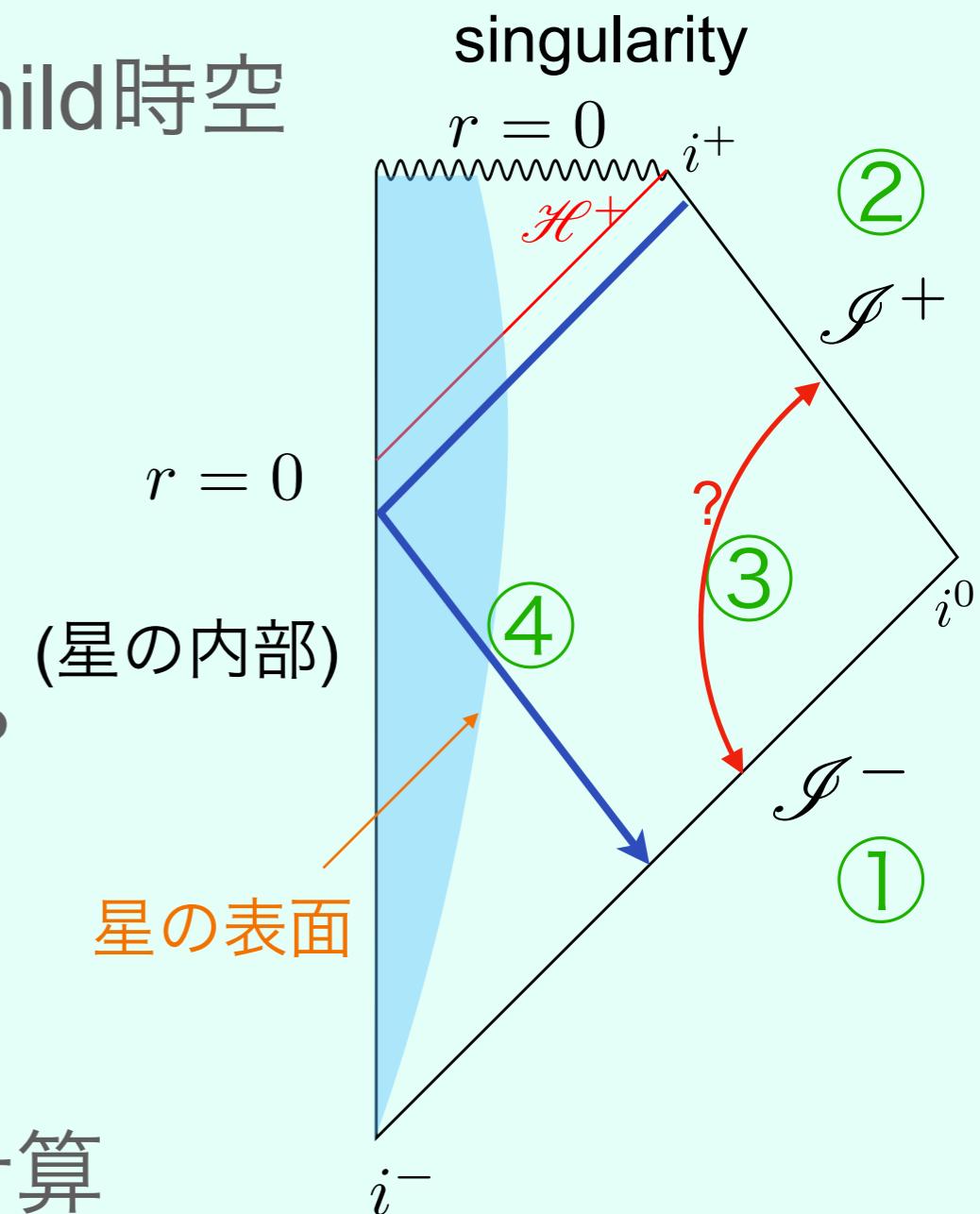
粒子：masslessスカラー場

- ① in状態を定義
- ② out状態を定義
- ③ in状態とout状態の間の変換は？
- ④ 粒子の軌跡を幾何光学近似で決定
- ⑤ モードごとに粒子数期待値を計算



$$N_\omega \propto \frac{1}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1} \quad (\text{Planck分布})$$

← ゴール



背景時空

Birkhoffの定理

球対称な解は星の外では
Schwarzschild計量になる

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 \\ & + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 \\ & + r^2 d\Omega^2 \end{aligned}$$

$$U = -e^{-(t-r^*)/4M}, \quad V = e^{(t+r^*)/4M}$$
$$(r^* = r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right))$$

Kruskal座標

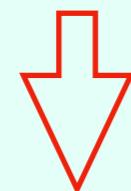
$$ds^2 = -\frac{32M^3}{r} e^{-r/2M} dUdV + r^2 d\Omega^2$$

背景時空

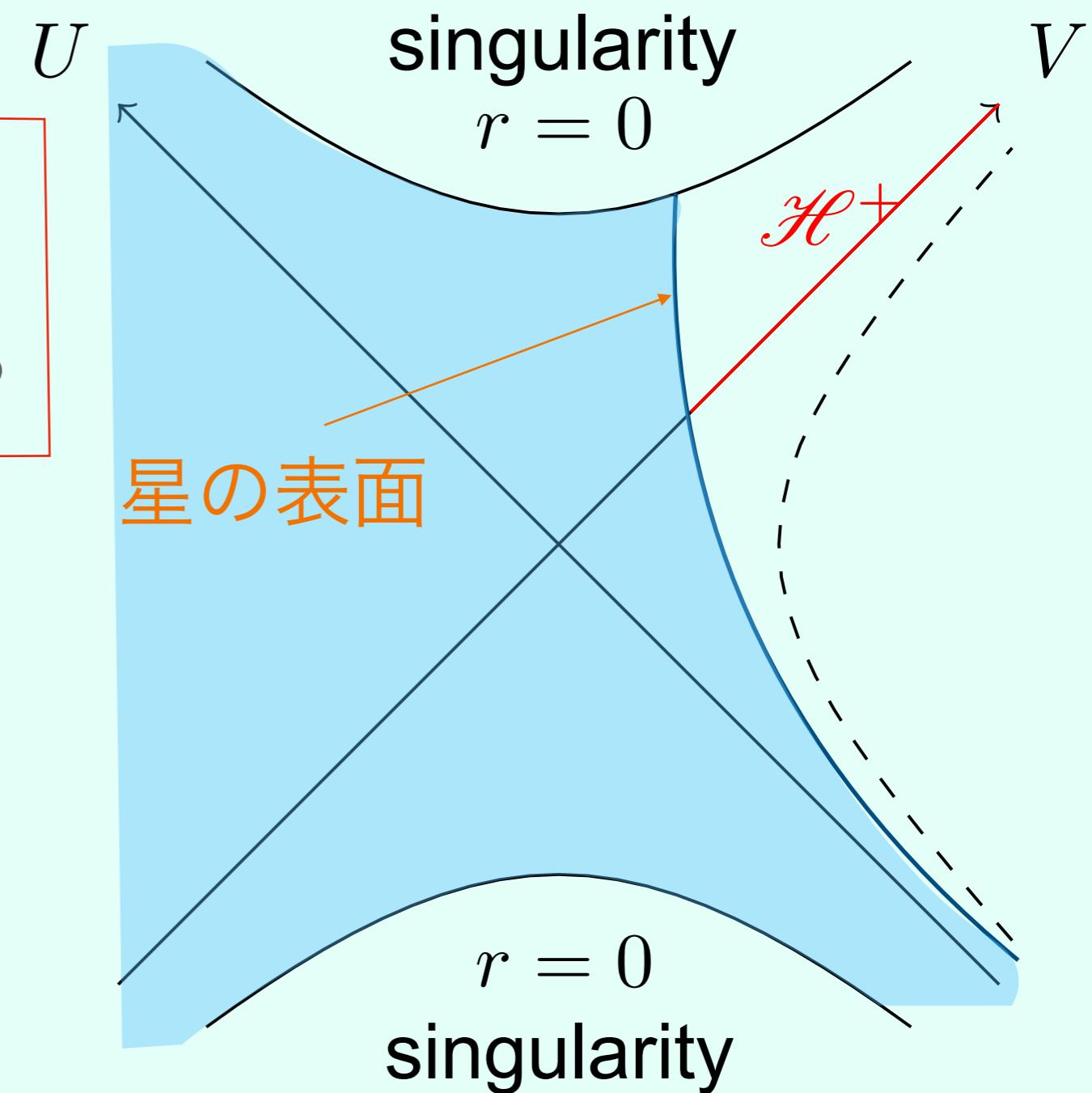
Birkhoffの定理

球対称な解は星の外では

Schwarzschild計量になる



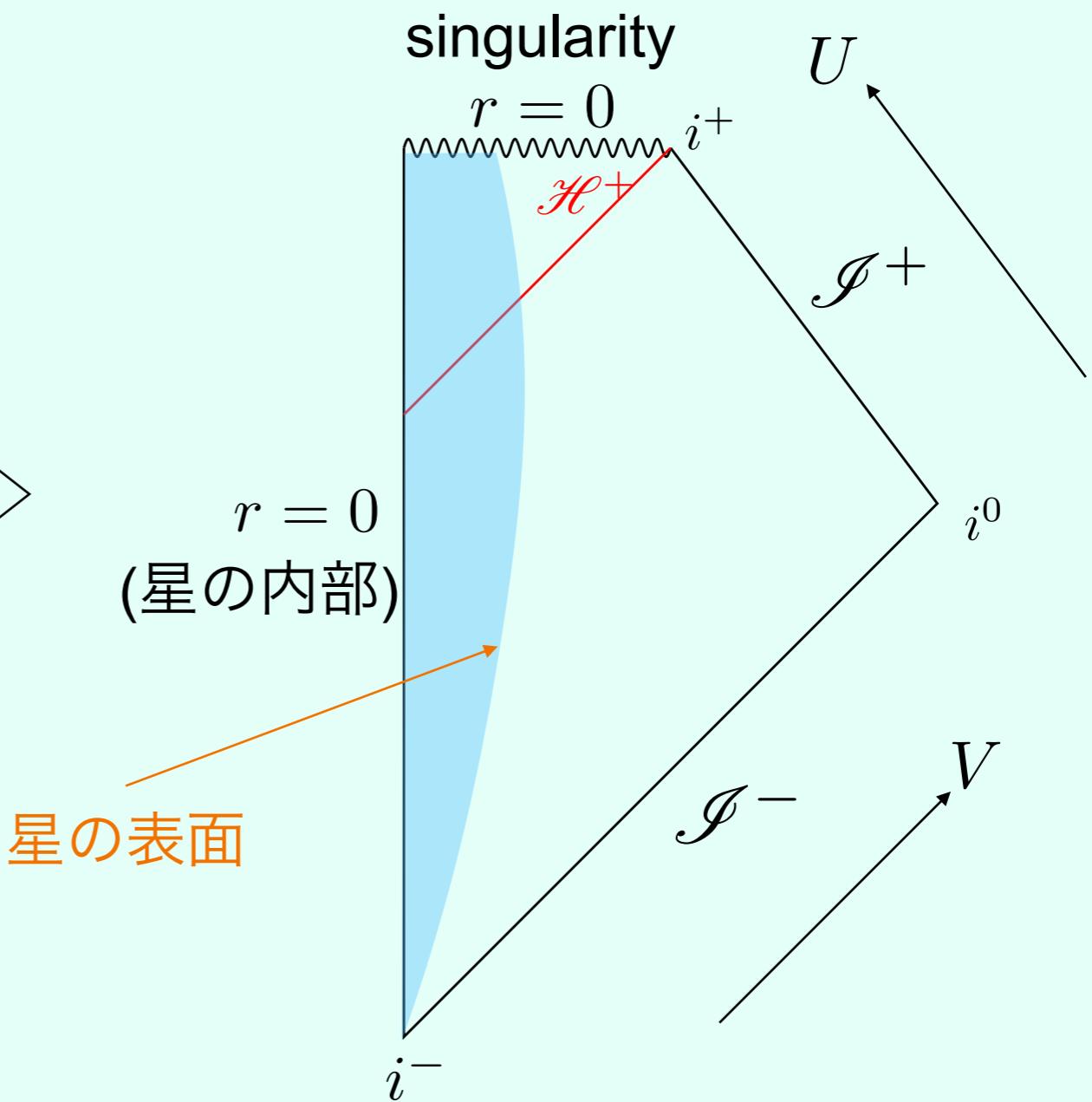
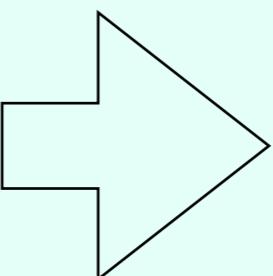
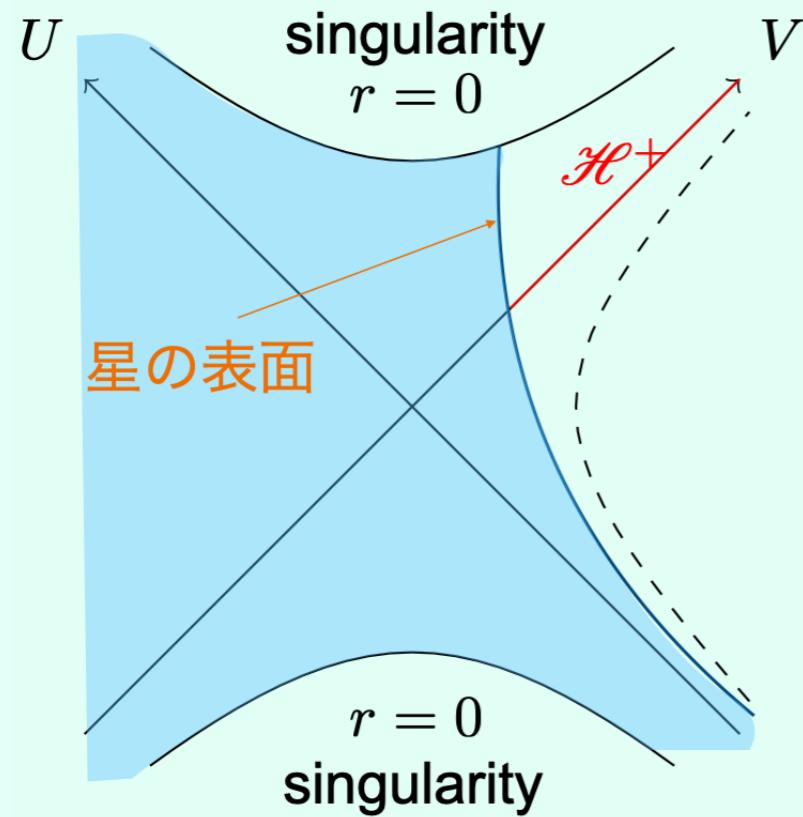
右のKruskal座標において
星の外部は正しい解
(内部は未知)



$\mathcal{H}^+ : r = 2M$
(future event horizon)

背景時空

星の内部の原点が縦線になるように時空をコンパクト化しておくと良い。



目次

1. イントロダクションと準備 (背景時空) (5)
2. 量子化とBogoliubov変換 (8)
3. 粒子の軌跡と粒子数 (5)
4. 結論とまとめ (1)

masslessスカラー場の量子化

- Klein-Gordon方程式 (massless scalar)

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi(x) = 0$$

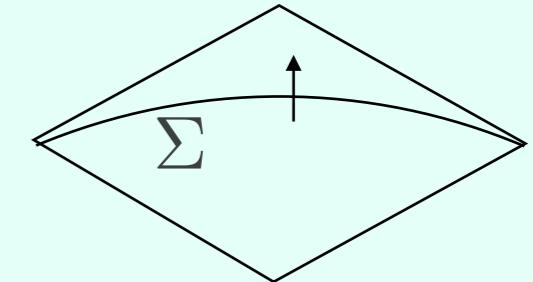
- Klein-Gordon内積

$$(f, g) \equiv i \int_{\Sigma} dS^\mu (f^* \partial_\mu g - (\partial_\mu f^*) g)$$

- 正エネルギー完全系 $\{f_I\}$:

$\{f_I\} \cup \{f_I^*\}$ が解空間の完全系

$$(f_I, f_J) = \delta_{IJ}, \quad (f_I^*, f_J) = 0$$



Σ :Cauchy
surface

$$I = (\omega, \ell, m)$$

量子化

$$\phi(x) = \sum_I (a_I f_I + a_I^\dagger f_I^*)$$

$$[a_I, a_J^\dagger] = \delta_{IJ}, \quad [a_I, a_J] = [a_I^\dagger, a_J^\dagger] = 0$$

Hilbert空間と粒子数

量子化

$$\phi(x) = \sum_I (a_I f_I + a_I^\dagger f_I^*)$$

$$[a_I, a_J^\dagger] = \delta_{IJ}, \quad [a_I, a_J] = [a_I^\dagger, a_J^\dagger] = 0$$



真空 $|0\rangle$ の定義 : $a_I |0\rangle = 0$

Hilbert空間 : $\mathcal{H} = \{|0\rangle, a_I^\dagger |0\rangle, a_I^\dagger a_J^\dagger |0\rangle, \dots\}$

粒子数演算子 : $N_I = a_I^\dagger a_I$

解の漸近形

Klein-Gordon方程式の漸近形

$$\nabla_\mu \nabla^\mu \phi(x) = 0$$



$$\phi = \frac{Y_{\ell m}}{r} \phi_{\omega\ell}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \phi_{\omega\ell} = 0 \quad (\text{on } \mathcal{H}^+, \mathcal{I}^+, \mathcal{I}^-)$$

$$v = t + r^*$$
$$u = t - r^*$$

→ $\phi_{\omega\ell} \sim e^{-i\omega v} \text{ or } e^{-i\omega u} \quad (\text{on } \mathcal{H}^+, \mathcal{I}^+, \mathcal{I}^-)$

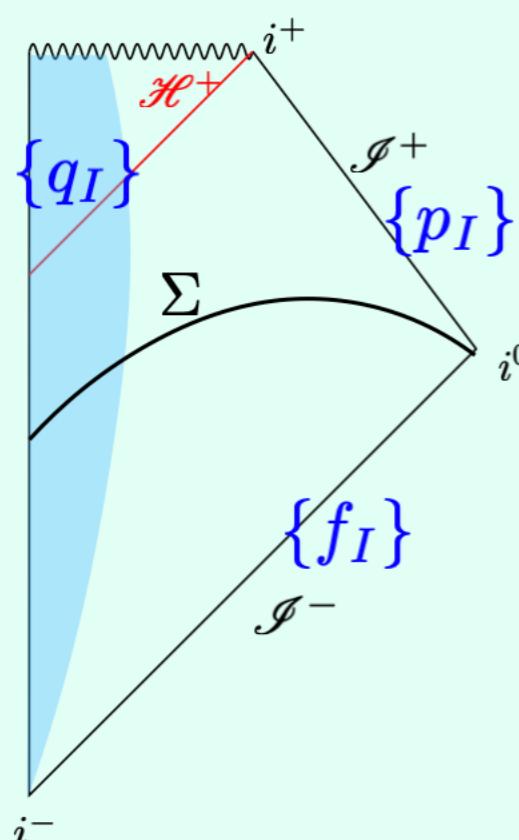
正エネルギー完全系

$\{f_I\} : f_I \sim e^{-i\omega v} Y_{\ell m} / r$ (on \mathcal{I}^-), 正エネルギー完全系

$$\{p_I\} : p_I \sim \begin{cases} e^{-i\omega u} Y_{\ell m} / r & (\text{on } \mathcal{I}^+) \\ 0 & (\text{on } \mathcal{H}^+) \end{cases}$$

) 合わせて
正エネルギー
完全系

$\{q_I\} : \Sigma = \mathcal{H}^+ \cup \mathcal{I}^+$ では \mathcal{H}^+ に台を持つ



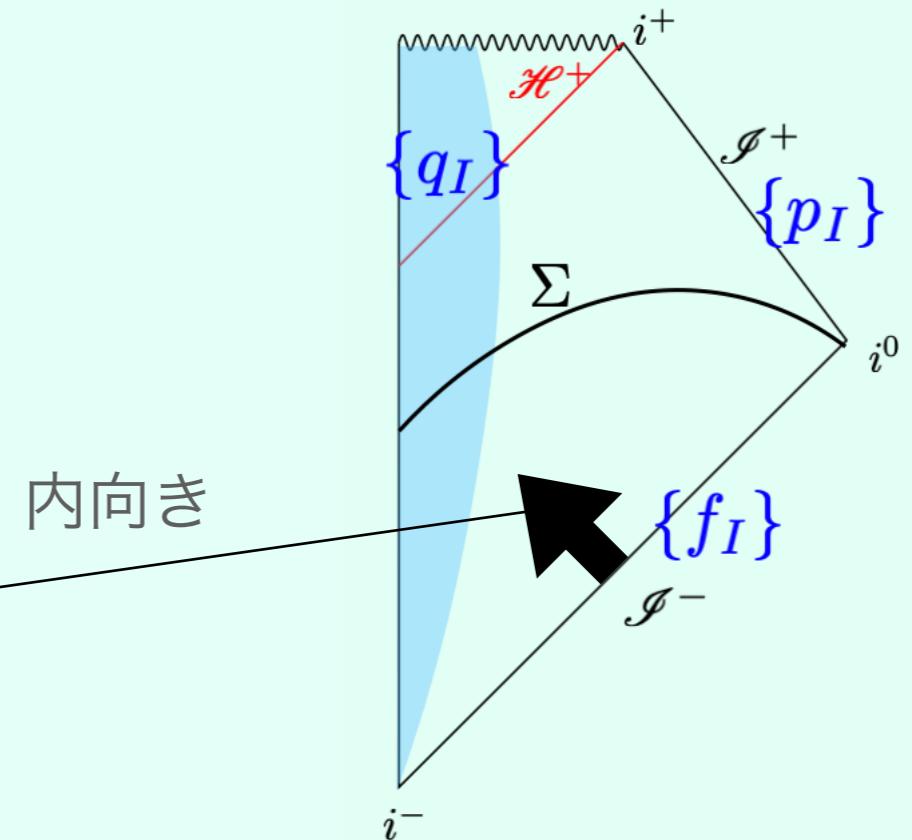
← 漸近形が分かっている場所

in 状態

$$\phi = a \cdot f + a^\dagger \cdot f^*$$

$$a_I | \text{in} \rangle = 0$$

$$f_I \sim e^{-i\omega v} Y_{\ell m} / r \quad (\text{on } \mathcal{J}^-)$$



十分過去の遠方で各モードの粒子数は0とする
つまり...

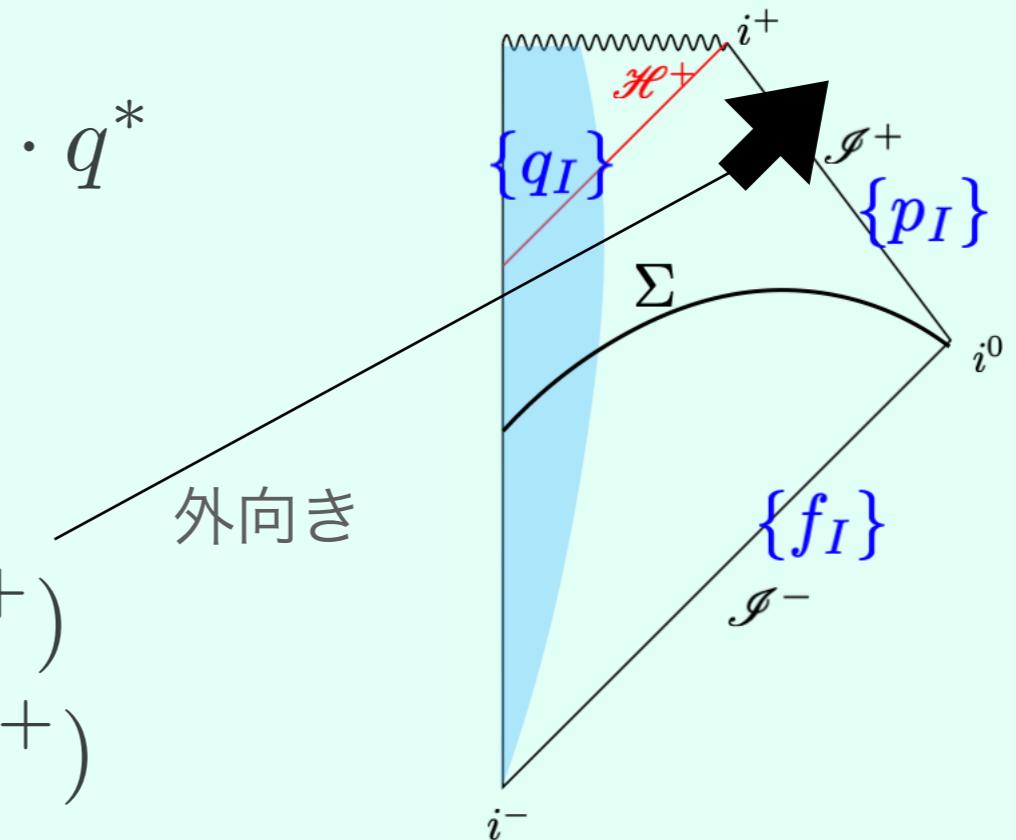
Hilbert空間の状態を $|\text{in}\rangle$ (in真空) にとる

out 状態

$$\phi = b \cdot p + b^\dagger \cdot p^* + c \cdot q + c^\dagger \cdot q^*$$

$$b_I | \text{out} \rangle = c_I | \text{out} \rangle = 0$$

$$p_I \sim \begin{cases} e^{-i\omega u} Y_{\ell m} / r & (\text{on } \mathcal{I}^+) \\ 0 & (\text{on } \mathcal{H}^+) \end{cases}$$



in 真空でみた b の各モードの粒子数

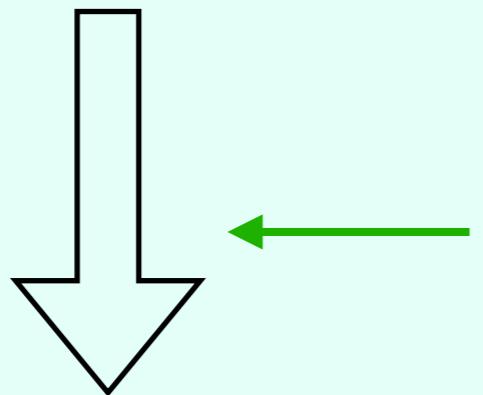
$$\langle N_I \rangle = \langle \text{in} | b_I b_I^\dagger | \text{in} \rangle$$

を調べる！

Bogoliubov変換

$\{p_I\}$ を完全系 $\{f_I\}$ で展開する：

$$p = Af + Bf^* \quad (A = (A_{IJ}), \quad B = (B_{IJ}))$$



$$\phi = a \cdot f + a^\dagger \cdot f^*$$

$$\phi = b \cdot p + b^\dagger \cdot p^* + c \cdot q + c^\dagger \cdot q^*$$

$$b = A^*a - B^*a^\dagger, \quad b^\dagger = -Ba + Aa^\dagger$$

演算子の関係がわかると…

$$\langle N_I \rangle = \langle \text{in} | b_I b_I^\dagger | \text{in} \rangle = \sum_J |B_{IJ}|^2$$

粒子数は B で決まる

Bogoliubov係数の条件と計算方法

$$p = \underline{A}f + \underline{B}f^*$$

$$\begin{aligned} f_I &\sim e^{-i\omega v} (\mathcal{I}^-) \\ p_I &\sim e^{-i\omega u} (\mathcal{I}^+) \end{aligned}$$

Bogoliubov係数 A, B を求めたい

- $A_{II'} = (p_I, f_{I'})$, $B_{II'} = -(p_I, f_{I'}^*)$
- p_I の \mathcal{I}^- への漸近形を求めて, Cauchy面を \mathcal{I}^- にとって上の Klein-Gordon 内積を計算
- Bogoliubov係数の必要条件

$$\underline{AA^\dagger - BB^\dagger = 1}$$

$$\therefore (p_I, p_J) = \delta_{IJ}$$

$$(p_I, p_J^*) = 0$$

目次

1. イントロダクションと準備 (背景時空) (5)
2. 量子化とBogoliubov変換 (8)
3. 粒子の軌跡と粒子数 (5)
4. 結論とまとめ (1)

逆向き時間発展

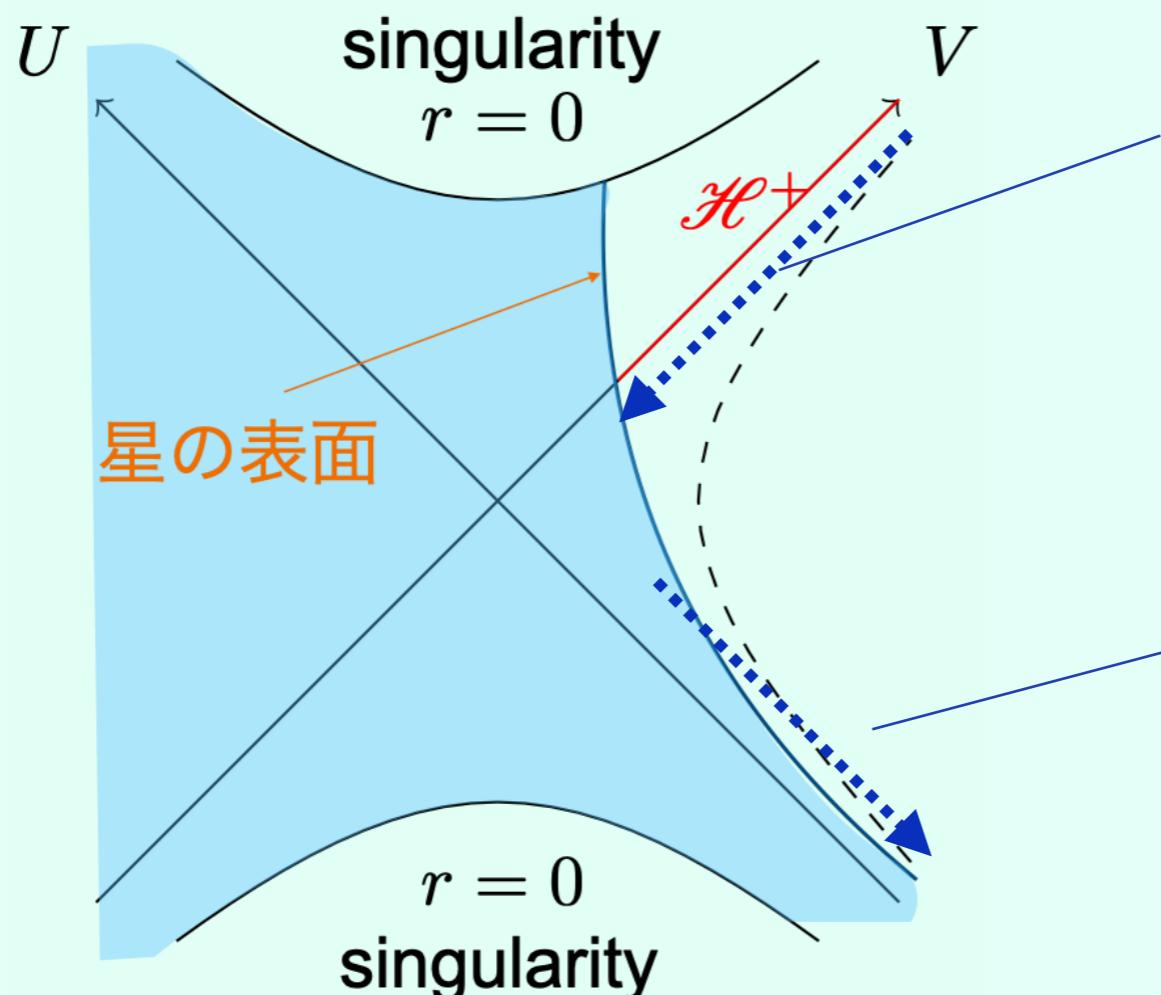
p_I の \mathcal{I}^- への漸近形を調べる

p_I を逆向きに時間発展させる

$$p_I \sim e^{-i\omega u} Y_{\ell m} / r$$

(on \mathcal{I}^+)

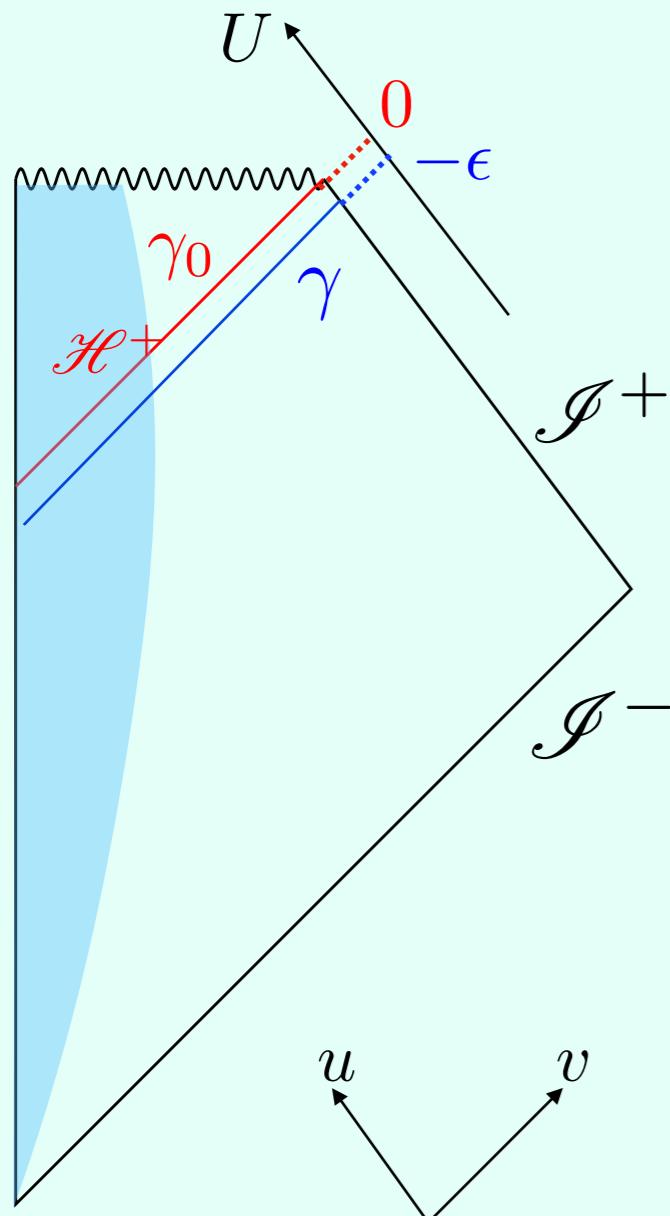
BHからの輻射に興味があるので、ホライズンの十分近傍を通っていく粒子に着目する



外向き球面波を逆行

幾何光学近似
ヌル測地線で過去へ

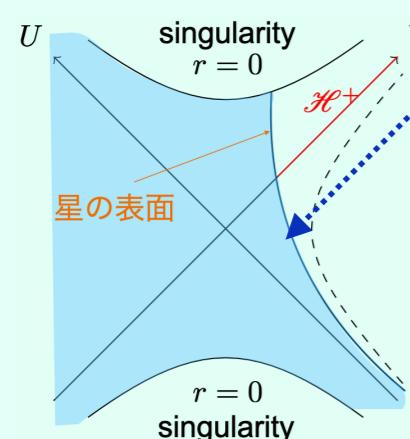
幾何光学近似



\mathcal{H}^+ 近傍では u 方向のヌル測地線
のアフィンパラメータが $\frac{-U = \epsilon}{\gamma}$ のラベル

$$u(\epsilon) \simeq -\frac{1}{\kappa} \ln (\epsilon/C)$$

$$(\kappa = 1/4M, C > 0)$$

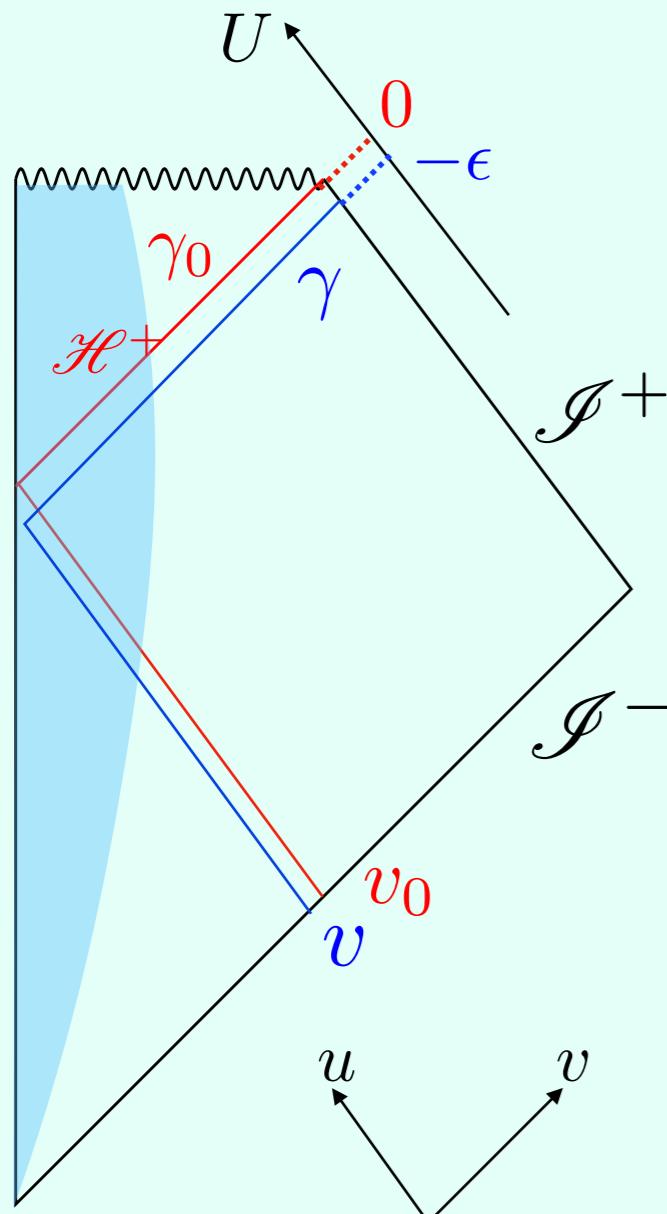


p_I の位相因子 $e^{-i\omega u(\epsilon)}$ は激しく振動

↓ **幾何光学近似**

ヌル測地線で星へ入り、折り返す

幾何光学近似



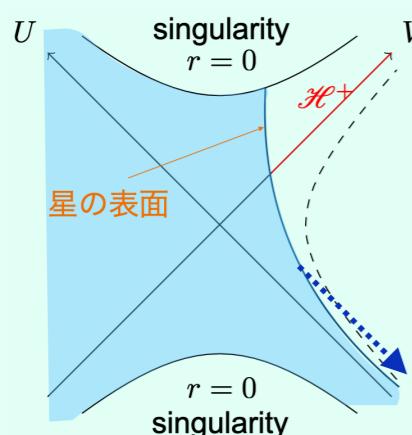
\mathcal{I}^- 近傍では v 方向のヌル測地線のアフィンパラメータが $v_0 - v$
 \rightarrow ラベル ϵ に比例 : $(v_0 - v)/D = \epsilon$



$$p_I(x) \sim \frac{P_\omega^- Y_{\ell m}}{\sqrt{2\pi\omega r}} e^{i(\omega/\kappa) \ln(c(v_0 - v))} \theta(v_0 - v)$$

$$(c = 1/CD)$$

(\mathcal{I}^- への漸近形)



Cauchy面を \mathcal{I}^- にとって Klein-Gordon 内積を計算

$$|A_{II'}| \propto \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} |\tilde{p}_\omega(\omega')|$$

$$|B_{II'}| \propto \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'} |\tilde{p}_\omega(-\omega')|$$

$$\tilde{p}_\omega(\omega') = \int_0^\infty ds e^{-i\omega' s + i(\omega/\kappa) \ln(cs)}$$



$$\tilde{p}_\omega(-\omega') = -\exp\left(-\frac{\pi\omega}{\kappa}\right) \tilde{p}_\omega(\omega') \quad (\omega' > 0)$$

$$|A_{II'}| = e^{\pi\omega/\kappa} |B_{II'}|$$

$$|A_{II'}| = e^{\pi\omega/\kappa} |B_{II'}|$$

$$AA^\dagger - BB^\dagger = 1$$

を用いると...

$$\langle N_I \rangle = \langle \text{in} | b_I b_I^\dagger | \text{in} \rangle = \sum_J |B_{IJ}|^2 = \frac{\sum_K \delta_{IK}}{e^{2\pi\omega/\kappa} - 1}$$

温度 $T_H = \kappa/(2\pi)$ のプランク分布に従う

目次

1. イントロダクションと準備 (背景時空) (5)
2. 量子化とBogoliubov変換 (8)
3. 粒子の軌跡と粒子数 (5)
4. まとめ (1)

まとめ

- 曲がった時空上ではinとoutで同じモードでも状態は一般には異なる
- そのときin真空中で測るとoutのモードの粒子数期待値は0でない
- 球対称な重力崩壊ではその粒子数が
$$T_H = \kappa / (2\pi)$$
の温度を持つ黒体輻射のPlanck分布に従う