AdS/CFTを用いた非平衡ブラックホールのエントロピーの提案

竹田大地 (京都大学)

arXiv:2403.07275 (JHEP 2024, 319, (2024)) に基づく

2024年7月9日

セミナー @ 信州大学（オンライン）

BH熱力学から量子重力へ

時空の起源は未解明

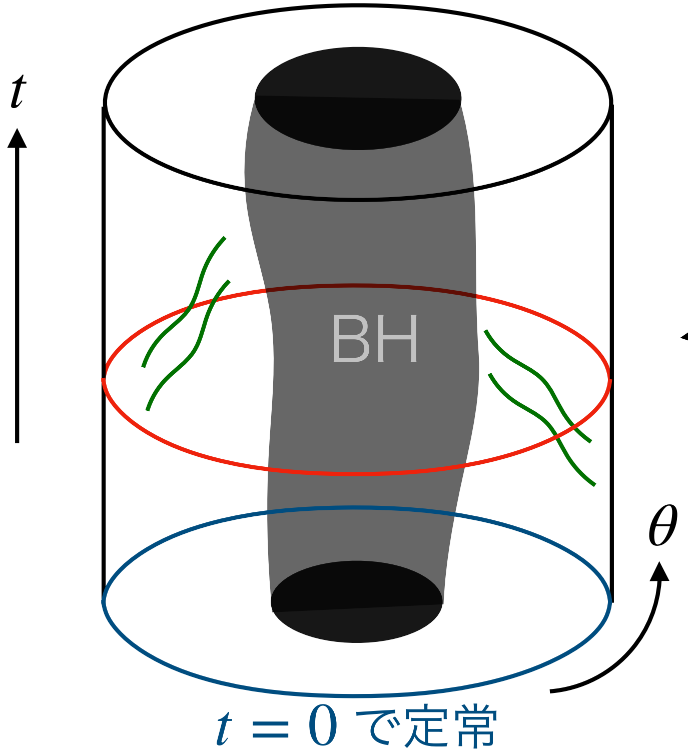
BHは熱力学的、つまり巨視的

BHは量子重力の統計力学？Strominger-Vafa (1996)

BH熱力学を完成して量子重力の道標を与える！

第1、2法則に従うBHエントロピーの提案

$(d+1)$ 次元動的BH + 物質場（古典）

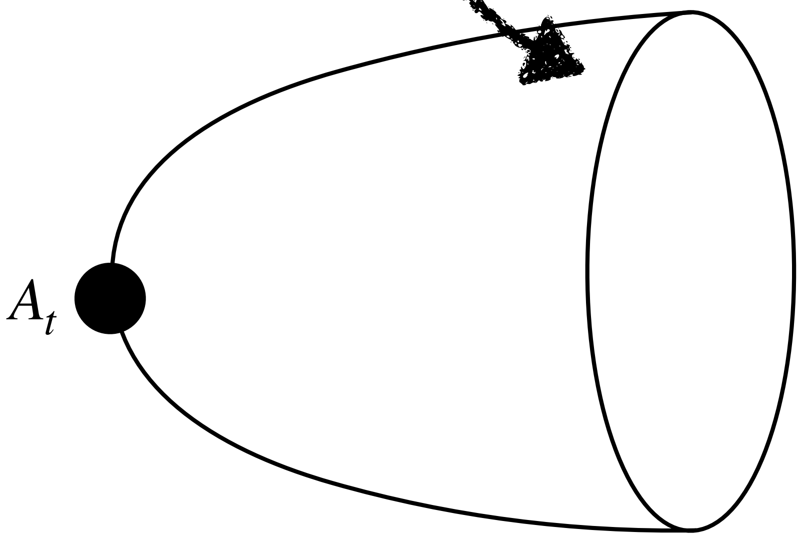


質量 M_t

(角) 運動量 P_t

規格化可能モード $\pi_{I,t}(\theta)$

同じ値を持つEuclid BHを探す



粗視化エントロピー: $S_t := \dfrac{A_t}{4G}$

第1法則 (GR) : $\dot{S}_t = \beta_t \dot{M}_t + \cdots$

第2法則 (AdS/CFT): $S_t \geq S_0$

第1、2法則に従うBHエントロピーの提案

1. BH熱力学と問題
2. CFTで粗視化エントロピーの導入と第2法則の証明
3. AdS/CFTによる重力への書き換え
4. 第2法則はヌルエネルギー条件と関係
5. 重力で（一般化された）第1法則を証明

第1、2法則に従うBHエントロピーの提案

1. BH熱力学と問題
2. CFTで粗視化エントロピーの導入と第2法則の証明
3. AdS/CFTによる重力への書き換え
4. 第2法則はヌルエネルギー条件と関係
5. 重力で（一般化された）第1法則を証明

熱力学の４法則

第0: 示強変数の存在

温度 T, 化学ポテンシャル μ, …

第1: 熱力学関係式

$$\mathrm{d}E = T\mathrm{d}S + \mu\mathrm{d}N + \cdots$$

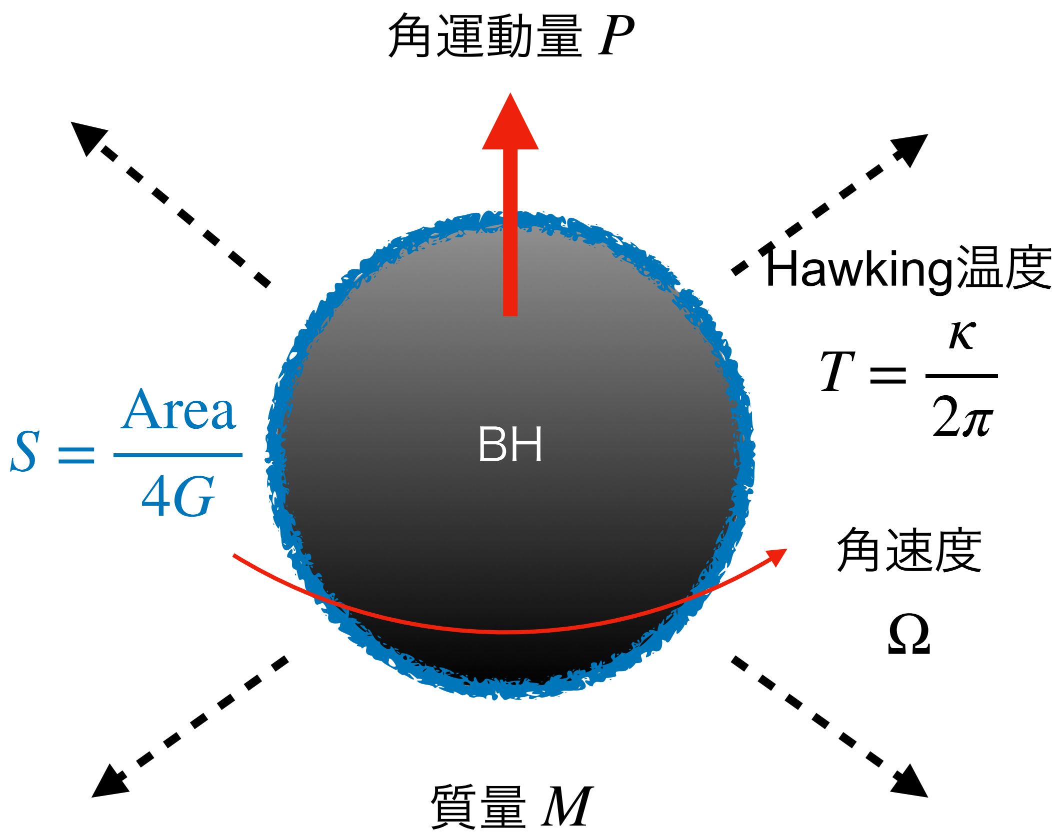
第2: 断熱遷移 $X \to Y$ が可能なら、またその時に限り

$$S_X \leq S_Y$$

第3: $T = 0$ でエントロピーは消える

熱力学を作るのに関係ないので今回は無視

BH熱力学もほとんど同じ



第0: 示強変数

$T, \Omega, \ldots$

第1 : 熱力学関係式

$$\mathrm{d}M = T\mathrm{d}S + \Omega\mathrm{d}P + \cdots$$

第2 : 未決着

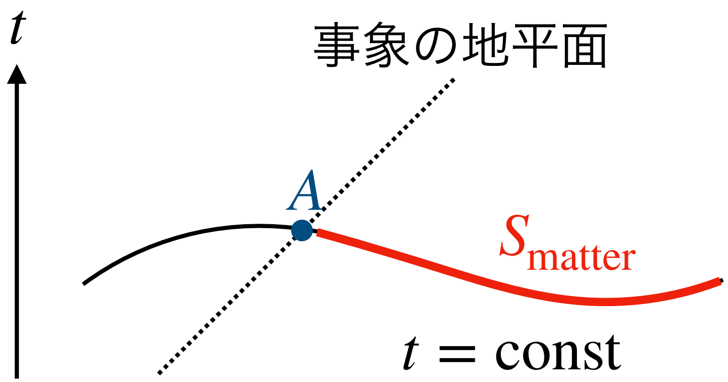
Hawkingの面積則?

一般化第二法則?

他の候補?

第二法則は未決着

一般化エントロピー



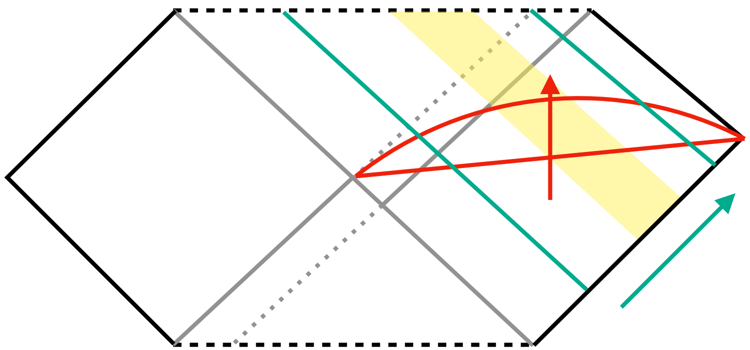
$$S_{\text{gen}} := \frac{A}{4G} + S_{\text{matter}}$$

これまで $\dot{S}_{\text{gen}} \geq 0$ を示す努力

第2法則: $X \to Y \iff S_X \leq S_Y$

単調性が成り立つのは、準静的な近似

ex) Vaidya

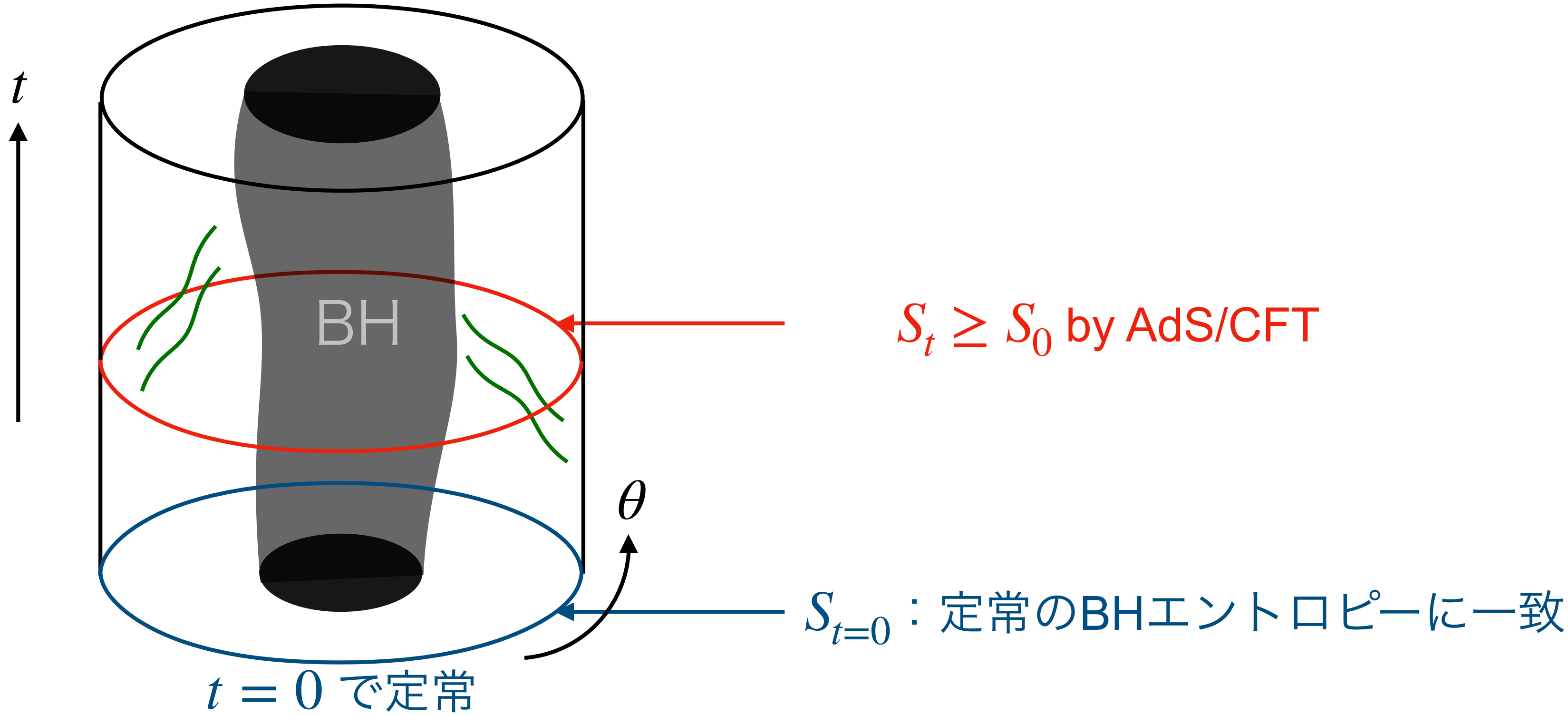


常に平衡ではない

初期状態で$S_{\text{gen}} \neq S_{\text{Sch}}$

To do: 正しいエントロピーを探す

$(d+1)$ 次元動的BH + 物質場（古典）



（一般化された）第一法則 $\dot{S}_t = \beta_t(\dot{M}_t - \Omega_t \dot{P}_t) - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta \cdots$

物質からの局所的な寄与

第一・第二法則に従うBHエントロピーの提案

1. BH熱力学と問題
2. CFTで粗視化エントロピーの導入と第2法則の証明
3. AdS/CFTによる重力への書き換え
4. 第2法則はヌルエネルギー条件と関係
5. 重力で（一般化された）第1法則を証明

粗視化＝ある側面だけ尊重

正準分布

$$S(\rho) = -\operatorname{Tr}\rho\ln\rho \text{ を最大化}$$

条件：$\mathrm{Tr}(\rho H) = E$ かつ $\mathrm{Tr}\rho = 1$

$\Rightarrow$ $\rho_{\mathrm{can}} \propto e^{-\beta H}$ $(\beta = \beta(E)$: Lagrange未定乗数)

$$\boxed{S_{\mathrm{can}} = -\operatorname{Tr}\rho_{\mathrm{can}}\ln\rho_{\mathrm{can}}}$$

粗視化＝ある側面だけ尊重

粗視化状態 $\rho_{\rm cg}$

$\{H, P_A, O_I(\theta)\}$: 尊重される演算子

$S(\rho) = -\,\mathrm{Tr}\rho \ln \rho$ を最大化

条件：$\mathrm{Tr}(\rho H) = h,\ \mathrm{Tr}(\rho P_A) = p_A,\ \mathrm{Tr}(\rho O_I(\theta)) = o_I(\theta),\ \mathrm{Tr}\rho = 1$

$$\boxed{\rho_{\rm cg} = \frac{1}{Z}\exp\left[-\beta\left(H - \omega^A P_A - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, \lambda^I(\theta) O_I(\theta)\right)\right]}$$

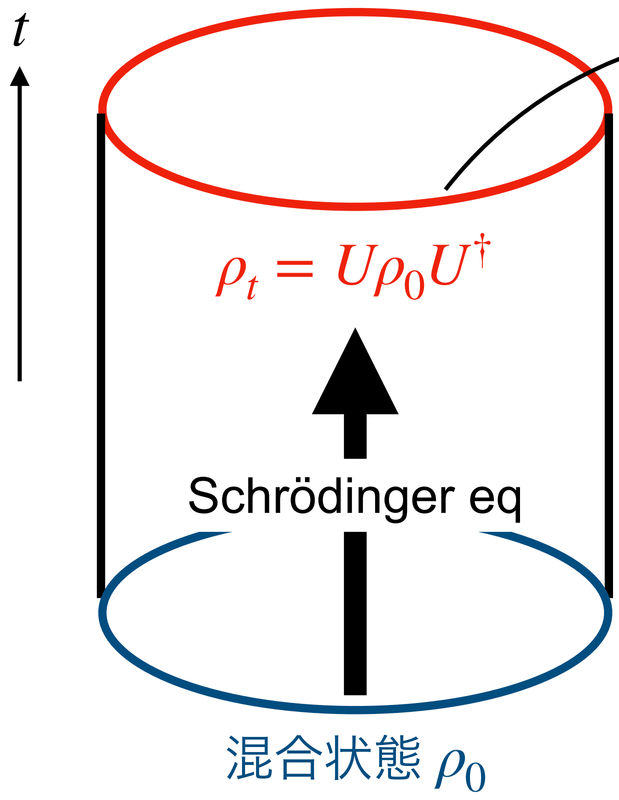
粗視化エントロピー

$$\boxed{S := -\,\mathrm{Tr}\rho_{\rm cg} \ln \rho_{\rm cg}}$$

時刻 t での粗視化エントロピー

粗視化の条件:

$$\mathrm{Tr}(\rho H) = h,\ \mathrm{Tr}(\rho P_A) = p_A,\ \mathrm{Tr}(\rho O_I(\theta)) = o_I(\theta)$$



時刻 t での粗視化状態 $\rho_{\mathrm{cg},t}$ は…

$$\boxed{h = \mathrm{Tr}(\rho_t H),\ p_A = \mathrm{Tr}(\rho_t P_A),\ o_I = \mathrm{Tr}(\rho_t O_I(\theta))}$$

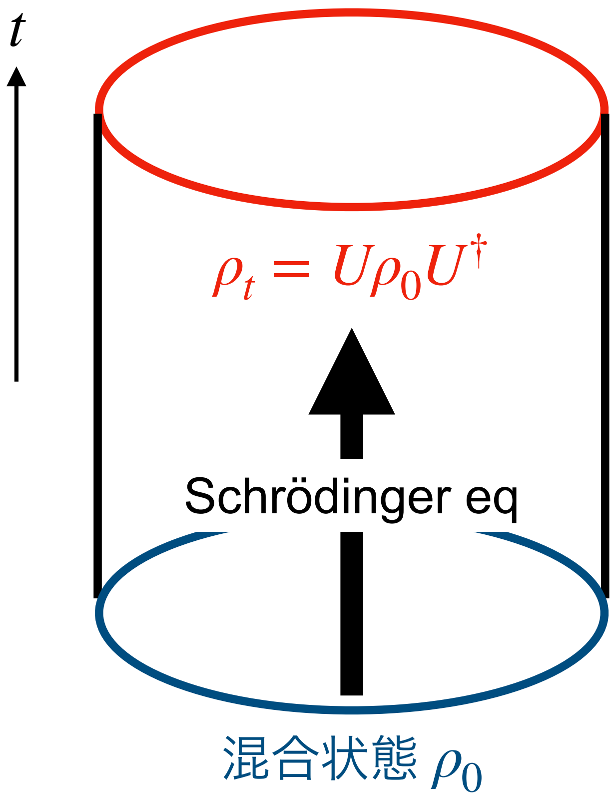
粗視化エントロピー S_t

$$\boxed{S_t := -\mathrm{Tr}\rho_{\mathrm{cg},t} \ln \rho_{\mathrm{cg},t}}$$

相対エントロピーから第2法則

相対エントロピーの正定値性

$$\mathrm{Tr}\,\rho_t\left(\ln\rho_t - \ln\rho_{\mathrm{cg},t}\right) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{第2法則} \quad S_t \geq S_0$$



$$\rho_t$$

$$H(t) = H - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, j^I(t,\theta) O_I(\theta)$$

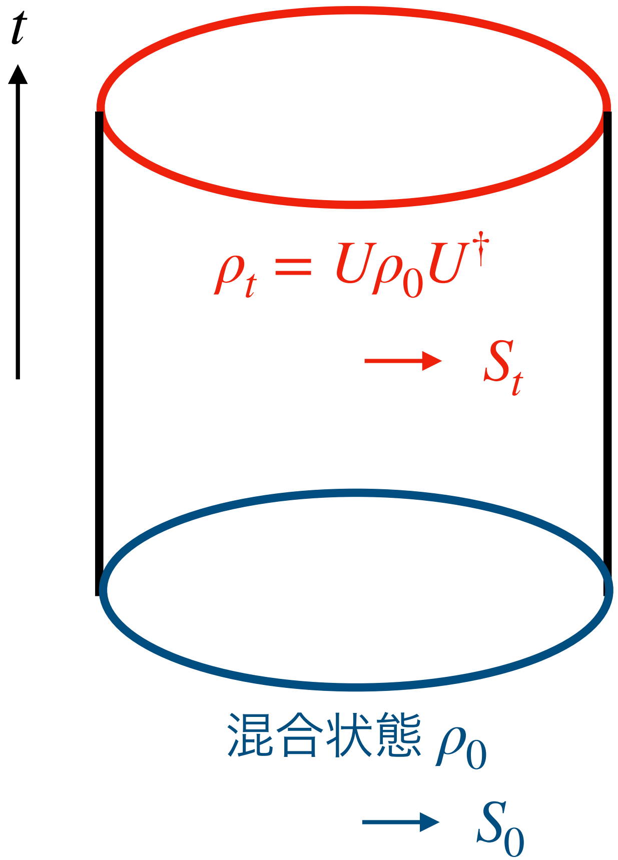
$$\rho_0 \propto \exp\left[-\beta_0\left(H - \omega_0^A P_A - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\,\lambda_0^I(\theta) O_I(\theta)\right)\right]$$

$$\rho_{\mathrm{cg},0} = \rho_0$$

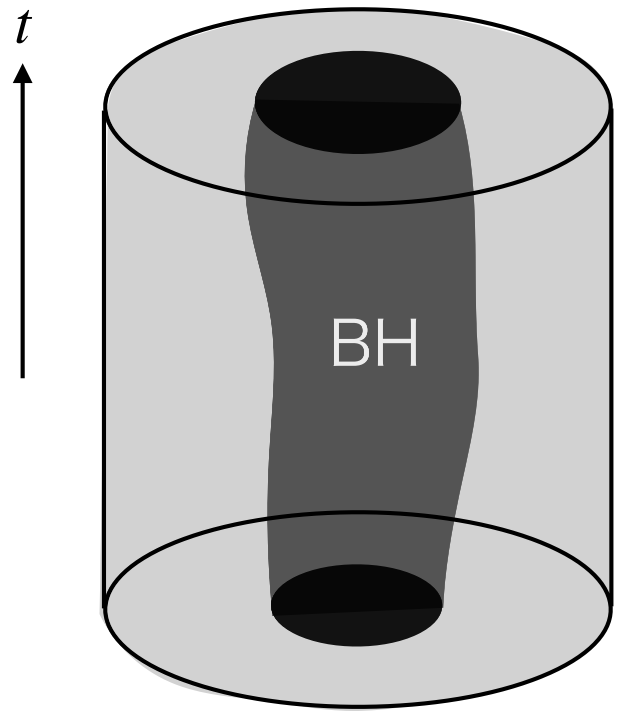
第1、2法則に従うBHエントロピーの提案

1. BH熱力学と問題
2. CFTで粗視化エントロピーの導入と第2法則の証明
3. AdS/CFTによる重力への書き換え
4. 第2法則はヌルエネルギー条件と関係
5. 重力で（一般化された）第1法則を証明

AdS/CFTはBHの力学を拘束する



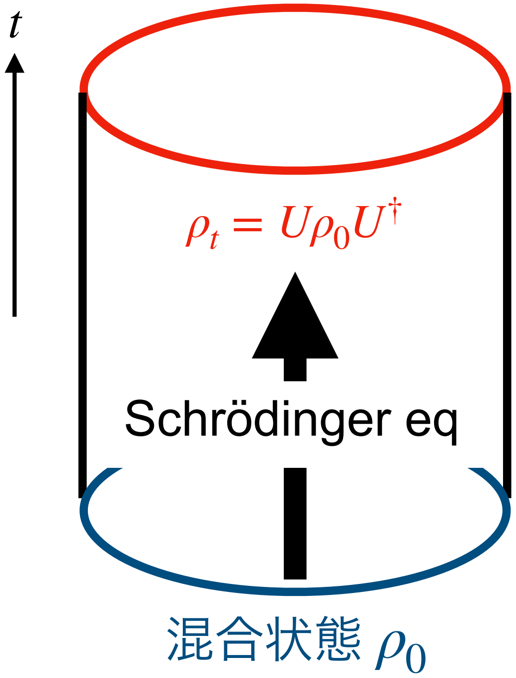
AdS/CFT
=



動的BH + 物質

$S_0 \leq S_t$ $\xRightarrow{\text{AdS/CFT}}$ BH時空への拘束

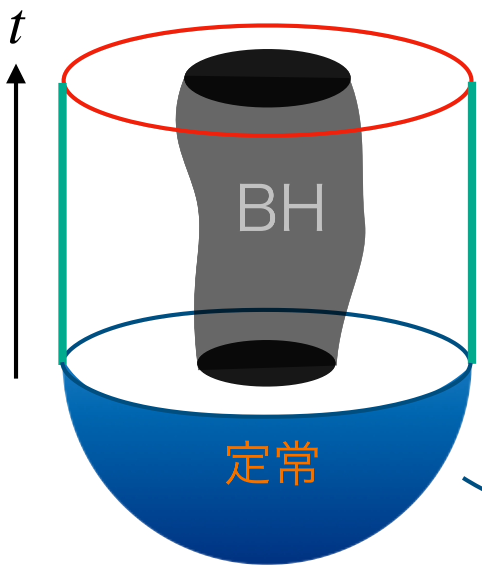
設定：平衡から非平衡へ発展



ρ_t

$$H(t) = H - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, j^I(t,\theta) O_I(\theta)$$

$$\rho_0 \propto \exp\left[-\beta_0\left(H - \omega_0^A P_A - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, \lambda_0^I(\theta) O_I(\theta)\right)\right]$$

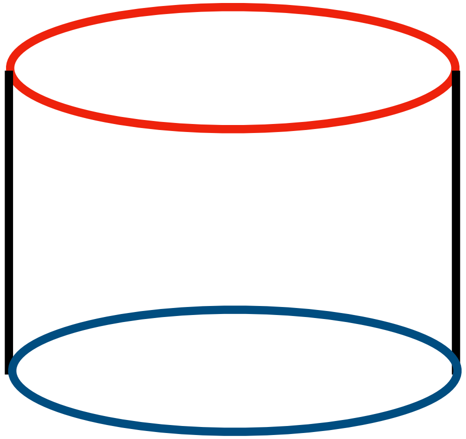


EOM

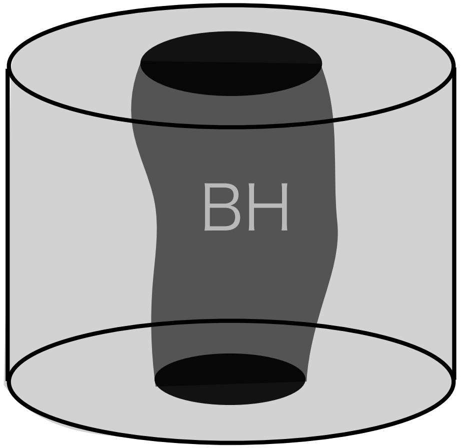
B.C. $\Phi(x) \sim r^{\Delta_I - d} j^I(t,\theta)$

Euclid BHの解析接続で
初期状態を用意

GKPW公式と１点相関



$=$



$$\left\langle e^{i\int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, j^I(t,\theta) O_I(\theta)} \right\rangle = e^{iI_{\mathrm{grav}}[\Phi]} \quad \text{with } \Phi(x) \sim r^{\Delta_I - d} j^I(t,\theta)$$

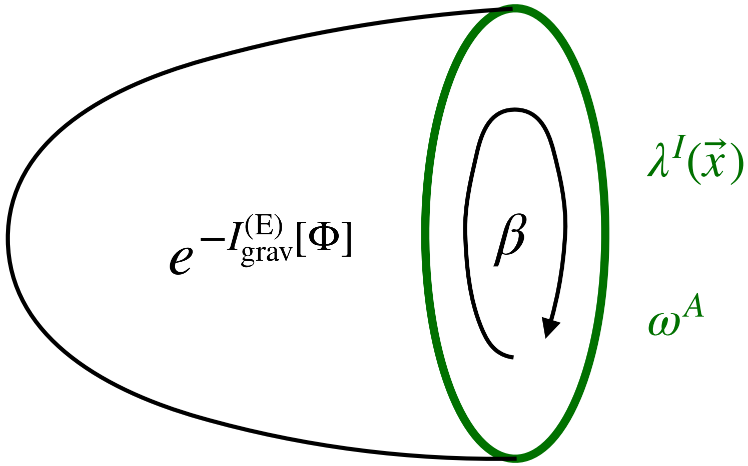
$$\mathrm{Tr}(\rho_t O_I(\theta)) = \frac{\delta}{\delta j^I(t,\theta)} I_{\mathrm{grav}}[\Phi] =: \pi_{I,t}(\theta)$$

$\mathrm{Tr}(\rho_t H),\ \mathrm{Tr}(\rho_t P_A)$ $=$ ADM質量、角運動量

Brown-York tensorを使う

粗視化状態 = Euclid BH

$$Z[\beta, \Omega, \lambda] = \mathrm{Tr}\,\exp\left[-\beta\left(H - \omega^A P_A - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, \lambda^I(\theta) O_I(\theta)\right)\right] \overset{\text{AdS/CFT}}{=}$$



$$\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{cg}} O_I(\theta)) = -\beta^{-1} \frac{\delta}{\delta \lambda^I(\theta)} I^{(\mathrm{E})}_{\mathrm{grav}}[\Phi] =: \pi^{(\mathrm{E})}_I(\theta)$$

$\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{cg}} H)$, $\mathrm{Tr}(\rho_{\mathrm{cg}} P_A)$ = ADM質量, 角運動量

各時刻 t での粗視化状態の決定

$\boxed{\pi_{I,t}(\theta) = \pi^{(\mathrm{E})}_I(\theta) \text{ および質量と角運動量の一致}}$

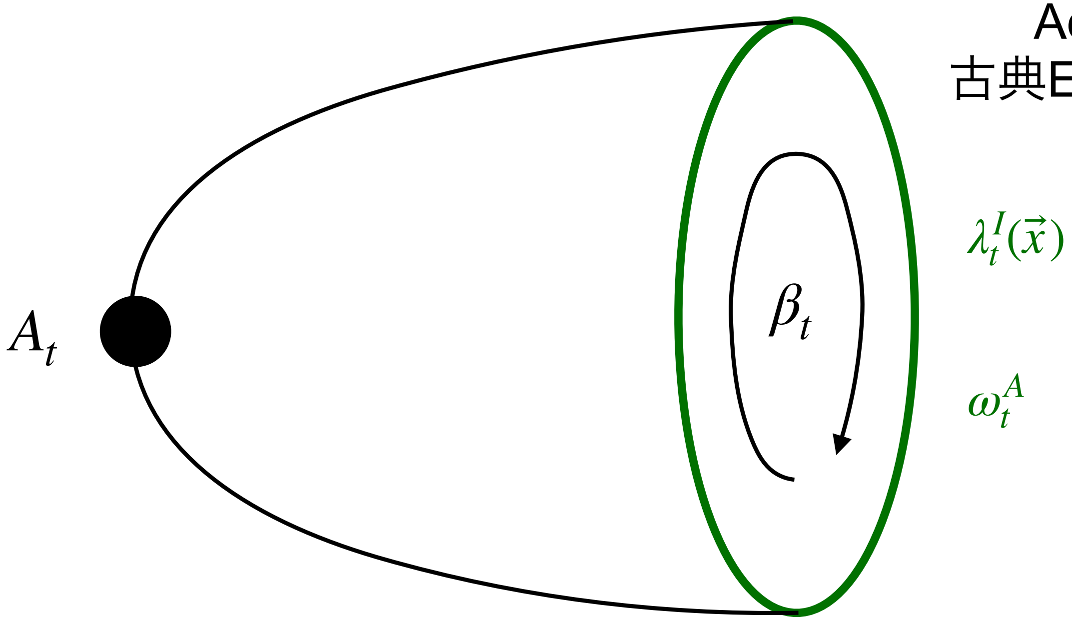
解: $(\beta, \omega, \lambda) = (\beta_t, \omega_t, \lambda_t)$

エントロピーは先端の面積

$$S_t = -\mathrm{Tr}\rho_{\mathrm{cg},t} \ln \rho_{\mathrm{cg},t}$$

$$= -\beta^2 \frac{\partial}{\partial \beta}(\beta^{-1} \ln Z[\beta, \omega, \lambda])\Big|_{(\beta,\omega,\lambda)\to(\beta_t,\omega_t,\lambda_t)} = \frac{A_t}{4G}$$

AdS/CFT
古典Einstein理論



AdS/CFTより、$A_t \geq A_0$

相対エントロピーの正定値性

$$\mathrm{Tr}\,\rho_t\left(\ln\rho_t - \ln\rho_{\mathrm{cg},t}\right) \geq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \text{第2法則} \quad S_t \geq S_0$$

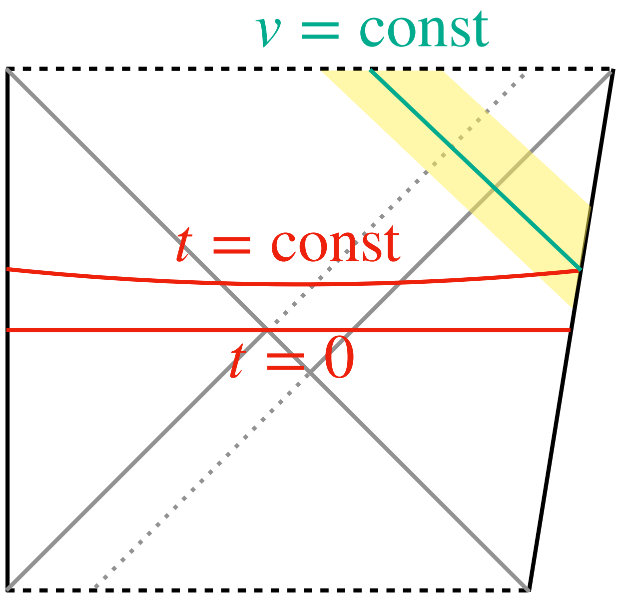
$\Downarrow$

$$A_t \geq A_0$$

第1、2法則に従うBHエントロピーの提案

1. BH熱力学と問題
2. CFTで粗視化エントロピーの導入と第2法則の証明
3. AdS/CFTによる重力への書き換え
4. 第2法則はヌルエネルギー条件と関係
5. 重力で（一般化された）第1法則を証明

Sch-AdS



$$\mathrm{d}s^2 = -f(v,r)\mathrm{d}v^2 + \frac{\mathrm{d}r^2}{f(v,r)} + r^2\mathrm{d}\Omega^2,$$

$$f(v,r) = 1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{2\mu(v)}{r^{d-2}}$$

境界では $v = t$

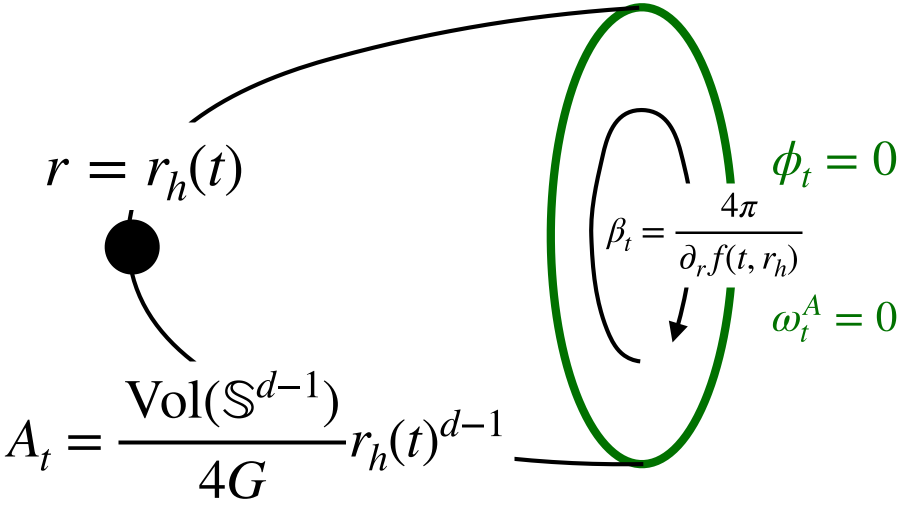
尊重するもの: 質量 M_t, 角運動量 $P_{A,t}$, 電荷 Q_t

$$M_t = \frac{d-1}{8\pi G}\mathrm{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \times \mu(t) + (\mu - \mathrm{indep.})$$

$$P_{A,t} = 0$$

$$Q_t = 0$$

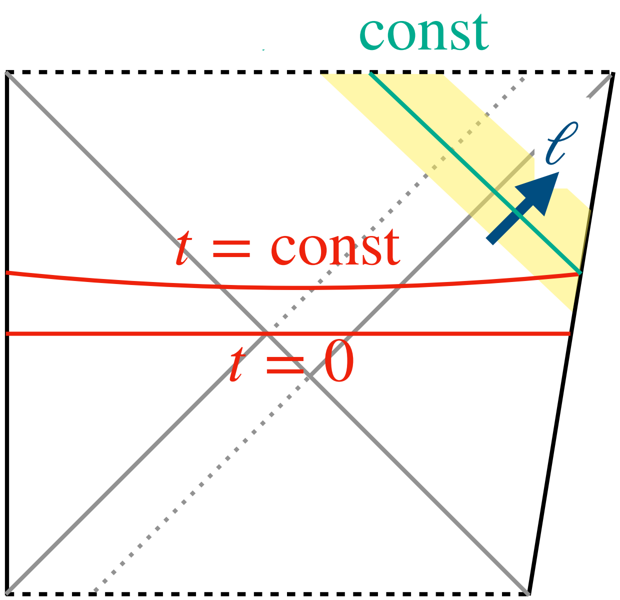
Sch-AdS



$M_t, P_{A,t}, Q_t$ を持つEuclid BH

$$ds^2 = f(v, r)d\tau^2 + \frac{dr^2}{f(v, r)} + r^2 d\Omega^2$$

$$f(v, r) = 1 + \frac{r^2}{L^2} - \frac{2\mu(v)}{r^{d-2}}$$



AdS/CFTより

$$A_t \geq A_0$$

勝手な $\mu(v)$ では不成立

$\boxed{T_{\ell\ell} \geq 0 \text{ のとき成立（十分条件）}}$

他の具体例でも同じ結論

AdS/CFTより

$$A_t \geq A_0$$

常には成り立たないが、

$\boxed{T_{\ell\ell} \geq 0 \text{ なら成立（十分条件）}}$

回転BTZと4次元の漸近平坦な荷電BHで確認

第1、2法則に従うBHエントロピーの提案

1. BH熱力学と問題
2. CFTで粗視化エントロピーの導入と第2法則の証明
3. AdS/CFTによる重力への書き換え
4. 第2法則はヌルエネルギー条件と関係
5. 重力で（一般化された）第1法則を証明

Entropy vs Euclid作用: Legendre変換

エントロピー S_t と 自由エネルギー $F_t := \beta_t^{-1} I^{(\mathrm{E})}_{\mathrm{grav}}[\beta_t, \omega_t, \lambda_t]$ の関係

$$S_t = -I^{(\mathrm{E})}_{\mathrm{grav}}[\beta_t, \omega_t, \lambda_t] + \beta_t \left(M_t - \omega_t^A P_{A,t} - \int \mathrm{d}^{d-1}\vec{x}\, \lambda_t^I(\theta)\pi_{I,t}(\theta) \right)$$

尊重される値

$(\beta_t, \omega_t, \lambda_t)$ を (M_t, P_t, π_t) の関数と見る

c.f.) CFT での記述

$$\begin{aligned} S_t &= -\mathrm{Tr}\rho_{\mathrm{cg},t} \ln \rho_{\mathrm{cg},t} \\ &= \ln Z[\beta_t, \omega_t, \lambda_t] + \beta_t \left(\langle H \rangle_t - \omega^A \langle P_A \rangle_t - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, \lambda^I(\theta) \langle O_I(\theta) \rangle_t \right) \end{aligned}$$

一般化第1法則

$$S_t = -\,I^{(\mathrm{E})}_{\mathrm{grav}}[\beta_t, \omega_t, \lambda_t] + \beta_t \left(M_t - \omega_t^A P_{A,t} - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, \lambda_t^I(\theta) \pi_{I,t}(\theta) \right)$$

$(\beta_t, \omega_t, \lambda_t)$ は (M_t, P_t, π_t) の関数と見る

S_t は $(M_t, P_{A,t}, \pi_{I,t})$ を通して時間に依存

$I^{(\mathrm{E})}_{\mathrm{grav}}[\beta, \omega, \lambda]$ の変分 in Einstein理論

$$\delta I^{(\mathrm{E})}_{\mathrm{grav}}[\beta, \omega, \lambda] = M\delta\beta - P_A \delta(\beta\omega) - \beta \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, \delta\lambda^I(\theta)\pi_I(\theta) + (\mathrm{E}\cancel{\mathrm{O}}\mathrm{M})$$

変分を $\delta = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ とおいて、

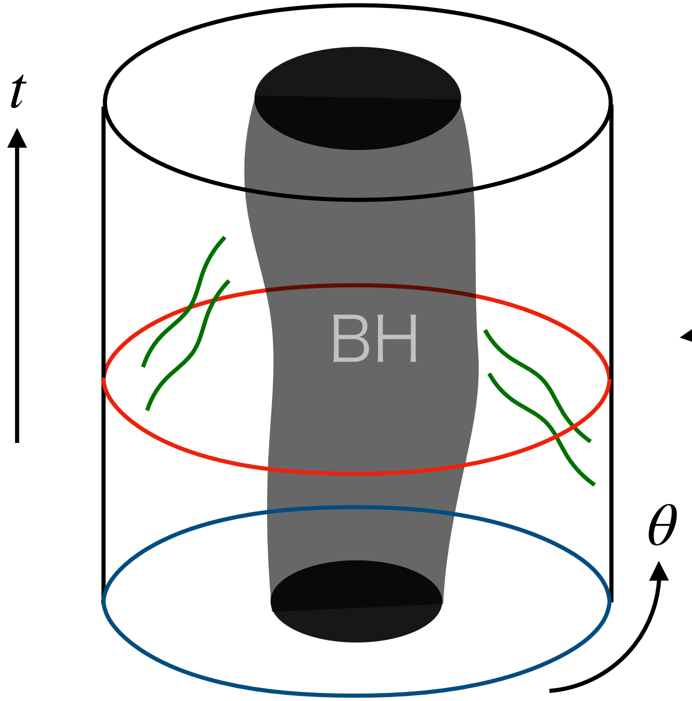
$$\boxed{\dot{S}_t = \beta_t(\dot{M}_t - \omega_t^A \dot{P}_{A,t}) - \int \mathrm{d}^{d-1}\theta\, \lambda_t^I(\theta)\, \dot{\tilde{\pi}}_{I,t}(\theta), \quad \tilde{\pi}_{I,t} = \beta_t \pi_{T,t}}$$

第1、2法則に従うBHエントロピーの提案

1. BH熱力学と問題
2. CFTで粗視化エントロピーの導入と第2法則の証明
3. AdS/CFTによる重力への書き換え
4. 第2法則はヌルエネルギー条件と関係
5. 重力で（一般化された）第1法則を証明

第一・第二法則に従うBHエントロピーの提案

$(d+1)$ 次元動的BH + 物質場（古典）



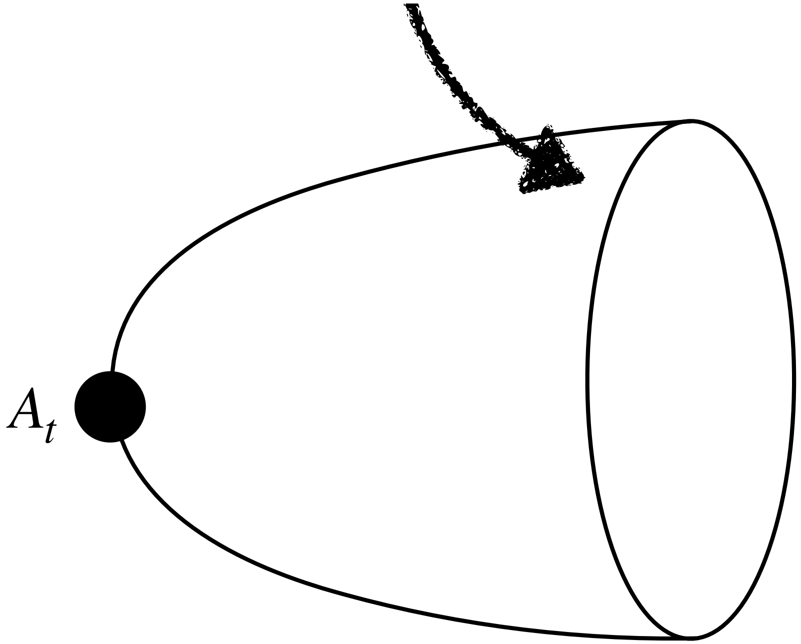
$t=0$ で定常

質量 M_t

(角) 運動量 P_t

規格化可能モード $\pi_{I,t}(\theta)$

同じ値を持つEuclid BHを探す



粗視化エントロピー: $S_t := \dfrac{A_t}{4G}$

第一法則 (GR) : $\dot{S}_t = \beta_t \dot{M}_t + \cdots$

第二法則 (AdS/CFT): $S_t \geq S_0$

粗視化状態の導出

$S(\rho) = -\,\mathrm{Tr}\rho \ln \rho$ を最大化

条件：$\mathrm{Tr}(\rho H) = h,\ \mathrm{Tr}(\rho O_I) = o_I,\ \mathrm{Tr}\rho = 1$

$$\boxed{\rho_{\mathrm{cg}} = \frac{1}{Z} \exp\left[-\beta\left(H - \mu^I O_I\right)\right]}$$

$$\tilde{S} = S - \beta\left[\mathrm{Tr}(\rho H) - h - \mu^I\left\{\mathrm{Tr}(\rho O_I) - o_I\right\}\right] + \lambda\left\{\mathrm{Tr}(\rho) - 1\right\}$$

$$\Rightarrow \quad \delta\tilde{S} = \mathrm{Tr}\left[\delta\rho\left\{\underbrace{\ln\rho + 1 + \lambda - \beta\left(H - \mu^I O_I\right)}_{=0}\right\}\right]$$

$$\Rightarrow \quad \rho \propto \exp\left[-\beta\left(H - \mu^I O_I\right)\right]$$