

Lindblad dynamics in holography

竹田 大地（理研iTHEMS）

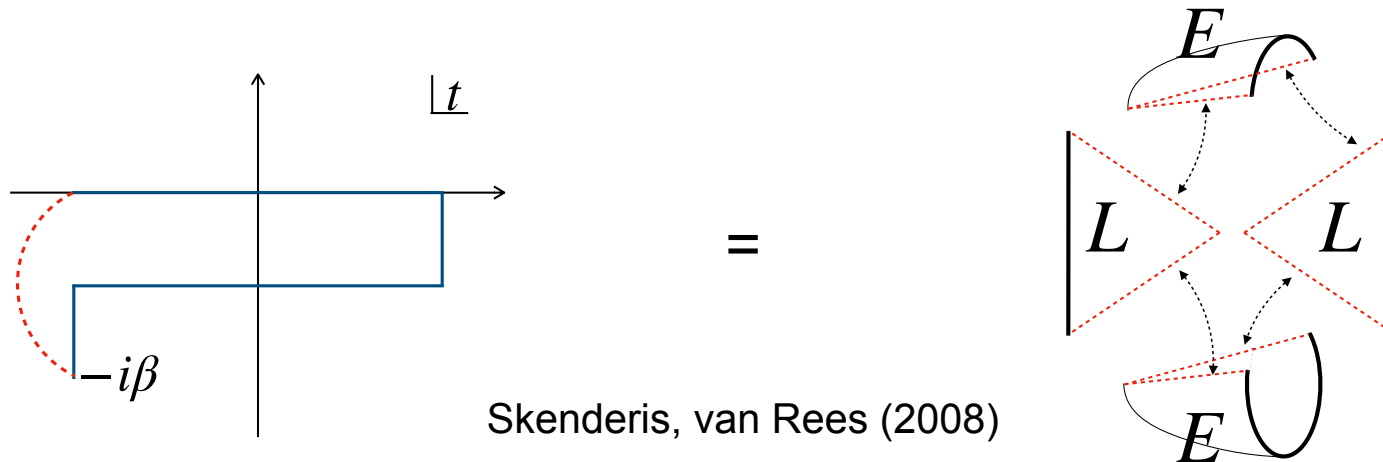
2025/07/28

場の理論と弦理論2025

石井孝典氏との共同研究[arXiv:2504.17320]に基づく

AdS/CFTで開放量子系を予言

- Schwinger-Keldysh形式 in AdS/CFT



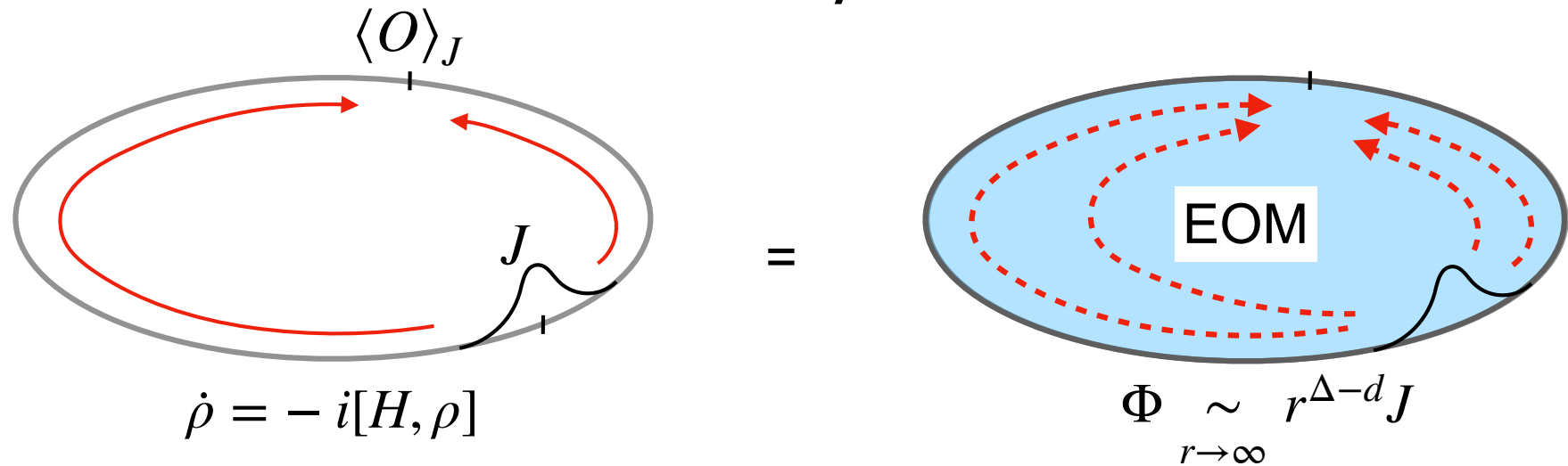
- クォークのブラウン運動をバルクの弦で de Boer et.al. (2008)
Son, Teaney (2009)
- 開放スカラー場理論の有効作用 Jana, Loganayagam, Rangamani (2020)

熱浴をホログラフィックCFTとした開放系

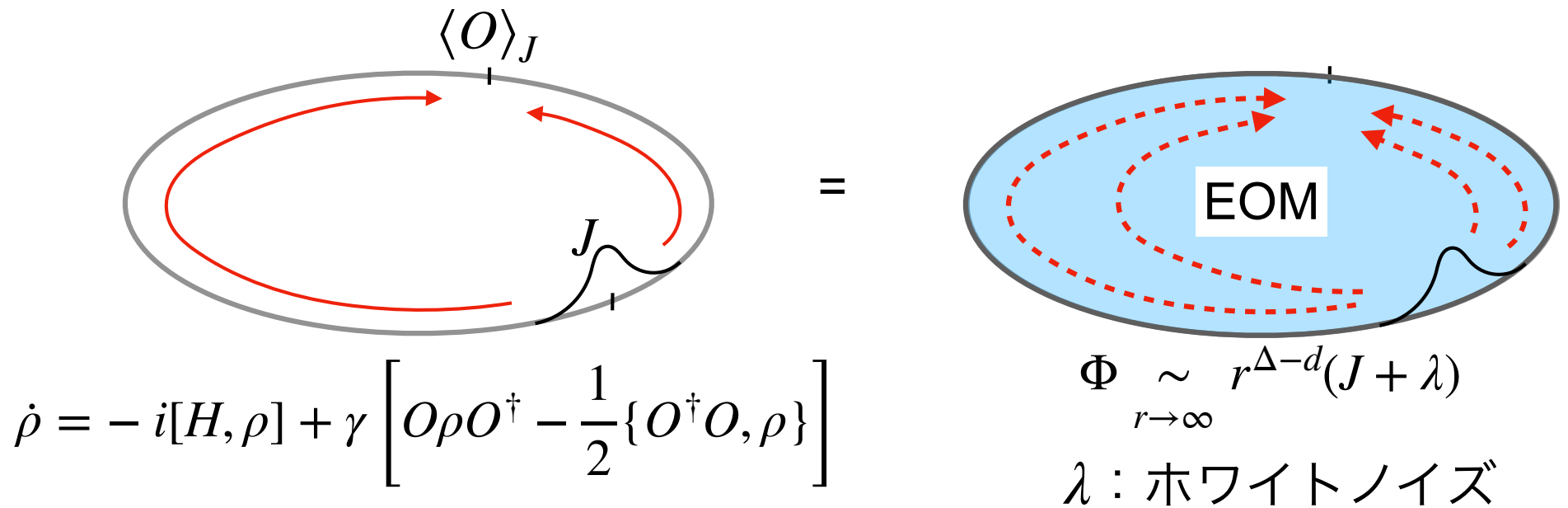
ホログラフィックCFT自体を開放量子系にしたい

Lindblad = AdS重力 + ホワイトノイズ BC

通常のAdS/CFT



Lindblad力学の場合



Lindblad = AdS重力 + ホワイトノイズBC

1. 開放量子系のLindblad方程式を、経路積分で
2. 経路積分を変形し、GKPWからバルクへ
3. 自由スカラー場 on AdS_3 はCFTの結果を再現

Lindblad = AdS重力 + ホワイトノイズBC

1. 開放量子系のLindblad方程式を、経路積分で
2. 経路積分を変形し、GKPWからバルクへ
3. 自由スカラー場 on AdS_3 はCFTの結果を再現

Lindblad＝開放系のマスター方程式

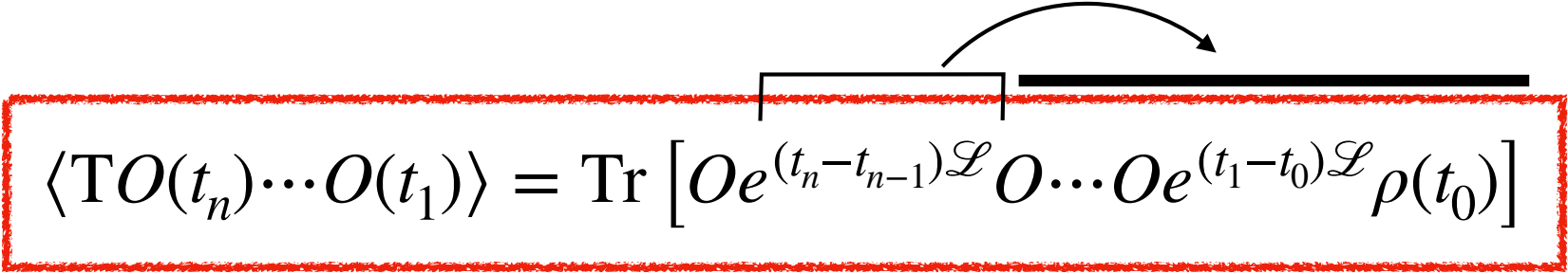
$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_i \left[L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2} \{L_i^\dagger L_i, \rho\} \right] =: \mathcal{L}\rho$$

孤立系との違い

(しばらく、1次元量子系を仮定)

- 系＋熱浴から熱浴をトレースアウトして、近似
 - Born近似： $\rho_{\text{tot}} \simeq \rho_{\text{sys}} \otimes e^{-\beta H_{\text{bath}}}$
 - Markov近似： $\rho(t + \Delta t)$ は $\rho(t)$ だけで決まる
 - ...
- $\rho(t) = e^{(t-s)\mathcal{L}}\rho(s)$ はCPTP写像の一般形

考えるべき (時間順序) 相関関数は？


$$\langle TO(t_n) \cdots O(t_1) \rangle = \text{Tr} \left[O e^{(t_n - t_{n-1})\mathcal{L}} O \cdots O e^{(t_1 - t_0)\mathcal{L}} \rho(t_0) \right]$$

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_i \left[L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2} \{L_i^\dagger L_i, \rho\} \right] =: \mathcal{L}\rho$$

なぜ？ → 系＋熱浴から出発する

$$\langle TO(t_n) \cdots O(t_1) \rangle := \text{Tr}_{\text{tot}} \left[O e^{-i(t_n - t_{n-1})H_{\text{tot}}} O \cdots O e^{-i(t_1 - t_0)H_{\text{tot}}} \rho_{\text{tot}}(t_0) e^{it_n H_{\text{tot}}} \right]$$

$$\simeq \text{Tr}_{\text{sys}} \left[O e^{(t_n - t_{n-1})\mathcal{L}} O \cdots O e^{(t_1 - t_0)\mathcal{L}} \rho_{\text{sys}}(t_0) \right]$$

←
Lindbladの導出に使った近似

cf) Gullo et. al. (2014)

非時間順序も同様

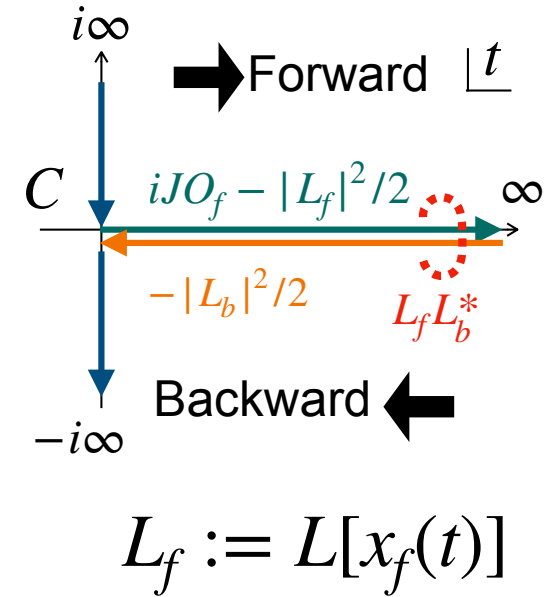
この相関関数を与える生成汎関数は？

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \sum_i \left[L_i \rho L_i^\dagger - \frac{1}{2} \{L_i^\dagger L_i, \rho\} \right] =: \mathcal{L}\rho$$

↓ L_i が1種類で、 $\rho_{\text{ini}} = |0\rangle\langle 0|$

$$Z[J] := \int \mathcal{D}x \, e^{iS[C;x] + \int_0^\infty dt \left(iJO_f + L_f L_b^* - \frac{|L_f|^2}{2} - \frac{|L_b|^2}{2} \right)}$$

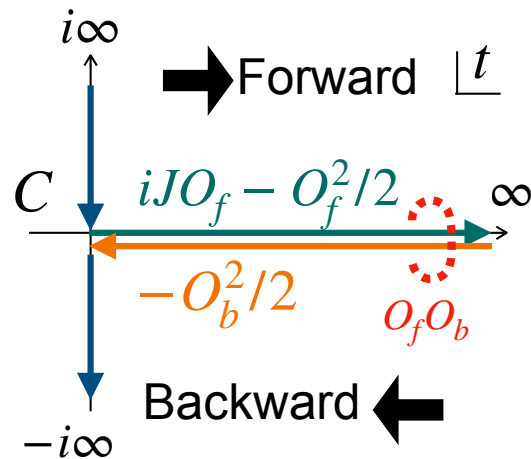
e.g. [Strunz (1997)]



- 虚時間方向は真空を作る
- Forwardは $|0\rangle$ の時間発展
- Backwardは $\langle 0|$ の時間発展
- J は O の $\langle TO(t_n) \cdots O(t_1) \rangle$ を作るために導入
- 真空以外はソース入れるなど...

以下ではCFTの場合

$$Z[J] := \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_{\text{CFT}}[C;\phi] + \int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x} \left(iJO_f - \frac{\gamma}{2}(O_f - O_b)^2 \right)}$$



$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \gamma \int d^{d-1}\vec{x} \left[O(\vec{x})\rho O(\vec{x}) - \frac{1}{2}\{O(\vec{x})^2, \rho\} \right]$$

ただし最も簡単なケース：

- $L_i \rightarrow \sqrt{\gamma}O[\phi(\vec{x})]$ (添え字*i*が空間座標 \vec{x})
- $O(\vec{x}) = O[\phi(\vec{x})]$ は実スカラープライマリ場
- ジャンプ演算子の相関関数に着目

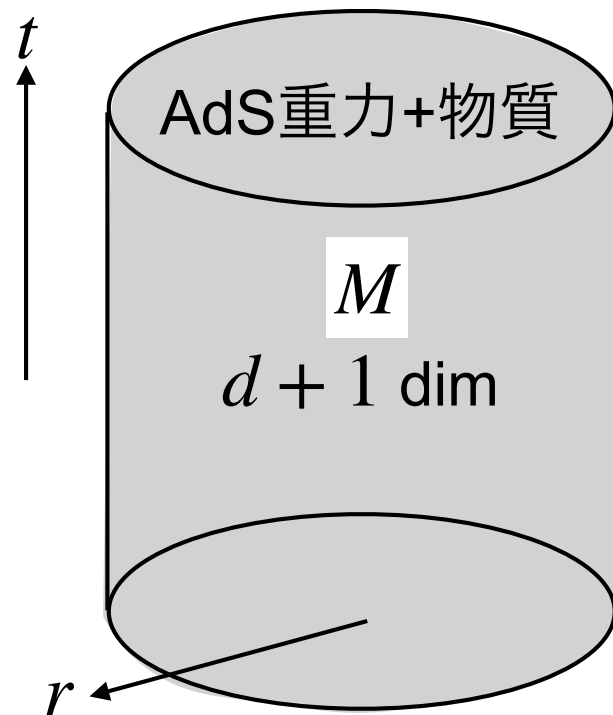
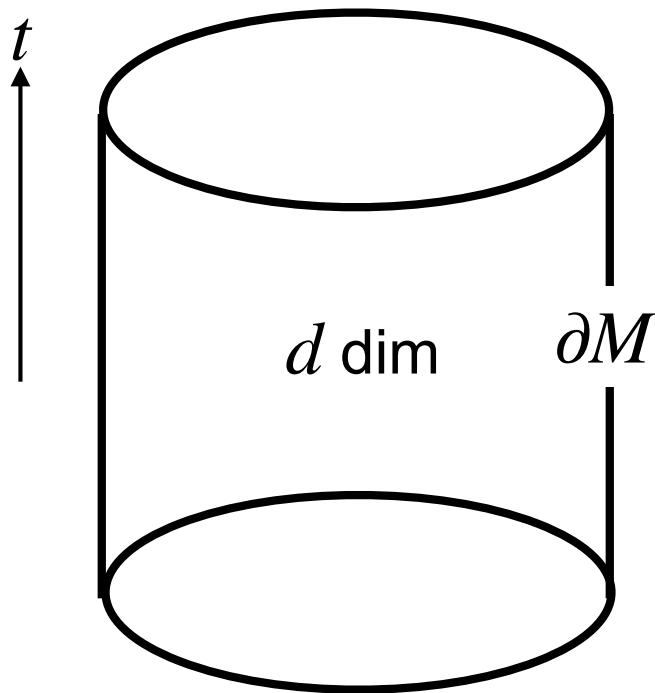
Lindblad = AdS重力 + ホワイトノイズBC

1. 開放量子系のLindblad方程式を、経路積分で
2. 経路積分を変形し、GKPWからバルクへ
3. 自由スカラー場 on AdS_3 はCFTの結果を再現

標準的なAdS/CFT：GKPW辞書

AdS/CFT対応

$$\int \mathcal{D}\phi e^{iS_{\text{CFT}}[\partial M; \phi] + i \int d^d x J(x) O_{\Delta}(x)} = e^{iS_{\text{AdS}}[M; \Phi_{\text{cl}}]} \Big|_{\Phi \sim r^{\Delta-d} J}$$

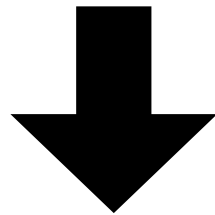


M はかなり自由：SK経路、レプリカ多様体など

$Z[J]$ をGKPWが使える形へ

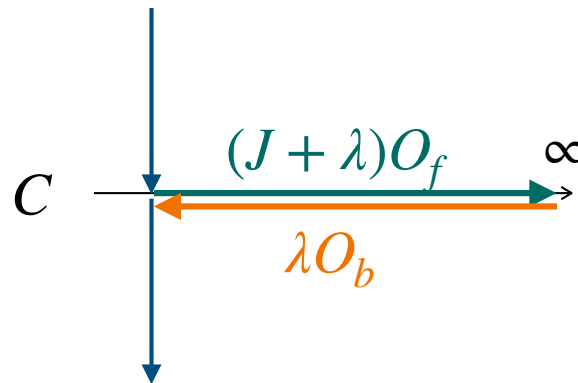
Lindblad力学の場合

$$Z[J] := \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_{\text{CFT}}[C;\phi] + \int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x} \left(iJO_f - \frac{\gamma}{2}(O_f - O_b)^2 \right)}$$



Hubbard–Stratonovich変換

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\lambda \left[\int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_{\text{CFT}}[C;\phi] + \int \left[i(J + \lambda)O_f - i\lambda O_b \right]} \right] e^{-\frac{1}{2\gamma} \int \lambda^2}$$



$$\lambda \sim \mathcal{N}(0, \gamma)$$

GKPWを使ってバルクへ

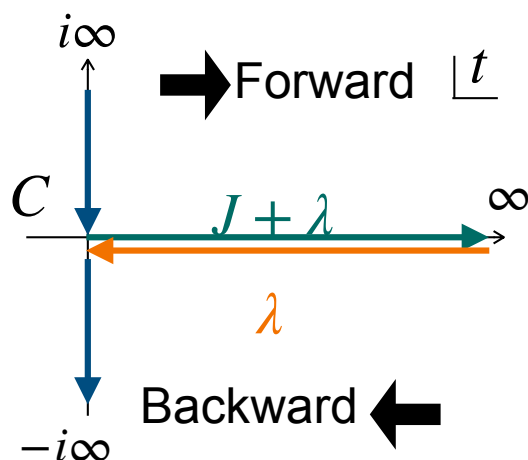
$$Z[J] = \int \mathcal{D}\lambda \left[\int \mathcal{D}\phi e^{iS_{\text{CFT}}[C;\phi] + \int \left[i(J + \lambda)O_f - i\lambda O_b \right]} \right] e^{-\frac{1}{2\gamma} \int \lambda^2}$$

$$= \int \mathcal{D}\lambda e^{-\frac{1}{2\gamma} \int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x} \lambda(t, \vec{x})^2} \left[e^{iS_{\text{AdS}}[M;\Phi]} \right]_{\Phi_f \sim r^{\Delta-d}(J+\lambda), \Phi_b \sim r^{\Delta-d}\lambda}$$

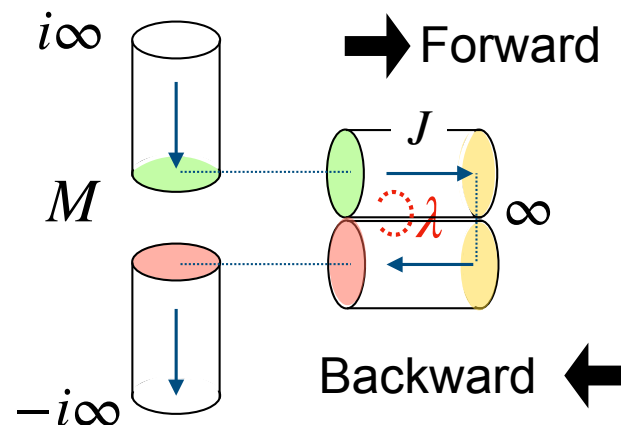
$$\partial M \cong C \times [\vec{x} - \text{directions}]$$

M 上でいつもの古典場の計算

最後に λ についてガウス平均



CFT



AdS

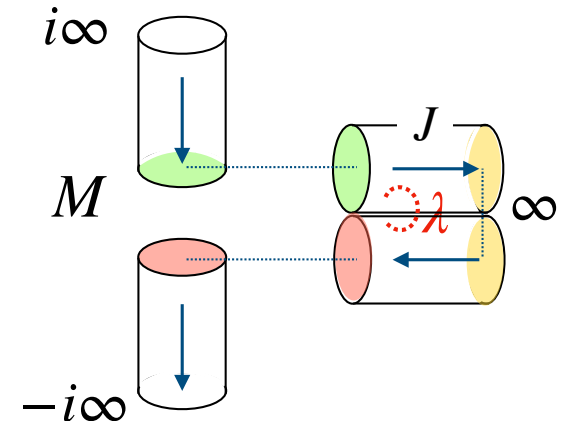
Lindblad力学のホログラフィック双対

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \gamma \int d^{d-1}\vec{x} \left[O(\vec{x})\rho O(\vec{x}) - \frac{1}{2}\{O(\vec{x})^2, \rho\} \right]$$

$$\begin{aligned} Z[J] &:= \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_{\text{CFT}}[C;\phi] + \int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x} \left(iJO_f - \frac{\gamma}{2}(O_f - O_b)^2 \right)} \\ &= \int \mathcal{D}\lambda \, e^{-\frac{1}{2\gamma} \int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x} \lambda(t, \vec{x})^2} \left[e^{iS_{\text{AdS}}[M;\Phi]} \right]_{\Phi_f \sim r^{\Delta-d}(J+\lambda), \, \Phi_b \sim r^{\Delta-d}\lambda} \end{aligned}$$

$$\text{Tr} \left[O e^{(t_n - t_{n-1})\mathcal{L}} O \dots O e^{(t_1 - t_0)\mathcal{L}} \rho(t_0) \right]$$

$$= \left\langle e^{-iS[M;\Phi]} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_n)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_1)} e^{iS[M;\Phi]} \right\rangle_{J=0} \Big|_{\lambda}$$



Lindblad = AdS重力 + ホワイトノイズBC

Lindblad = AdS重力 + ホワイトノイズBC

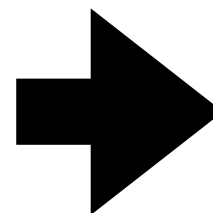
1. 開放量子系のLindblad方程式を、経路積分で
2. 経路積分を変形し、GKPWからバルクへ
3. 自由スカラー場 on AdS_3 はCFTの結果を再現

プローブ自由スカラー場 on AdS_3

$$S_{\text{AdS}} = -\frac{1}{2} \int d^3x \left[(\partial\Phi)^2 - \Delta(2 - \Delta)\Phi^2 \right] + S_{\text{bdy}}$$

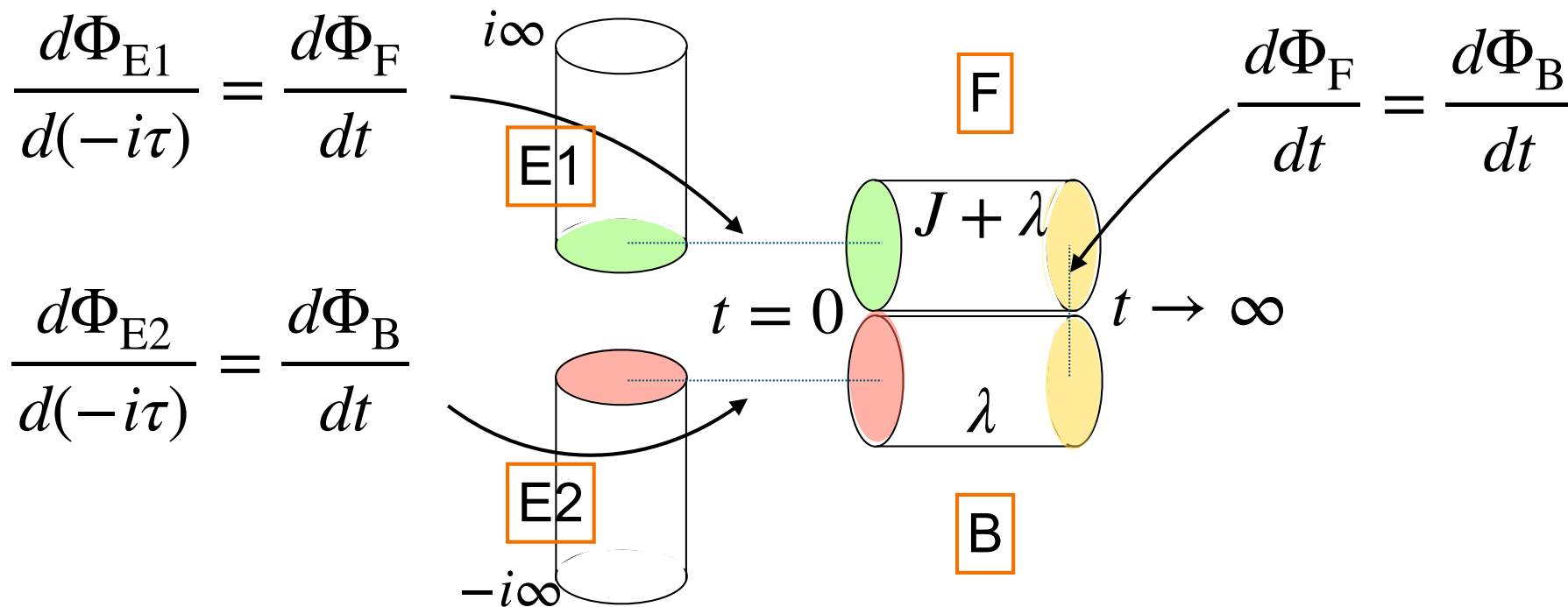
$$ds^2 = -(r^2 + 1)dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 + 1} + r^2 d\theta^2$$

- λ を固定してそれぞれでEOMを解く
- 場を「滑らかに」繋ぐ



$e^{iS_{\text{AdS}}[M;\Phi]}$ に代入して
 λ 積分を実行

Skenderis, van Rees (2008)



AdSからCFTへの予言： 1 ・ 2 点相関関数

1 点相関関数

$$\langle O(t, \theta) \rangle = 0$$

$$F(t, \theta) \propto [\cos(t - i\epsilon) - \cos \theta]^{-\Delta}$$

ユニタリ部分

2 点相関関数 ($t_2 \geq t_1$)

$$\langle O(t_2, \theta_2) O(t_1, \theta_1) \rangle = F(t_2 - t_1, \theta_2 - \theta_1)$$

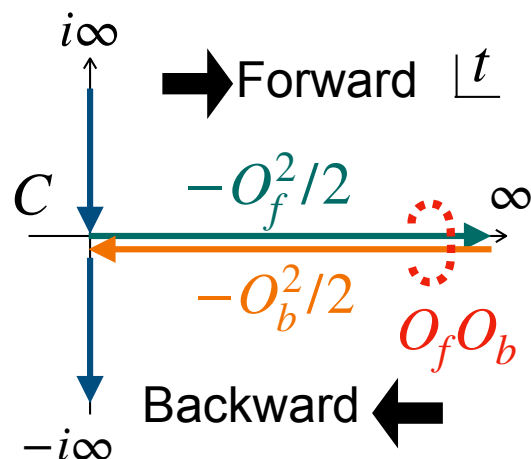
$$\begin{aligned} & -\gamma \int_0^{t_1} dt \int d\theta [F(t_1 - t, \theta_1 - \theta) - F(t - t_1, \theta - \theta_1)] \\ & \times [F(t_2 - t, \theta_2 - \theta) - F(t - t_2, \theta - \theta_2)] \end{aligned}$$

拡散部分

CFTの摂動計算と整合

今回の辞書が正しいか、ラージ N のCFTで確認した

$$\begin{aligned}\langle TO(x_2)O(x_1) \rangle &= \int \mathcal{D}\phi \ O_f(x_2)O_f(x_1)e^{iS_{\text{CFT}}[C;\phi] - \frac{\gamma}{2} \int d^2x (O_f - O_b)^2} \\ &\simeq \langle TO(x_2)O(x_1) \rangle_0 - \frac{\gamma}{2} \int_x \underbrace{\langle O_f(x_2)O_f(x_1)(O_f(x) - O_b(x))^2 \rangle_0}\end{aligned}$$



f は b より右へ

f (b) 同士は (反) 時間順序

4点をWickの定理で2点の積へと分解

→ バルクの結果に一致

バルクのプローブ近似 = CFTの $O(\gamma^1)$
(AdSの近傍) (真空の近傍)

Lindblad = AdS重力 + ホワイトノイズBC

1. 開放量子系のLindblad方程式を、経路積分で
2. 経路積分を変形し、GKPWからバルクへ
3. 自由スカラー場 on AdS_3 はCFTの結果を再現

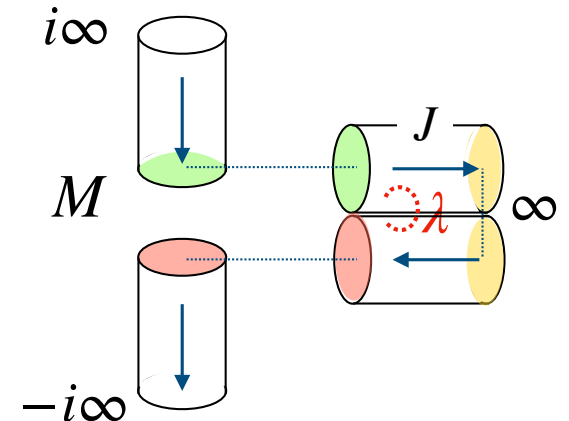
Lindblad力学のホログラフィック双対

$$\dot{\rho} = -i[H, \rho] + \gamma \int d^{d-1}\vec{x} \left[O(\vec{x})\rho O(\vec{x}) - \frac{1}{2}\{O(\vec{x})^2, \rho\} \right]$$

$$\begin{aligned} Z[J] &:= \int \mathcal{D}\phi \, e^{iS_{\text{CFT}}[C;\phi] + \int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x} \left(iJO_f - \frac{\gamma}{2}(O_f - O_b)^2 \right)} \\ &= \int \mathcal{D}\lambda \, e^{-\frac{1}{2\gamma} \int_0^\infty dt \int d^{d-1}\vec{x} \, \lambda(t, \vec{x})^2} \left[e^{iS_{\text{AdS}}[M;\Phi]} \right]_{\Phi_f \sim r^{\Delta-d}(J+\lambda), \, \Phi_b \sim r^{\Delta-d}\lambda} \end{aligned}$$

$$\text{Tr} \left[O e^{(t_n - t_{n-1})\mathcal{L}} O \dots O e^{(t_1 - t_0)\mathcal{L}} \rho(t_0) \right]$$

$$= \left\langle e^{-iS[M;\Phi]} \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_n)} \dots \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(t_1)} e^{iS[M;\Phi]} \right\rangle_{J=0} \Big|_{\lambda}$$



Lindblad = AdS重力 + ホワイトノイズBC