

Universidad Autónoma de Madrid

FACULTAD DE CIENCIAS

Proceso Inflacionario con Campos
Gauge (Single y Multi-Field).
Paradigma Actual, Modelo de Axiones.

Memoria de Prácticas

Alumno:

Alberto Álvaro Díaz

Tutor:

Matteo Fasiello

Curso:

2022/2023

Abstract:

Este trabajo consiste en una breve introducción a la teoría de la inflación cósmica. Después de analizar cómo esta idea resuelve algunos de los paradigmas del modelo “Hot-Big-Bang” en comparación con las observaciones experimentales, se da paso a una descripción detallada del modelo *single-field*. En un primer lugar, se estudia las predicciones a nivel de la función de correlación a dos puntos (*power-spectrum*) de las fluctuaciones introducidas en la teoría, tanto para el sector escalar como para el tensorial. Posteriormente se introduce la idea de no-Gaussianidad, con la función de correlación a tres puntos (*bispectrum*), mostrando su relación con las interacciones inflacionarias. Se proporciona el análisis de las no-Gaussianidades tanto en el caso *single-field* como en el de *multi-field*, mostrando cómo este último puede admitir una señal mucho más grande que corresponda con las observaciones del fondo cósmico de microondas. Finalmente, se realiza un estudio sobre modelo de axiones mas centrado en las observaciones de interferómetros sobre el fondo estocástico de ondas gravitacionales de agujeros negros primordiales. Algunos aspectos más técnicos se detallan en varios anexos. Como punto final, se relacionan los aspectos teóricos tratados en este trabajo con las investigaciones mas punteras en la actualidad.

Índice

1. Introducción	1
2. Contexto Cosmológico	2
2.1. El Verdadero Problema. Motivación para el <i>inflatón</i> .	3
2.1.1. El Problema del Horizonte	3
2.1.2. Parámetros de Slow-roll	4
3. Single-Field	5
3.1. Fluctuaciones en la Métrica	6
3.1.1. Parte Escalar	6
3.1.2. Solución Exacta a la Ecuación de Mukhanov-Sasaki	7
3.1.3. Parte Tensorial	8
3.2. Power-Spectrum	8
3.3. No-Gaussianidad. Bispectrum	9
3.4. Medida del Bispectrum para Inflación de Single-Field Slow-Roll	11
4. Multi-Field	13
4.1. Generalización de las Ecuaciones y Dirección del Campo	13
4.2. Perturbaciones adiabáticas y entrópicas	13
4.3. Proceso Inflacionario con dos Campos Escalares	15
4.4. No-Gaussianidad. Bispectrum y Trispectrum	18
5. Modelo de Axiones	19
5.1. Natural Inflation and Campos Gauge	20
5.2. Aplicación a Futuras Observaciones	24
6. Conclusiones	26
7. Referencias	29
8. Anexo	32
8.1. Formalismo in-in	32
8.2. Ecuaciones de Einstein Perturbadas	33
8.3. Formalismo δN	35

1. Introducción

La evolución de las observaciones en las ultimas décadas, en particular las del fondo cósmico de microondas (CMB), nos ha permitido adquirir nociones fundamentales sobre la dinámica del universo primitivo. Las mismas observaciones del CMB han hecho evidente la presencia de algunas paradojas en el modelo Hot-Big-Bang del universo. La hipótesis de un universo compuesto únicamente por materia estándar y radiación (el modelo Hot-Big-Bang) no puede reconciliarse con las muy pequeñas ($\Delta T/T \sim 10^{-5}$) variaciones de temperatura que se observan (incluso) a gran escala en el CMB. En este trabajo trataremos en detalle una idea que nos ha permitido resolver esta y otras paradojas de la física del universo primitivo: la inflación cósmica.

La inflación es un proceso de expansión acelerada en momentos iniciales del universo. Veremos las causas motivacionales que llevan a esta teoría y las condiciones necesarias para que este proceso sea posible. Para tratar de representar las observaciones del fondo cósmico de microondas, se estudiarán en particular los modelos *single-field* y *multi-field* en el contexto de inflación *slow-roll*.

En aras de la brevedad, con referencia a las observaciones experimentales nos limitaremos a la física del CMB. Las pruebas de la física del universo primitivo a estas escalas han proporcionado hasta ahora la información más importante. Pensar en el progreso realizado por la cosmología gracias a los datos adquiridos por las misiones COBE, WMAP y luego Planck. Los nuevos experimentos y en particular CMB-S3/Simons Observatory, CMB-S4 [1] y LiteBIRD [2] prometen hacer lo mismo.

Sin embargo, para proporcionar algo de contexto, debemos nombrar otros experimentos a gran escala, *astronomical surveys* como Euclid [3], Vera Rubin Observatory [4] y SKA [5] y experimentos a escala intermedia como los pulsar *timing array*. Para probar la cosmología a pequeña escala, y en particular los mecanismos (incluida la inflación cósmica) que generan ondas gravitacionales en el universo primitivo, tenemos disponibles interferómetros como LIGO/Virgo y próximamente LISA, ET.

El número y la calidad de los experimentos que se activarán en los próximos años nos permite ser optimistas sobre la posibilidad de que nuestra comprensión de la cosmología tenga grandes progresos. Con respecto a la inflación cósmica en particular, el tema principal de este trabajo, existen excelentes perspectivas de identificar la energía en la que se produjo la inflación y el contenido de partículas del Lagrangiano que la describe [6].

2. Contexto Cosmológico

En primer lugar realizaré una breve introducción a la cosmología, me centraré en los aspectos mas importantes que nos serán útiles para el entendimiento del trabajo al completo.

Para tratar de conocer la dinámica de nuestro universo partiremos de varias suposiciones y herramientas, a saber:

1) El Principio Cosmológico: Considerar el universo homogéneo e isótropo en el espacio pero no en el tiempo, es decir, el universo evoluciona en el tiempo. Las observaciones a escalas cosmológicas nos dicen que el universo es aproximadamente homogéneo e isótropo. Gracias a esta asunción, consideramos el universo como una variedad *máximamente simétrica*. Conocemos un ejemplo de métrica *máximamente simétrica*, la métrica de Schwarzschild, esféricamente simétrica. Otro ejemplo particularmente útil en cosmología es la métrica Friedmann-Lemetric-Robertson-Walker (FLRW):

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left[\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2) \right] \quad (1)$$

2) Considerar el universo como un fluido perfecto. Equivalente a considerar el universo como un fluido isotrópico desde un sistema de referencia en reposo. La forma general del tensor energía-momento es:

$$T^{\mu\nu} = p(t)g^{\mu\nu} + (p(t) + \rho(t))u^\mu u^\nu \quad (2)$$

Se obtiene un tensor completamente diagonal en correspondencia con el Lagrangiano más simple que, sin embargo, describe muy bien el fenómeno inflacionario.

3) La gravedad en las escalas de energía del universo primitivo, y en particular durante la inflación cósmica, está descrita por la teoría de la relatividad general de Einstein:

$$R_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}T \right) \quad (3)$$

Donde T denota la traza de $T_{\mu\nu}$, es decir, T^μ_μ .

Con estos ingredientes, evaluando índice a índice, obtenemos la denominada primera ecuación de Friedmann:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} \quad (4)$$

Donde en ρ van incluidas todas las densidades de energía posibles, por ejemplo materia, radiación, constante cosmológica etc. Sin pérdida de generalidad reescribimos la primera ecuación

de Friedmann:

$$H^2 = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (5)$$

Donde hemos extraído la constante cosmológica de ρ .

2.1. El Verdadero Problema. Motivación para el *inflatón*.

Entre los primeros éxitos de la hipótesis inflacionaria está el hecho de que este mecanismo resuelve algunos de los enigmas del modelo cosmológico Hot-Big-Bang (HBB). Esencialmente, el modelo HBB asume la presencia de materia y radiación en el universo y de componentes que tienen una ecuación de estado análoga. Como veremos en breve, la presencia de otros componentes es necesaria para resolver los enigmas conocidos como (i) el problema del horizonte; (ii) el problema de la planitud; (iii) el problema de los monopolos magnéticos. La resolución del problema (i) también garantiza automáticamente la solución del punto (ii), mientras que el punto (iii) surge de consideraciones no necesariamente compartidas con la GUT (*Grand Unification Theory*¹). Por esta razón, nos centramos únicamente en el problema del horizonte en la siguiente sección.

2.1.1. El Problema del Horizonte

Como sabemos, durante la historia del universo han predominado diferentes etapas caracterizadas por la predominancia de una densidad de energía en concreto: radiación, materia y ,actualmente, constante cosmológica, en ese orden.

Para ubicarnos en instantes pasados del universo podemos olvidarnos de la constante cosmológica y operar sobre la forma de la Ec. (4). Introduciendo la masa de Planck reducida, nos queda de la forma:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2}\rho \quad (6)$$

Asumiendo un universo dominado exclusivamente² por radiación y materia, se puede demostrar que los puntos en el cielo que han estado en contacto causal entre sí subyacen en un arco no mayor que³:

$$2\theta_{hor} \simeq 2,3^\circ \quad (7)$$

La identificación de este ángulo relativamente pequeño está en fuerte contradicción con lo que sabemos de las observaciones, es decir, el fondo cósmico de microondas tiene una temperatura uniforme en casi todas las escalas (y ángulos) con variaciones $\Delta T/T \sim 10^{-5}$. Un valor tan bajo

¹Al respecto, el análisis en [29] es muy instructivo.

²Si la constante cosmológica está en el origen de la aceleración actual del universo, su efecto es inevitablemente insignificante para la evolución del universo primitivo.

³Por verlo en profundidad, uno puede seguir un procedimiento similar al encontrado en el apartado 1.2.2 de [8].

para las fluctuaciones de temperatura sugiere que las regiones espaciales, incluso separadas por grandes ángulos, han estado en contacto causal en el pasado, por lo que pudieron alcanzar el equilibrio térmico. Esta paradoja se conoce como el problema del horizonte.

Dado que la hipótesis de un universo primordial compuesto únicamente por radiación y materia no es suficiente para explicar las observaciones del CMB, la hipótesis de un período de expansión acelerada ha ganado terreno. Esta fase de expansión, permite un contacto causal entre regiones del espacio que de otro modo (en la hipótesis inicial del modelo del HBB) nunca estarían en contacto entre sí.

2.1.2. Parámetros de Slow-roll

El campo escalar viene determinado por la ecuación de movimiento de Klein-Gordon:

$$(\Box^2 + m^2)\phi = 0 \quad (8)$$

Operando para ϕ obtenemos:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V' \quad (9)$$

Por otro lado, aplicando la definición de Lagrangiano de un campo escalar y del tensor energía-momento, nos podemos convencer que $T_{00} = \rho = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi)$ y $T_{ii} = p_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V(\phi)$. Podemos encontrar el desarrollo en el apartado 2.1 de [10] Luego para la Ec. (6) nos queda como:

$$H^2 = \frac{1}{3M_{pl}^2} \left[\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \right] \quad (10)$$

Usando la condición de expansión $\frac{d^2 a}{dt^2} > 0 \iff \epsilon \equiv -\frac{\dot{H}}{H^2} < 1$ obtenemos el siguiente resultado para ϵ :

$$\epsilon = \frac{3\dot{\phi}^2}{\dot{\phi}^2 + \frac{V}{2}}, \quad (11)$$

lo que demuestra cómo la condición $\dot{\phi}^2 \ll V$ corresponde a requerir $\epsilon \ll 1$, es decir, la primera condición de *slow-roll*. Usando ahora la Ec. (9), bajo el supuesto de que $\ddot{\phi} \ll 3H\dot{\phi}$ así como la primera condición de *slow-roll*, obtenemos que ϵ se puede aproximar bien por la cantidad

$$\epsilon \simeq \frac{M_{Pl}^2}{2} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 \equiv \epsilon_\nu \ll 1 \quad (12)$$

Para asegurarnos que la condición de ϵ se mantiene el suficiente tiempo, en otras palabras, la

aceleración del potencial es lo suficientemente pequeña, será útil definir el siguiente parámetro:

$$\delta = -\frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}} \quad (13)$$

de donde η , parámetro asociado a la suficiente duración de la inflación, $|\eta| = \frac{|\dot{\epsilon}|}{H\epsilon} \ll 1$ se convierte en

$$\eta = 2(\epsilon - \delta) \quad (14)$$

De manera similar a lo que se hizo para ϵ , a veces se encuentra en la literatura científica una definición alternativa para η

$$|\eta_\nu| = M_{pl}^2 \frac{|V''|^2}{V} \quad (15)$$

Resumimos diciendo que una fase inflacionaria *slow-roll* se caracteriza por tanto por una evolución que respeta las condiciones $\epsilon \ll 1$ y $\eta \ll 1$. Se obtiene una formulación equivalente en las variables alternativas.

Los parámetros de *slow-roll* también podemos entenderlos como cuánta desviación encontramos respecto al espacio de Sitter (definido cuando $\epsilon_\nu = \eta_\nu = 0$), diremos entonces que estamos en el espacio quasi-de Sitter. Diremos también que la inflación termina cuando $\epsilon = 1$.

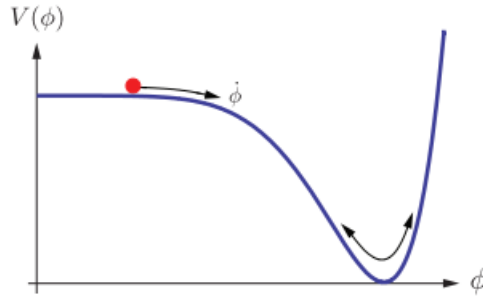


Figura 1: Forma del Potencial $V(\phi)$ para el *Inflatón*. Imagen obtenida de [8].

3. Single-Field

Una vez tenemos caracterizado y entendido el proceso inflacionario tendremos que comprobar si el modelo es consistente con las observaciones. En este capítulo trataré de convencer al lector de cómo el proceso inflacionario, por un único campo escalar, trata de recrear las observaciones vistas en el CMB. Como ya hemos mencionado, las anisotropías, por pequeñas que sean, nos ofrecen mucha información acerca del pasado de nuestro universo. Para tratar de convencernos de la existencia de estas, supondremos pequeñas perturbaciones en el campo del *inflatón*. Durante el recorrido de este capítulo estudiaremos estas perturbaciones para compararlas con el CMB.

3.1. Fluctuaciones en la Métrica

Para hacer visibles estas perturbaciones, aplicaremos fluctuaciones en la parte espacial de la métrica⁴:

$$g_{ij}(t, x) = \bar{g}_{ij} + \delta g_{ij}(t, x) \quad \rightarrow \quad \delta g_{ij} = a^2(1 - 2\zeta)\delta_{ij} + a^2 h_{ij} \quad (16)$$

Donde ζ corresponde con una perturbación escalar (en la curvatura) y h_{ij} con una perturbación tensorial. Este último, dado a las propiedades de la relatividad general, es un tensor definido *transverse* ($\nabla_i h^{ij} = 0$) y *traceless* ($h^i_i = 0$), que junto con la simetría del tensor (proveniente de la métrica) nos deja con dos únicos grados de libertad. Tendremos un total de 3 grados de libertad, 1 escalar, proveniente del campo del *inflatón* introducido, mas 2 tensoriales, provenientes de la RG⁵.

3.1.1. Parte Escalar

Trataremos de obtener el Lagrangiano para la métrica perturbada. En estos instantes deberemos confiar en los pasos matemáticos que se van a omitir, ya que su complejidad darían para otro trabajo a parte, aun así, si el lector quiere entrar en mayor detalle puede ver [12]. Se obtiene la siguiente acción:

$$S = \frac{1}{2} \int dt d^3x a^3 \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} \left[\dot{\zeta}^2 - \frac{1}{a^2} (\partial_i \zeta)^2 \right] \quad (17)$$

Realizando el cambio de variable de $v = z\zeta$ donde $z^2 = a^2 \frac{\dot{\phi}^2}{H^2} = 2a^2\epsilon$, y aplicando el principio de mínima acción ($\delta S = 0$), nos queda la denominada ecuación de Mukhanov-Sasaki:

$$v_{\mathbf{k}}'' + \left(k^2 - \frac{z''}{z} \right) v_{\mathbf{k}} = 0 \quad (18)$$

Encontramos gran similitud con la EDO del oscilador armónico, con una frecuencia dependiente del tiempo. Esta EDO nos describe la evolución de las perturbaciones descritas en (16). Será la ecuación mas importante en lo que resta de capítulo.

Llegados a este punto debemos cuestionarnos una idea de manera conceptual. El proceso inflacionario provoca que el horizonte de sucesos disminuya, provocando que grandes partes del universo dejen de estar en conexión causal. Llevándonos esta idea a las perturbaciones aplicadas, deberemos comparar las escalas de estas perturbaciones con las propias escalas del universo (de nuestro horizonte) y que ocurre con las perturbaciones cuando estas dejan de estar en conexión causal. Lo entendemos mejor con el siguiente gráfico.

⁴Al final podemos trabajar también con $\delta\phi(t, x) = \phi(t, x) - \bar{\phi}(x)$ como una variación respecto a un promedio de *background*. Seguramente esta primera idea fuera mas intuitiva para el lector, pero se ha decidido trabajar con la métrica por una simplicidad a posterior que nos permite el *comoving gauge*. Al final ambos caminos son análogos.

⁵Podemos ver una justificación de los 2 grados de libertad provenientes de la RG en el punto 2.1 de [11].

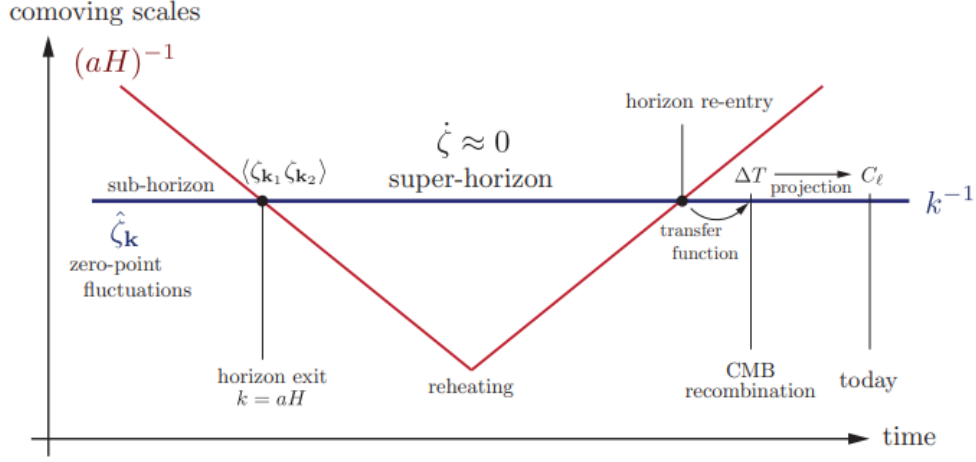


Figura 2: Comparación de las escalas del universo con las escalas de las perturbaciones en la curvatura. Imagen obtenida de [8].

Donde comparamos la evolución de las escalas del horizonte causal y de las perturbaciones en la curvatura (ζ). Mas adelante volveremos a este gráfico para terminar de entenderlo.

3.1.2. Solución Exacta a la Ecuación de Mukhanov-Sasaki

Nos centraremos ahora en resolver la Ec. (18) de manera exacta. En primera instancia buscamos unas condiciones iniciales, para entendernos, un punto de partida para el comienzo de la inflación, este será entonces un espacio de Minkowski (reflejado en la ecuación como el límite donde $a = 0$). Encontramos entonces: $v_{\mathbf{k}}'' + k^2 v_{\mathbf{k}} = 0$. Se puede demostrar que el estado de mínima energía corresponde con la exponencial negativa, luego encontramos que⁶:

$$\lim_{\tau \rightarrow -\infty} v_k(\tau) = \frac{1}{\sqrt{2k}} e^{-ik\tau} \quad (19)$$

Esto es conocido como el vacío de Bunch-Davies. La solución general a (18) en este espacio aplicando la condición inicial recién encontrada es⁷:

$$v_k(\tau) = \frac{e^{-ik\tau}}{\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{i}{k\tau} \right) \quad (20)$$

Antes de seguir avanzando trataremos la parte tensorial de las perturbaciones incluidas en (16).

⁶Recordad que el tiempo conforme se encuentra definido entre $(-\infty, 0)$

⁷Recordad los cambios de variable realizados, dejan definido $z = a\dot{\phi}/H$.

3.1.3. Parte Tensorial

En esta sección se llevará a cabo el mismo procedimiento que se ha seguido para el campo escalar, pero enfocándonos en la parte tensorial perturbada incluida en la métrica. Trataré de ser mas conciso, ya que consisten en los mismos procedimientos ya vistos. La acción cuadrática queda como:

$$S = \frac{M_{pl}^2}{8} \int d\tau d^3\mathbf{x} a^2 [(h'_{ij})^2 - (\nabla h_{ij})^2] \quad (21)$$

En el espacio de momentos:

$$S = \sum_{\gamma} \int d\tau d^3\mathbf{k} \frac{a^2}{4} M_{pl}^2 [(h'_{\mathbf{k},\gamma})^2 - k^2 (h_{\mathbf{k},\gamma})^2] \quad (22)$$

Donde el índice γ indica las dos posibles polarizaciones de una onda gravitacional (+ y \times). Realizando el cambio de variable $v_{\mathbf{k},\gamma} = \frac{a}{2} M_{pl} h_{\mathbf{k},\gamma}$ encontramos la ecuación de Mukhanov-Sasaki:

$$S = \sum_{\gamma} \frac{1}{2} \int d\tau d^3\mathbf{k} \left[(v'_{\mathbf{k},\gamma})^2 - \left(k^2 - \frac{a''}{a} \right) (v_{\mathbf{k},\gamma})^2 \right] \quad (23)$$

Donde en el espacio de Sitter, $\frac{a''}{a} = \frac{z''}{z} = \frac{2}{\tau^2}$. Es decir, encontramos un trato idéntico para la parte tensorial y escalar, lo que nos indica que la soluciones serán idénticas (a excepción de la normalización), por lo que las obviaremos.

3.2. Power-Spectrum

Hasta ahora nos hemos centrado en una resolución matemática de la dinámica de las fluctuaciones introducidas en (16), un trato completamente teórico. Al final, lo importante es buscar la forma de identificar estas evoluciones que hemos caracterizado matemáticamente con los observables experimentales. Esto haremos en esta sección, introducimos entonces el *power-spectrum*. De manera conceptual se entiende como una medida de la influencia de estas perturbaciones en el estado fundamental del vacío⁸.

Para proceder, realizaremos una cuantización del campo escalar. Trataremos de calcular el promedio de $\langle \hat{v}_{\mathbf{k}} \hat{v}_{\mathbf{k}'} \rangle$, esto es:

$$\langle \hat{v}_{\mathbf{k}} \hat{v}_{\mathbf{k}'} \rangle = \langle 0 | \hat{v}_{\mathbf{k}} \hat{v}_{\mathbf{k}'} | 0 \rangle = \langle 0 | (\hat{a}_{\mathbf{k}}^- v_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}}^+ v_{\mathbf{k}}^*) (\hat{a}_{\mathbf{k}'}^- v_{\mathbf{k}'} + \hat{a}_{-\mathbf{k}'}^+ v_{\mathbf{k}'}^*) | 0 \rangle \quad (24)$$

Operando el paréntesis, recordando las reglas de conmutación de los operadores escalera y

⁸En el formalismo de la mecánica cuántica lo describiremos como $|0\rangle$

actuando sobre los estados de vacío encontramos:

$$\langle \hat{v}_{\mathbf{k}} \hat{v}_{\mathbf{k}'} \rangle = |v_k|^2 \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') = P_v(k) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (25)$$

Según lo encontrado en (20), el *power-spectrum* adquiere la siguiente forma:

$$P_v = \frac{1}{2k^3 \tau^2} = \frac{(aH)^2}{2k^3} \quad P_\zeta = \frac{P_v}{z^2} = \frac{H^2}{4k^3 \epsilon} \quad (26)$$

Donde hemos deshecho el cambio del *power-spectrum* de las fluctuaciones para ζ y hemos generalizado lo encontrado para el espacio quassi-de Sitter. Será útil también introducir su forma adimensional, para posteriormente comparar con el *power-spectrum* de la parte tensorial⁹:

$$\Delta_\zeta^2(k) = \frac{k^3}{2\pi^2} P_\zeta(k) \quad (27)$$

Por lo correspondiente a la parte tensorial y lo visto en la sección 3.1.3, es instantáneo determinar que el *power-spectrum* será idéntico al recién encontrado, variando únicamente su forma adimensional:

$$\Delta_t^2(k) = \frac{2H^2}{(\pi M_{pl})^2} \quad (28)$$

Unas cantidades interesantes de definir serán el índice espectral escalar (n_s) y el ratio escalar-tensorial (r), esto es:

$$n_s - 1 = -2\epsilon - \eta \quad r = \frac{\Delta_t^2}{\Delta_\zeta^2} = 16\epsilon \quad (29)$$

Estas cantidades son las que “definen” el modelo, las usaremos posteriormente para comparar los diferentes modelos junto con las observaciones.

3.3. No-Gaussianidad. Bispectrum

Hasta ahora hemos estado tratando el segundo término en nuestra teoría de perturbaciones. Como hemos visto corresponden con soluciones libres, es decir, con un espectro gaussiano. En esta sección trataremos el siguiente término en nuestra perturbación, donde se pierde la generalidad de las formas gaussianas y encontramos desviaciones según aumentamos la precisión. Veremos como una correlación en tres puntos nos da información sobre las interacciones del *inflatón*.

De forma general, trataremos de desarrollar los mismos observables que hemos deducido para el *power-spectrum*.

⁹Dado a que la dinámica del *super-horizon* viene dada por $\dot{\zeta} \sim 0$, el *power-spectrum* no varía, por lo que podemos evaluar en el momento de la salida del horizonte en $k = aH$, por lo que únicamente nos queda en función de k .

Para definir correctamente el *bispectrum* me veo en la obligación de definir sus comportamientos matemáticos, para posteriormente tratar de definir conceptualmente la relación física. De esta manera, se define como la función de correlación a tres puntos en el espacio de momentos, esto es:

$$\langle \zeta_{\mathbf{k}_1} \zeta_{\mathbf{k}_2} \zeta_{\mathbf{k}_3} \rangle = B_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = (2\pi)^3 \delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) B_\zeta(k_1, k_2, k_3) \quad (30)$$

Donde la función delta es una consecuencia de la conservación del momento. El *bispectrum* se puede escribir como

$$B_\zeta(k_1, k_2, k_3) = \frac{S(k_1, k_2, k_3)}{(k_1 k_2 k_3)^2} \Delta_\zeta^2(k), \quad (31)$$

donde el *power-spectrum* se ha evaluado en un k genérico de la misma escala que los k_i . La función S es denominada la *shape* del *bispectrum*. La *shape* es una cantidad que proporciona información clave sobre la dependencia del momento del *bispectrum*. Incluso si estos no representan una base completa, se acostumbra clasificar las diversas *shapes* de los modelos inflacionarios según su similitud¹⁰ a funciones conocidos, como por ejemplo las *shapes* equilátera, local y ortogonal.

Lo que nos interesa de las funciones mencionadas es donde se generan sus máximos, mostramos esto en la siguiente figura.

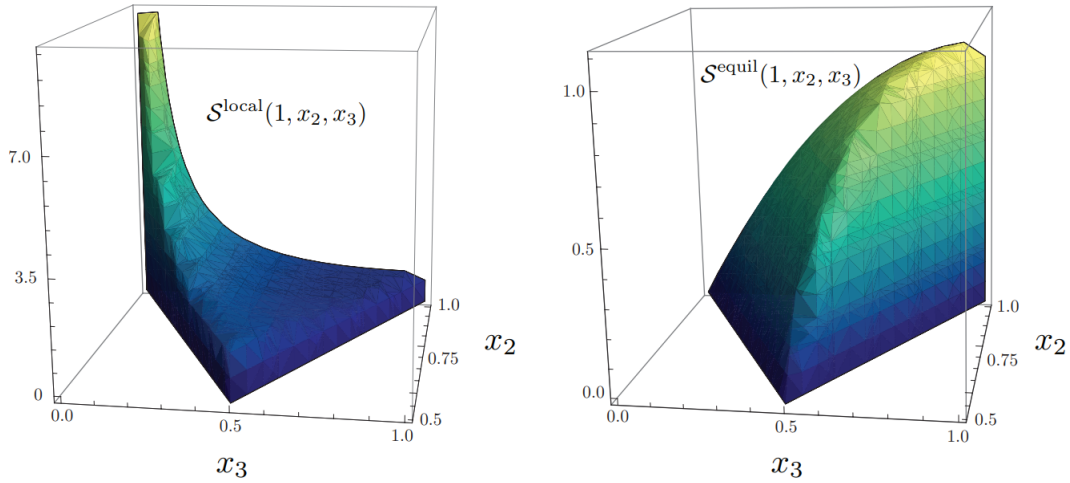


Figura 3: Las *shapes* local y equilátera, donde $x_2 = k_2/k_1$ y $x_3 = k_3/k_1$. Imagen obtenida de [8].

Definimos también la amplitud del *bispectrum* como:

$$f(K) = \frac{5}{18} S(K, K, K) \quad (32)$$

Donde $K = \frac{1}{3}(k_1 + k_2 + k_3)$.

¹⁰Una noción que se define de manera matemáticamente rigurosa introduciendo un producto escalar entre *shapes* [24].

Habiendo introducido el parámetro no lineal f_{NL} y el concepto de *shape*, podemos comentar brevemente su significado físico. El parámetro no lineal nos da una medida de la “fuerza” de las auto-interacciones del *inflatón*. En ausencia, por ejemplo, de un Lagrangiano cúbico, la llamada contribución “tree-level” a los diagramas de Feynmann que se utilizan para el cálculo de las *bispectrum* es cero.

La *shape* contiene información más sofisticada. Dado por ejemplo un modelo inflacionario *slow-roll* con un campo escalar ligero ($m \ll H$) y auto-interactuante descrito por el potencial inflacionario que depende solo del campo ϕ (y no de las sus derivadas), se espera una forma local para la no-Gaussianidad escalar. Si modificamos este modelo introduciendo un campo pesado y/o con interacciones con derivadas, la *shape* correspondiente cambiará en la dirección del perfil equilátero. En este sentido, por tanto, a partir de la *shape* es posible extrapolar información sobre la masa y las (auto) interacciones de las partículas inflacionarias. Si al lector le interesa podrá encontrar una explicación más detallada y múltiples ejemplos de diferentes Lagrangianos y la *shape* que crean en [13].

3.4. Medida del Bispectrum para Inflación de Single-Field Slow-Roll

Como hemos visto, el *bispectrum* es una herramienta que nos relaciona la Lagrangiana del campo del *inflatón* con las medidas del CMB, esquemáticamente $\zeta \propto \Delta T/T$. Por motivos evidentes es un camino que no podemos seguir, por lo que trataremos de realizarlo a la inversa, partiendo del \mathcal{L} que ya conocemos para la inflación de *slow-roll*¹¹:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}R - \frac{1}{2}(\partial_\mu \phi)^2 - V(\phi) \quad (33)$$

Aplicamos teoría de perturbaciones y encontramos los términos cuadráticos y cúbicos del Lagrangiano en términos de los parámetros de *slow-roll*. Si al lector le interesase el desarrollo puede acudir a él en los capítulos 2 y 3 de [14]:

$$\mathcal{L}_2 = \epsilon(\partial_\mu \zeta)^2 \quad \mathcal{L}_3 = \epsilon^2 \zeta \dot{\zeta}^2 + \epsilon^2 \zeta (\partial_i \zeta)^2 - 2\epsilon \dot{\zeta} (\partial_i \zeta) (\partial_i \chi) + 2f(\zeta) \frac{\delta L_2}{\delta \zeta} + O(\epsilon^3) \quad (34)$$

Donde $L_2 = a^3 \mathcal{L}_2$ y la función $f(\zeta) = \frac{\eta \zeta^2}{4}$. Esta última función contiene muchos términos proporcionales a $\dot{\zeta}$ que como sabemos se hacen 0 en el exterior del horizonte, por lo que no

¹¹Hasta ahora, no se había presentado esta Lagrangiana, debido a ser la Lagrangiana más básica, y al no considerarse necesario, aun así sí se ha comentado de palabra en el capítulo 2, únicamente debería formarse por un término constante (escalar de Ricci), parte cinética y parte potencial, si al lector aún le persisten las dudas puede revisar la sección 2.1 de [10].

tendremos contribuciones al *bispectrum*.

Teniendo la expresión para la Lagrangiana cúbica, siguiendo con el proceso comentado, trataremos de hallar la función de correlación a 3 puntos. Para ello usaremos $H_3 = -\int \mathcal{L}_3 d^3x$, esto es:

$$\langle \zeta^3 \rangle = -i \int_{-\infty}^0 dt \langle 0 | [\zeta(\mathbf{k}_1) \zeta(\mathbf{k}_2) \zeta(\mathbf{k}_3), H_3(t)] | 0 \rangle = -i \int_{-\infty}^0 dt \langle 0 | [\zeta^3, H_{int}(t)] | 0 \rangle \quad (35)$$

Para este cálculo se usa el formalismo *in-in*. Se ha dejado en el Anexo un capítulo dedicado a este formalismo, podremos encontrarlo en 8.1. Donde $H_{int} = H_3$ usado en el Anexo comentado. Para una primera aproximación, para conocer el orden de magnitud de la integral y, por ende, una idea sobre la amplitud del *bispectrum*, buscaremos las proporcionalidades. Para ello tendremos en cuenta las siguientes relaciones:

$$H_{int} \propto a^2 \epsilon^2 \zeta (\zeta')^2 \quad a \propto H^{-1} \quad \zeta \propto \zeta' \propto \Delta_\zeta \approx H/\sqrt{\epsilon} \quad \zeta^3 \approx H^3 \epsilon^{-3/2} \quad (36)$$

Donde la primera relación la encontramos de los primeros términos de (34) ya que las contribuciones que depende del tiempo y del momento no aplican a la amplitud pero si al *shape*, que calcularemos a continuación. La segunda relación es evidente en el espacio de Sitter, y las últimas relaciones pueden derivarse de (25) y (27). Con estas herramientas, para el cálculo de (35) encontramos:

$$\langle \zeta^3 \rangle \propto \frac{H^4}{\epsilon} \propto O(\epsilon) \Delta_\zeta^4 \propto \Delta_\zeta^4 f_{NL} \quad (37)$$

Nos hacemos a la idea entonces de $f_{NL} \approx O(\epsilon)^{12}$. Es importante tener en cuenta que esta estimación se cumple solo en el caso de un modelo inflacionario “minimalista” *single-field slow-roll*, con un potencial que depende solo de la inflación y un término cinético estándar.

Con un cálculo detallado de la integral, podremos encontrar la *shape* de la inflación *slow-roll*, esto es:

$$S_{sr} \propto (6\epsilon - 2\eta) S_{loc} + \frac{5}{3} \epsilon S_{equil} \quad (38)$$

Que corresponde con una combinación lineal de las *shape* mencionados anteriormente.

Realizando un análisis cualitativo sobre lo encontrado, vemos que la amplitud del *bispectrum* se encuentra muy suprimida por los parámetros de *slow-roll*, es lógico pensar entonces que la no-Gaussianidad no será apenas observable en el CMB. La pregunta es evidente ¿qué mecanismos pueden producirnos grandes cantidades de no-Gaussianidad? En primera instancia, nos surge la idea de añadir otros campos escalares, los nuevos grados de libertad introducidos podrán no estar suprimidos por los parámetros de *slow-roll*, estudiamos este caso a continuación.

¹²Nos damos cuenta también con (34) podemos aproximar $f_{NL} \approx \frac{\mathcal{L}_3}{\mathcal{L}_2} \frac{1}{\zeta}$. Nos será útil para próximas relaciones.

4. Multi-Field

En esta sección mostraré la generalización de todo lo visto hasta ahora, estudiaremos al proceso inflacionario con n campos y el caso particular para 2 campos escalares. El estudio de modelos *multi-field* se basa en muchas motivaciones. La primera es que la construcción de modelos inflacionarios en el contexto de las teorías de la gravedad cuántica y, en particular, la teoría de cuerdas suele suponer la presencia de muchos campos (escalares) durante la inflación [28]. Otra razón para estudiar modelos de campos múltiples es que generan predicciones de las observaciones que pueden estar en perfecto acuerdo con los datos experimentales.

En esencia, trataré de seguir un procedimiento similar al utilizado en *single-field*, tratando de reducir los procedimientos similares, y centrándonos en las diferencias entre ambos modelos. Veremos como, de manera natural, deberemos adentrarnos en el estudio de perturbaciones entrópicas y adiabáticas, un estudio que en *single-field* carecía de sentido.

4.1. Generalización de las Ecuaciones y Dirección del Campo

Al igual que tratamos un campo escalar en la anterior sección, podemos aplicar (9) y (10) para n campos escalares, se obtiene la ecuación de Klein-Gordon:

$$\ddot{\varphi}_I + 3H\dot{\varphi}_I = -\frac{\partial}{\partial\varphi_I} \left(\sum_J U_J \right) \quad (39)$$

Donde los subíndices I, J recorren los n campos. Destacar también que φ hace referencia a los campos escalares, y no a la perturbación, en la anterior sección usé ϕ , un conveniente cambio de notación.

Será útil introducir la cantidad: dirección del campo. De manera conceptual lo entendemos como la evolución del *background* en el “espacio de los campos” durante la inflación, esto es:

$$\sigma = \int \sum_I \hat{\sigma}_I \dot{\varphi}_I dt \quad \hat{\sigma}_I \equiv \frac{\dot{\varphi}_I}{\sqrt{\sum_J \dot{\varphi}_J^2}} \quad (40)$$

Donde la primera ecuación hace referencia a la totalidad de los campos, y la segunda a cada unidad de campo escalar. Volveremos a estas ecuaciones cuando muestre el ejemplo para 2 campos escalares, donde estas cantidades serán mucho mas intuitivas.

4.2. Perturbaciones adiabáticas y entrópicas

Se partirá de las dinámicas de las perturbaciones, provenientes de las ecuaciones de Einsteins perturbadas $\delta G_{\mu\nu} = 8\pi G \delta T_{\mu\nu}$. Se ha creado el Anexo 8.2 donde el lector puede entrar mas en

detalle.

Como hemos comentado, será necesario introducir las perturbaciones entrópicas. En el modelo *single-field* no expresamos esta cantidad ya que, como veremos a lo largo de las próximas secciones, estas cantidades tienden a anularse en el límite de largas escalas, obteniendo únicamente perturbaciones puramente adiabáticas. Veremos como en el nuevo modelo *multi-field* tendremos una componente entrópica importante a tener en cuenta.

Para el estudio de esta sección será útil introducir dos cantidades invariantes *gauge*, correspondientes a perturbaciones en la curvatura, y la perturbación comovil (corresponderán con una “reescalación” de las introducidas en la métrica mas general posible), estas son, respectivamente:

$$\zeta \equiv \psi + \frac{H}{\dot{\rho}}\delta\rho \quad R \equiv \psi - \frac{H}{\rho + P}\delta q = \psi + \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\phi \quad (41)$$

Estas dos cantidades mostradas serán equivalentes a largas escalas. La diferencia entre estas será útil conocerla, donde definimos la perturbación de densidad comovil ($\delta\rho_m$), se obtiene:

$$-\zeta - R = \frac{H}{\dot{\phi}}(\delta\rho - 3H\delta q) = \frac{H}{\dot{\phi}}\delta\rho_m \quad (42)$$

Usando las perturbaciones para las componentes del tensor energía-momento, en términos de las variables de Bardeen (ver Anexo 8.2), se obtiene la ecuación de Poisson generalizada:

$$\frac{k^2}{a^2}\psi = -4\pi G\delta\rho_m \quad \frac{\delta\rho_m}{\rho} = -\frac{2}{3}\left(\frac{k}{aH}\right)^2\psi \quad (43)$$

Donde ambas expresiones contienen el mismo significado. De la combinación de (41) se puede demostrar que se obtiene el importante resultado de:

$$\dot{\zeta} = -H\frac{\delta P_{nad}}{\rho + P} - \Sigma \quad (44)$$

Donde Σ corresponde con la tensión de cizalla. Lo destacable será $\delta P_{nad} \equiv \delta P - \frac{\dot{P}}{\dot{\rho}}\delta\rho$ que corresponde con la perturbación en la presión no-adiabática. Para convencernos del resultado, se puede demostrar que para el modelo *single-field* encontramos $\delta P_{nad} = -\frac{2V_\varphi}{3H\dot{\varphi}}\delta\rho_m$. Es fácil ver como esta componente se anula para grandes escalas, ver Ec. (76) de [18] y Ec. (29) de [19].

Una perturbación adiabática en términos de dos variables (por ejemplo x e y ¹³), queda definida

¹³En breves entenderemos porqué descomponemos la perturbación en términos de dos variables.

si:

$$\frac{\delta x}{\dot{x}} = \frac{\delta y}{\dot{y}} \quad (45)$$

Para el caso entrópica, evidentemente encontraremos la condición inversa, esto es:

$$S_{xy} \propto \frac{\delta x}{\dot{x}} - \frac{\delta y}{\dot{y}} \quad (46)$$

Observamos que si se cumple la condición (45), obtendremos 0 en la parte entrópica.

Podemos generalizar la primera definición de (41) para múltiples campos, en términos de una suma pesada como:

$$\zeta = \sum_I \frac{\dot{\rho}_I}{\dot{\rho}} \zeta_I \quad (47)$$

De la misma manera, se obtiene la perturbación en la dirección del *background* (40) e introducimos la perturbación entrópica, respectivamente:

$$\delta\sigma = \sum_I \hat{\sigma}_I \delta\varphi_I \quad \delta s_I = \sum_J \hat{s}_{IJ} \delta\varphi_J \quad (48)$$

Donde la parte entrópica (δs) se ha definido ortogonal a la dirección del *background*, de manera que $\sum_I \hat{s}_{IJ} \hat{\sigma}_I = 0$.

Para convencernos de los resultados, podemos obtener δP_{nad} para contrastar lo comentado unos párrafos antes. En términos de estas cantidades podemos desarrollar las componentes del tensor energía momento (ver Anexo 8.2), ver Ecs. (51), (52) y (53) de [17]. Se obtiene que $\delta P_{nad} \equiv -\frac{2V_\sigma}{3H\dot{\sigma}} \delta\rho_m - 2\delta s V$, donde, contrastando con lo mostrado, en (44), vemos como obtenemos un término que no necesariamente se anula a grandes escalas.

En la siguiente sección aplicaremos todo lo recién desarrollado para el caso específico de 2 campos escalares, mostraré la dinámica de las perturbaciones entrópicas en términos de parámetros físicos para tratar de justificar la contribución de este término a grandes escalas, y convencer al lector del objetivo principal de este tema, la no-Gaussianidad en el modelo *multi-field*.

4.3. Proceso Inflacionario con dos Campos Escalares

Como se ha comentado, en esta sección mostraré el modelo *multi-field* para el caso particular de dos campos escalares en el contexto de inflación *slow-roll*. Para ser claro con la notación, definiremos los dos campos utilizados como χ , $\phi \equiv \varphi_{1,2}$. Será conveniente descomponer la perturbación en el “espacio de los campos”, para ello será ilustrativo mostrar la siguiente figura (ver Fig. 4):

Se observa el plano de los campos escalares empleados en el modelo, y la descomposición de la perturbación de manera vectorial en los campos y en las componentes entrópicas y adiabáticas. Se

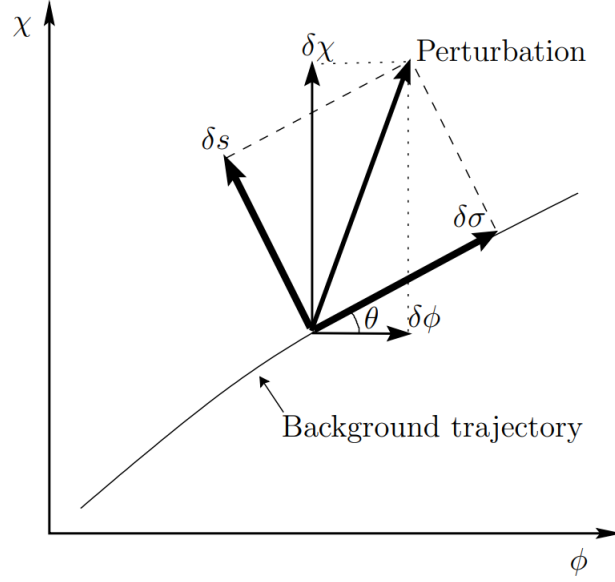


Figura 4: Ilustración del plano de los campos, donde se refleja la descomposición vectorial de la perturbación y el plano entrópico (s) perpendicular a la trayectoria (σ). Imagen obtenida de [19].

observa también la “trayectoria” del proceso inflacionario que introduce en (40). Partiendo de la ecuación de movimiento para σ , esto es:

$$\ddot{\sigma} + 3H\dot{\sigma} + \frac{\partial V}{\partial \sigma} = 0 \quad (49)$$

Donde, de la Fig. (4), $\frac{\partial V}{\partial \sigma} = V_\sigma = (\cos \theta)V_\phi + (\sin \theta)V_\chi$, análogamente para V_s . Podemos descomponer por trigonometría sencilla $\delta\phi$ y $\delta\chi$ e introducir en (41) para la perturbación comovil, encontramos:

$$R = \psi + H \left(\frac{\dot{\phi}\delta\phi + \dot{\chi}\delta\chi}{\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2} \right) \quad (50)$$

Es conveniente desarrollar su derivada temporal para comparar lo obtenido en (44), podemos ver lo obtenido por [19] en la ecuación (42) para obtener¹⁴:

$$\dot{R} = \frac{Hk^2}{\dot{H}a^2}\Psi + \frac{1}{2} \left(\frac{\delta\phi}{\dot{\phi}} - \frac{\delta\chi}{\dot{\chi}} \right) \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\phi}^2 - \dot{\chi}^2}{\dot{\phi}^2 + \dot{\chi}^2} \right) \quad (51)$$

Donde comparando lo recién obtenido con (46) vemos como obtenemos un segundo término de carácter entrópico que no se anula a grandes escalas.

Hasta este punto, hemos demostrado como el modelo *multi-field* nos introduce una componente no-adiabática en las perturbaciones, donde, recién se ha demostrado que, esta componente es de

¹⁴Recordar al lector que estudiar ζ (perturbación en la curvatura) o R (perturbación comovil en la curvatura), a grandes escalas es equivalente, por eso se hace un uso indistinto de ambas cantidades.

naturaleza entrópica. Siguiendo los mismos pasos que en *single-field* deberemos de convencernos de que lo obtenido es observable en el CMB. En la siguiente sección reproduciremos el estudio del *power-spectrum* y *bispectrum* para el modelo *multi-field*.

Antes de sumergirnos en este estudio, será conveniente expresar las perturbaciones adiabáticas (es decir, las perturbaciones de la evolución del *background*) y las perturbaciones entrópicas en términos de los parámetros de *slow-roll*. Para ello, en primera instancia, generalizaremos los parámetros de *slow-roll* para el modelo de *multi-field*. A primer orden (en *slow-roll*) podemos aproximar $V_s \approx 0$, se obtiene:

$$\epsilon \equiv \frac{\dot{H}}{H^2} \approx \frac{1}{16\pi G} \left(\frac{V_\sigma}{V} \right)^2 \quad (52)$$

Para el caso de η , deberemos mostrarlo de manera matricial al contener una segunda derivada:

$$\eta_{IJ} = \frac{1}{8\pi G} \frac{\partial V}{\partial \varphi_I \partial \varphi_J} \frac{1}{V} \quad (53)$$

Es interesante realizar un matiz en este punto. Los parámetros introducidos son de *slow-roll*, esto es, como ya estudiamos en la sección 2.1.2, que todos son $\ll 1$. En numerosos modelos de *multi-field* hacen uso de un único campo escalar *slow-roll*, tratando los demás como campos masivos (esto es, que $m \sim H$), un ejemplo de este caso lo encontramos en [27]. Necesariamente deberemos tener como mínimo un campo escalar *slow-roll*, en nuestro modelo utilizaremos los n campos que cumplan estas condiciones, aunque no sea algo necesario¹⁵.

Para facilitar el estudio, será conveniente introducir las perturbaciones adimensionales adiabáticas y entrópicas de la descomposición de la Fig. (4), respectivamente:

$$R \equiv \frac{H}{\dot{\sigma}} \delta \sigma \quad S \equiv \frac{H}{\dot{\sigma}} \delta s \quad (54)$$

Donde se ha definido S de tal manera que $\delta P_{nad} \propto S$ como ya comentamos.

Relacionaremos R y S con R_* y S_* (notación para definir en la salida del horizonte, esto es $k = aH$). Al igual que realizamos en *single-field* con el vacío de Bunch-Davies, trataremos de relacionar las condiciones iniciales con el momento de salida del horizonte. Podríamos acudir a las ecuaciones de la dinámica para las perturbaciones, mostradas en la ecuación (66) de [17], pero consisten en un sistema de Ecuaciones Diferenciales Acopladas que no es interesante resolver. Para estudiar la dinámica de las mismas nos será suficiente con introducir la matriz de transferencia, de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} R \\ S \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T_{RS} \\ 0 & T_{SS} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_* \\ S_* \end{pmatrix} \quad (55)$$

¹⁵El estudio de la necesidad de mínimo un campo *slow-roll* escapa de los límites de este trabajo, por lo que no es algo que detallaremos. Aun así, para dar una ligera idea al lector, esta necesidad nace de lo ya mostrado en 2.1.2, necesitamos un campo que produzca el proceso inflacionario (12) y que lo mantenga el suficiente tiempo (13).

Donde las componentes definidas de la matriz de transferencia se obtienen de la conservación de la energía en el momento de *reheating*, y las demás deben obtenerse de las observaciones o de algún modelo teórico, un ejemplo podemos encontrarlo en la Ec. (7) de [22].

4.4. No-Gaussianidad. Bispectrum y Trispectrum

En esta sección mostraré el estudio de la no-Gaussianidad de las perturbaciones en el modelo *multi-field*. Anteriormente, en el estudio de *single-field*, vimos como el *power-spectrum* corresponde con distribuciones gaussianas. Para extraer la mayor cantidad de información posible sobre el universo primitivo a partir de la observación del CMB, estamos obligados a tomar correlaciones de mayor orden, estas corresponden con no-Gaussianidades. En esta sección mostraré también un breve introducción a la correspondiente al cuarto orden, el *trispectrum*.

Para el estudio de este apartado haré uso de un nuevo formalismo, se ha creado el Anexo 8.3 para explicar el formalismo δN . En términos de lo comentado:

$$\zeta = \delta N = \sum_I N_I \delta \varphi_I \quad (56)$$

Donde se interpreta la perturbación en la curvatura como una perturbación introducida en el factor de escala (ver Anexo 8.3). Es directo obtener el *power-spectrum* como¹⁶:

$$P_\zeta = \sum_I N_I^2 P_{\delta \varphi_I} \quad (57)$$

El formalismo comentado nos proporciona unas expresiones muy reducidas para el *bispectrum* y *trispectrum*, estas son:

$$B_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{6}{5} f_{NL} [P_\zeta(k_1)P_\zeta(k_2) + P_\zeta(k_1)P_\zeta(k_3) + P_\zeta(k_2)P_\zeta(k_3)] \quad (58)$$

$$\begin{aligned} T_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3, \mathbf{k}_4) = & \tau_{NL} [P_\zeta(|\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_3|)P_\zeta(k_3)P_\zeta(k_4) + (11 \text{ permutaciones})] \\ & + \frac{54}{25} g_{NL} [P_\zeta(k_2)P_\zeta(k_3)P_\zeta(k_4) + (3 \text{ permutaciones})] \end{aligned} \quad (59)$$

Donde las amplitudes mostradas corresponden con:

$$f_{NL} = \frac{5}{6} \frac{N_A N_B N^{AB}}{(N_C N^C)^2} \quad \tau_{NL} = \frac{N_{AB} N^{AC} N^B N_C}{(N_D N^D)^3} \quad g_{NL} = \frac{25}{54} \frac{N_{ABC} N^A N^B N^C}{(N_D N^D)^3} \quad (60)$$

¹⁶Recordad que $P_\zeta \propto \zeta^2$)

Donde para el caso del modelo *single-field*, se obtiene:

$$f_{NL} = \frac{5}{6}(\eta_{\sigma\sigma} - 2\epsilon) \quad \tau_{NL} = \frac{36}{25}f_{NL}^2 \quad g_{NL} = \frac{25}{54}(2\epsilon\eta_{\sigma\sigma} - 2\eta_{\sigma\sigma}^2 + \epsilon_\sigma^2) \quad (61)$$

Recuperamos $f_{NL} \sim \epsilon$ como ya mostramos en (37). Es natural obtener las amplitudes del *trispectrum* un orden mayor en los parámetros de *slow-roll*.

Para el caso general de f_{NL} para dos campos *slow-roll*, se obtiene la siguiente expresión:

$$-\frac{6}{5}f_{NL} = 2 \frac{(u^2/\epsilon_\phi|_*)[1 - (\eta_\phi|_*/2\epsilon_\phi|_*)u] + (v^2/\epsilon_\chi|_*)[1 - (\eta_\chi|_*/2\epsilon_\chi|_*)v] - [(u/\epsilon_\phi|_*) + (v/\epsilon_\chi|_*)]^2 A}{[(u^2/\epsilon_\phi|_*) + (v^2/\epsilon_\chi|_*)]^2} \quad (62)$$

Encontrada en la ecuación (68) de [25]. Donde, manteniendo la misma notación que venimos usando, $\epsilon_\phi|_*$ corresponde con (52), pero para el potencial ϕ^{17} , análogamente para χ . De la misma manera para η con la Ec. (53). Por otro lado, A es un parámetro adimensional que, de manera conceptual, caracteriza la fracción entre el potencial total a diferentes escalas (ver ecuaciones (66) de [25]). Es fácil ver que el único término no suprimido por los parámetros de *slow-roll* será el tercero, dependiente del parámetro A , será este el que pueda contribuir a las grandes no-Gaussianidades que venimos buscando.

5. Modelo de Axiones

En este capítulo mostraré un caso especial de un modelo *multi-field*, es denominado un modelo de Axiones. El potencial asociado con estos campos es típicamente invariante (o invariante de forma aproximada o discreta) bajo la transformación tipo $\phi \rightarrow \phi + cte$ (*shift symmetry*).

Para asegurarnos de la suficiente duración del proceso inflacionario (entre 50 y 60 e-folds) debemos de suprimir o prohibir los operadores (de tipo $\phi^n M_{pl}^{4-n}$) que aplican correcciones de $O(1)$ al parámetros η (recordamos que este parámetro era el correspondiente de garantizar la suficiente duración inflacionaria). Esta garantía nos la aporta la *shift symmetry* que ya hemos mencionado.

Una cantidad importante que deberemos conocer es la “constante de decaimiento del axión” f que aparece en el potencial inflacionario.

Las construcciones de la teoría de cuerdas y el punto de vista de la teoría de campos efectivos nos sugieren que

$$m_\phi, H < f < M_{pl} \quad (63)$$

¹⁷Recordad que en la ecuación mencionada se hace uso de σ como una dirección que contiene ϕ y χ .

Con m_ϕ la masa del axión. Para el ejemplo de axiones Type IIB, se encuentra que $f/M_{pl} \approx \sqrt{g_s}/L^2$. Donde g_s es la *string coupling* y L la escala de compactificación que define al axion, proveniente de teoría de cuerdas, no entraremos mas en detalle.

Existen numeroso modelos inflacionarios basados en los axiones y en la pequeña introducción recién realizada. Estos modelos se diferencian esencialmente en el potencial utilizado, esto lo podemos ver en la Fig.7, donde se compara los rangos teóricos para n_s y r (cantidades que ya se han definido en este trabajo en (29)) con las observaciones.

En lo que resta de capítulo nos centraremos en el caso concreto de *Natural Inflation* correspondiente con un potencial de la forma:

$$V = \Lambda^4 \left[1 + \cos \left(\frac{\phi}{f} \right) \right] \quad (64)$$

Aun así, existen otros muchos modelos que son capaces de ajustarse a las observaciones como *axion monodromy inflation*, correspondiente con $V \propto \phi^{2/3}$, o axiones acoplados a una 4-forma, correspondiente con $V \propto \phi^2$, ambos modelos mostrados en la Fig.7.

5.1. Natural Inflation and Campos Gauge

Como se ha comentado, en este trabajo nos centraremos en repasar algunos de los modelos existentes de *Natural Inflation*, las diferencias entre algunos de ellos y algunas aplicaciones observacionales que mencionaremos a lo largo de este punto.

Para comenzar, es conveniente introducir la Lagrangiana más general en el contexto que nos alberga, esta es:

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \left[-\frac{R}{2} - \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \mu^4 \left(1 + \cos \left(\frac{\chi}{f} \right) \right) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{\lambda}{8f} \chi F_{\mu\nu}^a \tilde{F}_a^{\mu\nu} \right] \quad (65)$$

Donde los primeros términos corresponden con el campo escalar (mismo campo utilizado durante este trabajo que cumple las condiciones de *slow-roll*), con el potencial mostrado en (64), y una parte con un segundo campo, en este caso, diferente a los utilizados en *multi-field*¹⁸. En la literatura científica y dependiendo del caso en el que nos encontremos, este campo será el campo electromagnético.

Es interesante fijarse en el índice a , el cual hace referencia al campo gauge usado, en este caso no-abeliano, si este índice no existiera nos encontraríamos en el caso abeliano (que mencionaremos y mostraremos mas adelante)¹⁹.

¹⁸Dónde recordamos que todos los campos utilizados eran campos escalares que cumplen las condiciones de *slow-roll*

¹⁹Durante este capítulo trabajaremos con el grupo SU(2) para el campo gauge no-abeliano y con el U(1) para el

Por otro lado, el último término, correspondiente con el acoplo de ambos campos será el más importante, es el responsable de una fenomenología interesante.

Continuando con el desarrollo, en un primer momento nos centraremos en el caso particular no-abeliano. Siguiendo la misma esquematización que venimos mostrando, de la Lagrangiana mostrada se pueden extraer las ecuaciones de movimiento, estas son:

$$\ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - \frac{\mu^4}{f} \sin\left(\frac{\chi}{f}\right) = -3\tilde{g}\frac{\lambda}{f}\psi^2(\dot{\psi} + H\psi) \quad (66)$$

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} + (\dot{H} + 2H^2)\psi + 2\tilde{g}^2\psi^3 = \tilde{g}\frac{\lambda}{f}\psi^2\dot{\chi} \quad (67)$$

Donde \tilde{g} corresponde con la constante de acoplamiento entre los campos gauge. La parte de la derecha de ambas ecuaciones corresponden con el acoplamiento entre ambos campos, es la pieza clave de este modelo que mencionamos en la Lagrangiana. La primera ecuación de movimiento hace referencia al campo escalar *slow-roll* de (65) mientras que la segunda corresponde con uno de los grados de libertad del campo tensorial (el tensor métrico), para mayor detalle ver ecuaciones (2) y (3) de [32].

Vemos que sin la correspondiente parte del acoplo en las ecuaciones de movimiento, recuperamos los casos que ya hemos estudiado en *single-field* en (9) y *multi-field* con (49).

De la misma manera que venimos haciendo, buscamos soluciones inflacionarias *slow-roll*, esto es, asumiendo $\ddot{\chi}$, $\ddot{\psi}$ y $\dot{H} \approx 0$. Para tratar de caracterizar el modelo, deberemos de estudiar si es consistente con las observaciones. En un primer lugar, se puede estudiar el numero de e-folds que genera este modelo durante el proceso inflacionario, ver ecuación (12) de [32]. Estudiando el máximo de esta ecuación se obtiene:

$$N_{max} \approx \frac{3}{5}\lambda \quad (68)$$

Esto nos da una primera aproximación sobre el parámetro λ , encontrado en el término de acoplo de (65), que para obtener un número de e-folds de $O(60)$, es necesario que $\lambda \sim 100$.

Por otro lado, se pueden obtener los parámetros de *slow-roll* aplicando las definiciones que ya conocemos, se obtiene:

$$\epsilon \approx \frac{3\tilde{g}^2\psi^4}{\mu^4(1 + \cos(\chi/f))} + \psi^2 \quad (69)$$

$$\eta \approx 2\tilde{g}^2\frac{\psi^4}{H^2}\frac{\psi'}{\epsilon} \left(12\tilde{g}^2\frac{\psi^3}{H^2} + 2\psi \right) \quad (70)$$

campo gauge abeliano

Donde $\psi' = \frac{d\psi}{dN}$, la derivada respecto al número de e-folds (formalismo δN , ver Anexo 8.3). Con estas herramientas podemos terminar de caracterizar el modelo mediante el *power-spectrum* de las perturbaciones escalares y el *spectral index*, esto es:

$$\Delta_{\zeta}^2(k) = \frac{H^2}{4\psi'^2\chi'^2} \quad ns - 1 \sim -2\epsilon + 2\frac{\chi''}{\chi'} \quad (71)$$

Fijando el valor de $n_s \approx 0,97$ a un $N = 50$ e-folds, marcado por el COBE (“Cosmic Background Explorer”), el modelo queda determinado en todos sus parámetros. Agregamos aquí que las predicciones de este modelo, llamado “chromo-natural inflation”, están en tensión con los datos del CMB, especialmente con los últimos datos del Bicep-Keck Array.

Será interesante también estudiar el caso abeliano, recordamos que corresponde con el grupo de simetría $U(1)$ y la desaparición del índice a en (65). Podemos estudiar un ejemplo en [33]. En la referencia mencionada se puede estudiar el desarrollo para el campo $F^{\mu\nu}$ para las ecuaciones de movimiento descompuestas en el campo eléctrico (E) y magnético (B). Procedimiento que obviaremos al ser similar al recién mostrado.

Un procedimiento interesante será el del vector \vec{A} , como sabemos se relaciona con el campo magnético mediante el operador rotacional y con el campo eléctrico mediante la derivada temporal, que mediante la identidad de Bianchi y las ecuaciones de Maxwell se obtiene, en el contexto que nos alberga:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \nabla^2 - \frac{\lambda}{2} \frac{\chi'}{f} \vec{\nabla} \right) \vec{A} = 0 \quad (72)$$

Realizando un tratamiento muy similar al usado al comienzo de este trabajo para la obtención de la ecuación de Mukhanov-Sasaki y el tratamiento cuántico para la obtención del *power-spectrum* en el contexto de *single-field*, podemos descomponer también el potencial vector (\vec{A}) en los operadores escalera de la mecánica cuántica y obtener una ecuación para A_{\pm} , correspondientes a las diferentes helicidades. Para soluciones inflacionarias ($a(\tau) \sim -1/(H\tau)$, espacio quasi-de Sitter), encontramos:

$$\frac{d^2 A_{\pm}(\tau, k)}{d\tau^2} + \left(k^2 \pm 2k \frac{\xi}{\tau} \right) A_{\pm}(\tau, k) = 0 \quad (73)$$

Donde $\xi = (\lambda/2)\dot{\chi}_0/(2fH)$. Una combinación lineal de las soluciones a esta EDO nos permitirá calcular el acoplo del campo $F^{\mu\nu}$ con χ , recordar que este acoplo en las ecuaciones de movimiento corresponde con la pieza clave del proceso inflacionario en los modelos de axiones, ver ecuación (2) de [33]. Este término de acoplo viene definido con el término $\langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle$. Este proceso nos simplifica la ecuación de movimiento para χ , se obtiene que:

$$\langle \vec{E} \cdot \vec{B} \rangle \propto \left(\frac{H}{\xi} \right)^4 e^{2\pi\xi} \quad (74)$$

Siguiendo un procedimiento similar al caso no-abeliano, deberemos de caracterizar al completo el modelo, para ello será interesante adentrarnos en el estudio de algunos parámetros.

En un primer lugar, será importante conocer la dinámica del parámetro de Hubble H , que como ya introdujimos, en soluciones inflacionarias *slow-roll* $3M_{pl}^2 H^2 \approx V$. En este contexto $3M_{pl}^2 H^2 = (1/2)\dot{\chi}^2 + V + (1/2)(\vec{E}^2 + \vec{B}^2)$. Ya demostramos al comienzo de este trabajo como la parte cinética era insignificante frente al potencial (ver Ecuación (11)), lo mismo debe ocurrir con el tercer término. Realizando el mismo procedimiento que para estimar (74), encontramos que:

$$\frac{1}{2}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \propto \frac{\xi}{\lambda} f V'(\chi) \quad (75)$$

En el mínimo del potencial *slow-roll*, que podemos aproximar $V \propto \chi^2$. Es fácil ver que, mientras $\chi < \chi_{RH} = \xi f / \lambda$, donde χ_{RH} es el momento del comienzo del recalentamiento, el término recién estimado, es despreciable durante la inflación.

Por otro lado estudiaremos la aceleración inflacionaria, lo mismo es, los parámetros de *slow-roll*. Aplicando la definición de ϵ en (11) nos queda:

$$\epsilon = \frac{1}{2M_{pl}^2 H^2} \left[\dot{\chi}^2 + \frac{2}{3}(\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E}^2 \times \vec{B}^2)}{3aH} \right] \quad (76)$$

Donde el último término se anula al considerar isotropía del *background*. Es fácil ver que, mientras se cumpla al condición vista en (75), $\epsilon < 1$ y el universo se expandirá.

Así como hicimos para el caso no-abeliano, estudiaremos también el número de e-folds mediante:

$$N_e \approx \int_{\chi_i}^{\chi_f} \frac{H d\chi}{\dot{\chi}} \quad (77)$$

Para obtener un orden de $O(45)$ e-folds, con potencial de tipo axion-like se necesita un $\lambda \sim 100$.

Con estas herramientas, y para tratar de caracterizar al completo el modelo, podemos estudiar el *power-spectrum* escalar y el *spectral index*. Para el caso genérico de N campos escalares (*multi-field*), se obtiene:

$$\Delta_\zeta \approx \frac{5 \cdot 10^{-2}}{N \xi^2} \left(\frac{2^5 \xi \hbar k}{aH} \right)^{4/\lambda} \quad n_s - 1 \approx \frac{4}{\pi \lambda} \frac{f V''}{V'} \quad (78)$$

Donde el *power-spectrum* escalar se encuentra suprimido por el número de campos utilizados.

5.2. Aplicación a Futuras Observaciones

Todo lo que hemos estudiado hasta ahora ha constituido un proceso teórico-matemático sobre el desarrollo de los actuales modelos que tratan de explicar la naturaleza inflacionaria, pero, como es obvio, debemos relacionar estos con las observaciones y los experimentos actuales y futuros.

En esta breve sección trataremos de ver como, concretamente el modelo de *Natural Inflation*, se amolda a diferentes observables de nuestro universo, un estudio mas detallado lo encontraremos en [34] y [35]. En particular nos centraremos en el observable de las ondas gravitacionales provenientes de agujeros negros primordiales (PBH), estos son hipotéticos agujeros negros de origen cosmológico, que en un principio son datados en el comienzo del proceso inflacionario. La producción de radiación debida a su evaporación restringen a propio BH de estar compuesto totalmente de materia oscura. Como se estudia en [34] la detección de estos BH nos aportaría gran información sobre la naturaleza inflacionaria, se esperan grandes avances con el futuro funcionamiento de LISA (“Laser Interferometer Space Antenna”).

Actualmente existen numerosas investigaciones que actúan sobre diferentes escalas mas pequeñas del CMB, esto significa que estas ondas gravitacionales (GW) salieron mas tarde del universo causal que las del CMB, estas investigaciones (observatorios) son ejemplos como LIGO, AdvLIGO, PTA, entre otros.

Estos estudios son basados en el límite de PBH en las perturbaciones escalares, se muestra en la Figura 1 de [34], el cual corresponde con la producción de perturbaciones escalares originarios de los PBH.

Aun que durante este trabajo la parte tensorial de las perturbaciones ha sido, en algunos casos, despreciable e ignorada, en este punto cobrará mucha importancia.

Para poner en contexto, nos encontramos en el mismo caso recién estudiado, es decir, en un modelo de axiones *slow-roll* y abeliano, la única diferencia principal es que tendremos un potencial fenomenológico, como veremos mas adelante. Obviando entonces la repetición del cálculo, podemos encontrar el *power-spectrum* tensorial de las ondas gravitacionales (GW), esto es:

$$P_{GW} \approx \frac{2H^2}{\pi^2 M_{pl}^2} \left[1 + \frac{H^2}{M_{pl}^2} \hat{f}_{2,+}(\xi) e^{4\pi\xi} \right] \quad (79)$$

Donde la función $\hat{f}_{2,+}(\xi)$ se encuentra definida en la ecuación (4.6) de [34], nos bastará con saber que $\hat{f}_{2,+}(\xi) \approx 4,3 \cdot 10^{-7} / \xi^6$ para cuando $\xi > 1$, que como hemos visto al final del apartado anterior, es el rango en el que nos encontramos durante el proceso inflacionario.

Un cálculo el *power-spectrum* con una medida $\xi_{CMB} \sim 1,66$, de la Ecuación (78), nos aporta la

siguiente intuitiva figura:

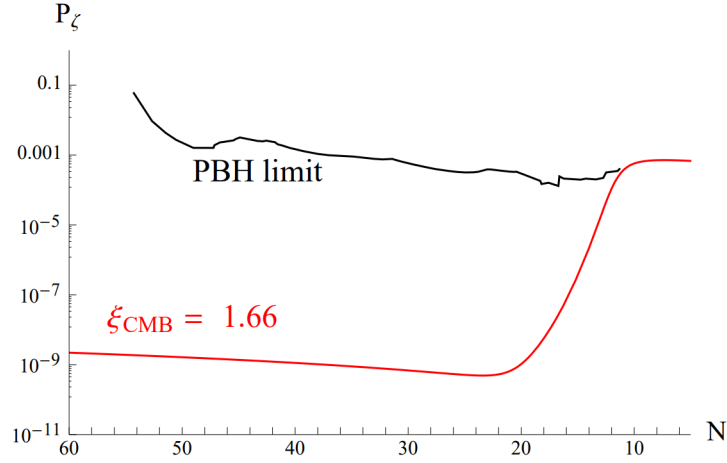


Figura 5: Comparación del *power-spectrum* de origen inflacionario con los límites impuestos por las observaciones sobre la física de los PBH.

Como se puede ver en la Figura 4 de [34] el potencial propuesto general amplitudes observables en las escalas del futuro observatorio LISA. Mostraremos un modelo *multi-field* utilizado en [34], que prueba un ejemplo de obtención de perturbaciones escalares a escalas de $N = 10$ sin violar el límite PBH como se muestra en la Fig.5. Este modelo consiste en agregar un campo pseudo-escalar a la Lagrangiana que ya propusimos en (65), esto es:

$$\mathcal{L}_\sigma = \frac{1}{2}(\partial\sigma)^2 + V_\sigma^2 \quad (80)$$

Donde mostramos el término adicional a la Lagrangiana comentada. El potencial es el mostrado en (64).

Con un procedimiento muy similar al usado en la sección 4 para obtener los parámetros de *slow-roll* para cada campo como mostramos en (53), con los valores ya obtenidos en (29) para el *spectral-index* y el *tensor-scalar ratio*, podemos analizar el modelo recién planteado. En la ecuación 4.7 de [34] se muestra una evolución del *power-spectrum* escalar en función de los parámetros recién comentados y del número de e-folds restantes de la inflación, tomando como origen el fondo cósmico de microondas a $N_{CMB} = 60$. Se toma como amplitud la fijada en el CMB con un valor de $\Delta_\zeta(N_{CMB}) \approx 2 \cdot 10^{-9}$. Con estas asunciones el modelo queda únicamente determinado por diferentes parámetros del campo σ . Este campo, con un valor lo suficientemente grande del parámetro de acoplamiento, puede provocar amplificaciones de las perturbaciones en su salida del horizonte, especialmente en N_* correspondiente al momento en el que el campo σ adquiere su mayor velocidad de evolución (en $\sigma = f\pi/2$).

En esta figura vemos un ejemplo que, dependiendo de la naturaleza del nuevo campo agregado (σ) podremos tener, en diferentes escalas, diferentes señales que entran en concordancia con las

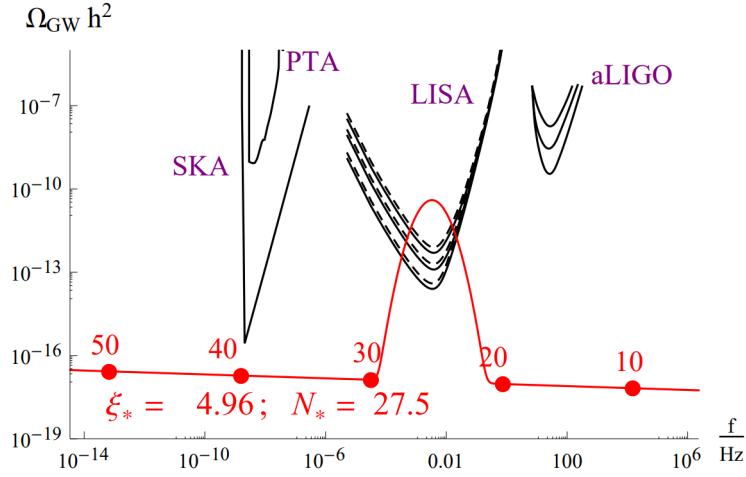


Figura 6: Orden de magnitud de las sensibilidades de observatorios junto con la evolución del *power-spectrum* de GW. Imagen obtenida de [34].

sensibilidades de, en este ejemplo, el futuro observatorio LISA.

6. Conclusiones

Durante este trabajo he mostrado como, partiendo de las ecuaciones mas básicas de la cosmología y relatividad general, somos capaces de entender las observaciones actuales del fondo cósmico de microondas, y como estas nos aportan mucha información sobre la dinámica del universo en instantes iniciales.

Con el comienzo de la necesidad de un proceso de expansión acelerada del universo, siguiendo por el estudio de qué mecanismos puede provocarlo, partiendo de un modelo inflacionario *single-field slow-roll* y con teoría de perturbaciones, se ha estudiado como se reflejan las fluctuaciones en el CMB a partir de *power-spectrum* y *bispectrum*. Rápidamente nos damos cuenta de que con un modelo inflacionario con un sólo campo escalar, las no-Gaussianidades no serían observables al estar suprimidas por los parámetros de *slow-roll*.

El proceso de “embedding” del mecanismo inflacionario dentro de teorías de dimensiones superiores generalmente da como resultado un escenario de inflación de múltiples campos, lo que motiva aún más el estudio de tales configuraciones. En este trabajo se ha generalizado el estudio de *single-field* a n campos escalares con el modelo *multi-field slow-roll*, con el cual se ha mostrado cómo se han conseguido grandes no-Gaussianidades, con la inclusión de perturbaciones entrópicas, para el ejemplo de 2 campos escalares *slow-roll*.

Durante el estudio de este trabajo, al lector le podría surgir la duda sobre las no-Gaussianidades de orden mas alto. Lo natural en teoría de perturbaciones es que, a orden mas alto, encontremos

amplitudes cada vez mas pequeñas. Sin embargo, existen numerosos modelos que, aplicando ciertas asunciones, son capaces de generar no-Gaussianidades observables en el *trispectrum*, a pesar de que el *bispectrum* no lo sea, se deja un ejemplo en [26]. Otro caso particular que se puede valorar es el uso de campos escalares con una jerarquía de masas muy grande (pero con al menos un campo ligero), un ejemplo podemos encontrarlo en [27].

Por otro lado, se han presentado otros modelos inflacionarios que continúan la dinámica de los estudiados para *single-field* y *multi-field*, estos son los modelos de Axiones, los cuales han presentado un nuevo campo que no cumple necesariamente con los parámetros de *slow-roll*. En estos casos, las referencias mostradas, trabajaban habitualmente también sobre la parte tensorial de las perturbaciones provenientes de las ondas gravitacionales (GW) y sobre la capacidad de generar agujeros negros primordiales (PBH). Se ha visto como dependiendo de la naturaleza inflacionaria, esto es, del grado de acoplamiento entre los campos escalares y el campo tensorial ($F^{\mu\nu}$), el potencial de los campos escalares y diversos parámetros, podemos recrear diferentes amplitudes a diferentes escalas que podrían ser observables por futuros observatorios.

Actualmente, las investigaciones punteras sobre el campo de la cosmología y el proceso inflacionario son numerosas. Como es evidente, resaltan aquellas que son capaces de ceñirse lo máximo a las observaciones del fondo cósmico de microondas y del fondo estocástico de ondas gravitacionales.

Es útil volver a las ecuaciones de (29), las cuales nos aplican ciertos límites sobre los modelos utilizados en este trabajo. En la siguiente figura veremos numerosos ejemplos de la recopilación de las observaciones y los actuales modelos inflacionarios.

Como se observa en el gráfico, actualmente el modelo inflacionario R^2 (también conocido como “Starobinsky inflation”) parece ser el más acorde a las observaciones. Otros modelos conocidos, como la inflación de Higgs, los α -attractors y “fiber inflation”, corresponden a predicciones en línea con las observaciones experimentales actuales. En los próximos años sabremos con certeza, gracias a los experimentos de CMB como CMB-S4, LiteBIRD u otros interferómetros como LISA, LIGO, entre otros, si algunos de estos modelos (Starobinsky, Higgs, Fibre) son realmente el mecanismo específico que subyace a la inflación. También existe la extraordinaria posibilidad de saber, sobre todo gracias a las observaciones de LISA (pero también a experimentos a otras escalas como Nanograv), si los agujeros negros primordiales son el origen de toda (o parte) de la materia oscura.

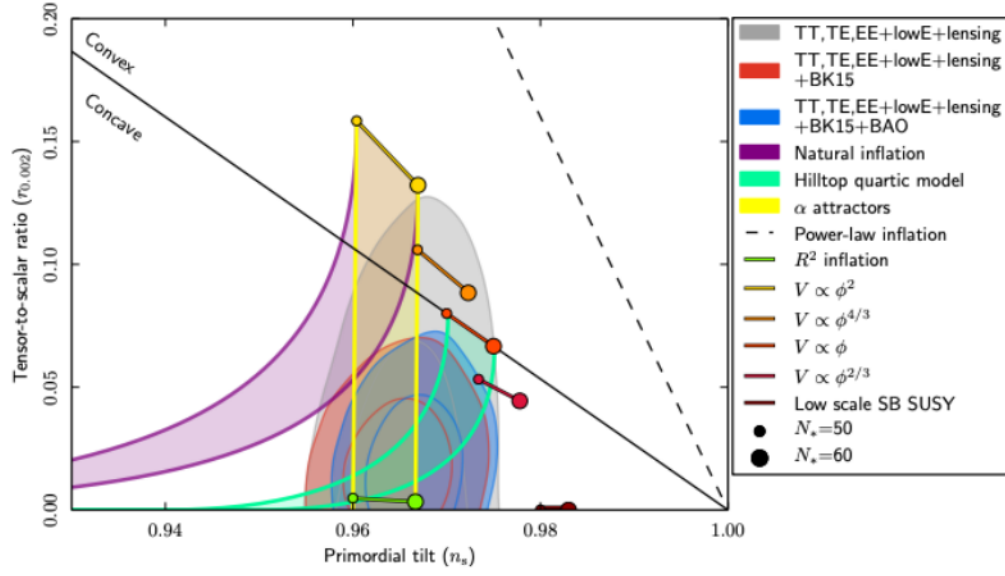


Figura 7: Modelos inflacionarios en contraste con las observaciones. Imagen obtenida de [30].

*“El mayor enemigo del conocimiento no es la ignorancia, es la ilusión del conocimiento” -
Stephen Hawking*

7. Referencias

- [1] K. N. ABAZAJIAN *et al.* [CMB-S4], [arXiv:1610.02743].
- [2] E. ALLYS *et al.* [LiteBIRD], «Probing Cosmic Inflation with the LiteBIRD Cosmic Microwave Background Polarization Survey», PTEP **2023**, no.4, 042F01 (2023) [arXiv:2202.02773].
- [3] L. AMENDOLA, *et al.* «Cosmology and fundamental physics with the Euclid satellite», Living Rev. Rel. **21**, no.1, 2 (2018) [arXiv:1606.00180].
- [4] P. A. ABELL *et al.* [LSST Science and LSST Project], «LSST Science Book, Version 2.0», [arXiv:0912.0201].
- [5] D. J. BACON *et al.* [SKA], Publ. Astron. Soc. Austral. **37**, e007 (2020) [arXiv:1811.02743].
- [6] A. ACHÚCARRO, *et al.* «Inflation: Theory and Observations», [arXiv:2203.08128].
- [7] J. GARCÍA-BELLIDO, «Gravitación y Cosmología», *Curso introducción a relatividad general y cosmología*, Madrid, España, 2004.
- [8] D. BAUMANN, «The Physics of Inflation», *A course for graduate students in particle physics and cosmology*.
- [9] D. BAUMANN, «Cosmology», University of Cambridge, 2022.
- [10] K. ENQVIST, «Cosmological Inflation», University of Helsinki, Finland, 2012.
- [11] K. HINTERBICHLER, «Theoretical Aspects of Massive Gravity», University of Pennsylvania, Philadelphia, 2011.
- [12] D. SCHMIDT, «Quantum Fluctuations During Inflation», Heidelberg, 2011.
- [13] N. BARTOLO, M. FASIELLO, S. MATARRESE Y A. RIOTTO, «Large non-Gaussianities in the effective field theory approach to Single-Field: the Bispectrum», University of Padova, University of Milan, Italy and CERN Theory Division, Switzerland, 2010.
- [14] J. MALDACENA, «Non-Gaussian features of primordial fluctuations in single field inflationary models», Institute for Advanced Study, Princeton, 2005.
- [15] X. CHEN, M. HUANG ANG G. SHIU, «The Inflationary Trispectrum for Models with Large Non-Gaussianities», Centre of Theoretical Physics Institute of Technology, Massachusetts and University of Wisconsin, USA, 2008.

- [16] P. ADSHEAD, R. EASTHER AND E. A. LIM, «The "in-in" Formalism and Cosmological Perturbations», Departament of Physics of Yale University and Columbia University, USA 2009.
- [17] D. WANDS, «Multi Field Inflation», Institute of Cosmology and Gravitation, University of Portsmouth, Portsmouth, 2007.
- [18] B. A. BASSET, S. TSUJIKAWA AND D. WANDS, «Inflation Dynamics and Reheating», Institute of Cosmology and Gravitation, University of Portsmouth, Department of Physics, Kyoto University, Japan and Portsmouth, 2006.
- [19] C. GORDON, B. A. BASSET, R. MAARTENS AND D. WANDS, «Adiabatic and entropy perturbations from inflation», Relativity and Cosmology group, Institute of Cosmology and Gravitation, University of Portsmouth, Portsmouth, 2000.
- [20] V. F. MUKHANOV, H. A. FELDMAN AND R. H. BRANDERNBERGER, «Theory of Cosmological Perturbations», Brown University, Providence, Academy of Sciences, Moscow and Intitute for Theoretical Astrophysics, Toronto, 1992.
- [21] K. NAKAMURA, «Second-orden Gauge-invariant Cosmological Perturbation Theory: Current Status update in 2019», National Astronomical Observatory of Japan, Tokyo, 2020.
- [22] D. WANDS, N. BARTOLO, S. MATARRESE, A. RIOTTO, «An Observational Test of Two-field Inflation», Institute of Cosmology and Gravitation, Portsmouth, Department of Physics, Padova and Astronomy Center, Brighton, 2002.
- [23] N. S. SUGIYAMA, E. KOMATSU AND T. FUTAMASE, « δN formalism», Max Planck Institute, Germany and Tohoku University, Japan, 2013.
- [24] P. Creminelli, G. D'Amico, M. Musso, J. Norena and E. Trincherini, 'Galilean symmetry in the effective theory of inflation: new shapes of non-Gaussianity," JCAP **02**, 006 (2011)
- [25] F. VERNIZZI AND D. WANDS, «Non-Gaussianities in two-field inflation», University of Helsinki and University of Portsmouth, 2006.
- [26] L. SENATORE AND M. ZALDARRIAGA, «A Naturrally Large Four-point Function in Single Field Infation», Institute for Advanced Study, Olden Lane, Princeton, USA, 2010.
- [27] X. CHEN AND Y. WANG, «Quasi-Single Field Inflation and Non-Gaussianities», University of Cambridge, UK, 2010.

- [28] D. BAUMANN AND L. MCALLISTER, «Inflation and String Theory» Cambridge University, 2015
- [29] S. WEINBERG, «Cosmology», 2008.
- [30] PLANCK COLLABORATION, «Planck 2018 results. X. Constraints on inflation», 2019.
- [31] ENRICO PAJER AND MARCO PELOSO, «A review of Axion Inflation in the Era of Planck», Princeton University, University of Minnesota and University of Padova, 2013.
- [32] PETER ADSHEAD AND MARK WYMAN, «Chromo-Natural Inflation: Natural Inflation on a Steep Potential with Classical non-Abelian Gauge Fields», Enrico Fermi Institute and University of Chicago, 2012.
- [33] MOHAMED M. ANBER AND L. SORBO, «Naturally inflating on steep potentials through electromagnetic dissipation», Department of Physics, University of Massachusetts, 2010.
- [34] J. GARCÍA-BELLIDO, M. PELOSO AND C. UNAL, «Gravitational waves at interferometer scales and primordial black holes in axion inflation», Instituto de Física Teórica UAM-CSIC, España and Minnesota Institute for Astrophysics, University of Minnesota 2016.
- [35] J. GARCÍA-BELLIDO, A. PAPAGEORGIOU, M. PELOSO AND L. SORBOL, «A flashing beacon in axion inflation: recurring bursts of gravitational waves in the strong backreaction regime», Instituto de Física Teórica UAM-CSIC, España, Minnesota Institute for Astrophysics, University of Minnesota, Dipartimento di Fisica e Astronomia, University of Padova, Italy and Department of Physics, University of Massachusetts, USA 2023.

8. Anexo

8.1. Formalismo in-in

Este repaso sobre el formalismo de cálculo cuántico está basado en el capítulo 5.3.1 de [8]. Trataré de realizar un breve resumen sobre este formalismo, quedándonos con lo esencial para el entendimiento de este trabajo.

Este formalismo proviene de la teoría cuántica de campos aplicada a la física de partículas, donde se trata de calcular las probabilidades de transiciones entre estados de las reacciones entre partículas (*scattering...*), mediante el formalismo cuántico de valores esperados de operadores, esto es, $\langle out|S|in \rangle$. Se obtiene la probabilidad de pasar de un estado $|in\rangle$ a un estado $|out\rangle$. En esencia, se cuantifica la evolución temporal de un estado físico. Un caso particular es la regla de oro de Fermi, donde va implícito el cálculo de secciones eficaces, amplitudes de probabilidad...

A lo que nosotros incumbe nos centraremos en la probabilidad de interacción entre dos estados, esto es, lo que hemos comentado anteriormente, pero a un tiempo fijado.

$$\langle Q \rangle = \langle in|Q(t)|in \rangle \quad (81)$$

Donde el operador Q , denotará cualquier tipo de "interacción" entre los estados que, en nuestro caso, serán las perturbaciones en la curvatura (ζ), o de las ondas gravitacionales (h^\times, h^+).

En cosmología operaremos sobre el estado fundamental del vacío, esto es lo que ya se ha detallado en el capítulo 3.1.2 en la Ec. (19) y conocemos como el vacío de Bunch-Davies que denotaremos como $|0\rangle$. Para expandir la operación (81) usaremos el marco de la *Imagen de Interacción*, formulación entre *Imagen de Schrödinger* y *Imagen de Heisenberg*. Para no entrar mucho en detalle, nos bastará con saber que consiste en una formulación acerca de la evolución temporal de los estados y observables de la siguiente manera:

$$|\Psi_I(t)\rangle = e^{H_0 t/\hbar} |\Psi_S(t)\rangle \quad (82)$$

$$A_I(t) = F^{-1}(t, t_i) A_s F(t, t_i) \quad (83)$$

Donde vemos que los observables son expresados como una transformación unitaria. La forma de estos operadores unitarios es:

$$F(t, t_i) = T \cdot \exp \left(-i \int_{t_i}^t H_{int}(t) dt \right) \quad (84)$$

Donde H_{int} es el H_3 que expresamos en este trabajo, proveniente de aplicar teoría de perturbaciones y T corresponde con el denominado *operador de ordenación temporal*. La forma de esta evolución temporal de (84) proviene de resolver la ecuación de Schrödinger. No entraremos en detalle, pero si al lector le interesa puede encontrar mas información a partir de la ecuación 5.3.49 de [8] o en un artículo exclusivo de este formalismo en [16].

Introduciendo estas herramientas en (81) encontramos:

$$\langle Q \rangle = \langle 0 | \bar{T} e^{(i \int_{-\infty}^t -H_{int}(t) dt)} Q^I(t) T e^{(-i \int_{-\infty}^t H_{int}(t) dt)} | 0 \rangle \quad (85)$$

Desarrollando en serie de Taylor las exponenciales y quedándonos con los dos primeros términos del desarrollo, sabemos que: $e^x \approx 1 + x$, obtenemos:

$$\langle Q(t) \rangle = -i \int_{-\infty}^t \langle 0 | [Q^I(t), H_{int}(t)] | 0 \rangle \quad (86)$$

Donde expresamos el valor esperado del operador Q en términos de la integral del operador conmutador. Esta corresponderá con la operación que usaremos en este trabajo para hallar valores esperados.

8.2. Ecuaciones de Einstein Perturbadas

En esta sección trataré de mostrar de manera resumida y concisa el procedimiento usado para obtener las componentes del tensor energía-momento a partir de las ecuaciones de Einstein perturbadas.

Esta sección estará basada en los capítulos 3 de [18] y 6.1.1 y 6.1.4 de [9].

Partiremos entonces de la métrica perturbada:

$$ds^2 = -(1 + 2A)dt^2 + 2a\partial_i B dx^i dt + a^2[(1 - 2\psi)\delta_{ij} + 2\partial_{ij}E + h_{ij}]dx^i dx^j \quad (87)$$

y realizando el siguiente cambio de coordenadas *gauge*:

$$t \rightarrow t + \delta t \quad x^i \rightarrow x^i + \delta^{ij} \partial_j \delta x \quad (88)$$

El procedimiento a seguir aplicando este cambio es ver como cambian las perturbaciones introducidas en la métrica (A , B , E y ψ). Aplicaremos la matemática de cambio de coordenadas:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x)dx^\mu dx^\nu = \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x})d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta \quad (89)$$

$$g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^\alpha}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\beta}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{\alpha\beta}(\tilde{x}) \quad (90)$$

Con esto estas herramientas encontramos que:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A - \delta t \\ B &\rightarrow B + \frac{\delta t}{a} - \delta x \\ E &\rightarrow E - \delta x \\ \psi &\rightarrow \psi + H\delta t \end{aligned} \quad (91)$$

Estudiando estas transformaciones será útil introducir las variables de Bardeen:

$$\Psi \equiv \psi + a^2 H(\dot{E} - B/a) \quad \Phi \equiv A - \frac{d}{dt} \left[a^2(\dot{E} - B/a) \right] \quad (92)$$

Son variables invariantes bajo transformaciones *gauge*, nos serán de gran utilidad para el procedimiento.

Con esta teoría podemos comenzar con el desarrollo de las ecuaciones de Einstein perturbadas. Recordando la Ec. (3) necesitaremos ir desarrollando cada término. En primer lugar, encontramos el escalar de Ricci, que adquiere la siguiente forma en términos de las variables de Bardeen:

$$\begin{aligned} a^2 R = (1 - 2\Psi)[3H' - \nabla^2 \Psi - 3H(\Phi' + \Psi') - 3\Phi''] + 3(1 + 2\Phi)[H' + 2H^2 - \Phi'' + \nabla^2 \Phi \\ - 2(H' + 2H^2)(\Phi + \Psi) - H\Psi' - 5H\Phi'] + (1 + 2\Phi)\nabla^2(\Phi - \Psi) \end{aligned} \quad (93)$$

La obtención de la ecuación anterior no la mostraré para evitar largos desarrollos, pero de manera resumida deberemos encontrar los símbolos de Christoffel perturbados en términos de las variables de Bardeen, con ellos, construir el tensor de Ricci y por último contraer con la métrica hasta obtener el escalar de Ricci mostrado.

Con todo esto, podemos ir desarrollando índice a índice las ecuaciones de Einstein:

$$\delta G_0^0 = -a^{-2}[\nabla^2 \Phi - 3H(\Phi' + H\Psi)] \quad (94)$$

Encontramos entonces:

$$\nabla^2 \Phi - 3H(\Phi' + H\Psi) = 4\pi G a^2 \delta \rho \quad (95)$$

Por otro lado:

$$G_i^0 = -2a^{-2}\partial_I(\Phi' H\Psi) \quad (96)$$

De nuevo encontramos que:

$$\Phi' + H\Psi = -4\pi G a^2 \delta q \quad (97)$$

Por último, calculando la traza del tensor energía-momento para la presión encontramos que:

$$\Phi'' + 3H\Phi' + (2H' + H^2)\Phi = 4\pi G a^2 \delta P \quad (98)$$

Donde vemos que (95) y (97) corresponden con las componentes perturbadas del tensor energía-momento usadas en este trabajo deshaciendo el cambio de las variables de Bardeen.

8.3. Formalismo δN

En este apartado trataré de desarrollar el formalismo usado para el entendimiento al completo de la sección 4.4. Consistirá en desarrollo de este formalismo mostrado en [8], aun así, si el lector necesita mayor rigurosidad y detalle podrá verlo en el apartado 4 de [23].

De manera resumida, entenderemos este formalismo a través de las *e-folds*. Entendemos N *e-folds* como el intervalo de tiempo en el que el factor de escala a ha crecido un factor N veces el factor e . Por lo tanto, hablar de N *e-folds* es completamente análogo que hablar de tiempo coordinado (t) o de tiempo comovil (τ).

De esta manera, interpretaremos una perturbación escalar (que durante en este trabajo se ha aplicado a la métrica, en el contexto de *single-field* lo he representado con ζ) como una perturbación en el factor de escalar. Esta perturbación dependerá del tiempo y del espacio evidentemente, de la siguiente manera:

$$a(\mathbf{x}, t) = a(t)e^{\psi(\mathbf{x}, t)} \quad (99)$$

Con esto, trataremos de expresar el numero de *e-folds* de un periodo de tiempo, esto es:

$$\delta N(\mathbf{x}) = \int_{t_2}^{t_1} \frac{d \ln(a)}{dt} dt = \psi(\mathbf{x}, t_2) - \psi(\mathbf{x}, t_1) = \zeta(\mathbf{x}, t) \quad (100)$$

La última igualdad podemos hacerla ya que la perturbación en la métrica (ζ), la cual en el contexto de *single-field* la trabajamos en un *gauge* comovil, es equivalente a la perturbación añadida en el factor de escala (ψ) si trabajamos en *gauge* de densidad uniforme²⁰.

Por otro lado, podremos expresar esta cantidad de *e-folds* en función de los campos escalares y sus perturbaciones, encontraremos δN como la diferencia del número de *e-folds* de hacer evolucionar

²⁰Esta argumentación proviene del desarrollo de la métrica perturbada mediante una transformación *gauge*, tal cual he mostrado en 8.2, y de como la combinación de estas cantidades produce escenarios donde la física es invariante pero simplifica las ecuaciones, se puede visitar [9] para mayor entendimiento.

un campo escalar perturbado con un campo escalar sin perturbar:

$$\delta N = N(\varphi_I + \delta\varphi_I) - N(\varphi_I) \quad (101)$$

Esto es, como se ha comentado antes, la perturbación escalar. Realizando una expansión en Taylor de esta cantidad en función de los campos escalares, de sus perturbaciones, y de las derivadas del número de *e-folds*, obtenemos para los primeros términos:

$$\zeta = \partial_I N \delta\varphi_I + \frac{1}{2} \partial_I \partial_J \delta\varphi_I \delta\varphi_J \quad (102)$$

Con estas herramientas (y ahorrando un poco de cálculo) podemos expresar el *bispectrum* en función del número de *e-folds* para cada campo y el *power-spectrum*. Calculando la función de correlación a 3 puntos como hicimos en (35) nos queda en función del promedio de las $\delta\varphi_I$, es decir, del *power-spectrum* como hicimos en (25), se obtiene:

$$B_\zeta(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3) = \frac{N_{IJ} N_I N_J}{(N_L^2)^2} [P_\zeta(k_1) P_\zeta(k_2) + P_\zeta(k_1) P_\zeta(k_3) + P_\zeta(k_3) P_\zeta(k_2)] \quad (103)$$

Donde $N_I = \partial_I N$. El prefactor multiplicativo corresponderá con la amplitud del *bispectrum*, f_{NL} , que vimos en (37).