INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS
INGENIERÍA MATEMÁTICA

Formulario.

Huerta Diaz Jair Alberto.

ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES I.

Profesor: Ricardo Medel Esquivel.

Grupo: 5MV1

2023-1

.

Ecuación General de Segundo grado.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{1}$$

1. ***Rotación de Ejes.***
   Nota: Cuando el coeficiente $\boldsymbol{B}$ *de la ecuación* (1) *es diferente de cero, el término mixto(o cruzado) indica que los ejes de la canónica tienen un ángulo respecto al sistema original.*

$$x = x'cos\theta - y'sin\theta \qquad\qquad y = x'sin\theta + y'cos\theta \tag{2}$$

Donde:

$$x' = xcos\theta + ysin\theta \qquad\qquad y' = ycos\theta - xsin\theta \tag{3}$$

Ecuaciones Diferenciales.

1. ***Notación:***
   Sea $u = u(x, t)$

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \qquad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad u_{xt} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \tag{4}$$

2. ***Ecuaciones Diferenciales Ordinarias:***

   a) *Variables Separables.*

$$y' = \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) \qquad ; \qquad g(y) \neq 0$$

Reescribimos

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx$$

   b) *Ecuaciones Lineales.*

$$y' + p(x)y = q(x)$$

Calculamos el *factor integrante*

$$\mu(x) = e^{\int p(x)dx}$$

Obtenemos la solución general

$$y(x) = \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)q(x)dx$$

   c) *Ecuaciones Homogeneas.*

   1) *Ecuaciones de Primer Orden.*

$$y' + ay = 0 \qquad\qquad a = constante$$

Resolvemos la *ecuacion caracteristica*:

$$s + a = 0 \longrightarrow s = -a$$

La *solución general* es

$$y(x) = Ce^{-ax}$$

   2) *Ecuaciones de Segundo Orden.*

$$y'' + ay' + by = 0 \qquad\qquad a, b = constantes$$

Resolvemos la *ecuación característica*

$$s^2 + as + b = 0$$

Considerando a s_1 y s_2 como soluciones de la ecuación caracteritica, tenemos que:

a' Si $s_1 \neq s_2$, entonces la solución general es

$$y(x) = C_1 e^{s_1 x} + C_2 e^{s_2 x}$$

b' Si $s_1 = s_2$, generalizando a ambas como s_0, la solución general es

$$y(x) = (C_1 + C_2 x)e^{s_0 x}$$

c' Si $s_1 = \alpha + i\beta$ y $s_2 = \alpha - i\beta$, la solución general es

$$y(x) = e^{\alpha x}[C_1 cos\beta x + C_2 sin\beta x]$$

Ecuaciones Diferenciales Lineales de Segundo Grado.

En general, las ecuaciones diferenciales lineales de segundo grado en dos variables tienen la forma:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu + G = 0 \tag{5}$$

Donde A, B, C, D, E, F, G son funciones reales definidas en una región $\Omega \subset R^2$ yb $A^2 + B^2 + C^2 > 0$. Si los coeficientes son constantes, con la posible excepción de G, la Ecuacion Diferencial Parcial se llama *lineal*

1. ***Discriminate:***

   El *discriminante* (o indicador) I de la ecuación (5) es:

   $$I = B^2 - 4AC \tag{6}$$

   Dado lo anterior, se dice que la ecuación (5) es

   a) *Parabólica* si $I = 0$.
   b) *Elíptica* si $I < 0$.
   c) *Hiperbólica* si $I > 0$.

2. ***Lema***: Considere el cambio de coordenadas dado por:

   $$\xi = a_{11}x + a_{12}y$$
   $$\eta = a_{21}x + a_{22}y$$

   con $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$, además, $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R$. Si

   $$A'u_{\xi\xi} + B'u_{\xi\eta} + C'_{\eta\eta} + D'u_\xi + E'u_\eta + F'u + G' = 0 \tag{7}$$

   Es la ecuación transformada bajo cambios de coordenadas, entonces

   $$sgn(B^2 - 4AC) = sgn(B'^2 - 4A'C') \tag{8}$$

   es decir, el indicador es invariante bajo cambios de coordenadas.

Forma Canónica de las Ecuaciones.

Discriminante I:	Tipo:	Ecuaciones de Transformación.	Forma Canónica:
$I > 0$	*Hiperbólica*	$\xi = -(B + \sqrt{B^2 - 4AC}x + 2Ay$ $\xi = -(B - \sqrt{B^2 - 4AC}x + 2Ay$	$u_{\xi\eta} = F'(u_\xi, u_\eta, \xi, \eta)/$ $u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} = F'(u_\xi, u_\eta, \xi, \eta)$
$I = 0$	*Parabólica*	$\xi = -BX + 2Ay$ $\eta = x$	$u_{\eta\eta} = G'(u_\xi, u_\eta, \eta, \xi)$
$I < 0$	*Elíptica*	$\xi = -Bx + 2Ay$ $\eta = \sqrt{4AC - B^2}$	$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = H'(u_\xi, u_\eta, \eta, \xi)$

Lema 2
Sea el cambio de coordenadas

$$\xi = a_{11}x + a_{12}y \qquad\qquad \eta = a_{21}x + a_{22}y$$

Con

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad\qquad \mathrm{a}_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} \in R$$

Dada la ecuación original

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

Llegamos a la ecución transformada bajo el cambio de coordenadas

$$A'u_{\xi\xi} + B'u_{\xi\eta} + C'u_{\eta\eta} + D'u_\xi + E'u_\xi + F' = 0$$

Donde queda

$(Aa_{1_1}^2 + Ba_{12}a_{11} + Ca_{1_2}^2)u_{\xi\eta} + (2Aa_{11}a_{12} + B(a_{12}a_{21} + a_{22}a_{11}) + 2(a_{12}a_{22}))u_{\xi\eta} + (Aa_{1_2}^2 + Ba_{22}a_{21} + Ca_{22}a_{12})u_{\eta\eta} + (Da_{11} + Ea_{12})u_\eta + (Da_{12} + Ea_{22})u_\eta + F = 0$

FORMULA DE KRONECKER

Sea $p(x)$ un polinomio de grado m y $f(x)$ una función continua, excepto una constante, entonces:

$$\int p(x)f(x) = p(x)F_1(x) - p'(x)F_2(x) + p''(x)F_3(x) - ... + (-1)^m p(x)^m F_{m+1}(x)$$

Donde $p(x)$ se deriva sucesivamente hasta anularse y $F_1(x)$ denota la integral de $f(x)$,$F_2(x)$ la integral de $F_1(x)$ y así sucesivamente.

Condiciones de Frontera:

Las EDP generalmente se restringen a una región Ω con frontera $\partial\Omega$.

1. *Condición de Dirichlet:* $u = g$
2. *Condición de Neumann(o de flujo):* $\frac{\partial u}{\partial n} = g$
3. *Condición de Robin(mixta o de radiación):* $\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n} = g$

donde n es el vector normal y, α y β son constantes.

METODO DE SEPARACION DE VARIABLES I.

1. ***Notación:***

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x} \qquad\qquad D_y = \frac{\partial}{\partial y} \tag{9}$$

2. ***Definición:***
Una Ecuación Diferencial Parcial en dos variables, x y y, es *lineal* si tiene la forma:

$$\Phi(D_x, D_y)U = F(x, y) \tag{10}$$

Donde el operador $\Phi(D_x, D_y)$ es un polinomio en los dos operadores D_x y D_y.

3. ***Teorema 1:***La solución general de la ecuación lineal:

$$\Phi(D_x, D_y, ...) = F(x, y, ...) \tag{11}$$

donde $x, y, ...$ son variables independientes y $\Phi(D_x, D_y, ...)$ es un operador polinómico en $D_x, D_y, ...$ es la suma de la solución general U_C de la ecuación complementaria

$$\Phi(D_x, D_y, ...)U = 0 \tag{12}$$

y cualquier solución particular U_P de la ecuación (10), esto es:

$$U = U_C + U_P \tag{13}$$

4. ***Teorema 2 (Principio de Superposición):*** Sean $U_1, U_2, ...$ soluciones de la ecuación (12). Entonces si $a_1, a_2, ...$ son cosntantes cualesquiera

$$U = a_1U_1 + a_2U_2 + ... \tag{14}$$

   También es una solución.

5. ***Método de Separación de Variables.***

   Para hallar una solución particular de la ecuación (10), suponemos una solución de la forma:

$$U(x, y) = X(x)Y(y) = XY \tag{15}$$

   Nota: Este método aveces funciona y aveces no.

Teoremas de Cálculo III.

1. ***Teorema de Fubini:*** El Teorema de Fubini da una técnica para el cáculo de integrales de funciones de varias variables mediante el cálculo de varias integrales de funciones de una variable.

   Sea f continua en una región plana R.

   a) Si R está definida por $a \leq x \leq b$ y $g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$, donde g_1 y g_2 son continuas en $[a, b]$, entonces

$$\int\int_R f(x, y)dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y)dydx \tag{16}$$

   b) Si R est+a definida por $c \leq y \leq d$ y $h_1(y) \leq x \leq h_2(x)$, donde h_1 y h_2 son continuas es $[c, d]$, entonces

$$\int\int_R f(x, y)dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y)dxdy \tag{17}$$

2. ***Teorema de la divergencia Gauss:*** Dado un campo vectorial F de R^3 cuyas componentes F_1, F_2, F_3 tienen derivadas parciales, se define la divergencia de F, que denotaremos por $\triangledown F$, como el campo escalar

$$\triangledown F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \tag{18}$$

   El teorema nos dice que: Sea Ω una región simple de R^3 cuya superficie frontera S tiene orientación positiva (hacia afuera). Sea F un campo vectorial cuyas funciones componentes poseen derivadas parciales continuas sobre una región abierta que contiene a Ω. Entonces

$$\int_S \triangledown F dV = \int\int\int_\Omega \triangledown F dxdydz = \int\int\int_\Omega [\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}]\ dxdydz \tag{19}$$

3. ***Teorema de Green:*** Sea C una curva dada por la parametrización

$$r : [a, b] \quad \rightarrow \quad C \subset R^3$$

$$t \quad \rightarrow \quad r(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

se dice que la curva es cerrada si $r(a) = r(b)$. C se dice que es una curva simple si r es inyectiva en (a, b), es decir, si

$$r(t_1) \neq r(t_2) \quad cuando \quad a < t_1 < t_2 < b$$

Por convenio, para las curvas cerradas la orientación positiva se define como el sentido antihorario.

El Teorema de Green dice: Sea C una curva en el plano cerrada simple suave a trozos y orientada positivamente, y sea D la región del plano acotada por C. Si $P(x, y)$ y $Q(x, y)$ son dos funciones reales de clase C^1 sobre una región abierta que contiene a D, entonces

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\int_D [\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}]dxdy \tag{20}$$

El teorema de Green se puede extender a regiones que no son simplemente conexas, es decir, que tiene .ªgujeros".

4. ***Teorema de Stokes:*** Dado un campo vectorial F en R_3 cuyas componentes F_1, F_2, F_3 tienen derivadas parciales, se define el rotacional de F, que denotaremos por **rot** F, como el campo vectorial

$$rotF = (\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}, \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}) \tag{21}$$

El cálculo del rotacional se puede hacer de forma sencilla mediante la expresión simbólica

$$rot \quad F = \nabla \wedge F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

Dada una superficie cuya frontera es una curva cerrada simple, la orientación de la superficie induce sobre la curva frontera una orientación que denominaremos positiva. La orientación inducida sobre la curva frontera es el sentido de recorrido que hace que la superficie quede a la izquierda.

EL Teorema de Stokes nos dice: Sea S una superficie orientada y suave a trozos, acotada por una curva frontera C suave a trozos, cerrada y simple, cuya orientación es positiva. Sea F un campo vectorial cuyas componentes tienen derivadas parciales continuas sobre una región abierta de R^3 que contiene a S. Entonces

$$\int_C F = \int_S rotF \tag{22}$$

DEFINICION

FUNCION PAR: f es una función par en $[-L, L]$ si $f(-x) = f(x)$ para $-L \leq x \leq L$
Es decir, simétrica al eje de las y
Ejemplo:

$$Cos(-n\pi) = Cos(n\pi)$$

FUNCION IMPAR: f es una función par en $[-L, L]$ si $f(-x) = -f(x)$ para $-L \leq x \leq L$
Es decir, simétrica al origen Ejemplo:

$$Sin(-n\pi) = -Sin(n\pi)$$

PROPIEDADES

$par * impar = impar$ $\qquad$ $par * par = par$ $\qquad$ $impar * impar = par$

$$Sin(n\pi) = 0 \qquad Cos(n\pi) = (-1)^n$$

$$\int Sin(x) = -Cos(x) + C \qquad \int Cos(x) = Sin(x) + C$$

$$f'(x) = Sin(x) \longrightarrow Cos(x) \qquad f'(x) = Cos(x) \longrightarrow -Sen(x)$$

Periodo en el que Sin de 0 es $n\pi$ para $f(x)$, $x \in [0, L]$
Si $f(x)$ es par:

$$a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)Cos(\frac{n\pi x}{L})$$

$$b_n = 0$$

Si $f(x)$ es impar:

$$a_0 = 0$$

$$a_n = 0$$

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)Sin(\frac{n\pi x}{L})$$

Definición: Sea$f(x)$ definida en $[a, b]$, excepto quizás en un número finito de puntos. Entonces f es **continua a pedazos** en $[a, b]$

a) f es continua en $[a, b]$ excepto quizás en un número finito de puntos

b) Ambos $\lim_{x \to a^+} f(x)$ y $\lim_{x \to b^-} f(x)$ existen son finitos

c) Six_0 está en (a, b) y f no es continua en x_0 entonces $\lim_{x \to x_0+} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0-} f(x)$ existen y son finitos.

Definición: f es **suave a pedazos** a $[a, b]$ si f y f' son continuas a pedazos en $[a, b]$

Teorema: Sea f suave a pedazos en $[-L, L]$. Entonces, para $-L \leq x \leq L$, la serie de Fourier de f en $[-L, L]$ converge a

$$\frac{1}{2}(f(x+) + f(x-))$$

Teorema: Convergencia de series de Fourier en los extremos. La serie de Fourier de f en $[-L, L]$ converge en L y en $-L$ a

$$\frac{1}{2}(f(L-) + f(-L+))$$

Trigonometría

Fórmulas de la adición
$sin(A + B) = sinAcosB + sinBcosA$

Fórmulas de la resta
$sin(A - B) = sinAcosB - sinBcosA$

Fórmulas del producto

$$senAcosB = \frac{sen(A + B) + sen(A - B)}{2}$$

Tabla 10.1 self.adjoint ODE's

Ecuación	$p(x)$	$q(x)$	λ	$\sigma(x)$
Legendre[a]	$1 - x^2$	0	$l(l+1)$	1
Shifted Legendre[a]	$x(l - x)$	0	$l(l+1)$	1
Associated Legendre[a]	$a - x^2$	$-m^2/(1 - x^2)$	$l(l+1)$	1
Chebyshev I	$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$	0	n^2	$(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$
Shifted Chebyshev I	$[x(1 - x)]^{\frac{1}{2}}$	0	n^2	$[x(1 - x)]^{-\frac{1}{2}}$
Chebyshev II	$(1 - x^2)^{\frac{3}{2}}$	0	$n(n+2)$	$(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$
Ultraspherical	$(1 - x^2)^{\alpha} + \frac{1}{2}$	0	$n(n + 2\alpha)$	$(1 - x^2)^{\alpha} - \frac{1}{2}$
Bessel[b], $0 \leq x \leq a$	x	$-n^2/x$	a^2	x
Laguerre	$xe^{-}x$	0	α	$e^{-}x$
Associated Laguerre[c]	$x^k + 1e^{-}x$	0	$\alpha - k$	$x^k e^{-}x$
Hermite	$e^{-}x^2$	0	2α	$e^{-}x^2$
Simple harmonie oscillator[d]	1	0	n^2	1

Problemas con valores en la frontera para $\frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi$

Table 2.4.1: Boundary Value Problems for $\dfrac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda\phi$

Boundary conditions	$\phi(0) = 0$ $\phi(L) = 0$	$\frac{d\phi}{dx}(0) = 0$ $\frac{d\phi}{dx}(L) = 0$	$\phi(-L) = \phi(L)$ $\frac{d\phi}{dx}(-L) = \frac{d\phi}{dx}(L)$
Eigenvalues λ_n	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 1, 2, 3, \ldots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$	$\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2$ $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$
Eigenfunctions	$\sin \frac{n\pi x}{L}$	$\cos \frac{n\pi x}{L}$	$\sin \frac{n\pi x}{L}$ and $\cos \frac{n\pi x}{L}$
Series	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{L}$	$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}$ $+ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}$
Coefficients	$B_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$	$A_0 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\, dx$ $A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$	$a_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)\, dx$ $a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx$ $b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L}\, dx$

Problemas de valores propios

Definición: Sea ξ un espacio de funciones definidas sobre el mismo intervalo I. Un operador diferencial lineal L sobre ξ se llama **simétrico** si:

$$\int_I [f_1(x)(Lf_2)(x) - f_2(x)(Lf_1)(x)]dx = 0$$

para cualesquiera funciones f_1 y f_2 en ξ

Definición: Sea ω una función definida sobre I con la propiedad de que $\omega(x) > 0$ para toda x en I. Dos funciones, f_1 y f_2, también definidas sobre I, se llaman **ortogonales con peso** ω sobre I si:

$$\int_I f_1(x) f_2(x)\omega(x)dx = 0$$

Si $\omega(x) = 1$, entonces f_1 y f_2 simplemente se llaman **ortogonales**. Un conjunto de funciones que son ortogonales a pares, se llama un **conjunto ortogonal**

Definición: Sea un operador diferencial sobre un espacio ξ de funciones definidas sobre (a, b). Una ecuación de la forma

$$(Lf)(x) + \lambda\omega(x)f(x) = 0, \qquad a < x < b$$

donde λ es un parámetro y ω es una función dada tal que $\omega(x) > 0$ para todo x en (a, b) se llama un **problema de valores propios.** Los números λ para los que existen solución distinta de 0 en ξ se llaman **valores propios** y sus correspondientes soluciones se llaman **funciones propias**

Teorema: Si el operador L del problema de valores propios(1) es simétrico, entonces:

a) Todos los valores propios λ son reales:

b) Los valores propios forman una secuencia infinita $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_n < ...$ tal que $\lambda_n \longleftarrow \infty$ cuando $n \Longleftarrow \infty$;

c) Funciones propias asociadas con distintos valores propios son ortogonales con peso ω en (a, b).

Problemas de Sturm-Liouville
Definición: Sea $[a, b]$ un intervalo finito, sean p, q y ω funciones de valores reales, y sean k_1, k_2, k_3 y k_4 números reales tales que:

a) La función p es continuamente diferenciable en $[a, b]$ y $p(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$;

b) Las funciones q y ω son continuas en $[a, b]$ y $\omega(x) > 0$ para todo x en $[a, b]$

c) Los parámetros k_1 y k_2 no son ambos cero y k_3 y k_4 no son ambos cero.

Un problema de valres propios de la forma

$$[p(x)f'(x)]' + q(x)f(x) + \lambda\omega(x)f(x) = 0, < x < b!$$

con las condiciones de frontera:

$$k_1 f(a) + k_2 f'(a) = 0$$

$$k_3 f(b) + k_4 f'(b) = 0$$

Se le llama un **problema regular de Sturm-Liouville (S-L)**
Teorema: El operador

$$Lf = (pf)' + qf$$

definido en el lado izquierdo de la ecuación (2) es simétrico
Corolario: Los valores propios y las funciones propias de un problema S-L tienen las propiedades descritas por el Teorema de la sección anterior.

COORDENADAS CURVILINEAS

1. Coordenadas Polares:
Denotaremos las coordenadas polares de un punto por (r, θ) Es nuestra intención asociar a cada punto P del plano una pareja (r, θ) y viceversa. Este sistema de coordenadas puede resultar más conveniente en el cálculo de las ecuaciones de movimiento de varios sistemas mecánicos. Muchas veces tenemos objetos que se mueven en círculos y el uso de coordenadas polares puede simplificar las ecuaciones usadas.

Fórmula para conversión de coordenadas Polares a Cartesianas

$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

Fórmula para conversión de coordenadas Cartesianas a Polares

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Encontramos al ángulo θ usando la tangente inversa. La tangente de un ángulo es igual al lado opuesto dividido por el lado adyacente. En este caso, el lado opuesto es y y el lado adyacente es x. Entonces, tenemos:

$$\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

2. Coordenadas Cilindricas:
   Las coordenadas cilíndricas son definidas como un sistema de coordenadas tridimensional alterno al sistema cartesiano. Las coordenadas cilíndricas son escritas en la forma (r, θ, z), en donde r representa a la distancia desde el origen hasta el punto en el plano xy y θ representa al ángulo formado con respecto al eje x y z Este sistema de coordenadas es usado principalmente para graficar figuras con forma cilíndrica como tubos o tanques. Esto resulta principalmente conveniente en el cálculo, ya que dependiendo en las ecuaciones dadas, encontrar sus derivadas o integrales puede resultar más fácil.

   Fórmula para conversión de coordenadas Cilindricas a Cartesianas

   $$x = r\cos\theta$$
   $$y = r\sin\theta$$
   $$z = z$$

   Fórmula para conversión de coordenadas Cartesianas a Cilindricas

   $$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3. Coordenadas Esféricas
   Las coordenadas esféricas son un sistema de coordenadas tridimensional. Este sistema tiene la forma (ρ, θ, Φ) en donde, ρ es la distancia desde el origen hasta el punto, θ es el ángulo formado con respecto al eje x y ϕ es el ángulo formado con respecto al eje z.

   Fórmula para conversión de coordenadas Esféricas a Cartesianas

   $$x = \rho\cos\phi\cos\theta$$
   $$y = \rho\sin\phi sin\theta$$
   $$z = \rho\cos\phi$$

   Fórmula para conversión de coordenadas Cartesianas a Esféricas

   $$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

   Para encontrar al ángulo ϕ, podemos usar la función coseno. Vemos que el lado adyacente a este ángulo es el lado z y la hipotenusa es igual a ρ. Entonces, tenemos:

   $$\phi = \cos^{-1}\frac{z}{\rho}$$

OPERADORES VECTORIALES

1. Teorema de la Divergencia
   El teorema de la divergencia, también llamado teorema de Gauss, relaciona el flujo de un campo vectorial a través de una superficie cerrada con la integral de la divergencia de dicho campo en el interior del volumen encerrado por una superficie. Ese resultado lo hace interesante tanto en aplicaciones relacionadas con la electrostática como en la mecánica de fluidos. **Teorema** Sea $U \in R^3$ una región sólida acotada por una superficie cerrada S orientada por un vector normal unitario que apunta hacia el exterior de U, si F es un campo vectorial con derivadas parciales continuas en U entonces tenemos:

   $$\int\int_{\partial U}(F)(dS) = \int\int\int_U \nabla(F)(dV)$$

   Donde $S = \partial U$

2. Gradiente
   Si $f : R^n \to R$ es un campo escalar entonces el gradiente de f en r se define como el campo vectorial $\nabla f : R^n \to R^n$ cuyas componentes son las derivadas parciales del campo escalar, esto es:

$$\nabla f(r) = (\frac{\partial f(r)}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f(r)}{\partial x_n})$$

   Esta definición se basa en que el gradiente permite calcular fácilmente las derivadas direccionales. Definiendo en primer lugar la derivada direccional según un vector

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \lim_{\in \to \infty} \frac{\phi(r + \in n) - \phi(r)}{\in}$$

   Una forma equivalente de definir el gradiente es como el único vector que, multiplicado por el vector unitario, da la derivada direccional del campo escalar:

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = n \nabla \phi$$

   Con la definición anterior, el gradiente está caracterizado de forma unívoca. El gradiente se expresa alternativamente mediante el uso del operador nabla:

$$grad \phi = \nabla \phi$$

   A partir de su definición puede demostrarse su expresión en diferentes sistemas de coordenadas. En coordenadas cartesianas, su expresión es simplemente

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} x + \frac{\partial \phi}{\partial y} y + \frac{\partial \phi}{\partial z} z$$

   En un sistema de coordenadas ortogonales, el gradiente requiere los factores de escala, mediante la expresión:

$$\nabla \phi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \phi}{\partial q_1} q_1 + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \phi}{\partial q_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \phi}{\partial q_3} q_3$$

   Para coordenadas cilíndricas resulta $h_\phi = h_z = 1, h_\rho = r \sin \theta$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \rho + \frac{1}{\phi} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \varphi + \frac{\partial \phi}{\partial z} z$$

   Para coordenadas esféricas $h_\gamma = 1, h_\theta = r, h_\varphi = r \sin \theta$

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r} r + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \phi}{\partial \varphi} \varphi$$

TRANSFORMADA DE LAPLACE

	f (t)	F(s)
1	Impulso unitario $\delta(t)$	1
2	Escalón unitario 1(t)	$\frac{1}{s}$
3	t	$\frac{1}{s^2}$
4	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{s^n}$
5	$t^n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
6	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
7	te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
8	$\frac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
9	$t^n e^{-at} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$
10	$sen\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$
11	$cos\ \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
12	$senh\ \omega t$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$
13	$cosh\ \omega t$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$
14	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$	$\frac{1}{s(s+a)}$
15	$\frac{1}{b-a}(e^{-at}-e^{-bt})$	$\frac{1}{(s+a)(s+b)}$
16	$\frac{1}{b-a}(be^{-bt}-ae^{-at})$	$\frac{s}{(s+a)(s+b)}$
17	$\frac{1}{ab}[1+\frac{1}{a-b}(be^{-at}-ae^{-bt})]$	$\frac{1}{s(s+a)(s+b)}$
18	$\frac{1}{a^2}[1-e^{-at}-ate^{-at})]$	$\frac{1}{s(s+a)^2}$
19	$\frac{1}{a^2}[at-1+e^{-at})]$	$\frac{1}{s^2(s+a)}$
20	$e^{-at}sen\ \omega t$	$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$
21	$e^{-at}cos\ \omega t$	$\frac{(s+a)}{(s+a)^2+\omega^2}$

TRANSFORMADA DE FOURIER

No	x(t)	X(ω)	
1	$e^{-at}\mu(t)$	$\frac{1}{a+j\omega}$	a>0
2	$e^{at}\mu(-t)$	$\frac{1}{a-j\omega}$	a>0
3	$e^{-a\|t\|}$	$\frac{2a}{a^2+\omega^2}$	a>0
4	$t\,e^{-at}\mu(t)$	$\frac{1}{(a+j\omega)^2}$	a>0
5	$t^n\,e^{-at}\mu(t)$	$\frac{n!}{(a+j\omega)^{n+1}}$	a>0
6a	$\delta(t)$	1	
6b	$\delta(t-t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$	
7	1	$2\pi\delta(\omega)$	
8	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega-\omega_0)$	
9	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]$	
10	$\sin(\omega_0 t)$	$\pi\left[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)\right]$	
11a	$\mu(t)$	$\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$	
11b	$\mu(-t)$	$\pi\delta(\omega)-\frac{1}{j\omega}$	
12	$\mathrm{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$	
13	$\cos(\omega_0 t)\,\mu(t)$	$\frac{\pi}{2}\left[\delta(\omega-\omega_0)+\delta(\omega+\omega_0)\right]+\frac{j\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$	
14	$\sin(\omega_0 t)\,\mu(t)$	$\frac{\pi}{2j}\left[\delta(\omega-\omega_0)-\delta(\omega+\omega_0)\right]+\frac{\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}$	
15	$e^{-at}\sin(\omega_0 t)\,\mu(t)$	$\frac{\omega_0}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	a>0
16	$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,\mu(t)$	$\frac{a+j\omega}{(a+j\omega)^2+\omega_0^2}$	a>0
17	$rect\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\tau sinc\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$	
18	$\frac{W}{\pi} sinc(Wt)$	$rect\left(\frac{\omega}{2W}\right)$	
19	$\Delta\left(\frac{t}{\tau}\right)$	$\frac{\tau}{2} sinc^2\left(\frac{\omega\tau}{4}\right)$	
20	$\frac{W}{2\pi} sinc^2\left(\frac{Wt}{2}\right)$	$\Delta\left(\frac{\omega}{2W}\right)$	
21	$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$	$\omega_0\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-n\omega_0)$	$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$
22	$e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$	
23	$\frac{1}{a^2+t^2}$	$e^{-a\|\omega\|}$	
24	e^{-at^2}	$\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\omega^2/4a}$	a>0
25	$p_a(t)=\begin{cases}1 & \|t\|<a\\ 0 & \|t\|>a\end{cases}$	$2a\frac{\sin(\omega a)}{(\omega a)}$	