Esercitazione 4

Metodi alle differenze finite per PDEs in 1D.

4.1 a) Discretizzare l'equazione di Poisson in 1D

$$-u_{xx} = 1 \quad su \quad [0\ 1], \qquad \text{con dati al bordo} \quad u(0) = 1, \quad u(1) = -1,$$

con differenze finite centrate su una griglia equispaziata di $n+2$ punti, con il primo $x_1 = 0$ e l'ultimo $x_{n+2} = 1$ riservati per i dati al bordo e gli n punti interni per la soluzione numerica. Sia $h = 1/(n+1)$ il passo di discretizzazione. Calcolare la soluzione esatta $u(x)$, la soluzione numerica $[u_1, u_2, ..., u_n]^T$ nei nodi interni, l'errore $e_h = \max_i |u(x_i) - u_i|$ e tracciare un grafico loglog di e_h in funzione di h.

b) Ripetere il punto precedente con termine noto $\sin(x)$ invece di 1. Commentare la differenza dell'andamento degli errori e_h fra a) e b).

4.2 a) Discretizzare l'equazione del calore in 1D in spazio

$$u_t = u_{xx} \quad su \quad [0\ 1] \times [0\ T],$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0,$$

$$u(x,0) = 100 \sin(\pi x),$$

con differenze divise all'indietro in tempo (Eulero implicito) con passo k e differenze finite centrate in spazio con passo h. Verificare che la soluzione esatta è $u(x) = 100e^{-\pi^2 t} \sin(\pi x)$, calcolare la soluzione numerica $u_j = [u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{nj}]^T$ al passo temporale t_j, l'errore al passo t_j $e_j = \max_i |u(x_i, t_j) - u_{ij},|$ e studiare come l'errore dipende dai passi di discretizzazione k e h.

b) Ripetere il punto precedente sostituendo ai dati al bordo di Dirichlet i dati di Neumann

$$u_x(0,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0,$$

trascurando il calcolo dell'errore (perchè cambia la soluzione esatta).