Sumatorias

12 de abril de 2007

Progresiones aritméticas

Progresión aritmética

Es una sumatoria del tipo

$$\sum_{k=0}^{n}(A+kd)$$

es decir, donde $a_k = A + kd$, para valores $A, d \in \mathbb{R}$.

Utilizando las propiedades de sumatoria, obtenemos que esta suma es igual a

$$A \cdot \sum_{k=0}^{n} 1 + d \cdot \sum_{k=0}^{n} k$$

Nos basta, entonces, calcular la sumatoria

$$\sum_{k=0}^{n} k$$

Progresiones aritméticas

Para ello utilizaremos el método de Gauss: como la suma en $\mathbb{R}$ es conmutativa, entonces

$$S = \sum_{k=0}^{n} k$$

puede ser calculado de las dos formas siguientes

$$\begin{array}{l} \text{S} = 0 + \ 1 \ + \ 2 \ + \ldots + \text{(n-1)} + \text{n} \\ \text{S} = \text{n} + \text{(n-1)} + \text{(n-2)} + \ldots + \ 1 \ + 0 \end{array}$$

Si sumamos estas dos igualdades, obtenemos

$$\begin{array}{rcccccccccc} \text{S} & = 0 + & 1 & + & 2 & + \ldots + & (n-1) & + n \\ \text{S} & = n + & (n-1) & + & (n-2) & + \ldots + & 1 & + 0 \\ \hline 2S & = n + & n & + & n & + \ldots + & n & + n \end{array}$$

Como cada suma posee $(n+1)$ sumandos, obtenemos que

$$S = \frac{n(n+1)}{2}$$

Progresiones aritméticas

Propiedad

Si $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración.

Por inducción sobre $n \geq 0$.
Caso $n = 0$: Hay que demostrar que

$$\sum_{k=0}^{0} k = \frac{0 \cdot 1}{2}$$

lo cual es directo pues ambos lados valen 0.
Supongamos que la fórmula vale para algún $n \geq 0$. Entonces

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1} k &= (n+1) + \sum_{k=0}^{n} k \\
&= (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{(Aquí aplicamos la hipótesis inductiva.)} \\
&= \frac{(n^2+n) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{n^2+3n+2}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

con lo que completamos la demostración. $\square$

Progresiones aritméticas

Es importante notar que

$$\sum_{k=0}^{n} k = 0 + \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k$$

por lo que es irrelevante si la suma se considera desde $k = 0$ o desde $k = 1$.

También, notemos que si $1 \leq n_1 \leq n_2$ son números naturales, entonces

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} k = \sum_{k=0}^{n_2} k - \sum_{k=0}^{n_1-1} k = \frac{n_2(n_2+1)}{2} - \frac{(n_1-1)n_1}{2} = \frac{(n_1+n_2)(n_2-n_1+1)}{2}$$

por lo que sabemos calcular esta suma entre cualquier par de números.

Finalmente, volviendo a la progresión aritmética, podemos ahora dar su fórmula explícita:

Fórmula progesión aritmética

$$\sum_{k=0}^{n} (A + kd) = A(n+1) + d\frac{n(n+1)}{2}$$

Progresiones geométricas

Progresión geométrica

Es una sumatoria del tipo

$$\sum_{k=0}^{n} Ar^k$$

es decir, donde $a_k = Ar^k$, para valores $A, r \in \mathbb{R}$.

Supongamos que $r \neq 1$. El caso $r = 1$ es muy sencillo, y queda como ejercicio para el lector.
Similarmente a como procedimos antes, podemos decir que esta suma equivale a

$$A \cdot \sum_{k=0}^{n} r^k$$

por lo que basta calcular esta última sumatoria.

Denotemos

$$S = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

Se tiene entonces que

$$r \cdot S = \sum_{k=0}^{n} r^{k+1}$$

por lo que

$$S - r \cdot S = \sum_{k=0}^{n} (r^k - r^{k+1})$$

Progresiones geométricas

$$S - r \cdot S = \sum_{k=0}^{n} (r^k - r^{k+1})$$

Reconocemos en esta última igualdad una suma telescópica, la cual vale $r^0 - r^{n+1}$. Por lo tanto

$$S(1-r) = 1 - r^{n+1}$$

y gracias a que $r \neq 1$ se obtiene la fórmula

Propiedad

Si $n \geq 0$ y $r \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} r^k = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

Queda propuesto al lector demostrar por inducción esta propiedad.

Nuevamente es posible calcular esta suma entre cualquier par de números. Si $1 \leq n_1 \leq n_2$, entonces

$$\sum_{k=n_1}^{n_2} r^k = \sum_{k=0}^{n_2} r^k - \sum_{k=0}^{n_1-1} r^k = \frac{1 - r^{n_2+1}}{1 - r} - \frac{1 - r^{n_1}}{1 - r} = \frac{r^{n_1} - r^{n_2+1}}{1 - r}$$

Progresiones geométricas

Así, volviendo al caso de la progresión geométrica, obtenemos que ésta cumple la fórmula

Fórmula progresión geométrica

Si $r \neq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} Ar^k = \frac{A(1-r^{n+1})}{1-r}$$

Algunas sumas importantes

Veamos a continuación algunas sumas importantes que podemos calcular usando lo conocido.

Propiedad

Si $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Demostración.

Queda propuesto como ejercicio, demostrar esta propiedad usando inducción.
Aquí lo haremos directamente, notando que para cualquier $k \in \{0, \ldots, n\}$ se tiene que

$$(k+1)^3 = k^3 + 3k^2 + 3k + 1.$$

Por ende, tendremos la siguiente igualdad

$$\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3k^2 + 3k + 1.$$

Y aplicando propiedades de las sumas, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + \sum_{k=0}^{n} 3k^2 + \sum_{k=0}^{n} 3k + \sum_{k=0}^{n} 1 \\ &= \sum_{k=0}^{n} k^3 + 3\sum_{k=0}^{n} k^2 + 3\sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} 1\end{aligned}$$

Continúa... □

Algunas sumas importantes

Continuación demostración.

Despejamos entonces el valor de la suma buscada, obteniendo:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)^3 - \sum_{k=0}^{n} k^3 - 3\sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{n} 1\right)\\ &= \frac{1}{3}\Big(\underbrace{\sum_{k=0}^{n}((k+1)^3 - k^3)}_{(1)} - 3\underbrace{\sum_{k=0}^{n} k}_{(2)} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} 1}_{(3)}\Big).\end{aligned}$$

Y todos los términos en el lado derecho se pueden calcular:

- La suma (1), por propiedad telescópica,

$$\sum_{k=0}^{n}((k+1)^3 - k^3) = (n+1)^3 - 0 = (n+1)^3.$$

- La suma (2), por la propiedad vista para progresiones aritméticas,

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- La suma (3) por propiedad vista en la tutoría pasada,

$$\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

Continúa...

Algunas sumas importantes

Continuación demostración.

En resumen, tenemos que:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} k^2 &= \frac{1}{3}\left((n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1)\right)\\ &= \frac{(n+1)}{3}\left(2n^2+2n+1-\frac{3n}{2}-1\right)\\ &= \frac{(n+1)}{3}\left(n^2+\frac{n}{2}\right)\\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

Concluyendo el resultado. □

Otra suma importante, del mismo tipo que la anterior es

Propiedad

Si $n \geq 0$,

$$\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Demostración.

La demostración queda propuesta como ejercicio, tanto usando inducción como de forma directa.
Para probarlo directamente, se usa la misma técnica anterior, o sea se calcula $(k+1)^4$. □

Coeficientes binomiales

Consideremos la siguiente fórmula de recurrencia:

$$
\begin{aligned}
f_0 &= 1 \\
f_n &= n \cdot f_{n-1} \quad \text{si } n \geq 1
\end{aligned}
$$

Factorial

Llamaremos **factorial** de n (denotado $n!$) al valor f_n.

Por ejemplo, el factorial de 4 es

$$4! = 4 \cdot 3! = 4 \cdot 3 \cdot 2! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$$

Los números factoriales poseen la siguiente interpretación en el contexto de armar combinaciones: sea $k \leq n$. Entonces

$$\frac{n!}{(n-k)!}$$

corresponde a la cantidad de k-tuplas que se puede formar a partir de un conjunto de n elementos, SIN repetirlos.

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c, d\}$, ¿cuántos pares ordenados (2-tuplas) distintos podemos formar con sus elementos, sin repetirlos?

$$\begin{array}{cccc} (a,b) & (b,a) & (c,a) & (d,a) \\ (a,c) & (b,c) & (c,b) & (d,b) \\ (a,d) & (b,d) & (c,d) & (d,c) \end{array} \longrightarrow \text{12 combinaciones, y } 12 = \frac{4!}{(4-2)!}$$

Coeficientes binomiales

Continuando con la interpretación combinatorial, sea $k \leq n$. Definimos

Coeficiente binomial

Se define

$$\binom{n}{k}$$

(se lee "n sobre k") como el número de subconjuntos de tamaño k que posee un conjunto de tamaño n.

¿Cuánto vale $\binom{n}{k}$?

Observemos que por cada subconjunto de tamaño k de un conjunto de n elementos, podemos formar varias k-tuplas: pensando en el ejemplo de $A = \{a, b, c, d\}$, a partir del subconjunto $\{a, c\}$ podemos formar los pares ordenados (a, c) y (c, a).

El número de k-tuplas que se pueden formar a partir de un conjunto de tamaño n será, entonces, el número de subconjuntos de tamaño k que éste posea, pero para considerar los posibles reordenamientos que hacen diferentes a las tuplas, necesitamos multiplicar por la cantidad de formas en que es posible ordenar un conjunto de k elementos: este último valor es $k!$. Por lo tanto, el número de k-tuplas que se puede formar es

$$\binom{n}{k} \cdot k!$$

por lo que

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Coeficientes binomiales

Propiedades

Si $0 \leq k \leq n$,

1. $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
3. Si $k < n$, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$

Demostración.

Demostraremos (3).

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)(n-k-1)!} + \frac{n!}{(k+1)k!(n-k-1)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right) \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{(n-k)+(k+1)}{(n-k)(k+1)} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \frac{n+1}{(n-k)(k+1)} \\
&= \frac{(n+1)n!}{(k+1)k!\,(n-k)(n-k-1)!} \\
&= \binom{n+1}{k+1}
\end{aligned}$$

□

Coeficientes binomiales

La propiedad (3) permite utilizar un método iterativo para calcular $\binom{n}{k}$. Éste consiste en construir un triángulo, donde las filas están etiquetadas con valores de n, y las columnas con valores de k. Los bordes de este triángulo los rellenamos con unos, como muestra la tabla:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1		1			
$n=3$	1			1		
$n=4$	1				1	
$n=5$	1					1

En esta estructura, el término $\binom{n}{k}$ es el que aparece en la fila n y la columna k. Para calcularlo, entonces, como $0 < k < n$:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

es decir, cada término es la suma del que se encuentra sobre él, y el que se encuentra en su diagonal superior-izquierda. Rellenamos el triángulo:

	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$
$n=0$	1					
$n=1$	1	1				
$n=2$	1	2	1			
$n=3$	1	3	**3**	**1**		
$n=4$	1	4	6	**4**	1	
$n=5$	1	...				1

Este triángulo es llamado **Triángulo de Pascal**.

Binomio de Newton

Teorema

Sean $x, y \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$. Entonces

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}
(x+2)^3 &= \binom{3}{0}x^0 2^3 + \binom{3}{1}x^1 2^2 + \binom{3}{2}x^2 2^1 + \binom{3}{3}x^3 2^0 \\
&= 1 \cdot x^0 2^3 + 3 \cdot x^1 2^2 + 3 \cdot x^2 2^1 + 1 \cdot x^3 2^0 \\
&= 8 + 12x + 6x^2 + x^3
\end{aligned}$$

Veamos, antes de probar el teorema, una forma intuitiva de comprender por qué aparecen los coeficientes $\binom{n}{k}$. Pensemos en $n = 3$.

$$\begin{aligned}
(x+y)^3 &= (x+y)(x+y)(x+y) \\
&= x^3 + x^2y + xyx + xy^2 + yx^2 + yxy + y^2x + y^3
\end{aligned}$$

El término x^2y viene de haber elegido x en los primeros dos paréntesis, y haber elegido y en el tercero. $\binom{3}{2}$ representa la cantidad de combinaciones donde se eligió x exactamente dos veces, las cuales son: x^2y, xyx, yx^2. Si reordenamos los factores, obtenemos

$$x^2y + xyx + yx^2 = \binom{3}{2}x^2y$$

Finalmente se concluye que

$$(x+y)^3 = \binom{3}{0}x^0y^3 + \binom{3}{1}x^1y^2 + \binom{3}{2}x^2y^1 + \binom{3}{3}x^3y^0$$

Binomio de Newton

Demostración.

Probémoslo por inducción en $n \in \mathbb{N}$.
Primero analicemos el caso base, $n = 0$. Por un lado $(x+y)^0 = 1$ y por otro $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^0 = 1$ (Aquí suponemos que $\forall x \in \mathbb{R}, x^0 = 1$). Es decir, la propiedad se cumple para $n = 0$.

Sea entonces $n \geq 0$ tal que se tiene que $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ (H.I.). Probemos que se tiene el teorema para $n+1$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)(x+y)^n \\
&= (x+y)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \text{Aplicamos H.I.} \\
&= \sum_{k=0}^{n} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}$$

Ahora, si $1 \leq k \leq n$, sabemos por propiedad de los coeficientes binomiales que

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Continúa... $\square$

Binomio de Newton

Continuación demostración.

Luego,

$$
\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= x^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-k+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \quad \text{Cambio de variable.} \\
&= x^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] x^k y^{n-k+1} + y^{n+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.
\end{aligned}
$$

De donde se concluye el teorema. □

Ejemplo: Sumas varias

Calculemos las siguientes sumatorias:

1. $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$
2. $\sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$
3. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$
4. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$

1. Para ésta, utilizamos la descomposición

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

con lo que la suma a calcular se convierte en

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

usando la propiedad telescópica.

2. Consideremos la igualdad $(k+1)! = (k+1)k! = k \cdot k! + k!$, con la que obtenemos que

$$k \cdot k! = (k+1)! - k!$$

Sumando a ambos lados, llegamos a

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = \sum_{k=0}^{n} ((k+1)! - k!) = (n+1)! - 0! = (n+1)! - 1$$

pues es una suma telescópica.

Ejemplo: Sumas varias

3. Esta suma resulta ser una aplicación directa del Binomio de Newton. Utilizando que $1^m = 1$ para cualquier $m \geq 1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k}$$

Así, utilizando la fórmula de Newton se tiene que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$$

4. Para este tipo de sumatorias, debemos llevarlas a la forma del Binomio de Newton, típicamente ingresando los factores que “sobran” al coeficiente binomial. Reescribamos el término de la suma:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} \end{aligned}$$

Para formar un nuevo coeficiente binomial, debemos procurar que los dos valores de abajo (en este caso $k+1$ y $n-k$) sumen el de arriba (en este caso n). Para arreglarlo, amplifiquemos numerador y denominador por $(n+1)$, obteniendo

$$\frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)n!}{(k+1)!(n-k!)} = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} = \frac{1}{n+1} \binom{n+1}{k+1}$$

Ahora tenemos un factor $\frac{1}{n+1}$ en lugar de $\frac{1}{k+1}$. ¿Hemos ganado algo? Sí, pues $\frac{1}{n+1}$ es un término independiente de k, por lo que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1}$$

Ejemplo: Sumas varias

Hacemos una traslación de índice en la suma de la derecha, para obtener

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}\binom{n+1}{k}$$

Esto de la derecha se parece bastante a un Binomio de Newton: bastaría rellenar con $1^k 1^{n+1-k}$, sin embargo primero debemos procurar que el índice k sume sobre todos los valores $0, 1, \ldots, n+1$. Sumamos y restamos el término asociado a $k=0$, y seguimos desarrollando:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{k+1} &= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}-\binom{n+1}{0}\right)\\
&= \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}1^k 1^{n+1-k}-1\right)\\
&= \frac{1}{n+1}((1+1)^{n+1}-1)\\
&= \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)
\end{aligned}$$