ICPC Reference

Escuela Superior de Cómputo - IPN

Alberto Silva

Índice

1. Data Structures

1.1. AVL Tree

1.2. Kd tree

1.3. Quad tree

1.4. Binary Heap

1.5. Disjoint set union

1.6. Range Minimun Query

1.7. Sparse table

1.8. Fenwick tree (BIT)

1.9. Segment tree

1.10. Wavelet tree

1.11. Merge sort tree

1.12. Red black tree

1.13. Splay tree

1.14. Steiner tree

1.15. Treap

1.16. Heavy light decomposition

2. Strings

2.1. Trie

2.2. Suffix array

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1}$$

3.2. Números de Stirling de primera clase

son el número de permutaciones de n elementos con exactamente k ciclos disjuntos.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = (n-1)\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}$$

3.3. Números de Stirling de segunda clase

son el número de particionar un conjunto de n elementos en k subconjuntos no vacíos.

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = k\begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}$$

Además:

$$\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j} j^n$$

3.4. Números de Bell

cuentan el número de formas de dividir n elementos en subconjuntos.

$$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{B}_k$$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathcal{B}_x$	1	1	2	5	15	52	203	877	4.140	21.147	115.975

3.5. Derangement

permutación que no deja ningún elemento en su lugar original

$$!n = (n-1)(!(n-1)+!(n-2)); !1 = 0, !2 = 1$$

$$!n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

3.6. Números armónicos

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

$$\frac{1}{2n+1} < H_n - \ln n - \gamma < \frac{1}{2n}$$

$$\gamma = 0.577215664901532860606512090082402431042159335\ldots$$

3.7. Número de Fibonacci

$f_0 = 0,\ f_1 = 1$:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n - \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n$$

$$f_{n+1} = f_n * 2 - f_{n-2}$$

$$f_0 + f_1 + f_2 + \cdots + f_n = f_{n+2} - 1$$

$$f_0 - f_1 + f_2 - \cdots + (-1)^n f_n = (-1)^n f_{n-1} - 1$$

$$f_1 + f_3 + f_5 + \cdots + f_{2n-1} = f_{2n}$$

$$f_0 + f_2 + f_4 + \cdots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$$

$$f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 + \cdots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$$

$$f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \cdots + f_{2n-1} f_n = f_{2n}^2$$

$$f_1 f_2 + f_2 f_3 + f_3 f_4 + \cdots + f_{2n} f_{2n+1} = f_{2n+1}^2 - 1$$

$$k \geq 1 \Rightarrow f_{n+k} = f_k f_{n+1} + f_{k-1} f_n \forall n \geq 0$$

Identidad de Cassini: $f_{n+1} fn - 1 - f_n^2 = (-1)^n$

$$f_{n+1}^2 + f_n^2 = f_{2n+1}$$

$$f_{n+2}^2 - f_n^2 = f_{2n+2}$$

$$f_{n+2}^2 - f_{n+1}^2 = f_n f_{n+3}$$

3.8. Sumas de combinatorios

$$\sum_{i=n}^{m} \binom{i}{n} = \binom{m+1}{n+1}$$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$$

3.9. Funciones generatrices

Una lista de funciones generatrices para secuencias útiles:

$(1, 1, 1, 1, 1, 1, \ldots)$	$\frac{1}{1-z}$
$(1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots)$	$\frac{1}{1+z}$
$(1, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots)$	$\frac{1}{1-z^2}$
$(1, 0, \ldots, 0, 1, 0, 1, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$	$\frac{1}{1-z^2}$
$(1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots)$	$\frac{1}{(1-z)^2}$
$(1, \binom{m+1}{m}, \binom{m+2}{m}, \binom{m+3}{m}, \ldots)$	$\frac{1}{(1-z)^{m+1}}$
$(1, c, \binom{c+1}{2}, \binom{c+2}{3}, \ldots)$	$\frac{1}{(1-z)^c}$
$(1, c, c^2, c^3, \ldots)$	$\frac{1}{1-cz}$
$(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots)$	$\ln \frac{1}{1-z}$

Truco de manipulación:

$$\frac{1}{1-z} G(z) = \sum_n \sum_{k \leq n} g_k z^n$$

3.10. The twelvefold way

¿Cuántas funciones $f\colon N \to X$ hay?

N	X	Any f	Injective	Surjective
dist.	dist.	x^n	$(x)_n$	$x!\left\{ {n \atop x} \right\}$
indist.	dist.	$\binom{x+n-1}{n}$	$\binom{x}{n}$	$\binom{n-1}{n-x}$

3.12. Burnside's Lemma

Si X es un conjunto finito y G es un grupo de permutaciones que actúa sobre X, sean $S_x = \{g \in G : g * x = x\}$ y $Fix(g) = \{x \in X : g * x = x\}$. Entonces el número de órbitas está dado por:

$$N = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in X} |S_x| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix(g)|$$

3.13. Ángulo entre dos vectores

Sea α el ángulo entre $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|}$$

3.14. Proyección de un vector

Proyección de $\vec{a}$ sobre $\vec{b}$:

$$\mathrm{proy}_{\vec{b}}\vec{a} = (\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\vec{b} \cdot \vec{b}})\vec{b}$$