

Taller de Modelación Matemática II

PROYECTO 4:

Modelo SIR y ¿Cuál fue la eficacia de las medidas profilápticas
tomadas contra la Pandemia del Covid-19 en MX ?

Prof. Jesús López Estrada¹
Ayudante: Louis D. Bretón Tenorio²

Diciembre de 2022.

¹correo-e: jelpze@ciencias.unam.mx

²correo-e: louis.breton@ciencias.unam.mx

Objetivo. Mediante la estimación de parámetros en el modelo SIR clásico, evaluar la eficacia de las medidas profilápticas tomadas por las autoridades del sector salud en México durante la Pandemia del Covid-19.

1 Introducción

El modelo SIR clásico de tres compartimentos: individuos sensibles (S), individuos infectados (I) e individuos recuperados (R), ya sea por muerte o por que ganan inmunidad, propuesto en 1927 por W.O. Kermac y A.G. Mckendrick [Bac], es el siguiente:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\kappa S \frac{I}{N} \\ \dot{I} &= \kappa \frac{S}{N} I - \mu I \\ \dot{R} &= \mu I\end{aligned}\tag{1}$$

donde $N = S + I + R$ es el tamaño de la población total donde tiene lugar la epidemia o pandemia. Es conveniente observar que para el análisis geométrico de este sistema basta con el estudio de las 2 primera ecuaciones en plano de fases I.vs.S ¿Por qué? Por otro lado, es natural que las Condiciones Iniciales (C.I.) sean

$$S(t_0) = S_0, \quad I(t_0) = I_0 \quad \text{y} \quad R(t_0) = 0$$

donde S_0 es el tamaño de la población de los individuos *potencialmente* susceptibles de infectarse al ocurrir los primeros casos de individuos infectados que se hayan reportado; I_0 es el número de casos reportados al inicio de la pandemia. Es importante mencionar que el valor de S_0 , no es nada trivial de dar.

ACTIVIDADES

1. Muestra que el sistema SIR (1) se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned}\dot{S} &= -\kappa \frac{S}{N} I \\ \dot{I} &= \mu \left(\frac{\kappa S}{\mu N} - 1 \right) I \\ \dot{R} &= \mu I \\ N &= S + I + R\end{aligned}\tag{2}$$

Luego, para que se de un brote epidémico se requiere que

$$\mathcal{R}_0 \equiv \frac{\kappa S_0}{\mu N}\tag{3}$$

el número reproductivo básico \mathcal{R}_0 sea mayor que uno.

2. Consultar las página:

<https://datos.covid-19.conacyt.mx/>

Y bajar los datos de casos diarios y defunciones diarias y acumuladas en la zona metropolitana de la CdMx, desde <marzo 13 de 2020> hasta <julio de 2022>?? y graficalos en diagrama de barras. Y generar un archivo de datos de casos y defunciones acumulados $T_{ca} = \{I_j \in \mathbb{R} \mid j = 1 : N\}$ y $T_{da} = \{R_j \in \mathbb{R} \mid j = 1 : N\}$, respectivamente durante el periodo desde sus inicios hasta la segunda semana de diciembre del año en curso.

3. Cuando los datos presentan una clara tendencia, pero con mucha irregularidad, es conveniente hacerles un pretratamiento para generar unos datos, aunque aún con ciertas irregulares, manifiesten mejor la tendencia de los datos. Este pretratamiento se conoce como *suavizado de datos*. Y hay una amplia gama de procedimientos numéricos para realizar esta tarea. La técnica más simple se conoce como *promedios móviles*.

Dada una tabla empirica de datos $T = \{y_j \in \mathbb{R} \mid j = 1 : N\}$, los datos suavizados con $2k + 1$ datos $\hat{y}_j, j = k + 1 : N - k$ se calculan con el promedio

$$\hat{y}_j = \left(\sum_{i=j-k}^{j+k} y_i \right) / (2k + 1) \quad (4)$$

Usando promedios móviles de 7 puntos genera, a partir de la tabla de datos T_a , una nueva tabla \tilde{T}_a casos acumulados suavizados. Y graficalos en una diagrama de barras.

4. Usando esta información y considerando que esta epidemia tuvo lugar principalmente en la Ciudad de México ¿Cuál era el tamaño de la población de la CdMx en 2020? ¿Cuándo se declaró oficialmente el inicio y el término de la alerta epidemiológica? ¿Cuándo se decretó el uso de cubre boca, lavado de manos y sana distancia? ¿Cuándo se decretó el bloqueo total (Cierre de escuelas, restaurantes y centros comerciales, entre otros)? ¿Cuándo se levantó el bloqueo total?

Sugerencia: (1) Consulta el portal de la CONAPO. Y (2) Indaga en la literatura cuál es la vida media esperada de la infección por el virus de SARS-Cov2 ($1/\mu$), da una estimación de la tasa per capita de recuperados (μ).

5. Tomando en cuenta los datos de las 2 primeras semanas de la pandemia y considerando, que al inicio de la pandemia, la segunda ecuación del modelo SIR se puede describir como

$$\dot{I} = \lambda I, \quad \lambda \equiv \mu(\mathcal{R}_0 - 1) \quad (5)$$

y haciendo una propuesta *cuerda* para S_0 y N . Halla una estimación mínimo cuadrados \hat{I}_0 y $\hat{\lambda}$ para I_0 y λ ¿Cuál es el valor para \mathcal{R}_0 ? ¿Cuál es la tasa de infección?

¿Se podría decir a las 2 primeras semanas de la pandemia que habría un brote epidémico de Covid-19?

Sugerencia: Considera el modelo lineal

$$y = b + \lambda t \quad (6)$$

donde $y \equiv \ln I$ y $b = \ln I_0$. Para evitar problemas numéricos de sensibilidad numérica innecesaria es conveniente tomar $t_0 = 0$

6. Usando la estimación de los parámetros κ y I_0 antes obtenidos, repite la tarea anterior, pero usando el modelo no-lineal en los parámetros

$$I(t) = I_0 e^{\lambda t} \quad (7)$$

Discute tus resultados obtenidos.

7. Con respecto al modelo SIR, todas las medidas sanitarias para aminorar los estragos de un brote epidémico están dirigidos, esencialmente, a disminuir la tasa de infección (κ). Considerando el modelo SIR a trozos sobre varios periodos de tiempo como el que va de la primera toma de medidas (uso de cubre bocas y sana distancias, aislamiento y cuarentenas), a la toma de las estricta medida de cerrar las escuelas, el metro y restaurantes, entre otros lugares de gran concurrencia de gente, y para el periodo que va de la toma de las estrictas medidas a su relajamiento, halla una valoración de la efectividad de éstas toma de medidas.

References

- [Bac] Bacaer, N., *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, Springer, 2011.
- [McK] Kermack, W.O., McKendrick, A.G., *A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics*, Proc. Royal Soc. of London, series A, vol. 115, no. 772 (1927) 700-721.