Universidad Nacional Autónoma de México
Facultad de Ciencias

Tarea 2

Modelos No Paramétricos y de Regresión
Semestre 2023 - 2

Ruth Selene Fuentes García
Jorge Iván Reyes Hernández

Alumno: Olvera Trejo Alberto

1. Ejercicios

Ejercicio 1. Considera el modelo lineal simple: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i$, muestra que:

a) $\sum_{i=i}^{n} Y_i = \sum_{i=i}^{n} \hat{Y}_i$

b) $\sum_{i=i}^{n} r_i X_i = 0$

c) $\sum_{i=1}^{n} r_i \hat{Y}_i = 0$

d) La linea de regresión pasa por el punto $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$,

donde $r_i = Y_i - \hat{Y}_i$

Demostración. Recordemos que:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \qquad \hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

a)

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \hat{Y}_i &= \sum_{i=1}^{n} \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i \\
&= n\hat{\beta}_0 + n\hat{\beta}_1 \bar{X} \\
&= n\left(\bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}\right) + n\bar{X}\frac{S_{xy}}{S_{xx}}
\end{aligned}$$

Sustituyendo $\hat{\beta}_1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\hat{Y}_i &= n\left(\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}\right)+n\bar{X}\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\\ &= n\left(\bar{Y}-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\bar{X}\right)+n\bar{X}\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\\ &= n\bar{Y}-n\bar{X}\frac{S_{xy}}{S_{xx}}+n\bar{X}\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\\ &= n\bar{Y}=\sum_{i=1}^{n}Y_i\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{i=i}^{n}Y_i=\sum_{i=i}^{n}\hat{Y}_i$

b) Recordemos que:

$$S_{xx}=\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2 \qquad\qquad S_{xy}=\sum_{i=1}^{n}X_iY_i-n\bar{X}\bar{Y}$$

Luego, sustituyendo $r_i, \hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}r_iX_i &= \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{Y}_i\right)X_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1X_i\right)X_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\left(\bar{Y}-\hat{\beta}_1\bar{X}\right)-\hat{\beta}_1X_i\right)X_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}+\hat{\beta}_1\left(\bar{X}-X_i\right)\right)X_i\\ &= \sum_{i=1}^{n}X_iY_i-\sum_{i=1}^{n}X_i\bar{Y}+\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}X_i\left(\bar{X}-X_i\right)\\ &= \sum_{i=1}^{n}X_iY_i-n\bar{X}\bar{Y}+\hat{\beta}_1\sum_{i=1}^{n}\left(X_i\bar{X}-X_i^2\right)\\ &= S_{xy}-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i^2-X_i\bar{X}\right)\\ &= S_{xy}-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i^2-n\bar{X}^2\right)\\ &= S_{xy}-\frac{S_{xy}}{S_{xx}}S_{xx}\\ &= S_{xy}-S_{xy}=0\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{i=i}^{n}r_iX_i=0$

c) Por el inciso a) tenemos que $\sum_{i=i}^{n} Y_i = \sum_{i=i}^{n} \hat{Y}_i$, por lo que:

$$0 = \sum_{i=i}^{n} Y_i - \hat{Y}_i = \sum_{i=1}^{n} r_i$$

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} r_i = 0$. Así, usando este resultado y el incisiso anterior tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} r_i \hat{Y}_i &= \sum_{i=1}^{n} r_i \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i\right) \\
&= \hat{\beta}_0 \sum_{i=1}^{n} r_i + \hat{\beta}_1 \sum_{i=1}^{n} r_i X_i \\
&= \hat{\beta}_0 \cdot 0 + \hat{\beta}_1 \cdot 0 = 0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\sum_{i=1}^{n} r_i \hat{Y}_i = 0$

d) Veamos que la linea pasa por $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$, para ello basta ver que dicho punto satisface la ecuación $Y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X$.

Sustituyendo $\bar{X}$ por X y reescribiendo los estimadores tenemos:

$$\begin{aligned}
Y &= \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \bar{X} \\
&= \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X} + \hat{\beta}_1 \bar{X} \\
&= \bar{Y}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la recta de regresión pasa por el punto $\left(\bar{X}, \bar{Y}\right)$

QED

Ejercicio 2. Para el modelo $Y_i = \beta_0 + \beta_1 \left(X_i - \bar{X}\right) + e_i$, $i = 1, \ldots, n$ con las hipótesis usuales:

a) Obtén los estimadores máximo versímiles para β_0 y β_1

b) Demuestra que en este caso los estimadores $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son independientes

c) Obten la distribución de $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$

d) Obten un intervalo de confianza para el valor esperado de Y cuando $X = X_0$

Solución.

a) Sabemos que $e_i \sim N(0, \sigma^2)$, y como cada Y_i es un desplazamiento de las v.a. e_i, entonces se sigue que las Y_i son normales. Vamos a calcular su esperanza y su varianza:

$$\mathbb{E}[Y_i] = \mathbb{E}\left[\beta_0 + \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right) + e_i\right] = \beta_0 + \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right)$$

$$Var(Y_i) = Var(\beta_0 + \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right) + e_i) = Var(e_i) = \sigma^2$$

Así, tenemos que $Y_i \sim N\left(\beta_0 + \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right), \sigma^2\right)$. Más aun, como los errores e_i son independientes entre sí, entonces las Y_i son también independientes entre sí.

Para poder calculas lo EMV necesitamos la función de verosimilitud. Usando la independencia de las Y_i tenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1 | \underline{X}, \underline{Y}) &= \prod_{i=1}^{n} \left(2\pi\sigma^2\right)^{-1/2} \exp\left(-\frac{\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right)\right)^2}{2\sigma^2}\right) \\
&= \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right)\right)^2\right)
\end{aligned}$$

Ahora calculamos el ln de la función de verosimilitud:

$$\ln\left(\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1 | \underline{X}, \underline{Y})\right) = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right)\right)^2$$

Derivando respecto a β_0 y β_1:

- $\dfrac{\partial}{\partial \beta_0}\ln\left(\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1 | \underline{X}, \underline{Y})\right) = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right)\right)$
- $\dfrac{\partial}{\partial \beta_1}\ln\left(\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1 | \underline{X}, \underline{Y})\right) = \dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right)\right)\left(X_i - \bar{X}\right)$

Tomemos la primera ecuación e igualémosla a cero:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right)\right) \\
0 &= \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \beta_0 - \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right)\right) \\
0 &= n\bar{Y} - n\beta_0 - \beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right) \\
0 &= n\bar{Y} - n\beta_0 - \beta_1\left(n\bar{X} - n\bar{X}\right) \\
0 &= n\bar{Y} - n\beta_0 \\
0 &= \bar{Y} - \beta_0
\end{aligned}$$

Entonces, despejando β_0 llegamos a que $\hat{\beta}_0 = \bar{Y}$

Ahora hacemos lo análogo pero con la derivada parcial respecto a β_1

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\beta_0-\beta_1\left(X_i-\bar{X}\right)\right)\left(X_i-\bar{X}\right)\\
0 &= \sum_{i=1}^{n}\left((Y_i-\beta_0)-\beta_1\left(X_i-\bar{X}\right)\right)\left(X_i-\bar{X}\right)\\
0 &= \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0)\left(X_i-\bar{X}\right)-\beta_1\left(X_i-\bar{X}\right)^2\\
0 &= \sum_{i=1}^{n}(Y_i-\beta_0)\left(X_i-\bar{X}\right)-\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(X_i-\bar{X}\right)^2\\
0 &= \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\hat{\beta}_0\right)\left(X_i-\bar{X}\right)-\beta_1 S_{xx}\\
0 &= \sum_{i=1}^{n}\left(Y_i-\bar{Y}\right)\left(X_i-\bar{X}\right)-\beta_1 S_{xx}\\
0 &= S_{xy}-\beta_1 S_{xx}
\end{aligned}
$$

Despejando β_1 tenemos que $\hat{\beta}_1=\dfrac{S_{xy}}{S_{xx}}$.

Por lo tanto, los EMV son:

$$\hat{\beta}_0=\bar{Y} \qquad\qquad \hat{\beta}_1=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}$$

b) Para ver que $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son independientes, basta ver que su covarianza es cero. Recordemos que por lo visto en clase:

$$\hat{\beta}_1=\frac{S_{xy}}{S_{xx}}=\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i-\bar{X}}{S_{xx}}Y_i=\sum_{i=1}^{n}c_iY_i,$$

donde $c_i=\dfrac{X_i-\bar{X}}{S_{xx}}$ y además sabemos que (igualmente por lo visto en clase) $\sum_{i=1}^{n}c_i=0$. Usando lo anterior, las propiedades de la covarianza y que las Y_i son independientes:

$$
\begin{aligned}
Cov\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right) &= Cov\left(\bar{Y},\sum_{i=1}^{n}c_iY_i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}c_i\cdot Cov(\bar{Y},Y_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}c_i\cdot Cov\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}Y_j,Y_i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_i}{n}Cov(Y_j,Y_i)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{c_i}{n}\delta_{ji}\sigma^2\\
&= \sum_{i=1}^{n}\frac{c_i}{n}\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}\sum_{i=1}^{n}c_i=\frac{\sigma^2}{n}\cdot 0=0
\end{aligned}
$$

Por lo tanto $Cov\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) = 0$ y concluimos que los estimadores son independientes.

c) Primero vamos a obtener la distribución de $\hat{\beta}_0$. Como $Y_i \sim N\left(\beta_0 + \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right), \sigma^2\right)$, entonces $\bar{Y}$ es una normal, por ser suma de normales. Vamos a calcular sus parámetros:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\bar{Y}\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{n}\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left[Y_i\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_0 + \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(n\beta_0 + \beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(n\beta_0 + \beta_1\left(n\bar{X} - n\bar{X}\right)\right) \\
&= \frac{n\beta_0}{n} = \beta_0
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathbb{E}\left[\hat{\beta}_0\right] = \beta_0$.

Análogamente calculamos la varianza, tomando en cuenta que las Y_i son independientes entre sí.

$$\begin{aligned}
Var(\hat{\beta}_0) &= Var(\bar{Y}) \\
&= Var\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{n}\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}Var(Y_i) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sigma^2 \\
&= \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

Ahora hacemos lo mismo pero con $\hat{\beta}_1$ recordando que $\hat{\beta}_1 = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$, con $c_i = \dfrac{X_i - \bar{X}}{S_{xx}}$ y que $\sum_{i=1}^{n} c_i = 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\hat{\beta}_1\right] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbb{E}\left[Y_i\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i\left(\beta_0 + \beta_1\left(X_i - \bar{X}\right)\right) \\
&= \beta_0\sum_{i=1}^{n} c_i + \beta_1\sum_{i=1}^{n} c_i\left(X_i - \bar{X}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\hat{\beta}_1\right] &= \beta_0 \sum_{i=1}^{n} c_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} c_i \left(X_i - \bar{X}\right) \\
&= \beta_0 \cdot 0 + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\left(X_i - \bar{X}\right)}{S_{xx}} \left(X_i - \bar{X}\right) \\
&= \frac{\beta_1}{S_{xx}} \sum_{i=1}^{n} \left(X_1 - \bar{X}\right) \\
&= \frac{\beta_1}{S_{xx}} S_{xx} = \beta_1
\end{aligned}
$$

Entonces $\mathbb{E}\left[\hat{\beta}_1\right] = \beta_1$. Ahora la varianza:

$$
\begin{aligned}
Var\left(\hat{\beta}_1\right) &= Var\left(\sum_{i=1}^{n} c_i Y_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 Var(Y_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{S_{xx}^2} \sum_{i=1}^{n} \left(X_1 - \bar{X}\right)^2 \\
&= \frac{\sigma^2}{S_{xx}^2} S_{xx} = \frac{\sigma^2}{S_{xx}}
\end{aligned}
$$

Entonces $Var\left(\hat{\beta}_1\right) = \dfrac{\sigma^2}{S_{xx}}$. Así, concluimos que:

$$
\hat{\beta}_0 \sim N\left(\beta_0, \frac{\sigma^2}{n}\right) \qquad\qquad \hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{S_{xx}}\right) \tag{1}
$$

d) Buscamos un intervalo de confianza para el valor esperado de Y cuando $X = X_0$. Supondremos que X_0 es un punto que se encuentra dentro del intervalo definido por los valores x que se usaron para ajustar el modelo. Notamos que un estimador insesgado para $\mathbb{E}\left[y|x_0\right]$ es:

$$
\widehat{\mathbb{E}\left[y|x_0\right]} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0 \tag{2}
$$

Vamos a calcular un intervalo del $100(1-\alpha)$ de confianza. Como $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$ son normales, entonces el estimador (2) se distribuye también de forma normal por ser una combinación lineal de $\hat{\beta}_1$ y $\hat{\beta}_2$. Vamos a calcular la varianza recordando que $Cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right) = 0$

$$
\begin{aligned}
Var\left(\widehat{\mathbb{E}\left[y|x_0\right]}\right) &= Var\left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_0\right) \\
&= Var(\hat{\beta}_0) + x_0^2 Var(\hat{\beta}_1)
\end{aligned}
$$

Sustituimos las varianzas usando (1)

$$Var\left(\widehat{\mathbb{E}\left[y|x_0\right]}\right) = \frac{\sigma^2}{n} + x_0^2\frac{\sigma^2}{S_{xx}} = \sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}}\right)$$

Así, tenemos que:

$$Z = \frac{\widehat{\mathbb{E}\left[y|x_0\right]} - \mathbb{E}\left[y|x_0\right]}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}}\right)}} \sim N(0,1) \tag{3}$$

Luego, por lo visto en clase sabemos que $\dfrac{SSE}{n-2} = \dfrac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$ es un estimador insesgado para σ^2 y además $\dfrac{n-2}{\sigma^2}\cdot\dfrac{SSE}{n-2} = \dfrac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-2)}$

$$\chi^2 = \frac{SSE}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-2)} \tag{4}$$

Entonces, usando (3), (4) y resultados de proba II de transformación de variables tenemos que $\dfrac{Z}{\sqrt{\chi^2/(n-2)}} \sim t_{(n-2)}$. Desarrollando la expresión anterior:

$$\begin{aligned}\frac{Z}{\sqrt{\chi^2/(n-2)}} &= \frac{\frac{\widehat{\mathbb{E}[y|x_0]} - \mathbb{E}[y|x_0]}{\sqrt{\sigma^2\left(\frac{1}{n}+\frac{x_0^2}{S_{xx}}\right)}}}{\sqrt{SSE/\sigma^2(n-2)}} \\ &= \frac{\widehat{\mathbb{E}\left[y|x_0\right]} - \mathbb{E}\left[y|x_0\right]}{\sqrt{\frac{SSE}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}}\right)}}\end{aligned}$$

Notamos que podemos usar $\dfrac{\widehat{\mathbb{E}\left[y|x_0\right]} - \mathbb{E}\left[y|x_0\right]}{\sqrt{\frac{SSE}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}}\right)}}$ como cantidad pivotal. Sea $t_{1-\alpha/2,n-2}$ el cuantil $1-\alpha/2$ de una $t-Student$ con $n-2$ grados de libertad, entonces el intervalo del $100(1-\alpha)$ de confianza es:

$$\left(\widehat{\mathbb{E}\left[y|x_0\right]} - t_{1-\alpha/2,n-2}\sqrt{\frac{SSE}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}}\right)}, \widehat{\mathbb{E}\left[y|x_0\right]} + t_{1-\alpha/2,n-2}\sqrt{\frac{SSE}{n-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{x_0^2}{S_{xx}}\right)} \leq \mathbb{E}\left[y|x_0\right]\right)$$

Ejercicio 3. En el modelo lineal simple $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + e_i$, con las hipótesis usuales, muestra que la prueba de hipótesis que se obtiene del cociente de verosimilitudes generalizado para probar

$$H_0 : \beta_1 = \beta_{1,0} \quad vs \quad H_a : \beta_1 \neq \beta_{1,0}$$

con $\beta_{1,0}$ una constante conocida, depende de una estadística T que tiene una distribución *t-Student* y encuentre la región de rechazo.

Demostración. Calculemos la estadística usando el cociente de verosimilitudes generalizado. Primero notemos que el espacio parametral es:

$$\Theta = \{\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2\right) : \beta_0, \beta_1 \in \mathbb{R}\,, \sigma^2 > 0\}$$

Y el espacio parametral bajo H_0 es:

$$\Theta_0 = \{\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2\right) : \beta_1 = \beta_{1,0}\,, \beta_2 \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0\}$$

Por otro lado, la función de verosimilitud es:

$$\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | \underline{X}, \underline{Y}) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\beta_0 - \beta_1 X_1))^2\right)$$

Entonces, para obtener el numerador del cociente tomemos $(\beta_0, \beta_1, \sigma^2) \in \Theta_0$ y tenemos que:

$$\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | \underline{X}, \underline{Y}) = \left(2\pi\sigma^2\right)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\beta_0 - \beta_{1,0} X_1))^2\right)$$

Ahora maximizamos la función anterior sacando el logaritmo, derivando respecto a σ^2, igualando a cero y resolviendo para σ^2:

$$\ln\left(\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | \underline{X})\right) = -\frac{n}{2}\ln\left(2\pi\sigma^2\right) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\beta_0 - \beta_{1,0} X_1))^2$$

Derivando:

$$\frac{\partial}{\partial\beta_0}\ln\left(\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | \underline{X})\right) = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\beta_0 - \beta_{1,0} X_1)) = 0$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\beta_0 - \beta_{1,0} X_1)) \\
0 &= n\bar{Y} - n\beta_0 - n\beta_{1,0}\bar{X} \\
0 &= \bar{Y} - \beta_0 - \beta_{1,0}\bar{X}
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \beta_{1,0}\bar{X}$

Análogamente con σ^2

$$\frac{\partial}{\partial\sigma^2}\ln\left(\mathcal{L}(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 | \underline{X})\right) = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 = 0$$

Resolviendo para σ^2:

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\beta_0 - \beta_{1,0} X_1))^2 \\
0 &= -n\sigma^2 + \sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\beta_0 - \beta_{1,0} X_1))^2 \\
n\sigma^2 &= \sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\beta_0 - \beta_{1,0} X_1))^2 \\
\hat{\sigma^2} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - (\beta_0 - \beta_{1,0} X_1))^2
\end{aligned}$$

Entonces $\hat{\sigma^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \left(\hat{\beta}_0 - \beta_{1,0}X_1\right)\right)^2$, por lo que:

$$\begin{aligned}
\max_{(\beta_0,\beta_1,\sigma^2)\in\Theta_0} \mathcal{L}(\mu,\sigma^2|\underline{X},\underline{Y}) &= \left(2\pi\hat{\sigma^2}\right)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\hat{\sigma^2}}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_1 - \left(\hat{\beta}_0 + \beta_{1,0}X_i\right)\right)^2\right) \\
&= \left(2\pi\hat{\sigma^2}\right)^{-n/2}\exp\left(-n/2\right)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, el numerador es $\left(2\pi\hat{\sigma^2}\right)^{-n/2}\exp\left(-n/2\right)$.

Por otro lado, sabemos que los EMV son:

$$\widehat{\beta_{1\,ML}} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \qquad \widehat{\beta_{0\,ML}} = \bar{Y} - \hat{\beta}_1\bar{X} \qquad \widehat{\sigma^2_{ML}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\max_{(\beta_0,\beta_1,\sigma^2)\in\Theta} \mathcal{L}(\mu,\sigma^2|\underline{X},\underline{Y}) &= \left(2\pi\widehat{\sigma^2_{ML}}\right)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\widehat{\sigma^2_{ML}}}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2\right) \\
&= \left(2\pi\widehat{\sigma^2_{ML}}\right)^{-n/2}\exp -n/2
\end{aligned}$$

Entonces, el cociente de verosimilitudes generalizado es:

$$\begin{aligned}
\Lambda = \frac{\max_{(\beta_0,\beta_1,\sigma^2)\in\Theta_0}\mathcal{L}(\mu,\sigma^2|\underline{X},\underline{Y})}{\max_{(\beta_0,\beta_1,\sigma^2)\in\Theta}\mathcal{L}(\mu,\sigma^2|\underline{X},\underline{Y})} &= \frac{\left(2\pi\hat{\sigma^2}\right)^{-n/2}\exp\left(-n/2\right)}{\left(2\pi\widehat{\sigma^2_{ML}}\right)^{-n/2}\exp -n/2} \\
&= \frac{\left(\hat{\sigma^2}\right)^{-n/2}}{\left(\widehat{\sigma^2_{ML}}\right)^{-n/2}} \\
&= \left(\frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \left(\hat{\beta}_0 - \beta_{1,0}X_1\right)\right)^2}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}\right)^{-n/2} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \left(\hat{\beta}_0 - \beta_{1,0}X_1\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}\right)^{-n/2} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y} - \beta_{1,0}\left(X_i - \bar{X}\right)\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}\right)^{-n/2} \\
&= \left(\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 - 2\beta_{1,0}S_{xy} + \beta_{1,0}^2S_{xx}}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}\right)^{-n/2} \\
&= \left(\frac{S_{yy} - 2\beta_{1,0}S_{xy} + \beta_{1,0}^2S_{xx}}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}\right)^{-n/2}
\end{aligned}$$

Así, dividiendo entre S_{xx} tenemos que:

$$\begin{aligned}\Lambda &= \left(\frac{S_{yy}/S_{xx} - 2\beta_{1,0}S_{xy}/S_{xx} + \beta_{1,0}^2 S_{xx}/S_{xx}}{\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 / S_{xx}}\right)^{-n/2} \\ &= \left(\frac{S_{yy}/S_{xx} - 2\beta_{1,0}\hat{\beta_1}_{ML} + \beta_{1,0}^2}{\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 / S_{xx}}\right)^{-n/2}\end{aligned}$$

Notamos que $\dfrac{(n-2)\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{(n-2)}$ y que $\dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\sigma^2/S_{xx}}} \sim N(0,1)$ y haciendo usando el teorema de transformación de una normal y una ji cuadrada:

$$\frac{\hat{\beta}_1 - \beta_{1,0}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \bar{Y}_i\right)^2 / (n-2)S_{xx}}} \sim t_{(n-2)}$$

Sea $T = \left(\dfrac{S_{yy}/S_{xx} - 2\beta_{1,0}\hat{\beta_1}_{ML} + \beta_{1,0}^2}{\sum_{i=1}^n \left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 / S_{xx}}\right)^{-n/2}$. Únicamente resta ver que el numerador es $\left(\hat{\beta}_1 - \beta_{10}\right)^2$ para poder llegar al resultado, pero ya no supe cómo :(((**QED**