Laboratorio 5. Solución de la ecuación de onda utilizando método de diferencias finitas centrales.

Martínez Hernández Dafne Angélica. angelicam16@ciencias.unam.mx
Olvera Trejo A. alberto0410@ciencias.unam.mx

30 de junio de 2022

Resumen: En el presente trabajo se generará una animación del movimiento de una onda, cuya ecuación será solucionada utilizando el método de diferencias finitas centrales.

Palabras clave: onda, derivada, diferencias finitas.

1. Objetivo

El objetivo es resolver la ecuación de onda utilizando el método explícito de diferencias finitas dadas las siguientes condiciones:

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial^2 u}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1)$$

$$\begin{aligned} \alpha &= 500[m/s] & 100\, nodos \\ \Delta x &= 1[m] & \Delta t = 0{,}001[s] \\ 1001\, pasos\, de\, tiempo & & f(x) = \operatorname{sen}(2\pi f t) \\ f &= 10 \end{aligned}$$

2. Introducción

La ecuación de onda es una ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden, describe cómo se propagan las ondas, en este caso en particular se va a simular una cuerda.
En la ecuación 1 se tiene que α denota la velocidad, u es la velocidad la cual depende del tiempo t y la posición x de la partícula.

Por otro lado, el método de diferencias finitas es un método numérico que sirve para poder aproximar las soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias. Como es un método numérico entonces, en este caso, se tiene que discretizar tanto el tiempo como el espacio.
El tiempo se va a dividir en 1001 pasos, donde cada uno tiene una longitud de $\Delta t = 0{,}01$ segundos. El espacio (la cuerda) va a estar constituido de 100 nodos, cada uno con una separación de $\Delta x = 1$ metros.

3. Metodología

Como se mencionó, se hará uso del esquema de diferencias finitas centrales, el cual establece que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x+\Delta x) - u(x)}{2\Delta x}$$

Entonces:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u(x+\Delta x) - 2u(x) + u(x-\Delta x)}{2\Delta x^2}$$

Y análogamente se tiene que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \approx \frac{u(t+\Delta t) - 2u(t) + u(t-\Delta t)}{2\Delta t^2}$$

Para simplificar la notación se hará:

$$u(x_i, t_n) = u_i^n$$

Entonces, usando la nueva notación se tiene que:

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t^{n-1})}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t^{n-1})}{\partial t^2} \approx \frac{u_i^{n} - 2u_i^{n-1} + u_i^{n-2}}{2\Delta t^2}$$

Sustituyendo en la ecuación 1 y despejando al posición u_i^nse tiene que:

$$\frac{1}{\alpha^2}\frac{u_i^n - 2u_i^{n-i} + u_i^{n-2}}{2\Delta t^2} = \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x^2},$$

$$\frac{u_i^n - 2u_i^{n-1} + u_i^{n-2}}{2\Delta t^2} = \alpha^2\left(\frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x^2}\right),$$

$$u_i^n - 2u_i^{n-1} + u_i^{n-2} = \frac{\alpha^2\Delta t^2}{\Delta x^2}(u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}),$$

$$u_i^n = \frac{\alpha^2\Delta t^2}{\Delta x^2}(u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}) + 2u_i^{n-1} - u_i^{n-2} \tag{2}$$

Para poder reducir las incógnitas de las ecuaciones, se asignan a los primeros dos espacios de tiempo la condición inicial dada.

En Python se crearon diferentes arreglos, *x:* guarda los valores que toman los x_i y x_j, donde $\forall i, j\, |x_i - x_j| = \Delta x$; *t:* guarda los valores del tiempo en el que se evaluará la función $f(x) = \operatorname{sen}(2\pi f t)$, donde $\forall i, j\, |t_i - t_j| = \Delta t$; *U:* es una matriz de ceros en el que se irán guardando las soluciones de la ecuación.

Posteriormente se crearon dos ciclos *for*. El primero es para la malla del tiempo e inicia en el tercer punto de la misma y llega hasta el tiempo 1001, pues como ya se mencionó, los primeros dos tiempos son la condición inicial. El segundo ciclo es para la malla del espacio, inicia en el nodo 2 y termina en el 99 debido a que los extremos de la cuerda quedan fijos en esta simulación.

En el *for* interior se calcula la fórmula 2. Finalmente se realiza una gráfica para obtener los resultados, la cual es mostrada en la imagen 1

4. Resultados y discusión

Se obtuvo un archivo mp4 donde se puede apreciar el movimiento de la onda descrita por la ecuación y condiciones iniciales.

La condición de Courant, tomando en cuenta las condiciones iniciales de nuestro modelo, se

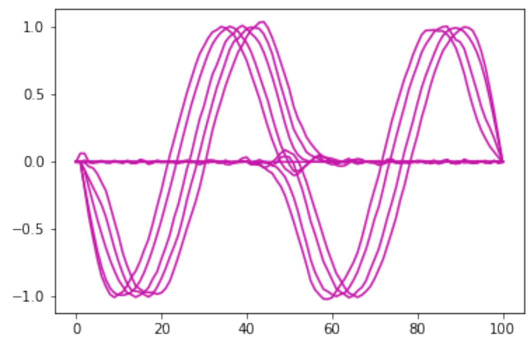

Figura 1: Gráfica obtenida de la solución a la ecuación de onda con las condiciones iniciales dadas

tiene que es $\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0{,}5$. De esta condición depende qué tan preciso será nuestro modelo, a que si dicha condición es mayor a $\frac{1}{2}$ la onda tiende a oscilar bastante y el modelo obtenido es bastante lejano al que se busca. Cuando se cumple que $\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 0{,}5$ resulta que la derivada parcial de la ecuación de onda converge, por lo que el modelo obtenido en la simulación es bastante bueno y muy cercano a la onda real.

5. Conclusión

Dado que la condición de Courant en este caso es de $0{,}05$, entonces se pudo converger a la solución de la ecuación de onda. Además, tanto la gráfica como la animación obtenida reflejan el comportamiento esperado, pues en efecto se asemeja al movimiento de una cuerda la cual está atada por los extremos.

Se puede concluir que el método de las diferencias finitas con el esquema central funcionó de manera satisfactoria en el problema abordado. También hay que hacer notar que el código del modelo es muy corto considerando que se resolvió una ecuación diferencial parcial de segundo orden, sin embargo el orden de complejidad del algoritmo es de orden cuadrático, pues para añadir los valores a la matriz U se usaron dos ciclos *for* por lo que se deduce que el algoritmo pertenece al orden de complejidad $O(n^2)$. Si bien no es tan malo como uno de complejidad factorial, sí es algo que hay que considerar si se tiene planeado manejar unas mallas de tiempo y espacio más finas.