Il teorema di Kutta-Joukowski

Alberto Artoni

Maggio 2017

Cos'è un tiro ad effetto?

Battuta Match-Point di Zaytsev

Perché gli aeroplani volano?

Spitfire

Zero

Introduzione

La *portanza* è la forza normale alla direzione della velocità di un corpo in movimento immerso in un fluido.

L'obiettivo del teorema di Kutta-Joukowski è di darne una giustificazione analitica.

Fluidi
Prime definizioni

Si dice *Fluido ideale* un fluido con densità costante e coefficiente di viscosità nullo.

Fluidi

Prime definizioni

Si dice *Fluido ideale* un fluido con densità costante e coefficiente di viscosità nullo.
Un *Fluido incomprimibile* è un fluido in cui, durante il moto, si conserva il volume. Tale moto è detto isocoro.

Fluidi

Prime definizioni

Si dice *Fluido ideale* un fluido con densità costante e coefficiente di viscosità nullo.
Un *Fluido incomprimibile* è un fluido in cui, durante il moto, si conserva il volume. Tale moto è detto isocoro. Tale richiesta si caratterizza analiticamente imponendo che

$$div\, \mathbf{v} = 0$$

Fluidi

Prime definizioni

Si dice *Fluido ideale* un fluido con densità costante e coefficiente di viscosità nullo.

Un *Fluido incomprimibile* è un fluido in cui, durante il moto, si conserva il volume. Tale moto è detto isocoro. Tale richiesta si caratterizza analiticamente imponendo che

$$\mathit{div}\,\mathbf{v} = 0$$

Un *Fluido irrotazionale* è un fluido all'interno del quale non vi sono vortici.

Fluidi

Prime definizioni

Si dice *Fluido ideale* un fluido con densità costante e coefficiente di viscosità nullo.
Un *Fluido incomprimibile* è un fluido in cui, durante il moto, si conserva il volume. Tale moto è detto isocoro. Tale richiesta si caratterizza analiticamente imponendo che

$$div\, \mathbf{v} = 0$$

Un *Fluido irrotazionale* è un fluido all'interno del quale non vi sono vortici. Si caratterizza analiticamente da

$$rot\, \mathbf{v} = 0$$

Fluidi

Proprietà

Equazione di Bernoulli

$$\frac{p}{\rho} + \frac{\| \mathbf{v} \|^2}{2} + gh = costante$$

Funzioni Olomorfe

Definizione Una funzione $f(z)$ è detta *olomorfa* in un dominio **D** se differenziabile in senso complesso in ogni punto del dominio **D**.

Funzioni Olomorfe

Definizione Una funzione $f(z)$ è detta *olomorfa* in un dominio $\mathbf{D}$ se differenziabile in senso complesso in ogni punto del dominio $\mathbf{D}$.

Notazione Data una funzione $f(z)$ poniamo:

$$f(z) = f(x+iy) = u(z) + iv(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

$$u(z) = \mathrm{Re}(f(z)) \;\text{ e }\; v(z) = \mathrm{Im}(f(z)).$$

Funzioni Olomorfe

Proprietà

Teorema Una funzione $f(z)$ è olomorfa se e solo se u e v sono differenziabili e se valgono le condizioni, dette di Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

Se $f(z)$ olomorfa, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = u_x + i v_x$$

Funzioni Olomorfe

Proprietà

Teorema Una funzione $f(z)$ è olomorfa se e solo se u e v sono differenziabili e se valgono le condizioni, dette di Cauchy-Riemann:

$$u_x = v_y$$

$$u_y = -v_x$$

Se $f(z)$ olomorfa, le seguenti affermazioni sono equivalenti:

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial x} = u_x + iv_x$$

$$\frac{df}{dz} = grad(u(x,y)) = u_x - iu_y$$

Velocità complessa

Definizione

In un fluido ideale e incomprimibile in moto stazionario, irrotazionale, piano descritto dalla velocità $\mathbf{v} = \binom{u}{v}$ è possibile definire $f(z)$ funzione di variabile complessa $f(z) = u - iv$.

Velocità complessa

Definizione

In un fluido ideale e incomprimibile in moto stazionario, irrotazionale, piano descritto dalla velocità $\mathbf{v} = \binom{u}{v}$ è possibile definire $f(z)$ funzione di variabile complessa $f(z) = u - iv$.
Supponendo $\mathbf{v}$ differenziabile, si hanno automaticamente verificate le condizioni di Cauchy-Riemann. Infatti:

Velocità complessa

Definizione

In un fluido ideale e incomprimibile in moto stazionario, irrotazionale, piano descritto dalla velocità $\mathbf{v} = \binom{u}{v}$ è possibile definire $f(z)$ funzione di variabile complessa $f(z) = u - iv$.
Supponendo $\mathbf{v}$ differenziabile, si hanno automaticamente verificate le condizioni di Cauchy-Riemann. Infatti:

$$div\,\mathbf{v} = u_x - v_y = 0 \Longleftrightarrow u_x = v_y$$

Velocità complessa

Definizione

In un fluido ideale e incomprimibile in moto stazionario, irrotazionale, piano descritto dalla velocità $\mathbf{v} = \binom{u}{v}$ è possibile definire $f(z)$ funzione di variabile complessa $f(z) = u - iv$.
Supponendo $\mathbf{v}$ differenziabile, si hanno automaticamente verificate le condizioni di Cauchy-Riemann. Infatti:

$$div\, \mathbf{v} = u_x - v_y = 0 \iff u_x = v_y$$

$$rot\, \mathbf{v} = u_y + v_x = 0 \iff u_y = -v_x.$$

Velocità complessa

Definizione

In un fluido ideale e incomprimibile in moto stazionario, irrotazionale, piano descritto dalla velocità $\mathbf{v} = \binom{u}{v}$ è possibile definire $f(z)$ funzione di variabile complessa $f(z) = u - iv$.
Supponendo $\mathbf{v}$ differenziabile, si hanno automaticamente verificate le condizioni di Cauchy-Riemann. Infatti:

$$div\, \mathbf{v} = u_x - v_y = 0 \iff u_x = v_y$$

$$rot\, \mathbf{v} = u_y + v_x = 0 \iff u_y = -v_x.$$

Quindi la funzione $f(z)$ è olomorfa ed è detta *velocità complessa*.

Potenziale complesso

Definizione e proprietà

Se $f(z)$ ammette primitiva, sia $W(z)$ il *potenziale complesso* della funzione $f(z)$, tale che:

$$f(z) = \frac{dW}{dz}$$

Sia $W = \phi + i\psi$, ossia ϕ parte reale e ψ parte immaginaria. Per le regole di derivazione di funzioni complesse, $\frac{dW}{dz} = \phi_x - i\phi_y$.
Interpreto quindi ϕ come il potenziale reale della velocità: $grad(\phi) = \mathbf{v}$.
Si osserva dalle condizioni di Cauchy-Riemann applicate alla W:

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$$

Potenziale complesso

Definizione e proprietà

Se $f(z)$ ammette primitiva, sia $W(z)$ il *potenziale complesso* della funzione $f(z)$, tale che:

$$f(z) = \frac{dW}{dz}$$

Sia $W = \phi + i\psi$, ossia ϕ parte reale e ψ parte immaginaria. Per le regole di derivazione di funzioni complesse, $\frac{dW}{dz} = \phi_x - i\phi_y$.
Interpreto quindi ϕ come il potenziale reale della velocità: $grad(\phi) = \mathbf{v}$.
Si osserva dalle condizioni di Cauchy-Riemann applicate alla W:

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = 0$$

Infatti $\phi_x = \psi_y$ e $\phi_y = -\psi_x$, quindi $\phi_x\psi_x + \phi_y\psi_y = 0$. Interpreto le linee di livello di ψ come linee di corrente.

Cenni di Calcolo

Serie di Laurent

Lo sviluppo in Serie di Laurent di una funzione $f(z)$ in un punto c é dato da:

Cenni di Calcolo

Serie di Laurent

Lo sviluppo in Serie di Laurent di una funzione $f(z)$ in un punto c é dato da:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

dove a_n sono i coefficienti della formula integrale di Cauchy:

Cenni di Calcolo

Serie di Laurent

Lo sviluppo in Serie di Laurent di una funzione $f(z)$ in un punto c é dato da:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-c)^n$$

dove a_n sono i coefficienti della formula integrale di Cauchy:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)dz}{(z-c)^{n+1}}$$

con γ percorso antiorario attorno ad una curva semplice che contiene c in un dominio **A** in cui $f(z)$ olomorfa.

Cenni di Calcolo

Teorema dei Residui Si osserva che per $n = -1$:

$$\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$$

Cenni di Calcolo

Teorema dei Residui Si osserva che per $n = -1$:

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i a_{-1}$$

Definizione Il termine a_{-1} è detto residuo integrale di $f(z)$.

Teorema di Blasius

Teorema di Blasius

La forza $\mathcal{F}$ esercitata dal fluido sul corpo **B** è pari a:

$$\mathcal{F} = -i\frac{\rho}{2}\overline{\int_{\partial B} f^2 dz}$$

Teorema di Blasius

Dimostrazione

La forza $\mathcal{F}$ che agisce su un corpo immerso in un fluido ideale è pari a:

$$\mathcal{F} = -\int_{\partial B} p\mathbf{n}ds = -\int_{\partial B} p(dy - idx)$$

Teorema di Blasius

Dimostrazione

La forza $\mathcal{F}$ che agisce su un corpo immerso in un fluido ideale è pari a:

$$\mathcal{F} = -\int_{\partial B} p\mathbf{n}ds = -\int_{\partial B} p(dy - idx)$$

Dall'equazione di Bernoulli $p = -\frac{\rho}{2} \mid\mid \mathbf{v} \mid\mid^2 = -\frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)$

Teorema di Blasius

Dimostrazione

La forza $\mathcal{F}$ che agisce su un corpo immerso in un fluido ideale è pari a:

$$\mathcal{F} = -\int_{\partial B} p\mathbf{n}ds = -\int_{\partial B} p(dy - idx)$$

Dall'equazione di Bernoulli $p = -\frac{\rho}{2} \mid\mid \mathbf{v} \mid\mid^2 = -\frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)$

$$-i\frac{\rho}{2}\int_{\partial B}(u^2 + v^2)\mathrm{dz}$$

Teorema di Blasius

Dimostrazione

La forza $\mathcal{F}$ che agisce su un corpo immerso in un fluido ideale è pari a:

$$\mathcal{F} = -\int_{\partial B} p\mathbf{n}ds = -\int_{\partial B} p(dy - idx)$$

Dall'equazione di Bernoulli $p = -\frac{\rho}{2} \mid\mid \mathbf{v} \mid\mid^2 = -\frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)$

$$-i\frac{\rho}{2}\int_{\partial B}(u^2 + v^2)\mathrm{dz}$$

Impongo il parallelismo di $\mathbf{v}$ al contorno: $udy = vdx$

Teorema di Blasius

Dimostrazione

La forza $\mathcal{F}$ che agisce su un corpo immerso in un fluido ideale è pari a:

$$\mathcal{F} = -\int_{\partial B} p\mathbf{n}ds = -\int_{\partial B} p(dy - idx)$$

Dall'equazione di Bernoulli $p = -\frac{\rho}{2} \mid\mid \mathbf{v} \mid\mid^2 = -\frac{\rho}{2}(u^2 + v^2)$

$$-i\frac{\rho}{2}\int_{\partial B}(u^2 + v^2)\mathrm{dz}$$

Impongo il parallelismo di $\mathbf{v}$ al contorno: $udy = vdx$

$f^2dz = (u^2 - v^2 - 2iuv)(dx + idy) = (u^2 + v^2)dx - i(u^2 + v^2)dy.$

$\overline{f^2dz} = \overline{(u^2 + v^2)dx + i(u^2 + v^2)dy} = (u^2 + v^2)dz$ quindi ho la tesi, cioè:

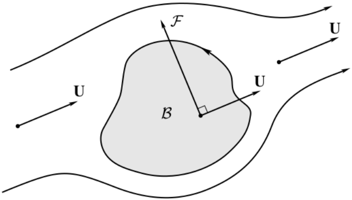
$$\mathcal{F} = -i\frac{\rho}{2}\overline{\int_{\partial B} f^2dz}$$

Teorema di Kutta - Joukowski

Sia **u** la velocità di un fluido ideale, incomprimibile di moto piano, irrotazionale e stazionario al di fuori di un corpo **B** di frontiera C. Sia inoltre $\mathbf{U} = (U,V)$ il valore costante assunto dalla velocità ad infinito. Allora, la forza $\mathcal{F}$ esercitata dal fluido sul corpo **B** è pari a

$$\mathcal{F} = -\rho \Gamma_C \mid\mid \mathbf{U} \mid\mid \mathbf{n}$$

dove Γ_C la circuitazione della velocità lungo C e **n** il versore normale a **U**.



Teorema di Kutta - Joukowski

Dimostrazione - 1

Abbiamo già mostrato prima che la velocità complessa *f(z)* è una funzione analitica al di fuori dell'ostacolo **B**.

Teorema di Kutta - Joukowski

Dimostrazione - 1

Abbiamo già mostrato prima che la velocità complessa *f(z)* è una funzione analitica al di fuori dell'ostacolo **B**. Posso quindi scrivere *f(z)* in serie di Laurent.

Teorema di Kutta - Joukowski

Dimostrazione - 1

Abbiamo già mostrato prima che la velocità complessa $f(z)$ è una funzione analitica al di fuori dell'ostacolo **B**. Posso quindi scrivere $f(z)$ in serie di Laurent.

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

Teorema di Kutta - Joukowski

Dimostrazione - 1

Abbiamo già mostrato prima che la velocità complessa *f(z)* è una funzione analitica al di fuori dell'ostacolo **B**. Posso quindi scrivere *f(z)* in serie di Laurent.

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$$

Per ipotesi non ci sono potenze di indice positivo: $a_0 = U - iV$.

Teorema di Kutta - Joukowski

Dimostrazione - 1

Abbiamo già mostrato prima che la velocità complessa *f(z)* è una funzione analitica al di fuori dell'ostacolo **B**. Posso quindi scrivere *f(z)* in serie di Laurent.

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \dots$$

Per ipotesi non ci sono potenze di indice positivo: $a_0 = U - iV$.

$$\int_C f dz = \int_C (u - iv)(dx + idy) = \int_C \mathbf{v} ds = \Gamma_C$$

Teorema di Kutta - Joukowski

Dimostrazione - 1

Abbiamo già mostrato prima che la velocità complessa *f(z)* è una funzione analitica al di fuori dell'ostacolo **B**. Posso quindi scrivere *f(z)* in serie di Laurent.

$$f(z) = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \frac{a_{-2}}{z^2} + \ldots$$

Per ipotesi non ci sono potenze di indice positivo: $a_0 = U - iV$.

$$\int_C f dz = \int_C (u - iv)(dx + idy) = \int_C \mathbf{v} d\mathbf{s} = \Gamma_C$$

Per il teorema dei Residui: $\int_C f dz = 2\pi a_{-1} i$, quindi posso esplicitare a_{-1}:

$$a_{-1} = \frac{\Gamma_C}{2\pi i}$$

Teorema di Kutta - Joukowski

Dimostrazione - 2

Sviluppo il quadrato di f^2 ed applico il teorema di Blasius e il teorema dei Residui.

Teorema di Kutta - Joukowski

Dimostrazione - 2

Sviluppo il quadrato di f^2 ed applico il teorema di Blasius e il teorema dei Residui.

$$f^2 = a_0^2 + \frac{2a_0 a_{-1}}{z} + \cdots$$

Teorema di Kutta - Joukowski

Dimostrazione - 2

Sviluppo il quadrato di f^2 ed applico il teorema di Blasius e il teorema dei Residui.

$$f^2 = a_0^2 + \frac{2a_0 a_{-1}}{z} + \cdots$$

$$\mathcal{F} = -i\frac{\rho}{2}\overline{\int_{\partial B} f^2 dz} = -\frac{i\rho}{2}\overline{(4\pi i a_0 a_{-1})} =$$

Teorema di Kutta - Joukowski

Dimostrazione - 2

Sviluppo il quadrato di f^2 ed applico il teorema di Blasius e il teorema dei Residui.

$$f^2 = a_0^2 + \frac{2a_0 a_{-1}}{z} + \cdots$$

$$\mathcal{F} = -i\frac{\rho}{2}\overline{\int_{\partial B} f^2 dz} = -\frac{i\rho}{2}\overline{(4\pi i a_0 a_{-1})} = \rho\Gamma_C(V - iU)$$

Teorema di Kutta - Joukowski

Dimostrazione - 2

Sviluppo il quadrato di f^2 ed applico il teorema di Blasius e il teorema dei Residui.

$$f^2 = a_0^2 + \frac{2a_0 a_{-1}}{z} + \cdots$$

$$\mathcal{F} = -i\frac{\rho}{2}\overline{\int_{\partial B} f^2 dz} = -\frac{i\rho}{2}\overline{(4\pi i a_0 a_{-1})} = \rho\Gamma_C(V - iU)$$

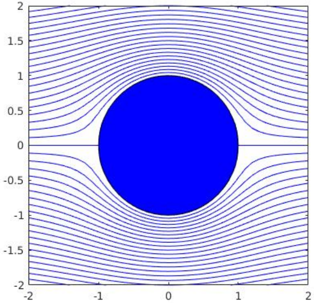
Prendendo $\mathbf{n} = \frac{(-V;U)}{||(-V;U)||}$, ottengo la tesi:

$$\mathcal{F} = -\rho\Gamma_C \mid\mid \mathbf{U} \mid\mid \mathbf{n}$$

Esempi

Flusso Attorno un ostacolo circolare

$$W = U(z + \frac{a^2}{z})$$

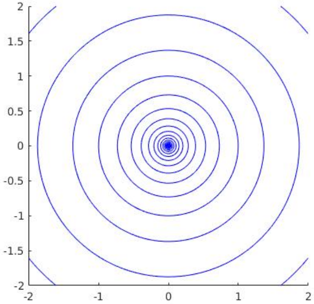


Linee di flusso attorno ad un ostacolo circolare

Esempi

Flusso di una sorgente

$$W = \frac{\Gamma}{2\pi i}(\log z)$$



Flusso di una sorgente puntiforme

Esempi

Combinazione di sorgente puntiforme ed ostacolo circolare

Dalle considerazioni precedenti, possiamo mettere insieme i pontenziali e vedere cosa otteniamo:

$$W = U(z + \frac{a^2}{z}) + i\frac{\Gamma}{2\pi}\log(z)$$

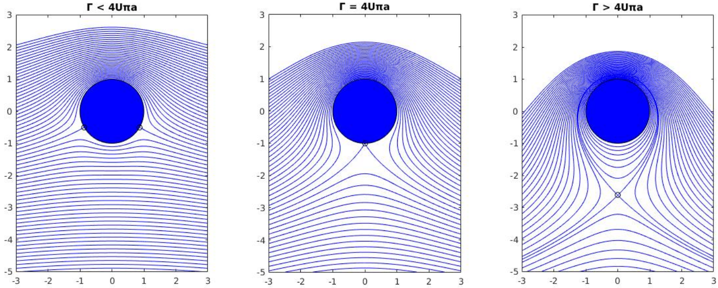
$$f(z) = \frac{dW}{dz} = U(1 - \frac{a^2}{z^2}) + i\frac{\Gamma}{2\pi}(\frac{1}{z})$$

Cerchiamo i punti stazionari ed andiamo a vedere i grafici delle linee di flusso.

Esempi

Studio parametrico

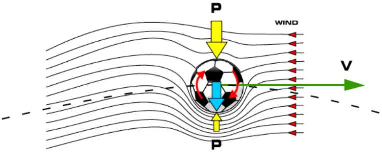
$$P_{critici} = \frac{-i\frac{\Gamma}{2\pi} \pm \sqrt{-\frac{\Gamma^2}{4\pi^2} + 4U^2a^2}}{2U}$$



Esempi

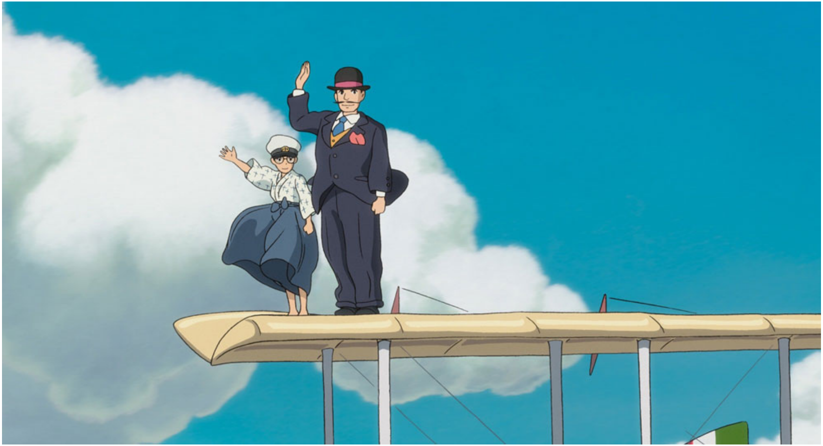
Effetto Magnus

Assenza di circuitazione



Presenza di circuitazione

Bibliografia



Chorin A., Marsden J.E. Mathematical introduction to fluid mechanics (Springer, 2000)