INTRODUCCIÓN

NOMENCLATURA

X conjunto y x un elemento de X: $x \in X$
Si x no es elemento de $X \Rightarrow x \notin X$

Sea A subconjunto de X: $A \subset X$ (contenido estricto o igual).
$\{x\} \subset X$

OPERACIONES

Sean $A, B \subset X$ conjunto:

- Unión: $A \cup B = \{x \in X / x \in A \text{ ó } x \in B\}$
- Intersección: $A \cap B = \{x \in X / x \in A \text{ y } x \in B\}$. Si es vacía es $\emptyset$.

PROPIEDADES.

- Asociativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. $\forall A, B, C \subset X$.
  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- Conmutativa: $A \cup B = B \cup A$. $\forall A, B \subset X$
  $A \cap B = B \cap A$
- Distributiva: $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $\forall A, B, C \subset X$
  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

LEYES DE DE MORGAN

La operación complementario sobre un subconjunto A de X, se denota por $\bar{A}$, A^c ó $X - A$

$X - A = \{x \in X / x \notin A\}$.

Por tanto:

$A \cup (X - A) = X$

$A \cap (X - A) = \emptyset$.

De Morgan hizo dos afirmaciones: Siendo $A, B \subset X$.

- $X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$.

<u>Dem</u>: Sea $x \in X - (A \cup B) \Longleftrightarrow x \notin (A \cup B)$.

$\Longleftrightarrow x \notin A$ y $x \notin B$

$\Longleftrightarrow x \in X - A$ y $x \in X - B$

$\Longleftrightarrow x \in (X - A) \cap (X - B)$.

- $X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$.

<u>Dem</u>: Sea $x \in X - (A \cap B) \Longleftrightarrow x \notin (A \cap B)$

$\Longleftrightarrow x \notin A$ ó $x \notin B$.

$\Longleftrightarrow x \in X - A$ ó $x \in X - B$

$\Longleftrightarrow x \in (X - A) \cup (X - B)$.

$\Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{A} \; x \in X - A_a$.

$\Leftrightarrow x \in \bigcap_{a \in \mathcal{A}} (X - A_a)$.

- $X - (\bigcap_{a \in \mathcal{A}} A_a) = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} (X - A_a)$

Dem: De forma análoga a la demostración anterior.

DEFINICIÓN

Sea X un conjunto, las partes de X se denotan por $P(X)$ y se definen como:

$P(X) = \{A / A \subset X\}$, esto es, $A \in P(X) \Leftrightarrow A \subset X$.

$x \in X \Leftrightarrow \{x\} \in P(X)$.

Además $\{A_a / a \in \mathcal{A}\} \subset P(X)$.

FUNCIONES.

$f: X \longrightarrow Y$ aplicación, donde X, Y son conjuntos
$x \longmapsto y = f(x)$.

f es....

- Inyectiva si $\forall x, y \in X, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.
- Sobreyectiva si $\forall y \in Y \; \exists x \in X$ tq $f(x) = y$.
- Biyectiva si f es inyectiva y sobreyectiva.

Si f es biyectiva definimos su inversa como: $f^{-1}: Y \longrightarrow X$

cumpliendo $\begin{cases} f \circ f^{-1} = Id_Y \\ f^{-1} \circ f = Id_X \end{cases}$

$f^{-1}(y) = x$ y $f(x) = y$.

OPERACIONES EN DIMENSIÓN INFINITA.

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto de índices cualquiera y sea $\{A_a / a \in \mathcal{A}\}$ de subconjuntos de X.

- $\bigcup_{a\in\mathcal{A}} A_a = \{x \in X / \exists a \in \mathcal{A} \text{ con } x \in A_a\}$.
- $\bigcap_{a\in\mathcal{A}} A_a = \{x \in X / \forall a \in \mathcal{A} \; x \in A_a\}$.

Estas operaciones cumplen las propiedades asociativa y conmutativa.

PROPIEDADES

- $B \cup \left(\bigcap_{a\in\mathcal{A}} A_a\right) = \bigcap_{a\in\mathcal{A}} (B \cup A_a)$.

<u>Dem</u>: $x \in B \cup \left(\bigcap_{a\in\mathcal{A}} A_a\right) \iff x \in B \text{ o } x \in \bigcap_{a\in\mathcal{A}} A_a$

$\iff x \in B \text{ o } (\forall a \in \mathcal{A} \; x \in A_a)$.

$\iff \forall a \in \mathcal{A} \, (x \in B \text{ o } x \in A_a)$.

$\iff \forall a \in \mathcal{A} \; x \in B \cup A_a$.

$\iff x \in \bigcap_{a\in\mathcal{A}} (B \cup A_a)$.

- $B \cap \left(\bigcup_{a\in\mathcal{A}} A_a\right) = \bigcup_{a\in\mathcal{A}} (B \cap A_a)$

<u>Dem</u>: De forma análoga a la demostración anterior.

- $X - \left(\bigcup_{a\in\mathcal{A}} A_a\right) = \bigcap_{a\in\mathcal{A}} (X - A_a)$.

<u>Dem</u>: $x \in X - \left(\bigcup_{a\in\mathcal{A}} A_a\right) \iff x \notin \bigcup_{a\in\mathcal{A}} A_a$

$\iff \forall a \in \mathcal{A} \; x \notin A_a$.

- $f(\bigcap_{a\in\mathcal{A}} A_a) \subset \bigcap_{a\in\mathcal{A}} f(A_a)$. Si f es inyectiva, se da la igualdad.

<u>Dem</u>: Si tomamos $f(x) = x^2$ y $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. con los conjuntos:

$A =]-\infty, 0[$ $\quad B =]0, +\infty[$. tenemos:

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow f(\emptyset) = \emptyset$

$$\left.\begin{array}{l} f(A) =]0, +\infty[\\ f(B) =]0, +\infty[\end{array}\right\} f(A) \cap f(B) =]0, +\infty[.$$

Sea $y \in f(\bigcap_{a\in\mathcal{A}} A_a) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcap_{a\in\mathcal{A}} A_a$ con $f(x) = y$

$\Leftrightarrow \exists x \in A_a \ \forall a \in \mathcal{A}$ con $f(x) = y$.

$* \Longrightarrow \forall a \in \mathcal{A} \cdot y \in f(A_a)$.

$\Longleftrightarrow y \in \bigcap_{a\in\mathcal{A}} f(A_a)$.

Si f es inyectiva $y = f(x_a) = f(x_b) = f(x_c)$ entonces $x_a = x_b = x_c$, luego se da la equivalencia. ya que $y \in f(A_a)$ asegura un solo x que se aplique en A_a y está en A_a.

- $f(A) - f(B) \subset f(A - B) = f(A \cap (X - B))$. si f inyectiva ~~es~~ igual.

$*A - B$ es el conjunto A sin la intersección con B.

<u>Dem</u>: $y \in f(A) - f(B) \Leftrightarrow y \in f(A), y \notin f(B)$

$* \Longrightarrow \exists x \in A, x \notin B, f(x) = y$.

$\Longleftrightarrow \exists x \in A - B, f(x) = y$

$\Longleftrightarrow y \in f(A - B)$.

* Si f inyectiva solo un punto puede aplicarse en $y \in f(B)$, y que $x \notin B$ garantiza que $f(x) \notin f(B)$, luego se da la equivalencia.

DEFINICIÓN

$f: X \to Y$ aplicación y $A \subset X$ subconjunto.

$f(A) = \{y \in Y / \exists x \in A \text{ con } f(x) = y\} \subset Y$.

Esta es la imagen del subconjunto A (también llamada imagen directa)

Sea $B \subset Y$ subconjunto.

Definimos la preimagen de B mediante f como:

$f^{-1}(B) = \{x \in X / f(x) \in B\} \subset X$

la aplicación f^{-1} no tiene porqué existir, lo describimos así por comodidad cometiendo un abuso de notación, esto es, f no tiene porqué ser biyectiva para calcular la preimagen.

PROPIEDADES DE LA IMAGEN DIRECTA.

$f: X \to Y$ aplicación y subconjuntos $A, B \subset X$

- $A \subset B \Rightarrow f(A) \subset f(B)$

  __Dem__: Sea $y \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A$ tq $f(x) = y$. Como $A \subset B \Rightarrow x \in B$, por tanto, $y \in f(B)$. Esto demuestra que todo elemento de $f(A)$ está en $f(B)$.

- $f(\bigcup_{a \in A} A_a) = \bigcup_{a \in A} f(A_a)$. $(A_a \subset X)$

  __Dem__: $y \in f(\bigcup_{a \in A} A_a) \Leftrightarrow \exists x \in \bigcup_{a \in A} A_a$ con $f(x) = y$

  $\Leftrightarrow \exists a \in A \ \exists x \in A_a$ con $f(x) = y$.

  $\Leftrightarrow \exists a \in A \cdot y \in f(A_a)$.

  $\Leftrightarrow y \in f(\bigcup_{a \in A} A_a)$.

PROPIEDADES DE LA PREIMAGEN.

Sea $f: X \to Y$ aplicación y $B, C \subset Y$

- $B \subset C \Rightarrow f^{-1}(B) \subset f^{-1}(C)$.

 Dem: Como $B \subset C$ todo punto que se aplique en B se aplica en C también, luego $\forall x \in f^{-1}(B) \Rightarrow x \in f^{-1}(C)$.

- $f^{-1}\left(\bigcap_{b\in\mathfrak{B}} B_b\right) = \bigcap_{b\in\mathfrak{B}} f^{-1}(B_b)$.

 Dem: $x \in f^{-1}\left(\bigcap_{b\in\mathfrak{B}} B_b\right) \Leftrightarrow f(x) \in \bigcap_{b\in\mathfrak{B}} B_b$.

 $\Leftrightarrow \forall b \in \mathfrak{B}\ f(x) \in B_b$.

 $\Leftrightarrow \forall b \in \mathfrak{B}\ \ x \in f^{-1}(B_b)$.

 $\Leftrightarrow x \in \bigcap_{b\in\mathfrak{B}} f^{-1}(B_b)$.

- $f^{-1}\left(\bigcup_{b\in\mathfrak{B}} B_b\right) = \bigcup_{b\in\mathfrak{B}} f^{-1}(B_b)$.

 Dem: $f^{-1}\left(\bigcup_{b\in\mathfrak{B}} B_b\right) \Longleftrightarrow f(x) \in \bigcup_{b\in\mathfrak{B}} B_b$.

 $\Longleftrightarrow \exists b \in \mathfrak{B}$ con $f(x) \in B_b$.

 $\Longleftrightarrow \exists b \in \mathfrak{B}\ \ x \in f^{-1}(B_b)$.

 $\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{b\in\mathfrak{B}} f^{-1}(B_b)$.

- $f^{-1}(B - C) = f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$

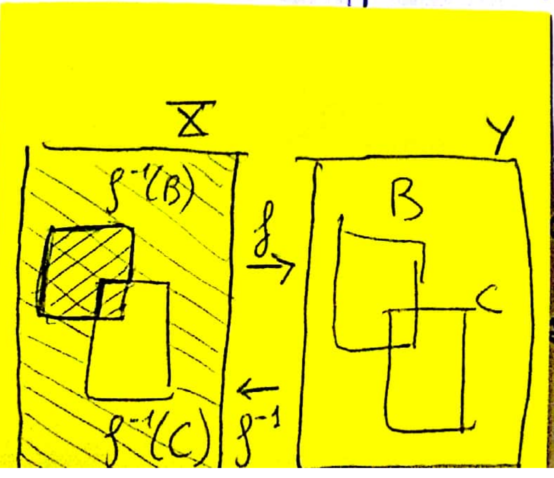
 Dem: $x \in f^{-1}(B - C) \Leftrightarrow f(x) \in B - C$

 $\Leftrightarrow f(x) \in B$ y $f(x) \notin C$.

 $\Leftrightarrow f(x) \in B$ y $f(x) \in Y - C$.

 $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$ y $x \in f^{-1}(Y - C)$.

 $\Leftrightarrow x \in f^{-1}(B) - f^{-1}(C)$.



PROPIEDADES

- $A \subset X \Rightarrow A \subset f^{-1}(f(A))$. Si f es inyectiva $\Rightarrow A = f^{-1}(f(A))$.

<u>Dem</u>: $x \in A \overset{*}{\Rightarrow} f(x) \in f(A)$

$\Leftrightarrow x \in f^{-1}(f(A))$.

* $f(x) \in f(A)$ no implica $x \in A$, excepto si es inyectiva, entonces solo un punto se aplica en $f(x)$ y por tanto implica $x \in A$, y se da la equivalencia.

- $B \subset Y \Rightarrow f(f^{-1}(B)) \subset B$. Si f es sobreyectiva $\Rightarrow f(f^{-1}(B)) = B$.

<u>Dem</u>: $y \in f(f^{-1}(B)) \overset{*}{\Rightarrow} \exists x \in f^{-1}(B)$ con $f(x) = y$.

$\Leftrightarrow f(x) \in B$

$\Leftrightarrow y \in B$.

*La equivalencia se da si f es sobreyectiva, porque $y \in B \Rightarrow \exists x \in X, f(x) = y$ tq. $x \in f^{-1}(B) \Rightarrow y \in f(f^{-1}(B))$.
Si f no es sobreyectiva, este x no tiene porqué existir.