Resumen de lógica

Mapachana

29 de enero de 2019

1. Inducción

En esta sección se introduce el concepto de *inducción matemática*, una herramienta para demostrar teoremas o simplemente que una propiedad se cumple en todos los números *naturales*. Es muy importante tener clara la "literatura"de esta parte del temario.

1.1. Principios de inducción finita

Este primer principio de inducción se basa directamente en el *quinto axioma de Peano*, conocido también como el axioma de inducción, que dice así:

- Si $P \subseteq \omega$, y cumple que:
  - $0 \in P$
  - si $n \in P$, entonces $s(n) \in P$. ($s(n) = n + 1$, es la *función sucesor*)

Entonces se tiene $P = \omega$

Este fundamento es el que vamos a usar en nuestros ejercicios, llamaremos P al conjunto de los naturales que cumplan lo que queremos demostrar, y probaremos que este conjunto es igual al conjunto de *todos* los naturales.

En nuestros ejercicios primero definiremos una proposición $P(i)$ donde i es una variable libre, y procederemos a probar que $\forall i P(i)$. Lo haremos mediante el siguiente teorema:

Teorema 1 (Primer Principio de Inducción Finita)**.** *Sea $P(i)$ una proposición e i_0 un número natural. Supongamos:*

- *$P(i_0)$ (Caso base)*
- *Si $P(i)$ (Hipótesis de Inducción), entonces $P(i+1)$ (Paso de Inducción).*

Entoces $P(i)$ para todo i natural.

Esta no es la única forma de probar una propiedad por inducción. Mediante un desarrollo teórico del Primer pricipio se prueba que *todo conjunto de naturales tiene mínimo* (Principio de buena ordenación de $\mathbb{N}$) y también se prueba el siguiente Teorema:

Teorema 1 (Segundo Principio de Inducción Finita)**.** *Sea $P(i)$ una proposición e i_0 un número natural. Si para todo natural n, se cumple $P(i)$ para $i_0 \leq i < n$, entonces se tiene $P(i)$ para todo $i > i_0$*

En otras palabras, para trabajar con este principio, *suponemos* que la propiedad se cumple para los números menores que n y probamos que se cumple para n.

1.2. Literatura de Inducción

Para tener muy muy bien los ejercicios de inducción, recomendamos seguir esta estructura:

- **Primer Principio:** "La demostración es por el primer principio de inducción, según el enunciado $P(i)$ del tenor: <propiedad>.

  <Realizamos el caso base>

  Supongamos que n es un número natural y que para n es cierto $P(n)$ (Hipótesis de Inducción). Demostraremos que en consecuencia es cierto $P(n+1)$.

  <Demostración>

  Por el primer principio de inducción finita para todo número natural se tiene $P(n)$"

- **Segundo Principio:** Es todo idéntico, excepto cambiar donde ponemos "Primer principio" por "Segundo principio" y en lugar de "Supongamos [...] $P(n+1)$" escribimos:

  "Supongamos que n es un número natural y que para todo natural k tal que $k < n$ vale $P(k)$ (Hipótesis de inducción). Demostraremos que en consecuencia vale $P(n)$."

1.3. Ejemplos de aplicación

Ejemplo 1: Primer Principio.

Pruebe que el producto de tres naturales consecutivos es divisible por 6.

Solución. Sea $P(i)$: "6 divide a $i \cdot (i+1) \cdot (i+2)$", se tiene que:

$$P(0) = 0, \quad \frac{0}{6} = 0 \qquad \text{(Caso base)}$$

Ahora vamos a usar la siguiente propiedad:

- Sean a y b múltiplos de un número $k \in \omega$, entonces $a - b$ es múltiplo de k.

Suponemos que se tiene $P(i)$, hemos de probar que entonces también se tiene $P(i+1)$:

$$\begin{aligned} P(i+1) - P(i) &= (i+1)(i+2)(i+3) - i(i+1)(i+2) \\ &= (i+1)(i+2)(i+3-i) \\ &= 3(i+1)(i+2) \end{aligned}$$

Tenemos que, al ser conseutivos, o bien $i+1$ es par o bien $i+2$ es par, en cualquiera de los casos, se tiene que $P(i+1) - P(i)$ es divisible por 6. Por nuestra hipótesis de inducción sabemos que 6 divide a $P(i)$, de aquí se deduce que 6 divide a $P(i+1)$, como se quería.

Por el primer principio de inducción finita se tiene $P(i)$ para todo $i \in \omega$. $\square$

Ejemplo 2: Segundo Principio.

Pruebe que todo número natural puede expresarse como producto de primos.

Solución. Comenzamos enunciado la propiedad que hemos de probar: $P(i)$: "$i = p \cdot q$, p y q primos"

Suponemos que se cumple $P(k)$ para todo $0 \leq k < i$, ahora probemos que se cumple $P(i)$. Lo haremos mediante un análisis exhaustivo de todos los posibles casos:

- Sea i un número primo, trivialmente, es producto de sí mismo.
- Sea i un número compuesto. Entonces es producto de al menos dos números, p y q. Como $p, q < i$, entonces se tiene $P(q)$ y $P(p)$, esto es, son producto de primos. Por lo tanto su producto *también* será producto de primos. Así que se tiene que i es producto de primos.

Aplicando el segundo principio de inducción finita se tiene $P(i)$ para todo i natural.

2. Recurrencias

2.1. Recurrencias lineales homogéneas

Sea k $\in \mathbb{N}$ una recurrencia lineal homogénea es cualquier igualdad de la forma:

$$u_n = a_1 u_{n-1} + ... + a_k u_k$$

donde $a_1, ..., a_K$ son constantes. Si a_k es distinto de 0, k es el orden de la relación de recurrencia y

$$p(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - ... - a_k$$

es su polinomio característico. Si este polinomio se iguala a 0, se obtiene su ecuación característica. Para resolver la recurrencia, calcularemos las soluciones de la ecuación característica, obteniendo así raíces. Llamaremos m a la multiplicidad de una raíz (por ejemplo, si una ecuación tiene soluciones 2 y 2, solo tiene una raíz pero con multiplicidad 2). Llamaremos t al número de raíces. Veremos dos casos:

- $k = 1$
  $t = 1$ $m = 1$
  $$X_n = \alpha \cdot r^n$$
- $k = 2$
  - $t = 2 \quad t \in \mathbb{R} \quad m_1 = m_2 = 1$
    $$X_n = \alpha_1 \cdot r_1^n + \alpha_2 \cdot r_2^n$$
  - $t = 2 \quad y \in \mathbb{R} \quad m = 2$
    $$X_n = (\alpha_{10} + \alpha_{11} n) \cdot r^n$$
  - $t = 2 \quad t \in \mathbb{C} \quad m_1 = m_2 = 1$
    $$X_n = r^n \left(K_1 \cos(n\theta) + K_2 \sin(n\theta)\right)$$

    Donde r y θ se calculan como:
    $r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \theta = 2 \arctan(\frac{b}{a+r})$
    $K_1 = 2a \quad K_2 = -2b$

Si bien no deberían caer recurrencias de grado mucho mayor de 2, por si acaso, conviene generalizar los casos donde las raíces son reales. La expresión es:

$$X_n = r_1^n(\alpha_{1,0} + \alpha_{1,1}n + ... + \alpha_{1,m-1}n^{m-1}) + ... + r_t^n(\alpha_{t,0} + \alpha_{t,1}n + ... + \alpha_{t,m-1}n^{m-1})$$

Donde cada m varía para cada raíz. Para calcular un recurrencia determinada (nos dan valores de $u_0, u_1, \ldots u_n$ basta sustituir en la expresión el valor de n que nos dan e igualar al número que queremos obtener para ese valor de n e ir despejando y hallando incógnitas.

Ejemplo Resuelva la relación de recurrencia y encuentre la solución particular indicada.

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9_n$$

$$u_0 = 1, u_1 = 6$$

Orden de la relación de recurrencia: $k = 2$.
Polinomio característico: $x^2 - 6x + 9$.
Ecuación característica: $x^2 - 6x + 9 = 0$.
Las soluciones de la ecuación característica son: $x_1 = x_2 = 3$. Esto es, tenemos una sola raíz con multiplicidad 2 (la misma raíz aparece 2 veces, es solución doble), luego la solución será de la forma:

$$X_n = (\alpha_1 + \alpha_2 n) \cdot 3^n$$

Donde falta hallar dos incógnitas, que conseguiremos usando los valores que nos dan para la recurrencia particular, si no nos pidieran esto, o no tuviésemos los datos, habríamos acabado el ejercicio.
Para hallar las incógnitas sustituyo los valores de n e igualo al valor que me dan como sigue:

$$u_0 = 1 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot 0) \cdot 3^0;$$

$$\alpha_1 = 1$$

$$u_1 = 6 = (\alpha_1 + \alpha_2 \cdot 1) \cdot 3^1;$$

$$6 = (1 + \alpha_2) \cdot 3;$$

$$6 = 3 + 3\alpha_2;$$

$$\alpha_2 = 1$$

Luego la solución no recurrente es:

$$X_n = (1 + n) \cdot 3^n$$

2.2. Recurencias lineales no homogéneas

Estas recurrencias son de la forma:

$$u_n = a_1 u_{n-1} + ... + a_k u_k + f(n)$$

Donde $f(n)$ está formada por dos partes:

- $q(n)$: Es un polinomio que va multiplicando.
- S: Es un número que va elevado a n. *Solo a n, si es por ejemplo 3^{n+1}, habría que descomponerlo.*

Esto es: $f(n) = q(n) \cdot S^n$ Para resolver estas recurrencias calcularemos dos cosas: La solución a la recurrencia lineal homogénea asociada (quitando el $f(n)$) que será $\{X_n^{(h)}\}$ y la solución $\{X_n^{(p)}\}$ que, al sumarlas, nos dará la solución de la recurrencia. Para calcular $\{X_n^{(p)}\}$ Simplemente localizaremos S y $q(n)$ por separado y comprobaremos si S es una solución de la ecuación homogénea asociada, m será la multiplicidad de S en las raíces de la ecuación. Llamaremos por ejemplo g al grado de $q(n)$, entonces:

$$\{X_n^{(p)}\} = n^m \cdot (c_1 + c_2 n + ... + c_g n^g) \cdot S^n$$

Es decir, un polinomio de igual grado. Para calcular las constantes del polinomio $c_1, c_2, ..., c_n$ se sustituirá la solución en la recurrencia variando n de acuerdo a la expresión y se resolverá el sistema o ecuación para calcular estos valores.

Ejemplo Resuelva la relación de recurrencia:

$$u_{n+2} = -4u_{n+1} - 3u_n + 5(-2)^n$$

Orden de la relación de recurrencia: $k = 2$.
Polinomio característico asociado: $x^2 - +4x + 3$.
Ecuación característica asociada: $x^2 + 4x + 3 = 0$.
Las soluciones de la ecuación característica asociada son: $x_1 = -1; x_2 = -3$. Esto es, tenemos dos raíces con multiplicidad 1, luego la solución será de la forma:

$$\{X_n^{(h)}\} = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(-3)^n$$

Donde falta hallar dos incógnitas, que en este caso no tenemos datos para calcular, por lo que los dejaremos así.
Ahora calcularemos la otra solución necesaria.

$$f(n) = 5 \cdot (-2)^n$$

Luego:

$$q(n) = 5 \quad S = -2$$

El grado de $q(n)$ es 1 y -2 no es solución de la ecuación característica asociada, por lo que la solución será de la forma:

$$\{X_n^{(p)}\} = n^0 \cdot c \cdot (-2)^n = c \cdot (-2)^n$$

Donde sólo faltaría hallar c, lo que haremos sustituyendo en la recurrencia de esta forma:

$$c(-2)^{n+2} = -4(c(-2)^{n+1}) - 3(c(-2)^n) + 5(-2)^n;$$

$$c(-2)^2(-2)^n + 4c(-2)(-2)^n + 3c(-2)^n - 5(-2)^n = 0;$$

$$4c(-2)^n - 8c(-2)^n + 3c(-2)^n - 5(-2)^n = 0;$$

$$(-2)^n(4c - 8c + 3c - 5) = 0;$$

$$4c - 8c + 3c - 5 = 0;$$

$$-c - 5 = 0;$$

$$c = -5$$

Por tanto:

$$\{X_n^{(p)}\} = -5 \cdot (-2)^n$$

Y la solución de la recurrencia es la suma de ambas, entonces la solución es:

$$X_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(-3)^n - 5(-2)^n$$

Para calcular α_1 y α_2 necesitaríamos unos valores de n, como $u_0, u_1, \dots U_n$ para sustituir y despejarlos.

2.3. Recurrencias no lineales

Si cae esto, llorad. Es básicamente probar lo que se te ocurra y tener suerte.

3. Lógica proposicional

3.1. Introducción

Este tema trata básicamente de discernir entre conjuntos de cláusulas satisfacibles e instatisfacibles.
Una cláusula es un conjunto de símbolos, como: $x \to y \quad (x \wedge y) \vee z$ Primero veremos como trabajar con cláusulas:
Las cláusulas están formadas por los símbolos: $\to, \neg, \vee, \wedge, \leftrightarrow, (,)$
Existen asignaciones, representadas por v, sobre las cláusulas que valen 0 o 1, dependiendo de si las satisfacen o no. Sean α y β cláusulas y v una asignación:

- $v(\neg\alpha) = v(\alpha) + 1$
- $v(\alpha \to \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + 1$

- $v(\alpha \vee \beta) = v(\alpha)v(\beta) + v(\alpha) + v(\beta)$
- $v(\alpha \wedge \beta) = v(\alpha)v(\beta)$
- $v(\alpha \leftrightarrow \beta) = v(\alpha) + v(\beta) + 1$

Ejemplo Sea $v(\alpha) = 1 \quad v(\beta) = 0$

$$v(\neg\alpha) = 1 + 1 = 0$$

$$v(\neg\beta) = 0 + 1 = 1$$

$$v(\alpha \vee \beta) = 1 \cdot 0 + 1 + 0 = 1$$

Se dirá que un conjunto es satisfacible si existe al menos una asignación que haga verdaderas todas las cláusulas del conjunto. Será insatisfacible si no es satisfacible.
Para simplificar el algoritmo que usaremos para determinar la satisfacibilidad de un conjunto, pondremos primero las cláusulas en forma normal conjuntiva, o sea, como conjunción ($\wedge$) de disyunciones ($\vee$) para lo que usaremos estas leyes:

- $(\alpha \wedge \beta) \equiv (\neg\alpha \to \beta) \wedge (\neg\beta \to \alpha)$
- $\alpha \to \beta \equiv \neg\alpha \vee \beta$
- $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$
- $\neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\alpha \wedge \neg\beta$
- $\neg(\alpha \wedge \beta) \equiv \neg\alpha \vee \neg\beta$
- $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \equiv (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$
- $\alpha \models \beta \to \gamma \equiv \alpha, \beta \models \gamma$

Transformar una cláusula a su equivalente en forma normal conjuntiva se conseguirá aplicando las reglas anteriores.
Como estrategia general, primero eliminaremos las flechas y luego iremos introduciendo las negaciones, hasta obtener una conjunción de disyunciones.

Ejemplo Poner en forma normal conjuntiva: $(a \vee b) \to (c \vee d)$

$$(a \vee b) \to (c \vee d)$$

$$\equiv \neg(a \vee b) \vee (c \vee d)$$

$$\equiv (\neg a \wedge \neg b) \vee (c \vee d)$$

$$\equiv (\neg a \vee c \vee d) \wedge (\neg b \vee c \vee d)$$

Suele ser común que nos pidan que comprobemos si un conjunto $\Gamma \models \gamma$, esto es, comprobar que el conjunto $\Gamma \cup \{\neg\gamma\}$ es insatisfacible.

3.2. Algoritmo de Davis-Putnam

Se usa para ver si un conjunto es satisfacible o no aplicando cuatro reglas en orden:

I Eliminar tautologías, por ejemplo: $\alpha \vee \neg\alpha$. Sólo se hace la primera vez.

II Si hay cláusulas unit (formadas por un solo literal, como c, $\neg d$) se coge λ y se eliminan todas las cláusulas completas donde aparezca λ, si queda el conjunto vacío, el conjunto es satisfacible, si no, se coge λ^c, que es la negada de λ y elimina solo la aparición de esta en las claúsulas. Si queda el conjunto vacío el conjunto es insatisfacible.

III Se aplica si aparece un literal y no su negado (*literal puro*), se eliminan las claúsulas donde aparece dicho literal.

IV Se escoge un literal λ y su negada λ^c y se divide en dos conjuntos, en uno están las claúsulas en las que aparece λ y en otro donde aparece λ^c, en ambos omitiendo los literales elegidos. Las cláusulas en las que no aparezca ninguno, van en ambos conjuntos. El conjunto inicial es insatisfacible si y solo si todos sus subonjuntos lo son.

Ejemplo Estudiar si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \models \varphi$ y dar una aplicación que evidencie el resultado.

$$\gamma_1 \equiv (a \vee b) \rightarrow (c \vee d)$$

$$\gamma_2 \equiv (\neg a \wedge \neg d) \rightarrow (\neg c \wedge (c \vee e))$$

$$\gamma_3 \equiv a \rightarrow (\neg c \wedge \neg b \wedge (\neg d \vee b))$$

$$\varphi \equiv (d \rightarrow (b \vee a)) \rightarrow (d \wedge \neg(a \vee \neg b))$$

Comprobar que $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \models \varphi$ es equivalente a comprobar que $\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \neg\varphi\}$ es insatisfacible. Para ello, primero pondremos todas las fórmulas en forma normal conjuntiva, como sigue:

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &\equiv (a \lor b) \to (c \lor d) \\
&= \neg(a \lor b) \lor (c \lor d) \\
&= \neg(a \lor b) \lor (c \lor d) \\
&= (\neg a \land \neg b) \lor (c \lor d) \\
&= (\neg a \lor c \lor d) \land (\neg b \lor c \lor d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_2 &\equiv (\neg a \lor \neg d) \to (\neg c \land (c \lor e)) \\
&= \neg(\neg a \land \neg d) \lor (\neg c \land (c \lor e)) \\
&= \neg\neg a \lor \neg\neg d) \lor (\neg c \land (c \lor e)) \\
&= (a \lor c \lor d) \land (a \lor d \lor c \lor e))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &\equiv a \to (\neg c \land \neg b \land (\neg d \lor b)) \\
&= \neg a \lor (\neg c \land \neg b \land (\neg d \lor b)) \\
&= (\neg a \lor \neg c) \land (\neg a \lor \neg b) \land (\neg a \lor \neg d \lor b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\neg\varphi &\equiv \neg((d \to (b \lor a)) \to (d \land \neg(a \lor \neg b))) \\
&= \neg(\neg(d \to (b \lor a)) \lor (d \land \neg(a \lor \neg b))) \\
&= \neg(\neg(\neg d \lor b \lor a) \lor (d \land \neg(a \lor \neg b)) \\
&= \neg\neg(\neg d \lor b \lor a) \land \neg(d \land \neg(a \lor \neg b)) \\
&= (\neg d \lor b \lor a) \land (\neg d \lor \neg\neg(a \lor \neg b)) \\
&= (\neg d \lor b \lor a) \land (\neg d \lor a \lor \neg b)
\end{aligned}$$

Ahora que tenemos las formas normales conjuntivas de todas las cláusulas, podemos formar el conjunto:

$$\begin{aligned}
\{(\neg a \lor c \lor d) \land (\neg b \lor c \lor d) \\
(a \lor c \lor d) \land (a \lor d \lor c \lor e)) \\
(\neg a \lor \neg c) \land (\neg a \lor \neg b) \land (\neg a \lor \neg d \lor b) \\
(\neg d \lor b \lor a) \land (\neg d \lor a \lor \neg b)\}
\end{aligned}$$

Este conjunto es equivalente a este conjunto (separando por las $\land$):

$$\begin{aligned}
\Gamma = \{\neg a \lor c \lor d, \quad \neg b \lor c \lor d, \quad a \lor c \lor d \\
a \lor d \lor c \lor e, \quad \neg a \lor \neg c, \quad \neg a \lor \neg b, \quad \neg a \lor \neg d \lor b \\
\neg d \lor b \lor a, \quad \neg d \lor a \lor \neg b\}
\end{aligned}$$

Ahora estudiaremos la satisfacibilidad de Γ mediante el algoritmo de Davis-Putnam:
I)No hay tautologías, luego no aplicamos esta regla.
II)No hay cláusulas unit, luego no aplicamos esta regla tampoco.
III)Podemos aplicarla ya que aparece e y no aparece $\neg e$: $\lambda \equiv e$ y queda el conjunto:

$$\begin{array}{r}\{\neg a \vee c \vee d \quad \neg b \vee c \vee d \quad a \vee c \vee d \\ \neg a \vee \neg c \quad \neg a \vee \neg b \quad \neg a \vee \neg d \vee b \\ \neg d \vee b \vee a \quad \neg d \vee a \vee \neg b\}\end{array} \tag{1}$$

II y III)No pueden aplicarse. IV)Divido en dos subconjuntos. $\lambda \equiv \neg a \quad \lambda^c \equiv a$:

$$\Delta_1 = \{c \vee d \quad \neg b \vee c \vee d \quad \neg c \quad \neg b \quad b \vee \neg d\}$$

$$\Delta_2 = \{\neg b \vee c \vee d \quad d \vee \neg c \quad b \vee \neg d \quad \neg b \vee \neg d\}$$

Γ es insatisfacible si y solo si Δ_1 y Δ_2 lo son. Comencemos analizando Δ_1:
II)Se puede aplicar, ya que hay una cláusula unit ($\neg c$). $\lambda \equiv \neg c$. Elimino las cláusulas donde aparece.

$$\{c \vee d \quad \neg b \vee c \vee d \quad \neg b \quad b \vee \neg d\} \neq \emptyset$$

$$\lambda^c \equiv c$$

$$\{d \quad \neg b \vee d \quad \neg b \quad b \vee \neg d\}$$

II)$\lambda = d$

$$\{\neg b \quad b \vee \neg d\} \neq \emptyset$$

$$\lambda^c = \neg d$$

$$\{\neg b \quad b\}$$

II)$\lambda = \neg b$

$$\{b\} \neq \emptyset$$

$$\lambda^c = b$$

$$\{\square\}$$

Esto es la cláusula vacía, luego este conjunto es insatisfacible, por lo que debemos seguir hasta hacer todos los conjuntos o encontrar uno satisfacible. Analicemos ahora Δ_2: II y III) No se pueden aplicar. IV)Divido en dos subconjuntos. $\lambda = \neg b \quad \lambda^c = b$:

$$\Delta_3 = \{c \vee d \quad d \vee \neg c \quad \neg d\}$$

$$\Delta_4 = \{d \vee \neg c \quad \neg d \quad \neg d\}$$

Δ_2 es insatisfacible si y solo si Δ_3 y Δ_4 lo son. Comencemos analizando Δ_3:
II)$\lambda = \neg d$

$$\{d \vee c \quad d \vee \neg c\} \neq \emptyset$$

$$\lambda^c = d$$

$$\{c \quad \neg c\}$$

II)$\lambda = c$

$$\{\neg c\} \neq \emptyset$$

$$\lambda^c = \neg c$$

$$\{\square\}$$

Luego este conjunto es insatisfacible. Analicemos ahora Δ_4:
II)$\lambda = \neg d$

$$\{d \vee \neg c\} \neq \emptyset$$

$$\lambda^c = d$$

$$\{\neg c\}$$

II)$\lambda = \neg c$

$$\emptyset$$

Luego este conjunto es satisfacible, por lo tanto Δ_2 también lo es y Γ también, lo que implica que la afirmación que se nos pedía demostrar es falsa ya que el conjunto no es insatisfacible.

4. Álgebra de Boole

4.1. Álgebras de Boole

Un álgebra de Boole es cualquier álgebra que cumpla:

- $a + b = b + a$
- $a \cdot b = b \cdot a$
- $a + (b \cdot c) = (a + b) \cdot (a + c)$
- $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$
- $a \cdot \bar{a} = 0$
- $a + \bar{a} = 1$
- $a + 0 = a$
- $a \cdot 1 = a$

Donde las operaciones corresponden a las tablas:

x	$\bar{x}$
0	1
1	0

+	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

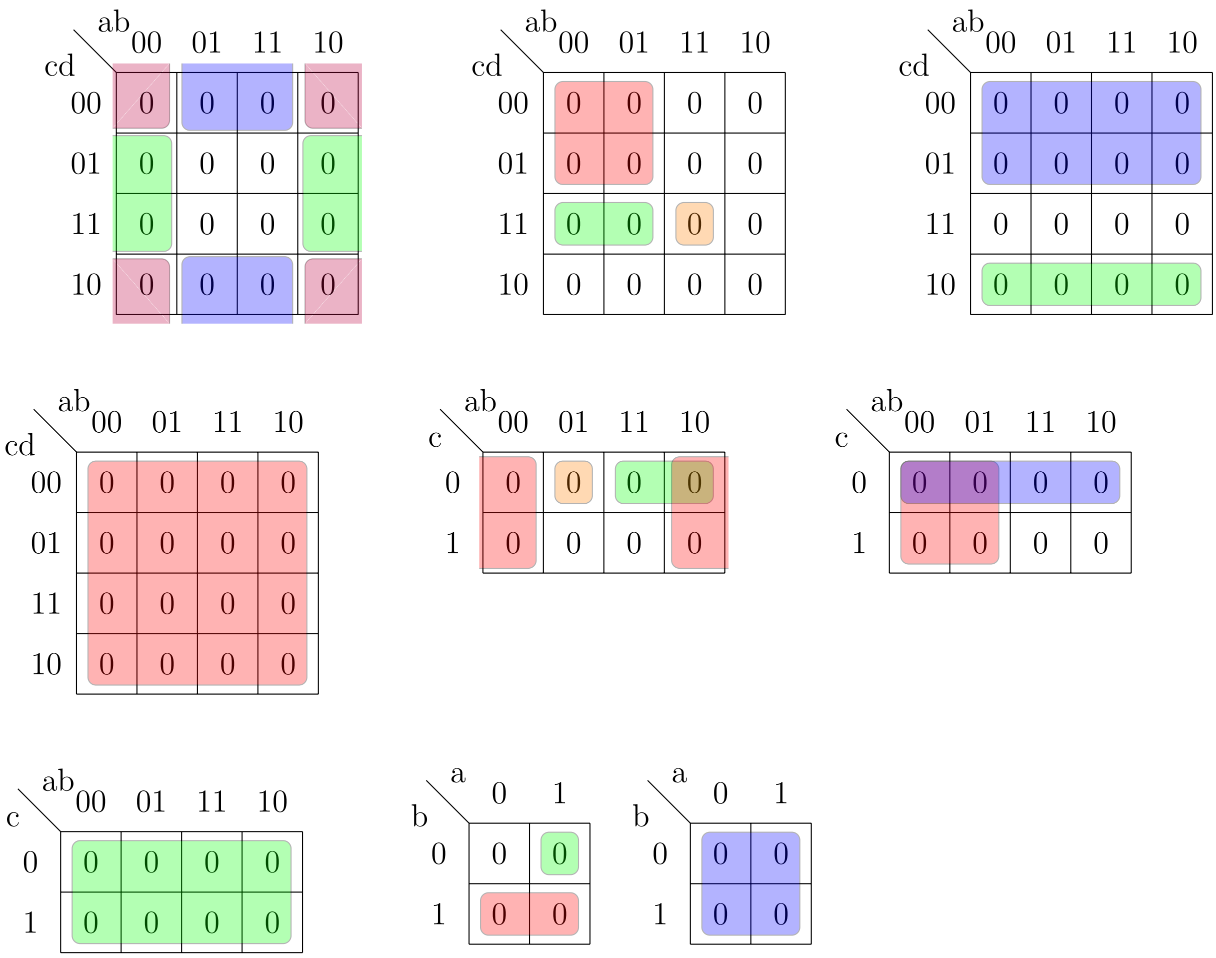
4.2. Mapas de Karnaugh

Dada una función por sus valores, otra expresión de la función o la tabla de verdad, tenemos distintos tipos de Mapas de Karnaugh, para dos, tres o cuatro variables por lo general. En una tabla como las que se van a mostrar se pondrán los valores donde la función valga 1 (minitérminos, es una suma de productos) o 0 (maxitérminos, es un producto de sumas) y se agrupan (cuanto mayor sea el grupo, mejor) en potencias de 2 (,2,4,8,16).
Para hacer los grupos es necesario tener en cuenta que los bordes se tocan, es decir, upedes hacer grupos de un extremo a otro (vertical y horizontalmente). También está permitido hacer un grupo de 4 con las esquinas.
Existen los términos no importa, que se representan como X y se usan como 1 o 0, dependiendo del método usado, solo si conviene para hacer un grupo mayor y así simplificar más.
Al hacer los grupos se miran qué números tienen en común (0010 y 0011 coinciden en 001) y esa será la expresión de ese grupo, al juntar todas se obtendrá la expresión simplificada que se buscaba.

- Si se trabaja en minitérminos los 1 son esa variable (digamos a) y los 0 serán su negada ($\bar{a}$)
- Si se trabaja en maxitérminos los 0 son esa variable (digamos a) y los 1 serán su negada ($\bar{a}$)

Ejemplo Los números 101 correspondientes a 3 variables, a,b,c en común en un grupo en minitérminos serían $a\bar{b}c$ y en maxitérminos serían $\bar{a} + b + \bar{c}$. Las distintas formas de hacer

grupos en Mapas de Karnaugh son:



Ejemplo Dar la función mínima como producto de sumas y como suma de productos de la función:

$$f(a,b,c,d) = \Sigma(0,1,2,4,5,6,8,9,15)$$

Esto significa que tenemos la función vale 1 en estas posiciones de la tabla de verdad. Primero construimos la tabla de verdad:

a	b	c	d	f(a,b,c,d)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

Ahora construimos los mapas de Karnaugh (se pueden poner solo los 1 en los minitérminos y solo los 0 en maxitérminos, pero en este caso yo pongo ambos, por comodidad) Comenzamos con el mapa de los minitérminos:

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	0	0	1	0
10	1	1	0	0

Vamos a ver qué factores salen de cada grupo:

- Rojo $\bar{a} \cdot \bar{c}$
- Naranja c
- Azul $\bar{a} \cdot \bar{d}$
- Verde $\bar{b} \cdot \bar{c}$

Luego la función simplificada por minitérminos es:

$$\bar{a} \cdot \bar{c} + a \cdot b \cdot c \cdot d + \bar{a} \cdot \bar{d} + \bar{b} \cdot \bar{c}$$

En el caso del mapas de los maxitérminos:

cd \ ab	00	01	11	10
00	1	1	0	1
01	1	1	0	1
11	0	0	1	0
10	1	1	0	0

Vamos a ver qué factores salen de cada grupo:

- Rojo $\bar{a}+\bar{b}+c$
- Naranja $\bar{a}+\bar{c}+d$
- Azul $\bar{a}+b+\bar{c}$
- Verde $a+\bar{b}+\bar{c}$

Luego la función simplificada por maxitérminos es:

$$(\bar{a}+\bar{b}+c)\cdot(\bar{a}+\bar{c}+d)\cdot(\bar{a}+b+\bar{c})\cdot(a+\bar{b}+\bar{c})$$

Ejemplo Dar la función mínima como producto de sumas y como suma de productos de la función que vale 1 en 1 y 6 y con términos no importa en 3 y 4.
Primeramente construimos la tabla de verdad con los datos de la función que nos dan:

a	b	c	f(a,b,c)
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	X
1	0	0	X
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

Ahora construimos los mapas de Karnaugh (se pueden poner solo los 1 en los minitérminos y solo los 0 en maxitérminos, pero en este caso yo pongo ambos, por comodidad) poniendo los términos no importa y simplifiquemos por minitérminos.

c \ ab	00	01	11	10
0	0	0	1	X
1	1	X	0	0

En este caso, poner los términos no importa como 1 nos ayuda a hacer grupos mayores, por los que los tomaremos como si fueran 1, si no, bastaría tomarlos como 0.

- Verde $a\bar{c}$
- Rojo $\bar{a}c$

Luego la función simplificada por miitérminos es: $a\bar{c} + \bar{a}c$

4.3. Algoritmo de Quentin-McCluskey

Este algoritmo es otro método para simplificar funciones (como los mapas de Karnaugh). Consiste en construir una tabla en las que se clasificarán los números en los que la función valga 1 con las siguientes columnas:

- Número de 1 del número. El número 2 (0010) tiene un 1.
- Números en los que la función valga 1 (en la fila del número de 1 que les corresponda).
- Las siguientes columnas se trata en ir agrupando los elementos anteriores, comparando cada número/conjunto de números con los que son mayores que él de la fila siguiente. y viendo si se diferencian en un sólo número, entonces se anotan dejando el espacio de donde se diferencian. Se irán marcando los elementos usados. Por ejemplo, el 0 (0000) y el 2 (0010) se distinguen en un sólo número, (00_0)

Cuando ya no se pueden agrupar más,se hará un esquema donde se hará una línea vertical de cada número donde la función vale 1 y una línea horizontal para cada elemento/conjunto sin marcar. Se harán círculos en las intersecciones si el número de la barra vertical pertenece al conjuto horizontal. Se pondrán los conjuntos que tengan un círculo en líneas donde ninguno más lo tengan (son imprescindibles) y se expresará la función como minitérminos.

Ejemplo Dé la expresión mínima de la función:

$$f(a, b, c, d) = \Sigma(0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13)$$

Aquí no es necesario construir la tabla de verdad, pero es recomendable:

a	b	c	d	f(a,b,c,d)
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	1
1	0	0	1	1
1	0	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

0	0	0,2 00_0 0,8 _000	0,2,8,10 _0_0 ~~0,8,2,10 _0_0~~
1	2 8	2,3 001_ 2,6 0_10 2,10 _010 8,9 100_ 8,10 10_	2,3,6,7 0_1_ ~~2,6,3,7 0_1_~~
2	3 6 9 10	3,7 0_11 6,7 011_ 9,13 1_01	
3	7 13		
4			

	0	2	3	6	7	8	9	10	13
0,2,8,10	O	O	-	-	-	O	-	O	-
2,3,6,7	-	O	O	O	O	-	-	-	-
8,9	-	-	-	-	-	O	O	-	O
9,13	-	-	-	-	-	-	O	-	O
	O	O	O	O	O	O	O	O	O

Como se puede ver, todos los grupos son esenciales salvo el 8,9 ya que ningún círculo de esta línea es único en sus verticales. Por tanto, cogiendo los otros grupos, tenemos que la función es:

$$f(a,b,c,d) = \bar{b}\bar{d} + \bar{a}c + a\bar{c}d$$

5. Lógica de primer orden

5.1. Introducción

5.2. Forma prenexa

5.3. Resolución por reducción