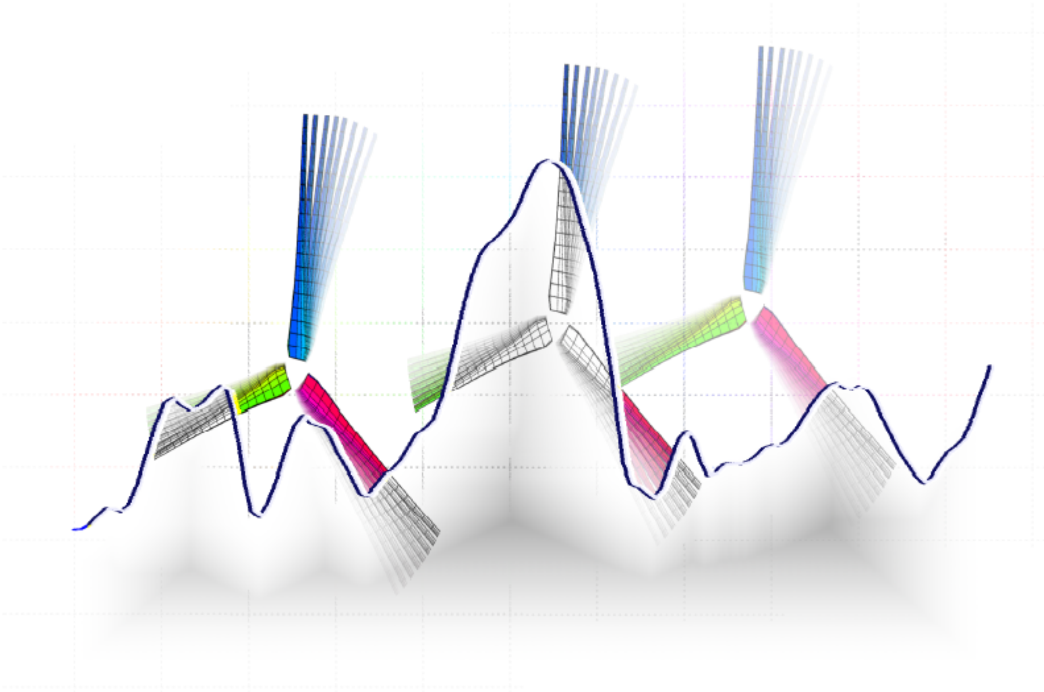
Desviación Estándar del Viento: Distribución Log-Normal



Autor: Alberto González Almuiña

1. Desviación estándar: Distribución Log-normal

La desviación estándar (σ) es uno de los parámetros más importantes e influyentes a la hora de caracterizar el viento en un emplazamiento, de hecho, es fundamental a la hora de calcular la intensidad de turbulencia, los modelos teóricos propuestos por la norma IEC 61400-1 Ed.3 o la forma media de las ráfagas teórica, por lo que estudiar bien su comportamiento es importante. Algunos autores [2] proponen la distribución log-normal para modelizar este parámetro. La función de densidad de probabilidad de esta distribución es la siguiente:

$$f\left(\sigma|\mu,s\right) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot\pi}\cdot\sigma\cdot s}\cdot exp\left[-\frac{\left(ln(\sigma)-\mu\right)^2}{2\cdot s^2}\right] \tag{1}$$

con $\sigma > 0$, s>0 la desviación típica del ln(σ) y $\mu \in (-\infty,+\infty)$ la media del ln(σ). Para estimar los dos parámetros de la distribución se utilizan dos métodos, el de máxima verosimilitud y el de los momentos.

Parámetros log-normal mediante MLE

Se comienza por el primero de ellos, a partir de su función de máxima verosimilitud:

$$L(\mu,s^2|\sigma) = \prod_{i=1}^{n}\left[f\left(\sigma_i|\mu,s^2\right)\right] = \left(2\cdot\pi\cdot s^2\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot\prod_{i=1}^{n}\sigma_i^{-1}\cdot exp\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{-\left(ln(\sigma_i)-\mu\right)^2}{2\cdot s^2}\right] \tag{2}$$

Tomando el logaritmo de L (por simplificación de cálculos) se deriva respecto a cada una de las variables para maximizar la función:

$$\frac{\partial L}{\partial\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} ln(\sigma_i)}{s^2} - \frac{2\cdot n\cdot\mu}{2\cdot s^2} = 0 \implies \mu = \frac{\sum_{i=1}^{n} ln(\sigma_i)}{n} \tag{3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s^2} = -\frac{n}{2\cdot s^2} - \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[ln(\sigma_i)-\mu\right]^2}{2\cdot(s^2)^2} = 0 \implies s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left[ln(\sigma_i)-\mu\right]^2}{n} \tag{4}$$

A partir de las ecuaciones anteriores se pueden estimar los parámetros de la distribución y ver cómo se comporta la desviación estándar de nuestro emplazamiento. Pero antes, se introduce otro método de obtención de los parámetros, el de los momentos.

Parámetros log-normal mediante Momentos

Para obtener la estimación mediante este método se necesitan conocer las esperanzas E(σ) y E(σ^2) suponiendo que σ sigue una distribución log-normal. A partir de la ecuación general [1] se pueden obtener con una simple sustitución:

$$E(\sigma) = exp\left(\mu + s^2/2\right) \tag{5}$$

$$E(\sigma^2) = exp\left(2 \cdot \mu + 2 \cdot s^2\right) \tag{6}$$

Sabiendo que cada una de esas esperanzas equivale al primer y el segundo momento, simplemente se iguala y despeja uno de los parámetros en función del otro (en este caso μ en función de s^2):

$$\left\{ \begin{array}{l} m_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i}{n} \\ m_2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n} \end{array} \right\} \tag{7}$$

$$exp\left(\mu + s^2/2\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i}{n} \implies \mu = ln\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i\right) - ln(n) - \frac{s^2}{2} \tag{8}$$

$$exp\left(2 \cdot \mu + 2 \cdot s^2\right) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2}{n} \implies \mu = \frac{ln\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)}{2} - \frac{ln(n)}{2} - s^2 \tag{9}$$

Igualando las ecuaciones 8 y 9, se despeja s^2 y posteriormente se introduce en una de las ecuaciones para obtener la estimación de ambos parámetros:

$$s^2 = ln\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma^2\right) - 2 \cdot ln\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma\right) + ln(n) \tag{10}$$

$$\mu = -\frac{ln\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2\right)}{2} + 2 \cdot ln\left(\sum_{i=1}^{n} \sigma\right) - \frac{3}{2} \cdot ln(n) \tag{11}$$

A partir de estas ecuaciones, ya se pueden estimar los parámetros. Para ello se ha programado una función en el software estadístico R que permite automatizar esta labor.

Función LognormalParam

La función LognormalParam permite estimar los parámetros de la distribución log-normal por cualquiera de los dos métodos explicados anteriormente. Los argumentos de la función son los siguientes:

- SD → Vector de desviación estándar.
- Vel → Vector de velocidad asociado a SD.
- sel_bin_vel → Número que indica el bin de velocidad para el que se quieren obtener los resultados. Si no se indica, se calcula teniendo en cuenta todos los bines (distribución general).
- method → Puede ser "Mom" para la estimación por momentos ó "MLE" para máxima verosimilitud.

La salida de la función proporciona los valores de los parámetros μ y s^2, así como ciertos estadísticos, como R^2, RMSE y χ^2 que permiten valorar la bondad del ajuste realizado. Finalmente, se obtiene una gráfica con la distribución medida (puntos) y la distribución teórica a partir de los parámetros calculados (línea).

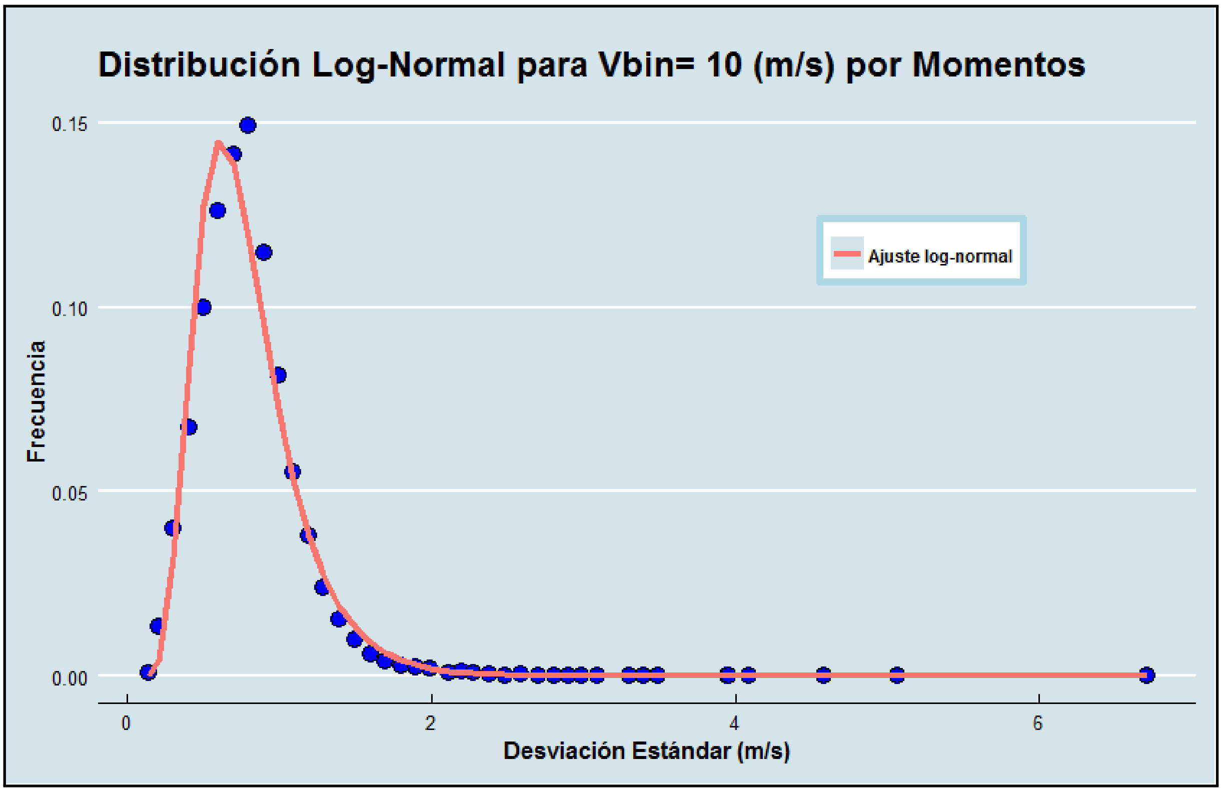


Figura 1: Salida de la función LognormalParam

Referencias

[1] Ginos, Brenda. "Parameter Estimation for the Lognormal Distribution", *BYU Scholars Archive*, 2009.

[2] Hopfinger, E.J., Castaing, B. y Gagne, y. *Physica D*, Vol 46 (177), 1990.