

## 1 Ecuación del Plano y una Recta

Forma parametrica ecuación de una recta

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{d},$$

Forma slope y punto

$$y = mx + b$$

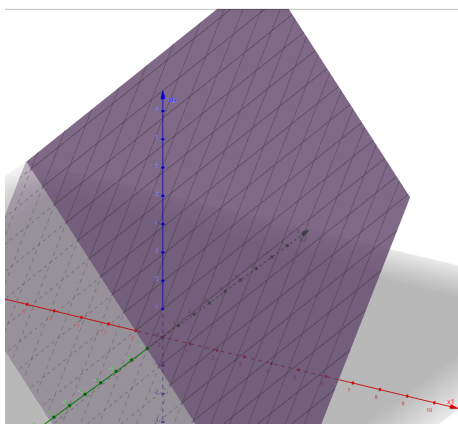
Ecuacion vectorial de un plano

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

## 2 Descripción de superficies

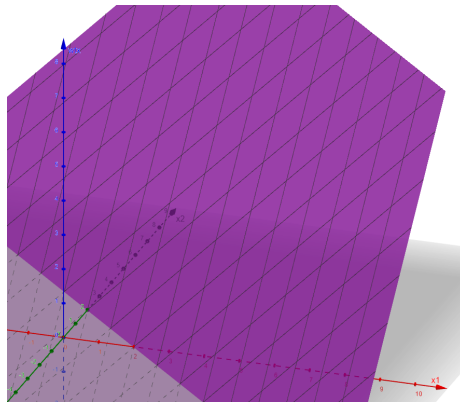
a)  $1 + x_1 + x_2$

- Cruce con ejes  $(-1, 0, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $1 + x_1 + x_2 = 0$ .
- La pendiente de la recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $-1$ .
- Región  $x_1x_2$  donde  $w^T x > 0$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 + x_1 + x_2 > 0$  representan la región positiva del plano  $w^T x$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 + x_1 + x_2 < 0$  representan la región negativa del plano  $w^T x$ .



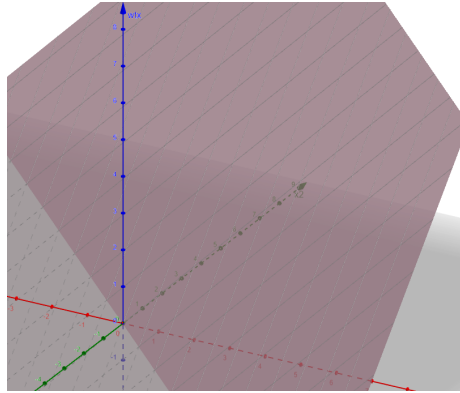
b)  $-2 + x_1 + x_2$

- Cruce con ejes  $(2, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 0, -2)$ , por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $-2 + x_1 + x_2 = 0$ .
- La pendiente de la recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $-1$ .
- Región  $x_1x_2$  donde  $w^T x > 0$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $-2 + x_1 + x_2 > 0$  representan la región positiva del plano  $w^T x$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $-2 + x_1 + x_2 < 0$  representan la región negativa del plano  $w^T x$ .



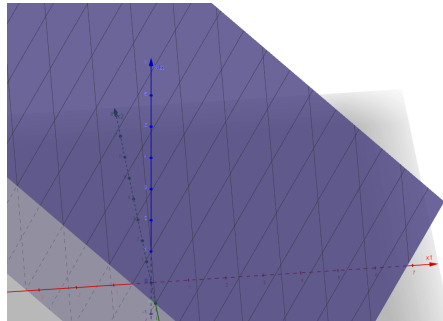
c)  $x_1 + x_2$

- Cruza con el origen  $(0, 0, 0)$ .
- Recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $x_1 + x_2 = 0$ .
- La pendiente de la recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $-1$ .
- Región  $x_1x_2$  donde  $w^T x > 0$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $x_1 + x_2 > 0$  representan la región positiva del plano  $w^T x$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $x_1 + x_2 < 0$  representan la región negativa del plano  $w^T x$ .



d)  $1 + 2x_1 + x_2$

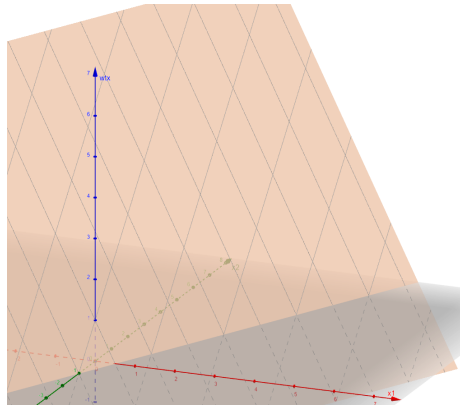
- Cruce con ejes  $(-1/2, 0, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $1 + 2x_1 + x_2 = 0$ .
- La pendiente de la recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $-1/2$ .
- Región  $x_1x_2$  donde  $w^T x > 0$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 + 2x_1 + x_2 > 0$  representan la región positiva del plano  $w^T x$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 + 2x_1 + x_2 < 0$  representan la región negativa del plano  $w^T x$ .



e)  $1 - 2x_1 + x_2$

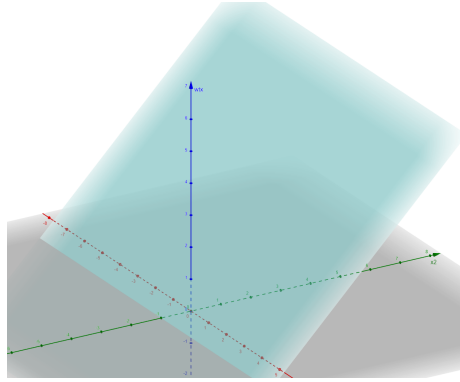
- Cruce con ejes  $(1/2, 0, 0)$ ,  $(0, -1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $1 - 2x_1 + x_2 = 0$ .

- La pendiente de la recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ : 2.
- Región  $x_1x_2$  donde  $w^T x > 0$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 - 2x_1 + x_2 > 0$  representan la región positiva del plano  $w^T x$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 - 2x_1 + x_2 < 0$  representan la región negativa del plano  $w^T x$ .



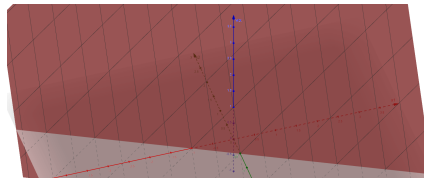
f)  $1 + x_2$

- Cruza con ejes  $(0, -1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , por lo que **no cruza con el eje  $x_1$** .
- Recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $1 + x_2 = 0$ .
- La pendiente de la recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ : 0.
- Región  $x_1x_2$  donde  $w^T x > 0$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 + x_2 > 0$  representan la región positiva del plano  $w^T x$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 + x_2 < 0$  representan la región negativa del plano  $w^T x$ .



g)  $1 + x_1 + 2x_2$

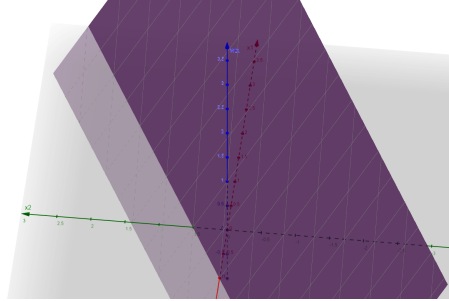
- Cruce con ejes  $(-1, 0, 0)$ ,  $(0, -1/2, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $1 + x_1 + 2x_2 = 0$ .
- La pendiente de la recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $-1/2$ .
- Región  $x_1x_2$  donde  $w^T x > 0$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 + x_1 + 2x_2 > 0$  representan la región positiva del plano  $w^T x$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 + x_1 + 2x_2 < 0$  representan la región negativa del plano  $w^T x$ .



h)  $1 + x_1 - 2x_2$

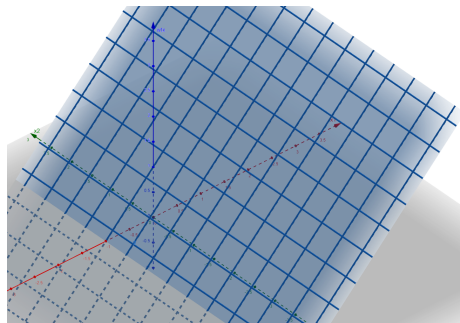
- Cruce con ejes  $(-1, 0, 0)$ ,  $(0, 1/2, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ , por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $1 + x_1 - 2x_2 = 0$ .
- La pendiente de la recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ : 2.
- Región  $x_1x_2$  donde  $w^T x > 0$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 + x_1 - 2x_2 > 0$  representan la región positiva del plano  $w^T x$ .

- Todos los puntos que satisfacen  $1 + x_1 - 2x_2 < 0$  representan la región negativa del plano  $w^T x$ .



i)  $1 + x_1$

- Cruza con ejes  $(-1, 0, 0)$   $(0, 0, 1)$ , por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ :  $1 + x_1 = 0$ .
- La pendiente de la recta de intersección con el plano  $x_1x_2$ : 0.
- Región  $x_1x_2$  donde  $w^T x > 0$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 + x_1 > 0$  representan la región positiva del plano  $w^T x$ .
- Todos los puntos que satisfacen  $1 + x_1 < 0$  representan la región negativa del plano  $w^T x$ .



### 3 Verificando la ecuación del plano

Dado que las expresiones representan ecuaciones de planos en la forma:

$$z = f(x, y) \quad (1)$$

para encontrar el vector normal a cada plano, seguimos estos pasos:

1. Elegimos tres puntos en el plano.
2. Formamos dos vectores a partir de estos puntos.
3. Calculamos el producto cruzado de estos vectores para obtener el vector normal.

### 3.1 Para $z = 1 + x + y$

Puntos elegidos:

$$P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (1, 0, 2), P_3 = (0, 1, 2)$$

Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, 1)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1)$$

Ahora, utilizamos la definición de la ecuación del plano:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = 0$$

Donde  $\mathbf{n} = (-1, -1, 1)$  y  $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ . Como

$$\mathbf{r} - \mathbf{p} = (x, y, z - 1),$$

el producto punto se escribe:

$$-1 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot (z - 1) = 0.$$

Simplificando:

$$-x - y + z - 1 = 0,$$

o equivalentemente:

$$x + y - z = -1.$$

### 3.2 Para $z = -2 + x + y$

Puntos elegidos:

$$P_1 = (0, 0, -2), P_2 = (1, 0, -1), P_3 = (0, 1, -1)$$

Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, 1)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1)$$

Utilizando  $\mathbf{p} = (0, 0, -2)$ , tenemos:

$$-1 \cdot (x - 0) - 1 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - (-2)) = 0,$$

lo que se traduce en:

$$-x - y + z + 2 = 0,$$

y al reordenar:

$$z = x + y - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x + y - z = 2.$$

### 3.3 Para $z = x + y$

Puntos elegidos:

$$P_1 = (0, 0, 0), P_2 = (1, 0, 1), P_3 = (0, 1, 1)$$

Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, 1)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1, -1, 1)$$

Con  $\mathbf{p} = (0, 0, 0)$ , la ecuación del plano es:

$$-1 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0,$$

o

$$z = x + y.$$

### 3.4 Para $z = 1 + 2x + y$

Puntos elegidos:

$$P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (1, 0, 3), P_3 = (0, 1, 2)$$

Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 2), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, 1)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2, -1, 1)$$

Utilizando  $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ , se tiene:

$$-2 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot (z - 1) = 0,$$

es decir,

$$-2x - y + z - 1 = 0,$$

lo que se reorganiza en:

$$z = 1 + 2x + y.$$



### 3.5 Para $z = 1 - 2x + y$

Puntos elegidos:

$$P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (1, 0, -1), P_3 = (0, 1, 2)$$

Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, -2), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, 1)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2, -1, 1)$$

Con  $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ , la ecuación del plano se expresa como:

$$2 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot (z - 1) = 0,$$

es decir,

$$2x - y + z - 1 = 0,$$

lo que equivale a:

$$z = 1 - 2x + y.$$

### 3.6 Para $z = 1 + y$

Puntos elegidos:

$$P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (0, 1, 2), P_3 = (1, 0, 1)$$

Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (1, 0, 0)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 1, -1)$$

Con  $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ , se obtiene:

$$0 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 1) = 0,$$

es decir,

$$y - z + 1 = 0,$$

y al reorganizar:

$$z = 1 + y.$$

### 3.7 Para $z = 1 + x + 2y$

Puntos elegidos:

$$P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (1, 0, 2), P_3 = (0, 1, 3)$$

Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, 2)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1, -2, 1)$$

Utilizando  $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ , se tiene:

$$-1 \cdot x - 2 \cdot y + 1 \cdot (z - 1) = 0,$$

lo que se simplifica en:

$$-x - 2y + z - 1 = 0,$$

y al reordenar:

$$z = 1 + x + 2y.$$

### 3.8 Para $z = 1 + x - 2y$

Puntos elegidos:

$$P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (1, 0, 2), P_3 = (0, 1, -1)$$

Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, -2)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1, 2, 1)$$

Con  $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ , la ecuación del plano es:

$$-1 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 1) = 0,$$

lo que implica:

$$-x + 2y + z - 1 = 0,$$

y al reorganizar:

$$z = 1 + x - 2y.$$

### 3.9 Para $z = 1 + x$

Puntos elegidos:

$$P_1 = (0, 0, 1), P_2 = (1, 0, 2), P_3 = (0, 1, 1)$$

Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, 0)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1, 0, 1)$$

Con  $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$ , se establece:

$$-1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 1) = 0,$$

o sea,

$$-x + z - 1 = 0,$$

lo que conduce a:

$$z = 1 + x.$$