Alberto Arath Figueroa Salomon
Tarea

1 Ecuación del Plano y una Recta

Forma parametrica ecuación de una recta

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \lambda\,\mathbf{d},$$

Forma slope y punto

$$y = mx + b$$

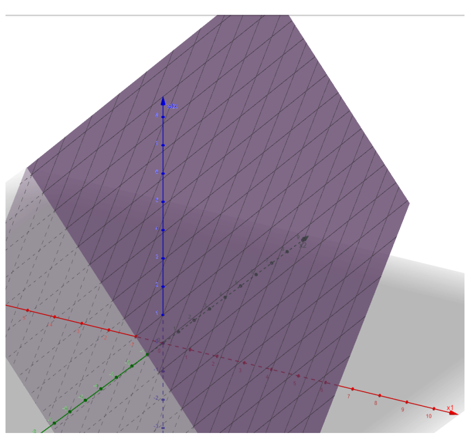
Ecuacion vectorial de un plano

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

2 Descripción de superficies

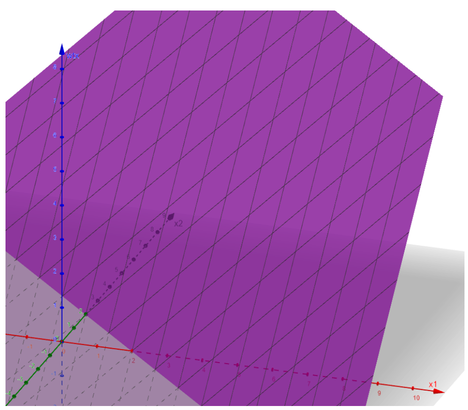
a) $1 + x_1 + x_2$

- Cruce con ejes $(-1, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano x_1x_2: $1 + x_1 + x_2 = 0$.
- La pendiente de la recta de intersección con el plano x_1x_2: -1.
- Región x_1x_2 donde $w^Tx > 0$.
- Todos los puntos que satisfacen $1 + x_1 + x_2 > 0$ representan la región positiva del plano w^Tx.
- Todos los puntos que satisfacen $1 + x_1 + x_2 < 0$ representan la región negativa del plano w^Tx.



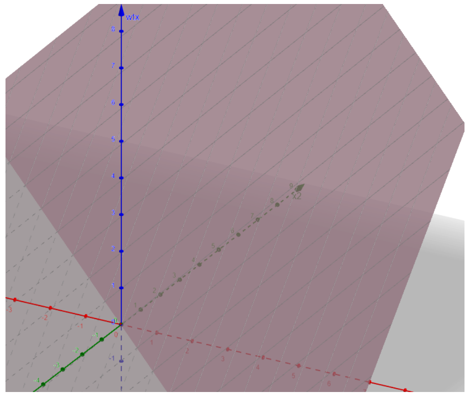
b) $-2 + x_1 + x_2$

- Cruce con ejes $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$, $(0, 0, -2)$, por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano x_1x_2: $-2 + x_1 + x_2 = 0$.
- La pendiente de la recta de intersección con el plano x_1x_2: -1.
- Región x_1x_2 donde $w^T x > 0$.
- Todos los puntos que satisfacen $-2 + x_1 + x_2 > 0$ representan la región positiva del plano $w^T x$.
- Todos los puntos que satisfacen $-2 + x_1 + x_2 < 0$ representan la región negativa del plano $w^T x$.



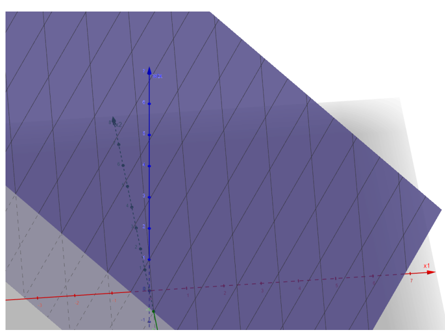
c) $x_1 + x_2$

- Cruza con el origen $(0, 0, 0)$.
- Recta de intersección con el plano x_1x_2: $x_1 + x_2 = 0$.
- La pendiente de la recta de intersección con el plano x_1x_2: -1.
- Región x_1x_2 donde $w^T x > 0$.
- Todos los puntos que satisfacen $x_1 + x_2 > 0$ representan la región positiva del plano $w^T x$.
- Todos los puntos que satisfacen $x_1 + x_2 < 0$ representan la región negativa del plano $w^T x$.



d) $1 + 2x_1 + x_2$

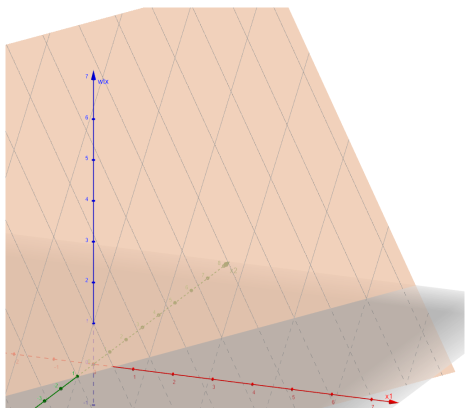
- Cruce con ejes $(-1/2, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano x_1x_2: $1 + 2x_1 + x_2 = 0$.
- La pendiente de la recta de intersección con el plano x_1x_2: $-1/2$.
- Región x_1x_2 donde $w^Tx > 0$.
- Todos los puntos que satisfacen $1 + 2x_1 + x_2 > 0$ representan la región positiva del plano w^Tx.
- Todos los puntos que satisfacen $1 + 2x_1 + x_2 < 0$ representan la región negativa del plano w^Tx.



e) $1 - 2x_1 + x_2$

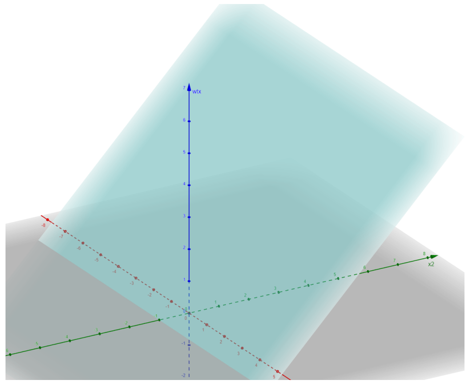
- Cruce con ejes $(1/2, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano x_1x_2: $1 - 2x_1 + x_2 = 0$.

- La pendiente de la recta de intersección con el plano x_1x_2: 2.
- Región x_1x_2 donde $w^Tx > 0$.
- Todos los puntos que satisfacen $1 - 2x_1 + x_2 > 0$ representan la región positiva del plano w^Tx.
- Todos los puntos que satisfacen $1 - 2x_1 + x_2 < 0$ representan la región negativa del plano w^Tx.



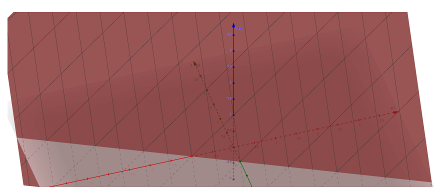
f) $1 + x_2$

- Cruza con ejes $(0, -1, 0)$, $(0, 0, 1)$, por lo que **no cruza con el eje** x_1.
- Recta de intersección con el plano x_1x_2: $1 + x_2 = 0$.
- La pendiente de la recta de intersección con el plano x_1x_2: 0.
- Región x_1x_2 donde $w^Tx > 0$.
- Todos los puntos que satisfacen $1 + x_2 > 0$ representan la región positiva del plano w^Tx.
- Todos los puntos que satisfacen $1 + x_2 < 0$ representan la región negativa del plano w^Tx.



g) $1 + x_1 + 2x_2$

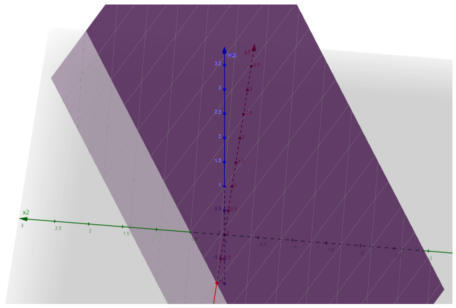
- Cruce con ejes $(-1, 0, 0)$, $(0, -1/2, 0)$, $(0, 0, 1)$, por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano x_1x_2: $1 + x_1 + 2x_2 = 0$.
- La pendiente de la recta de intersección con el plano x_1x_2: $-1/2$.
- Región x_1x_2 donde $w^Tx > 0$.
- Todos los puntos que satisfacen $1 + x_1 + 2x_2 > 0$ representan la región positiva del plano w^Tx.
- Todos los puntos que satisfacen $1 + x_1 + 2x_2 < 0$ representan la región negativa del plano w^Tx.



h) $1 + x_1 - 2x_2$

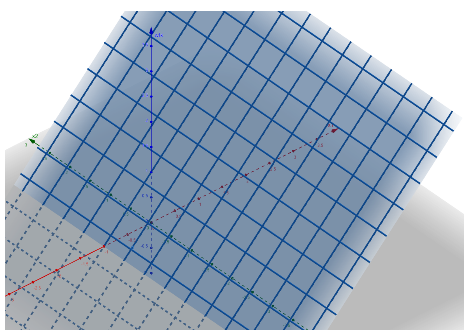
- Cruce con ejes $(-1, 0, 0)$, $(0, 1/2, 0)$, $(0, 0, 1)$, por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano x_1x_2: $1 + x_1 - 2x_2 = 0$.
- La pendiente de la recta de intersección con el plano x_1x_2: 2.
- Región x_1x_2 donde $w^Tx > 0$.
- Todos los puntos que satisfacen $1 + x_1 - 2x_2 > 0$ representan la región positiva del plano w^Tx.

- Todos los puntos que satisfacen $1 + x_1 - 2x_2 < 0$ representan la región negativa del plano $w^T x$.



i) $1 + x_1$

- Cruza con ejes $(-1, 0, 0)$ $(0, 0, 1)$, por lo que no cruza con el origen.
- Recta de intersección con el plano $x_1 x_2$: $1 + x_1 = 0$.
- La pendiente de la recta de intersección con el plano $x_1 x_2$: 0.
- Región $x_1 x_2$ donde $w^T x > 0$.
- Todos los puntos que satisfacen $1 + x_1 > 0$ representan la región positiva del plano $w^T x$.
- Todos los puntos que satisfacen $1 + x_1 < 0$ representan la región negativa del plano $w^T x$.



3 Verificando la ecuación del plano

Dado que las expresiones representan ecuaciones de planos en la forma:

$$z = f(x, y) \tag{1}$$

para encontrar el vector normal a cada plano, seguimos estos pasos:

1. Elegimos tres puntos en el plano.
2. Formamos dos vectores a partir de estos puntos.
3. Calculamos el producto cruzado de estos vectores para obtener el vector normal.

3.1 Para $z = 1 + x + y$

Puntos elegidos:
$P_1 = (0, 0, 1)$, $P_2 = (1, 0, 2)$, $P_3 = (0, 1, 2)$
Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, 1)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,\ -1,\ 1)$$

Ahora, utilizamos la definición de la ecuación del plano:

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{p}) = 0$$

Donde $\mathbf{n} = (-1,\ -1,\ 1)$ y $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$. Como

$$\mathbf{r} - \mathbf{p} = (x,\ y,\ z - 1),$$

el producto punto se escribe:

$$-1 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot (z - 1) = 0.$$

Simplificando:

$$-x - y + z - 1 = 0,$$

o equivalentemente:

$$x + y - z = -1.$$

3.2 Para $z = -2 + x + y$

Puntos elegidos:
$P_1 = (0, 0, -2)$, $P_2 = (1, 0, -1)$, $P_3 = (0, 1, -1)$
Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, 1)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,\ -1,\ 1)$$

Utilizando $\mathbf{p} = (0,0,-2)$, tenemos:

$$-1 \cdot (x-0) - 1 \cdot (y-0) + 1 \cdot \big(z - (-2)\big) = 0,$$

lo que se traduce en:

$$-x - y + z + 2 = 0,$$

y al reordenar:

$$z = x + y - 2 \quad \Longleftrightarrow \quad x + y - z = 2.$$

3.3 Para $z = x + y$

Puntos elegidos:
$P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (1,0,1)$, $P_3 = (0,1,1)$
Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0,1,1)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-1,\, -1,\, 1)$$

Con $\mathbf{p} = (0,0,0)$, la ecuación del plano es:

$$-1 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot z = 0,$$

o

$$z = x + y.$$

3.4 Para $z = 1 + 2x + y$

Puntos elegidos:
$P_1 = (0,0,1)$, $P_2 = (1,0,3)$, $P_3 = (0,1,2)$
Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,2), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0,1,1)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,\, -1,\, 1)$$

Utilizando $\mathbf{p} = (0,0,1)$, se tiene:

$$-2 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot (z-1) = 0,$$

es decir,

$$-2x - y + z - 1 = 0,$$

lo que se reorganiza en:

$$z = 1 + 2x + y.$$

3.5 Para $z = 1 - 2x + y$

Puntos elegidos:
$P_1 = (0, 0, 1)$, $P_2 = (1, 0, -1)$, $P_3 = (0, 1, 2)$
Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, -2), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, 1)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (2,\ -1,\ 1)$$

Con $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$, la ecuación del plano se expresa como:

$$2 \cdot x - 1 \cdot y + 1 \cdot (z - 1) = 0,$$

es decir,

$$2x - y + z - 1 = 0,$$

lo que equivale a:

$$z = 1 - 2x + y.$$

3.6 Para $z = 1 + y$

Puntos elegidos:
$P_1 = (0, 0, 1)$, $P_2 = (0, 1, 2)$, $P_3 = (1, 0, 1)$
Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (0, 1, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (1, 0, 0)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0,\ 1,\ -1)$$

Con $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$, se obtiene:

$$0 \cdot (x - 0) + 1 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 1) = 0,$$

es decir,

$$y - z + 1 = 0,$$

y al reorganizar:

$$z = 1 + y.$$

3.7 Para $z = 1 + x + 2y$

Puntos elegidos:
$P_1 = (0,0,1)$, $P_2 = (1,0,2)$, $P_3 = (0,1,3)$
Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0,1,2)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (-1,\, -2,\, 1)$$

Utilizando $\mathbf{p} = (0,0,1)$, se tiene:

$$-1 \cdot x - 2 \cdot y + 1 \cdot (z - 1) = 0,$$

lo que se simplifica en:

$$-x - 2y + z - 1 = 0,$$

y al reordenar:

$$z = 1 + x + 2y.$$

3.8 Para $z = 1 + x - 2y$

Puntos elegidos:
$P_1 = (0,0,1)$, $P_2 = (1,0,2)$, $P_3 = (0,1,-1)$
Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1,0,1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0,1,-2)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-1,\, 2,\, 1)$$

Con $\mathbf{p} = (0,0,1)$, la ecuación del plano es:

$$-1 \cdot (x - 0) + 2 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 1) = 0,$$

lo que implica:

$$-x + 2y + z - 1 = 0,$$

y al reorganizar:

$$z = 1 + x - 2y.$$

3.9 Para $z = 1 + x$

Puntos elegidos:
$P_1 = (0, 0, 1)$, $P_2 = (1, 0, 2)$, $P_3 = (0, 1, 1)$
Vectores:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (1, 0, 1), \quad \overrightarrow{P_1P_3} = (0, 1, 0)$$

Cálculo del producto cruzado:

$$\mathbf{N} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1,\ 0,\ 1)$$

Con $\mathbf{p} = (0, 0, 1)$, se establece:

$$-1 \cdot (x - 0) + 0 \cdot (y - 0) + 1 \cdot (z - 1) = 0,$$

o sea,

$$-x + z - 1 = 0,$$

lo que conduce a:

$$z = 1 + x.$$