Esquema centrado, no conservativo y Q-esquema de van Leer aplicado en la ecuación de Burgers

Ampliación de Volúmenes Finitos
Máster en Matemática Industrial

Autores: Javier Rico Cabrera   Alberto Cuadra Lara

16 de mayo de 2018

Universidad de Santiago de Compostela   Universidad da Coruña   Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid   Universidad Politécnica de Madrid

MÁSTER EN MATEMÁTICA INDUSTRIAL

Índice

Ecuación de Burgers:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^2}{2}\right) = 0 \qquad (1)$$

donde w es la variable conservativa. El término $\frac{w^2}{2}$ representa la función de flujo, denotada como $f(w)$.

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

Ecuación de Burgers:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{w^2}{2}\right) = 0 \tag{1}$$

donde w es la variable conservativa. El término $\frac{w^2}{2}$ representa la función de flujo, denotada como $f(w)$.

Condiciones iniciales:

$$w_0(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \ x < 0, \\ 1 - x & \text{si } \ 0 \leq x < 1, \\ 0 & \text{si } \ x > 1. \end{cases} \tag{2}$$

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

1. **Problema de Cauchy**.

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

1. **Problema de Cauchy**.
2. Cálculo del tiempo crítico t_b.

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

1. **Problema de Cauchy**.
2. Cálculo del tiempo crítico t_b.
3. Solución exacta para $t < t_b$

1. **Problema de Cauchy**.
2. Cálculo del tiempo crítico t_b.
3. Solución exacta para $t < t_b \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Método de las} \\ \text{características.} \end{array} \right.$

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

1. **Problema de Cauchy**.
2. Cálculo del tiempo crítico t_b.
3. Solución exacta para $t < t_b \rightarrow \left\{ \text{Método de las características.} \right.$
4. Solución exacta:

$$w(x,t) = \begin{cases} w_l & x \leq t \leq t_b, \\ \dfrac{w_l - x}{t_b - t} & t \leq x \leq t_b, \\ w_r & x \geq x_b, t \leq t_b. \end{cases} \tag{3}$$

5. $t = t_b \rightarrow$ origen discontinuidad $\rightarrow$ **Problema de Riemann**.

1. Condiciones iniciales asociadas al problema de Riemann:

$$w_0(x) = \begin{cases} w_l & \text{si} \quad x < 0, \\ w_r & \text{si} \quad x > 0, \end{cases} \tag{4}$$

1. Condiciones iniciales asociadas al problema de Riemann:

$$w_0(x) = \begin{cases} w_l & \text{si } x < 0, \\ w_r & \text{si } x > 0, \end{cases} \tag{4}$$

2. Solución exacta:

$$w_{j+\frac{1}{2}}(0) = \begin{cases} \left.\begin{array}{ll} w_j^n & s \geq 0, \\ w_{j+1}^n & s < 0, \\ & s = \frac{1}{2}\left(w_j^n + w_{j+1}^n\right). \end{array}\right\} \boxed{w_l > w_r} \\ \left.\begin{array}{ll} w_j^n & 0 \leq w_j^n, \\ 0 & w_j^n \leq 0 \leq w_{j+1}^n, \\ w_{j+1}^n & 0 \geq w_{j+1}^n. \end{array}\right\} \boxed{w_l < w_r} \end{cases} \tag{5}$$

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

Solución en función del valor de los estados:

1. Supersónico: $w_l > 0, w_r > 0$.
2. Subsónico: $w_l < 0, w_r < 0$.
3. Expansión transónica: $w_l \leq 0 \leq w_r$.
4. Choque transónico:
   a) $w_l > s > 0 > w_r$,
   b) $w_l \geq 0 > s > w_r$.
5. Choque estacionario:

$$w_l > s = 0 > w_r \rightarrow s = \frac{1}{2}(w_l + w_r) \rightarrow w_r = -w_l. \qquad (6)$$

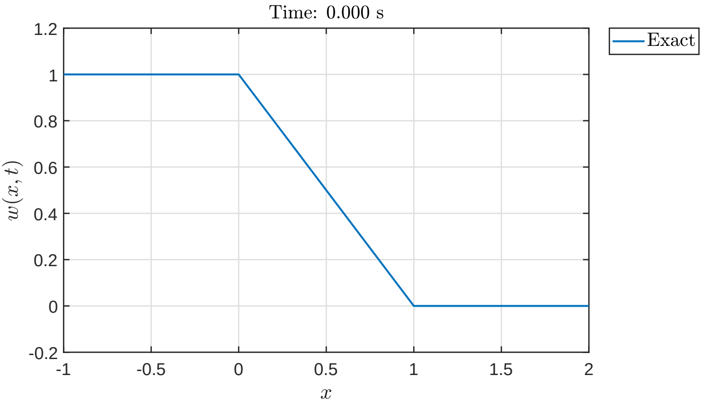


Figura 1: Solución exacta ecuación de Burgers con condiciones iniciales dadas por la Ec. 2. Rango: $x \in [-1, 2]$, $t \in [0, 1{,}5]$.

Un esquema conservativo para la ley de conservación escalar

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(f(w)) = 0, \tag{7}$$

es de la forma

$$w_j^{n+1} = w_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x}\left(f_{j-\frac{1}{2}}^n - f_{j+\frac{1}{2}}^n\right), \tag{8}$$

es decir, en el instante $n+1$ en j, se tiene lo que entra en la celda (volumen finito) por la izquierda, menos lo que sale por la derecha.

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

El término $f^n_{j+\frac{1}{2}}$ se define como

$$f^n_{j+\frac{1}{2}} = f^n_{j+\frac{1}{2}}(w^n_{j-l_1}, \ldots, w^n_{j+l_2}), \tag{9}$$

y es una aproximación del flujo físico $f(w)$. Siendo l_1 y l_2 dos enteros no negativos que nos indican cuantos vecinos aguas arriba y abajo, respectivamente, involucramos en la aproximación de la solución.

En el caso de estudio $l_1 = 0$, $l_2 = 1$, quedando

$$f^n_{j+\frac{1}{2}} = f^n_{j+\frac{1}{2}}(w^n_j, w^n_{j+1}), \tag{10}$$

es decir, involucramos sólo al vecino próximo a izquierda y derecha de la celda evaluada.

J. Rico Cabrera
A. Cuadra Lara

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

Esquema centrado

Por analogía, se obtiene el siguiente flujo numérico

$$\phi(w_{j-1}^n, w_j^n) = \frac{1}{2} w_{j-1}^n w_j. \tag{11}$$

$$\text{Consistencia: } \phi(\overline{w}, \overline{w}) = \frac{\overline{w^2}}{2} = \frac{\overline{w^2}}{2} = f(\overline{w}). \tag{12}$$

Para su demostración, basta con inyectar la ecuación anterior en

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\phi(w_j^n, w_{j+1}^n) - \phi(w_{j-1}^n, w_j^n) \right], \tag{13}$$

obteniendo

$$\boxed{w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} w_j^n (w_{j+1}^n - w_{j-1}^n),} \tag{14}$$

que es el esquema centrado para la ecuación de Burgers.

Esquema centrado

- Conservativo.
- Consistente.
- Incondicionalmente inestable.

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

Esquema no conservativo

$$\boxed{\begin{cases} w_j^{n+1} = w_j^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta x} w_j^n \left(w_j^n - w_{j-1}^n \right), & w_j^n \geq 0. \\ w_j^{n+1} = w_j^n - \dfrac{\Delta t}{\Delta x} w_j^n \left(w_{j+1}^n - w_j^n \right), & w_j^n \leq 0. \end{cases}} \qquad (15)$$

- No conservativo (no existe función flujo numérico).
- Inconsistente.

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

Q-esquema

Flujo numérico:

$$\phi(w_l, w_r) = \frac{f(w_l) + f(w_r)}{2} - \underbrace{\frac{1}{2}|Q(w_j, w_r)|(w_r - w_l)}_{\text{Viscosidad numérica}}, \qquad (16)$$

donde Q es la matriz Jacobiana evaluada en la media de los estados a derecha e izquierda w_r y w_l, respectivamente.

Consistencia:

$$\phi(\overline{w}, \overline{w}) = \frac{\overline{w^2}}{2} = f(\overline{w}). \qquad (17)$$

Inyectando la ecuación anterior en la ecuación del esquema conservativo Ec. 8 se obtiene

$$\boxed{w_j^{n+1} = w_j^n - \underbrace{\frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left(w_{j+1}^{n,2} - w_{j-1}^{n,2}\right)}_{c_f} + d_m - d_n,} \tag{18}$$

donde d representa la viscosidad numérica definida:

$$d_m = \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}|w_j^n + w_{j+1}^n|(w_{j+1}^n - w_j^n), \tag{19}$$

$$d_n = \frac{1}{4}\frac{\Delta t}{\Delta x}|w_j^n + w_{j-1}^n|(w_j^n - w_{j-1}^n). \tag{20}$$

Q-esquema:

- Conservativo.
- Consistente.
- Condicionalmente estable.
- Esquema no entrópico.

Análisis de von Neumann para el Q-esquema de van Leer asociado a la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \lambda \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \tag{21}$$

Flujo numérico:

$$\text{Para } \lambda > 0 \begin{cases} \phi\left(w_j^n, w_{j+1}^n\right) = \lambda w_j^n, \\ \phi\left(w_{j-1}^n, w_j^n\right) = \lambda w_{j-1}^n. \end{cases} \tag{22}$$

$$\text{Para } \lambda < 0 \begin{cases} \phi\left(w_j^n, w_{j+1}^n\right) = \lambda w_{j+1}^n, \\ \phi\left(w_{j-1}^n, w_j^n\right) = \lambda w_j^n. \end{cases} \tag{23}$$

Solución del Q-esquema para la ecuación del transporte

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \mu\left(w_j^n - w_{j-1}^n\right), \boxed{\lambda > 0.} \tag{24}$$

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \mu\left(w_{j+1}^n - w_j^n\right), \boxed{\lambda < 0.} \tag{25}$$

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

Un esquema en diferencias es un espacio L^2 estable, si y sólo si sus factores de amplificación $g(k, \Delta x, \Delta t)$ verifican

$$|g(k, \Delta x, \Delta t)| \leq 1, \quad \forall k, \tag{26}$$

siendo

$$g(k, \Delta x, \Delta t) = \sum_{l=-1}^{l=1} c_l e^{ikl\Delta x} = \frac{\hat{w}^{n+1}(k)}{\hat{w}^n(k)}. \tag{27}$$

$$\boxed{\lambda > 0} \begin{cases} c_{-1} = \mu, \\ c_0 = 1 - \mu, \\ c_1 = 0. \end{cases} \tag{28}$$

$$\boxed{\lambda < 0} \begin{cases} c_{-1} = 0, \\ c_0 = 1 + \mu, \\ c_1 = -\mu. \end{cases} \tag{29}$$

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

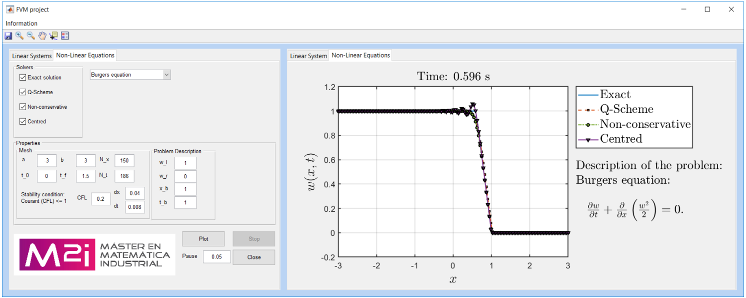
Inyectando los coeficientes anteriores en la Ec.26 se obtiene la siguiente condición de estabilidad

$$-2|\mu|(1-|\mu|)(1-cos(k\Delta x)) \leq 0 \rightarrow \boxed{|\mu| \leq 1.} \qquad (30)$$

Por tanto, para $\mu \leq 1$ se satisface la condición de estabilidad, lo que implica un esquema condicionalmente estable.

Resultados

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid



Matlab

Conclusiones

J. Rico Cabrera
A. Cuadra Lara

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

- Para capturar las soluciones entrópicas en el Q-esquema es necesario *enseñar* al método a mantener siempre un mínimo de viscosidad numérica.

Conclusiones

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

- Para capturar las soluciones entrópicas en el Q-esquema es necesario *enseñar* al método a mantener siempre un mínimo de viscosidad numérica.
- Los esquemas centrados y no conservativos no capturan los resultados de manera satisfactoria a partir de las discontinuidades.

Bibliografía I

M2i
Universidad de Santiago de Compostela
Universidad da Coruña
Universidad de Vigo
Universidad Carlos III de Madrid
Universidad Politécnica de Madrid

[1] M. E. VÁZQUEZ CENDÓN. Introducción al método de volúmenes finitos. 2008. Universidad de Santiago de Compostela. Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico.

[2] M. E. VÁZQUEZ CENDÓN. Solving Hyperbolic Equations with Finite Volume Methods. 2015. Springer.

[3] E. GODLEWSKI AND P. A. RAVIART. Numerical Approximation of Hyperbolic systems of conservation laws.

[4] E.F. TORO. Numerica. 2000. URL: "https://eleuteriotoro.com/software/".

¡Gracias por su atención!

MÁSTER EN MATEMÁTICA INDUSTRIAL