



Universidade de Vigo



Universidad
Carlos III de Madrid



POLITÉCNICA

MÁSTER EN MATEMÁTICA INDUSTRIAL

TURBULENCIA

Trabajo 2: Simulación RANS de un flujo turbulento en un canal

ALBERTO CUADRA LARA

*Trabajo presentado en cumplimiento de los requisitos de la asignatura
Turbulencia curso 2017-2018 para el Máster en Matemática Industrial*

25 de mayo de 2018

Índice general

2. Simulación RANS de un flujo turbulento en un canal	1
2.1. Introducción	1
2.2. Descripción del problema	1
2.3. Formulación del modelo	3
2.3.1. Modelo de longitud de mezcla	4
Observaciones	4
2.3.2. Modelo <i>TKE</i>	4
Observaciones	5
2.3.3. Modelo <i>k-ε</i>	5
Observaciones	6
2.3.4. Observaciones generales	6
2.3.5. Condiciones de contorno	6
2.3.6. Resumen	7
2.4. Esquemas numéricos	8
2.4.1. Discretización temporal	8
Condiciones iniciales	9
Criterio de parada	9
2.4.2. Discretización espacial	9
Observación	9
2.4.3. Condición de estabilidad	10
2.5. Esquema de resolución	10
2.5.1. Modelo <i>k-ε</i>	10
2.6. Resultados	11
Aclaraciones	12
2.6.1. Esfuerzos viscosos frente a los esfuerzos aparentes de Reynolds	12
2.6.2. Perfil de velocidad	13
2.6.3. Energía cinética turbulenta y tasa de disipación	15
2.6.4. Viscosidad turbulenta	17
2.6.5. Producción/disipación	17
2.6.6. Similitudes y diferencias entre los distintos modelos de turbulencia considerados	20
2.7. Otros resultados y observaciones	20
2.8. Conclusiones	21
A. Otros resultados	22
Bibliografía	24

Índice de figuras

2.1. Descripción geométrica del canal.	2
2.2. Convergencia de resultados con paso temporal constante y no uniforme para el modelo $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento (Chien) y $Re_\tau = 550$	8
2.3. Contribución relativa de los esfuerzos viscosos frente a los esfuerzos aparentes de Reynolds para el modelo $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento (Chien).	13
2.4. Perfil de velocidad media adimensional $\langle u^+ \rangle$, modelos: longitud de mezcla, TKE y $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento. (a) $Re_\tau = 180$, (b) $Re_\tau = 550$, (c) $Re_\tau = 2000$	14
2.5. Transición de los perfiles de velocidad media adimensional $\langle u^+ \rangle$ con $y/h \in [0, 1]$, modelos: longitud de mezcla, TKE y $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento y $Re_\tau = \{180, 550, 2000\}$	15
2.6. Ley de defecto de velocidad para el modelo $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento (Chien).	15
2.7. Perfiles de energía cinética turbulenta k^+ y tasa de disipación ϵ^+ adimensionalizados, modelos: longitud de mezcla, TKE y $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento. (a) $Re_\tau = 180$, (b) $Re_\tau = 550$, (c) $Re_\tau = 2000$	16
2.8. Perfil de viscosidad turbulenta adimensional ν_t^+ , modelos: longitud de mezcla, TKE y $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento. (a) $Re_\tau = 180$, (b) $Re_\tau = 550$, (c) $Re_\tau = 2000$	18
2.9. Relación término de producción frente a la disipación P/ϵ , modelos: TKE y $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento. (a) $Re_\tau = 180$, (b) $Re_\tau = 550$, (c) $Re_\tau = 2000$	19
A.1. Ejemplo convergencia rhs alcanzando régimen estacionario.	22
A.2. Esfuerzos: (a) viscosos $\langle \tau_{12}^* \rangle$, (b) aparentes de Reynolds τ_{12}^{R*} , para $Re_\tau = 180, Re_\tau = 550, Re_\tau = 2000$	23

Trabajo 2

Simulación RANS de un flujo turbulento en un canal

2.1. Introducción

La resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes de manera directa *DNS*, *Direct Numerical Simulation*, resulta un proceso arduo y muchas veces inabarcable en función de la complejidad y el número de Reynolds intrínseco del problema. Debido a ello, en esta etapa reciente se han desarrollado modelos que permiten reducir el costo computacional a base de modelar ciertas ecuaciones que rigen el comportamiento del fluido.

El objetivo de este trabajo es resolver las ecuaciones *RANS*, *Reynolds Average Navier-Stokes*, que gobiernan un flujo confinado en un canal plano mediante tres modelos de turbulencia (en orden creciente de complejidad):

- Modelo de longitud de mezcla (cero ecuaciones adicionales de transporte).
- Modelo *TKE*, *Transport Kinetic Energy* (una ecuación).
- Modelo $k - \epsilon$ (dos ecuaciones).

Debido a que los casos a simular son para bajos números de Reynolds, el modelo $k-\epsilon$ necesita funciones de amortiguamiento para poder capturar en cierto modo la transición de flujo laminar (subcapa viscosa $y^+ < 5$) a flujo turbulento, concretamente, se van a utilizar 4 configuraciones distintas de funciones de amortiguamiento, dos de ellas sin éxito en los resultados obteniendo soluciones espurias.

Para la realización del trabajo nos hemos guiado con los apuntes de la asignatura [6], así como de los libros *Turbulence* (P.A. Davison) [4] y *Turbulent flows* (S. B. Pope) [7]. Para el procesamiento de resultados se ha utilizado el programa *Matlab R2018a* cuyo código se adjunta de forma paralela al presente trabajo.

2.2. Descripción del problema

Se considera un flujo turbulento incompresible en un canal plano con dimensiones $L \gg 2h$, totalmente desarrollado (estadísticamente estacionario y homogéneo en las direcciones paralelas a la pared¹). El objetivo del problema es comparar los perfiles de velocidad media (U/u_τ), energía cinética turbulenta (k/u_τ^2), disipación ($\epsilon/(u_\tau^3/h)$) y

¹El ancho del canal $w \gg 2h$. En caso contrario, estaríamos en un caso de flujo no homogéneo en la dirección z (*spanwise*) debido a la interacción del fluido con las paredes del dominio.

viscosidad turbulenta ($\nu_t/(u_\tau h)$) para tres números de Reynolds² ($Re_\tau = 180, Re_\tau = 550, Re_\tau = 2000$) usando tres modelos de turbulencia distintos.

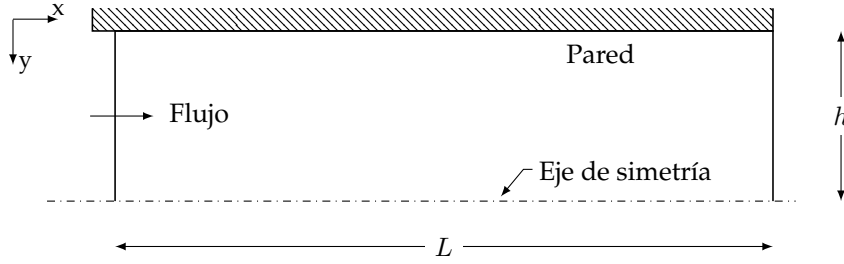


FIGURA 2.1: Descripción geométrica del canal.

Los modelos de turbulencia que van a compararse son:

- **Modelo de longitud de mezcla** (cero ecuaciones). En base a la literatura reciente, para la longitud de mezcla se va a utilizar el mínimo entre $l_{m,1}$ y $l_{m,2}$, definidos como

$$l_{m,1}(y) = \kappa y(1 - \exp(-y^+/26)), \quad (2.1)$$

$$l_{m,2}(y) = 0,09h, \quad (2.2)$$

donde κ es la constante de Karman, y es la distancia a la pared (más cercana) y h es la semi-altura del canal. Las variables con un superíndice + están normalizadas en unidades de pared (u_τ, h).

- **Modelo TKE, Transport Kinetic Energy** (una ecuación).
- **Modelo k - ϵ** (dos ecuaciones) con funciones de amortiguamiento, detalladas en la tabla 2.4.

El estudio se ha dividido en las siguientes secciones:

1. **Formulación del modelo:** Partiendo de las ecuaciones generales de Navier-Stokes para fluidos incompresibles, se realizan las simplificaciones necesarias hasta alcanzar las ecuaciones consideradas para resolver el problema.
2. **Esquemas numéricos:** Se presentan los esquemas numéricos utilizados para resolver el sistema de ecuaciones en derivadas diferenciales ordinarias no lineales.
3. **Esquema de resolución:** Se indica el algoritmo iterativo utilizado en cada modelo.
4. **Resultados:** Se presentan los resultados obtenidos en las simulaciones para los distintos Re_τ . Se comparan los tres modelos realizados entre sí, así como, con resultados de una simulación numérica directa DNS (<http://torroja.dmt.upm.es/channels>).
5. **Conclusiones:** Se presentan las conclusiones del trabajo.

²Número de Reynolds de fricción Re_τ .

2.3. Formulación del modelo

Consideraciones previas:

- Fluido incompresible y sin transferencia de calor.
- Ecuaciones RANS.
- Flujo totalmente desarrollado, estadísticamente estacionario y homogéneo en las direcciones paralelas a la pared.
- Ecuaciones adimensionalizadas con unidades de pared: h y u_τ , siendo esta última la velocidad de fricción, definida a partir de la cortadura en la pared.

Las variables dimensionales en función de las adimensionales (denotadas con el superíndice *) son:

$$x_i = hx_i^*, \quad u = u_\tau u^*, \quad p = \rho_0 u_\tau^2 p^*, \quad \rho = \rho_0 \rho^*, \quad \nu = \nu_0 \nu^*, \quad (2.3)$$

donde p es la presión, y ρ y ν son la densidad y viscosidad cinemática del fluido, respectivamente.

El gradiente de presión de la ecuación de cantidad de movimiento en x es

$$\frac{\partial \langle p \rangle}{\partial x} = -\frac{\tau_w}{h}, \quad (2.4)$$

donde $\langle \cdot \rangle$ denota el operador media, y τ_w representa la cortadura de pared definida como

$$\tau_w = \rho_0 u_\tau^2. \quad (2.5)$$

Adimensionalizando

$$\frac{\cancel{\rho_0 u_\tau^2}}{\cancel{h}} \frac{\partial \langle p^* \rangle}{\partial x^*} = -\frac{\cancel{\rho_0 u_\tau^2}}{\cancel{h}} = -1, \quad (2.6)$$

teniendo por tanto un gradiente de presión constante, encargado de forzar el movimiento del fluido en la dirección x (*streamwise*).

Teniendo en cuenta lo expuesto, las ecuaciones de Navier-Stokes quedan reducidas a la siguiente ecuación de cantidad de movimiento en x :

$$\boxed{\frac{\partial \langle u^* \rangle}{\partial t^*} = \underbrace{1}_{-\langle p^* \rangle, x^*} + \frac{\partial}{\partial y^*} \left[\underbrace{\frac{1}{Re_\tau} \frac{\partial \langle u^* \rangle}{\partial y^*}}_{\langle \tau_{12}^* \rangle} - \underbrace{\langle u'^* v'^* \rangle}_{\tau_{12}^{R*}} \right]}, \quad (2.7)$$

donde $\langle \tau_{12}^* \rangle$ representa los esfuerzos medios asociados a la viscosidad y τ_{12}^{R*} es el tensor de esfuerzos aparentes de Reynolds (término adicional origen del RANS y término a modelar), ambos en forma adimensional. τ_{12}^{R*} representa la transferencia de momento debido a las fluctuaciones de la turbulencia. La suma de ambos tensores representa los esfuerzos totales de cortadura $\tau(y)$. Nótese, que en el caso de estudio son únicamente

función de la dirección y .

Los modelos de turbulencia que vamos a utilizar se basan en la hipótesis de Bousinesq para modelar el tensor de esfuerzos aparentes de Reynolds, que dicta que el esfuerzo cortante turbulento depende linealmente de la velocidad de deformación media (como en un flujo laminar). Matemáticamente, simplificando en el caso de estudio se tiene

$$\tau_{12}^{R*} = -\nu_t \frac{d\langle u^* \rangle}{dy^*}, \quad (2.8)$$

donde ν_t es la viscosidad turbulenta y es el factor de proporcionalidad. La viscosidad turbulenta ν_t no representa una característica física del fluido, pero si es función de las condiciones locales del flujo. Además, ν_t tiene una gran dependencia de la *historia* del flujo.

2.3.1. Modelo de longitud de mezcla

En el modelo de longitud de mezcla se obtiene ν_t a partir de la siguiente relación algebraica

$$\nu_t = u_m l_m = l_m^2 \left| \frac{d\langle u^* \rangle}{dy^*} \right|, \quad (2.9)$$

y se expresa en función a una escala de velocidad turbulenta $u_m = l_m \left| \frac{d\langle u^* \rangle}{dy^*} \right|$, y una escala de longitud turbulenta l_m . La longitud de mezcla l_m se define como el mínimo entre $l_{m,1}$ y $l_{m,2}$, ecuaciones 2.1 y 2.2, respectivamente.

Observaciones

Es un modelo empírico que sólo tiene en consideración variables del flujo medias. Consecuentemente, no tiene en cuenta la *historia* del fluido por lo que no es adecuado en caso de separación del flujo.

2.3.2. Modelo TKE

En los modelos de 1 ecuación se añade una ecuación de transporte para el cálculo de la escala de velocidad turbulenta. El modelo *TKE* modela el tensor de esfuerzos aparentes de Reynolds con la misma idea que el modelo de longitud de mezcla, basándose en una viscosidad turbulenta ν_t , pero su expresión varía

$$\nu_t = \underbrace{c\sqrt{k}}_{\tilde{u}} \cdot l_m, \quad c = 0,55, \quad (2.10)$$

donde k (escala de velocidad turbulenta $\tilde{u} \sim \sqrt{k}$) representa la energía cinética turbulenta y se obtiene mediante la siguiente ecuación de transporte (en forma dimensional):

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} + P - \tilde{\epsilon}, \quad (2.11)$$

siendo P el término de producción definido como

$$P = \left(\nu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} \right) \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}, \quad (2.12)$$

y $\tilde{\epsilon}$ es la tasa de pseudo-disipación, y se modela mediante la siguiente expresión

$$\tilde{\epsilon} = C_D \frac{k^{3/2}}{l_m}. \quad (2.13)$$

Los términos restantes son constantes cuyos valores son:

$$\sigma_k = 1, \quad C_D = 0,125. \quad (2.14)$$

Las ecuaciones anteriores junto con la ecuación de cantidad de movimiento en x y las condiciones de contorno descritas en 2.19 dejan el problema cerrado.

Observaciones

- Tiene en cuenta la *historia* del fluido y modela las escalas grandes con una ecuación de transporte adicional (k).

2.3.3. Modelo k - ϵ

En los modelos de 2 ecuaciones se añade otra ecuación de transporte para el cálculo de la escala de longitud turbulenta. Para el caso de bajo número de Reynolds³ el modelo k - ϵ parte de las mismas ecuaciones que el modelo TKE , pero en este caso la viscosidad turbulenta ν_t se obtiene mediante la siguiente relación

$$\nu_t = C_\mu f_\mu \frac{k^{3/2}}{\epsilon}, \quad (2.15)$$

donde ϵ es la tasa de disipación, $C_\mu = 0,09^4$ y f_μ es una función de amortiguamiento destinada a reducir el valor de viscosidad turbulenta cerca de la pared (véase tabla 2.4). La disipación ϵ es la responsable de transformar la energía cinética de las escalas pequeñas en energía interna. La ecuación de transporte de energía cinética turbulenta k en este caso es

$$\frac{Dk}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial y} + P - \epsilon. \quad (2.16)$$

El término de pseudo-disipación se obtiene mediante una ecuación de transporte adicional. Debido a que la ecuación original es realmente compleja, se utiliza una ecuación que se asemeja a la ecuación de transporte de energía cinética turbulenta. La ecuación de transporte de $\tilde{\epsilon}$ es

$$\frac{D\tilde{\epsilon}}{Dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\epsilon}}{\partial y} + C_{\epsilon 1} f_1 \frac{\tilde{\epsilon}}{k} P - C_{\epsilon 2} f_2 \frac{\tilde{\epsilon}^2}{k} + E, \quad (2.17)$$

³La diferencia radica en que se emplean funciones de amortiguamiento. Para altos números de Reynolds es necesario implementar leyes de pared.

⁴Valor obtenido de manera experimental. No es universal, es un compromiso que se ajusta de forma aproximada al gran abanico de casos. Lejos de ser una constante en la pared y en el centro del canal.

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon - D, \quad (2.18)$$

donde el valor de las funciones f_1, f_2 y de los términos D y E varía en función del modelo k - ϵ empleado y se detalla en las tablas 2.3 y 2.4.

Observaciones

- Tiene en cuenta la *historia* del fluido.
- No requiere especificar una escala de longitud característica del flujo, lo que lo convierte en un modelo más universal a los anteriores.
- La ventaja de los modelos k - ϵ es que utilizan 2 ecuaciones para calcular k y ϵ , intentando representar las escalas grandes y pequeñas de manera independiente. Las 5 constantes del modelo han sido determinadas estudiando flujos canónicos.
- En la Ec. 2.17 el hecho de tener k en el denominador da una inestabilidad en la pared ($k = 0$), para evitar problemas en la convergencia de los resultados se impone $rhs = 0$ donde $k = 0$.
- Regularizar solución: Por su propia definición k y ϵ son siempre positivas, para evitar de nuevo otras posibles inestabilidades (como raíces negativas) se impone $k_i < 0 \rightarrow k_i = 0$, siendo i el nodo i -ésimo con valor de k negativo. Del mismo modo para ϵ .

2.3.4. Observaciones generales

Algunas observaciones de los modelos de longitud de mezcla, TKE , y k - ϵ :

- Utilizan el concepto de viscosidad turbulenta isótropa.
- No funcionan sobre flujos complejos.

2.3.5. Condiciones de contorno

En el canal se tienen las siguientes condiciones de contorno:

- Condición de no deslizamiento: velocidad nula en la pared y por tanto fluctuaciones nulas, consecuentemente la energía cinética turbulenta es también nula. Para la pseudo-disipación depende del modelo concreto k - ϵ utilizado, detallado en la tabla 2.3.
- Condición de simetría en el eje.

Matemáticamente, esto se traduce en las siguientes expresiones:

$$\left. \begin{array}{l} u(0, t) = 0, \\ k(0, t) = 0, \\ \tilde{\epsilon}(0, t) = \tilde{\epsilon}_w, \text{ tabla 2.3.} \end{array} \right\} \text{Pared,} \quad \left. \begin{array}{l} u,y(h, t) = 0, \\ k,y(h, t) = 0, \\ \tilde{\epsilon},y(h, t) = 0. \end{array} \right\} \text{Eje de simetría.} \quad (2.19)$$

En función del modelo de turbulencia, longitud de mezcla, TKE o k - ϵ se aplica las condiciones de contorno correspondientes a la fila 1, 1-2, y 1-2-3, respectivamente.

2.3.6. Resumen

Modelo	Incógnitas	Ecuaciones
Longitud de mezcla	$\langle u \rangle / u_\tau$	1 ec. de cantidad de movimiento
TKE	$\langle u \rangle / u_\tau, k / u_\tau^2$	1 ec. de cantidad de movimiento + 1 ec. transporte
$k-\epsilon$	$\langle u \rangle / u_\tau, k / u_\tau^2, \epsilon / (u_\tau^3 / h)$	1 ec. de cantidad de movimiento + 2 ec. transporte

TABLA 2.1: Incógnitas y ecuaciones que rigen el comportamiento del sistema en función del modelo de turbulencia.

Variable/Parámetro	Longitud de mezcla	TKE	$k - \epsilon + \text{fun. de amortig.}^1$
$\langle u \rangle / u_\tau$	Cant. movimiento x , Ec.2.7	Cant. movimiento x , Ec.2.7	Cant. movimiento x , Ec.2.7
τ_{12}^{R*}	H. Boussinesq, Ec.2.8	H. Boussinesq, Ec.2.8	H. Boussinesq, Ec.2.8
ν_τ	$\nu_\tau = f(u, l_m)$, Ec.2.9	$\nu_\tau = f(k, l_m)$, Ec. 2.10	$\nu_\tau = f(k, \epsilon)$, Ec. 2.15
k	—	Ec. de transporte k , 2.11	Ec. de transporte k , 2.16
$\tilde{\epsilon}$	—	$\tilde{\epsilon} = f(C_D, k, l_m)$, Ec. 2.13	Ec. de transporte $\tilde{\epsilon}$, 2.15

¹ Funciones de amortiguamiento.

TABLA 2.2: Variables y parámetros en función del modelo de turbulencia.

Modelo	Código	D	$\tilde{\epsilon}_w$ (CC)	C_μ	$C_{\epsilon 1}$	$C_{\epsilon 2}$	σ_k	σ_ϵ	E
Chien	CH	$2\nu k / y^2$	0	0.09	1.35	1.8	1.0	1.3	$-2\nu \tilde{\epsilon} / y^2 \exp(-0,5y^+)$
Nagano-Tagawa	NT	0	$\nu k_{,yy}$	0.09	1.45	1.9	1.4	1.3	0
Launder-Sharma	LS	$2\nu(k_{,y}^{\frac{1}{2}})^2$	0	0.09	1.44	1.92	1.4	1.3	$2\nu \nu_t (U, yy)^2$
Lam-Bremhorst	LB	0	$\nu k_{,yy}$ o $\epsilon_{,y} = 0$	0.09	1.44	1.92	1.4	1.3	0

¹ Nótese, que con la adimensionalización realizada ν equivale en su ecuación adimensional con Re_τ .TABLA 2.3: Resumen de constantes, términos y condiciones de contorno (CC) usadas en los modelos $k-\epsilon$ a bajo número de Reynolds [8].

Modelo	Código	f_μ	f_1	f_2
Chien	CH	$1 - \exp(-0,0115y^+)$	1.0	$1 - 0,22 \exp[-(Re_t^2/6)^2]$
Nagano-Tagawa	NT	$[1 - \exp(-y^+/26)]^2$ $\times (1 + 4,1/Re_t^{\frac{3}{4}})$	1.0	$(1 - 0,3 \exp[-(Re_t/6,5)^2])$ $\times (1 - \exp[-y^+/6])^2$
Launder-Sharma	LS	$\exp(-3,4/(1 + Re_t/50)^2)$	1.0	$1 - 0,3 \exp(-Re_t^2)$
Lam-Bremhorst	LB	$[1 - \exp(-0,0165y^*)]$ $\times (1 + 20,5/Re_t)$	$1 + (0,05/f_\mu)^3$	$1 - \exp(-Re_t^2)$

¹ $Re_t = k^2 / \nu \epsilon, y^+ = U_\tau y / \nu, y^* = y / \nu \sqrt{k}$.² Nótese, que con la adimensionalización realizada ν equivale en su ecuación adimensional con Re_τ .TABLA 2.4: Resumen de las funciones de amortiguamiento usadas en los modelos $k-\epsilon$ a bajo número de Reynolds [8].

2.4. Esquemas numéricos

Para resolver el problema estacionario se ha optado por partir de un problema en régimen no estacionario alcanzando la solución del problema cuando la variación temporal sea despreciable frente a cierto criterio de parada a elegir por el usuario.

2.4.1. Discretización temporal

Para la discretización temporal se va a emplear un esquema Runge-Kutta⁵ de cuatro pasos (esquema explícito multietapa) definido como [5]

$$\begin{cases} u^{n+1} = u^n + \frac{\Delta t}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 = F(u^n), \\ k_2 = F(u^n + k_1\Delta t/2), \\ k_3 = F(u^n + k_2\Delta t/2), \\ k_4 = F(u^n + k_3\Delta t), \\ F(u) = rhs. \end{cases} \quad (2.20)$$

siendo *rhs* (*Right Hand Side*) el miembro de la derecha de la respectiva ecuación temporal a discretizar y Δt el paso temporal. Se ha utilizado un paso temporal no uniforme dado por la condición de estabilidad 2.24, donde Δx es una discretización espacial no uniforme. En la figura 2.2 se ha representado el error cometido por iteración para los distintos *rhs* (convergencia) con un paso temporal constante y otro no uniforme ($\Delta t = cte$, $\Delta t \neq 0$, respectivamente) para el modelo $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento (Chien) y $Re_\tau = 550$. Se observa una reducción del 50 % en el número de iteraciones con un paso temporal no uniforme, lo que lo convierte en una herramienta crucial de cara a simulaciones más exigentes.

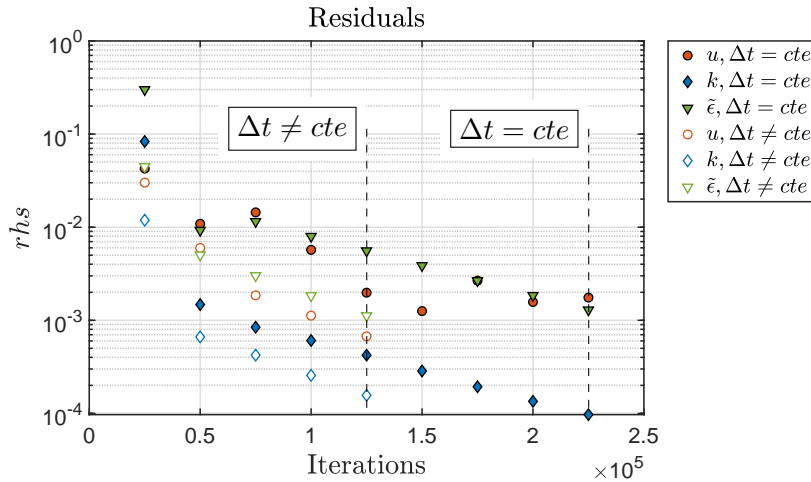


FIGURA 2.2: Convergencia de resultados con paso temporal constante y no uniforme para el modelo $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento (Chien) y $Re_\tau = 550$.

⁵En primera instancia, se intentó un esquema explícito de primer orden (Euler Explícito), pero debido a que su región de estabilidad no captura los autovalores contenidos en el eje del plano complejo se optó por el Runge-Kutta de 4 pasos. Para el problema de estudio el Runge-Kutta de 3 pasos también sería válido.

Condiciones iniciales

Para aplicar el esquema es necesario imponer condiciones iniciales. Para acelerar la convergencia se han tomado uno de los tres casos siguientes como condiciones iniciales:

- Caso 1:

$$\begin{cases} u(y, 0) = a_1 y^{b_1}, & y \in [0, h] \\ k(y, 0) = a_2 y^{b_2} e^{-c_2 y}, & y \in [0, h] \\ \epsilon(y, 0) = a_3 y^{b_3} e^{-c_3 y}, & y \in [0, h], \end{cases} \quad (2.21)$$

con un cierto valor de los parámetros ajustado según el problema.

- Caso 2: Se toman como datos de partida los datos de la simulación numérica directa *DNS* realizando una interpolación de estos para la malla considerada.
- Caso 3: En algunos casos del modelo $k-\epsilon$ (NT) fue necesario inicializar con los resultados del modelo *TKE*.

Criterio de parada

Se considera que se ha alcanzado el régimen estacionario cuando se satisface $\text{Error} \leq \delta$, con $\delta = 10^{-3}$ y

$$\text{Error} = \frac{\max\{||rhs_{1:i}||\}}{N_y}, \quad (2.22)$$

siendo N_y el número de puntos utilizados en la discretización espacial. El subíndice i denota el número de *rhs*. Según el modelo se tienen 1, 2 ó 3, *rhs*, correspondiendo con el modelo de mezcla, *TKE* y $k-\epsilon$, respectivamente. Adicionalmente, se ha impuesto un número máximo de iteraciones, fijado por defecto a un valor $it_{max} = 2 \cdot 10^6$.

2.4.2. Discretización espacial

Para la discretización espacial se va a utilizar un esquema en diferencias finitas centradas de segundo orden [5]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right), \quad (2.23)$$

donde el término en azul indica el orden del error del esquema⁶ y se desprecia en su implementación. Se optó por un esquema en diferencias finitas frente a uno de volúmenes o elementos finitos debido a su sencilla implementación.

Observación

Utilizar modelos a bajo número de Reynolds implica mallas finas cerca de la pared. Por ello, se debe garantizar que el primer nodo esté localizado a una distancia $y^+ < 1$ de la pared, siendo recomendable (y lo realizado), un par de nodos como mínimo para poder capturar con precisión los altos gradientes de la zona circundante a la pared.

⁶Obtenido mediante un desarrollo en serie de Taylor.

2.4.3. Condición de estabilidad

Un aspecto que aún no se ha tratado y es de vital relevancia de cara al análisis del problema, es la estabilidad del esquema en función de la discretización espacio-temporal. Para ello, se aplica el análisis de von Neumann, véase [2]. Tras ciertas manipulaciones algebraicas, se alcanza que la condición de estabilidad aproximada⁷ es

$$\text{CFL}_\nu = \left(\frac{1}{Re} + \nu_t \right) \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \leq 1, \quad (2.24)$$

siendo el CFL_ν el número de *Courant* asociado al término viscoso. El CFL puede interpretarse como el cociente entre la velocidad a la que se propaga la información frente a la velocidad a la que se propaga la discretización espacial. Nótese, que en el problema de estudio no tenemos término convectivo, en tal caso, habría que considerar el CFL asociado al término convectivo definido como

$$\text{CFL}_{conv} = \frac{u_{max} \Delta t}{\Delta x} \quad (2.25)$$

y tomar como CFL el mínimo de ambos.

2.5. Esquema de resolución

A continuación se presenta los pasos comunes seguidos para la resolución de cada modelo. Posteriormente, se presenta el esquema de resolución para el modelo $k-\epsilon$ (el más complejo), el resto se procede de forma similar.

1. Inicialización:

- a) Definición de los parámetros del problema: tamaño del dominio, Re , margen de error.
- b) Mallado: Se realiza un mallado no uniforme mediante la función *mesh1D*. Se controla la densidad de nodos en la zona cercana a la pared mediante una función $y = y_{unif}^a$, siendo a el parámetro controlador⁸.
- c) Cálculo de parámetros adicionales: $\Delta t, y^+$.
- d) Inicialización de las variables del problema mediante uno de los casos definidos en la Sec. 2.4.1.

2.5.1. Modelo $k-\epsilon$

2.1 Bucle temporal:

- a) Runge-Kutta 4 pasos:
 - Cálculo del *rhs* (función *frhs3*):
 - Imposición condición de contorno en la pared para las variables u, k y $\tilde{\epsilon}$.
 - Se eliminan los valores negativos de k y $\tilde{\epsilon}$ imponiéndolos a 0, ya que no tienen sentido físico. De este modo se regulariza la solución.

⁷Debido a los términos no lineales el paso temporal mínimo sólo puede estimarse [1].

⁸Para $a > 0$ se incrementan el número de nodos en la zona cercana a la pared.

- Consecuentemente, se tienen discontinuidades (valores *Nan*), se buscan éstas con el comando *find* y se imponen a cero los valores *Nan*.
 - Cálculo de variables y funciones de amortiguamiento.
 - Al calcular la derivada de u , k y $\tilde{\epsilon}$ se impone la condición de contorno restante (simetría) solapando el valor obtenido.
 - Cálculo de los términos de los respectivos *rhs*.
 - Se vuelve a realizar otra búsqueda ante posibles discontinuidades.
 - Se eliminan los valores negativos de k y $\tilde{\epsilon}$ imponiéndolos a 0, ya que no tienen sentido físico. De este modo se regulariza la solución.
 - Imposición de nuevo de la condición de contorno en la pared para las variables u , k y $\tilde{\epsilon}$, debido a que el esquema RK varía el valor nulo en el primer nodo.
- b) Se calcula el error de cada *rhs*.
- c) Gráficos de convergencia ante una frecuencia fijada (*nfrec*).
- 2.2 Una vez alcanzada la convergencia se guardan los resultados junto al tiempo de cómputo mediante el script *savedata*.

2.6. Resultados

En primer lugar, antes de comentar los resultados es necesario indicar como se comporta un fluido incompresible en movimiento y confinado. La presencia de una pared en el dominio fluido afecta directamente a la turbulencia, haciendo que ésta se manifieste de manera fuertemente anisótropa en las zonas cercana a la pared. La velocidad en la pared es nula debido a la condición de no deslizamiento y máxima en el centro del canal desarrollándose una capa límite en la zona cercana a la pared. Consecuentemente, se tienen unos gradientes de velocidad muy elevados en la zona cercana a ésta, convirtiéndolo en una zona crítica en la simulación numérica. Para garantizar buenos resultados es necesario disponer de mínimo un par de nodos en $y^+ < 1$.

La zona cercana a la pared o zona interior, *inner layer*, ($y/h < 0,1$), donde la velocidad media no depende de u_0 (centro del canal) ni de la semialtura del canal h , $u^+ = f(y^+)$, se tienen las siguientes zonas:

- Subcapa viscosa, *viscous sublayer* ($y^+ < 5$): viscosidad molecular dominante frente a la viscosidad turbulenta que es despreciable. Regida por la ley de pared (Prandtl 1925) cuya expresión es

$$u^+ = y^+. \quad (2.26)$$

- Zona de la pared, *buffer region* ($5 < y^+ < 30$): zona con mayores gradientes de velocidad, donde se alcanza por tanto el pico de producción de energía cinética turbulenta.
- Zona logarítmica, *log-law zone* ($y^+ > 30, y/h < 0,3$) {zona de solape ($y^+ > 30, y/h < 0,1$)}: región totalmente turbulenta, viscosidad molecular despreciable frente a la viscosidad turbulenta, que es dominante. Se cumple la ley de pared

2.26 y la ley de defecto de velocidad 2.28 obteniendo un perfil de velocidad logarítmico (en primer orden) dado por

$$u^+ = \frac{1}{0,41} \log(y^+) + 5,2, \quad (2.27)$$

siendo $\kappa = 0,41$ y $A = 5,2$ (para canales).

En el otro extremo, zona exterior, *outer layer*, ($y^+ > 50$) se rige por la ley de defecto de velocidad

$$\frac{u_{max} - u(y)}{u_\tau} = F_D \left(\frac{y}{h} \right), \quad (2.28)$$

siendo función de y/h . En esta zona la contribución de la viscosidad molecular en la velocidad es despreciable.

A continuación se presentan los siguientes resultados para $Re_\tau = 180$, $Re_\tau = 550$ y $Re_\tau = 2000$..:

1. Esfuerzos viscosos frente a los esfuerzos aparentes de Reynolds.
2. Perfil de velocidad media.
3. Energía cinética turbulenta y tasa de disipación.
4. Viscosidad turbulenta.
5. Producción/disipación.

Aclaraciones

- Todos los resultados están adimensionalizados con unidades de pared, denotado con el superíndice +.
- Los resultados van a analizarse de forma global (comportamiento observado en función al Re_τ), finalizando con las diferencias encontradas entre los distintos modelos de turbulencia considerados.

2.6.1. Esfuerzos viscosos frente a los esfuerzos aparentes de Reynolds

En la figura 2.3 se observa la contribución relativa de los esfuerzos viscosos frente a los esfuerzos aparentes de Reynolds para el modelo $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento (Chien) y los tres números de Reynolds simulados. Se observa que no importa cuan grande sea el valor del Reynolds, que siempre existe una región cercana a la pared donde los efectos viscosos son dominantes, esto numéricamente en forma adimensional se traduce en un número de Reynolds local pequeño. Se tiene un comportamiento universal (perfiles autosemejantes). Dado que los esfuerzos tienen un comportamiento lineal (excepto en la zona cercana a la pared, véase A.2b). Los esfuerzos de Reynolds son dominantes en el centro del canal y prácticamente despreciables frente a los viscosos en la zona cercana a la pared. Nótese, que la cortadura τ es la que está promoviendo la generación de turbulencia.

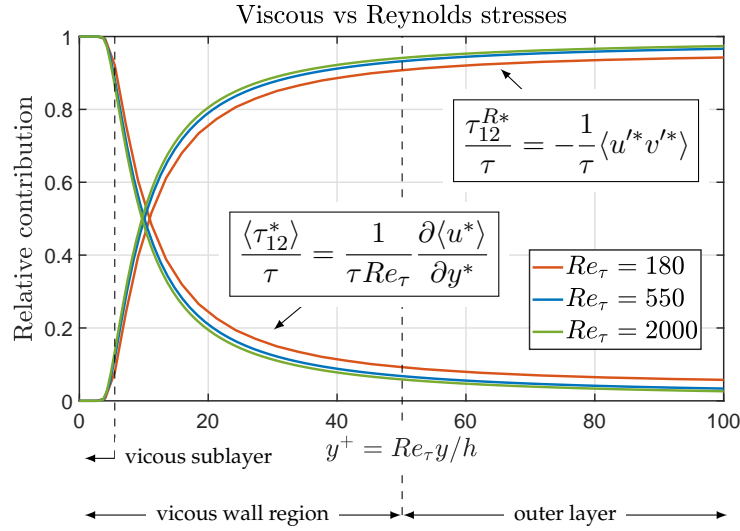


FIGURA 2.3: Contribución relativa de los esfuerzos viscosos frente a los esfuerzos aparentes de Reynolds para el modelo $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento (Chien).

2.6.2. Perfil de velocidad

En la figura 2.4 se han representado los perfiles de velocidad media para los distintos modelos de turbulencia considerados y los tres valores de Re_τ . Los resultados en función del Re_τ se denotan con el subíndice $i = 1, 2, 3$, correspondiendo con $Re_\tau = \{180, 550, 2000\}$, respectivamente. Adicionalmente, se han representado con un lineado discontinuo fijo e intermitente el perfil de velocidad dado por la ley de pared y la ley logarítmica, ecuaciones 2.26 y 2.27, respectivamente. Se comprueba como los resultados en la subcapa viscosa se rigen de manera casi exacta con la ley de pared, dándose un gradiente de velocidad $\Delta u_1 \sim 28\%$, $\Delta u_2 \sim 23\%$ y $\Delta u_3 \sim 20\%$, con respecto a la velocidad máxima del centro del canal. Como era de esperar, un aumento de la velocidad del fluido (mayor Re_τ) implica una menor región de la subcapa viscosa, como puede observarse en la transición 2.5. En la zona de la pared (*buffer region*) $5 < y^+ < 30$, se observa como el comportamiento empieza a distar de ser lineal y está en la zona de transición hacia un perfil logarítmico. En esta zona se tiene un gradiente de velocidad $\Delta u \sim 40\%$ (pico de producción). Seguidamente, se tiene la zona logarítmica $y^+ > 30$, donde el perfil de velocidad medio se rige por un perfil logarítmico. Los perfiles de velocidad para los distintos Re_τ se ajustan perfectamente a la ley de pared, lo que sugiere que dicho comportamiento es un efecto universal (perfiles auto- semejantes). También se observa como para $Re_\tau = 180$ no hay suficiente separación de escalas, para $Re_\tau = 550$ se tiene una existencia marginal de la región de solape y para $Re_\tau = 2000$ en la zona exterior ya empieza a dejar de cumplirse el perfil de velocidad logarítmico y empieza a estar regido por la ley de defecto de velocidad, únicamente, Ec. 2.28, véase la figura 2.6, donde se observa un gradiente de velocidad $\Delta u \sim 70\%$ para $y/h \in [0, 0.2]$ debido a la cortadura generada por la pared.

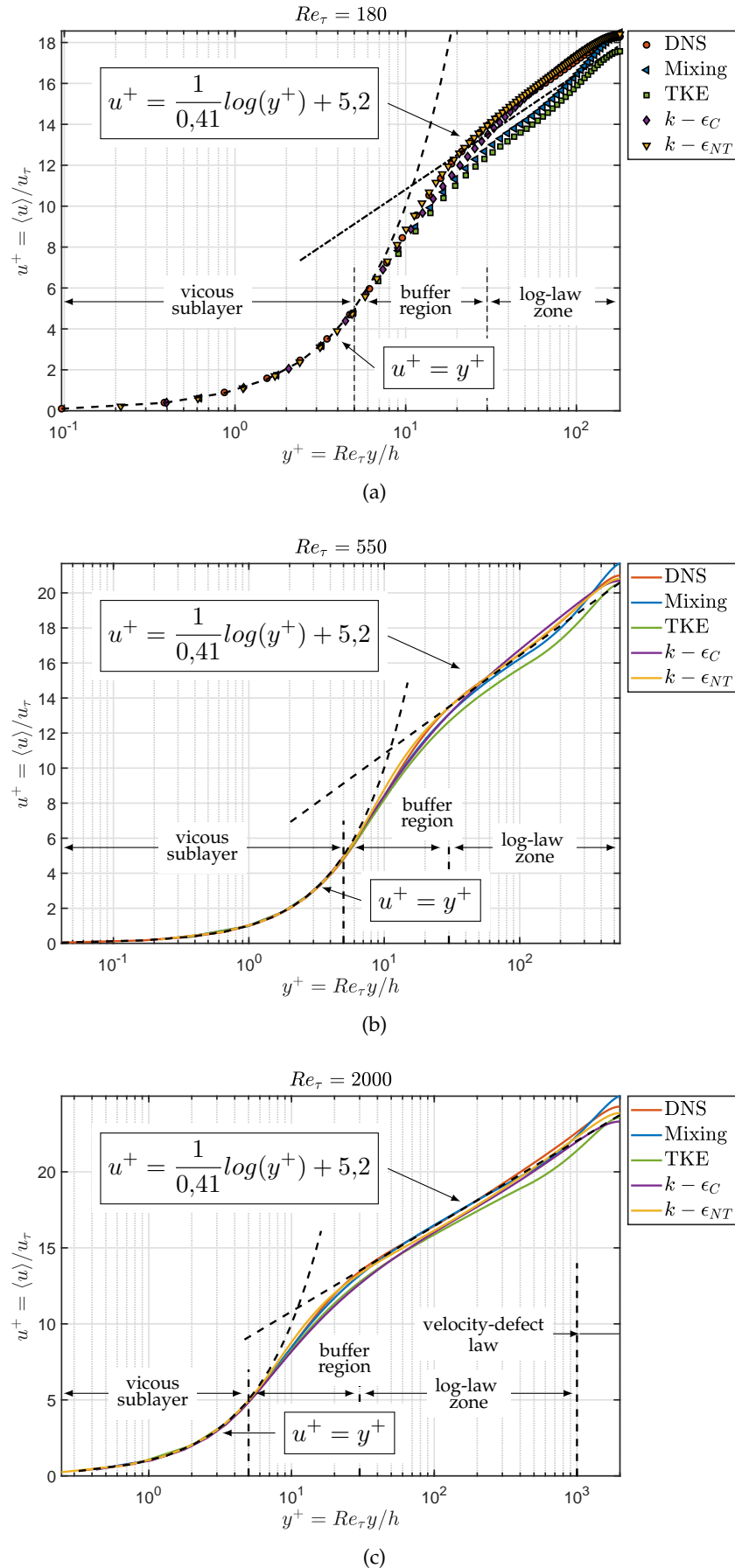


FIGURA 2.4: Perfil de velocidad media adimensional $\langle u^+ \rangle$, modelos: longitud de mezcla, TKE y $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento. (a) $Re_\tau = 180$, (b) $Re_\tau = 550$, (c) $Re_\tau = 2000$.

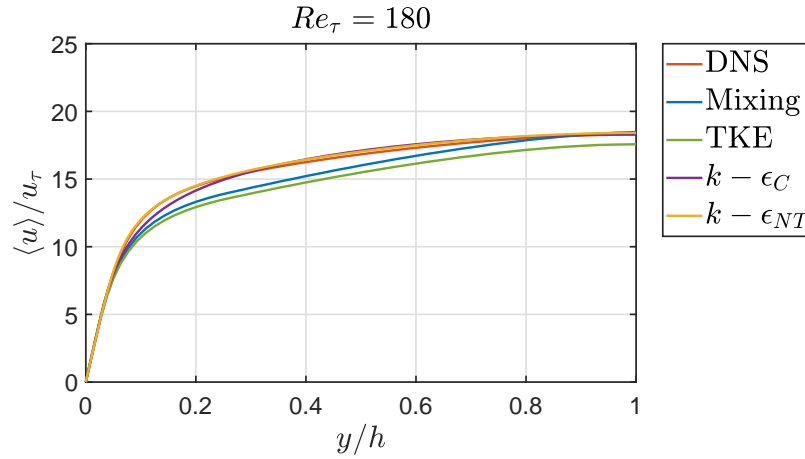


FIGURA 2.5: Transición de los perfiles de velocidad media adimensional $\langle u^+ \rangle$ con $y/h \in [0, 1]$, modelos: longitud de mezcla, TKE y $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento y $Re_\tau = \{180, 550, 2000\}$.

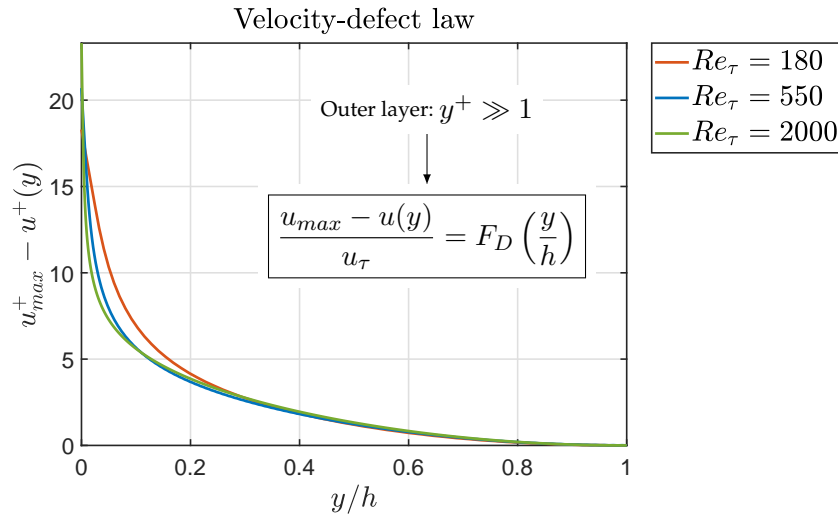


FIGURA 2.6: Ley de defecto de velocidad para el modelo $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento (Chien).

2.6.3. Energía cinética turbulenta y tasa de disipación

En la figura 2.7 se han representado los perfiles de energía cinética turbulenta k^+ y tasa de disipación ϵ^+ adimensionalizados para todos los modelos considerados (excepto el de longitud de mezcla) y los distintos valores de Re_τ . Con una primera visión, se observa que k presenta mejores resultados a ϵ . Esto se debe a que k deriva de la ecuación exacta a diferencia de la ecuación de ϵ que proviene de razonamiento físico (semejante a la ec. de k) y no de deriva de su ecuación matemática exacta. Se observa como el pico de producción tiene lugar en la *buffer region*. Esta energía es transportada en su mayor parte hacia la pared donde es disipada por las pequeñas escalas (escala de Kolmogorov), y el resto se lleva hacia el centro del canal.

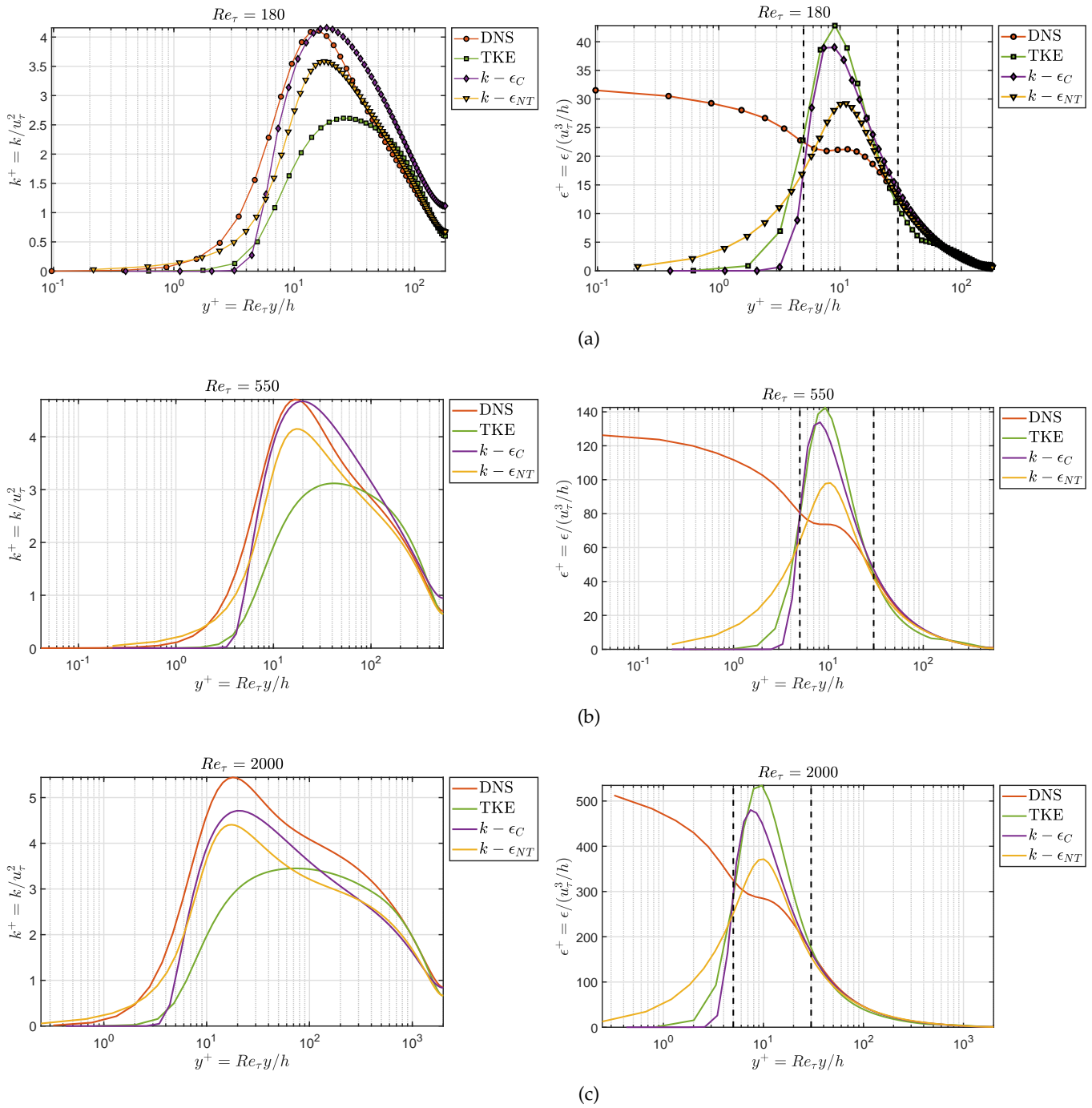


FIGURA 2.7: Perfiles de energía cinética turbulenta k^+ y tasa de disipación ϵ^+ adimensionalizados, modelos: longitud de mezcla, TKE y $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento. (a) $Re_\tau = 180$, (b) $Re_\tau = 550$, (c) $Re_\tau = 2000$.

2.6.4. Viscosidad turbulenta

La viscosidad turbulenta es el término crítico a modelar, siendo esencial obtener con precisión el perfil ν_t sobretodo en la zona cercana a la pared $y/h < 0,2$ ya que es donde tiene lugar el mayor gradiente de velocidad $\Delta u \sim 70\%$, siendo de menor relevancia el efecto de la diferencia de ν_t en $y/h > 0,2$. En la figura 2.8 se han representado los distintos perfiles de viscosidad turbulenta para los modelos estudiados y los distintos Re_τ .

Un defecto del modelo de longitud de mezcla es que predice que en el centro del canal ν_t es nula, algo que no es cierto cómo se comprueba en los resultados del DNS y del resto de modelos. Esto lo solventan los modelos *TKE* y *k- ϵ* . Los modelos de longitud de mezcla y *TKE* proporcionan valores de ν_t que distan mucho del valor que se obtiene de los datos del DNS, sólo *cazando* en buen grado la subcapa viscosa. Los modelos *k- ϵ* aumentan el rango de concordancia, teniendo mejores resultados a mayor Re_τ . Esto era de esperar, ya que los modelos están ideados para modelar la turbulencia. Las funciones de amortiguamiento dadas por Nagano-Tagawa son las que mejor se ajustan. Consecuentemente, el perfil de velocidad obtenido se solapa con los resultados del DNS.

2.6.5. Producción/disipación

En la figura 2.9 se ha representado la relación entre la producción frente a la disipación P/ϵ para los modelos *TKE* y *k- ϵ* con funciones de amortiguamiento y los tres valores de Re_τ . Para $P/\epsilon > 0$ se tiene más producción que disipación y viceversa. En primer lugar, se observa como en la subcapa viscosa dominan claramente la viscosidad molecular, teniendo por tanto mayor disipación que producción. Seguidamente, en la *buffer region* se tiene la zona con el pico de producción. Posteriormente, para $y/h \in [0,2 \sim 0,4]$ (*log-law zone*, aproximadamente) la producción y disipación están en equilibrio, y una vez superada esta región vuelve a ser mayor la disipación a la producción hasta alcanzar una producción nula en el centro del canal.

Con respecto a los datos obtenidos, el valor de la relación máxima P/ϵ siempre se mantiene, siendo en el caso del DNS $\max\{P/\epsilon\}_{DNS} \approx 1,8$, por lo que se concluye que a mayor sea la cantidad de energía transformada de energía cinética a energía interna, mayor deben ser los gradientes de velocidades. Dado que las escalas grandes están limitadas por las escalas del canal, un aumento del Re_τ va a dar lugar a escalas más pequeñas, mayor disipación, lo que consecuentemente se traduce en una mayor separación de escalas. La región logarítmica (o subrango inercial) es por tanto una zona de transporte en la cascada de energía.

Los modelos de turbulencia utilizados difieren (en menor grado a mayor Re_τ , debido a la separación de escalas) de los datos DNS en la *buffer region* como era de esperar ya que los perfiles de energía cinética turbulenta y disipación difieren de los reales. Por tanto, es importante recalcar que estos perfiles no deben utilizarse de cara a un posible diseño.

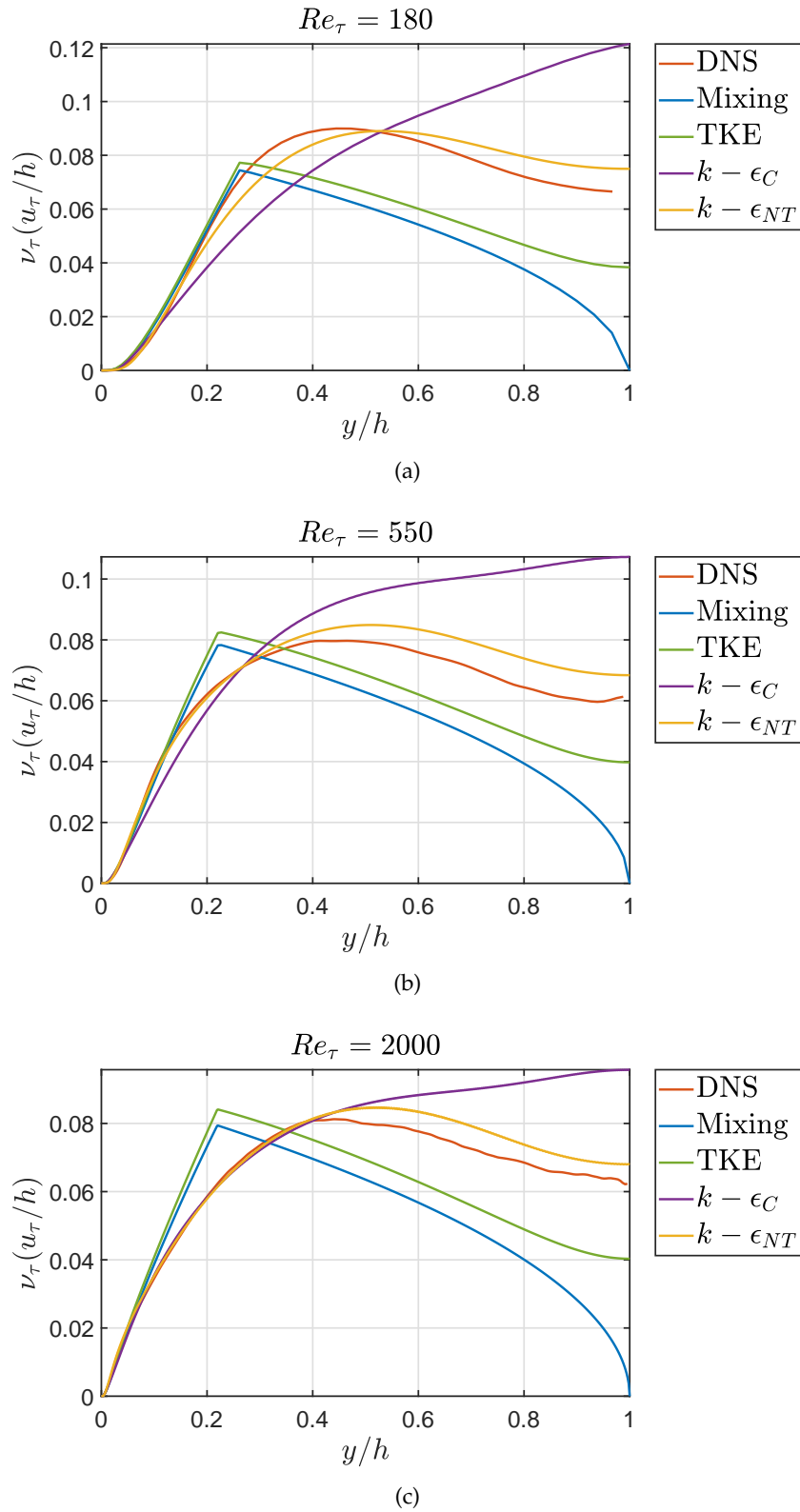


FIGURA 2.8: Perfil de viscosidad turbulenta adimensional ν_t^+ , modelos: longitud de mezcla, TKE y $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento. (a) $Re_\tau = 180$, (b) $Re_\tau = 550$, (c) $Re_\tau = 2000$.

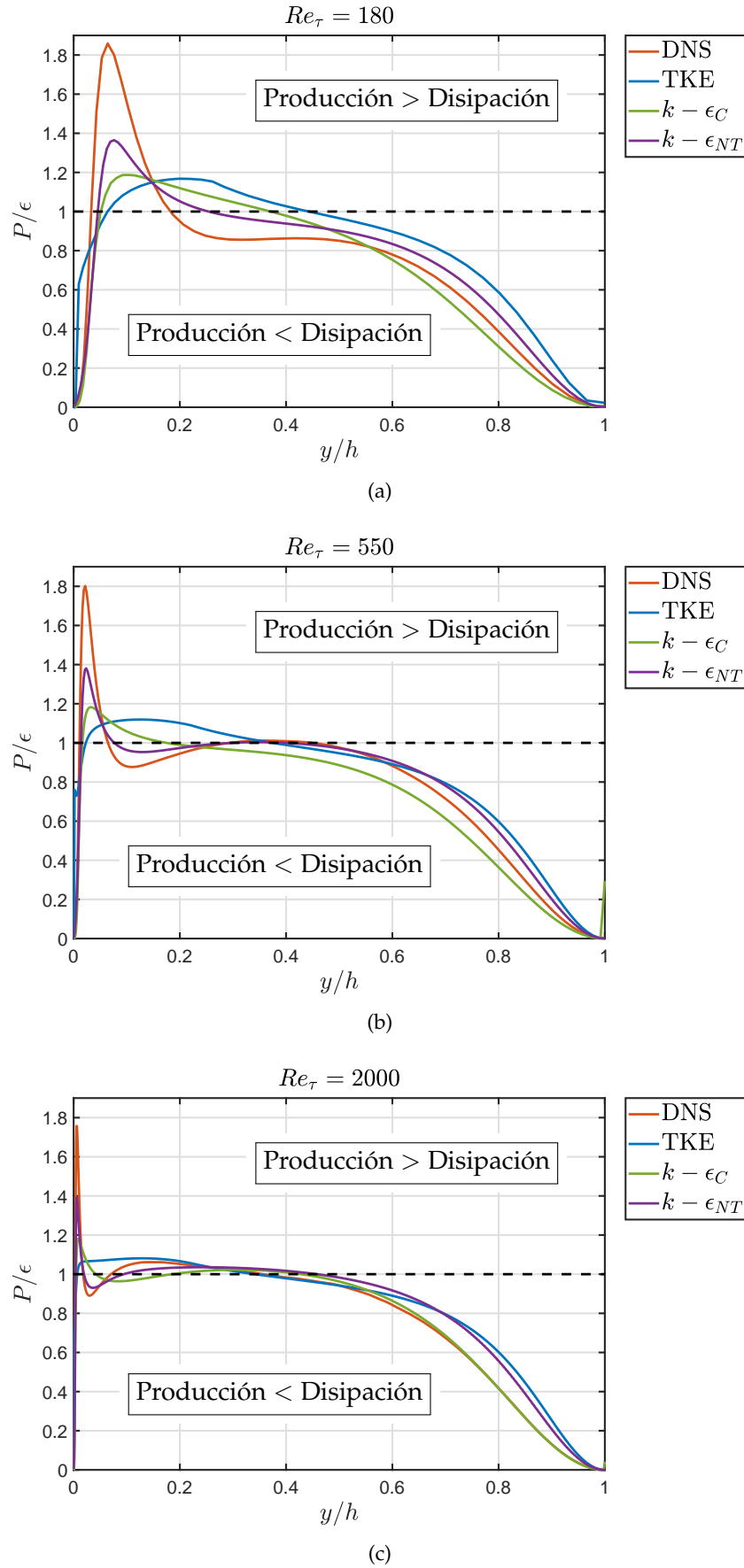


FIGURA 2.9: Relación término de producción frente a la disipación P/ϵ , modelos: TKE y $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento. (a) $Re_\tau = 180$, (b) $Re_\tau = 550$, (c) $Re_\tau = 2000$.

2.6.6. Similitudes y diferencias entre los distintos modelos de turbulencia considerados

- Todos los modelos calculan con precisión el perfil de velocidad en la subcapa viscosa (universal).
- Los modelos empiezan a diferir en la *buffer region*.
- Los modelos de longitud de mezcla y *TKE* debido a que no estima con rigor la viscosidad turbulenta fuera de la subcapa viscosa el perfil de velocidad obteniendo un perfil de velocidad de menor magnitud al de los datos DNS y los modelos $k-\epsilon$, a pesar de ello, dado que el mayor gradiente de velocidad $\Delta u \sim 70\%$ tiene lugar en la zona cercana a la pared $y/h < 0,2$, el efecto de estas diferencias no se aprecia en primer orden con los resultados dados por los datos DNS.
- Los modelos $k-\epsilon$ utilizados presentan distinta distribución de perfiles de k y ϵ , pero el valor de ν_t es similar (mayor concordancia a mayor Re_τ), consecuentemente, el perfil de velocidad obtenido es próximo al de los datos DNS.
- El modelo dado por Chien, calcula con mayor rigor el pico máximo de k , pero al sobreestimar ϵ en la *buffer region* arrastra dicho error hacia la zona externa en el perfil de ν_t estimando un valor mayor ésta. Esto implica un perfil de velocidad de menor magnitud en la zona discordante.
- Todos los modelos utilizados calculan de manera errónea la disipación en la zona cercana a la pared como era de esperar. Esto se debe a que los modelos consideran disipación isotrópica entre una de las muchas simplificaciones consideradas.

2.7. Otros resultados y observaciones

- Se intentó mejorar el código para hacerlo más robusto. Para ello, se empleó un esquema en espacio en diferencias centradas y progresivas en los extremos de orden $\mathcal{O}(\Delta y^2)$. Para el esquema temporal se implementó un Runge-Kutta de 4-5 pasos con paso temporal variable. La combinación de ambos hacía más inestable el problema y han quedado descartados en el problema de estudio.
- Los modelos de difusividad turbulenta están basados en la hipótesis de Boussinesq que asume que el tensor aparentes de Reynolds es paralelo al tensor de velocidad de deformación, lo que generalmente, no es cierto. Además asume efectos locales, lo que tampoco se ajusta a lo que ocurre en la realidad.
- Aplicar leyes de pared sólo va a dar resultados razonables si la capa límite está adherida a la pared.
- En RANS se modela todo, desde las escalas pequeñas (universales) hasta las escalas grandes (limitadas por la escala del dispositivo), y está limitado a la obtención de variables medias.
- En el modelo $k-\epsilon$ con las funciones de amortiguamiento dadas por Launder-Sharma y Lam-Bremhorst proporcionaban soluciones espurias debido a las altas inestabilidades en la zona cercana a la pared y no se consiguieron regularizar.

2.8. Conclusiones

En el presente trabajo se ha realizado una simulación RANS de un flujo turbulento en un canal para los modelos de turbulencia: longitud de mezcla, TKE y $k-\epsilon$ con funciones de amortiguamiento, de menor a mayor complejidad. Los resultados obtenidos se han comparado entre sí, así como con los datos de una simulación numérica directa (DNS). Los modelos citados se basan en la hipótesis de Boussinesq que dicta que los esfuerzos de Reynolds son proporcionales a una viscosidad turbulenta por el tensor de velocidad de deformación del flujo. La diferencia de los modelos radica en como obtienen el valor de la viscosidad turbulenta, requiriendo 0,1, y 2 ecuaciones adicionales de transporte para su obtención, respectivamente. El grado de concordancia del perfil de velocidad medio es mejor en el caso del modelo $k-\epsilon$ (mejorando aún más a mayor número de Reynolds), debido a que tiene en cuenta ecuaciones independientes para representar las escalas del flujo (k -grandes, ϵ -pequeñas). Los perfiles de k y ϵ difieren según las funciones de amortiguamiento utilizados, a pesar de ello, se compensan entre sí estas diferencias y proporcionan un perfil de viscosidad turbulenta similar al obtenido por los datos DNS, obteniendo los mejores resultados con las funciones de amortiguamiento dadas por Nagano-Tagawa. El perfil obtenido con las funciones de amortiguamiento dadas por Chien discrepa en la zona $y/h > 0,4$ aproximadamente, a pesar de ello, dado que la mayor parte del gradiente de velocidad $\Delta u \sim 70\%$ tiene lugar en la zona cercana a la pared $y/h < 0,2$, el efecto de estas diferencias no se aprecia en primer orden con los resultados dados por los datos DNS. Por este mismo motivo, el perfil de velocidad del modelo de longitud de mezcla y TKE es también similar, a pesar de las grandes discrepancias de ν_t para $y/h > 0,2$, aproximadamente.

Se ha podido comprobar de primera mano la bonanzas y defectos de los modelos de turbulencia estudiados. Como característica principal, y es la que lo convierte en una herramienta tan relevante a nivel industrial, es su capacidad de capturar variables medias siendo en muchas aplicaciones industriales lo requerido, además su coste computacional es ínfimo frente a una simulación DNS. Es importante hacer notar, que en caso de necesitar capturar por ejemplo velocidades máximas estos modelos no pueden utilizarse debido a que sólo se retiene el valor medio y no puede estimarse con rigor un valor extremo. Por último, indicar que en el modelo $k-\epsilon$ no se requiere especificar una escala de longitud característica del flujo, lo que lo convierte en un modelo más universal.

Apéndice A

Otros resultados

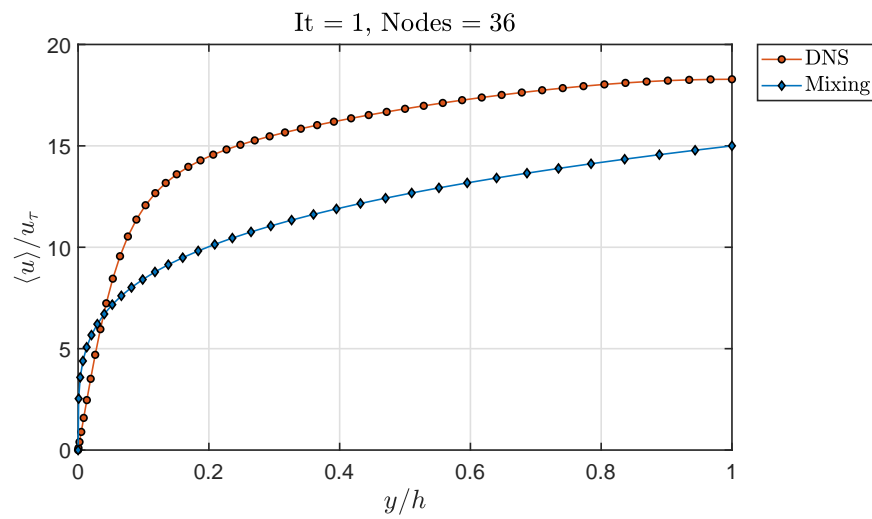


FIGURA A.1: Ejemplo convergencia *rhs* alcanzando régimen estacionario.

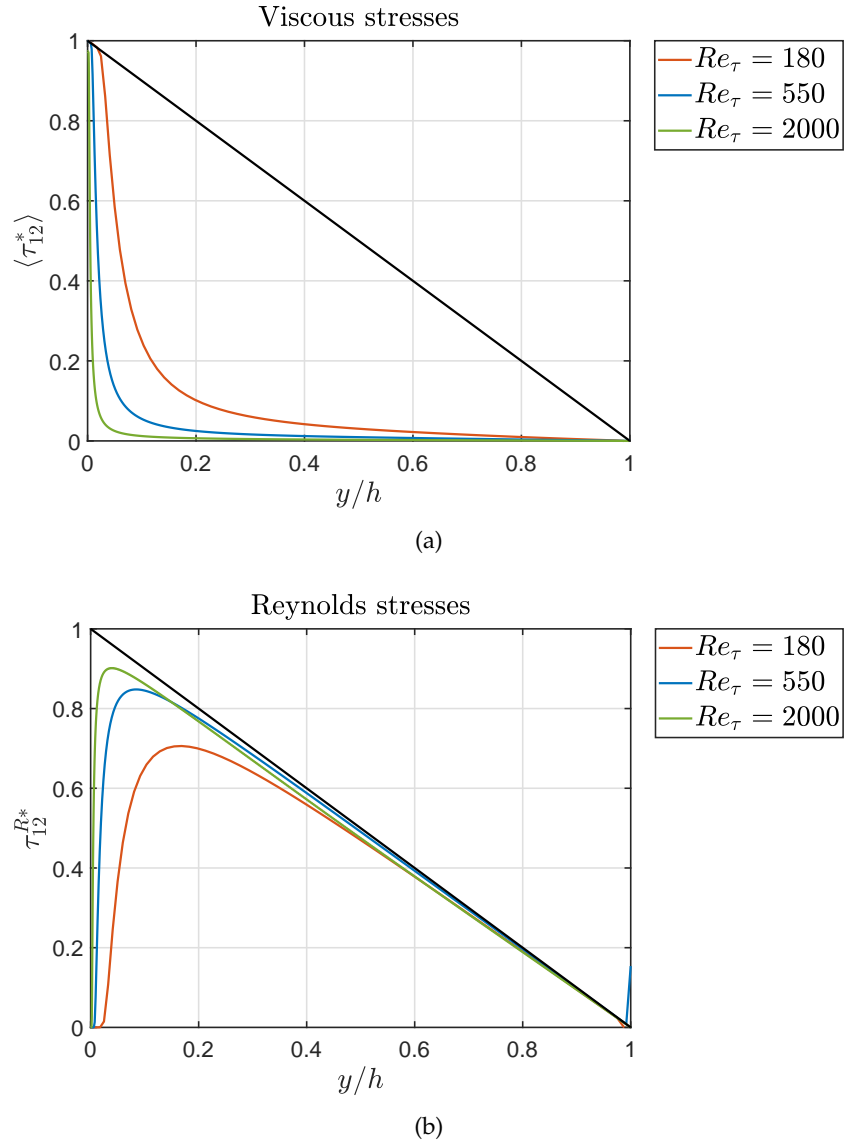


FIGURA A.2: Esfuerzos: (a) viscosos $\langle \tau_{12}^* \rangle$, (b) aparentes de Reynolds τ_{12}^{R*} , para $Re_\tau = 180, Re_\tau = 550, Re_\tau = 2000$.

Bibliografía

- [1] J. Blazek. *Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications*. Second Edition. Oxford: Elsevier Science, 2005.
- [2] M. E. Vázquez Cendón. *Introducción al método de volúmenes finitos*. Universidad de Santiago de Compostela. Servicio de Publicaciones e Intercambio Científico, 2008.
- [3] L. Davidson. *Fluid mechanics, turbulent flow and turbulence modeling*. Division of Fluid Dynamics, Department of Applied Mechanics, Chalmers University of Technology, SE-412 96 Göteborg, Sweden, 2018.
- [4] P. A. Davinson. *Turbulence. An introduction for scientists and engineers*. Oxford University Press, 2004.
- [5] A. Lozano Durán. *Apuntes sobre dinámica computacional de fluidos*. Universidad Politécnica de Madrid, 2015.
- [6] O. Flores y M. García-Villalba. *Turbulence*. Universidad Carlos III de Madrid, 2016.
- [7] S. B. Pope. *Turbulent flows*. Cambridge University Press, 2003.
- [8] W. Rodi y N. N. Mansour. «Low Reynolds number k - ϵ modelling with the aid of direct simulation data». En: *Journal of Fluid Mechanics* 250 (1993), 509–529. DOI: [10.1017/S0022112093001545](https://doi.org/10.1017/S0022112093001545).