



Universidade de Vigo



Universidad
Carlos III de Madrid



POLITÉCNICA

MÁSTER EN MATEMÁTICA INDUSTRIAL

MODELOS MATEMÁTICOS EN MEDIO AMBIENTE

Boletín de ejercicios

ALBERTO CUADRA LARA

Boletín de ejercicios presentado en cumplimiento de los requisitos de la asignatura Modelos Matemáticos en Medio Ambiente curso 2017-2018 para el Máster en Matemática Industrial

22 de marzo de 2018

Índice general

1. Población	1
1.1. Introducción	1
1.2. Ejercicio 1	1
1.3. Ejercicio 2	3
1.4. Ejercicio 3	3
1.5. Ejercicio 4	5
2. Poblaciones	9
2.1. Introducción	9
2.2. Ejercicio 1	9
2.3. Ejercicio 2	11
2.4. Ejercicio 3	13
2.5. Ejercicio 4	14
3. Polución aérea	16
3.1. Introducción	16
3.2. Descripción del problema	16
3.3. Formulación del modelo	16
3.3.1. Significado físico	17
3.3.2. Condiciones iniciales y de contorno	18
3.3.3. Modelo matemático	19
4. Polución acuática	20
4.1. Introducción	20
4.2. Descripción del problema	20
4.3. Formulación del modelo	20
4.3.1. Significado físico	22
4.3.2. Condiciones iniciales y de contorno	22
4.3.3. Modelo matemático	23
4.4. Movimiento del agua en los embalses	23
5. Control ambiental	25
5.1. Introducción	25
5.2. Descripción del problema	25
5.3. Apartado 1	26
5.3.1. Formulación del modelo. Sistema de estado	26
5.3.2. Significado físico	27
5.3.3. Condiciones iniciales y de contorno	27
5.3.4. Modelo matemático	28
5.3.5. Observaciones	28
5.4. Apartado 2	28
5.4.1. Restricciones sobre el estado	28
5.4.2. Restricciones sobre el control	29

5.4.3. Restricciones sobre las reservas ecológicas	29
5.5. Apartado 3	29
5.5.1. Observación	30
5.6. Apartado 4	30
5.6.1. Observaciones	31
5.7. Apartado 5	31
5.8. Apartado 6	32
5.8.1. Punto de vista ecológico	32
5.8.2. Eutrofización	32
Observación	33
Bibliografía	34

Índice de figuras

1.1. Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 1.	2
1.2. Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 2.	3
1.3. Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 3.	4
1.4. Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 3.f.	5
1.5. Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 4.	6
1.6. Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 4.e.	7
1.7. Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 4.f.	7
1.8. Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 4.g.	8
2.1. Variación del número de individuos $N_1(t)$ y $N_2(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 1.	10
2.2. Variación del número de individuos $N_1(t)$ y $N_2(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 2. (a) $t \in [0, 1]$, (b) $t \in [0, 14]$ y (c) $t \in [0, 300]$	12
2.3. Variación del número de individuos $N_1(t)$ y $N_2(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 3.	13
2.4. Variación del número de individuos $N_1(t)$ y $N_2(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 4.	15
3.1. Geometría del problema problema.	17
4.1. Geometría del problema problema para una sección del dominio $\Omega \in \mathbb{R}^3$	21
5.1. Geometría del problema problema.	25
5.2. Representación del coste asociado al filtrado del agente polutante.	30

Boletín de ejercicios 1

Población

1.1. Introducción

El presente documento consiste en la resolución de una breve colección de ejercicios en relación a modelos matemáticos cuyo objetivo es determinar la variación de una población compuesta por una única especie. A lo largo del documento (boletín 1) se va a considerar una población cuyo tamaño, en miles de individuos, viene dado por $N(t)$ [3].

1.2. Ejercicio 1

Si la ecuación que rige $N(t)$ es:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = -0,4N(t), \\ N(0) = 5. \end{cases} \quad (1.1)$$

- a) ¿Con qué modelo clásico se corresponde?
- b) ¿Está la población acotada a lo largo del tiempo?
- c) ¿La población desaparece o se mantiene en el tiempo?

El sistema 1.1 corresponde con el modelo de Malthus¹. Su expresión general es

$$\frac{dN(t)}{dt} = lN(t) - dN(t) = \underbrace{(l - d)}_{\mu} N(t) = \mu N(t), \quad (1.2)$$

donde l es la tasa de nacimiento, d la tasa de defunción y μ es la tasa de crecimiento intrínseco. Es una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO) de primer orden lineal, cuya condición inicial debe satisfacer

$$N(0) = N_0 \geq 0, \quad (1.3)$$

es decir,

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = \mu N(t), \quad t \in [0, T], \\ N(0) = N_0 \geq 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

¹Fue el primer modelo matemático que describió la población de una especie (1802).

Para conocer si la población está o no acotada a lo largo del tiempo, a continuación se va a resolver la EDO 5.1:

$$\frac{dN(t)}{dt} = \int \mu N(t) \rightarrow \int \frac{dN(t)}{N(t)} = \int \mu dt \rightarrow \ln(N(t)) = \mu t + C, \quad (1.5)$$

$$N(t) = e^{\mu t + C} = e^{\mu t} e^C = e^{\mu t} C', \quad (1.6)$$

aplicando la condición inicial se tiene

$$N(0) = N_0 \rightarrow N(0) = C' = N_0, \quad (1.7)$$

por tanto, la solución general de la EDO es

$$N(t) = N_0 e^{\mu t}. \quad (1.8)$$

En función al valor de μ se pueden dar tres casos:

- $\mu > 0 \rightarrow$ Crecimiento exponencial de la población.
- $\mu = 0 \rightarrow$ La población se mantiene constante a lo largo del tiempo.
- $\mu < 0 \rightarrow$ Decrecimiento exponencial de la población.

En este caso, $\mu = -0,4 < 0$, decreciendo a lo largo del tiempo. Para tiempos largos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-0,4t} = 0, \quad (1.9)$$

por tanto la población está acotada a lo largo del tiempo, concretamente $N(t) \in [5, 0]$ ² y desaparece para tiempos suficientemente largos. En la figura 1.1 se ha representado la solución del problema, donde puede observarse que para $t = 16$, cuya unidad dependerá de la unidad temporal de la tasa de crecimiento intrínseco μ , se puede considerar la extinción de la especie.

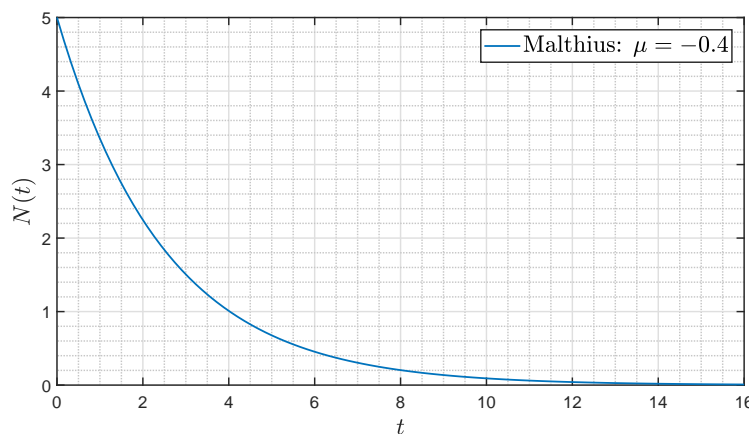


FIGURA 1.1: Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 1.

²Los intervalos corresponden con $[N_0, N_{t_f}]$ y $[t_0, t_f]$.

1.3. Ejercicio 2

Si la ecuación que rige $N(t)$ es:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = 0,4N(t), \\ N(0) = 5. \end{cases} \quad (1.10)$$

- a) ¿Está la población acotada a lo largo del tiempo?.
- b) ¿La población desaparece o se mantiene en el tiempo?.

En este caso $\mu = 0,4 > 0$, es decir, hay un crecimiento exponencial de la especie $N(t)$. Dada la solución analítica Ec. 1.8, se observa que para tiempos largos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{0,4t} = \infty, \quad (1.11)$$

por tanto, la población de la especie no está acotada y no desaparece a lo largo del tiempo, es decir, $N(t) \in [5, \infty)$. En la figura 1.2 se ha representado la variación de la población de la especie $N(t)$ para un tiempo finito $t \in [0, 16]$ donde se observa el crecimiento no acotado mencionado.

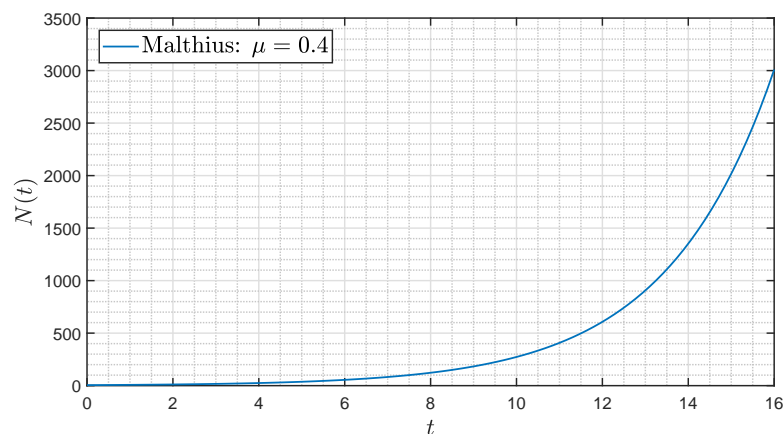


FIGURA 1.2: Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 2.

1.4. Ejercicio 3

Si la ecuación que rige $N(t)$ es:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = 0,4N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{10}\right), \\ N(0) = 5. \end{cases} \quad (1.12)$$

- a) ¿Con qué modelo clásico se corresponde?.
- b) ¿Está la población acotada a lo largo del tiempo?.

- c) ¿La población desaparece o se mantiene en el tiempo?
- d) ¿Cuál sería el tamaño de la población para tiempos grandes?
- e) ¿Tendría sentido considerar, en lugar de $N(0) = 5$, una nueva condición de la forma $N(0) = -5$?
- f) ¿Tendría sentido considerar, en lugar de $N(0) = 5$, una nueva condición de la forma $N(0) = 25$?

El sistema 1.12 corresponde con el modelo de Verhulst-Pearl (1838) y fue la primera modificación que se realizó al modelo de Malthus, en el que se incorporó cota máxima. Es una EDO no lineal, cuya forma general es

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = \mu N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right), \\ N(0) = N_0, \quad 0 \leq N_0 \leq k, \end{cases} \quad (1.13)$$

donde μ es la tasa de crecimiento intrínseco (igual que el modelo de Malthus) y k representa la capacidad del entorno. Esta ecuación no lineal tiene la siguiente solución analítica

$$N(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{N_0} - 1\right) e^{-\mu t}}. \quad (1.14)$$

En este caso, $\mu = 0,4 > 0$, es decir, hay un crecimiento exponencial de la especie $N(t)$. Dada la solución analítica Ec. 1.14, se observa que para tiempos largos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{N_0} - 1\right) e^{-\mu t}} = k, \quad (1.15)$$

por tanto, la población de la especie está acotada y no desaparece a lo largo del tiempo, es decir, $N(t) \in [5, 10]$. En la figura 1.3 se ha representado la variación de la población de la especie $N(t)$ para un tiempo finito $t \in [0, 16]$ donde se observa el crecimiento acotado mencionado. Como observación, esta curva recibe el nombre de curva logística.

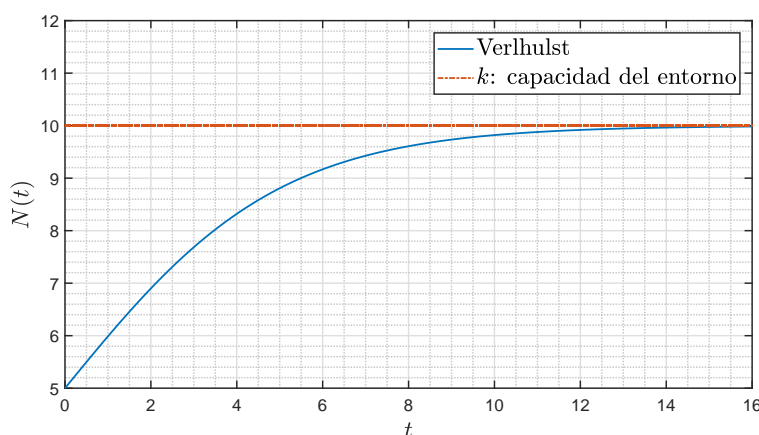


FIGURA 1.3: Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 3.

Con respecto a la cuestión e), no tiene sentido considerar una condición inicial $N(0) = -5$, ya que no cumple con el modelo matemático planteado, no existe una población negativa, el mínimo corresponde con la extinción que es población nula, es decir, $N = 0$.

Por último, con respecto a la cuestión f), en principio no tiene sentido contemplar una población inicial superior a la capacidad máxima del entorno, a pesar de ello, para $N(0) > k$, se tiene un decrecimiento exponencial (fallecen individuos) ($k/N_0 < 1$) tendiendo en el caso límite al valor de k . Esto muestra el buen planteamiento del modelo en este sentido. Lo comentado, se observa en la figura 1.4.

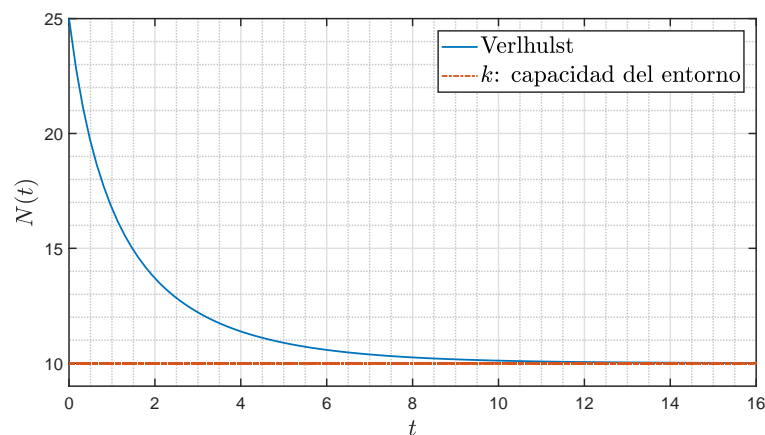


FIGURA 1.4: Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 3.f.

1.5. Ejercicio 4

Si la ecuación que rige $N(t)$ es:

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = 0,4N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{10}\right) \left(\frac{N(t)}{1,5} - 1\right), \\ N(0) = 5. \end{cases} \quad (1.16)$$

- ¿Con qué modelo clásico se corresponde?
- ¿Está la población acotada a lo largo del tiempo?
- ¿La población desaparece o se mantiene en el tiempo?
- ¿Cuál sería el tamaño de la población para tiempos grandes?
- ¿Tendría sentido considerar, en lugar de $N(0) = 5$, una nueva condición de la forma $N(0) = 1$?
- ¿Tendría sentido considerar, en lugar de $N(0) = 5$, una nueva condición de la forma $N(0) = 15$?
- ¿Tendría sentido considerar, en lugar de $N(0) = 5$, una nueva condición de la forma $N(0) = 1,5$?

El sistema 1.16 corresponde con el modelo Efecto Alle (1937) y fue la segunda modificación que se realizó al modelo de Malthius, en el que se incorporó un umbral mínimo de individuos a partir del cual para tiempos largos la población se extinguirá debido a falta de encuentros. Es una EDO no lineal, cuya forma general es

$$\begin{cases} \frac{dN(t)}{dt} = \mu N(t) \left(1 - \frac{N(t)}{k}\right) \left(\frac{N(t)}{M} - 1\right), & 0 < M < k, \\ N(0) = N_0 & 0 \leq N_0 \leq k, \end{cases} \quad (1.17)$$

donde μ es la tasa de crecimiento intrínseco (igual que el modelo de Malthius), k representa la capacidad del entorno (igual que el modelo de Verhulst-Pearl) y M representa el umbral mínimo comentado.

En este caso, $\mu = 0,4$, $k = 10$, $M = 1,5$ y $N(0) = 5$. Dado que el crecimiento intrínseco es positivo, para tiempos largos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = k, \quad (1.18)$$

es decir, la población $N(t)$ tiende a la capacidad máxima del entorno k , por tanto el número de individuos está acotado a lo largo del tiempo y no desaparece a lo largo de éste. En la figura 1.5 se ha representado la solución comentada.

En resumen, para tiempos largos se tiene

$$N(t) \in [5, 10] \text{ con } t \in [0, \infty). \quad (1.19)$$

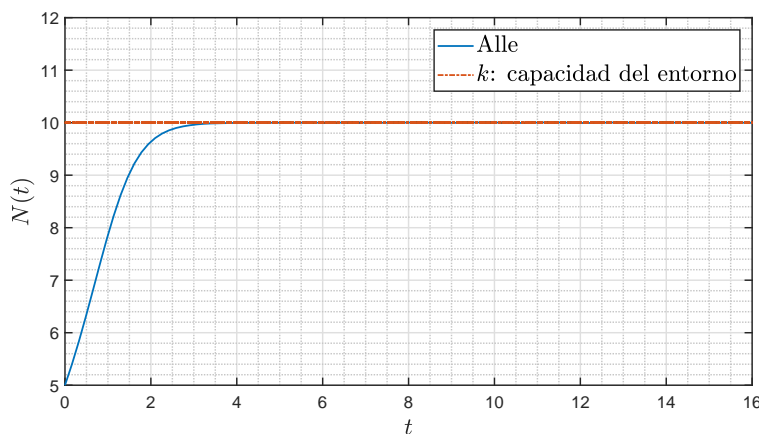


FIGURA 1.5: Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 4.

Con respecto a la cuestión e), debido a que la población inicial en este caso está por debajo del umbral M , para tiempos largos $N'(t)$

$$N'(t) \in [1, 0] \text{ con } t \in [0, \infty), \quad (1.20)$$

tal y como se observa en la figura 1.6.

Con respecto a la cuestión f), es exactamente el caso f) del ejercicio anterior, para $N(0) > k$, se tiene un decrecimiento exponencial (fallecen individuos) ($k/N_0 < 1$)

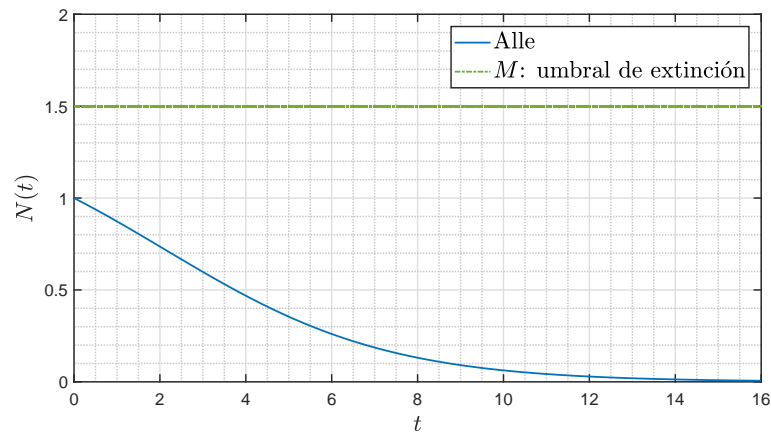


FIGURA 1.6: Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 4.e.

tendiendo en el caso límite al valor de k . Para tiempos largos $N''(t)$

$$N''(t) \in [15, 10] \text{ con } t \in [0, \infty). \quad (1.21)$$

Lo comentado, se observa en la figura 1.7.

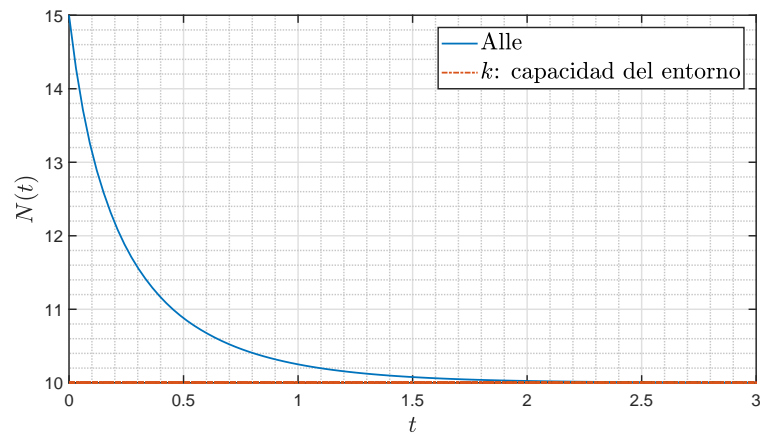


FIGURA 1.7: Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 4.f.

Por último, con respecto a la cuestión g), para $N(0) = M$, se tiene una trayectoria estacionaria, siendo además un punto inestable, es decir

- Para $N(0) < M \rightarrow$ la población tiende a 0, se extingue (acotada).
- Para $N(0) > M \rightarrow$ la población tiende a k , se mantiene (acotada).

En este caso, el modelo no evoluciona tal y como se observa en la figura 1.8.

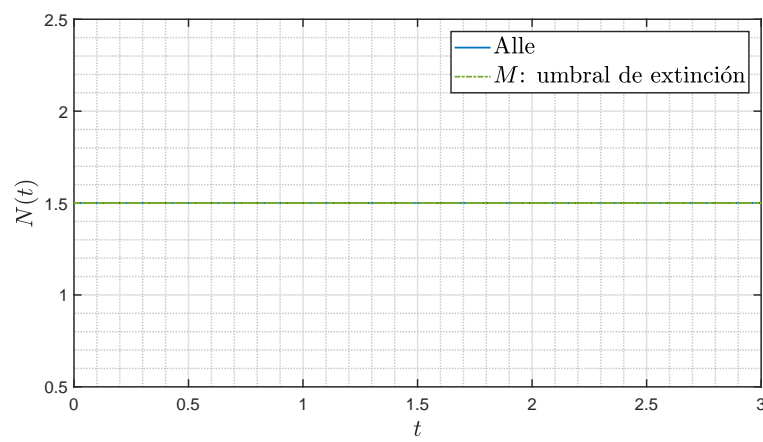


FIGURA 1.8: Variación del número de individuos $N(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 4.g.

Boletín de ejercicios 2

Poblaciones

2.1. Introducción

El presente documento consiste en la resolución de una breve colección de ejercicios en relación a modelos matemáticos cuyo objetivo es determinar la variación de dos poblaciones compuesta por dos especie. A lo largo del documento se va a considerar una población cuyos tamaños vienen dados por $N_1(t)$ y $N_2(t)$, respectivamente [4].

2.2. Ejercicio 1

Si las ecuaciones que rigen $N_1(t)$ y $N_2(t)$ son:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = 0,2N_1(t) - 0,8N_1(t)N_2(t), & N_1(0) = 4, \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = 0,4N_1(t) - 0,8N_1(t)N_2(t), & N_2(0) = 6, \end{cases} \quad (2.1)$$

- a) ¿Qué modelo es?. ¿Qué tipo de comportamiento ocurre: competición, depredador-presa, simbiosis, ...?.
- b) ¿Están las poblaciones acotadas a lo largo del tiempo?.
- c) ¿Las poblaciones desaparecen o se mantienen en el tiempo?.

El sistema de ecuaciones 2.1 corresponde con el modelo de Lotka-Volterra, el cual modela la evolución de varias poblaciones bajo una estructura común¹. Su expresión general para dos poblaciones es

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = \epsilon_1 N_1(t) + \gamma_1 N_1(t)N_2(t), & N_1(0) = N_{0,1}, \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = \epsilon_2 N_2(t) + \gamma_2 N_1(t)N_2(t), & N_2(0) = N_{0,2}, \end{cases} \quad (2.2)$$

donde ϵ es la tasa de crecimiento intrínseco y γ es el coeficiente de interacción de las especies². En la tabla 2.1 se resumen algunos de los posibles casos en función a el posible valor de los coeficientes ϵ_i , y γ_i , con $i = 1, 2$, correspondiendo con la población $N_1(t)$ y $N_2(t)$, respectivamente.

¹El modelo de Lotka-Volterra fue desarrollado en 1924.

²Concretamente, γ_i , representa la influencia de la especie N_j en la evolución de la especie N_i , con $i = j = 1, 2$ e $i \neq j$.

Comportamiento	ϵ_1	ϵ_2	γ_1	γ_2
Competición	$\epsilon_1 > 0$	$\epsilon_2 > 0$	$\gamma_1 < 0$	$\gamma_1 < 0$
Depredador-presa	$\epsilon_1 > 0$	$\epsilon_2 > 0$	$\gamma_1 < 0$	$\gamma_2 > 0$
Simbiosis	$\epsilon_1 > 0$	$\epsilon_2 > 0$	$\gamma_1 > 0$	$\gamma_2 > 0$
Amensalismo	$\epsilon_1 > 0$	$\epsilon_2 > 0$	$\gamma_1 < 0$	$\gamma_2 = 0$
Comensalismo	$\epsilon_1 > 0$	$\epsilon_2 > 0$	$\gamma_1 > 0$	$\gamma_2 = 0$

TABLA 2.1: Resumen de algunos de los posibles comportamientos del modelo de Lotka-Volterra.

Atendiendo al valor de los coeficientes del sistema 2.1, el comportamiento del modelo corresponde con el de competición, lo cual puede deducirse fácilmente a la vista de las ecuaciones. De forma general, la variación de individuos con el tiempo de la especie $N_i(t)$ ve reducida su población debido al número de individuos de la especie $N_j(t)$, con $i \neq j$, dando lugar a la extinción de la especie $N_i(t)$ si

$$\frac{\epsilon_i}{|\gamma_i|} < \frac{\epsilon_j}{|\gamma_j|} \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} N_i(t) = 0. \quad (2.3)$$

En caso contrario la especie que desaparece es $N_j(t)$, y en caso de que ambas sean iguales dependerá del valor de la tasa de crecimiento intrínseco. Es decir, que la especie con menor tasa de crecimiento y mayor sensibilidad a la escasez de alimentos desaparece. En este caso

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\epsilon_1}{|\gamma_1|} = 0,25 \\ \frac{\epsilon_2}{|\gamma_2|} = 0,5 \end{array} \right\} \rightarrow \frac{\epsilon_1}{|\gamma_1|} < \frac{\epsilon_2}{|\gamma_2|} \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = 0, \quad (2.4)$$

tal y como se observa en la figura 2.1. Se visualiza en primera instancia un periodo claro de competición entre las especies, hasta un tiempo $t = 1$ donde se puede considerar la casi completa extinción de la especie $N_1(t)$. Debido al valor de la tasa de crecimiento de la especie $N_2(t)$, ésta no desaparece a lo largo del tiempo³.

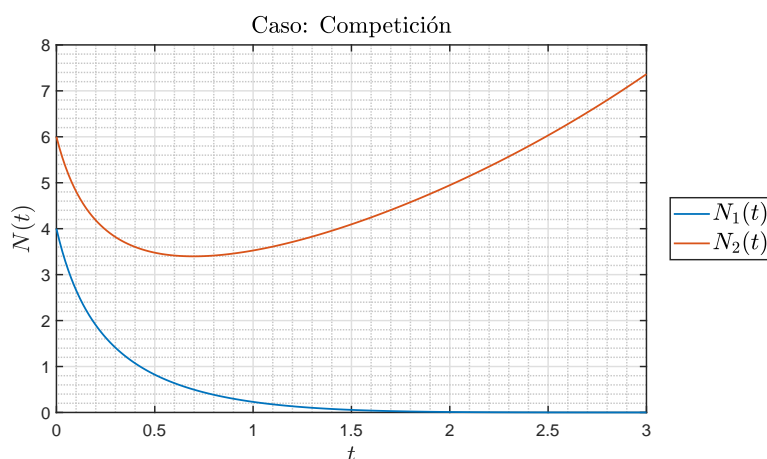


FIGURA 2.1: Variación del número de individuos $N_1(t)$ y $N_2(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 1.

³Los intervalos corresponden con $[N_0, N_{t_f}]$ y $[t_0, t_f]$.

En resumen, para tiempos largos se tiene

$$N_1(t) \in [4, 0] \text{ con } t \in [0, \infty), \quad (2.5)$$

$$N_2(t) \in [6, \infty) \text{ con } t \in [0, \infty), \quad (2.6)$$

por tanto la especie $N_2(t)$ no está acotada a lo largo del tiempo.

2.3. Ejercicio 2

Si las ecuaciones que rigen $N_1(t)$ y $N_2(t)$ son:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = 0,2N_1(t) - 0,8N_1(t)N_2(t), & N_1(0) = 8, \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = -0,4N_1(t) + 0,8N_1(t)N_2(t), & N_2(0) = 6, \end{cases} \quad (2.7)$$

- ¿Qué modelo es? ¿Qué tipo de comportamiento ocurre: competición, depredador-presa, simbiosis, ...?
- ¿Están las poblaciones acotadas a lo largo del tiempo?
- ¿Las poblaciones desaparecen o se mantienen en el tiempo?

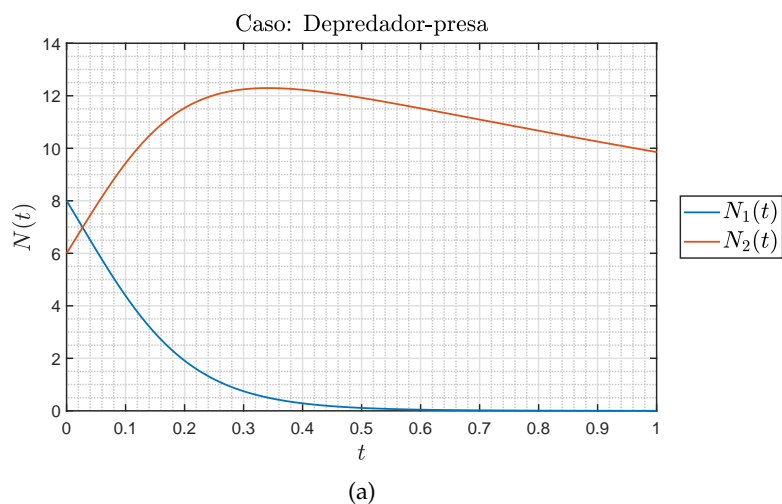
El sistema de ecuaciones 2.7 corresponde con el modelo de Lotka-Volterra, igual que el caso anterior, con la salvedad de que el comportamiento en este caso es el de depredador-presa (modelo periódico). De la ecuación se observa que la tasa de crecimiento de la especie $N_1(t)$ (presas) es bastante reducida (pero positiva), además éste ve en detrimento su número de individuos debido a la especie $N_2(t)$ (depredadores). En cambio, la especie $N_2(t)$ tiene una tasa de crecimiento intrínseco negativa y su supervivencia está condicionada por el número de individuos de la especie $N_1(t)$. De las ecuaciones se deduce por tanto, que la especie $N_1(t)$ perecerá para tiempos largos debido a los depredadores. Consecuentemente, los depredadores $N_2(t)$ se extinguirán debido a la falta de alimento, lo que da lugar al resurgimiento de las presas debido a su tasa de crecimiento intrínseca positiva, teniendo por tanto un comportamiento periódico. Este breve análisis puede observarse en la figura 2.2, donde las subfiguras 2.2a, 2.2b muestran la extinción de las especies $N_1(t)$ y $N_2(t)$, respectivamente, y la subfigura 2.2c muestra el comportamiento periódico mencionado.

En resumen, para tiempos largos se tiene

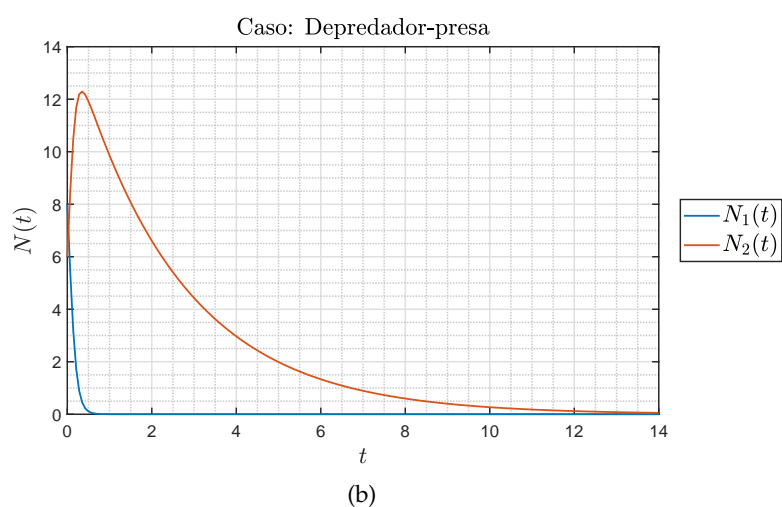
$$N_1(t) \in [8, 0] \text{ con } T \simeq 75, \quad (2.8)$$

$$N_2(t) \in [6, 0] \text{ con } T \simeq 75, \quad (2.9)$$

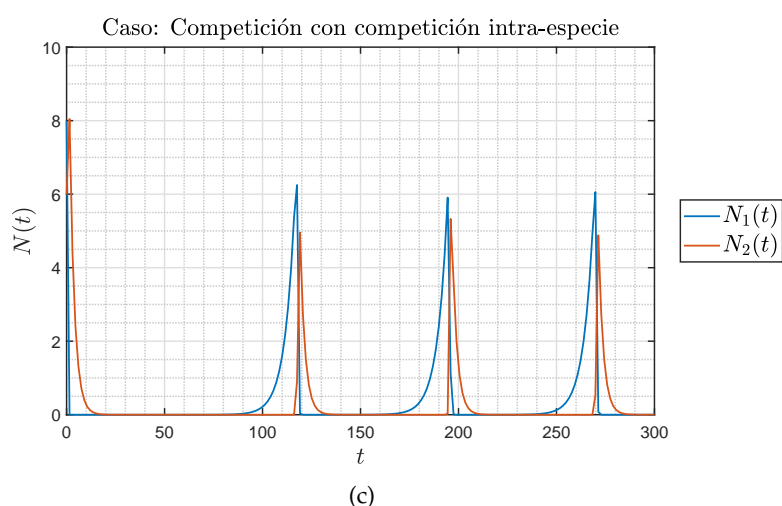
siendo T el periodo de la evolución de las especies. Por tanto, el número de individuos de ambas especies está acotado a lo largo del tiempo y presentan un comportamiento periódico, extinguiéndose y reapareciendo a lo largo de éste.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 2.2: Variación del número de individuos $N_1(t)$ y $N_2(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 2. (a) $t \in [0, 1]$, (b) $t \in [0, 14]$ y (c) $t \in [0, 300]$.

2.4. Ejercicio 3

Si las ecuaciones que rigen $N_1(t)$ y $N_2(t)$ son:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = 0,2N_1(t) + 0,3N_1(t)N_2(t), & N_1(0) = 3, \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = 0,4N_1(t) + 0,5N_1(t)N_2(t), & N_2(0) = 4, \end{cases} \quad (2.10)$$

- ¿Qué modelo es? ¿Qué tipo de comportamiento ocurre: competición, depredador-presa, simbiosis, ...?
- ¿Están las poblaciones acotadas a lo largo del tiempo?
- ¿Las poblaciones desaparecen o se mantienen en el tiempo?

El sistema de ecuaciones 2.10 corresponde con el modelo de Lotka-Volterra, igual que el caso anterior, con la salvedad de que el comportamiento en este caso es el de simbiosis ($\gamma_1 > 0$ y $\gamma_2 > 0$). Analizando los coeficientes de las ecuaciones se observa que las dos especies tienen un crecimiento intrínseco positivo, y además ambas se benefician recíprocamente, esto debido a que el modelo matemático no contempla la acotación superior dará lugar a un crecimiento ilimitado de ambas poblaciones. En la figura 2.3 puede observarse la evolución creciente comentada.

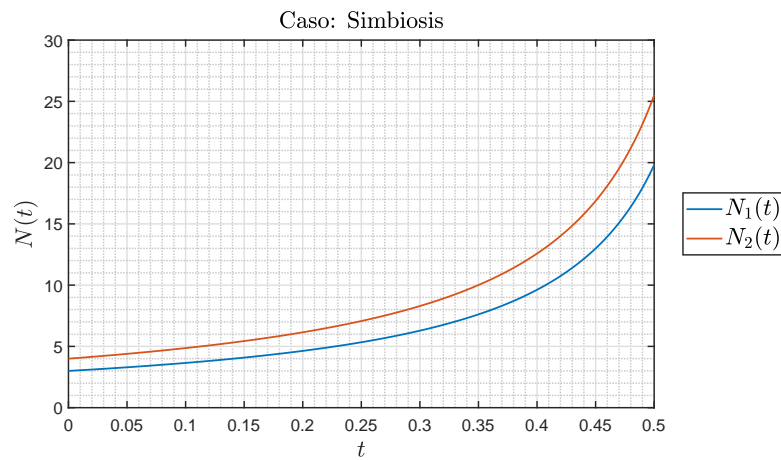


FIGURA 2.3: Variación del número de individuos $N_1(t)$ y $N_2(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 3.

En resumen, para tiempos largos se tiene

$$N_1(t) \in [3, \infty) \text{ con } t \in [0, \infty), \quad (2.11)$$

$$N_2(t) \in [4, \infty) \text{ con } t \in [0, \infty), \quad (2.12)$$

por tanto, el número de individuos de ambas especies no está acotado a lo largo del tiempo y no desaparecen a lo largo de éste.

2.5. Ejercicio 4

Si las ecuaciones que rigen $N_1(t)$ y $N_2(t)$ son:

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = 0,2N_1(t) - 0,6N_1^2(t) - 0,3\frac{N_1(t)N_2(t)}{1+N_1(t)}, & N_1(0) = 3, \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = -0,4N_2(t) - 0,5\frac{N_2^2(t)}{N_1(t)}, & N_2(0) = 4, \end{cases} \quad (2.13)$$

- ¿Con qué tipo de modelo corresponde?
- ¿Están las poblaciones acotadas a lo largo del tiempo?
- ¿Qué representa el parámetro 0.2?
- ¿Qué representa el parámetro 0.6?
- ¿Qué representa el parámetro 0.3?

El sistema de ecuaciones 2.13 corresponde con el modelo de Kolmogorov, también conocido como el modelo de Lotka-Volterra generalizado. Este modelo tiene en cuenta la competición intra-especie y el comportamiento corresponde con el de depredador-presa, $N_1(t)$ y $N_2(t)$, respectivamente. Su expresión general para dos poblaciones es

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = N_1(t)g_1(N_1) - N_2(t)L(N_1), & N_1(0) = N_{0,1}, \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = N_2(t)g_2(N_1, N_2), & N_2(0) = N_{0,2}, \end{cases} \quad (2.14)$$

con

$$g_1(N_1) = \epsilon_1 - \gamma N_1(t) \quad (\text{competición intra-especie}), \quad (2.15)$$

$$g_2(N_1, N_2) = \epsilon_2 - \alpha_2 \frac{N_2(t)}{N_1(t)} \quad (\text{acotación de depredadores}), \quad (2.16)$$

$$L(N_1) = \alpha_1 \frac{N_1(t)}{1 + \beta N_1(t)} \quad (\text{acotación de presas}). \quad (2.17)$$

El número de individuos de la especie $N_2(t)$ (depredadores) ve reducida su población debido a que su tasa de crecimiento intrínseco es negativa y también debido a la competición intra-especie, por lo que desaparecerán para tiempos largos. Obsérvese, que en caso de que el número de presas sea muy elevado en comparación con el número de depredadores, éstos no competirían entre ellos y sólo verían reducido su número debido a su tasa de crecimiento intrínseco. Consecuentemente, las presas no verán reducido su número debido a los depredadores y su evolución dependerá de su tasa de crecimiento intrínseco y del coeficiente de competición intra-especie. Analicemos dicha situación, $N_2(t^*) = 0$:

$$\frac{dN_1(t^*)}{dt} = 0,2N_1(t^*) - 0,6N_1^2(t^*), \quad N_1(0) = N_{0,1}, \quad (2.18)$$

donde $N_1(0) = N_{0,1}$, es desconocido. En este caso, el modelo corresponde con el de Varhulst-Pearl, resuelto en Sec.1.4, cuya ecuación tiene la siguiente solución exacta

$$N(t) = \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{N_0} - 1\right) e^{-\mu t}}, \quad (2.19)$$

comparando las ecuaciones 1.13 y 2.18 término a término, se obtiene $\mu = 0,2$ y $k = \frac{1}{3}$. Recuerdese, que k representa la capacidad del entorno. Para tiempos largos

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N_1(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{k}{1 + \left(\frac{k}{N_{0,1}} - 1\right) e^{-\mu t}} = k, \quad (2.20)$$

por lo que para tiempos largos, independientemente del número inicial de individuos, la población $N_1(t)$ tenderá a la capacidad del entorno $k = \frac{1}{3}$, tal y como se observa en la figura 2.4.

En resumen, para tiempos largos se tiene

$$N_1(t) \in [3, 1/3] \text{ con } t \in [0, \infty), \quad (2.21)$$

$$N_2(t) \in [4, 0] \text{ con } t \in [0, \infty), \quad (2.22)$$

por tanto, el número de individuos de ambas especies está acotado a lo largo del tiempo, siendo la especie $N_1(t)$ (presas) la única que se mantiene.

Con respecto a los parámetros, desglosando el sistema 2.14 y comparando término a término con el sistema 2.13 se obtiene:

- Tasa de crecimiento intrínseco: $\epsilon_1 = 0,2$, $\epsilon_2 = -0,4$.
- Coeficiente competición intra-especie: $\gamma = 0,6$.
- Coeficiente de interacción de las especies: $\alpha_1 = 0,3$, $\alpha_2 = 0,5$.

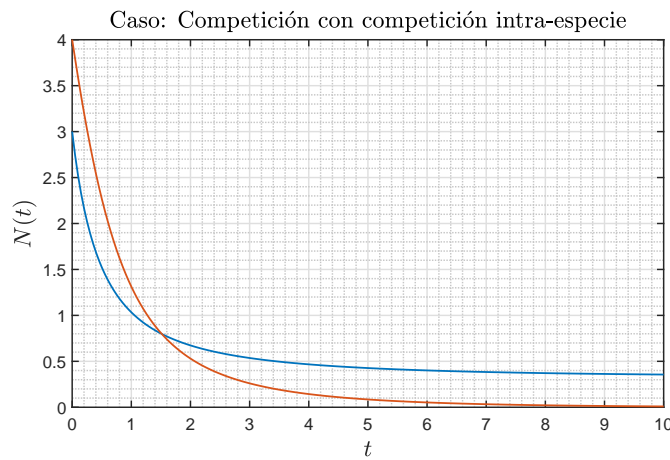


FIGURA 2.4: Variación del número de individuos $N_1(t)$ y $N_2(t)$ a lo largo del tiempo, correspondiente al ejercicio 4.

Boletín de ejercicios 3

Polución aérea

3.1. Introducción

En el presente documento se detalla el modelo matemático que gobierna un problema de polución aérea dado [5].

3.2. Descripción del problema

Se considera una región atmosférica $\Omega \in \mathbb{R}^3$ como el dominio de nuestro problema (ver figura 4.1) que en un instante inicial $t = 0$ está completamente libre de contaminación. En un punto $p \in \Omega$ se produce una emisión a la atmósfera de CO_2 con una intensidad $m(t)$, a lo largo del intervalo de tiempo $t \in [0, T]$.

Debido a que la región está sometida a unos vientos de velocidad conocida $u(x, t)$, para $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$, tiene lugar una dispersión del CO_2 en toda la región, regida por la ecuación de transporte-difusión con precipitación parcial, y donde admitiremos que no hay transferencia de en la capa superior, que hay sedimentación en la superficie de la Tierra y que la región Ω es lo suficientemente grande para que la concentración en su frontera lateral sea nula.

Se pide:

1. Escribir detalladamente la ecuación en derivadas parciales que rige el comportamiento de la concentración de CO_2 , explicitando las condiciones iniciales y las condiciones de contorno en las diferentes partes de la frontera.
2. Describir el significado de los distintos parámetros que aparezcan en la formulación matemática del modelo.

3.3. Formulación del modelo

Denotando $\rho(x, t)$ a la concentración específica (por unidad de volumen) del agente contaminante anhídrico carbónico (o dióxido de carbono CO_2) en el punto $x^1 \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, y en el instante de tiempo $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$, si se realiza un balance de de la concentración en el dominio $\Omega \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ (cilíndrico, ver figura 4.1), se tiene el siguiente problema de valor inicial y de contorno:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\vec{v}\rho) + \sigma\rho = \underbrace{m(t)\delta(x-p)}_f + \mu\Delta\rho + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu(x_3) \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right), \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (3.1)$$

¹Nótese, que $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ ya que se contemplan las tres dimensiones espaciales.

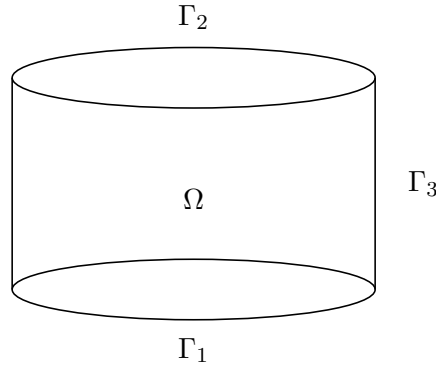


FIGURA 3.1: Geometría del problema problema.

donde:

- $\vec{v}(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$ es la velocidad del viento, que es conocida y verifica la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, considerando capas bajas de la atmósfera,
- σ es la tasa de reacción, y mide el decrecimiento de la concentración.
- $m(t)$ es el flujo másico del agente contaminante descargado en el punto p , es decir representa la intensidad de la fuente puntual,
- $\delta(x - p)$ ² es la distribución delta de Dirac centrada en p ,
- $\mu > 0$ es el coeficiente de difusión horizontal, donde se ha considerado constante,
- $\nu(x_3) > 0$ es el coeficiente de difusión vertical y varía en función de la altura.

3.3.1. Significado físico

En esta subsección se va a detallar el significado físico término a término de la ecuación 5.1:

- $\frac{\partial \rho}{\partial t} \rightarrow$ es el término temporal, y representa la variación local de contaminante.
- $\nabla(\vec{v}\rho) \rightarrow$ es el término convectivo, y representa el transporte de contaminante debido a la velocidad del viento.
- $\sigma\rho \rightarrow$ es el término reactivo (linealizado), y representa la precipitación parcial del contaminante, es decir, $\sigma > 0$, precipitando de manera parcial, es decir, de manera proporcional al coeficiente σ . Las partículas dejan de estar en el aire debido al efecto gravitatorio y sedimentan³.
- $f = m(t)\delta(x - p) \rightarrow$ es el término fuente puntual, y representa la emisión de contaminante a la atmósfera en un punto $p \in \Omega$.

²Puede obtenerse como el límite de una distribución Gaussiana.

³En el caso de que las velocidades del aire fuesen muy altas, se tendría el efecto contrario, erosión $\sigma < 0$. Debido a éstas altas velocidades del viento las partículas del agente contaminante se levantan del suelo y se reincorporan en la columna de aire, aunque depende también de otros factores como la superficie del suelo, características del contaminante, temperatura, etc.

- $\mu\Delta\rho + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu(x_3) \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right) \rightarrow$ es el término difusivo, y representa el proceso de penetración de moléculas de una sustancia en otra durante su contacto, debido al movimiento térmico de las moléculas. Se ha descompuesto en dos partes:
 - $\mu\Delta\rho \rightarrow$ difusión horizontal, donde $\Delta\rho$ es el operador Laplaciano bidimensional $\left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_2^2} \right)$,
 - $\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu(x_3) \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right) \rightarrow$ difusión vertical (dirección x_3).

3.3.2. Condiciones iniciales y de contorno

En el instante inicial $t = 0$, la región atmosférica $\Omega \in \mathbb{R}^3$ está completamente libre de contaminación, es decir

$$\rho(x, 0) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (3.2)$$

Respecto a las condiciones de contorno, sean

- Γ_1 : superficie inferior,
- Γ_2 : superficie superior,
- Γ_3 : superficie lateral,

las fronteras de la región atmosférica Ω considerada, se tienen las siguientes condiciones de contorno:

$$\boxed{\Gamma_1 :} \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = \alpha \rho, \quad \text{en } \Gamma_1 \times (0, T], \quad (3.3)$$

siendo α un coeficiente de proporcionalidad. Esta condición representa la sedimentación sobre la superficie de la Tierra (condición tipo Robin) del agente contaminante y es proporcional a la cantidad de éste presente. Téngase en cuenta, que n es el vector normal exterior unitario a la frontera.

$$\boxed{\Gamma_2 :} \quad \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, \quad \text{en } \Gamma_2 \times (0, T], \quad (3.4)$$

dado que no hay transferencia de contaminante en la capa superior (condición tipo Neumann).

$$\boxed{\Gamma_3 :} \quad \rho(x, t) = 0, \quad \text{en } \Gamma_3 \times (0, T], \quad (3.5)$$

considerando que la región Ω es lo suficientemente grande para que la concentración en su frontera lateral sea nula (condición tipo Dirichlet).

3.3.3. Modelo matemático

En resumen, la ecuación en derivadas parciales (lineal) que rige el comportamiento de la concentración $\rho(x, t)$ de CO_2 , junto a las condiciones iniciales y de contorno

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\vec{v}\rho) + \sigma\rho = f + \mu\Delta\rho + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu(x_3) \frac{\partial \rho}{\partial x_3} \right), & \text{en } \Omega \times [0, T], \\ \rho(x, 0) = 0, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \rho}{\partial n} = \alpha\rho, & \text{en } \Gamma_1 \times (0, T], \\ \frac{\partial \rho}{\partial n} = 0, & \text{en } \Gamma_2 \times (0, T], \\ \rho(x, t) = 0, & \text{en } \Gamma_3 \times (0, T], \end{array} \right. \quad (3.6)$$

y dejan el problema cerrado para su resolución.

Boletín de ejercicios 4

Polución acuática

4.1. Introducción

En el presente documento se detalla el modelo matemático que gobierna un problema de polución acuática dado [6].

4.2. Descripción del problema

Se considera un embalse de agua $\Omega \in \mathbb{R}^3$ como el dominio de nuestro problema (ver figura 4.1) que en un instante inicial $t = 0$ está completamente libre de contaminación. En un punto $p \in \Omega$ se produce de manera accidental un pequeño vertido de ácido nítrico (HNO_3), con una intensidad $m(t)$, a lo largo del intervalo de tiempo $t \in [0, T]$, y procedente de una fábrica próxima a la localización del embalse.

La superficie del embalse está sometida a un campo de vientos que provoca que el agua se mueva con una velocidad conocida $v(x, t)$, para $x \in \Omega$, $t \in [0, T]$. Esto origina una dispersión del HNO_3 en toda la región que suponemos regida por una ecuación de transporte de ingredientes en disolución, y donde admitiremos que dadas las características particulares del contaminante vertido no existe transporte del ingrediente en suspensión, y que por tanto, tampoco hay deposición/erosión de partículas de ingrediente en el fondo del embalse.

Se pide:

1. Escribir detalladamente la ecuación en derivadas parciales que rige el comportamiento de la concentración de HNO_3 disuelto, explicitando las condiciones iniciales y las condiciones de contorno en las diferentes partes de la frontera.
2. Describir el significado de los distintos parámetros que aparezcan en la formulación matemática del modelo.
3. Explicar cómo influyen los datos del campo de vientos en la determinación de la velocidad del agua $v(x, t)$ en el embalse a través de las ecuaciones de Navier-Stokes.

4.3. Formulación del modelo

Denotando $C(x, t)$ a la concentración en fase disuelta del agente contaminante ácido nítrico (HNO_3) en un punto $x^1 \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, y en el instante de tiempo $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$, si

¹Nótese, que $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ ya que se contemplan las tres dimensiones espaciales.

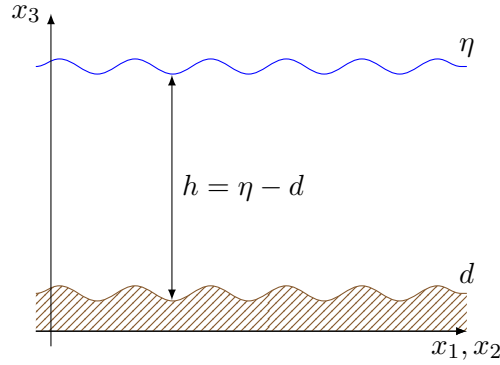


FIGURA 4.1: Geometría del problema para una sección del dominio $\Omega \in \mathbb{R}^3$.

se realiza un balance general de la concentración en fase disuelta en el dominio Ω (ver figura 4.1), se tiene

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\vec{v}C)}{\partial x_i} = \underbrace{m(t)\delta(x-p)}_f + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) - \alpha \left(C - \frac{C_s}{K} \right), \quad \text{en } \Omega \times [0, T], \quad (4.1)$$

donde:

- $\vec{v}(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$ es la velocidad del agua, que es conocida y verifica la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, fluido incompresible.
- $m(t)$ es el flujo másico del agente contaminante en fase disuelta descargado en el punto p , es decir representa la intensidad de la fuente puntual,
- $\delta(x-p)^2$ es la distribución delta de Dirac centrada en p ,
- A_i son los respectivos coeficientes de difusión con $i = 1, 2, 3$,
- α es el coeficiente de adsorción, es decir, representa un coeficiente de proporcionalidad entre el agua y las partículas del agente en suspensión.
- C_s es la concentración del agente polutante en suspensión,
- K es una constante de equilibrio.

Debido a las características intrínsecas del agente polutante, no existe transporte de éste en suspensión, lo que da lugar a que tampoco haya deposición/erosión de partículas de éste en el fondo del embalse, es decir, $C_s = 0$. En consecuencia, la ecuación 5.1 se simplifica y se tiene el siguiente problema de valor inicial y de contorno:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\vec{v}C)}{\partial x_i} = \underbrace{m(t)\delta(x-p)}_f + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) - \alpha C, \quad \text{en } \Omega \times [0, T]. \quad (4.2)$$

Nótese, que la velocidad del agua es conocida para $x \in \Omega, t \in [0, T]$, por lo que no es necesario modelar las ecuaciones de Navier-Stokes para fluidos incompresibles.

²Puede obtenerse como el límite de una distribución Gaussiana.

4.3.1. Significado físico

En esta subsección se va a detallar el significado físico término a término de la ecuación 5.1³:

- $\frac{\partial C}{\partial t} \rightarrow$ es el término temporal, y representa la variación local de contaminante en fase disuelta.
- $\nabla(\vec{v}C) \rightarrow$ es el término convectivo, y representa el transporte de contaminante en disolución debido a la velocidad del agua.
- $f = m(t)\delta(x - p) \rightarrow$ es el término fuente puntual, y representa la emisión de contaminante en fase disuelta al embalse en un punto $p \in \Omega$.
- $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) \rightarrow$ es el término difusivo, y representa el proceso de penetración de moléculas de una sustancia en otra durante su contacto, debido al movimiento térmico de las moléculas.
- $\alpha \left(C - \frac{C_s}{K} \right) \rightarrow$ es el término reactivo (linealizado), y representa el fenómeno de adsorción, que se puede describir como el fenómeno por el cual se produce una retención en la superficie de un cuerpo, de moléculas de otro cuerpo. Dado que en el caso de estudio $C_s = 0$, el término se reduce a αC , es decir, no existe transporte de HNO_3 en suspensión, y consecuentemente, tampoco hay deposición/erosión de éste en el fondo del embalse.

4.3.2. Condiciones iniciales y de contorno

En el instante inicial $t = 0$, la región $\Omega \in \mathbb{R}^3$ está completamente libre de contaminación, es decir

$$C(x, 0) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (4.3)$$

Respecto a las condiciones de contorno, sean

- n : superficie superior (superficie⁴),
- d : superficie inferior (fondo⁵),

las fronteras del dominio Ω considerado, se tienen las siguientes condiciones de contorno⁶:

Superficie ($x_3 = \eta$) :

$$A_3 \frac{\partial C}{\partial x_3} = -v_3 C, \quad \text{en } x_3 = \eta \times (0, T], \quad (4.4)$$

³Aunque no se considera la concentración del agente polutante en suspensión, se explican todos los términos de la ecuación general obtenida con fines didácticos.

⁴La superficie libre del agua cambia con el espacio y con el tiempo, es decir, $\eta = \eta(x, t)$.

⁵La batimetría cambia con el espacio, es decir, $d = d(x)$, salvo que la erosión sea apreciable en periodos cortos de tiempo.

⁶Debido a que la división entre fondo y paredes no está del todo fijada (por ejemplo en el caso de una playa o un lago, donde no hay fronteras laterales) se suelen considerar como un mismo contorno el fondo y las fronteras laterales, estableciendo en éstos la misma condición de contorno. En otros casos, se establece una frontera artificial para separar la región de estudio del resto, en la que no se establece ningún tipo de condición de contorno.

Esta condición representa un equilibrio entre la parte de difusión y la parte de convección (condición de contorno tipo Robin).

Fondo ($x_3 = d$) :

$$A_3 \frac{\partial C}{\partial x_3} = -(1 - \epsilon) D \hat{\alpha} C, \quad \text{en } x_3 = d \times (0, T], \quad (4.5)$$

siendo α un coeficiente de adsorción (agua- partículas/material del fondo)⁷, ϵ representa un coeficiente de porosidad del fondo, y D es el tamaño medio de las partículas que están en el fondo (condición de contorno tipo Robin).

4.3.3. Modelo matemático

En resumen, la ecuación en derivadas parciales que rige el comportamiento de la concentración en fase disuelta $C(x, t)$ de HNO_3 , junto a las condiciones iniciales y de contorno

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial C}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial(\vec{v}C)}{\partial x_i} = f + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_i \frac{\partial C}{\partial x_i} \right) - \alpha C, & \text{en } \Omega \times [0, T], \\ C(x, 0) = 0, & \text{en } \Omega, \\ A_3 \frac{\partial C}{\partial x_3} = -v_3 C, & \text{en } x_3 = \eta \times (0, T], \\ A_3 \frac{\partial C}{\partial x_3} = -(1 - \epsilon) D \hat{\alpha} C, & \text{en } x_3 = d \times (0, T], \end{array} \right. \quad (4.6)$$

y dejan el problema cerrado para su resolución.

4.4. Movimiento del agua en los embalses

En los embalses⁸ las fuerzas que originan el movimiento del agua son principalmente:

- viento (principalmente),
- radiación solar y pérdidas de calor⁹,
- gradientes en la concentración de sustancias disueltas,
- flujos máxicos de entrada y salida (ej. afluentes).

El conjunto de estos procesos hidrodinámicos interviene directamente a través de las ecuaciones de Navier-Stokes¹⁰:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + (v \cdot \nabla)v - \nu \Delta v + \frac{1}{\rho} \Delta p + G = F, \quad \text{en } \Omega \times [0, T], \quad (4.7)$$

⁷Téngase en cuenta, que no tiene por qué coincidir con el coeficiente de adsorción α de la ecuación 4.2

⁸Debido a su confinamiento y extensión los movimientos del agua son muy lentos.

⁹Debido a la radiación solar y a las pérdidas de calor se originan gradientes de temperatura en el fluido, ocasionando variaciones en la densidad que propician el movimiento de éste.

¹⁰Los procesos hidrodinámicos afectan a las condiciones que controlan los ecosistemas existentes en el embalse.

donde:

- $v(v_1, v_2, v_3)$ es la velocidad del agua,
- p es la presión,
- ρ es la densidad del agua,
- ν es el coeficiente de viscosidad cinemática,
- $G = (0, 0, -g)$ es el término gravitatorio,
- F representa el término fuente.

En el caso del viento, éste interviene a través de los gradientes de presiones que se originan en la interfase aire-agua, es decir, en la superficie libre. Concretamente, la explicación física es que la energía cinética del viento¹¹ es transferida al agua en energía potencial a través de la superficie libre (interfase aire-agua) generando olas y corrientes, es decir, la circulación del agua. Este movimiento da lugar a la producción de energía cinética turbulenta en el agua que incide directamente en el proceso de mezcla de los fluidos estratificados, cuyo análisis es esencial para determinar la calidad del agua.

La conexión entre la velocidad del aire y la del agua en la superficie puede obtenerse si se efectúa un balance de fuerzas, donde se ha considerado que en la interfase aire-agua el esfuerzo de corte generado por el viento está en equilibrio [1]

$$\tau_{aire} = \tau_{agua}. \quad (4.8)$$

En este caso, es posible definir:

$$\tau_{aire} = \rho_a u^2 f, \quad (4.9)$$

$$\tau_{agua} = \rho v_s^2 f, \quad (4.10)$$

donde ρ_a es la densidad del aire, u es la velocidad del viento, v_s es la velocidad superficial del agua inducida por el viento y f representa el factor de fricción asociado con el efecto del viento en la interfase aire-agua. Por tanto, se tiene

$$v_s = \frac{\rho_a}{\rho} u^2, \quad (4.11)$$

donde se observa que la velocidad del agua en la superficie libre varía de manera cuadrática con la velocidad del aire. Por tanto, conocida la velocidad del viento, se conoce la velocidad del agua en la superficie y está sería una condición de contorno tipo Dirichlet en la superficie ($x_3 = \eta$) en las ecuaciones de Navier-Stokes (ver Ec. 4.7)

En resumen, a mayor sea la velocidad del viento, mayor será la energía cinética del viento y por tanto mayor será la energía transferida al agua como energía potencial, lo que va a generar oleaje superficial y circulaciones. Esta energía potencial da lugar al levantamiento de la columna de agua fomentando la mezcla en el embalse.

¹¹Que es proporcional al cuadrado de la velocidad del éste.

Boletín de ejercicios 5

Control ambiental

5.1. Introducción

En el presente documento corresponde con la resolución del examen final de la asignatura *Modelos Matemáticos en Medio Ambiente* a fecha 20 de marzo de 2018 [2].

5.2. Descripción del problema

Se considera una región atmosférica $\Omega \in \mathbb{R}^3$ como el dominio de nuestro problema (ver figura 5.1) que en un instante inicial $t = 0$ está completamente libre de contaminación. En los puntos $p_1, p_2, p_3 \in \Omega$ se producen una vertidos correspondientes al funcionamiento de tres plantas cementeras, que provocan emisiones a la atmósfera de óxido de azufre (SO_x) con una intensidades respectivas $m_1(t), m_2(t), m_3(t)$, a lo largo del intervalo de tiempo $t \in [0, T]$.

Debido a que la región está sometida a unos vientos de velocidad conocida $v(x, t)$, para $x \in \Omega, t \in [0, T]$, tiene lugar una dispersión del SO_x en toda la región, regida por la ecuación de transporte-difusión con precipitación parcial, donde admitiremos que no hay transferencia de en la capa superior, que hay sedimentación en la superficie de la Tierra, y que la región Ω es lo suficientemente grande para que la concentración en su frontera lateral sea nula.

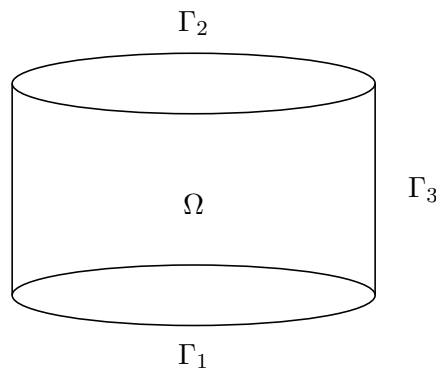


FIGURA 5.1: Geometría del problema problema.

Por otra parte, en esa misma región se encuentran dos reservas ecológicas $B_1, B_2 \in \Omega$ (zonas protegidas de alto valor turístico) que deberán mantener en todo momento un nivel de SO_x por debajo del umbral máximo C_{max} permitido por la legislación. A fin de mantener esas zonas protegidas, lo que se hace en las tres plantas es tratar las

emisiones antes de su envío a la atmósfera a fin de depurarlas, lo cual provoca unos costes económicos respectivos $f_1(m_1(t))$, $f_2(m_2(t))$, $f_3(m_3(t))$ a lo largo del intervalo de tiempo $t \in [0, T]$.

Se pide:

1. Escribir la ecuación en derivadas parciales que rige el comportamiento de la concentración de SO_x , explicitando las condiciones iniciales, las condiciones de contorno en las diferentes partes de la frontera y el significado de todos los parámetros que aparezcan en la formulación matemática del modelo.
2. Dar una formulación matemática a las restricciones sobre las reservas ecológicas.
3. Escribir un posible funcional de coste económico $J(m_1, m_2, m_3)$ a minimizar.
4. Plantear matemáticamente el problema de control, e indicar brevemente los pasos a seguir en el estudio/resolución del problema.
5. Explicar cómo se podría formular el problema sin restricciones sobre B_1 y B_2 , mediante alguna modificación del funcional a minimizar.
6. Describir brevemente algún otro problema de control ecológico/económico que pueda ser planteado para un escenario similar.

5.3. Apartado 1

5.3.1. Formulación del modelo. Sistema de estado

Denotando $\Phi(x, t)$ a la concentración específica (por unidad de volumen) del agente contaminante dióxido de azufre SO_x en el punto $x^1 \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, y en el instante de tiempo $t \in [0, T] \subset \mathbb{R}$, si se realiza un balance de la concentración en el dominio $\Omega \equiv \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ (cilíndrico, ver figura 4.1), se tiene el siguiente problema de valor inicial y de contorno:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla(\vec{v}\Phi) + \sigma\Phi = \sum_{j=1}^3 \underbrace{m_j(t)\delta(x - p_j)}_{f_j} + \mu\Delta\Phi + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu(x_3) \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right), \quad \text{en } \Omega \times [0, T] \quad (5.1)$$

donde:

- $\vec{v}(x, t) = (v_1, v_2, v_3)$ es la velocidad del viento, que es conocida y verifica la ecuación de continuidad $\nabla \cdot \vec{v} = 0$, considerando capas bajas de la atmósfera,
- σ es la tasa de reacción, y mide el decrecimiento de la concentración.
- $m_j(t)$ es el flujo másico j -ésimo del agente contaminante descargado en el punto p_j , es decir representa la intensidad de la fuente puntual o equivalentemente el nivel de vertido,
- $\delta(x - p_j)^2$ es la distribución delta de Dirac centrada en el punto p_j ,
- $\mu > 0$ es el coeficiente de difusión horizontal, donde se ha considerado constante,
- $\nu(x_3) > 0$ es el coeficiente de difusión vertical y varía en función de la altura.

¹Nótese, que $x \equiv (x_1, x_2, x_3)$ ya que se contemplan las tres dimensiones espaciales.

²Puede obtenerse como el límite de una distribución Gaussiana.

5.3.2. Significado físico

En esta subsección se va a detallar el significado físico término a término de la ecuación 5.1:

- $\frac{\partial \Phi}{\partial t} \rightarrow$ es el término temporal, y representa la variación local de contaminante.
- $\nabla(\vec{v}\Phi) \rightarrow$ es el término convectivo, y representa el transporte de contaminante debido a la velocidad del viento.
- $\sigma\Phi \rightarrow$ es el término reactivo (linealizado), y representa la precipitación parcial del contaminante, es decir, $\sigma > 0$, precipitando de manera parcial, es decir, de manera proporcional al coeficiente σ . Las partículas dejan de estar en el aire debido al efecto gravitatorio y sedimentan³.
- $f_j = m_j(t)\delta(x - p_j) \rightarrow$ es el término fuente puntual, y representa la emisión de contaminante a la atmósfera en un punto $p_j \in \Omega$, con $j = 1, 2, 3$.
- $\mu\Delta\Phi + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu(x_3) \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) \rightarrow$ es el término difusivo, y representa el proceso de penetración de moléculas de una sustancia en otra durante su contacto, debido al movimiento térmico de las moléculas. Se ha descompuesto en dos partes:
 - $\mu\Delta\Phi \rightarrow$ difusión horizontal, donde $\Delta\Phi$ es el operador Laplaciano bidimensional $\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} \right)$,
 - $\frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu(x_3) \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right) \rightarrow$ difusión vertical (dirección x_3).

5.3.3. Condiciones iniciales y de contorno

En el instante inicial $t = 0$, la región atmosférica $\Omega \in \mathbb{R}^3$ está completamente libre de contaminación, es decir

$$\Phi(x, 0) = 0, \quad \text{en } \Omega. \quad (5.2)$$

Respecto a las condiciones de contorno, sean

- Γ_1 : superficie inferior,
- Γ_2 : superficie superior,
- Γ_3 : superficie lateral,

las fronteras de la región atmosférica Ω considerada, se tienen las siguientes condiciones de contorno:

$$\boxed{\Gamma_1 :} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \alpha\Phi, \quad \text{en } \Gamma_1 \times (0, T], \quad (5.3)$$

³En el caso de que las velocidades del aire fuesen muy altas, se tendría el efecto contrario, erosión $\sigma < 0$. Debido a éstas altas velocidades del viento las partículas del agente contaminante se levantan del suelo y se reincorporan en la columna de aire, aunque depende también de otros factores como la superficie del suelo, características del contaminante, temperatura, etc.

siendo α un coeficiente de proporcionalidad. Esta condición representa la sedimentación sobre la superficie de la Tierra (condición tipo Robin) del agente contaminante y es proporcional a la cantidad de éste presente. Téngase en cuenta, que n es el vector normal exterior unitario a la frontera.

$$\boxed{\Gamma_2 :}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, \quad \text{en } \Gamma_2 \times (0, T], \quad (5.4)$$

dado que no hay transferencia de contaminante en la capa superior (condición tipo Neumann).

$$\boxed{\Gamma_3 :}$$

$$\Phi(x, t) = 0, \quad \text{en } \Gamma_3 \times (0, T], \quad (5.5)$$

considerando que la región Ω es lo suficientemente grande para que la concentración en su frontera lateral sea nula (condición tipo Dirichlet).

5.3.4. Modelo matemático

En resumen, la ecuación en derivadas parciales (lineal) que rige el comportamiento de la concentración $\Phi(x, t)$ de SO_x , junto a las condiciones iniciales y de contorno

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \nabla(\vec{v}\Phi) + \sigma\Phi = \sum_{j=1}^3 f_j + \mu\Delta\Phi + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\nu(x_3) \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right), & \text{en } \Omega \times [0, T], \\ \Phi(x, 0) = 0, & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = \alpha\Phi, & \text{en } \Gamma_1 \times (0, T], \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0, & \text{en } \Gamma_2 \times (0, T], \\ \Phi(x, t) = 0, & \text{en } \Gamma_3 \times (0, T], \end{array} \right. \quad (5.6)$$

y dejan el problema cerrado para su resolución.

5.3.5. Observaciones

Estamos ante un problema de control óptimo. El objetivo es hallar el vertido óptimo $m_j(t)$ en las plantas 1, 2 y 3, para que los niveles de concentración del polutante $\Phi(x, t)$ en las dos reservas ecológicas B_1 y B_2 estén por debajo del margen máximo que permite la normativa impuesta por la legislación. Para ello, comprobamos la calidad del aire, lo que se denomina estado⁴, que en este caso es la concentración de SO_x , es decir, $\Phi(x, t)$. Además, las ecuaciones anteriores que dictan los niveles de contaminación corresponden con el sistema de estado.

5.4. Apartado 2

5.4.1. Restricciones sobre el estado

Dada la normativa impuesta por la legislación debemos garantizar que $\Phi(x, t)$, es decir, la concentración de SO_x esté dentro de un cierto umbral máximo C_{max} en las

⁴Lo que varía cuando cambiamos el control.

regiones a proteger B_1 y B_2 . Para ello, es necesario imponer ciertas restricciones sobre el estado $\Phi(x, t)$. Una posible formulación matemática sería

$$\Phi(x, t) \leq C_{max}, \forall B_i, \forall t \in [0, T], \forall i. \quad (5.7)$$

Nótese, que se ha impuesto una restricción de tipo puntual, es decir, debe cumplirse en todos los puntos de $B_i \in \Omega$, y en todos los puntos del intervalo $t \in [0, T]$. Además esto exige que la función $\Phi(x, t)$ sea continua en $B_i \times [0, T], \forall i$. En caso de no disponer de funciones continuas se puede basar en la media. Esto supone un inconveniente, ya que la media no garantiza que se cumplan las restricciones en todos los puntos del dominio $B_i \in \Omega$.

5.4.2. Restricciones sobre el control

El control en este caso es el nivel de vertido final después de tratarlo en la planta, es decir, $m_j(t)$. Debido a limitaciones tecnológicas de la planta, ésta solo tiene capacidad para filtrar hasta un cierto umbral mínimo al que denotaremos como m'_j , con $j = 1, 2, 3$, con $m'_j > 0$. Siendo M_j el nivel de vertido sin tratar, la formulación matemática de la restricción sobre el control es

$$0 < m'_j \leq m_j(t) \leq M_j, \forall t \in [0, T], \forall j. \quad (5.8)$$

Nótese, que lo deseado desde el punto de vista ecológico sería alcanzar $m_j(t) = 0$, es decir, que los niveles de vertidos a la atmósfera fuesen nulos, pero no es bueno económicamente.

5.4.3. Restricciones sobre las reservas ecológicas

En resumen, las restricciones sobre las reservas ecológicas son

$$\begin{cases} \Phi(x, t) \leq C_{max}, & \forall B_i, \forall t \in [0, T], \forall i, \\ 0 < m'_j \leq m_j(t) \leq M_j, & \forall t \in [0, T], \forall j. \end{cases} \quad (5.9)$$

5.5. Apartado 3

En el apartado anterior se impusieron las restricciones sobre las reservas ecológicas. Queda ahora, la parte económica, concretamente el coste asociado al filtrado del contaminante. En la figura 5.2 se ha representado el coste asociado al filtrado frente a la descarga del polutante a la atmósfera⁵. Nótese, que en caso de no realizar ningún tratado al aire el coste económico no es cero, sino \tilde{c}_j , con $j = 1, 2, 3$, que corresponde con los gastos de amortización del aire sin tratar.

Un posible funcional objetivo a minimizar, correspondiendo al coste económico global (de todas las plantas) es

$$J(m_1, m_2, m_3) = J(m) = \sum_{j=1}^3 \int_0^T f_j(m_j(t)) dt. \quad (5.10)$$

⁵Nota: Las funciones convexas tienen mínimo lo que va a permitir encontrar solución óptima.

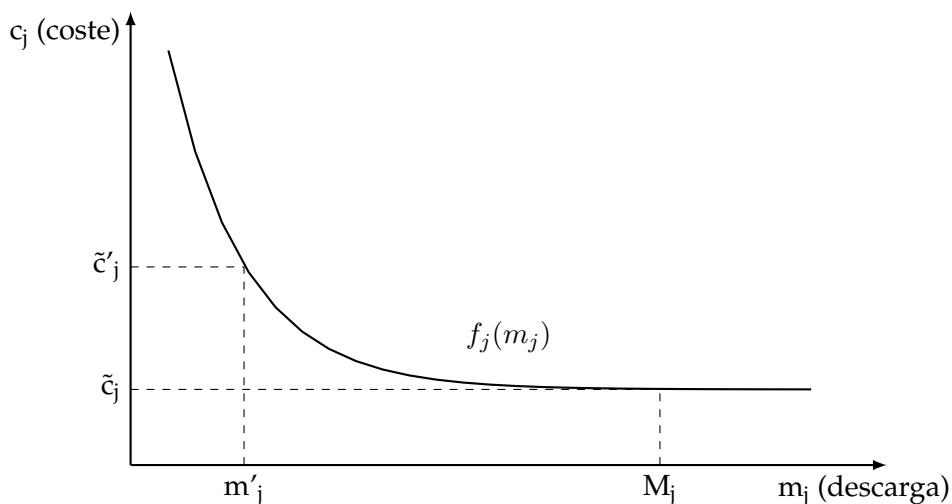


FIGURA 5.2: Representación del coste asociado al filtrado del agente contaminante.

5.5.1. Observación

En caso de no disponer de un filtrado en la planta, el objetivo sería reducir el vertido de contaminante a la atmósfera de tal forma que se cumpla con la normativa vigente y se maximice la producción, lo que consecuentemente indica mayor ganancia económica. Esto matemáticamente puede formularse como

$$J(m_1, m_2, m_3) = J(m) = - \sum_{j=1}^3 \int_0^T F_j(m_j(t)) dt, \quad (5.11)$$

siendo F_j el coste-efectividad de la planta j en términos de la emisión $m_j(t)$.

5.6. Apartado 4

Problema a resolver: Encontrar los niveles óptimos de vertido $m_j(t)$ que minimicen el funcional objetivo $J(m)$, que verifiquen el sistema de ecuaciones diferenciales de estado, y que satisfagan las restricciones sobre el estado y sobre el control.

Pasos a seguir en el problema de control:

1. Calcular los niveles óptimos del vertido j -ésimo $m_j(t)$.
2. Minimizar el funcional $J(m)$.
3. Verificar el sistema de ecuaciones de estado.
4. Satisfacer las restricciones sobre el estado Φ y el control $m = (m_1, m_2, m_3)$.

Pasos a seguir para la resolución del problema:

1. Estudiar el sistema de estado, es decir, garantizar que haya existencia, unicidad, regularidad de solución, etc., como por ejemplo en el caso de la restricción sobre el estado, donde debe garantizarse que la función $\Phi(x, t)$ sea continua para que esté bien planteado.

2. Problema de control. Estudiar la solución del problema de control óptimo. Del mismo modo, que el problema esté bien planteado, que haya existencia de solución, etc. El mejor de los casos sería que la solución fuese única, pero esto generalmente no se tiene, es decir, existen varios mínimos de los cuales se escoge el que mejor satisface las condiciones impuestas.
3. Condiciones de optimalidad. Consiste en tratar de caracterizar cuales son esas soluciones óptimas.
4. Cálculo numérico de la solución (diferencias finitas, elementos finitos, optimización, ...).

5.6.1. Observaciones

Con respecto a las condiciones de optimalidad, son unas ciertas ecuaciones (condiciones) que indican que las que las satisfacen son soluciones óptimas.

Hay tres tipos:

- Suficientes: si verifica la condición es un mínimo, es decir, es solución óptima.
- Necesaria: indica que para que sea solución tiene que verificarse cierta condición, pero no implica que sea solución.
- Necesaria y suficiente: si se verifica cierta condición, si y sólo si, es solución óptima.

5.7. Apartado 5

La restricción impuesta sobre el estado $\Phi(x, t)$ puede ser sustituida por un término de penalización en el funcional de coste, tal que si se garantiza que si se minimiza éste, se garantiza el cumplimiento de la normativa vigente. Matemáticamente, esto puede expresarse como

$$J(m) = \gamma \sum_{j=1}^3 \int_0^T f_j(m_j(t)) dt + \frac{\epsilon}{2} \sum_{i=1}^2 \int_0^T \int_{B_i} (\Phi - c)_+^2, \quad (5.12)$$

donde $(\Phi - c)_+^2$ representa el término de penalización. En el sentido estricto matemático representa la definición de la parte positiva, lo que significa

$$(\Phi - c)_+ = \max \{ \Phi - c, 0 \}. \quad (5.13)$$

Nótese que el cambio realizado ha sido

$$\Phi|_{B_i \times [0, T]} \leq c \iff (\Phi - c)_+ = 0. \quad (5.14)$$

Puede darse el caso en que los ordenes de magnitud de los distintos términos del funcional de coste difieran, en este caso se introducen unos coeficientes de peso γ y ϵ que equilibren dicha diferencia y se minimice con criterio el funcional de coste. Los términos $\frac{1}{2}$ y el cuadrado, se introducen en orden de garantizar la derivabilidad de la función.

5.8. Apartado 6

Son muchos los aspectos en los que puede derivar el problema planteado y pueden ser motivo de estudio. En concreto se exponen dos casos adicionales:

- Estudio desde el punto de vista ecológico.
- Eutrofización (problema de contaminación derivado).

5.8.1. Punto de vista ecológico

Desde un punto de vista ecológico, debe garantizarse en las zonas de alto interés turístico B_i la concentración de polutante debe ser lo más baja posible. Esto puede expresarse matemáticamente mediante el siguiente funcional asociado al coste ecológico

$$J_{B_i}(m) = \frac{1}{|B'_i|T} \int_0^T \int_{B_i} d(x,t) \Phi(x,t) dx dt, \quad i = 1, 2, \quad (5.15)$$

donde $m(t) = (m_1(t), m_2(t), m_3(t))$, $|B'_i|$ denota el área de la región B_i , y $d(x,t)$ representa la densidad de la población en el área a proteger. Además, en caso de lidiar con la conservación de reservas naturales esta función de peso d debe estar construida de tal forma que se incluyan otros factores de polución relevantes para la vida salvaje, tales como la humedad, características del terreno ... [7]. Nótese, que el funcional está planteado para el área de la zona B_i , es decir se ha simplificado a un caso bidimensional.

En este caso, al tener dos funcionales de coste, uno económico y otro ecológico, estamos ante un problema optimización multiobjetivo. En la literatura existen diversas estrategias para llevar a cabo esto, los más usuales son:

- Estrategia no cooperativa (Nash).
- Estrategia cooperativa (Pareto).
- Estrategia jerárquica (Stackelberg).

5.8.2. Eutrofización

La eutrofización puede describirse como el crecimiento descontrolado de fitoplankton y de microalgas en masas, esencialmente en reposo, que afectan de manera perjudicial a la calidad del agua, como por ejemplo la transparencia. Esto da lugar a que no pase luz suficiente para los seres vivos afectando a la población de éstos. Por otro lado, grandes cantidades de algas implica un mayor consumo del oxígeno en el agua, por lo que el oxígeno disuelto (OD) disminuye, lo que afecta directamente a la supervivencia de las especies marinas.

Es de origen antropogénico (debido al ser humano), sus fuentes pueden ser aguas municipales, óxido de nitrógeno de las combustiones de las calderas, aguas sin tratar, polución aérea, etc. Estos agentes introducen en el agua sustancias y nutrientes en exceso lo que ocasiona la creación de estas algas. Por ello, es necesario realizar depuraciones en las zonas de depósito del agua para garantizar el consumo, como por ejemplo mediante la técnica de pre-pantanos.

Observación

Es un modelo exclusivamente tridimensional, ya que la luminosidad al igual de otros parámetros dependen de la altura al fondo del embalse/lago o derivados. Además, para que el modelo se ajuste en buena medida con la realidad es necesario tener en consideración al menos las siguientes 5 especies:

- Nutriente genérico (ej. nitrógeno o fósforo).
- Fitoplancton.
- Zooplancton.
- Detritus orgánicos.
- Oxígeno disuelto.

Bibliografía

- [1] M. H. García. *Hidrodinámica ambiental*. Centro de Publicaciones, Universidad Nacional del Litoral, Argentina, 2000.
- [2] L. J. Álvarez Vazquez. *Modelos Matemáticos en Medio Ambiente. Examen Final marzo 2018*.
- [3] L. J. Álvarez Vazquez. *Modelos Matemáticos en Medio Ambiente. Boletín de ejercicios 1*. 2018.
- [4] L. J. Álvarez Vazquez. *Modelos Matemáticos en Medio Ambiente. Boletín de ejercicios 2*. 2018.
- [5] L. J. Álvarez Vazquez. *Modelos Matemáticos en Medio Ambiente. Boletín de ejercicios 3*. 2018.
- [6] L. J. Álvarez Vazquez. *Modelos Matemáticos en Medio Ambiente. Boletín de ejercicios 4*. 2018.
- [7] L. J. Álvarez Vazquez y col. *An application of interactive multi-criteria optimization to air pollution control*. 2014.