



Universidade Vigo



Universidad
Carlos III de Madrid



POLITÉCNICA

MÁSTER EN MATEMÁTICA INDUSTRIAL

PROBLEMAS INVERSOS

Proyectos

ALBERTO CUADRA LARA

*Proyecto presentado en cumplimiento de los requisitos de la asignatura
Problemas Inversos curso 2017-2018 para el Máster en Matemática
Industrial*

15 de abril de 2018

Índice general

1. Prospección gravitatoria	1
1.1. Introducción	1
1.2. Formulación del problema	1
1.3. Resultados	3
1.3.1. Datos $F_{z,1}$	3
Caso sin perturbar	3
Caso perturbado	4
1.3.2. Datos $F_{z,2}$	6
Caso sin perturbar	6
Caso perturbado	7
1.4. Conclusiones	9
2. Crímenes inversos	10
2.1. Introducción	10
2.2. Formulación del problema	11
2.3. Problema directo	12
2.3.1. Resultados	12
2.4. Problema inverso	17
2.4.1. Resultados	17
Configuración 1	18
Configuración 2	20
Configuración 3	20
2.4.2. Comparación de resultados	22
2.5. Conclusiones	23
3. Ecuación del calor hacia atrás	24
3.1. Introducción	24
3.2. Formulación del problema	24
3.3. Discretización	25
3.4. Problema directo	26
3.4.1. Observaciones	26
3.5. Problema inverso	27
3.5.1. Aproximación de $u(x, 0,4)$	28
3.5.2. Resolución del sistema $AF = G$	28
3.5.3. Método de Tikhonov iterativo	29
3.5.4. Método de Landweber	30
3.5.5. Perturbación en el sistema	31
3.5.6. Resultados para un instante T posterior	32

4. Reconstrucción de bases de datos	35
4.1. Introducción	35
4.2. Construcción de las bases de datos	36
4.3. Desconstrucción y reconstrucción de las bases de datos	36
4.4. Análisis	38
4.4.1. Resultados con 30 % <i>gappyness</i>	38
4.4.2. Resultados con 60 % <i>gappyness</i>	38
4.4.3. Variante en la definición de matriz <i>gappy</i>	41
4.4.4. Observaciones	41
5. Reconstrucción algebraica	43
5.1. Introducción	43
5.2. Reconstrucción algebraica	43
5.3. Tomografía 1	44
5.3.1. Método de Tikhonov	45
5.3.2. TSVD	46
5.4. Tomografía 2	48
5.4.1. Método de Tikhonov	48
5.4.2. TSVD	49
5.4.3. Observaciones	50
5.5. Tomografía 3	50
5.5.1. Método de Tikhonov	51
5.5.2. TSVD	52
5.5.3. Observaciones	52
5.6. Tomografía 4	53
5.6.1. Método de Tikhonov	53
5.6.2. TSVD	54
5.6.3. Observaciones	55
5.7. Observaciones generales	55
6. Derivadas topológicas	56
6.1. Introducción	56
6.1.1. Observaciones	56
6.2. Descripción del problema	57
6.3. Esquema de resolución	58
6.4. Resultados 1	59
6.4.1. Solución de la derivada topológica empleando doce receptores	59
6.4.2. Solución de la derivada topológica empleando los seis primeros receptores	60
6.4.3. Solución de la derivada topológica empleando los seis últimos receptores	61
6.4.4. Solución de la derivada topológica empleando los tres primeros receptores	62
6.4.5. Solución de la derivada topológica empleando uno de cada dos receptores	63
6.4.6. Solución de la derivada topológica empleando uno de cada tres receptores	64
6.5. Comparación	64
6.6. Resultados 2	66

A. Código utilizado en MATLAB	69
B. Resto de resultados	71
Bibliografía	76

Índice de figuras

1.1. Representación de los datos $F_{z,1}$	3
1.2. Caso 1 sin perturbar: (a) Representación de las distintas regresiones para $\lambda(x)$. (b) Regresión óptima.	4
1.3. Caso 1 perturbado: Representación de las distintas regresiones para $\lambda(x)$ con un ruido (a) $\epsilon = 0,001$, (b) $\epsilon = 0,01$ y (c) $\epsilon = 0,1$.	5
1.4. Representación de los datos $F_{z,2}$	6
1.5. Caso 2 sin perturbar: (a) Representación de las distintas regresiones para $\lambda(x)$. (b) Regresión óptima.	7
1.6. Caso 2 perturbado: Representación de las distintas regresiones para $\lambda(x)$ con un ruido (a) $\epsilon = 0,001$, (b) $\epsilon = 0,01$ y (c) $\epsilon = 0,1$.	8
2.1. (a) Error relativo para $T \in [0,1,0,3]$ con $N \in [20,100]$ y $M = 20$. (b) Error relativo para $T \in [0,4,1]$ con $N \in [100,1000]$ y $M = 20$. (c) Convergencia en función de la discretización temporal establecida con $M = 20$.	14
2.2. (a) Error relativo para $T \in [0,1,0,3]$ con $M \in [20,40]$ y $N = 100$. (b) Error relativo para $T \in [0,4,1]$ con $M \in [20,40]$ y $M = 500$. (c) Convergencia en función de la discretización temporal establecida con $N = 106$.	15
2.3. Error relativo para distintos instantes de tiempo T con $M = 40$ y $N = 400$ y $d \in [0,05,0,3]$.	16
2.4. Solución del problema 2.1 con $t \in [0, 1]$.	17
2.5. Representación de la solución aproximada $u(x, 0,39)$, con $M = 40$ y $N = 400$ y de la solución exacta.	18
2.6. Representación de la solución aproximada $u(x, 0,39)$, con $M = 40$ y $N = 400$ y de la solución exacta introduciendo un ruido $\epsilon = 10^{-4}$.	19
2.7. Representación de la solución aproximada $u(x, 0,39)$, con $M = 40$ y $N = 400$ partiendo de la solución exacta.	19
2.8. Representación de la solución aproximada $u(x, 0,39)$, con $M = 40$ y $N = 400$ partiendo de la solución exacta introduciendo un ruido $\epsilon = 10^{-4}$.	20
2.9. Representación de la solución aproximada $u(x, 0,374)$, con $\hat{M} = 35$ y $\hat{N} = 350$ partiendo de la solución exacta introduciendo un ruido $\epsilon = 10^{-4}$.	21
2.10. Representación de la solución aproximada $u(x, 0,366)$, con $\hat{M} = 35$ y $\hat{N} = 350$ partiendo de la solución exacta introduciendo un ruido $\epsilon = 10^{-4}$.	21
3.1. Solución de $u(x, 0,4)$ exacta y por diferencias tras interpolar los datos.	28
3.2. Solución F de resolver el sistema $AF = G$ utilizando el método de Tikhonov con aproximación inicial nula y $\alpha \in [10^{-2}, 10^{-14}]$, junto a la condición inicial exacta.	29
3.3. Solución F de resolver el sistema $AF = G$ utilizando el método de Tikhonov con aproximación inicial nula y $\alpha \in [10^{-13}, 10^{-15}]$, junto a la condición inicial exacta.	29
3.4. Solución F de resolver el sistema $AF = G$ utilizando el método de Tikhonov iterativo y $\alpha = 10^{-10}$, junto a la condición inicial exacta.	30
3.5. Solución F mediante el método de Landweber.	31

3.6. Solución F utilizando el método de Tikhonov con aproximación inicial nula, $\alpha \in [0,1, 10^{-4}]$ y con un ruido $ \epsilon_i \leq 0,01 \max(G)$, junto a la condición inicial exacta.	31
3.7. Solución F utilizando el método de Tikhonov iterativo con $\alpha = 10^{-4}$ y con un ruido $ \epsilon_i \leq 0,01 \max(G)$, junto a la condición inicial exacta.	32
3.8. Solución F mediante el método de Landweber y con un ruido $ \epsilon_i \leq 0,01 \max(G)$	32
3.9. Solución F utilizando el método de Tikhonov con aproximación inicial nula, $\alpha \in [0,1, 10^{-4}]$ y con un ruido $ \epsilon_i \leq 0,01 \max(G)$, junto a la condición inicial exacta y $T = 1$	33
3.10. Solución F utilizando el método de Tikhonov iterativo con $\alpha = 10^{-4}$ y con un ruido $ \epsilon_i \leq 0,01 \max(G)$, junto a la condición inicial exacta y $T = 1$	33
3.11. Solución F mediante el método de Landweber, con un ruido $ \epsilon_i \leq 0,01 \max(G)$ y $T = 1$	34
 4.1. Bases de datos densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha) con valores constantes de z : $z = 0$ (a), $z = 0,5$ (b), $z = 1$ (c).	37
4.2. Base de datos A^1 , densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha): (a) matriz original, (b) matriz <i>gappy</i> , (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m	39
4.3. Base de datos A^1 , densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha): (a) matriz original, (b) matriz <i>gappy</i> , (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m	40
4.4. Base de datos A^1 , densa $N = 50$, elemento <i>gappy</i> nulo (izquierda) y elemento <i>gappy</i> promedio vecinos (derecha): (a) matriz original, (b) matriz <i>gappy</i> , (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m	42
 5.1. Tomografía 1: (a) solución del sistema, (b) sinograma.	44
5.2. Transición regularización tomografía 1: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 1 con valores $\alpha = [10^{-5}, 10^3]$, (b) reconstrucción mediante SVD de la tomografía 1 con $\alpha = 0,1$ e $i = [50, 3500]$ con un paso $\Delta i = 50$, donde i representa el número de modos (valores singulares) retenidos.	45
5.3. Regularización óptima tomografía 1: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 1 con $\alpha = 0,1$, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.	46
5.4. TSVD: valores singulares tomografía 1.	46
5.5. Regularización óptima tomografía 1: (a) reconstrucción mediante el método TSVD de la tomografía 1 con $i \in [1, 1000]$ valores singulares retenidos, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.	47
5.6. Tomografía 2: (a) solución del sistema, (b) sinograma.	48
5.7. Transición regularización tomografía 2: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 2 con valores $\alpha = [10^{-5}, 10^3]$, (b) reconstrucción mediante SVD de la tomografía 2 con $\alpha = 0,1$ e $i = [50, 2000]$ con un paso $\Delta i = 50$, donde i representa el número de modos (valores singulares) retenidos.	48

5.8. Regularización óptima tomografía 2: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 2 con $\alpha = 0,1$, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.	49
5.9. TSVD: valores singulares tomografía 2.	49
5.10. Regularización óptima tomografía 2: (a) reconstrucción mediante el método TSVD de la tomografía 2 con $i \in [1, 1000]$ valores singulares retenidos, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.	50
5.11. Tomografía 3: (a) solución del sistema, (b) sinograma.	50
5.12. Transición regularización tomografía 3: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 3 con valores $\alpha = [10^{-5}, 10^3]$, (b) reconstrucción mediante SVD de la tomografía 3 con $\alpha = 0,1$ e $i = [50, 2000]$ con un paso $\Delta i = 50$, donde i representa el número de modos (valores singulares) retenidos.	51
5.13. Regularización óptima tomografía 3: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 3 con $\alpha = 0,1$, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.	51
5.14. TSVD: valores singulares tomografía 3.	52
5.15. Regularización óptima tomografía 3: (a) reconstrucción mediante el método TSVD de la tomografía 3 con $i \in [1, 1000]$ valores singulares retenidos, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.	52
5.16. Tomografía 4: (a) solución del sistema, (b) sinograma.	53
5.17. Transición regularización tomografía 4: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 4 con valores $\alpha = [10^{-5}, 10^3]$, (b) reconstrucción mediante SVD de la tomografía 4 con $\alpha = 0,1$ e $i = [50, 2000]$ con un paso $\Delta i = 50$, donde i representa el número de modos (valores singulares) retenidos.	53
5.18. Regularización óptima tomografía 4: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 4 con $\alpha = 0,1$, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.	54
5.19. TSVD: valores singulares tomografía 4.	54
5.20. Regularización óptima tomografía 4: (a) reconstrucción mediante el método TSVD de la tomografía 4 con $i \in [1, 1000]$ valores singulares retenidos, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.	55
6.1. (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas) para el problema inverso que se pide resolver: (a) empleando los doce receptores, (b) los seis primeros receptores, (c) los seis últimos receptores, (d) los tres primeros receptores, (e) uno de cada dos receptores, (f) uno de cada tres receptores.	57
6.2. (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando los doce receptores.	59
6.3. (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando los seis primeros receptores.	60

6.4. (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando los seis últimos receptores.	61
6.5. (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando los tres primeros receptores.	62
6.6. (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando uno de cada dos receptores.	63
6.7. (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando uno de cada tres receptores.	64
6.8. Solución de la derivada topológica (DT): (a) empleando los doce receptores, (b) los seis primeros receptores, (c) los seis últimos receptores, (d) los tres primeros receptores, (e) uno de cada dos receptores, (f) uno de cada tres receptores.	65
6.9. (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas) empleando veinte receptores.	66
6.10. Solución de la derivada topológica (DT) correspondiente a cada número de onda $\lambda_r = 5, \dots, 15$	67
6.11. Solución de la derivada topológica promedio resultado de reescalar cada DT para que el mínimo sea -1	68
 B.1. Base de datos A^2 , densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha): (a) matriz original, (b) matriz <i>gappy</i> , (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m	72
B.2. Base de datos A^3 , densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha): (a) matriz original, (b) matriz <i>gappy</i> , (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m	73
B.3. Base de datos A^2 , densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha): (a) matriz original, (b) matriz <i>gappy</i> , (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m	74
B.4. Base de datos A^3 , densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha): (a) matriz original, (b) matriz <i>gappy</i> , (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m	75

Proyecto 1

Prospección gravitatoria

1.1. Introducción

En el presente proyecto se estudia una versión simplificada del cálculo de la densidad de la Tierra a partir de una serie de mediciones del campo gravitatorio terrestre¹. Este tipo de estudios se realiza con el objetivo de identificar la morfología del subsuelo. Véase [3] para los detalles concretos del problema planteado.

Se pueden dar dos casos distintos:

- Problema directo: obtener $F_z(t)$ a partir de $\lambda(x)$.
- Problema inverso: obtener $\lambda(x)$ a partir de $F_z(t)$.

En el caso de estudio, partimos de unos datos $F_z(t)$ dados² y queremos obtener la función $\lambda(x)$, es decir, estamos ante un problema inverso.

En primer lugar, se va a obtener la función densidad $\lambda(x)$ mediante un ajuste polinómico de grado k , y fijaremos el menor grado que se ajuste mejor al comportamiento de los datos F_z . Posteriormente, se someterán a los datos a una pequeña perturbación ϵ (ruido) y se repetirá el mismo procedimiento, analizando como afecta esto a la reconstrucción de $\lambda(x)$. Lo comentado se realizará para dos ficheros de datos distintos $F_{z,1}$ y $F_{z,2}$.

Para llevar a cabo la resolución del problema se ha utilizado el programa *Matlab 2017b*, cuyo código se incluye en el apéndice A.

1.2. Formulación del problema

A continuación se va a realizar un ajuste polinómico, tal que

$$\lambda(x) \simeq a_0 + a_1x + \cdots + a_kx^k, \quad (1.1)$$

donde a_i , con $i = 0, 1, \dots, k$, son los coeficientes del polinomio y k es el grado del polinomio. Se buscará aquel grado a partir del cual las variaciones de λ sean pequeñas en comparación a los de grado superior. Para ello, se procede a la resolución del siguiente problema:

¹Téngase en cuenta que el campo gravitatorio terrestre no es perfectamente radial, debido a que la Tierra no tiene densidad uniforme (no es perfectamente redonda) [3].

²Los datos han sido obtenidos mediante un gravímetro.

El modelo que rige el problema es³

$$F_z(t) = -G \int_0^1 \frac{\lambda(x)}{((x-t)^2 + 1)^{3/2}} dx, \quad (1.2)$$

donde G representa la constante de gravitación universal. Por simplicidad se ha impuesto $G = -1$.

Sustituyendo la Ec. 1.1 en 1.2, se tiene

$$\begin{aligned} F_z(t) &= -G \int_0^1 \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k}{((x-t)^2 + 1)^{3/2}} dx \\ &= -G \int_0^1 \beta(x, t)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_k x^k) dx, \end{aligned} \quad (1.3)$$

$$\beta(x, t) = \frac{1}{((x-t)^2 + 1)^{3/2}}. \quad (1.4)$$

Nótese, que las incógnitas son los coeficientes constantes del polinomio.

Dado que la expresión es lineal, por superposición

$$F_z(t) = -G \left(a_0 \int_0^1 \beta(x, t) + a_1 \int_0^1 \beta(x, t)x + \cdots + a_k \int_0^1 \beta(x, t)x^k \right). \quad (1.5)$$

Se plantea en primera instancia la búsqueda de soluciones del sistema lineal $AX = B$ siguiente

$$-G \underbrace{\begin{pmatrix} \int_0^1 \beta(x, t_1) & \int_0^1 \beta(x, t_1)x & \cdots & \int_0^1 \beta(x, t_1)x^k \\ \int_0^1 \beta(x, t_2) & \int_0^1 \beta(x, t_2)x & \cdots & \int_0^1 \beta(x, t_2)x^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \int_0^1 \beta(x, t_n) & \int_0^1 \beta(x, t_n)x & \cdots & \int_0^1 \beta(x, t_n)x^k \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} F_z(t_1) \\ F_z(t_2) \\ \vdots \\ F_z(t_n) \end{pmatrix}}_B. \quad (1.6)$$

Debido a que estamos ante un problema sobredeterminado (mayor número de ecuaciones que de incógnitas), se procede a realizar una aproximación por mínimos cuadrados, donde se busca $X = (a_0, a_1, \dots, a_k)^T \in \mathbb{R}^k$ tal que minimice⁴

$$f(X) = \|AX - B\|^2 = \sum_{i=1}^m ((AX)_i - b_i)^2 = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} x_j - b_i \right)^2, \quad (1.7)$$

Esto equivale a resolver el siguiente sistema (también lineal)

$$A^T AX = A^T B, \quad (1.8)$$

siendo X la solución de las ecuaciones normales y los coeficientes del ajuste polinómico de $\lambda(x)$. Obsérvese, que este sistema ya no es un sistema sobredeterminado.

³Véase [3] para observar como llegar al modelo planteado.

⁴ $f(X)$ corresponde con el residuo del sistema lineal y es una función convexa, las cuales proporcionan buenos resultados para problemas de optimización.

1.3. Resultados

En esta sección se van a detallar los resultados obtenidos. En primer lugar, se realiza un análisis del primer fichero de datos, correspondiendo con $F_{z,1}$, para el caso sin perturbar y perturbado, respectivamente. Para el caso perturbado se añade un pequeño ruido aleatorio ϵ a los datos F_z , tal que

$$F_z = F_{z,1} + \epsilon, \quad (1.9)$$

donde ϵ incluye implícitamente dicha aleatoriedad⁵. Posteriormente, se repite el procedimiento para el segundo fichero de datos, correspondiendo en este caso con $F_{z,2}$. Por último, se comparan ambos casos.

1.3.1. Datos $F_{z,1}$

En este caso se tienen un total de 67 mediciones distintas de $F_{z,1}$. En la figura 1.1 se han representado los datos $F_{z,1}$ dados.

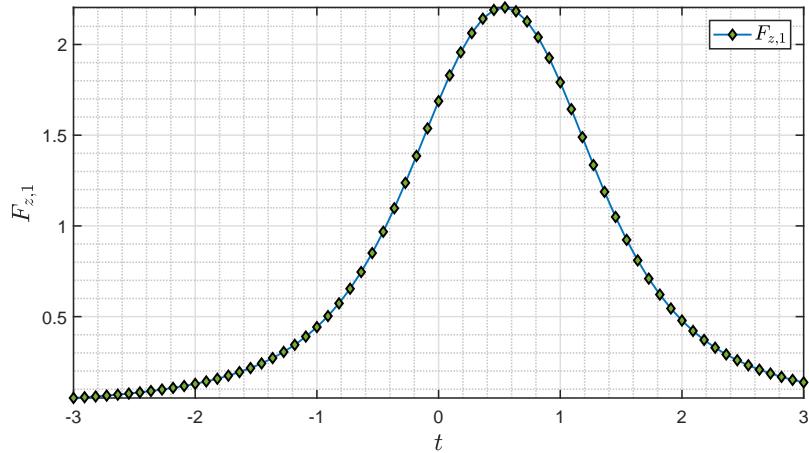


FIGURA 1.1: Representación de los datos $F_{z,1}$.

Caso sin perturbar

En la figura 1.2 se ha representado la función polinómica $\lambda(x)$ desde grado 1 hasta 3. Se observan ligeras discrepancias entre el ajuste lineal y los órdenes superiores, por lo que el primero queda descartado. En cambio, el resto de órdenes presentan un comportamiento muy similar, llegando a superponerse en la representación, dado que se busca el ajuste cuya bondad presente mejores resultados ante el menor grado posible, se ha optado por un ajuste cuadrático (grado 2), cuya representación se observa en la subfigura 1.2b. El ajuste resultante es

$$\lambda(x) \simeq 1,9932 + 1,0862x - 0,2299x^2. \quad (1.10)$$

⁵Para ello, se utiliza la función *rand* de *Matlab*.

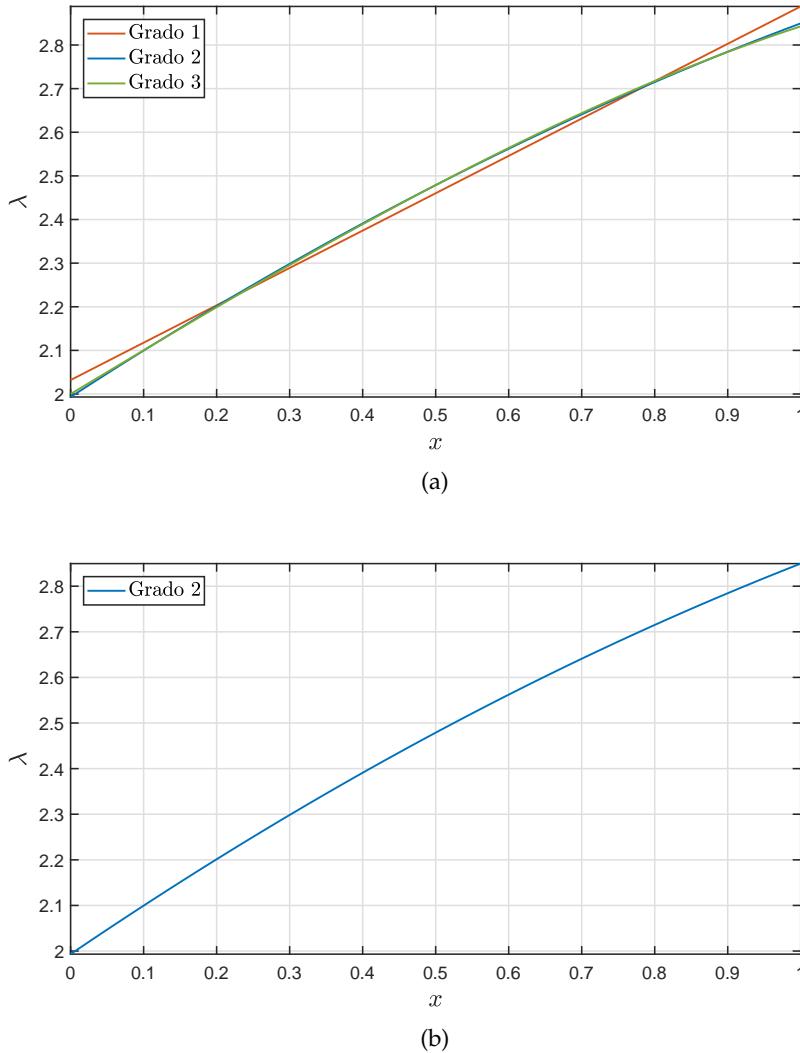


FIGURA 1.2: Caso 1 sin perturbar: (a) Representación de las distintas regresiones para $\lambda(x)$. (b) Regresión óptima.

Caso perturbado

En el caso perturbado, debido al ruido introducido en $F_{z,1}$, el ajuste polinómico presenta un comportamiento más errático a mayor es el grado del polinomio, tal y como se observa en la figura 1.3, donde se han introducido ruidos de valor $\epsilon = 0,0001$, $\epsilon = 0,001$ y $\epsilon = 0,01$, correspondiendo con las subfiguras 1.3a, 1.3b y 1.3c. Se observa que a medida que aumenta el tamaño del ruido, un ajuste de mayor grado presenta peores resultados. A la vista de la solución obtenida, se ha optado por un ajuste cuadrático de nuevo, siendo este

$$\begin{aligned}\lambda_{\epsilon_1}(x) &\simeq 1,994 - 1,0828x - 0,2267x^2, & \epsilon_1 &= 0,0001, \\ \lambda_{\epsilon_2}(x) &\simeq 2,0042 + 1,0291x - 0,17415x^2, & \epsilon_2 &= 0,001, \\ \lambda_{\epsilon_3}(x) &\simeq 2,1679 + 0,1206x + 0,7292x^2, & \epsilon_3 &= 0,01.\end{aligned}\quad (1.11)$$

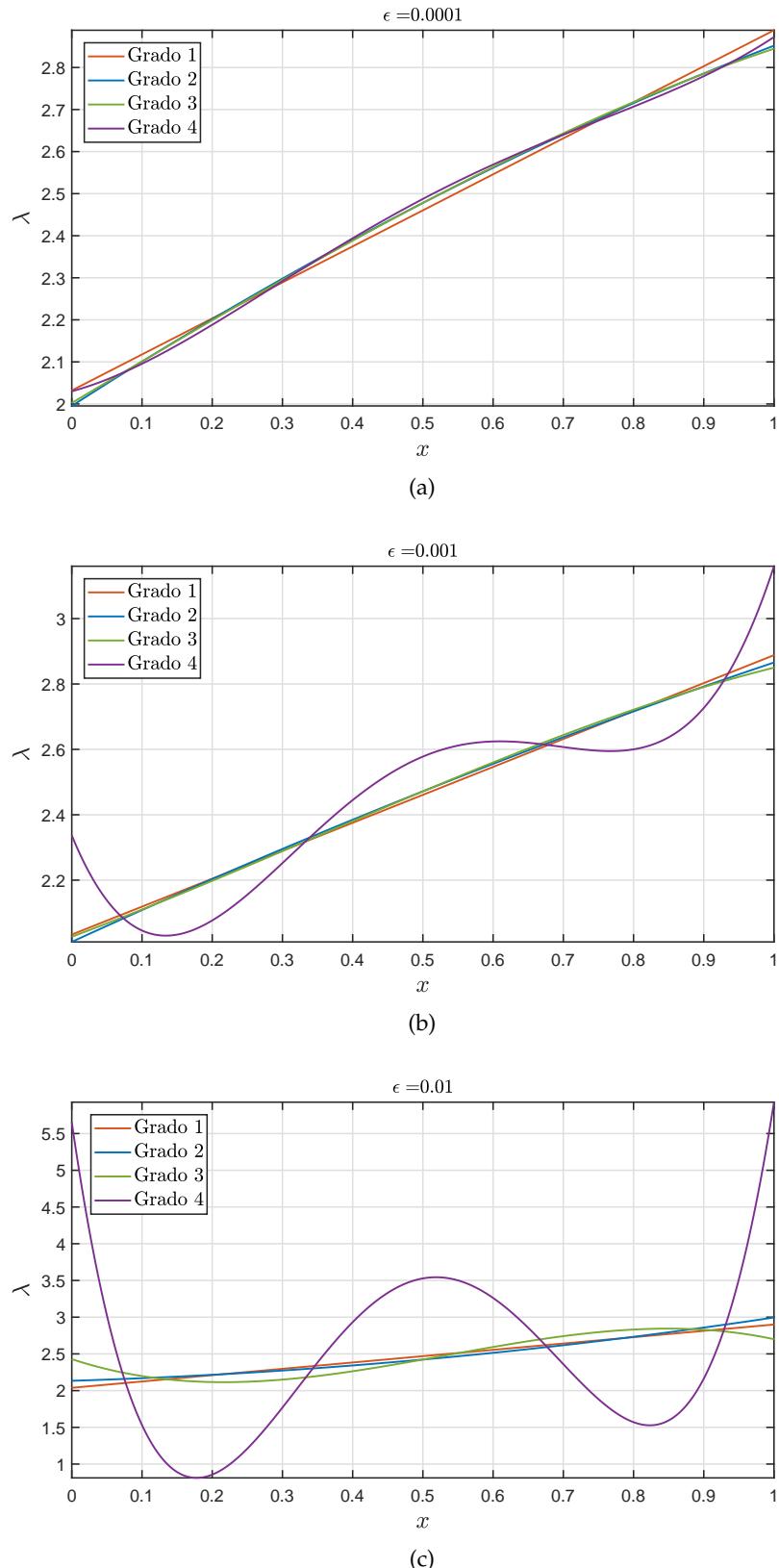


FIGURA 1.3: Caso 1 perturbado: Representación de las distintas regresiones para $\lambda(x)$ con un ruido (a) $\epsilon = 0,001$, (b) $\epsilon = 0,01$ y (c) $\epsilon = 0,1$.

1.3.2. Datos $F_{z,2}$

En este caso se tienen un total de 11 mediciones distintas de $F_{z,2}$, por lo que se espera una mayor inestabilidad originada por una menor toma de mediciones, lo que dificultará obtener una buena aproximación. En la figura 1.4 se han representado los datos $F_{z,2}$ dados.

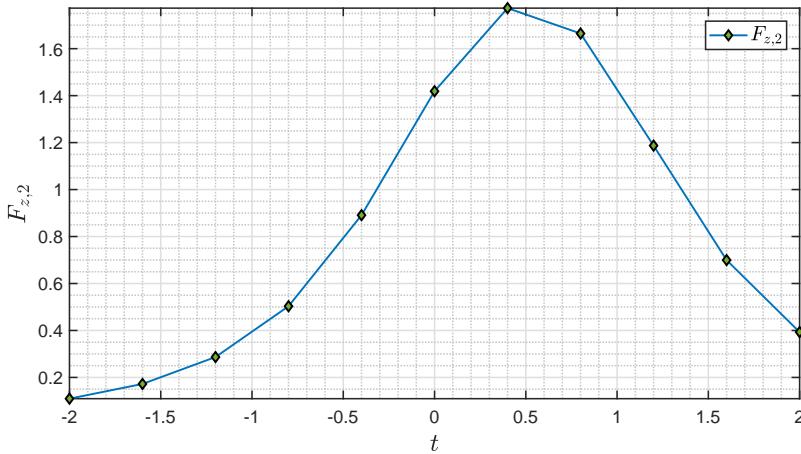


FIGURA 1.4: Representación de los datos $F_{z,2}$.

Caso sin perturbar

En el caso sin perturbar, debido a una menor toma de mediciones de $F_{z,2}$, éstos son más dispares y el ajuste polinómico presenta un comportamiento más errático, no alcanzando un comportamiento similar hasta un orden 5. En la figura 1.3 se observa la representación de las distintas regresiones obtenidas de $\lambda(x)$ hasta un orden 6 (subfigura 1.5a) y la representación de la regresión óptima (subfigura 1.5a), la de grado 5, cuyo ajuste es

$$\lambda(x) = 2,0661 - 3,3165x + 46,922x^2 - 174,3024x^3 + 229,0409x^4 - 97,4848x^5. \quad (1.12)$$

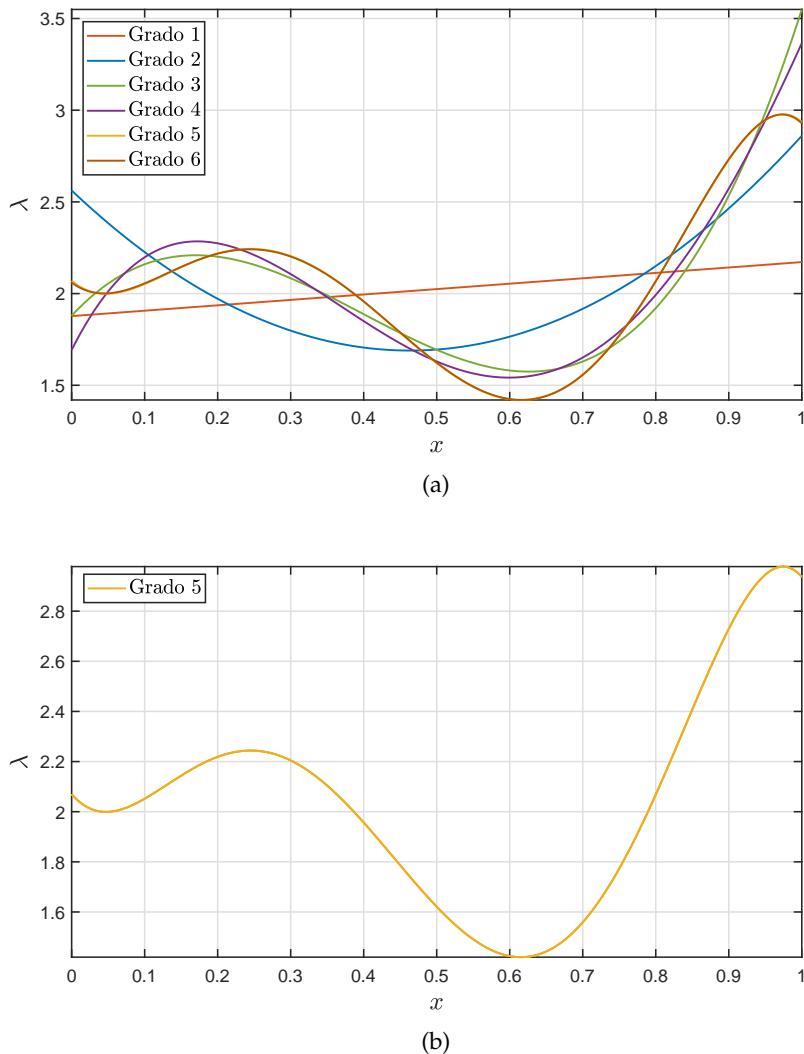


FIGURA 1.5: Caso 2 sin perturbar: (a) Representación de las distintas regresiones para $\lambda(x)$. (b) Regresión óptima.

Caso perturbado

En este caso debido a que se tienen un menor número de mediciones, se observó en el subapartado anterior que un ajuste de mayor orden era necesario para obtener una buena aproximación. Esto supone un problema cuando dichos datos tienen además un cierto ruido ϵ ya que ante ruido un ajuste de mayor grado proporciona un peor ajuste. En este caso, habría que analizar con más énfasis el ajuste, realizando una regularización previa de los datos para disminuir dicho ruido ya que si no tal y como se observa en las subfiguras el grado 5 que en el caso sin perturbar es el óptimo, en este caso, no lo es.

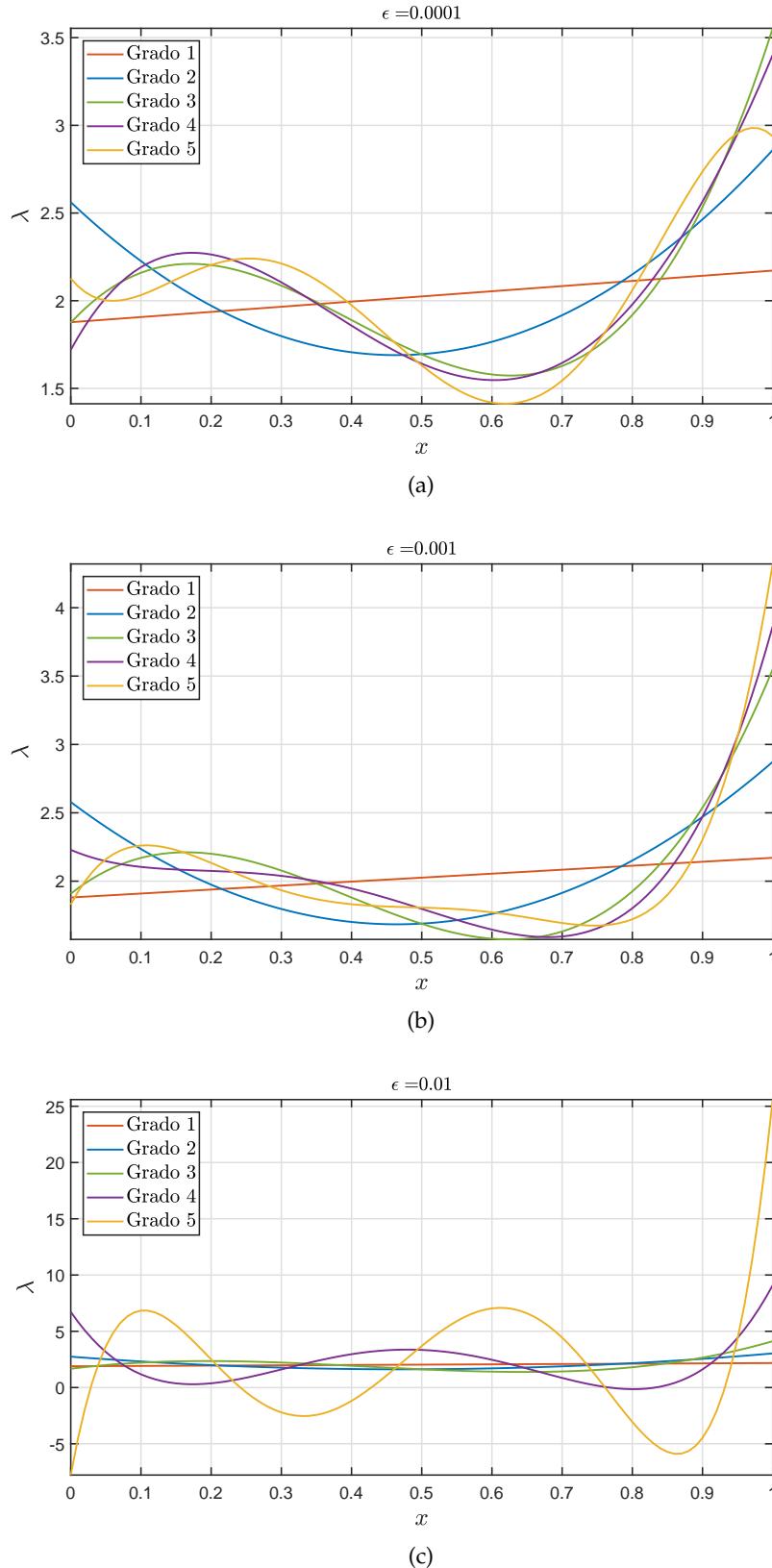


FIGURA 1.6: Caso 2 perturbado: Representación de las distintas regresiones para $\lambda(x)$ con un ruido (a) $\epsilon = 0,001$, (b) $\epsilon = 0,01$ y (c) $\epsilon = 0,1$.

1.4. Conclusiones

En este proyecto se ha realizado un ajuste polinómico de $\lambda(x)$ para unos datos dados $F_z(t)$. Se disponían de dos tomas distintas $F_{z,1}(t)$ y $F_{z,2}(t)$, cuyo número de mediciones es de 67 y 11, respectivamente. Se ha observado como el número de mediciones es relevante en los resultados, concluyendo que en el caso sin perturbar es necesario un mayor grado en el ajuste a menor es el número de mediciones. Por el contrario, en el caso perturbado, a medida que aumenta el ruido introducido ϵ , el ajuste presenta una peor aproximación y hay que regirse por un criterio medio para la selección del ajuste óptimo. Lo ideal en este caso sería realizar una regularización previa de los datos con el objetivo de reducir el ruido de los datos disponibles, obteniendo así el ajuste óptimo deseado.

Proyecto 2

Crímenes inversos

2.1. Introducción

En este proyecto se van a estudiar algunas situaciones que pueden ocurrir cuando no se tienen en cuenta los errores numéricos de cada problema. Como ejemplo, se toma la ecuación del calor, la cual va a ser resuelta utilizando un esquema de diferencias finitas (ver [4] para más detalles). Concretamente, se va a proceder de la siguiente manera:

1. En primer lugar, con el objetivo de entender las particularidades del método numérico empleado se va a resolver el problema directo y se analizará la repercusión que tiene la discretización espacial y temporal, así como el paso del tiempo en la solución obtenida. En este apartado, la primera derivada temporal y segunda derivada espacial van a aproximarse mediante un esquema en diferencias progresivas y diferencias central, respectivamente.
2. Seguidamente, partiendo de los datos obtenidos del apartado anterior, se procede a resolver el problema inverso utilizando el mismo esquema numérico y misma discretización espacial y temporal. Se anticipa al lector, que estamos ante un crimen inverso, obteniendo reconstrucciones perfectas, situación que no es realista.
3. Posteriormente, se resuelve el problema inverso variando el esquema en diferencias finitas, donde aún se comete un crimen inverso debido a que se utiliza la misma discretización espacial. En este caso, se varía el esquema en diferencias temporal empleado, aproximando la primera derivada temporal mediante un esquema en diferencias regresivas. Adicionalmente, se introduce una pequeña perturbación al sistema (ruido) y se analiza el efecto en la solución.
4. Por último, se resuelve el problema inverso variando la discretización espacial y se analizan los resultados con y sin perturbación inicial.

El interés de resolver un problema inverso radica en que en una gran variedad de casos prácticos se desconoce el comportamiento de la transferencia de calor en las fronteras del domino que definen el problema, como por ejemplo en el caso del enfriamiento de una probeta con un chorro de agua. Resolver el problema directo, sin tener una medida exacta, significaría imponer unas condiciones de contorno desconocidas, por lo que seguramente llevarían a soluciones no realistas. Para solucionar esto, se resuelve el problema inverso de la ecuación del calor, permitiendo así estimar las condiciones de contorno del problema.

2.2. Formulación del problema

Como ejemplo de estudio, se va a determinar la temperatura de una barra a lo largo del tiempo. Concretamente, se va a resolver el siguiente problema de valor inicial y de contorno unidimensional:

Problema directo:

Determinar la temperatura $u(x, T)$ en un cierto instante de tiempo $T > 0$, conociendo la temperatura inicial.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) = g(t), & t > 0, \\ u(L, t) = h(t), & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (2.1)$$

donde:

- $u(x, t)$ es la temperatura en el punto x y en el instante t ,
- $D > 0$ es el coeficiente de difusión, que por simplicidad se ha tomado unitario, es decir, $D = 1$,
- $g(t)$ y $h(t)$ son la temperatura en el extremo izquierdo $x = 0$ y derecho de la barra $x = L = \pi$, respectivamente. Por simplicidad se han impuesto condiciones de contorno nulas $g(t) = h(t) = 0$,
- $f(x)$ es la temperatura inicial de la barra y viene dada por $f(x) = 10\sin(2x)$.

Problema inverso:

Determinar la temperatura $u(x, T_0)$ en un cierto instante de tiempo $T_0 < T$, conociendo la temperatura en el instante final T de la barra $m(x) = u(x, T)$, que se obtiene del problema directo. Por tanto se trata de resolver el problema

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) = g(t), & t > 0, \\ u(L, t) = h(t), & t > 0, \\ u(x, 0) = m(x), & 0 < x < L, \end{cases} \quad (2.2)$$

Solución exacta:

$$u(x, t) = 10e^{-4t}\sin(2x). \quad (2.3)$$

2.3. Problema directo

Para resolver el problema directo se va a aproximar la primera derivada temporal y la segunda espacial mediante un esquema en diferencias progresiva y central, respectivamente. Reorganizando el sistema de ecuaciones obtenido, esto equivale a resolver la siguiente ecuación matricial lineal:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} u_{1,j+1} \\ u_{2,j+1} \\ \vdots \\ u_{M,j+1} \end{pmatrix}}_{u^{j+1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1-2d & d & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ d & 1-2d & d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d & 1-2d & d & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & d & 1-2d & d \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d & 1-2d \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} u_{1,j} \\ u_{2,j} \\ \vdots \\ u_{M,j} \end{pmatrix}}_{u^j} \quad (2.4)$$

$$u^0 = \begin{pmatrix} f(x_1) \\ f(x_2) \\ \vdots \\ f(x_M) \end{pmatrix}, \quad u^{j+1} = Au^j, \quad \text{con } j = 0, \dots, N. \quad (2.5)$$

Un dato importante a tener en cuenta es que a partir de los desarrollos de Taylor realizados para aproximar las derivadas, se obtiene que el método converge, si y sólo si

$$0 < \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} < \frac{1}{2}. \quad (2.6)$$

Reescribiendo la ecuación 2.6 se puede obtener la siguiente relación de estabilidad

$$T_{inest} = \frac{\pi^2(N+1)}{2(M+1)^2}, \quad (2.7)$$

donde T_{inest} es el tiempo a partir el cual la solución se hará inestable para un valor de N y M fijo.

2.3.1. Resultados

Antes de comenzar con el análisis de resultados, han de mencionarse dos aspectos importantes:

- N y M representan el número de discretizaciones temporal y espacial, respectivamente, es decir, un aumento de estos da lugar a un menor valor del intervalo considerado, lo que se traduce en un mallado más refinado.
- La disminución del valor de d no tiene por qué dar lugar a una consecuente disminución del error relativo cometido en la aproximación de la solución. Para demostrarlo, basta con retener el error de truncamiento en el desarrollo de Taylor para aproximar las derivadas, del cual puede deducirse que el valor óptimo con el que se disminuye el error al mínimo posible con el esquema utilizado es $d_{opt} = 1/6$. Esto se debe a que se cancela el primer término del error, alcanzando así un orden $O((\Delta t)^3)$, lo que es lo mismo, $O((\Delta x)^6)$ [1]. Es decir, para valores

de $d \in [0, 1/2]$ se garantiza la convergencia del esquema numérico, pero las variaciones del error cometido aumentan a medida que d se aleja de $d_{opt} = 1/6$. En la figura 2.3 se observa que para distintos tiempos el menor error cometido se tiene para dicho valor d_{opt} .

Desarrollando el punto 2 recién comentado se llega a que el valor óptimo se alcanza siempre que se cumpla la siguiente expresión

$$d_{opt} = \frac{T(M+1)^2}{\pi^2(N+1)} = \frac{1}{6} \approx 0,1667. \quad (2.8)$$

En las tablas 2.1 y 2.2 se resumen algunos de los datos obtenidos variando la discretización temporal, espacial y para diferentes tiempos finales $T = 0,1$ y $T = 1$, respectivamente. En el conjunto de figuras 2.1 y 2.1 se visualiza de manera más clara el efecto de dichas variaciones en el error relativo cometido (subfiguras (a) y (b)), así como, la convergencia de la solución (subfigura (c)). En la figura 2.3 se ha representado el error cometido para distintos valores de d y para distintos instantes de tiempo T , se observa como el error mínimo se comete con $d_{opt} = 1/6$.

Se concluye que:

- Para toda combinación T, M y N que se aleje de d_{opt} el error cometido tiende a incrementarse. En el caso de $T = 0,1$ se tiene que para $M = 20$ el aumento de N , es decir, la disminución de la discretización temporal, aumenta el error cometido. Esto se debe a que el valor óptimo en este caso es $N = 25,8 \sim 26$ y dada la ecuación 2.8 para todo $N > 26 \rightarrow d > d_{opt}$ lo que da lugar al consecuente aumento del error cometido.
- Si se fija Δx y Δt de tal forma que se verifique la condición de estabilidad 2.6, un aumento de T implica un aumento de Δt , dando lugar a un crecimiento del valor de d . Siempre que el valor de d se aproxime a d_{opt} el error cometido disminuirá, alcanzando el mínimo para $d = d_{opt}$. Para todo T a partir del cual $d > d_{opt}$ el error tiende a incrementarse.
- El instante de tiempo límite a partir del cual la solución se desestabiliza viene dado por la ecuación 2.7.
- Mantener el orden del error acotado para tiempos largos implica una discretización temporal bastante refinada en comparación con la espacial, tal y como se observa en los resultados obtenidos, por ejemplo, el caso $M = 40, N = 1000$.
- Si se fija Δx y Δt de tal forma que no se verifique la condición de estabilidad 2.6, un aumento de T implica un aumento de Δt , lo cual da lugar a un crecimiento del valor de d , es decir, se desestabiliza aún más la solución.
- La temperatura en la disminuye rápidamente debido a la difusión del calor por conducción, alcanzando una temperatura homogénea prácticamente para $T \approx 1$ y la totalidad para $T \approx 2,5$ (ver figura 2.4), por lo que en este caso no tiene interés calcular la solución para instantes posteriores, aunque si para visualizar las carencias del método explícito empleado debido a la condición de estabilidad.

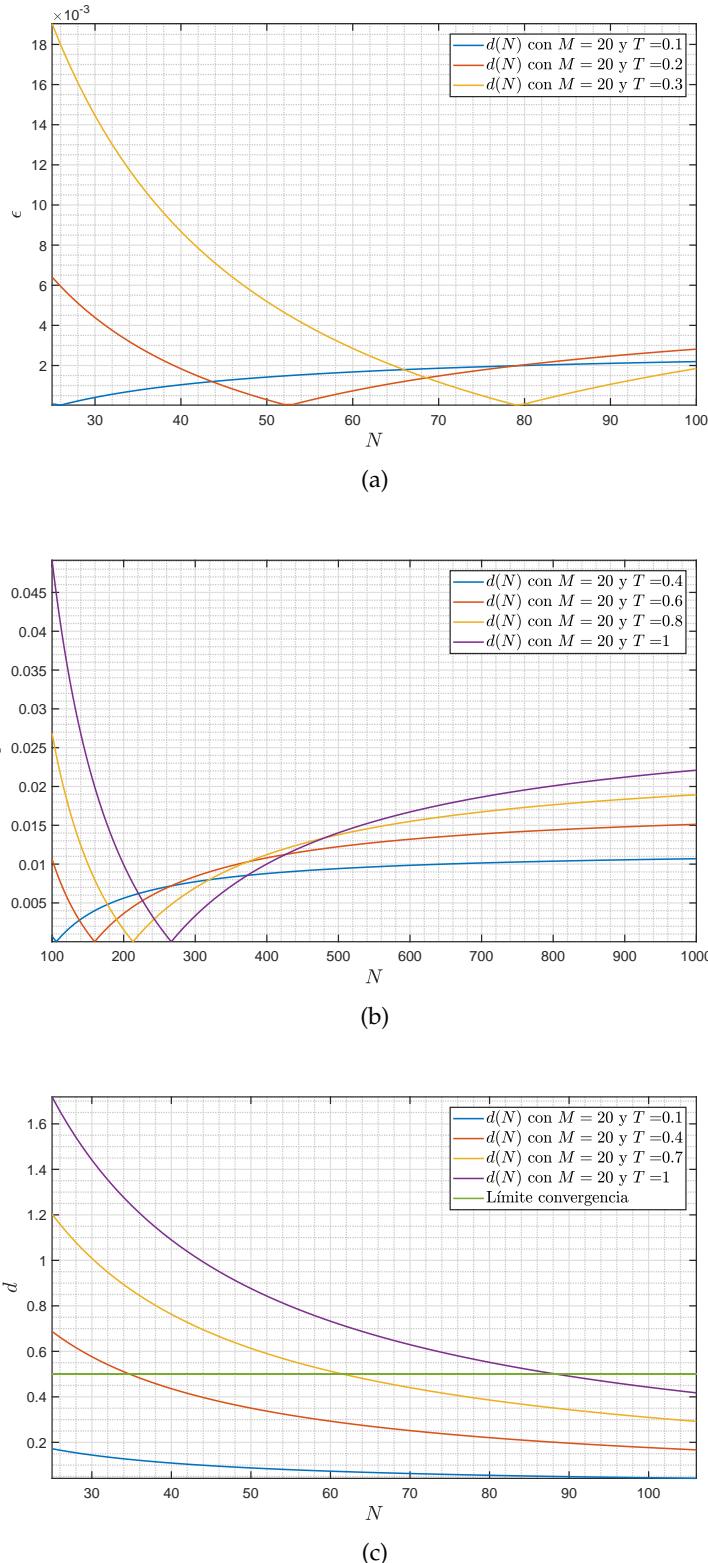


FIGURA 2.1: (a) Error relativo para $T \in [0,1,0,3]$ con $N \in [20, 100]$ y $M = 20$. (b) Error relativo para $T \in [0,4, 1]$ con $N \in [100, 1000]$ y $M = 20$. (c) Convergencia en función de la discretización temporal establecida con $M = 20$.

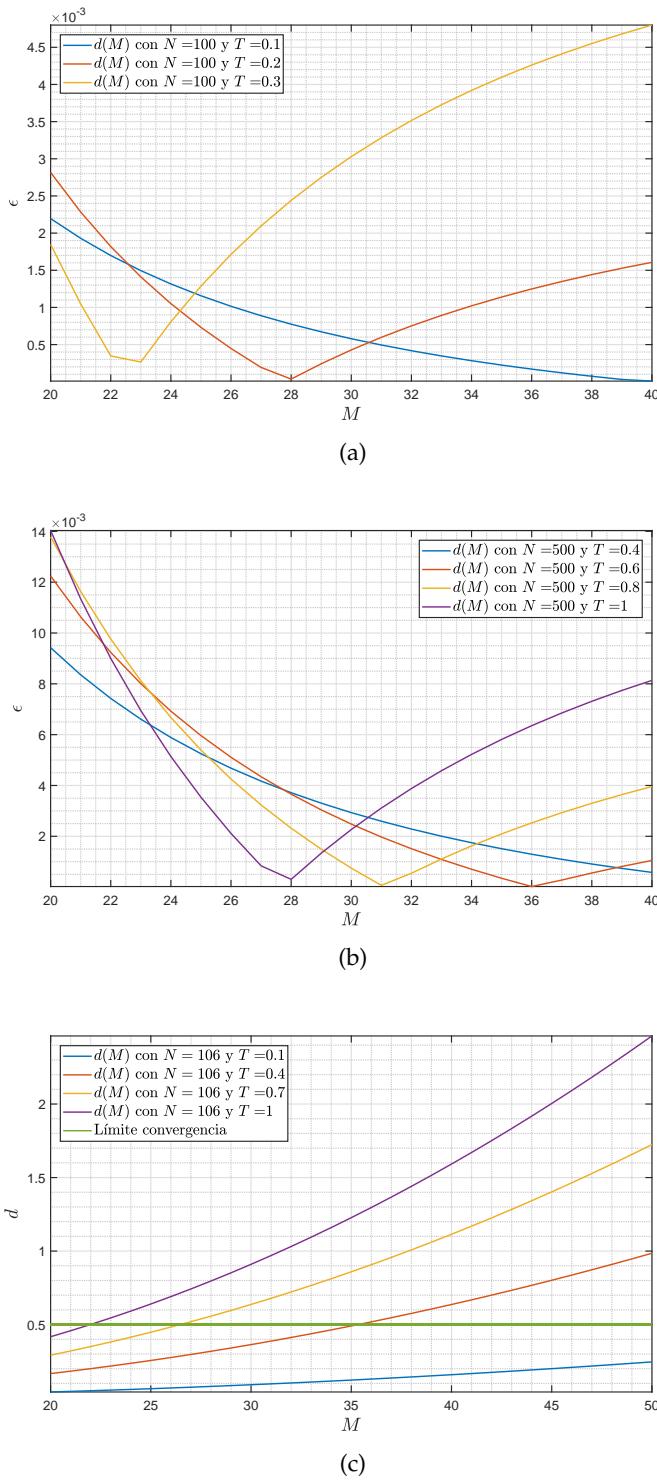


FIGURA 2.2: (a) Error relativo para $T \in [0,1,0,3]$ con $M \in [20,40]$ y $N = 100$. (b) Error relativo para $T \in [0,4,1]$ con $M \in [20,40]$ y $M = 500$. (c) Convergencia en función de la discretización temporal establecida con $N = 106$.

M	N	Δx	Δt	$\Delta t/(\Delta x)^2$	$\ \cdot\ _2$ con $T = 0,1$	T_{inest}
20	25	0.1496	3.846e-03	0.1719	8.741e-05	0.2909
20	50	0.1496	1.961e-03	0.0876	1.423e-03	0.5707
20	100	0.1496	9.901e-04	0.044	2.195e-03	1.1302
40	25	0.0766	3.846e-03	0.6551	2.312e-03	0.0763
40	50	0.0766	1.961e-03	0.334	7.882e-04	0.1497
40	100	0.0766	9.901e-04	0.1686	8.846e-06	0.2965

TABLA 2.1: Error relativo para distintos valores de M (número de elementos de la discretización espacial) y N (número de términos del sumatorio) con $T = 0,1$ (instante de tiempo final).

M	N	Δx	Δt	$\Delta t/(\Delta x)^2$	$\ \cdot\ _2$ con $T = 1$	T_{inest}
20	250	0.1496	3.984e-03	0.178	1.982e-03	2.8087
20	500	0.1496	1.996e-03	0.0892	1.403e-02	5.6062
20	1000	0.1496	9.99e-04	0.0446	2.21e-02	11.2012
40	250	0.0766	3.984e-03	0.6786	6.557e+43	0.7368
40	500	0.0766	1.996e-03	0.34	8.135e-03	1.4708
40	1000	0.0766	9.99e-04	0.1702	1.598e-04	2.9386

TABLA 2.2: Error relativo para distintos valores de M (número de elementos de la discretización espacial) y N (número de términos del sumatorio) con $T = 1$ (instante de tiempo final).

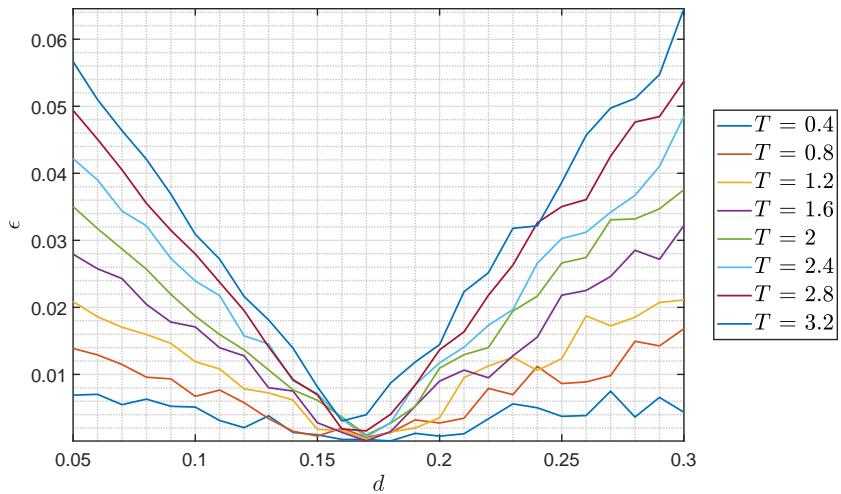
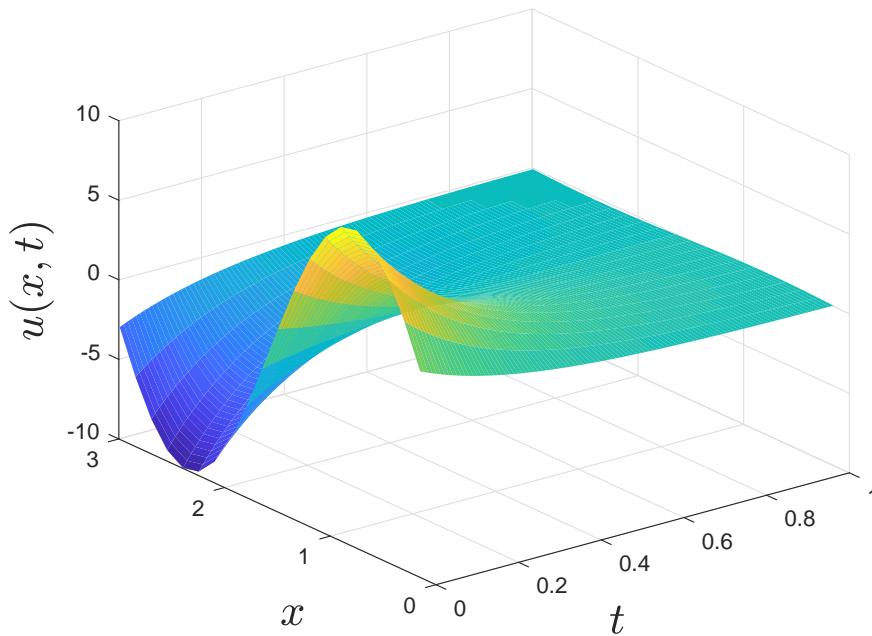


FIGURA 2.3: Error relativo para distintos instantes de tiempo T con $M = 40$ y $N = 400$ y $d \in [0,05, 0,3]$.

FIGURA 2.4: Solución del problema 2.1 con $t \in [0, 1]$.

2.4. Problema inverso

A continuación se va a determinar la temperatura en un cierto instante T_0 a partir de la solución exacta y y de la solución obtenida del problema directo, en un instante posterior T , es decir, se quiere hallar $u(x, T_0)$ partiendo de $u(x, T)$ con $T_0 < T$. Adicionalmente, se introducirá un pequeño error ϵ en los datos y se analizará el efecto en la solución. Se van a emplear tres configuraciones distintas:

- Configuración 1: Mismo esquema numérico y discretización espacial y temporal a la utilizada en el problema directo.
- Configuración 2: Esquema en diferencias regresivas en tiempo y misma discretización espacial y temporal a la utilizada en el problema directo.
- Configuración 3: Esquema en diferencias regresivas en tiempo y distinta discretización espacial y temporal a la utilizada en el problema directo.

Para determinar la temperatura en un instante $T_0 = T - K\Delta t$ a partir de un valor de u^{N+1} , se resuelve la siguiente ecuación matricial

$$u^j = A^{-1}u^{j+1}, \quad j = N, N-1, \dots \quad (2.9)$$

2.4.1. Resultados

Los datos de partida $u(x, T)$, corresponden con $T = 0,4$, $M = 40$ y $N = 400^1$.

¹En el apartado anterior, se observó que dicha configuración proporciona datos con un error muy pequeño.

Configuración 1

En la figura 2.5 se ha representado la solución aproximada $u(x, 0,39)$ junto a la solución exacta partiendo de la solución obtenida en el problema directo. Se observa que ambos resultados son prácticamente idénticos $\epsilon \sim 10^{-6}$, como era de esperar, pero nótese que se ha cometido un crimen inverso. Es decir, estamos realizando los mismos pasos a la inversa, volviendo así a los datos de partida del problema directo. Es lógico, que ante ninguna modificación se obtenga lo mismo.

Introduciendo un ruido $\epsilon < 10^{-4}$ (ver figure 2.6) se observa como la solución aproximada diverge de la solución exacta, incrementándose el error cometido para instantes más alejados del de partida siendo los errores relativo y absoluto para $T_0 = 0,39$ del orden $\epsilon \sim 0,1$ y $\epsilon_{abs} \sim 1$, respectivamente.

Partiendo ahora de la solución exacta, es decir, sin ningún error en los datos de partida se obtienen mejores resultados en ambos casos (con y sin ruido), aunque se mantiene el orden de magnitud de los errores para $T_0 = 0,39$. La diferencia entre ambos se observa de manera más clara para valores de K algo mayores, por ejemplo para $K = 15$, que corresponde con $T_0 = 0,385$. En este caso, ya cambia el orden de magnitud de los errores siendo en el caso (con ruido) de partir del problema directo $\epsilon \sim 10^2$ y $\epsilon_{abs} \sim 10^3$ y en el caso de partir de la solución exacta $\epsilon \sim 10^1$ y $\epsilon_{abs} \sim 10^2$, es decir, se reduce en uno el orden de magnitud del error cometido. Se reduce también en un orden en el caso sin ruido.

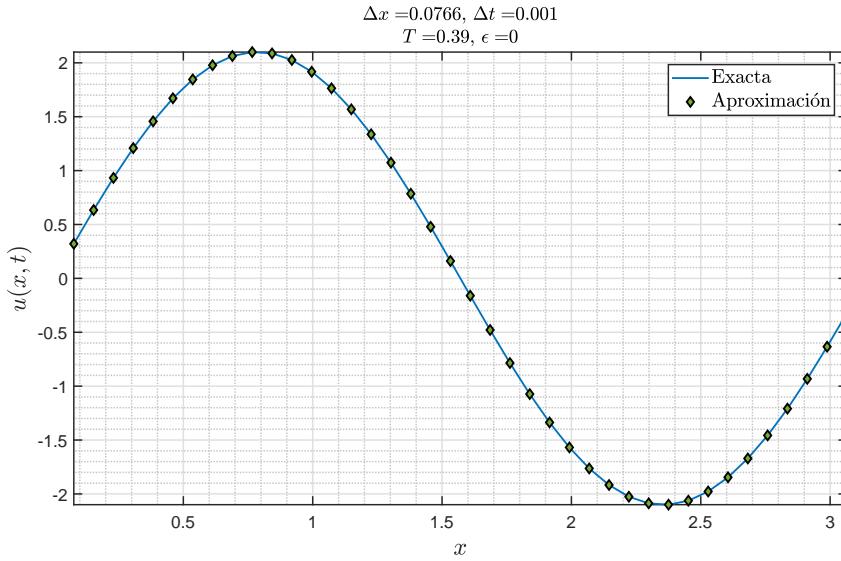


FIGURA 2.5: Representación de la solución aproximada $u(x, 0,39)$, con $M = 40$ y $N = 400$ y de la solución exacta.

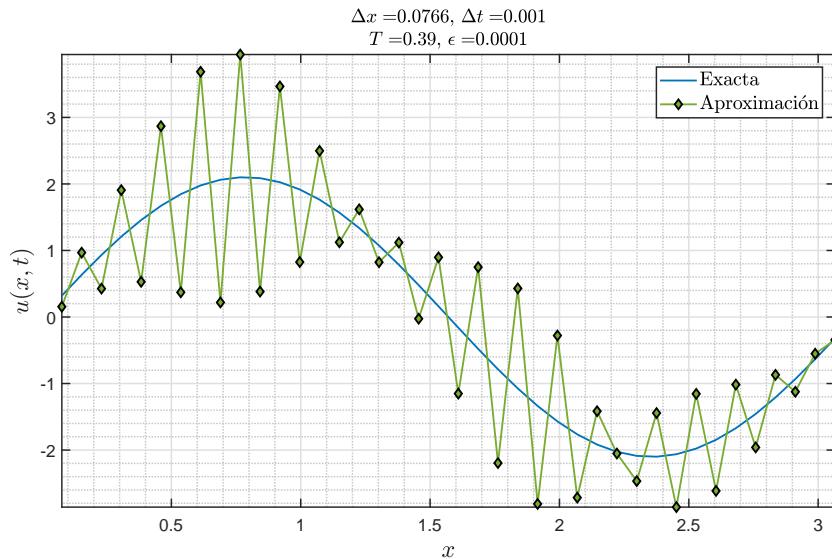


FIGURA 2.6: Representación de la solución aproximada $u(x, 0,39)$, con $M = 40$ y $N = 400$ y de la solución exacta introduciendo un ruido $\epsilon = 10^{-4}$.

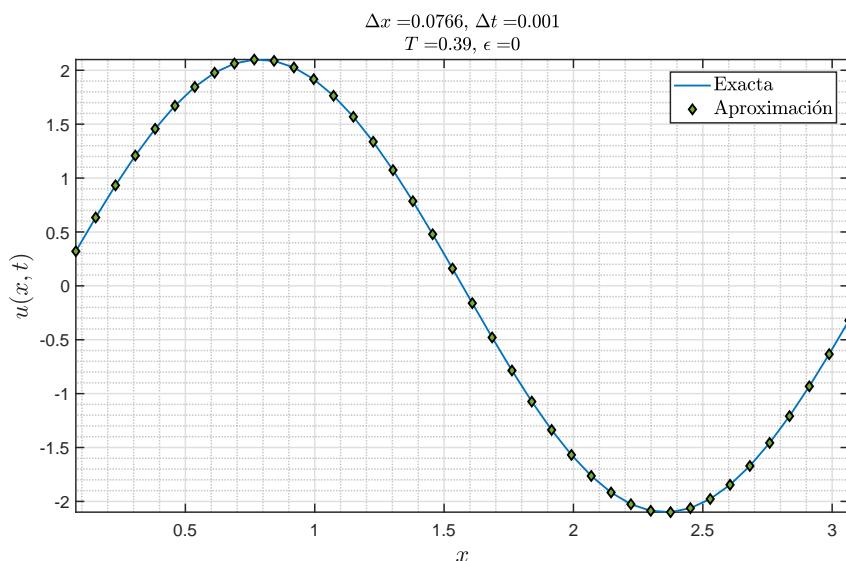


FIGURA 2.7: Representación de la solución aproximada $u(x, 0,39)$, con $M = 40$ y $N = 400$ partiendo de la solución exacta.

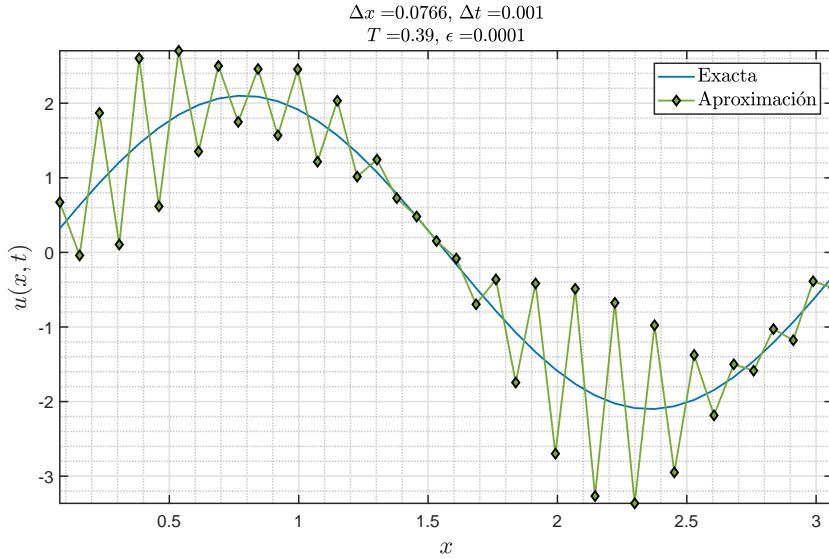


FIGURA 2.8: Representación de la solución aproximada $u(x, 0,39)$, con $M = 40$ y $N = 400$ partiendo de la solución exacta introduciendo un ruido $\epsilon = 10^{-4}$.

Configuración 2

En este caso, se va a utilizar un esquema en diferencias regresivas en tiempo, lo cual es lo coherente ya que estamos retrocediendo en tiempo. Esto implica una reestructuración de la matriz A de la forma

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} 1 + 2d & -d & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -d & 1 + 2d & -d & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -d & 1 + 2d & -d & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & -d & 1 + 2d & -d \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d & 1 + 2d \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Los errores cometidos para $T_0 = 0,39$ partiendo del problema directo son $\epsilon \sim 10^{-3}$ y $\epsilon_{abs} \sim 10^{-2}$. Partiendo de la solución exacta en $T = 0,4$ se obtiene el mismo orden de magnitud aunque los resultados son ligeramente mejores. En contraste con la configuración 1 se observa la notable mejoría, se reduce en dos el orden de magnitud de los errores considerando el mismo instante de tiempo T_0 .

A pesar de haber obtenido mejores resultados, aún se sigue cometiendo un crimen inverso ya que se siguen generando las mismas mallas (discretizaciones) para resolver el problema inverso.

Configuración 3

Para evitar seguir cometiendo un crimen inverso, en esta última configuración se van a utilizar distintas discretizaciones para resolver el problema inverso. En este caso, se considera $\hat{M} = 35$ y $\hat{N} = 350$. Dado que se parte de un mallado diferente del problema directo, para poder emplear estos como datos de partida es necesario realizar una

interpolación. Para ello se ha utilizado la función *spline* de MATLAB.

En este caso, la solución se mantiene estable para tiempos más prolongados, véase la figura 2.9, donde no se empiezan a visualizar inestabilidades notables hasta $K > 20$. La solución empieza a diverger de manera acusada para $K > 30$, tal y como se observa en la figura 2.10.

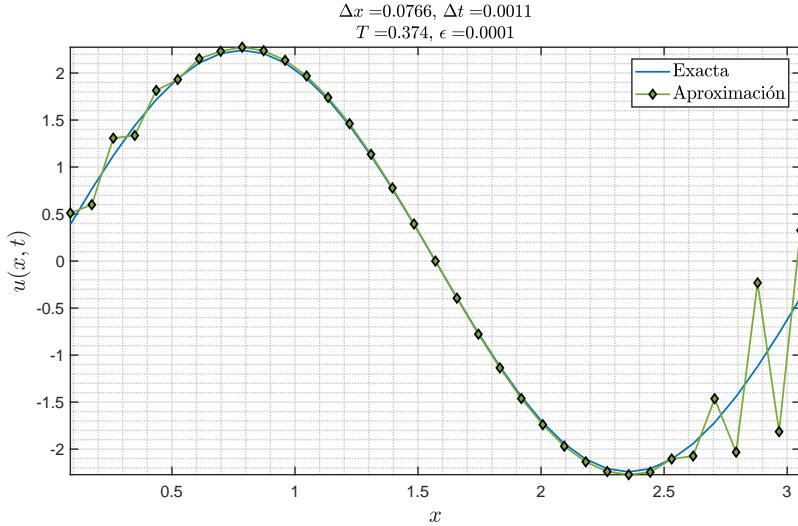


FIGURA 2.9: Representación de la solución aproximada $u(x, 0.374)$, con $\hat{M} = 35$ y $\hat{N} = 350$ partiendo de la solución exacta introduciendo un ruido $\epsilon = 10^{-4}$.

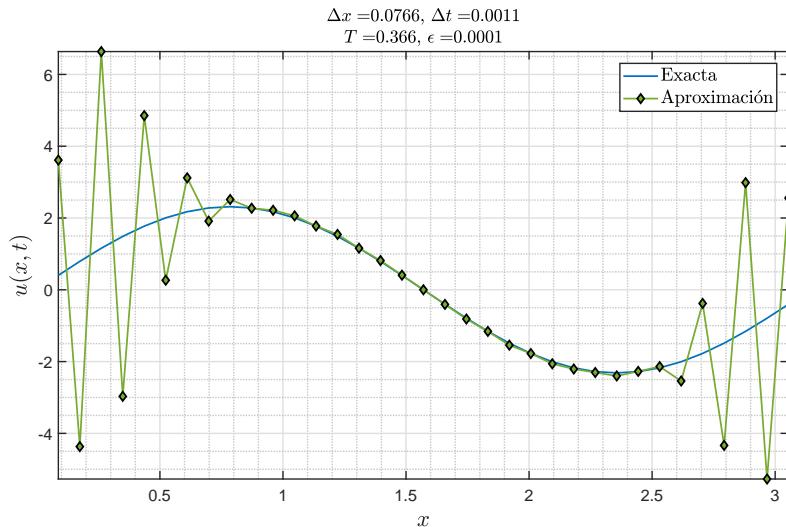


FIGURA 2.10: Representación de la solución aproximada $u(x, 0.366)$, con $\hat{M} = 35$ y $\hat{N} = 350$ partiendo de la solución exacta introduciendo un ruido $\epsilon = 10^{-4}$.

2.4.2. Comparación de resultados

En esta subsección se van a comparar los resultados bajo las distintas configuraciones empleadas. Para ser coherente con los resultados se ha impuesto un error fijo $\epsilon = 10^{-4}$, y en los tres casos se ha utilizado la misma discretización espacial y temporal final $\hat{M} = 35$ y $\hat{N} = 350$. Es importante recalcar que en la configuración 3 se sigue partiendo de los datos obtenidos del problema directo con $M = 40$ y $N = 400$. Los errores cometidos para los distintos tiempos y configuraciones se han resumido en la tabla 2.3, para poder comparar de manera más sencilla los distintos casos contemplados.

Conf. ¹	K	$ \cdot ^2$	$ \cdot _{abs}^3$	$ \cdot _\epsilon^4$	$ \cdot _{abs,\epsilon}$
1	10	4.063e-04	3.643e-03	4.721e-03	4.233e-02
2	10	1.995e-04	1.789e-03	2.676e-04	2.399e-03
3	10	5.864e-03	5.257e-02	5.885e-03	5.276e-02
1	15	4.004e-04	3.672e-03	3.142e-01	2.882e+00
2	15	9.018e-05	8.271e-04	1.173e-03	1.076e-02
3	15	8.890e-03	8.154e-02	9.326e-02	1.017e-02
1	30	3.826e-04	3.758e-03	1.492e+05	1.466e+06
2	30	2.378e-04	2.335e-03	7.041e-01	6.915e+00
3	30	1.443e+00	1.417e+01	6.795e+00	6.673e+01

¹ Configuración: $\hat{M} = 35$, $\hat{N} = 350$ y partiendo del problema directo.

² Error relativo empleando la norma euclídea.

³ Error absoluto empleando la norma euclídea.

⁴ Error relativo empleando la norma euclídea con una perturbación en los datos de valor $\epsilon = 10^{-4}$.

TABLA 2.3: Resumen de los errores cometidos con y sin perturbación inicial. Configuración: $\hat{M} = 35$, $\hat{N} = 350$, $\epsilon = 10^{-4}$ y partiendo del problema directo.

A la vista de los resultados, la configuración 1 presenta los mejores resultados, aquí se observa claramente el crimen inverso cometido. Recuérdese, que se están volviendo exactamente por los mismos pasos por lo que se obtuvo la solución del problema directo. En el caso de la configuración 2 aún se sigue cometiendo un crimen inverso ya que se utilizan las mismas mallas de discretización. Sólo la configuración 3 sería una configuración adecuada para resolver un problema inverso, ya que es la única que no falsea los datos obtenidos.

2.5. Conclusiones

En este proyecto se han utilizado distintas configuraciones para resolver un problema inverso. Se observó, como las configuraciones 1 (misma configuración que el problema directo) y 2 (esquema en diferencias regresivas en tiempo), presentaban mejores resultados a la configuración 3 (esquema en diferencias regresivas en tiempo y distintas mallas de discretización). Esto se debe a que se está cometiendo un crimen inverso, es decir, se está volviendo por los mismos pasos que por los que se obtuvo la solución del problema directo obteniendo reconstrucciones perfectas. La configuración 3, es la única configuración adecuada (de las contempladas) para resolver un problema inverso y permitiría obtener resultados realistas. A pesar de ello, hay que tener cautela, ya que la inclusión de una pequeña perturbación en los datos (algo intrínseco en cualquier problema) se acentúa de manera drástica para tiempos no muy alejados conduciendo a resultados sin ningún sentido físico. Esto puede solventarse regularizando los datos previamente.

Por último, notar que en el caso del problema directo un refinamiento en la discretización temporal mejoran la estabilidad de la solución, en cambio, en el problema inverso, refinar la malla temporal implica un mayor número de medidas lo que incrementa el efecto de las pequeñas perturbaciones en el sistema inicial.

Proyecto 3

Ecuación del calor hacia atrás

3.1. Introducción

En este proyecto compararemos la habilidad de distintas técnicas de regularización para obtener la temperatura inicial de una barra a partir de mediciones de su temperatura en un cierto instante posterior [5].

3.2. Formulación del problema

La formulación matemática del problema directo es

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < L, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < L. \end{cases} \quad (3.1)$$

Dado que el problema es lineal, puede obtenerse la solución analítica por separación de variables (método espectral), cuya solución es

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{(n\pi)^2 Dt}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right), \quad (3.2)$$

donde

$$c_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right) f(y) dy. \quad (3.3)$$

Agrupando términos, se tiene

$$u(x, t) = \int_0^L K(x, y, t) f(y) dy, \quad (3.4)$$

siendo

$$K(x, y, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{(n\pi)^2 Dt}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \quad (3.5)$$

Nótese, que la Ec. 3.4 es una expresión de la forma

$$u = T(f), \quad (3.6)$$

donde T es un operador lineal.

En el presente proyecto, se van a resolver tanto el problema directo como el inverso:

- **Problema directo:** consiste en determinar la temperatura $g(x) = u(x, T)$ en un cierto instante de tiempo $T > 0$, conociendo la temperatura inicial $f(x)$. Por tanto, el puede plantearse así: conocida f , calcular la integral

$$g(x) = \int_0^L K(x, y, T) f(y) dy. \quad (3.7)$$

- **Problema inverso:** consiste en determinar la temperatura inicial $f(x)$, conociendo la temperatura en un instante posterior $T > 0$, es decir, la función $g(x) = u(x, t)$. Por tanto, el problema en este caso, se plantea como: conocida $g(x)$, encontrar la función f tal que

$$\int_0^L K(x, y, T) f(y) dy = g(x). \quad (3.8)$$

Nótese, que ambas ecuaciones son iguales.

3.3. Discretización

Dado que la integral no puede calcularse de manera exacta, es necesario utilizar alguna fórmula de cuadratura. Para ello, dividimos la barra $[0, L]$ en M intervalos de la misma longitud $\Delta y = L/M$, considerando los puntos

$$x_i = y_i = \frac{iL}{M}, \quad i = 0, \dots, M, \quad (3.9)$$

y aproximamos la integral con la regla del trapecio compuesta.

Además, el núcleo del operador integral $K(x, y, T)$ involucra a una serie infinita, por lo que es necesario truncar la serie

$$K(x, y, t) \approx K_N(x, y, t) = \frac{2}{L} \sum_{n=1}^N e^{-\frac{(n\pi)^2 D t}{L^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L}\right). \quad (3.10)$$

Teniendo en cuenta las dos aproximaciones anteriores se obtiene la siguiente relación lineal $AF = G$:

$$\underbrace{\frac{L}{M} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}K_N(x_0, y_0, T) & \frac{1}{2}K_N(x_0, y_1, T) & \cdots & \frac{1}{2}K_N(x_0, y_M, T) \\ \frac{1}{2}K_N(x_1, y_0, T) & \frac{1}{2}K_N(x_1, y_1, T) & \cdots & \frac{1}{2}K_N(x_1, y_M, T) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{2}K_N(x_M, y_0, T) & \frac{1}{2}K_N(x_M, y_1, T) & \cdots & \frac{1}{2}K_N(x_M, y_M, T) \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}}_F = \underbrace{\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_M \end{pmatrix}}_G, \quad (3.11)$$

donde $f_i = f(y_i)$ y $g_i = g(x_i)$.

3.4. Problema directo

Resolver el problema directo discreto consiste en multiplicar la matriz A por el vector F .

El problema a estudio es el siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & 0 < x < \pi, \quad t > 0, \\ u(0, t) = 0, & t > 0, \\ u(L, t) = 0, & t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & 0 < x < \pi. \end{cases} \quad (3.12)$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}x, & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{2}{\pi}(\pi - x), & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi. \end{cases} \quad (3.13)$$

Para observar cómo funciona el método, resolvemos en primer lugar el problema planteado con el esquema en diferencias finitas utilizado en el *Proyecto 2*, tomando parámetros $\Delta x = 0,0766$ y $\Delta t = 9,99 \cdot 10^{-4}$ (correspondiendo, con la notación del *Proyecto 2*, los parámetros $M + 1 = 41$ y $N + 1 = 1001T$). Dado que la solución obtenida no se evalúa en los mismos puntos, es necesario interpolar los datos obtenidos. Para ello, se utiliza la función `spline` de MATLAB.

En las tablas 3.1 y 3.2 se detallan los resultados obtenidos para $T = 0,1$ y $T = 1$.

M	N	Δx	Error relativo con $T = 0,1$
15	5	0.2094	$1,8768 \cdot 10^{-3}$
15	10	0.2094	$1,8694 \cdot 10^{-3}$
15	15	0.2094	$1,8694 \cdot 10^{-3}$
30	5	0.1047	$1,1781 \cdot 10^{-3}$
30	10	0.1047	$1,1663 \cdot 10^{-3}$
30	15	0.1047	$1,1663 \cdot 10^{-3}$

TABLA 3.1: Error relativo para distintos valores de M (número de elementos de la discretización espacial) y N (número de términos del sumatorio) con $T = 0,1$ (instante de tiempo final).

3.4.1. Observaciones

- Para un mismo valor de M el aumento de N disminuye el error cometido ligeramente, aunque para los casos analizados ha de recalcarse que no cambia el orden de magnitud, siendo $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-3})$. Se observa que la consideración de más términos en el desarrollo de la serie no aporta información relevante para el orden tomado como referencia, obteniendo con muy pocos términos ($N = 5$) una buena aproximación¹.

¹Característica de la ecuación del calor debido a su efecto regularizante.

M	N	Δx	Error relativo con $T = 1$
15	5	0.2094	$1,5832 \cdot 10^{-3}$
15	10	0.2094	$1,5832 \cdot 10^{-3}$
15	15	0.2094	$1,5832 \cdot 10^{-3}$
30	5	0.1047	$1,1678 \cdot 10^{-3}$
30	10	0.1047	$1,1678 \cdot 10^{-3}$
30	15	0.1047	$1,1678 \cdot 10^{-3}$

TABLA 3.2: Error relativo para distintos valores de M (número de elementos de la discretización espacial) y N (número de términos del sumatorio) con $T = 1$ (instante de tiempo final).

- Para un mismo valor de N el aumento de M disminuye también el error cometido de manera más notable que el caso anterior, aunque se sigue manteniendo el mismo orden de magnitud en el error cometido, siendo $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-3})$, por lo que en primera aproximación ambas son igual de válidas.
- En contra de lo esperado para $M = 15$ el aumento de T , siendo éste un tiempo corto aún, implica una ligera disminución del error. Para $M = 30$ se obtiene prácticamente el mismo resultado. En caso de aumentar T aún más, por ejemplo $T = 20$ ya si se muestra lo esperando, aumentando el error con el aumento de T para un M y N fijos, aunque se mantiene el orden del error, siendo $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-3})$.
- En resumen, el problema directo proporciona buenos resultados.

3.5. Problema inverso

Resolver el problema inverso discreto consiste en resolver el sistema de ecuaciones $AF = G$. Nótese, que aunque la matriz del sistema es cuadrada, está muy mal condicionada, por ello, es necesario aplicar algún método de regularización².

El esquema que se va a seguir es el siguiente:

1. A partir del método de diferencias finitas se va a generar una aproximación de $u(x, 0,4)$. Posteriormente, se van a interpolar los valores obtenidos para obtener los valores aproximados de la temperatura en el instante $T = 0,4$ en los puntos $x_i = iL/M$ con $M = 30$. Se guardan los resultados en un fichero para poder utilizarlos en apartados posteriores.
2. Se resuelve el sistema $AF = G$ (donde A es la matriz del sistema correspondiente a seleccionar $M = 30$ y $N = 10$) utilizando el método de Tikhonov con aproximación inicial nula y seleccionando un parámetro de regularización α adecuado. Se comparan gráficamente la temperatura inicial obtenida con la temperatura inicial exacta (Ec. 3.13).
3. Aplicación y análisis del método de Tikhonov 1 y Tikhonov 2.
4. Aplicación del método de Landweber variando el número de iteraciones.

²En los métodos de regularización siempre existe un parámetro que hay que calibrar.

5. Se repiten los pasos 2,3 y 4 perturbando el vector G , añadiendo un error aleatorio.
6. Se considera un instante temporal mayor, partiendo de $T = 1$.

3.5.1. Aproximación de $u(x, 0,4)$

A partir del método de diferencias finitas se va a generar una aproximación de $u(x, 0,4)$. Posteriormente, se van a interpolar los valores obtenidos para obtener los valores aproximados de la temperatura en el instante $T = 0,4$ en los puntos $x_i = iL/M$ con $M = 30$. Se guardan los resultados en un fichero para poder utilizarlos en apartados posteriores. En la figura 3.1 se muestran los resultados obtenidos, se observa que la solución coincide con la solución exacta.

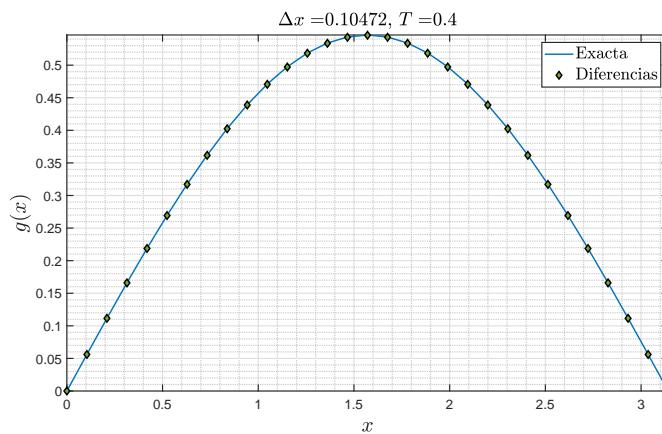


FIGURA 3.1: Solución de $u(x, 0,4)$ exacta y por diferencias tras interpolar los datos.

3.5.2. Resolución del sistema $AF = G$

Se resuelve el sistema $AF = G$ (donde A es la matriz del sistema correspondiente a seleccionar $M = 30$ y $N = 10$) utilizando el método de Tikhonov con aproximación inicial nula y seleccionando un parámetro de regularización α adecuado. El método de Tikhonov supone resolver el siguiente sistema

$$(A^*A + \alpha I)F = A^*G + \alpha F_0, \quad (3.14)$$

siendo α el parámetro a calibrar y $F_0 = 0$, ya que se considera aproximación inicial nula. Resolviendo el sistema para distintos órdenes de α (ver figura 3.2) se obtiene que para $\alpha \in [10^{-9}, 10^{-14}]$ el resultado se ajusta en su mayor parte con la condición inicial, exceptuando el pico, que debido a que la función no es derivable el método no permite captar dicha región de la solución, indistintamente del valor de α . En la figura 3.3 se observa como para $\alpha > 10^{-14}$ el resultado se vuelve inestable.

Se toma como parámetro representativo $\alpha = 10^{-10}$ en base a los resultados, aunque no se ha empleado ninguna técnica de optimización.

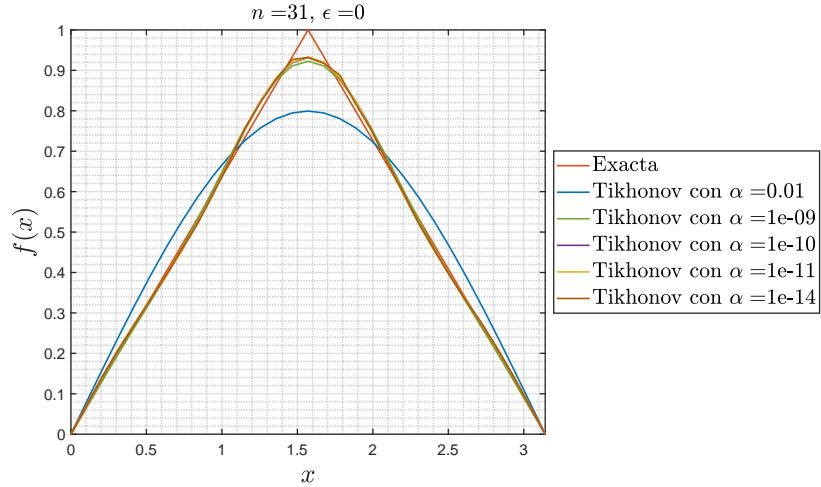


FIGURA 3.2: Solución F de resolver el sistema $AF = G$ utilizando el método de Tikhonov con aproximación inicial nula y $\alpha \in [10^{-2}, 10^{-14}]$, junto a la condición inicial exacta.

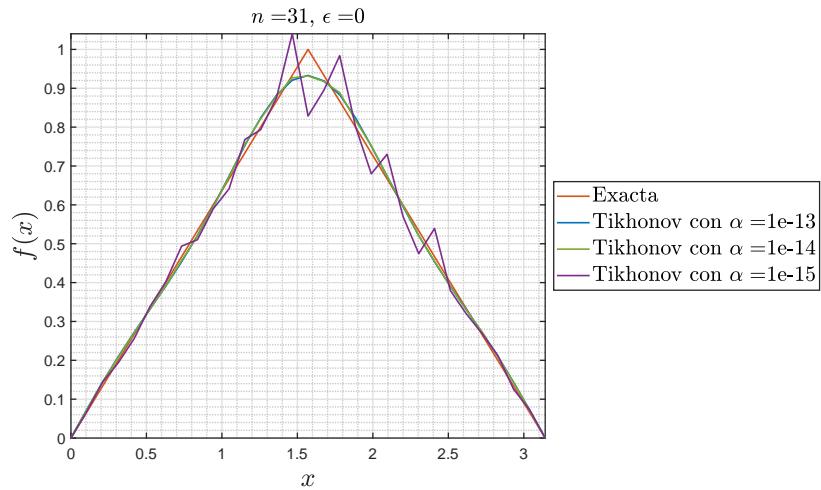


FIGURA 3.3: Solución F de resolver el sistema $AF = G$ utilizando el método de Tikhonov con aproximación inicial nula y $\alpha \in [10^{-13}, 10^{-15}]$, junto a la condición inicial exacta.

3.5.3. Método de Tikhonov iterativo

Una vez obtenida la solución F mediante Tikhonov se puede mejorar esta aproximación iterativamente, reemplazando F_0 por F_α . El algoritmo es:

$$F_{\alpha,0} = 0, \quad (3.15)$$

$$(A^*A + \alpha I)F_{\alpha,n+1} = A^*G + \alpha F_{\alpha,n}, \quad n \geq 0, \quad (3.16)$$

donde $n = 0$ representa Tikhonov 0 (o simplemente método de Tikhonov), $n = 1$ Tikhonov 1, $n = 2$ Tikhonov 2, etc.

Fijando el parámetro $\alpha = 10^{-10}$ se obtienen resultados prácticamente idénticos,

no mejorando de manera apreciable la solución obtenida. Se concluye que el método ya ha alcanzado su cota de error mínima y sucesivas iteraciones no van a mejorar los resultados de manera notable, concretamente el orden del error es en ambos casos $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-4})$. En la figura 3.4 se muestran los resultados.

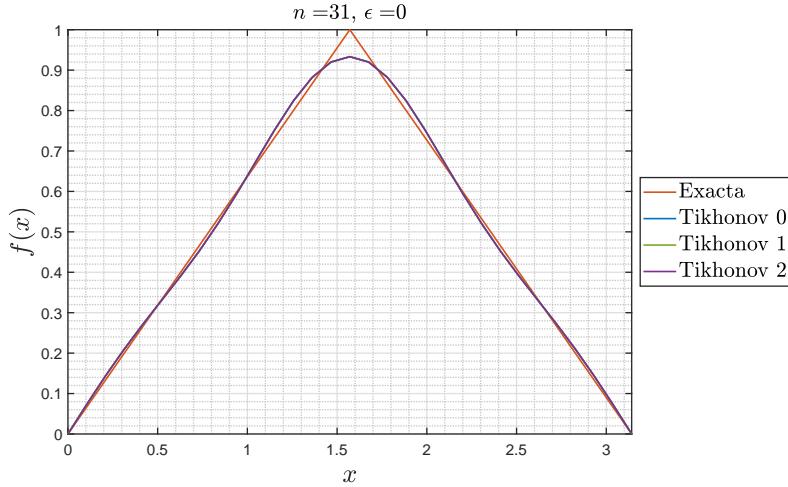


FIGURA 3.4: Solución F de resolver el sistema $AF = G$ utilizando el método de Tikhonov iterativo y $\alpha = 10^{-10}$, junto a la condición inicial exacta.

3.5.4. Método de Landweber

El método iterativo de Landweber consiste en hallar F buscando el mínimo de $\|TF - G\|^2$ por el método de máximo descenso (*steepest descent*). El algoritmo es

$$F_0 = F, \quad (3.17)$$

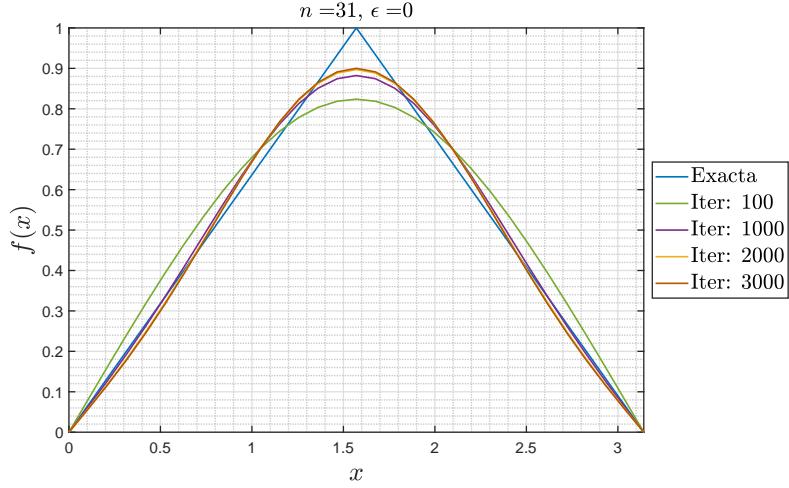
$$F_{n+1} = F_n - \mu A^*(AF_n - G), \quad n \geq 0. \quad (3.18)$$

El parámetro μ debe escogerse de tal modo que $\mu \|A^*A\| \leq 1$. La velocidad de convergencia depende del parámetro μ . Una buena elección suele ser

$$\mu = \frac{0,95}{\|A^*A\|}, \quad (3.19)$$

siendo ésta la que se va a utilizar.

En la figura 3.5 se muestran los resultados obtenidos para 100, 1000, 2000 y 3000 iteraciones, junto a la solución exacta. El pico al igual que por el método de Tikhonov no puede captarse. Se observa que a partir de 2000 iteraciones las variaciones en la solución son reducidas.

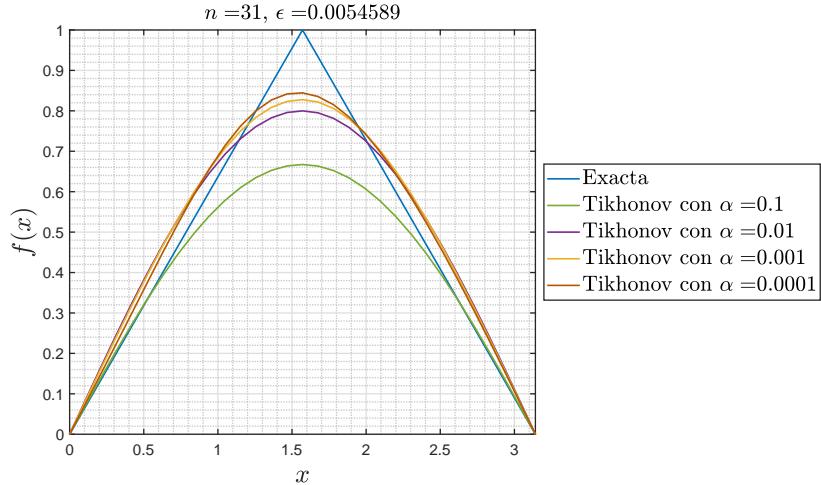
FIGURA 3.5: Solución F mediante el método de Landweber.

3.5.5. Perturbación en el sistema

Se introduce una perturbación (ruido) aleatoria en el sistema, tal que

$$|\epsilon_i| \leq 0,01 \max(G). \quad (3.20)$$

En la figura 3.6 se muestra la solución obtenida para la calibración del parámetro α del método de Tikhonov. En este caso, tuvo que incrementarse el orden de α cuyo valor óptimo es del orden $\alpha \sim \mathcal{O}(10^{-4})$. Para órdenes menores empieza a oscilar la solución. Se observa que la solución debido al ruido difiere en mayor medida de la solución exacta.

FIGURA 3.6: Solución F utilizando el método de Tikhonov con aproximación inicial nula, $\alpha \in [0,1, 10^{-4}]$ y con un ruido $|\epsilon_i| \leq 0,01 \max(G)$, junto a la condición inicial exacta.

Seleccionando $\alpha = 10^{-4}$ el método iterativo de Tikhonov no mejora sustancialmente la solución.

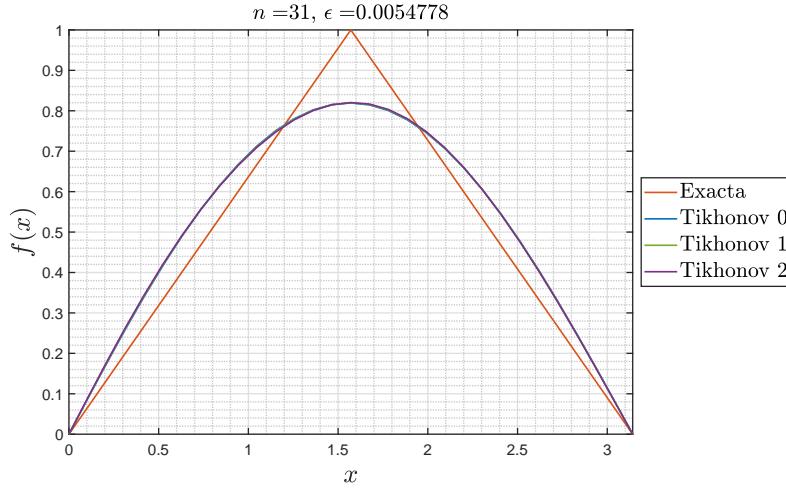


FIGURA 3.7: Solución F utilizando el método de Tikhonov iterativo con $\alpha = 10^{-4}$ y con un ruido $|\epsilon_i| \leq 0,01 \max(G)$, junto a la condición inicial exacta.

En el caso del método de Landweber no es necesario cambiar el valor del parámetro μ ya que depende directamente de la matriz A , véase la figura 3.8.

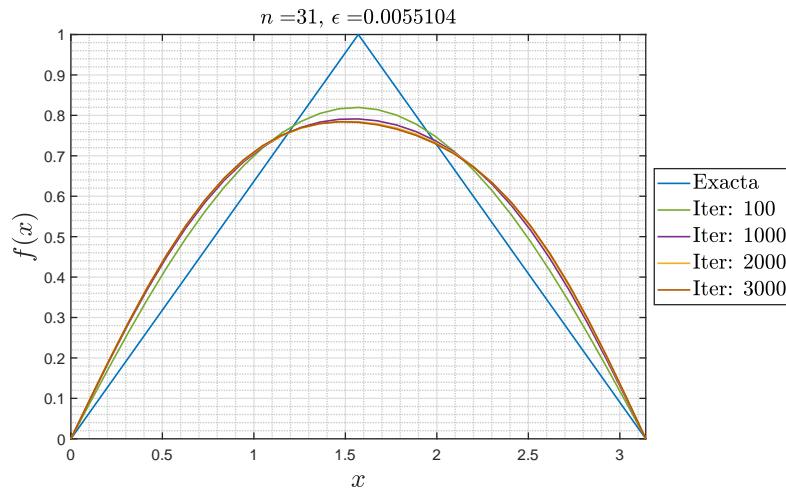


FIGURA 3.8: Solución F mediante el método de Landweber y con un ruido $|\epsilon_i| \leq 0,01 \max(G)$.

3.5.6. Resultados para un instante T posterior

Por último, en este caso, se considera un instante temporal mayor, concretamente partiendo de $T = 1$ y manteniendo la misma perturbación en el sistema.

A la vista de los resultados, se observa que aumentar el ΔT (instante final menos el inicial) intensifica el error cometido en la solución, es decir, que el aumento de T va ligado a un incremento en el error cometido.

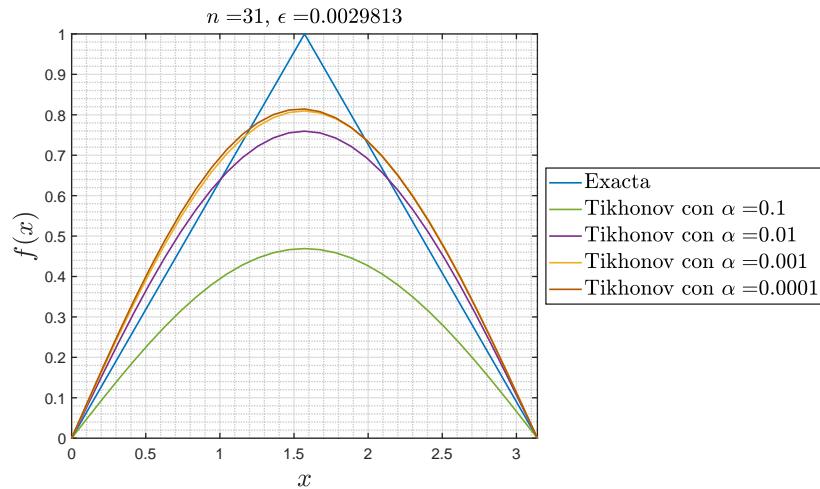


FIGURA 3.9: Solución F utilizando el método de Tikhonov con aproximación inicial nula, $\alpha \in [0,1, 10^{-4}]$ y con un ruido $|\epsilon_i| \leq 0,01 \max(G)$, junto a la condición inicial exacta y $T = 1$.

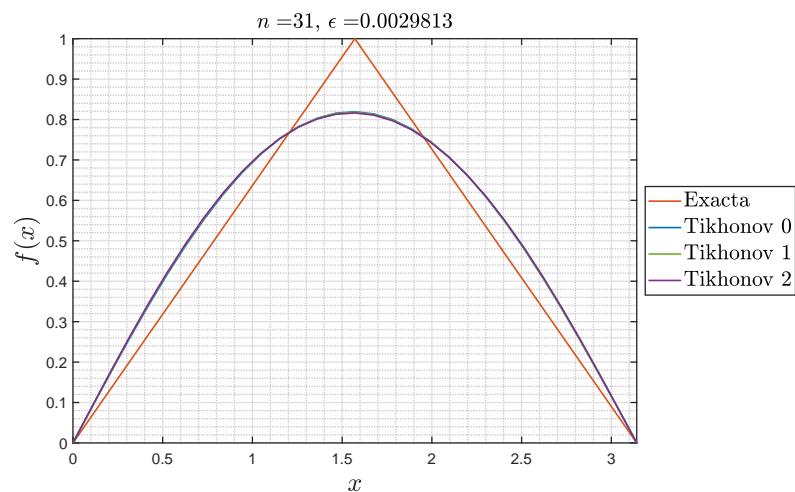


FIGURA 3.10: Solución F utilizando el método de Tikhonov iterativo con $\alpha = 10^{-4}$ y con un ruido $|\epsilon_i| \leq 0,01 \max(G)$, junto a la condición inicial exacta y $T = 1$.

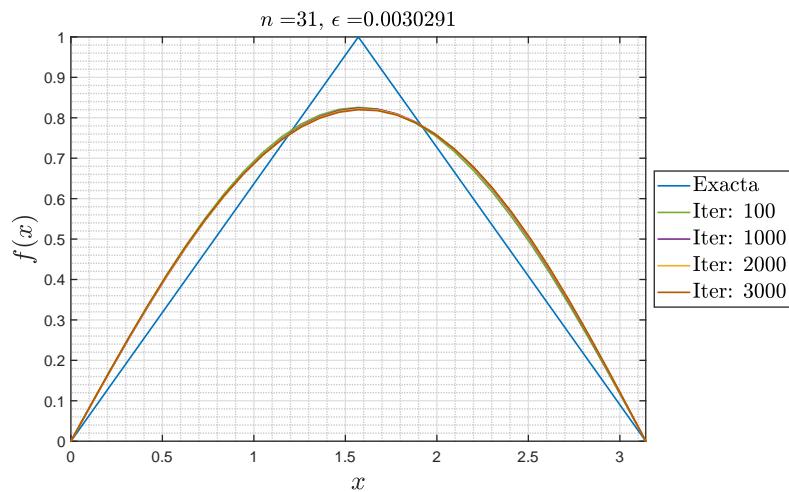


FIGURA 3.11: Solución F mediante el método de Landweber, con un ruido $|\epsilon_i| \leq 0,01 \max(G)$ y $T = 1$.

Proyecto 4

Reconstrucción de bases de datos

4.1. Introducción

En muchas aplicaciones, a menudo las bases de datos disponibles están parcialmente destruidas o tienen ‘huecos’ (*gaps*), es decir, falta parte de la información. Para solventar esto, se utilizan técnicas matemáticas como *SVD* (*Singular Value Descomposition*), *POD proper orthogonal descomposition*, entre otros muchos, que permiten identificar tales correlaciones y dar una descripción de los datos involucrados en términos de pocos grados de libertad, lo cual resulta muy útil en varias tareas científicas como la reconstrucción de datos.

En este proyecto se va a considerar una versión meramente académica, con amplio margen de mejora, de la reconstrucción de bases de datos *gappy* mediante la aplicación *SVD*. Se considera la función trascendental

$$f(x, y, z) = x^2 [\sin(5\pi y + 3\ln(x^3 + y^2 + z + \pi^2)) - 1]^2 - 4x^2y^3(1-z)^{3/2} + (x+z-1)(2y-z)\cos(30(x+z))\ln(6+x^2y^2+z^3) \quad (4.1)$$

y la transformación lineal $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x, y, z) := T(f(x, y, z)) = 2(f(x, y, z) - f_{min})/(f_{max} - f_{min}) - 1, \quad (4.2)$$

tal que la función resultante F varía entre -1 y 1 en el dominio $0 \leq x, y, z \leq z$. Ahora, para un valor fijo $z = z^* \in [0, 1]$, podemos construir una base de datos definiendo una matriz A tal que

$$A_{ij} = F(x_i, y_j, z^*), \quad (4.3)$$

donde $x_i = (i-1)\Delta x$, $y_j = (j-1)\Delta x$, con $i, j = 1, \dots, N$ y $\Delta x = 1/(N-1)$. Se observa que F es oscilatoria en las tres direcciones y no presenta ningún tipo de regularidad. Así pues, los datos en la matriz A muestran distintos patrones en distintas posiciones. Nótese, que el término $(1-z)^{3/2}$ previene que la función sea analítica [2].

Con tal objetivo, este proyecto se ha dividido en tres etapas:

1. **Construcción.** Se definen las matrices A^1, A^2, A^3 mediante la ecuación 4.3 con valores $z^* = 0, 0.5, 1$, respectivamente, para dos mallados distintos: denso ($N = 50$) y basto ($N = 20$), donde N indica el número de elementos utilizados en la discretización espacial por dimensión.
2. **Desconstrucción.** A partir de las matrices A^1, A^2, A^3 obtenidas en la etapa anterior se van a construir tres bases de datos *gappy* $\tilde{A}^1, \tilde{A}^2, \tilde{A}^3$ eliminando aleatoriamente un cierto porcentaje w de elementos, concretamente, $w_1 = 30\% gappyness$ y $w_2 = 60\% gappyness$.

3. Reconstrucción. A partir de las matrices *gappy* obtenidas en la etapa anterior se procede a aplicar el siguiente algoritmo iterativo.

- Primer paso: Se define una reconstrucción inicial A^0 ($s = 0$).
- Paso s -ésimo (para $s \geq 1$): Se aplica una reconstrucción SVD (truncada, con un número fijo m de modos) a la matriz modificada $\tilde{A}^s = A^{s-1}$ en los puntos *gappy* (aquí A^{s-1} corresponde a la matriz reconstruida mediante SVD en la iteración $s - 1$) y $A^s = A$ en los puntos *non-gappy*.

4. Análisis. En esta última etapa se procede a estudiar la calidad de las reconstrucciones en función del porcentaje w de elementos *gappy*, del número m de modos retenidos y de la reconstrucción inicial A^0 . Únicamente, se va a analizar los resultados correspondientes a la primera base de datos A^1 , el resto de resultados se exponen en el anexo **B**.

4.2. Construcción de las bases de datos

En primer lugar, es necesario elaborar las bases de datos. Para ello, se definen las matrices A^1, A^2, A^3 mediante la ecuación 4.3 con valores $z^* = 0, 0,5, 1$, respectivamente, para dos mallados distintos: denso ($N = 50$) y basto ($N = 20$), donde N indica el número de elementos utilizados en la discretización espacial por dimensión. La discretización utilizada es simétrica en ambas dimensiones, obteniendo bases de datos de 2500 puntos (densa) y 400 puntos (basta). En la figura 4.1 se han representados las bases de datos A^1, A^2, A^3 , correspondiendo con las subfiguras 4.1a, 4.1b y 4.1c, respectivamente. En el lado izquierdo se han representado las bases de datos para $N = 50$ y en el lado derecho para $N = 20$.

4.3. Desconstrucción y reconstrucción de las bases de datos

Una vez obtenidas las bases de datos A^1, A^2, A^3 se procede a definir las tres bases de datos *gappy* $\tilde{A}^1, \tilde{A}^2, \tilde{A}^3$. Para ello, se van a eliminar aleatoriamente un porcentaje w de elementos estableciendo a 0 su valor. Concretamente, se van a considerar dos porcentajes de error: $w_1 = 30\% gappyness$ y $w_2 = 60\% gappyness$.

Posteriormente, se procede a reconstruir las bases datos *gappy* $\tilde{A}^1, \tilde{A}^2, \tilde{A}^3$. Para ello, se emplea el algoritmo descrito en el punto 3. El número de iteraciones se ha fijado en 2000 para todos los casos.

Los resultados se exponen en conjunto en la sección siguiente 4.4.

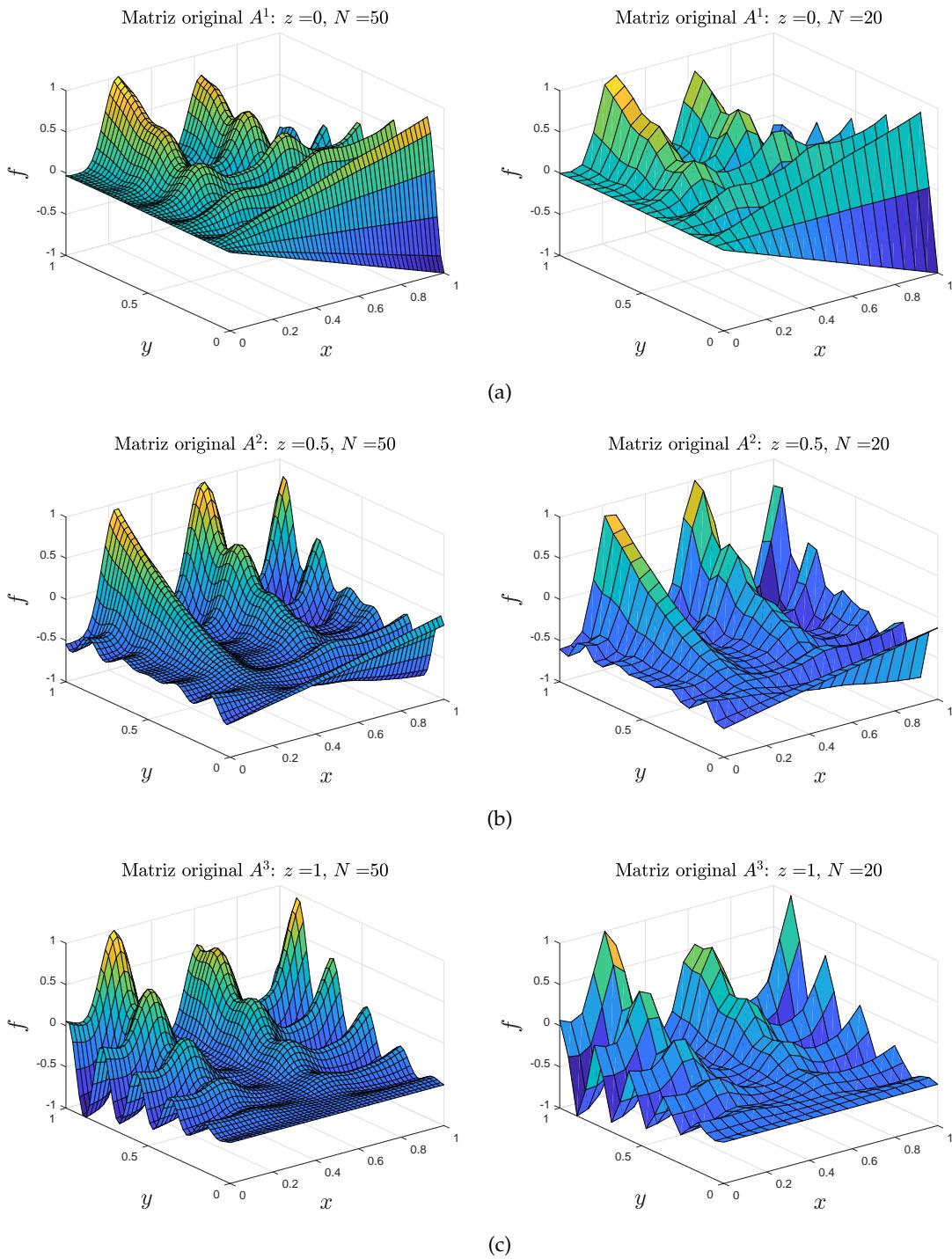


FIGURA 4.1: Bases de datos densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha) con valores constantes de z : $z = 0$ (a), $z = 0.5$ (b), $z = 1$ (c).

4.4. Análisis

Para proceder con el análisis es necesario definir como se va a estimar la bondad de los resultados a partir de los errores involucrados. Para ello, se definen las siguientes expresiones

$$\text{RMSE} = \frac{1}{N} \|A^{\text{original}} - A^{\text{reconstruida}}\|_2, \quad (4.4)$$

$$\text{maxE} = \max |A_{ij}^{\text{original}} - A_{ij}^{\text{reconstruida}}|, \quad (4.5)$$

donde A^{original} representa una base de datos original (sin huecos) y $A^{\text{reconstruida}}$ corresponde a su reconstrucción a través del algoritmo descrito en el punto 3.

4.4.1. Resultados con 30 % gappyness

En la figura 4.2 se han representado los resultados obtenidos de las etapas anteriores para la base de datos densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha) con $w_1 = 30\%$ gappyness: 4.2a matriz original A^1 , 4.2b matriz gappy \tilde{A}^1 , 4.2c matriz reconstruida $A^{1,\text{reconstruida}}$ y 4.2d bondad de los resultados en función al número de modos m .

Para poder cuantificar la bondad de los resultados es necesario fijarse en la última subfigura 4.2d. En el caso de la malla densa se observa como el error decrece, prácticamente, un orden de magnitud por modo hasta alcanzar un error mínimo para $m = 12$. Considerando un margen de error aceptable del orden de $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-4})$, el número de modos necesarios es $m = 5$. En contraposición, en el mallado basta se observa como el error cometido aumenta en uno el orden de magnitud para el mismo número de modos. Además, en este caso se observa que el mínimo error cometido se alcanza para $m = 4$ cuyo orden es $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-4})$. El margen de error en la malla basta está mucho menos acotado que en la densa, siendo la cota de ésta última del orden de $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-11})$. Nótese, que cuanto a mayor sea el número de modos no tiene por qué disminuir el error cometido, tal y como se observa en la malla basta. El origen de este hecho se debe a que los modos de órdenes superior llevan redundancias asociadas con los errores y para un cierto valor de modos contaminan los resultados, de ahí ese pico para $m = 5$ que contamina a los sucesivos.

4.4.2. Resultados con 60 % gappyness

Se procede igual que en la subsección anterior. En la figura 4.3 se han representado los resultados obtenidos de las etapas anteriores para la base de datos densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha) con $w_2 = 60\%$ gappyness: 4.2a matriz original A^1 , 4.2b matriz gappy \tilde{A}^1 , 4.2c matriz reconstruida $A^{1,\text{reconstruida}}$ y 4.2d bondad de los resultados en función al número de modos m .

Lo primero que se observa es que ante una pérdida masiva de datos, concretamente, del 60% es posible reconstruir la bases de datos permitiendo alcanzar un error $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-4})$ y $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-2})$, densa y basta, respectivamente. Para pérdidas de datos considerables el número de elementos es muy determinante tal y como se observa en los resultados de la malla basta en contraste con la densa.

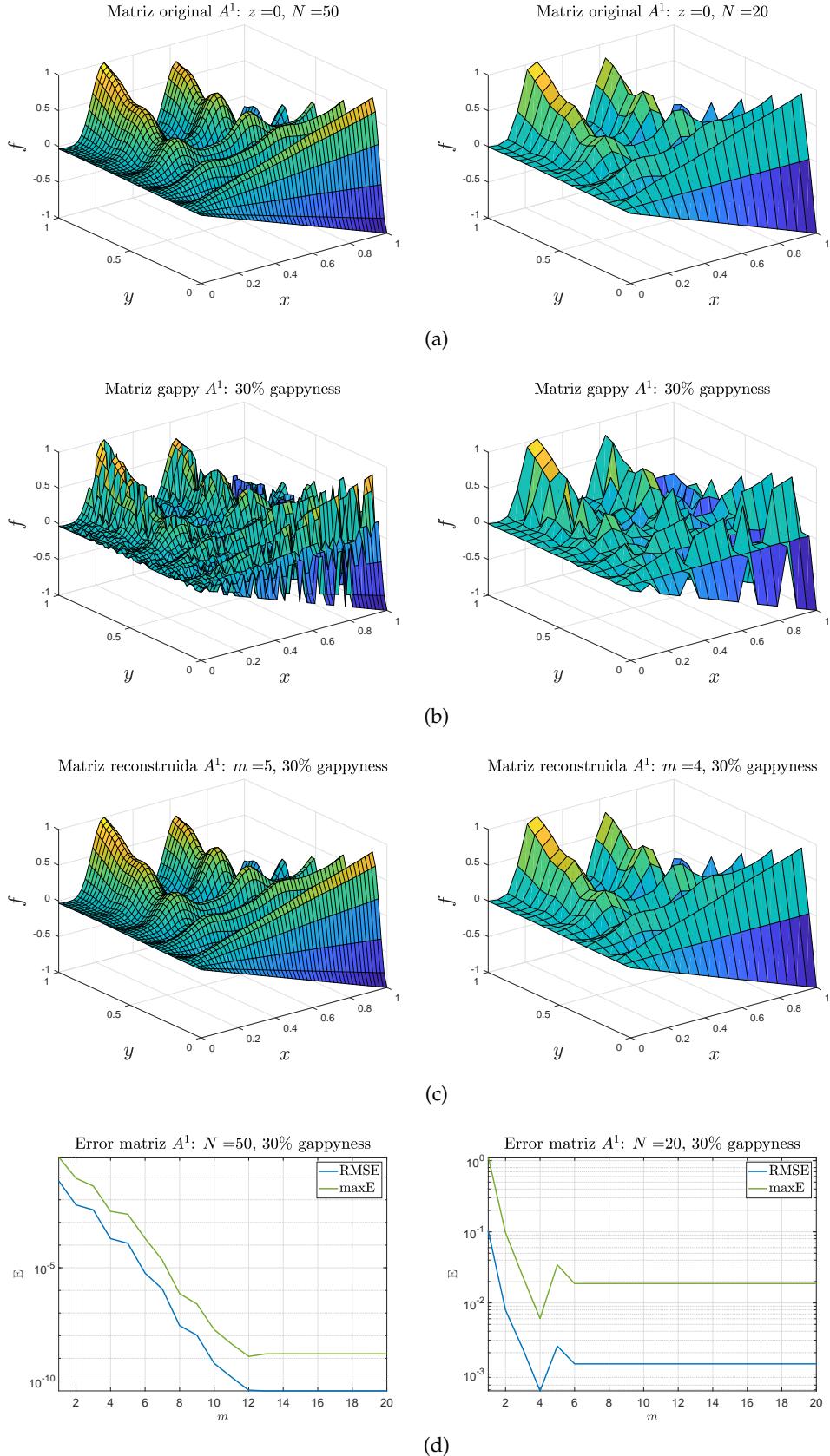


FIGURA 4.2: Base de datos A^1 , densa $N = 50$ (izquierdo) y basta $N = 20$ (derecha): (a) matriz original, (b) matriz *gappy*, (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m .

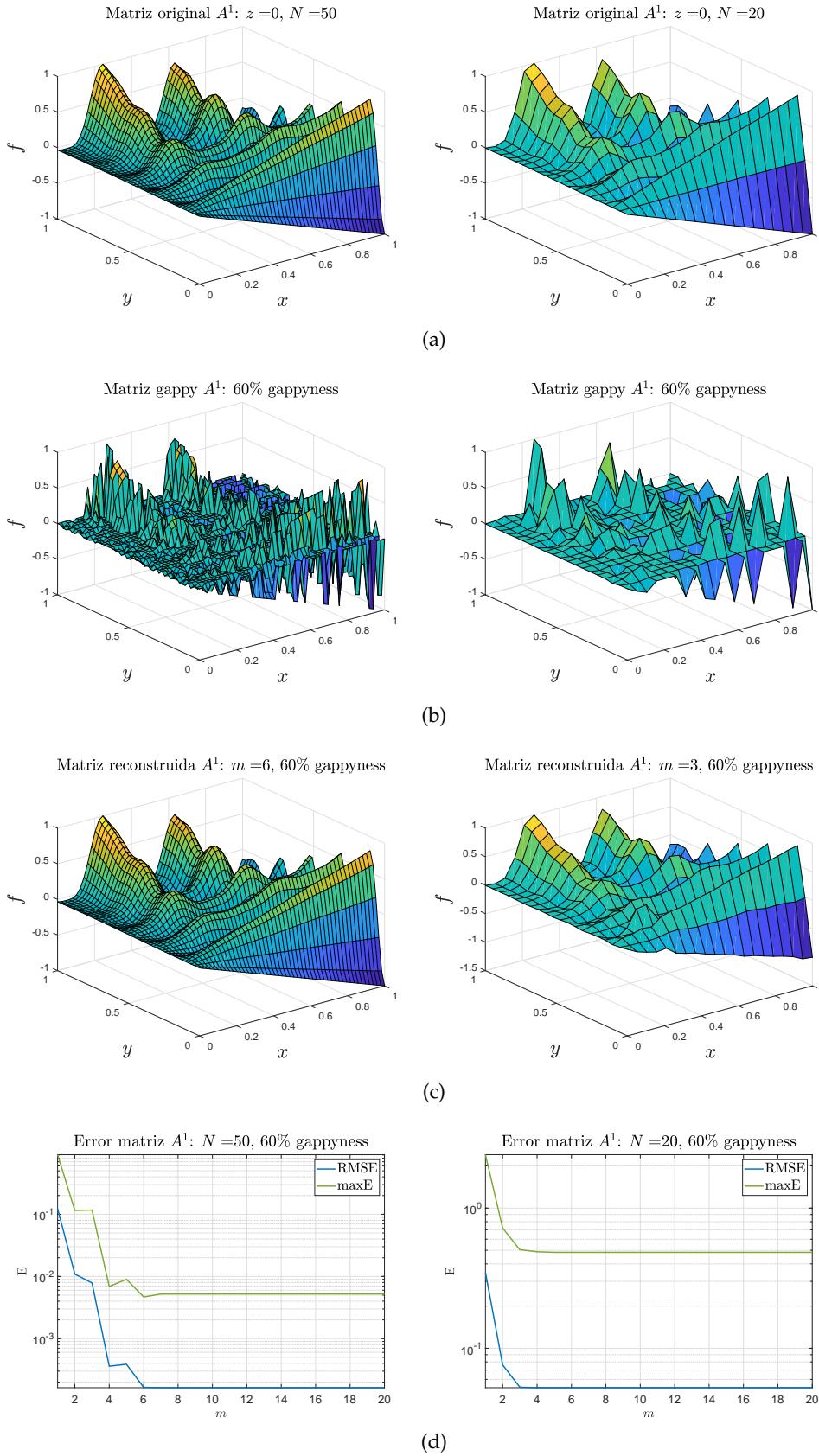


FIGURA 4.3: Base de datos A^1 , densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha): (a) matriz original, (b) matriz gappy, (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m .

4.4.3. Variante en la definición de matriz *gappy*

En esta subsección se va a considerar un nuevo tipo de matriz *gappy*, en este caso en vez de hacer nulo el valor los elementos elegidos aleatoriamente, se va a optar por imponer el valor medio próximo al elemento en cuestión. Para valores dentro de la frontera del dominio (sin incluir) sería

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1} + A_{i,j-1}}{4}. \quad (4.6)$$

Para los elementos en la frontera hay que distinguir entre todos los posibles casos. Sean N_x y N_y dos números naturales aleatorios tales que $1 < N_k < N$, con $k = x, y$, por ejemplo, para $N_x = 1$ y $N_y = 1$, se tiene

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{A_{i+1,j} + A_{i,j+1}}{2}, \quad (4.7)$$

es decir, se realiza el promedio de los valores existentes circundantes al elemento *gappy* aleatorio. En el caso de valores contenidos en la frontera, exceptuando las esquinas, por ejemplo $N_x > 1$ y $N_y = 1$, sería

$$\tilde{A}_{ij} = \frac{A_{i+1,j} + A_{i-1,j} + A_{i,j+1}}{3}. \quad (4.8)$$

procediendo del mismo modo en el resto de casos. En total se tienen 4 casos para las esquinas, 4 para los bordes y 1 dentro de la frontera del dominio, es decir, un total de 9 casos introducidos en un bucle lo que puede demorar la ejecución completa del código.

En la figura 4.4 se muestran los resultados obtenidos para la base de datos A^1 con un malla denso $N = 50$ y $w_2 = 60\%$ *gappyness* en contraste con los obtenidos en el caso anterior para una mejor comparación entre estos. Los resultados son ligeramente mejores a los obtenidos en el caso anterior permitiendo alcanzar un error con un orden de magnitud menor tal que $\epsilon \sim \mathcal{O}(10^{-5})$. Lo que nos lleva a conclusión de que el algoritmo no es sensible a cuan difieren los datos de la matriz original sino del mero hecho de la cantidad de datos perdidos. Otra observación relevante es que el primer modo introduce errores mayores a los cometidos con la matriz *gappy* creada lo que verifica la conclusión obtenida.

4.4.4. Observaciones

- A pesar de haber empleado un algoritmo bastante simple en la reconstrucción de las bases de datos, los resultados obtenidos son muy satisfactorios para el coste computacional que supuso.
- Para una pérdida de datos del 30 % puede reconstruirse fielmente la base de datos original empleando una malla densa y el número de modos adecuado.

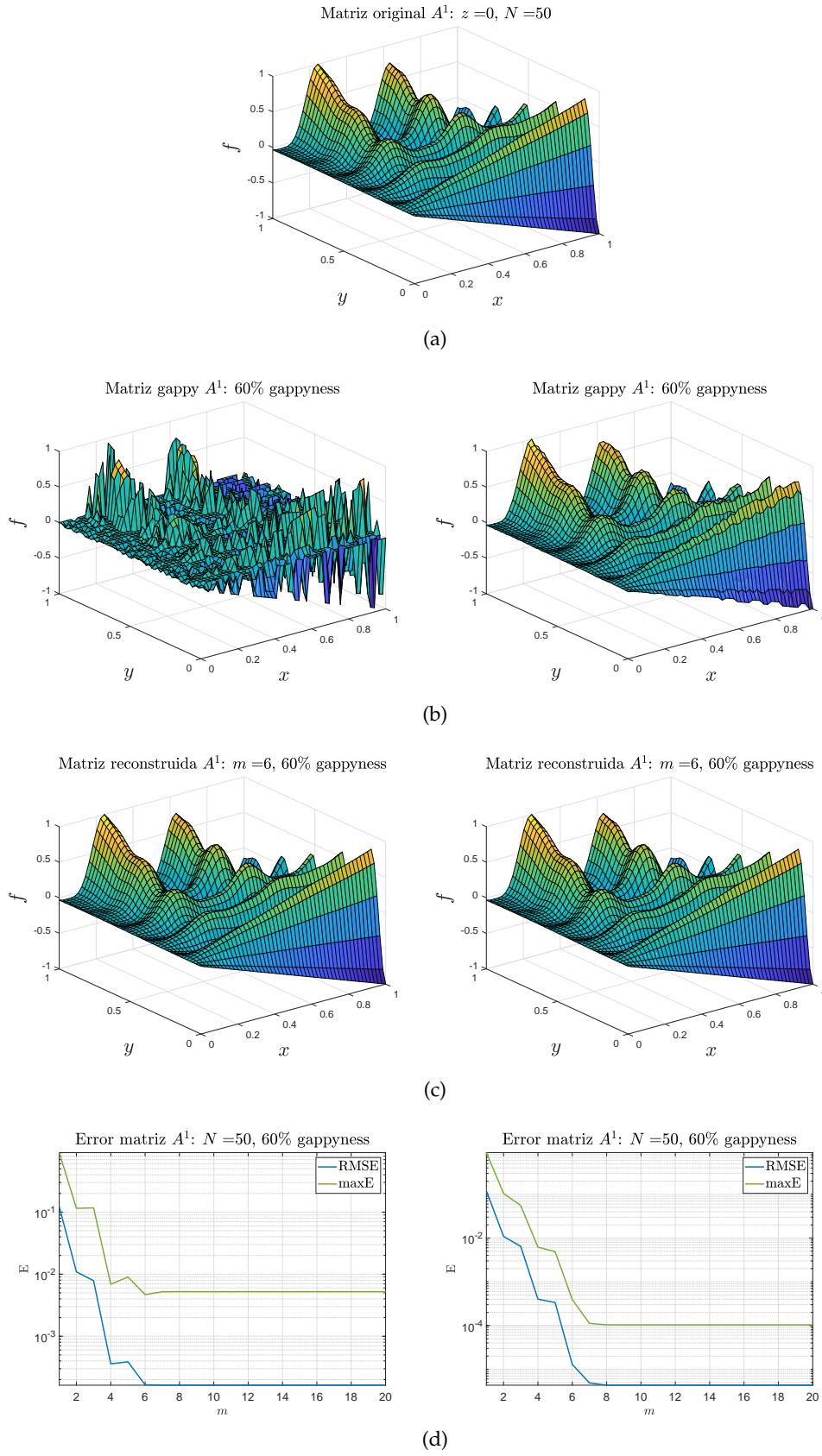


FIGURA 4.4: Base de datos A^1 , densa $N = 50$, elemento *gappy* nulo (izquierdo) y elemento *gappy* promedio vecinos (derecha): (a) matriz original, (b) matriz *gappy*, (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m .

Proyecto 5

Reconstrucción algebraica

5.1. Introducción

La tomografía axial computarizada (TAC) es una prueba de diagnóstico por imágenes que utiliza un equipo de rayos X para crear imágenes transversales del cuerpo [6]. El desarrollo matemático se basa en la transformada de Radon (transformación integral). A grandes rasgos consiste en calcular la integral de línea sobre la transformada de Radon de un número determinado de rectas paralelas con un ángulo dado. La ventaja principal es que es un ensayo no-destructivo, que permite visualizar el interior de un cuerpo sin necesidad de manipularlo de manera invasiva, por ejemplo, realizando un corte.

En este proyecto se nos proporcionan una serie de datos, que a partir de la resolución algebraica de un sistema, permite obtener la imagen interior de un cuerpo. El objetivo es identificar los posibles defectos en éste, en caso de que los haya. Como se verá a continuación, la solución obtenida sin regularizar tiene una gran cantidad de ruido y no permite identificar posibles defectos en el objeto. Para ello, se van a utilizar dos técnicas de regularización (Tikhonov y SVD) para finalmente analizar los resultados obtenidos e identificar los posibles defectos.

Concretamente, hay cuatro set de datos:

- Datos 1: 50 ángulos entre 1 y 180 grados.
- Datos 2: 25 ángulos entre 1 y 180 grados.
- Datos 3: 25 ángulos entre 1 y 90 grados.
- Datos 4: 25 ángulos entre 90 y 180 grados.

5.2. Reconstrucción algebraica

En los fichero *DatosTomografia_i*, con $i = 1, 2, 3, 4$, se proporcionan los siguientes datos:

- A : la matriz del sistema correspondiente a una imagen de 70×70 pixels.
- R : sinograma correspondiente a 50 ángulos entre 1 y 180 grados.

A partir de estos datos se divide el proyecto en tres etapas:

- Etapa 1, solución sin regularizar:

- 1.1 Representación del sinograma proporcionado.

2.2 Resolución del sistema $AF = R(:)$.

- Etapa 2, solución regularizada:

2.1 Utilizando el método de Tikhonov.

2.2 Truncando la SVD de la matriz A con un número determinado de valores singulares (modos).

- Etapa 3, datos parciales: Los ficheros $DatosTomografiai$, con $i = 2, 3, 4$, contienen sinogramas de la misma función, pero obtenidos a partir de 25 ángulos, comprendidos en los intervalos $[0, 180]$, $[0, 90]$ y $[90, 180]$, respectivamente. A partir de estos datos se sigue el mismo procedimiento que en la etapa 2.

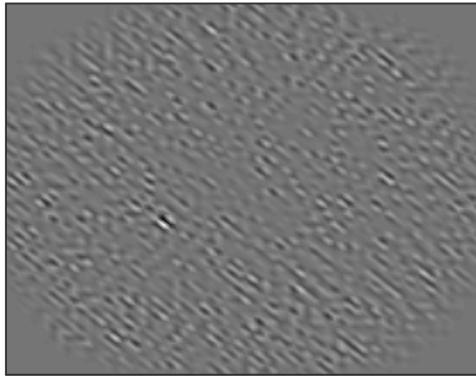
5.3. Tomografía 1

En primer lugar, se procede a representar el sinograma correspondiente a $DatosTomografia1$ (ver subfigura 5.1b) y la resolución del sistema

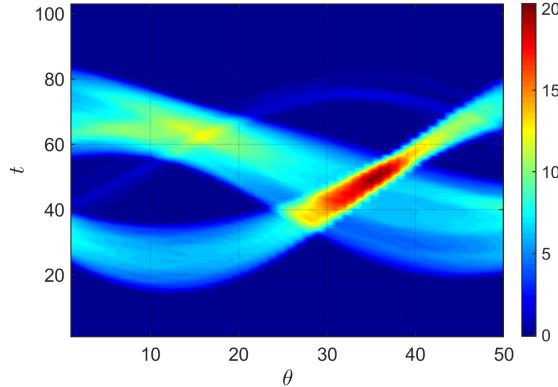
$$AF = R(:), \quad (5.1)$$

cuya solución se representa en la subfigura 5.1a. Se observa que es indistinguible la imagen, no pudiendo esclarecer la identidad del objeto. Para resolver este problema adicional, es necesario emplear alguna técnica de regularización que permita filtrar el ruido. Concretamente, se van a utilizar dos técnicas de regularización:

- Método de Tikhonov.
- Truncando la SVD (acrónimo de *Singular Value Descomposition*) de la matriz A dada con un número m de modos o lo que es lo mismo valores singulares.



(a) Solución del sistema



(b) Sinograma

FIGURA 5.1: Tomografía 1: (a) solución del sistema, (b) sinograma.

5.3.1. Método de Tikhonov

El método de Tikhonov necesita ser calibrado en función a un parámetro α , en la subfigura 5.6a¹ se ha representado una transición de la imagen interna obtenida para valores de α comprendidos entre $[10^{-5}, 10^3]$ aumentando un orden de magnitud por paso $\Delta\alpha$, es decir, se tienen un total de 9 imágenes, cada una con su valor de α correspondiente. Existen diversas técnicas que permiten obtener el valor de α óptimo, pero en este proyecto no se van a utilizar ya que se pretende introducirnos a grandes rasgos en el proceso únicamente.

Se observa como para valores de $\alpha \in [0, 1, 10]$ se pueden distinguir con claridad los defectos en el objeto, tal y como se observa en la figura 5.3 para $\alpha = 0,1$, donde se han empleado técnicas de procesamiento de imágenes para identificar los defectos en el objeto.

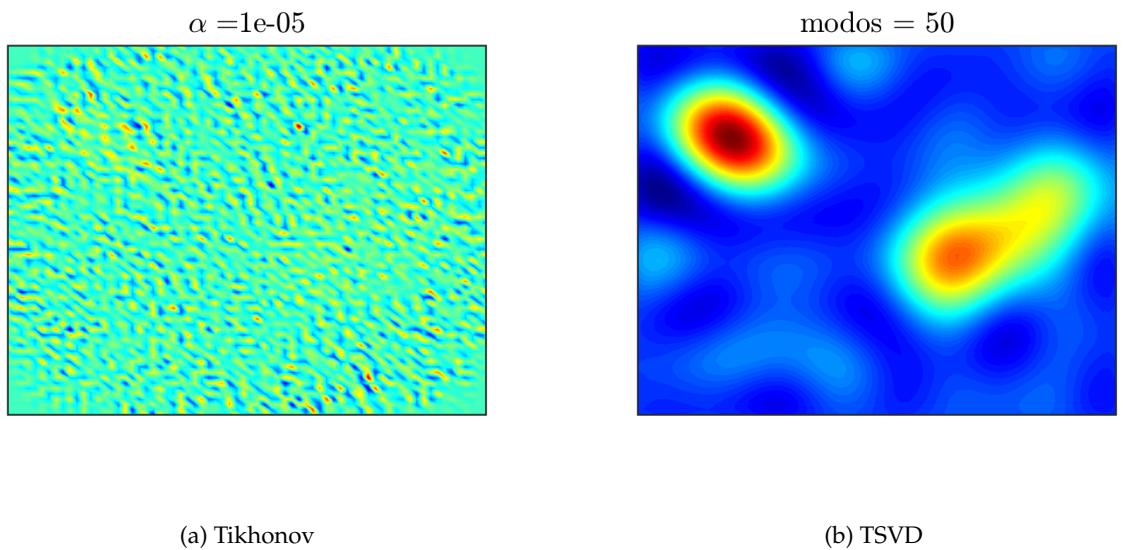


FIGURA 5.2: Transición regularización tomografía 1: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 1 con valores $\alpha = [10^{-5}, 10^3]$, (b) reconstrucción mediante SVD de la tomografía 1 con $\alpha = 0,1$ e $i = [50, 3500]$ con un paso $\Delta i = 50$, donde i representa el número de modos (valores singulares) retenidos.

¹Se ha representado junto al método TSVD para poder comparar con mayor facilidad las diferencias entre estos.

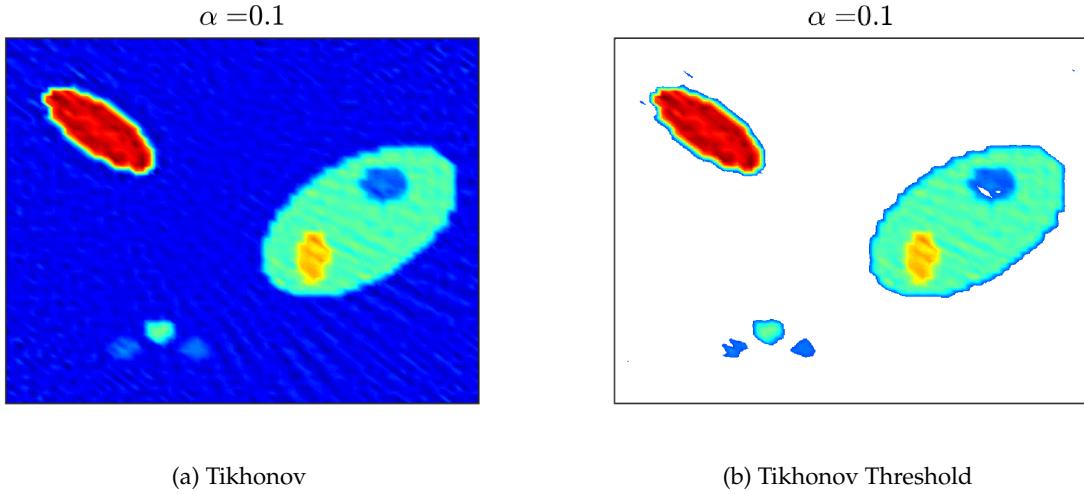


FIGURA 5.3: Regularización óptima tomografía 1: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 1 con $\alpha = 0.1$, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.

5.3.2. TSVD

En primer lugar, se representa el espectro de los valores singulares σ asociados a la matriz A , ver figura 5.4. Se observa que, aproximadamente, a partir de 2750 valores singulares retenidos el valor de estos decae rápidamente, reduciendo hasta ocho órdenes de magnitud su valor. Es importante indicar que los patrones físicos más característicos están asociados a los valores singulares más grandes². Además los valores singulares de menor valor están asociados al ruido en la imagen por lo que en caso de truncar la SVD de tal forma que se retengan únicamente los valores singulares con mayor información se consigue filtrar la imagen de ruido.

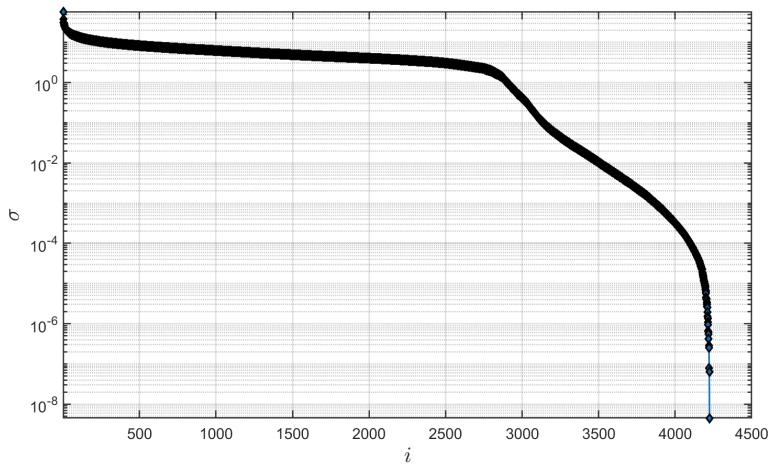


FIGURA 5.4: TSVD: valores singulares tomografía 1.

²Los valores singulares están ordenados de manera decreciente.

En la subfigura 5.1b se han representado las distintas imágenes internas obtenidas en función al número de modos retenidos. Se observa lo comentado anteriormente, para pocos valores singulares retenidos de la SVD se pueden distinguir los patrones en el objeto con claridad. En el otro extremo, cuando se retienen los de menor valor, se introduce una gran cantidad de ruido en la imagen impidiendo de nuevo distinguir el contenido de la imagen. A partir de 600 valores singulares retenidos ya se empiezan a distinguir todos los defectos de la imagen. Una vez que se superan los 3000 valores singulares se introduce ruido rápidamente en la imagen.

En la figura 5.5 se ha representado la solución con 1000 valores singulares (o modos) retenidos. Al igual que en el método de Tikhonov se han empleado técnicas de procesamiento de imágenes para distinguir con mayor claridad los defectos.

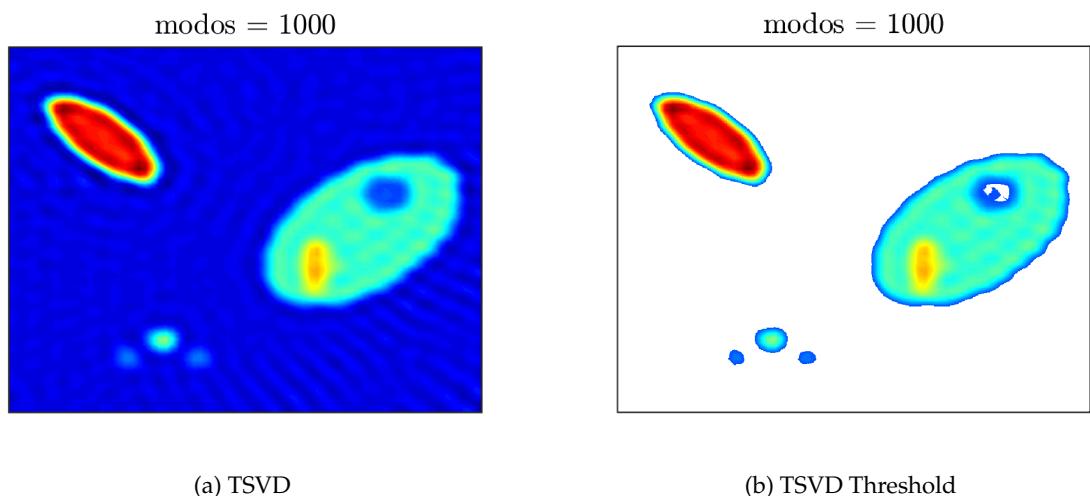
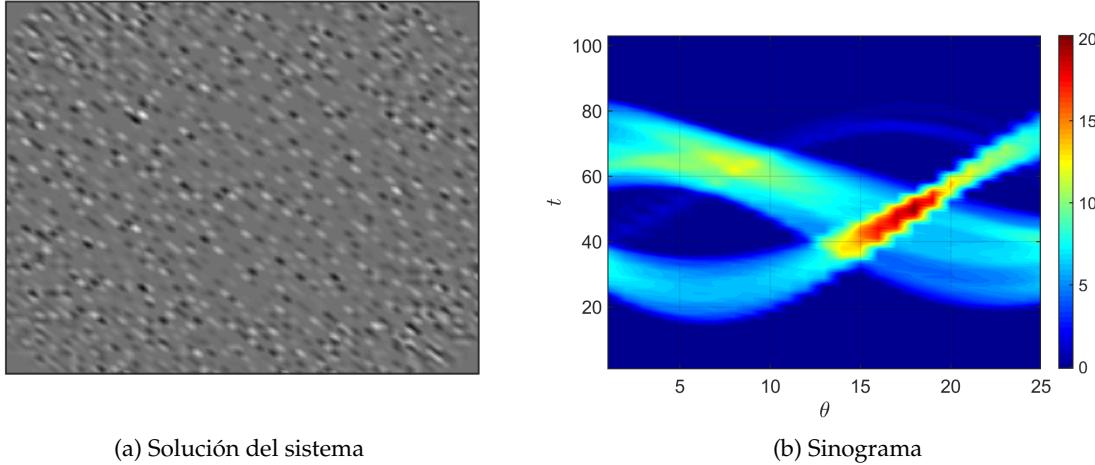


FIGURA 5.5: Regularización óptima tomografía 1: (a) reconstrucción mediante el método TSVD de la tomografía 1 con $i \in [1, 1000]$ valores singulares retenidos, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.

5.4. Tomografía 2

Para *DatosTomografia2* se dispone de un sinograma de la misma función, pero obtenidos a partir de 25 ángulos entre $[0, 180]$ grados. Se procede del mismo modo que en la sección anterior. En la figura 5.6 se representa la solución del sistema sin regularizar, así como, el sinograma correspondiente.

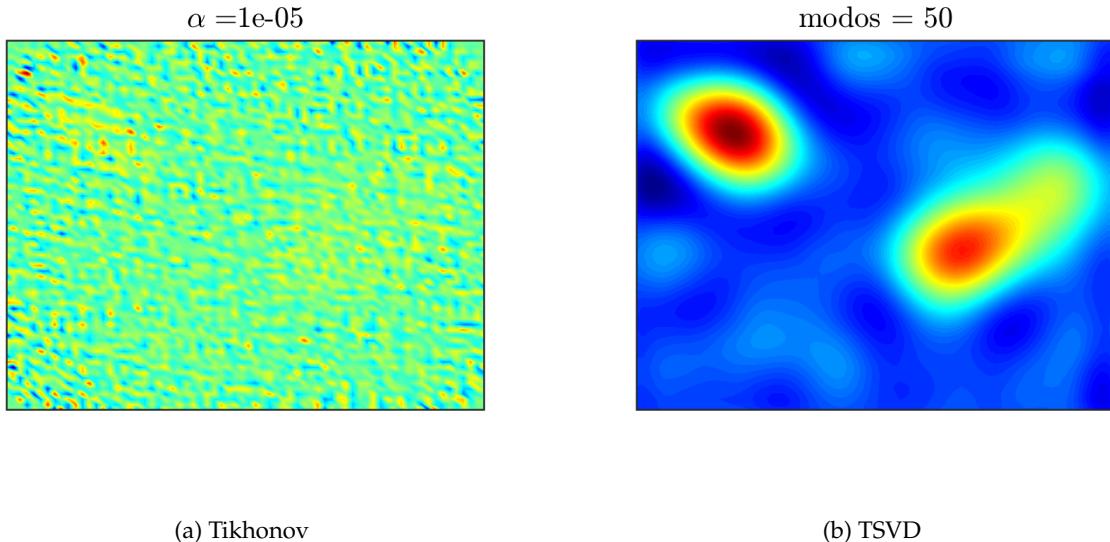


(a) Solución del sistema

(b) Sinograma

FIGURA 5.6: Tomografía 2: (a) solución del sistema, (b) sinograma.

5.4.1. Método de Tikhonov



(a) Tikhonov

(b) TSVD

FIGURA 5.7: Transición regularización tomografía 2: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 2 con valores $\alpha = [10^{-5}, 10^3]$, (b) reconstrucción mediante SVD de la tomografía 2 con $\alpha = 0,1$ e $i = [50, 2000]$ con un paso $\Delta i = 50$, donde i representa el número de modos (valores singulares) retenidos.

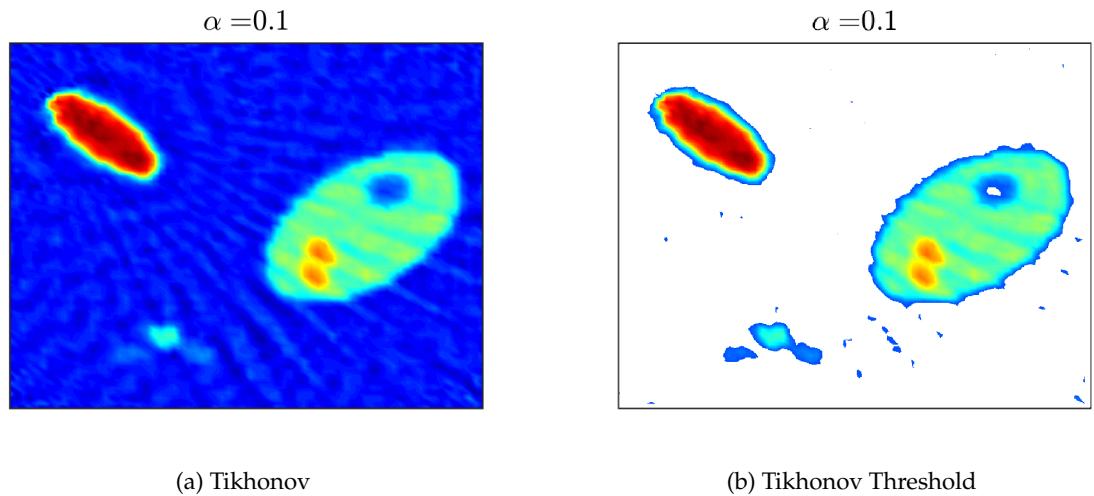


FIGURA 5.8: Regularización óptima tomografía 2: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 2 con $\alpha = 0.1$, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.

5.4.2. TSVD

En este caso, al disponer de la mitad del número de ángulos tomados, 25 exactamente, se reduce el número de valores singulares de la matriz.

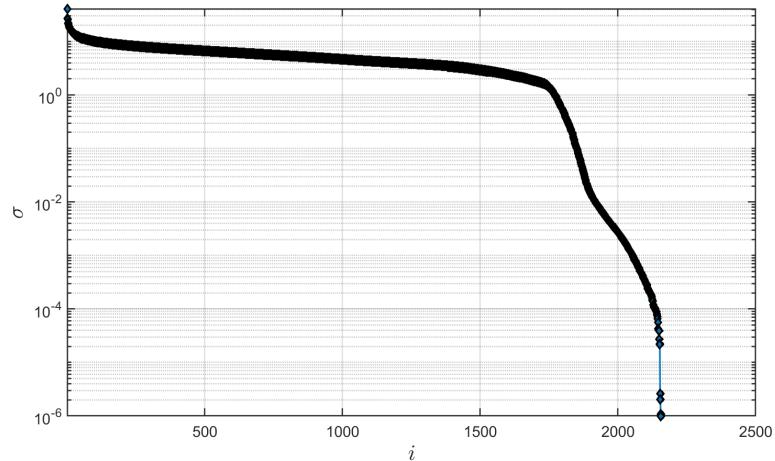


FIGURA 5.9: TSVD: valores singulares tomografía 2.

En la transición de imágenes (subfigura 5.7b) se observa como se ha disminuido la nitidez de la imagen al considerar un menor número de ángulos.

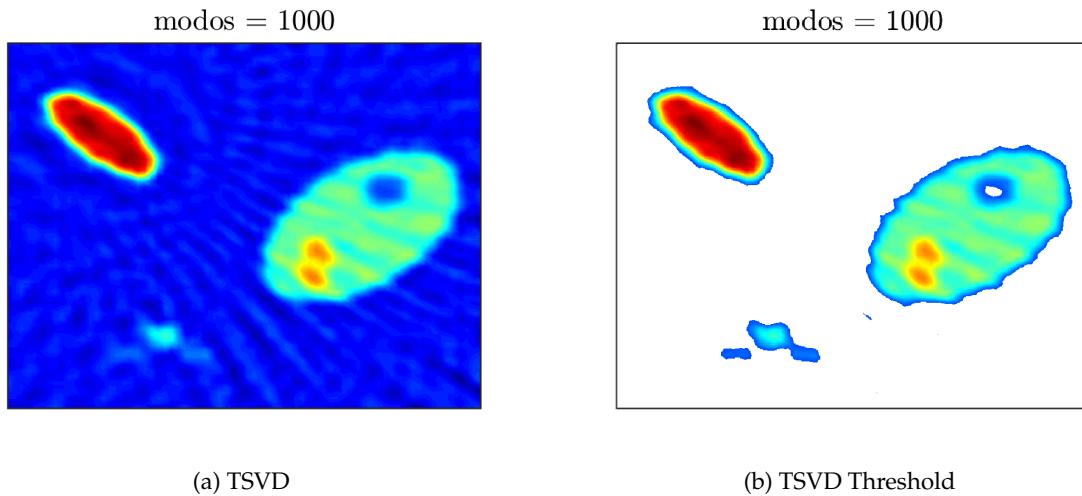


FIGURA 5.10: Regularización óptima tomografía 2: (a) reconstrucción mediante el método TSVD de la tomografía 2 con $i \in [1, 1000]$ valores singulares retenidos, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.

5.4.3. Observaciones

Para ángulos comprendidos entre $[0, 180]$, pero con 25 tomas de datos únicamente, logran captarse todos los defectos. A pesar de ello, reducir la toma de datos a la mitad merma la nitidez de los resultados.

5.5. Tomografía 3

Para *DatosTomografia3* se dispone de un sinograma de la misma función, pero obtenidos a partir de 25 ángulos entre $[0, 90]$ grados. Se procede del mismo modo que en la sección anterior. En la figura 5.11 se representa la solución del sistema sin regularizar, así como, el sinograma correspondiente.

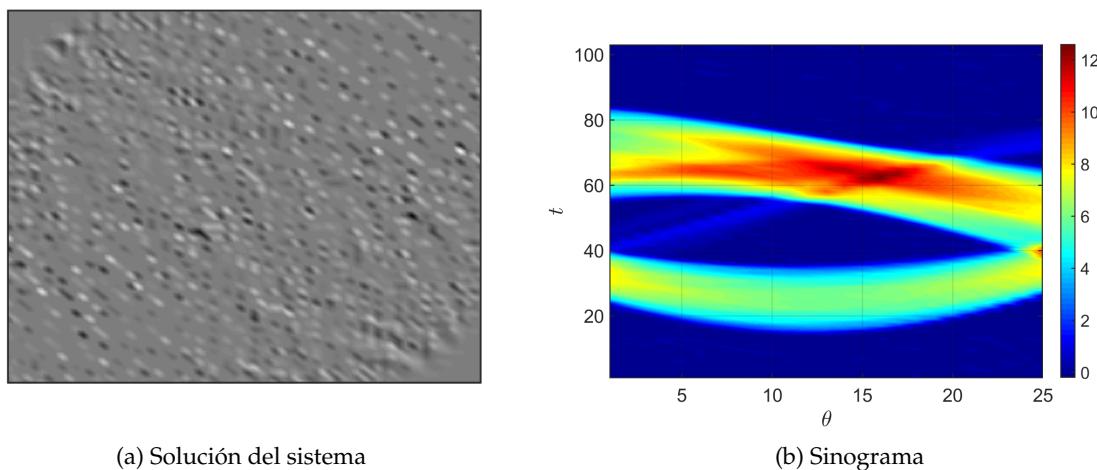


FIGURA 5.11: Tomografía 3: (a) solución del sistema, (b) sinograma.

5.5.1. Método de Tikhonov

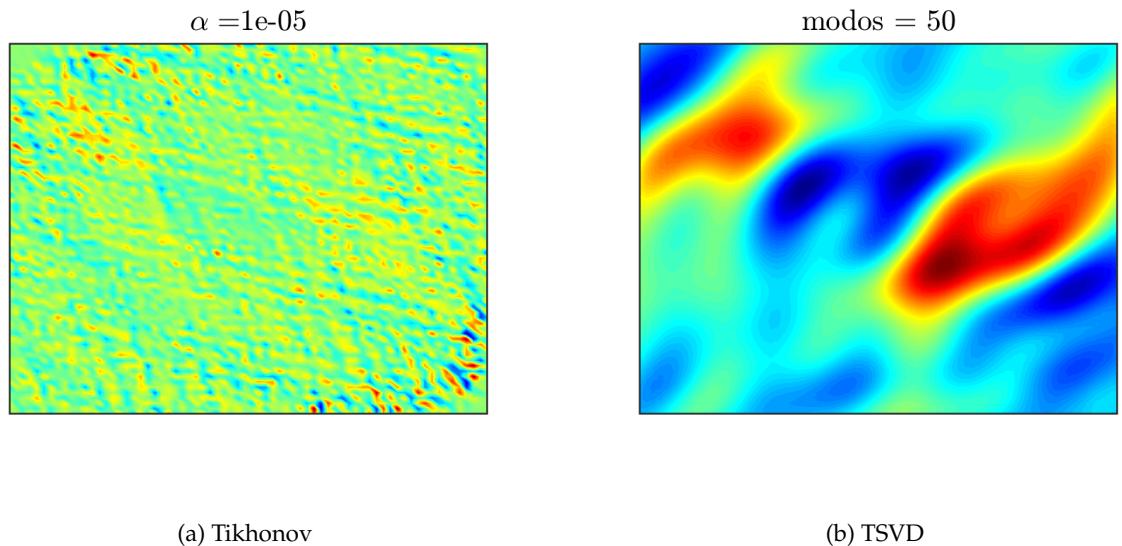


FIGURA 5.12: Transición regularización tomografía 3: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 3 con valores $\alpha = [10^{-5}, 10^3]$, (b) reconstrucción mediante SVD de la tomografía 3 con $\alpha = 0,1$ e $i = [50, 2000]$ con un paso $\Delta i = 50$, donde i representa el número de modos (valores singulares) retenidos.

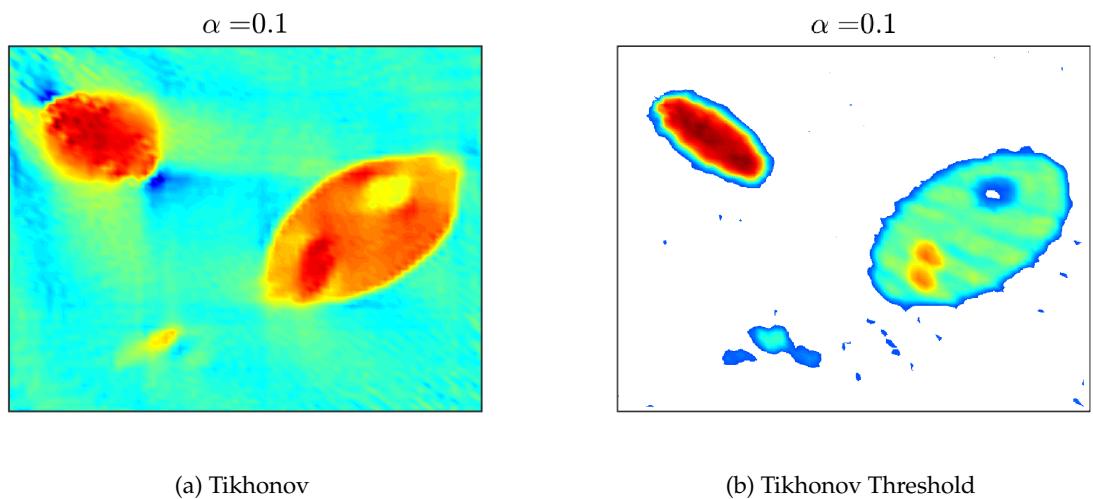


FIGURA 5.13: Regularización óptima tomografía 3: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 3 con $\alpha = 0,1$, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.

5.5.2. TSVD

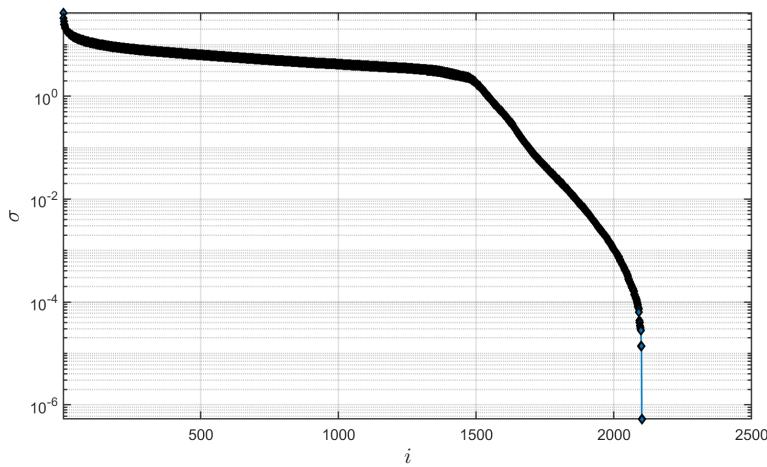


FIGURA 5.14: TSVD: valores singulares tomografía 3.

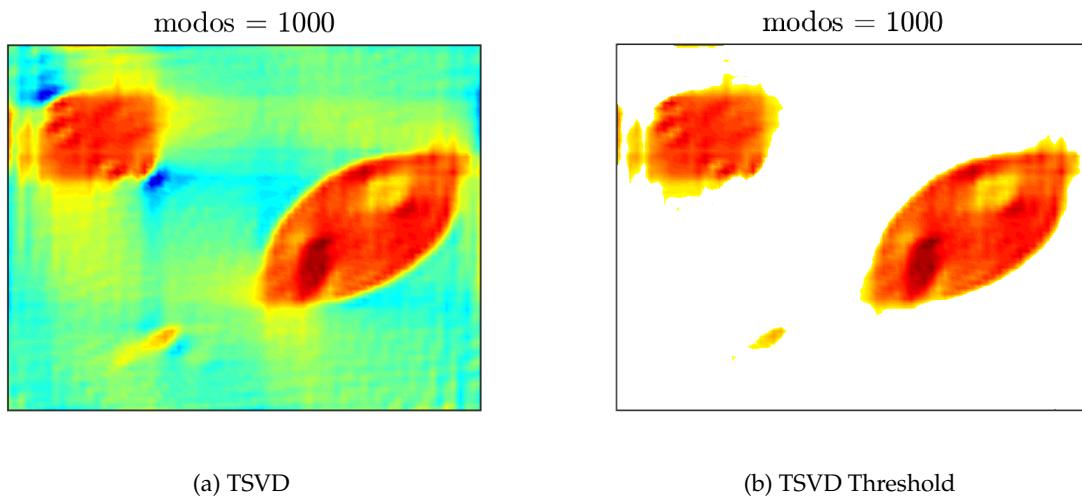


FIGURA 5.15: Regularización óptima tomografía 3: (a) reconstrucción mediante el método TSVD de la tomografía 3 con $i \in [1, 1000]$ valores singulares retenidos, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.

5.5.3. Observaciones

Para ángulos comprendidos entre $[0, 90]$ sólo logran captarse con exactitud los dos defectos de mayor tamaño, perdiéndose prácticamente el defecto de menor tamaño localizado en la parte inferior izquierda.

5.6. Tomografía 4

Para *DatosTomografia4* se dispone de un sinograma de la misma función, pero obtenidos a partir de 25 ángulos entre [90, 180] grados. Se procede del mismo modo que en la sección anterior. En la figura 5.16 se representa la solución del sistema sin regularizar, así como, el sinograma correspondiente.

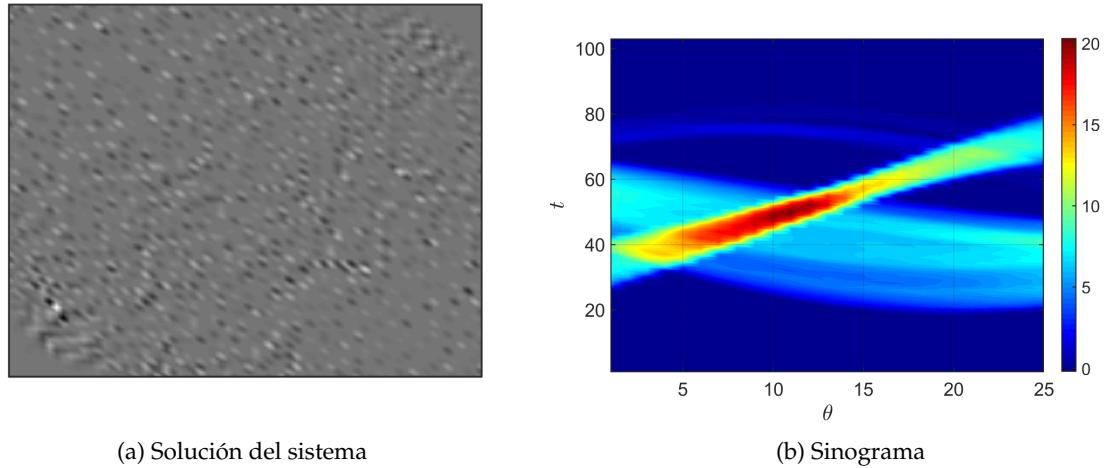


FIGURA 5.16: Tomografía 4: (a) solución del sistema, (b) sinograma.

5.6.1. Método de Tikhonov

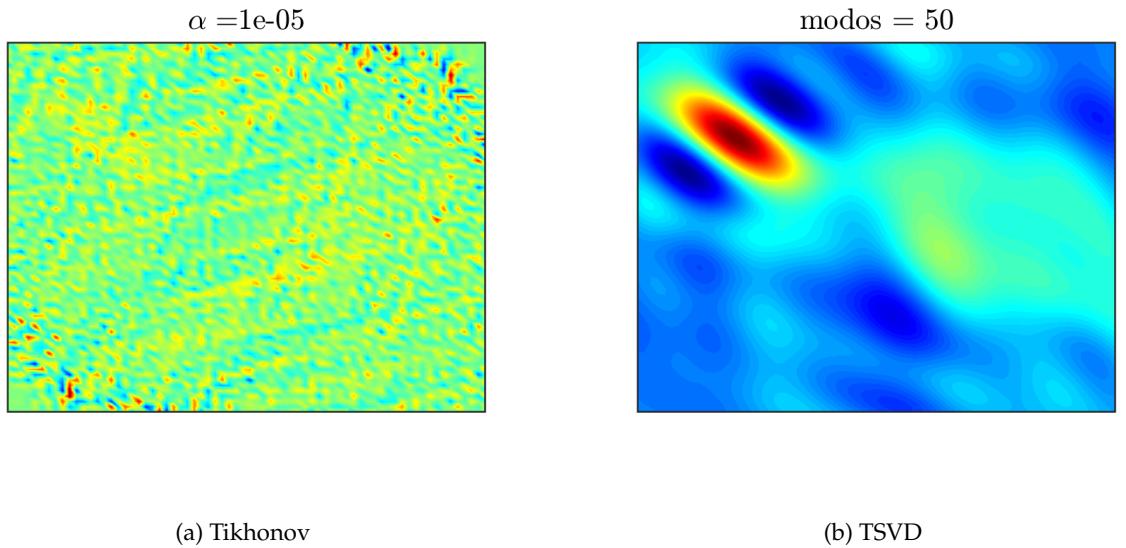


FIGURA 5.17: Transición regularización tomografía 4: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 4 con valores $\alpha = [10^{-5}, 10^3]$, (b) reconstrucción mediante SVD de la tomografía 4 con $\alpha = 0,1$ e $i = [50, 2000]$ con un paso $\Delta i = 50$, donde i representa el número de modos (valores singulares) retenidos.

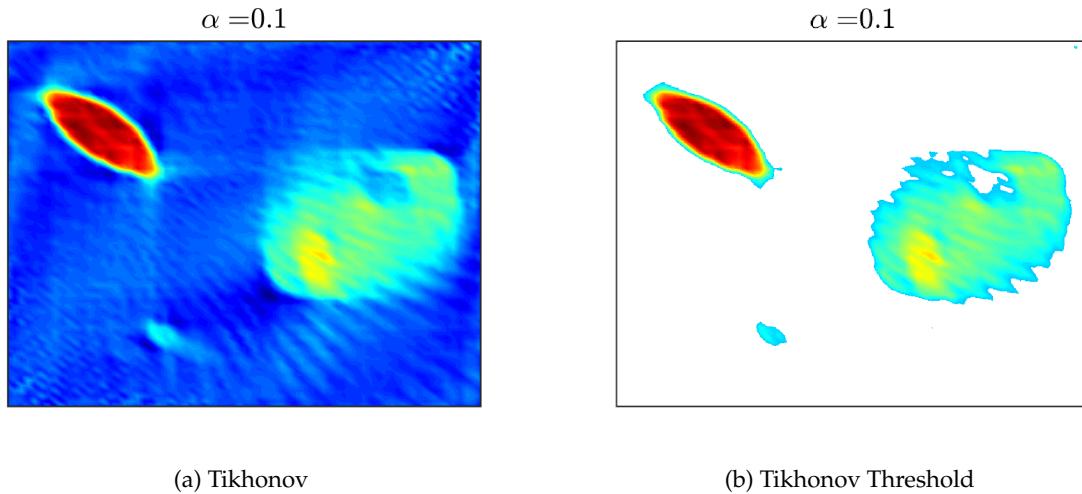


FIGURA 5.18: Regularización óptima tomografía 4: (a) reconstrucción mediante el método de regularización de Tikhonov de la tomografía 4 con $\alpha = 0,1$, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.

5.6.2. TSVD

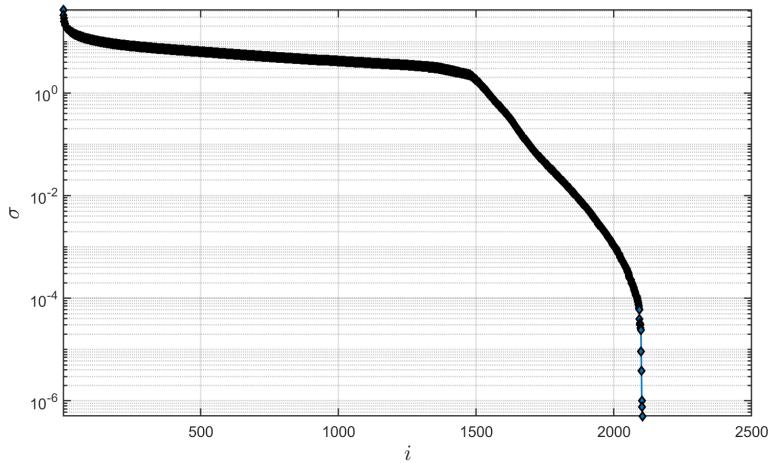


FIGURA 5.19: TSVD: valores singulares tomografía 4.

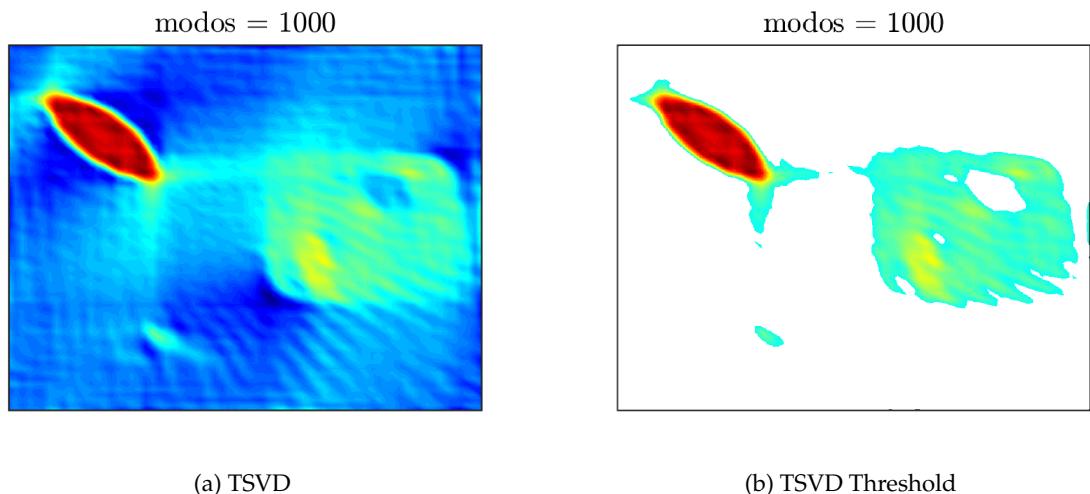


FIGURA 5.20: Regularización óptima tomografía 4: (a) reconstrucción mediante el método TSVD de la tomografía 4 con $i \in [1, 1000]$ valores singulares retenidos, (b) defectos del objeto identificados mediante procesamiento de imágenes.

5.6.3. Observaciones

Para ángulos comprendidos entre $[90, 180]$ sólo logra captarse con exactitud el defecto de la esquina superior izquierda.

5.7. Observaciones generales

- Ambas técnicas de regularización responden de manera adecuada al problema, permitiendo determinar en ambos casos los defectos internos del objeto.
- En este problema en concreto, la toma de datos desde distintos ángulos presenta mejores resultados que concentrando estos en un rango menor.
- El set de datos al completo para $\alpha = 0,1$ e $i = 1000$, parámetros del método de Tikhonov y TSVD, respectivamente, se ajustan a las necesidades del problema correctamente.
- El procesamiento de imágenes llevado a cabo es muy mejorable, por ejemplo, podría haberse considerado un patrón mínimo de área de defecto eliminando todo lo inferior a este, permitiendo así visualizar los elementos de mayor tamaño.

Proyecto 6

Derivadas topológicas

6.1. Introducción

El método de derivadas topológicas es una técnica no invasiva que permite detectar posibles defectos en la región interna de un cuerpo.

En este proyecto, a partir de unos datos dados $DatosDT$, se pretenden estimar los posibles defectos del medio. Concretamente, se trata de un problema de dispersión, en el cual se hace incidir una onda u_{inc} en el seno de un medio R contra unos defectos Ω . Dado que los defectos se distinguen del medio mediante los parámetros constitutivos, el dominio Ω puede ser estimado por un procedimiento más o menos complejo [7].

El objetivo en este problema inverso concreto, es, a partir de las mediciones u_{med} obtenidos mediante los receptores Γ , encontrar los objetos/defectos Ω tales que la diferencia $|u - u_{med}|$ sea mínima, es decir, enviamos señal, recibimos y estimamos los defectos en función de la energía que se recibe. Básicamente, introducimos una excitación y recibimos un valor de reacción. Es un problema mal planteado, podría no tener solución, y si tiene puede no depender continuamente de los datos.

6.1.1. Observaciones

- Otras ventajas del método de derivadas topológicas son:
 - Proporcionan buenas aproximaciones iniciales.
 - Rápidos y permiten cambios topológicos.
- Para frecuencias altas, las longitudes de ondas son más pequeñas, y puede reconocerse en mejor medida el objeto (la forma del defecto). El problema que para estas frecuencias es difícil localizar el defecto. Por ello, se usan frecuencias más bajas para detectar la zona del defecto y con frecuencias más altas se precisa.
- En la práctica no se calcula la DT utilizando su definición, se realizan desarrollos asintóticos. Operando se acaba alcanzando un problema directo y uno adjunto. Los desarrollos son complejos, pero la implementación es de lo más trivial.
- Da problemas en caso de tener los receptores localizados en el mismo sitio que el emisor, falseando la solución.

6.2. Descripción del problema

El problema consiste en encontrar la derivada topológica en un dominio cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ en el que existen unos defectos desconocidos. Para ello se han hecho incidir diez ondas con diversas direcciones y se dispone de doce receptores (puntos de medida), localizados en torno al dominio cuadrado, ver figura 6.1.

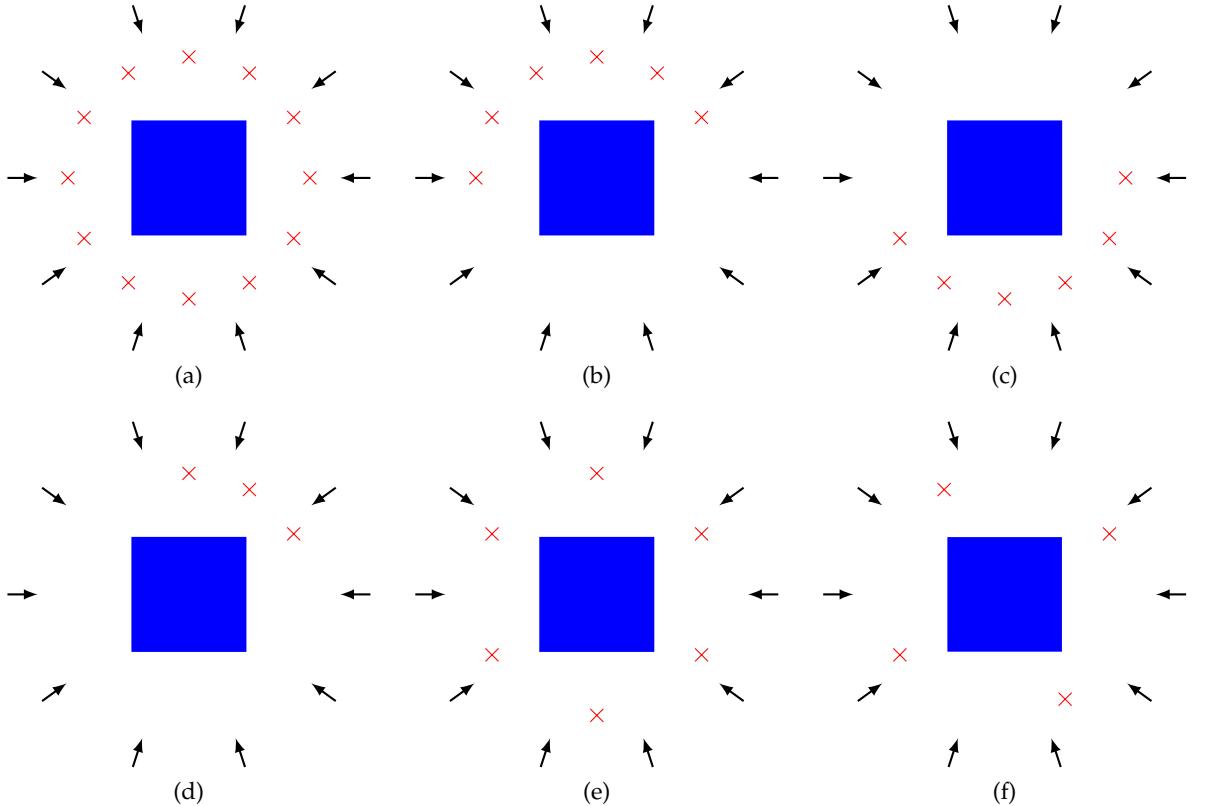


FIGURA 6.1: (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas) para el problema inverso que se pide resolver: (a) empleando los doce receptores, (b) los seis primeros receptores, (c) los seis últimos receptores, (d) los tres primeros receptores, (e) uno de cada dos receptores, (f) uno de cada tres receptores.

Para resolver el problema se dispone de mediciones de la onda total en doce receptores obtenidas al generar diez ondas planas incidentes

$$u_{inc,k,r} = e^{i\lambda d_k \cdot x} \quad (6.1)$$

según las direcciones

$$d_k = (\cos(\theta_k), \sin(\theta_k)), \quad \theta_k \in (0, 2\pi]. \quad (6.2)$$

Encontrar los defectos es un problema de optimización con restricciones. Imponer unas condiciones exactas no puede plantearse, ya que los materiales no son perfecto. Por ello, se pasa a una formulación menos exigente. En este caso se plantea la búsqueda

de defectos Ω minimizando el funcional

$$J(\Omega) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N_{\text{direcciones}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{receptores}}} |u_k(x_j)| u_{med,k}(x_j)|^2, \quad (6.3)$$

siendo u_k la solución del problema directo

$$\begin{cases} \Delta u_k + \lambda^2 u_k = 0, \text{ en } \Re^2 \Omega, \\ u_k = 0, \partial\Omega, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} (\partial_r(u_k - u_{inc,k}) - i\lambda(u_k - u_{inc,k})). \end{cases} \quad (6.4)$$

La derivada topológica de este funcional es

$$D_T(x) = \sum_{k=1}^{N_{\text{direcciones}}} Re(u_{inc,k}(x) w_k(x)), \quad (6.5)$$

siendo

$$u_{inc,k}(x) = e^{i\lambda d_k \cdot x}, \quad (6.6)$$

y

$$w_k(x) = \sum_{j=1}^{N_{\text{receptores}}} \frac{i}{4} H_0^{(1)}(\lambda|x-x_j|) \overline{(u_{med,k}(x_j) - u_{inc,k}(x_j))}, \quad (6.7)$$

donde $H_0^{(1)}$ es la función de Hankel de primera especie y orden cero¹. Es importante indicar que para $D_T(x) \ll 0$ hay una alta probabilidad de encontrar un objeto/defecto.

El fichero *DatosDT* contiene las siguientes variables:

- $X_{\text{receptores}}$: vector columna con las coordenadas x de los receptores.
- $Y_{\text{receptores}}$: vector columna con las coordenadas y de los receptores.
- $Angulos$: vector columna con los ángulos θ_k de las ondas incidentes.
- λ : número de onda en la ecuación de Helmholtz.
- $OndaMedida$: matriz de tamaño $N_{\text{receptores}} \times N_{\text{direcciones}}$ que contiene en la posición (j, k) el valor de la onda total recibida en el receptor j al emitir una onda incidente en la dirección k ($OndaMedida(j, k) = u_{med,k}(x_j)$).

6.3. Esquema de resolución

1. Calculo de la DT en la región $[-1, 1] \times [-1, 1]$ utilizando los datos del fichero *DatosDT* en las siguientes situaciones (ver figura 6.1): (a) empleando los doce receptores, (b) los seis primeros receptores, (c) los seis últimos receptores, (d) los tres primeros receptores, (e) uno de cada dos receptores, (f) uno de cada tres receptores.

Adicionalmente, se proporcionan otros ficheros *DatosDTFrec1*, ..., *DatosDTFrec11* análogos a *DatosDT*, correspondientes a los 11 números de onda $\lambda_r = 5, 6, \dots, 15$. Contienen

¹En MATLAB, $H_0^{(1)}(z)$ es `besselh(0, 1, z)`.

mediciones de la onda total en 20 receptores correspondientes a 15 ondas planas incidentes

$$u_{inc,k,r} = e^{i\lambda_r d_k \cdot x} \quad (6.8)$$

según las direcciones

$$d_k = (\cos(\theta_k), \sin(\theta_k)), \quad \theta_k \in (0, 2\pi]. \quad (6.9)$$

2. Cálculo de la DT correspondiente a cada número de onda λ_r individual, y una DT promedio, resultado de reescalar cada DT para que el mínimo sea -1 .

6.4. Resultados 1

6.4.1. Solución de la derivada topológica empleando doce receptores

La solución de la derivada topológica empleando los doce receptores disponibles se muestra en la figura 6.2. Se observa que hay dos regiones de tono azulado claramente diferenciadas del resto. El isocontorno de la DT en éstas toma valores negativos. Recuerdesé, que para $DT(x) \ll 0$ hay una alta probabilidad de encontrar un defecto, por tanto, dadas las condiciones (receptores y ondas incidentes bien distribuidas) puede asegurarse la existencia de dos defectos Ω_1 y Ω_2 .

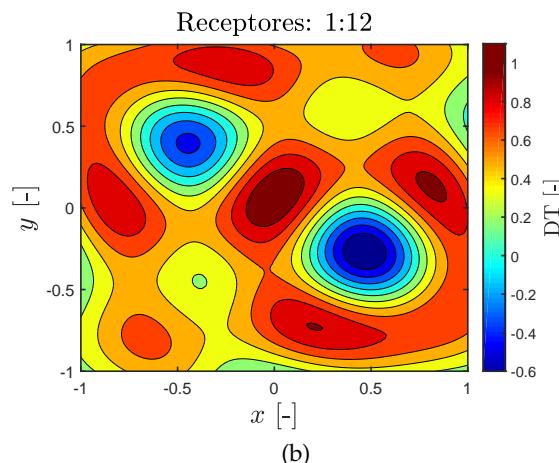
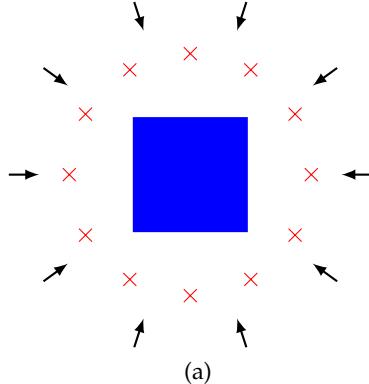


FIGURA 6.2: (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando los doce receptores.

6.4.2. Solución de la derivada topológica empleando los seis primeros receptores

La solución de la derivada topológica empleando los seis primeros receptores se muestra en la figura 6.3. Al igual que en el caso anterior, se observan dos regiones dominantes de tono azulado. A pesar de ello, utilizando únicamente seis receptores de manera agrupada, se pierde nitidez en el defecto localizado en la zona inferior derecha. Esto era esperable, ya que se produce cierto apantallamiento debido al defecto en la zona superior izquierda.

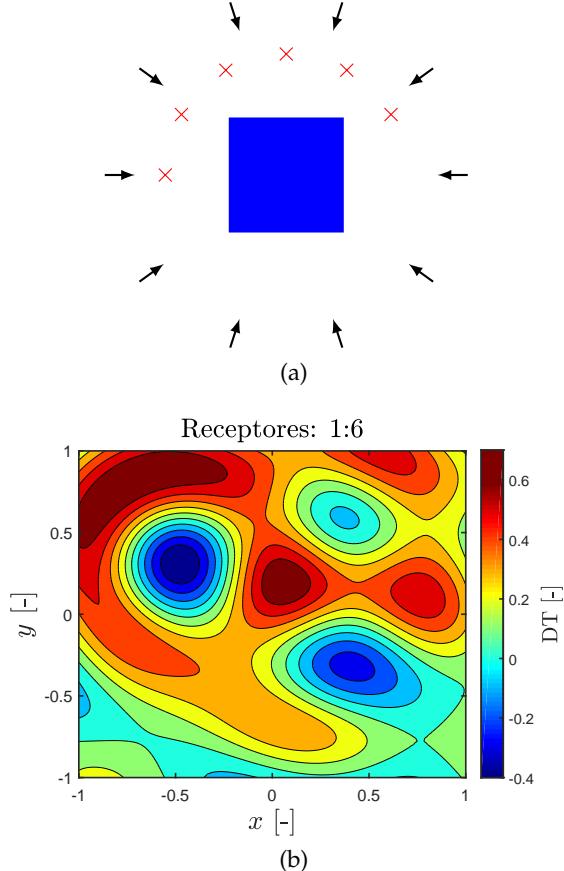


FIGURA 6.3: (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando los seis primeros receptores.

6.4.3. Solución de la derivada topológica empleando los seis últimos receptores

La solución de la derivada topológica empleando los seis últimos receptores se muestra en la figura 6.4. En este caso, sucede lo mismo del lado contrario, se produce un apantallamiento por parte del defecto de la zona inferior derecha sobre el de la zona superior izquierda.

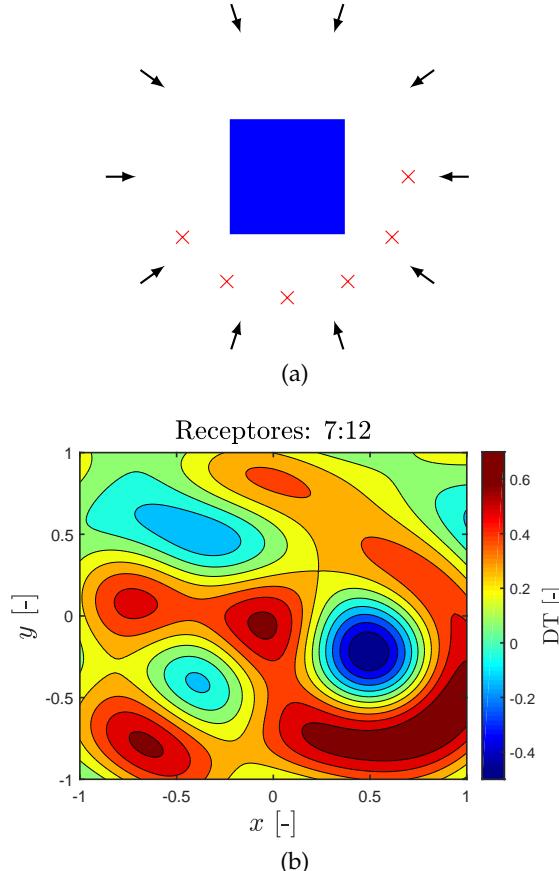


FIGURA 6.4: (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando los seis últimos receptores.

6.4.4. Solución de la derivada topológica empleando los tres primeros receptores

La solución de la derivada topológica empleando los tres primeros receptores se muestra en la figura 6.5. En este caso, al concentrarse los receptores en la zona superior derecha, se pierde precisión en el contorno del defecto, visualizándose una forma más alargada.

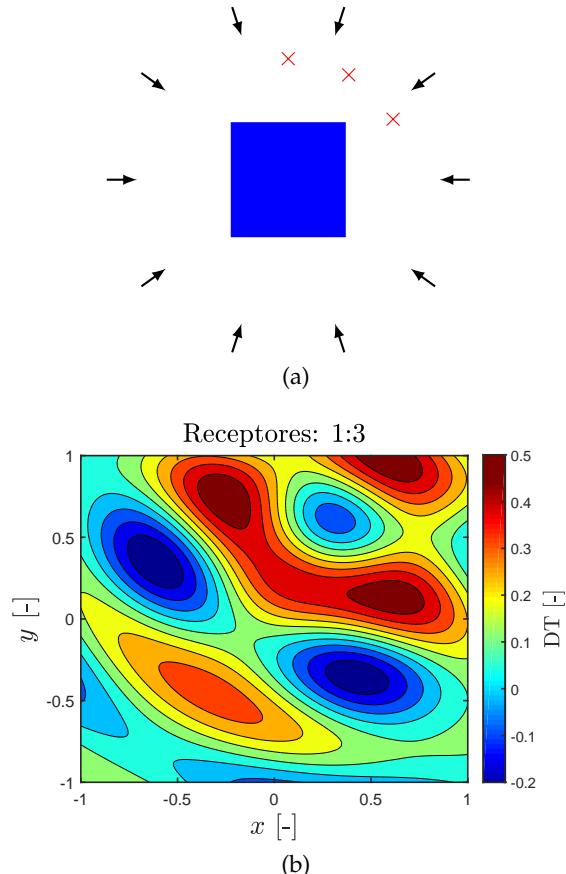


FIGURA 6.5: (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando los tres primeros receptores.

6.4.5. Solución de la derivada topológica empleando uno de cada dos receptores

La solución de la derivada topológica empleando uno de cada dos receptores se muestra en la figura 6.5. En este caso, al no estar agrupados los receptores y estar éstos distribuidos de manera simétrica abarcando todo el dominio, se obtienen resultados muy similares a los del primer caso (12 receptores). Se detectan ambos defectos.

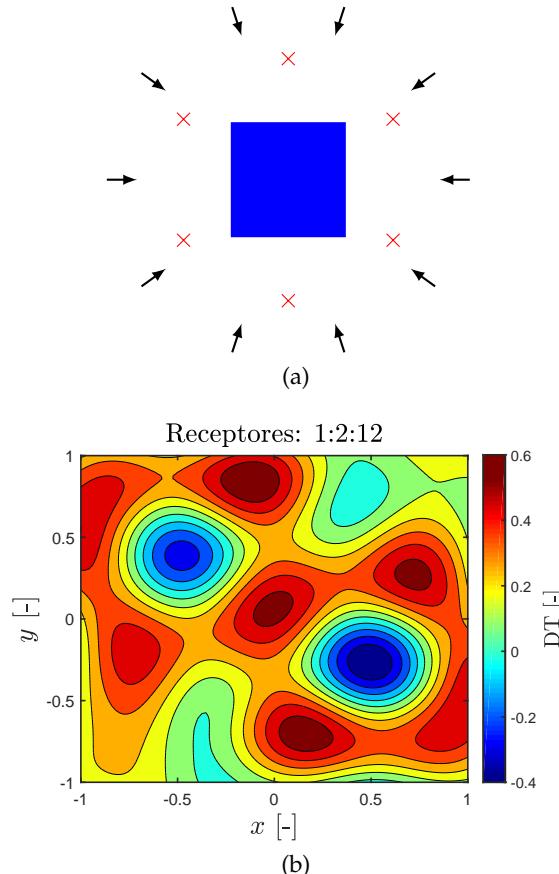


FIGURA 6.6: (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando uno de cada dos receptores.

6.4.6. Solución de la derivada topológica empleando uno de cada tres receptores

La solución de la derivada topológica empleando uno de cada tres receptores se muestra en la figura 6.7. En este caso, al no estar agrupados los receptores se detectan ambos defectos, aunque se introduce cierto ruido en la zona inferior.

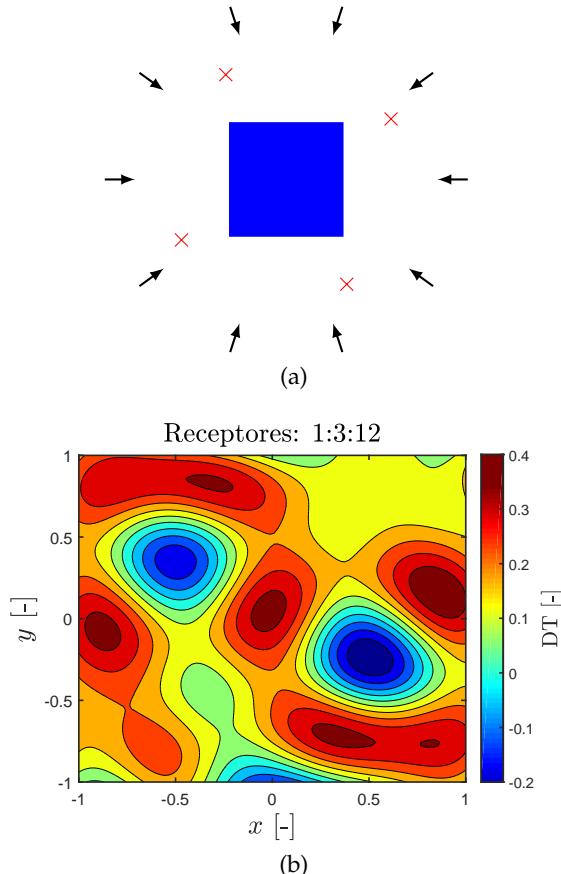


FIGURA 6.7: (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas). (b) Solución de la derivada topológica (DT) empleando uno de cada tres receptores.

6.5. Comparación

En la figura 6.8 se han agrupado todas las soluciones obtenidas permitiendo así visualizar las diferencias comentadas anteriormente con mayor facilidad.

En resumen:

- Una distribución homogénea de los receptores alrededor del dominio proporciona mejores resultados de la estructura interna.
- Los casos (a), (e), (f), presentan los mejores resultados.
- Al concentrar los receptores en una zona se sufre apantallamiento por parte de los defectos/objetos en el medio.

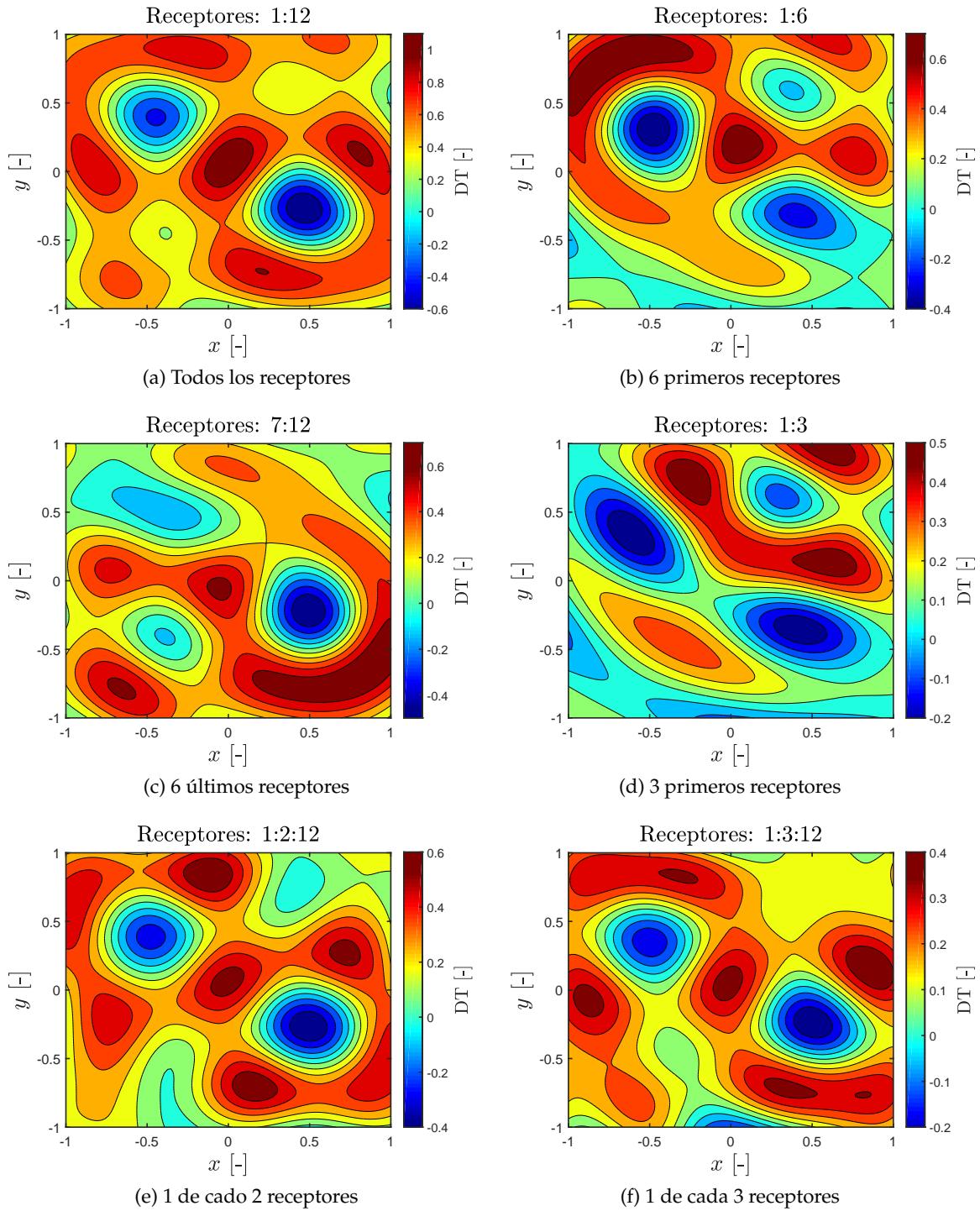


FIGURA 6.8: Solución de la derivada topológica (DT): (a) empleando los doce receptores, (b) los seis primeros receptores, (c) los seis últimos receptores, (d) los tres primeros receptores, (e) uno de cada dos receptores, (f) uno de cada tres receptores.

6.6. Resultados 2

En este segundo caso, se procede a calcular la DT correspondiente a cada número de onda λ_r individual, y una DT promedio, resultado de reescalar cada DT para que el mínimo sea -1 . En la figura 6.9 se muestra una representación del problema de estudio.

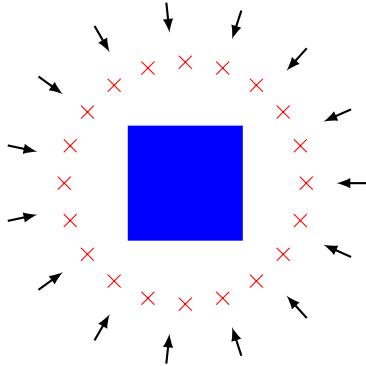


FIGURA 6.9: (a) Región de observación (azul) receptores (cruces) y ondas incidentes (flechas) empleando veinte receptores.

El número de onda por definición² es

$$\lambda_r = \frac{2\pi}{\zeta_r}, \quad (6.10)$$

siendo λ_r el número de onda en radianes por metro y ζ_r la longitud de onda en el medio. Recuérdese, que para frecuencias altas, las longitudes de ondas son más pequeñas, y puede reconocerse en mejor medida el objeto (la forma del defecto). El problema que para estas frecuencias es difícil localizar el defecto. Por ello, se usan frecuencias más bajas para detectar la zona del defecto y con frecuencias más altas se precisa. En la figura 6.10 se muestran las diferentes soluciones obtenidas para cada número de onda $\lambda_r = 5, \dots, 15$.

A medida que aumenta el valor de λ_r se incrementa la frecuencia lo que implica una longitud de onda menor. Esto permite detectar la zona del defecto, pero sin ser precisos. Para captar estos detalles se aumenta el valor del número de onda. Para poder obtener una representación fiel del defecto/objeto se realiza una DT promedio, resultado de reescalar cada DT para que el mínimo sea -1 . En la figura 6.11 se muestra la solución DT promedio.

Puede apreciarse claramente el efecto del número de onda en la solución, obsérvense las figuras 6.10a y 6.11, donde se visualiza como el defecto de la zona inferior izquierda es captando en región para $\lambda_r = 5$ y con gran detalle para la DT promedio, respectivamente. Nótese, que para $\lambda_r = 5$ la frecuencia es demasiada baja dando lugar a una longitud de onda mayor a la del tamaño del defecto de la zona superior derecha. Consecuentemente, el defecto es desapercibido para $\lambda_r = 5$. No se detecta claramente hasta $\lambda_r = 11$.

²En la literatura, generalmente λ representa la longitud de onda en el medio.

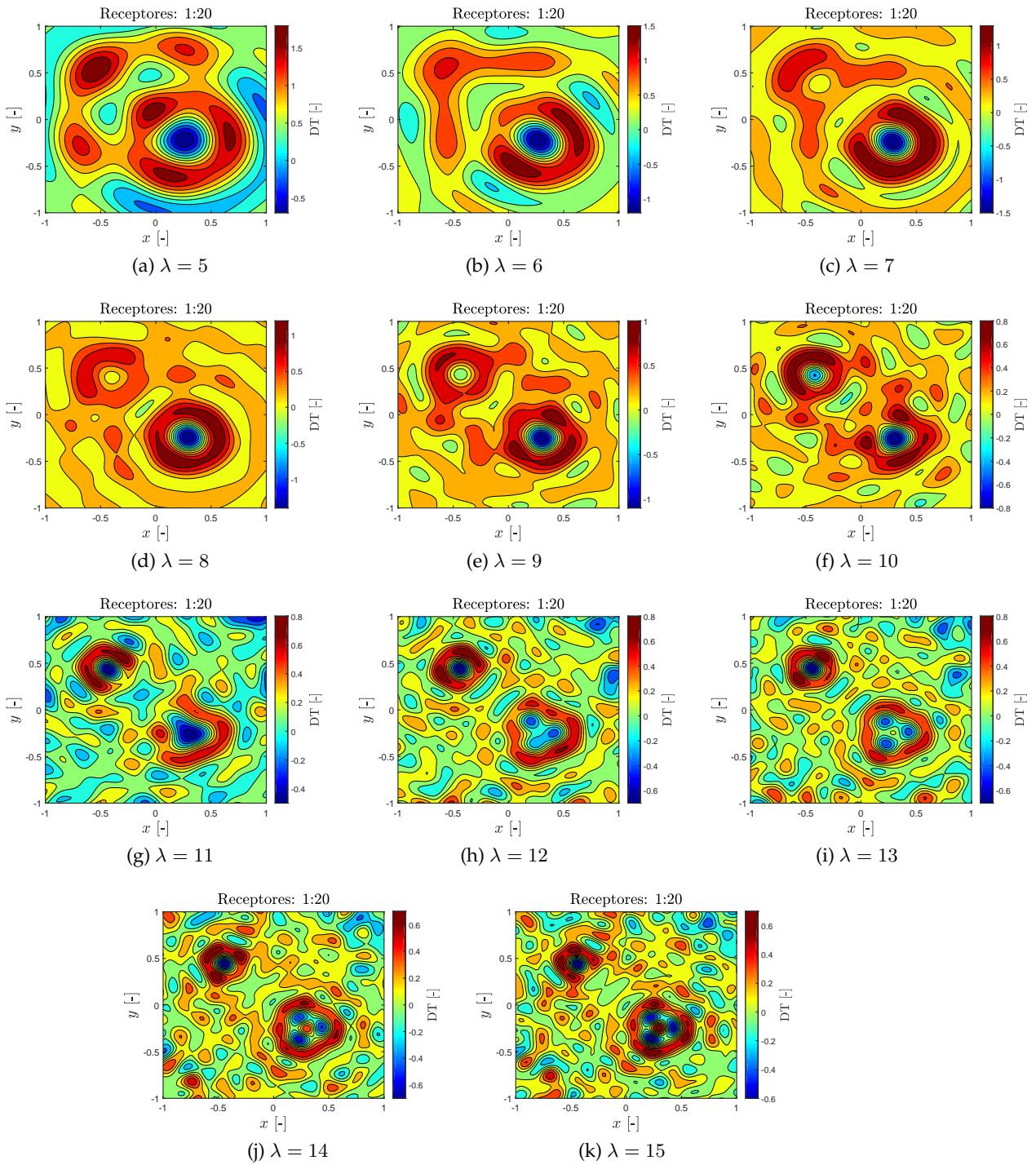


FIGURA 6.10: Solución de la derivada topológica (DT) correspondiente a cada número de onda $\lambda_r = 5, \dots, 15$.

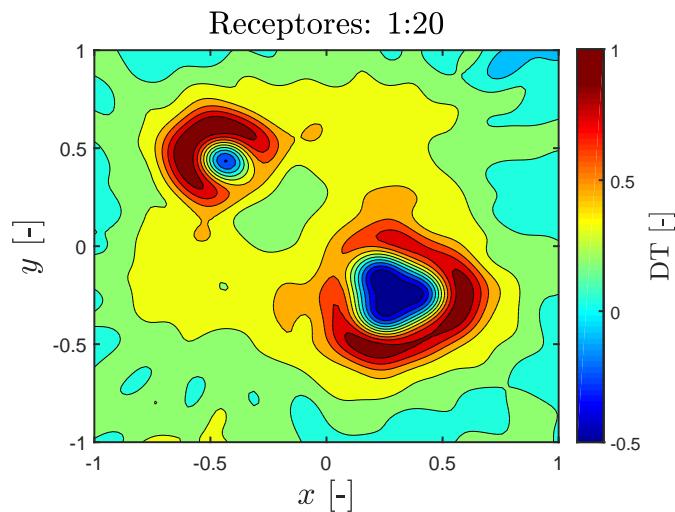


FIGURA 6.11: Solución de la derivada topológica promedio resultado de reescalar cada DT para que el mínimo sea -1 .

Anexo A

Código utilizado en MATLAB

LISTADO A.1: Función principal.

```
1 % PROYECTO 1 – PROSPECCION GRAVITATORIA
2 % Realizado por Alberto Cuadra Lara
3 % Ultima mod. 16/02/2018
4 help proyecto_1
5 clc; clear all; close all;
6 global color
7 % -----
8 % Colores
9 red = [0.85,0.33,0.1]; blue =[0,0.45,0.74]; green =[0.47,0.67,0.19];
10 purple = [0.49,0.18,0.56]; yellow = [0.93,0.69,0.13]; orange=[0.702,0.349,0];
11 color=[red;blue;green;purple;yellow;orange];
12 %
13 % CONFIGURACION DEL PROBLEMA
14 % Lectura de datos
15 load('CampoGravitacional2.mat');
16 t = F (1,:);
17 eps = 0.0001;
18 B = F (2,:)+ eps*rand(size(t)); %vector independiente.
19 % GRAFICA DATOS F_z (equivalente a B)
20 fig = figure;
21 set(axes,'LineWidth',1.2,'FontSize',14,'BoxStyle','full')
22 set(fig,'innerposition',[250,200,1150,700],...
23      'outerposition',[250 200 1000 600]);
24 hold on; grid on; grid minor; box on; axis tight;
25 plot(t,B,'d-','color',color (2,:),'LineWidth',1.5,...
26       'MarkerFaceColor',color(3,:),'MarkerEdgeColor','black');
27 xlabel('$t$', 'FontSize',20, 'interpreter', 'latex');
28 ylabel('$F_{z}$', 'FontSize',20, 'interpreter', 'latex');
29 leg{1} = ['$F_{z}$'];
30 % tit = ['$\epsilon$'];
31 % title( tit , 'interpreter' , ' latex ');
32 legend(leg,'FontSize',16,'Location','northeast','interpreter',' latex')
33 %
34 G = -1; % Simplificacion constante gravitacional universal
35 deltax = 0.01;
36 x = 0:deltax:1; % Discretizacion espacial
37 % CONFIGURACION GRAFICA
38 fig = figure;
39 set(axes,'LineWidth',1.2,'FontSize',14,'BoxStyle','full')
40 set(fig,'innerposition',[250,200,1150,700],...
41      'outerposition',[250 200 1000 600]);
42 %
43 for k=1:5 % Grado del polinomio
44     for i=1:length(t)
45         f = ((x-t(i)).^2+1).^(−3/2);
46         A(i,1) = −G*trapz(x,f);
47         for j=2:k+1
```

```
48 f = x.^j-1)./((x-t(i)).^2+1).^(3/2);
49 A(i,j) = -G*trapz(x,f);
50 end
51 end
52 % Resolvemos el problema de minimizacion por minimos cuadrados -> X
53 X = (transpose(A)*A)\(transpose(A)*B'); % coeficientes a_i
54 rho(k) = cond(A);
55 % GRAFICA SOLUCION
56 hold on; grid on; box on; axis tight;
57 plot(x,polyval(flip(X),x),'LineWidth',1.5,'color',color(k,:))
58 xlabel('x','FontSize',20,'interpreter','latex');
59 ylabel('\lambda','FontSize',20,'interpreter','latex');
60 leg{k} = ['Grado',num2str(k)];
61 tit = ['$\epsilon$',num2str(eps)];
62 title ( tit , 'interpreter','latex' );
63 legend(leg,'FontSize',16,'Location','northwest','interpreter','latex')
64 end
65 % % Comprobacion del polinomio
66 lambda = polyval(flip(X),x);
67 % Configuracion grafica
68 fig = figure;
69 set(axes,'LineWidth',1.2,'FontSize',14,'BoxStyle','full')
70 set(fig,'innerposition',[250,200,1150,700],...
71 'outerposition',[250 200 1000 600]);
72 %
73 for i=1:length(t)
74 f = lambda./((x-t(i)).^2+1).^(3/2);
75 F_z(i) = -G*trapz(x,f);
76 error(i) = (norm(B(i)-F_z(i)))/(1+norm(F_z(i)))*100;
77 end
78 hold on; grid on; box on; axis tight;
79 plot(t,error,'LineWidth',1.5,'color',(2,:))
80 xlabel('t','FontSize',20,'interpreter','latex');
81 ylabel('$\epsilon$ [%],'FontSize',20,'interpreter','latex');
```

Anexo B

Resto de resultados

En este anexo se muestran los resultados obtenidos para las bases de datos A^2 y A^3 , con $w_1 = 30\% gappyness$ y $w_2 = 60\% gappyness$, respectivamente.

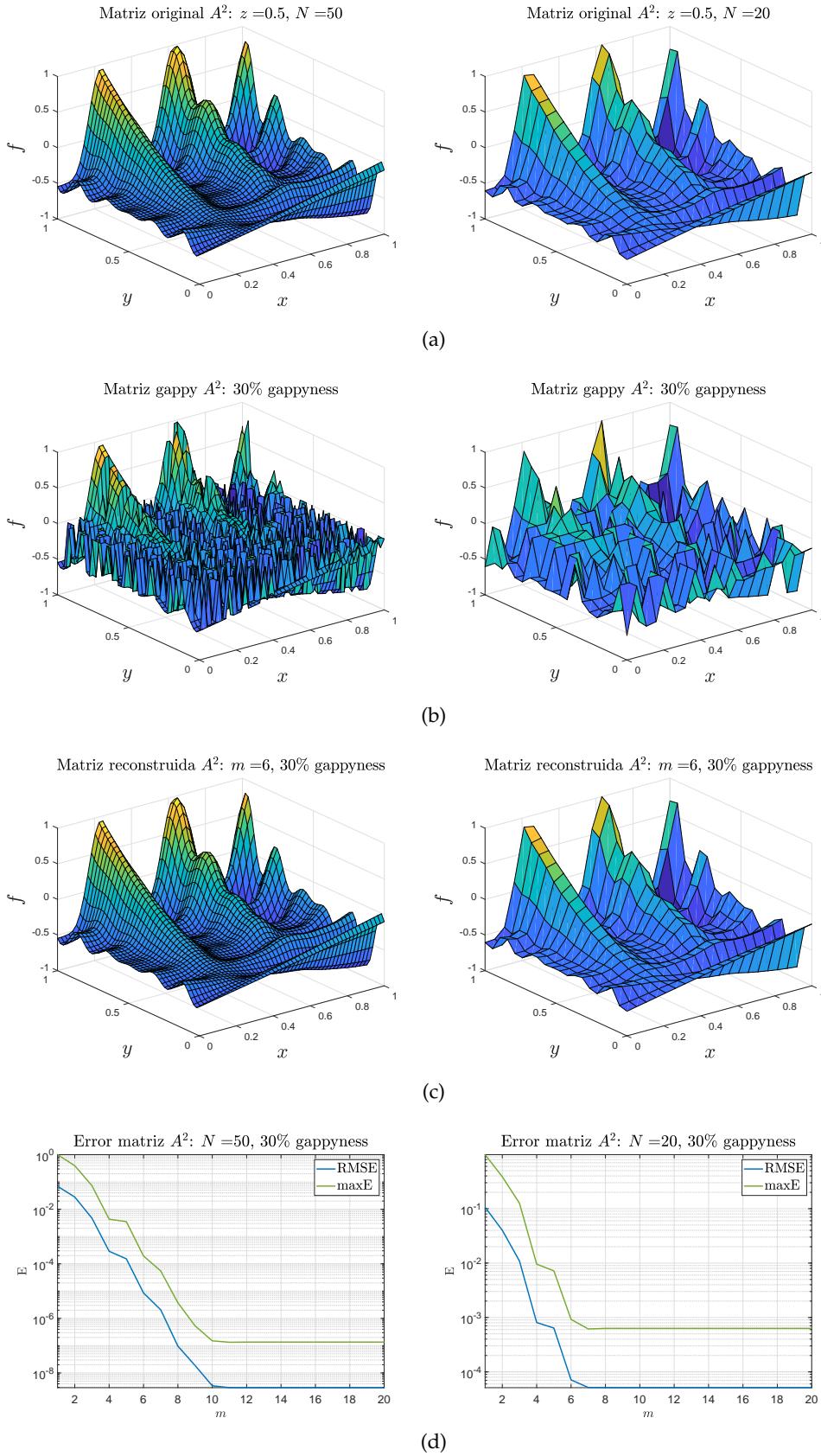


FIGURA B.1: Base de datos A^2 , densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha): (a) matriz original, (b) matriz gappy, (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m .

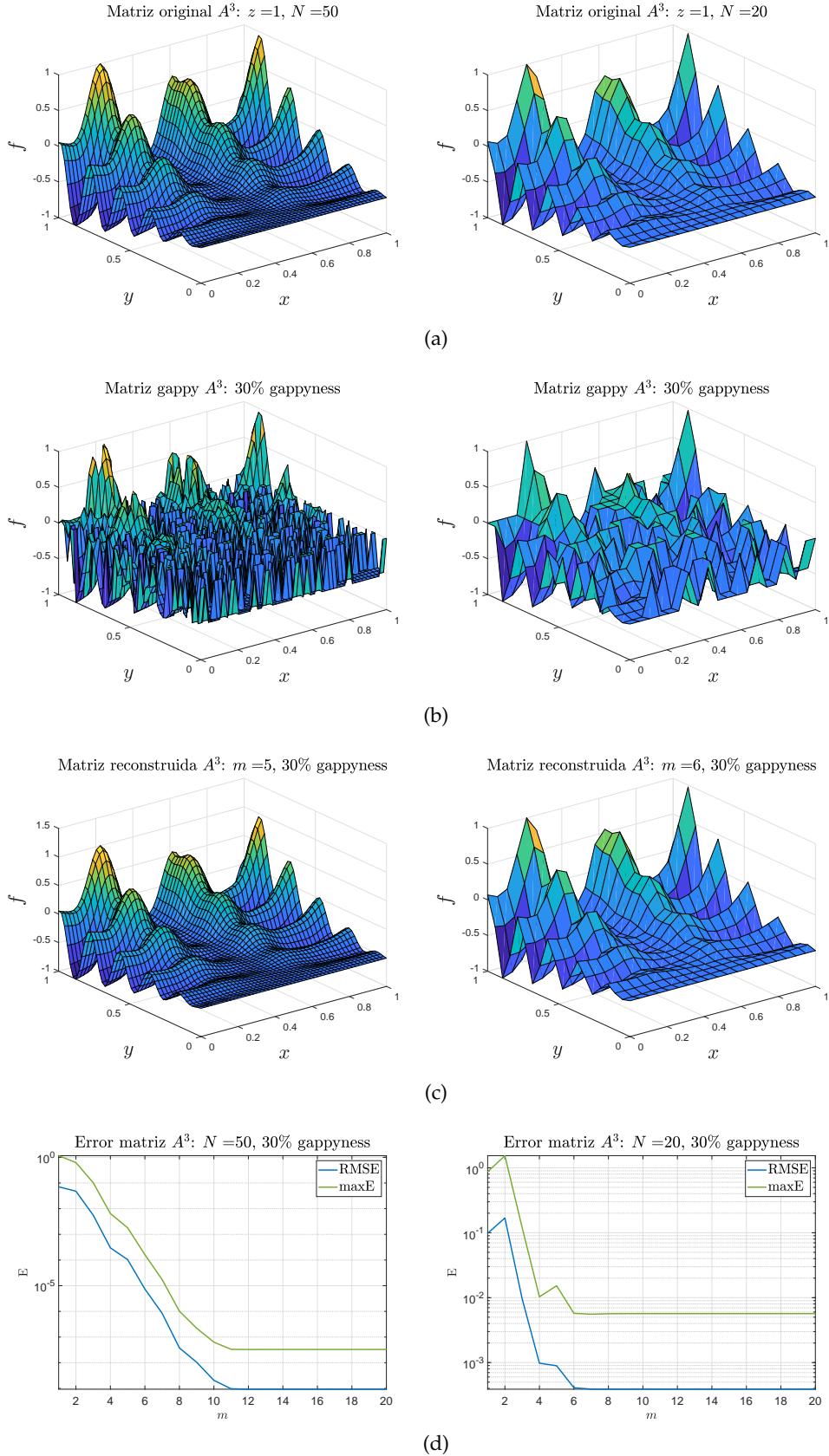


FIGURA B.2: Base de datos A^3 , densa $N = 50$ (izquierdo) y basta $N = 20$ (derecha): (a) matriz original, (b) matriz *gappy*, (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m .

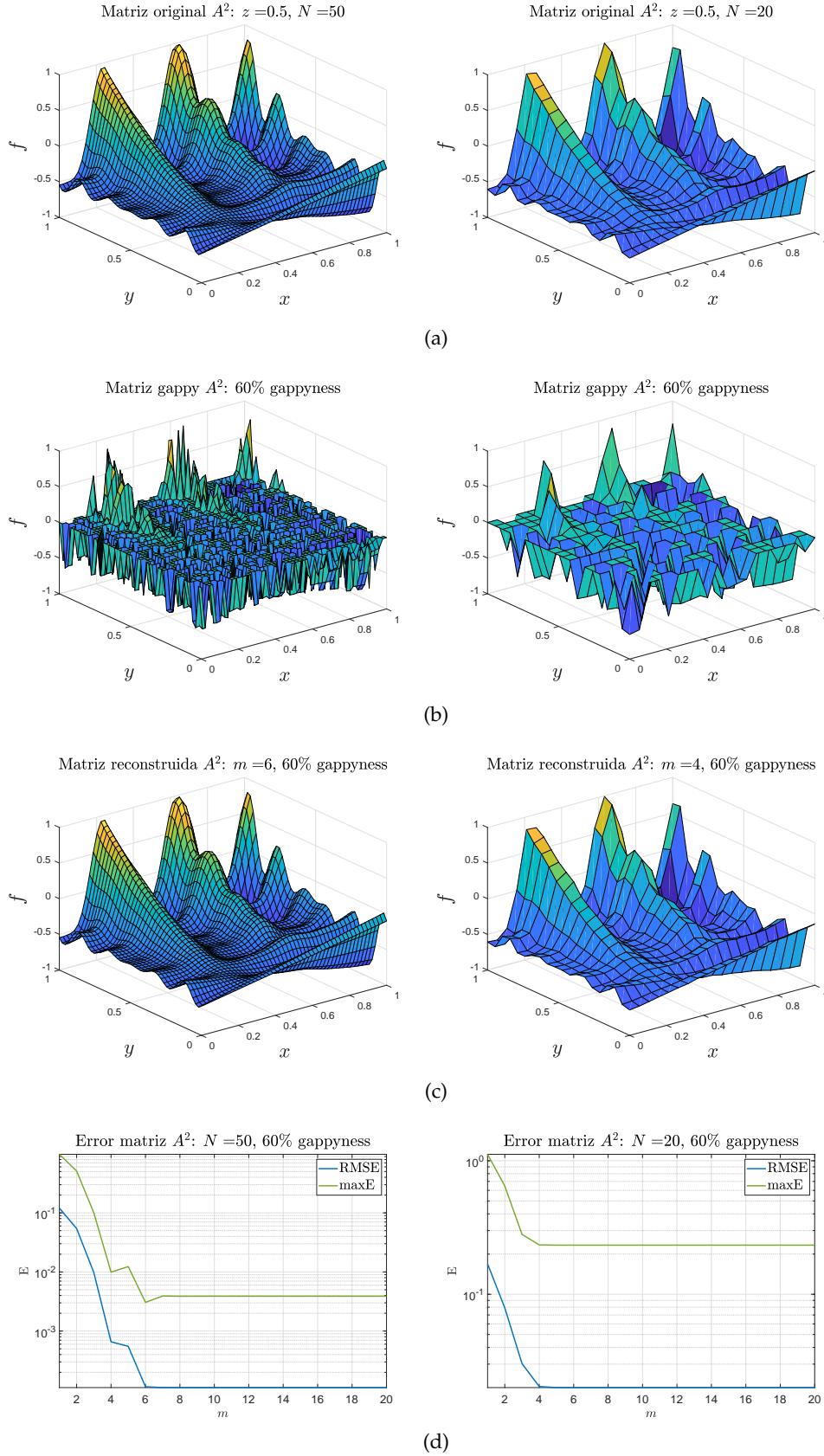


FIGURA B.3: Base de datos A^2 , densa $N = 50$ (izquierda) y basta $N = 20$ (derecha): (a) matriz original, (b) matriz gappy, (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m .

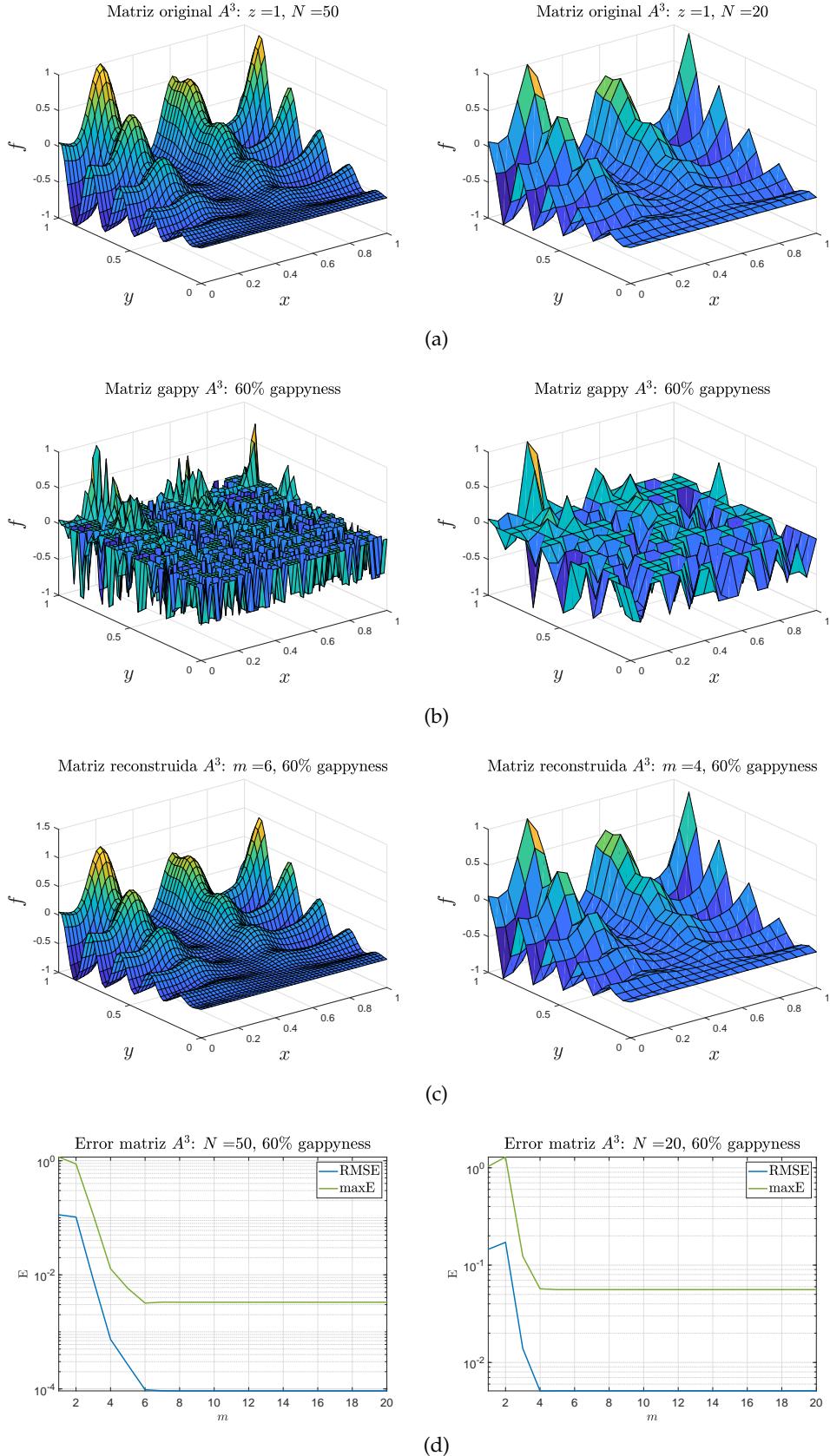


FIGURA B.4: Base de datos A^3 , densa $N = 50$ (izquierdo) y basta $N = 20$ (derecho): (a) matriz original, (b) matriz *gappy*, (c) matriz reconstruida con m modos y (d) bondad de los resultados en función al número de modos m .

Bibliografía

- [1] W. F. Ames. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Academis press, Inc, Thomas Nelson y Sons LTD, 1984.
- [2] A. I. Moreno López. *Aerodynamic database reconstruction via gappy high order singular value decomposition*. 2016.
- [3] M. L. Rapún y F. Terragni. *Problemas inversos y reconstrucción de imágenes. Prospección gravitatoria*. 2018.
- [4] M. L. Rapún y F. Terragni. *Problemas inversos y reconstrucción de imágenes. Crímenes inversos*. 2018.
- [5] M.L. Rapún y F. Terragni. *Ecuación del calor hacia atrás*. 2018.
- [6] M.L. Rapún y F. Terragni. *Tomografía axial computarizada*. 2018.
- [7] J. Yanez. *Aproximación de problemas de control.Derivadas topológicas para la resolución problemas inversos: Resolución actividad propuesta*. 2015.