1. Sean $f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$ y $P(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24}$.

a. Comparar los resultados de calcular $f(0.01)$ y $P(0.01)$, usando aritmética de redondeo seis dígitos. Realice esto mediante el cálculo del error absoluto.

b. Realiza una acomodación de los términos del polinomio $P(x)$ (anidamiento) y establecer si para este caso los resultados son mejores.

$C = 39$

$$f(x) = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$P(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24}$$

40

a) $(1{,}01005 - 1 - 0{,}01)/0{,}0001 = \frac{0{,}00005}{0{,}0001} = 0{,}5$

$$f(0.01) = \frac{e^{0.01} - 1 - (0.01)}{(0.01)^2} = 0.5016708416 \quad \approx \quad 0.500000\ (p)\ \text{Redondeo a 6 dígitos}$$

aritmética de redondeo

con este resultado no estaría redondeando a 6 dígitos

			A	B	C	
x	x^2	e^x	$\frac{e^x}{x^2}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$A - B - C$
0.0100000	0.000100000	1.01005	10100.5	10000.0	100	0.5

$$P(0.01) = \frac{1}{2} + \frac{0.01}{6} + \frac{0.01^2}{24} = 0.5016708333 \quad \approx \quad 0.501671\ (p*)\ \text{Redondeo a 6 dígitos}$$

		A	B	
x	x^2	$\frac{x}{6}$	$\frac{x^{24}}{24}$	$\frac{1}{2} + A + B$
0.0100000	0.000100000	0.00166667	0.00000416667	0.501671

Error Absoluto

$$|p* - p| = |0.501671 - 0.5| = 0.00167100 \quad \cong \quad 0.1671\%$$

b) $P(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x^2}{24}$

$a_2x^2 + a_1x + a_0 = (a_2x + a_1)x + a_0$

$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = ((a_3x + a_2)x + a_1)x + a_0$

$P(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{12}\right)$ anidación

25

$P(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x}{3}\left(1 + \frac{x}{4}\right)\right)$ No se incluye una multiplicación

$P(x) = \frac{1}{2}(1 + (0.00333333)(1 + 0.0025))$

$$P(x) = \frac{1}{2}(1 + (0.00333333)(1.00250))$$

$$P(x) = \frac{1}{2}\big(1 + (0.00334167)\big)$$

$$P(x) = \frac{1}{2}(1.00334) = 0.501670$$

Error Absoluto

$$|p * -p| = |0.501670 - 0.5| = 0.00167000 \quad \cong \quad 0.1670\%$$

El resultado mejora en 0.0001%.

2. a. Sean las funciones $f(x) = e^x$ y $g(x) = x$. Verifique que estas satisfacen las hipótesis del teorema del valor medio ponderado para integrales en el intervalo $[0, 1]$. Obtenga el valor de c que garantiza el teorema.

b. Halle $f(4)$ si se sabe que f es continua y $\int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos(\pi x)$

a.

Debe verificar las hipótesis del teorema del valor medio ponderado $f \in C[0,1]$ y g es integrable de Riemann g no cambia de signo

40

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c).\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_0^1 (e^x)(x)dx = e^c.\int_0^1 x\,dx$$

$$(1e^1 - e^1) - (0e^0 - e^0) = e^c(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2})$$

$$(e - e) - (0 - 1) = e^c(\frac{1}{2} - 0)$$

$$(0) - (-1) = e^c(\frac{1}{2})$$ ✓

$$1 = e^c(\frac{1}{2})$$

$$2 = e^c$$

$$\boldsymbol{Ln(2) = c}$$

b.

38

$$\int_0^{x^2} f(t)dt = x\cos(\pi x)$$

aplicando el T.F.C.

$$\frac{d}{dx}(\int_0^{x^2} f(t)dt) = \frac{d}{dx}(x\cos(\pi x))$$

$$f(x^2)2x = -\pi x\ sen(\pi x) + \cos(\pi x)$$ ✓

$$f(x^2) = \frac{-\pi x sen(\pi x) + \cos(\pi x)}{2x}$$

$$f(x^2) = -\frac{\pi sen(\pi x)}{2} + \frac{\cos(\pi x)}{2x}$$ ✓

el argumento es x^2 así que $x = 2$!

$$f(4) = -\frac{\pi sen(4\pi)}{2} + \frac{\cos(4\pi)}{2(4)}$$

$$f(4) = -\frac{\pi(0)}{2} + \frac{1}{8}$$

$$f(4) = \frac{1}{8}$$

3. Use la fórmula de Taylor con $c = 0$ y $n = 3$ para encontar la aproximación cúbica de la función $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Encuentre una cota para la magnitud del error en la aproximación cuando $|x| \leq 0.1$.

$$f(x) = (1-x)^{-1} = \frac{1}{1-x}$$

$$f'(x) = (1-x)^{-2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = 2(1-x)^{-3} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

$$f'''(x) = 6(1-x)^{-4} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

$$f^{iv}(x) = 24(1-x)^{-5} = \frac{24}{(1-x)^5}$$

$$P(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \frac{f''(c)(x-c)^2}{2} + \frac{f'''(c)(x-c)^3}{6}$$

$$P(x) = 1 + x + \frac{2(x)^2}{2} + \frac{6(x)^3}{6}$$

$$\boldsymbol{P(x) = 1 + x + x^2 + x^3}$$

50

$$R(x) = \frac{f^{n+1}(z)(x-c)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$R(x) = \frac{24}{(1-z)^5}\frac{(x)^4}{(4)!}$$

$$24\frac{(0.1)^4}{(4)!}\left|\frac{1}{(1-z)^5}\right| \leq 24\frac{(0.1)^4}{(4)!}.\max_{0 \leq z \leq 0.1}\left|\frac{1}{(1-z)^5}\right|$$

Como es una función decreciente, la cota máxima se encuentra en la derecha (0.1)

$$24\frac{(0.1)^4}{(4)!}.\left|\frac{1}{(1-0.1)^5}\right| = 0.000169\ (Cota)$$

1) a) 40

2) 25

2) a) 40

b) 38

3) 50

$$\frac{193}{50}$$