

Ejercicios - Tema 2

Funciones, límites y continuidad

1.1 Funciones

Ejercicio 1.1.1. Esboza las gráficas de las siguientes funciones.

$$\begin{array}{llll}
 i) & \sqrt{x-3} + 2 & ii) & (x-2)^3 - 1 \\
 v) & |x-2| & vi) & \ln(x-2) \\
 ix) & e^{x-3} & x) & 5 + \cos(x-1)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{llll}
 iii) & 4 - (x-1)^2 & iv) & 3 - (x-1)^{1/3} \\
 vii) & |\sin(x+1)| & viii) & e^{-x} + 1 \\
 xii) & 1 + |x-5| & &
 \end{array}$$

Ejercicio 1.1.2. Calcula el dominio de las siguientes funciones.

$$\begin{array}{llll}
 i) & \frac{\sqrt{x-8}}{x-7} & ii) & \left(\frac{x-3}{(x-4)^2}\right)^{1/2} \\
 v) & \frac{1}{\ln(x-1)} & vi) & \frac{1}{\sqrt{\ln(x-3)}} \\
 ix) & \ln(x^2(x-3)) & x) & \frac{1}{\sin x}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{llll}
 iii) & \frac{x-2}{1+(x-3)^2} & iv) & \ln(x^2-3x+2) \\
 vii) & \frac{1}{1-\ln(x+3)} & viii) & \frac{1}{x^3-x^2+x-1} \\
 xii) & \ln(1+\cos x) & &
 \end{array}$$

Ejercicio 1.1.3. Esboza la gráfica de una función cuyo dominio sea $[0, 1]$ y cuya imagen sea el intervalo $[-1, 2]$.

Ejercicio 1.1.4. La parte positiva y la parte negativa de una función $f(x)$, que se designan por f^+ y respectivamente f^- , se definen como

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \quad \text{y} \quad f^-(x) = \min\{0, f(x)\}.$$

- i) Comprueba que $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ y $|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$.
- ii) Dibuja las gráficas de $f^+(x)$ y $f^-(x)$ en $[0, 2\pi]$, para $f(x) = \sin x$.

Ejercicio 1.1.5. Determina cuando la función dada es inyectiva o no, hallando su inversa en caso de serlo.

$$\begin{array}{llll}
 i) & 5x+3 & ii) & x^5+1 \\
 iii) & (x+1)^3+2 & iv) & \frac{1}{x} \\
 v) & x^{3/5} & vi) & (1-x)^4
 \end{array}$$

Ejercicio 1.1.6. Demuestra que si $p, q \in \mathbb{N}$ y p, q son impares, la función $f(x) = x^{p/q}$ es una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que es inyectiva y sobreyectiva de \mathbb{R} en \mathbb{R} . Calcula la función inversa.

Ejercicio 1.1.7. Estudia si la función dada es par, impar o ninguna de las dos cosas.

$$\begin{array}{llll}
 i) & x^3 & ii) & x^2 \\
 iii) & \sin x & iv) & \frac{x^2}{1-|x|} \\
 v) & x^{3/5} & vi) & x^2 + \frac{1}{x}
 \end{array}$$

Ejercicio 1.1.8. Determina $f \circ g$ y $g \circ f$ en los siguientes casos.

i) $f(x) = x^2$ y $g(x) = \frac{1}{x}$.

ii) $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0, \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad g(x) = \frac{1}{x}$

iii) $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ -x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Ejercicio 1.1.9. Sea $f(x) = \frac{1}{1-x}$. Calcula $f \circ f$ y $f \circ f \circ f$.

Ejercicio 1.1.10. Estudia si las funciones siguientes son acotadas en los intervalos que se indican, dando alguna cota en caso de existir.

i) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ en $[-3, 3]$ ii) $f(x) = x \sin x$ en $[0, 100]$

iii) $f(x) = 2 \sin x \cos x$ en \mathbb{R} iv) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ en $(0, 1)$

v) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $(0, 1)$ vi) $f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ en $(0, 1)$

1.2 Límites

Ejercicio 1.2.1. Estudia la existencia de límite de las siguientes funciones en los puntos indicados.

i) $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2 & \text{si } x > 2 \\ \frac{x^2}{x^2 + 7} & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2.$

ii) $f(x) = \begin{cases} \ln(x^2) & \text{si } x \geq \sqrt{e} \\ 2 \sin\left(\frac{e\pi}{2x^2}\right) & \text{si } x < \sqrt{e} \end{cases} \quad \text{en } x = \sqrt{e}$

Ejercicio 1.2.2. Estudia si existen los límites siguientes

i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x-3}$ ii) $\lim_{x \rightarrow 3} \sin \frac{1}{x-3}$

Ejercicio 1.2.3. Estudia las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 2x}{x^2 - 1}$. ¿Se puede definir f en el punto $x = 1$ de forma que sea continua en ese punto?, ¿y en $x = -1$?

Ejercicio 1.2.4. Demuestra que cuando $x \rightarrow 0$, las expresiones $\ln(x+1)$ y $1+x$ son infinitésimos equivalentes. Utiliza este resultado para calcular aproximadamente el valor de $\ln 0,97$.

Ejercicio 1.2.5. Calcula $a \in \mathbb{R}$ para que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+a}{x} \right)^{\frac{x}{2}} = 6.$$

Ejercicio 1.2.6. Calcula los siguientes límites.

- | | | |
|---|---|---|
| i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3x}{ x }$ | ii) $\lim_{x \rightarrow 2} e^{-1/ x-2 }$ | iii) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{1/x}}{1 + e^{1/x}}$ |
| iv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 + 2x + 3}$ | v) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^8 + x^6 + 8}{x^3 + 2x + 1}$ | vi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x\sqrt{x}}{x^2 + 1}$ |
| vii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^3}$ | viii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\arctan 1)^x$ | ix) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin 1/x$ |
| x) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{x^3 + 5}$ | xi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x}{2^x + 5^x}$ | xii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 8}{2^x}$ |
| xiii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{9x^2 + x}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x+1}{2x}}$ | xiv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{3^{1/x}}$ | xv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \right)^{3x^2+1}$ |
| xvi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{a+1} \right)^x \quad a > 0$ | xvii) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 + 8x + 6)^{1/x}$ | xviii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x^2 + 3}{x}$ |
| xix) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{x}\right) \right)^{3x}$ | xx) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) \right)^{1/x}$ | xxi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log x + 1}{2^x - 1}$ |
| xxii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1 \right)^{x+3}$ | xxiii) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x}{x + 1} \right)^{\frac{x+3}{3x^2+2}}$ | xxiv) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\log x)^{1/x}$ |
| xxv) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x}{x + 1} \right)^{\frac{x+3}{3x+2}}$ | xxvi) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x}{x + 1} \right)^{\frac{3x^2+2}{x+3}}$ | xxvii) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\log x}{e^x - e}$ |

1.3 Continuidad

Ejercicio 1.3.1. Sea $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$. Señala la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- i) f está definida en a ii) $f(a) = L$ iii) f es continua en a

Ejercicio 1.3.2. Sea $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x + 4} & \text{si } x \neq -4 \\ 0 & \text{si } x = -4 \end{cases}$. Señala la certeza o falsedad de las siguientes afirmaciones.

- i) f está definida en -4 ii) El límite $\lim_{x \rightarrow -4} f(x)$, existe. iii) f es continua en -4

Ejercicio 1.3.3. Estudia el conjunto de puntos donde las siguientes funciones son continuas.

- i) $f(x) = \frac{1}{1 - \ln(x+2)}$ ii) $\ln(5 + \cos x)$ iii) $f(x) = \frac{1}{7 + \cos x}$

Ejercicio 1.3.4. Calcula el valor de $a \in \mathbb{R}$ para que las siguientes funciones sean continuas en \mathbb{R} .

- i) $f(x) = \begin{cases} (x-3)\ln(ax) & \text{si } x > 2 \\ \sin \frac{\pi x}{2} & \text{si } x \leq 2 \end{cases} \quad \text{en } x = 2.$
- ii) $f(x) = \begin{cases} 1 + (x-3)\sin\left(\frac{1}{x-3}\right) & \text{si } x > 3 \\ e^{a+4x} & \text{si } x \leq 3 \end{cases} \quad \text{en } x = 3.$