

# Cálculo y representación de eclipses de Sol

Federico Baeza Richer

Máster en Modelización Matemática, Estadística y Computación

2 de julio de 2010

# Índice

## 1 Motivación del trabajo

## 2 Descripción

- Tipos de eclipses
- Parámetros y curvas característicos
- Sistema fundamental de coordenadas

## 3 Desarrollo del programa

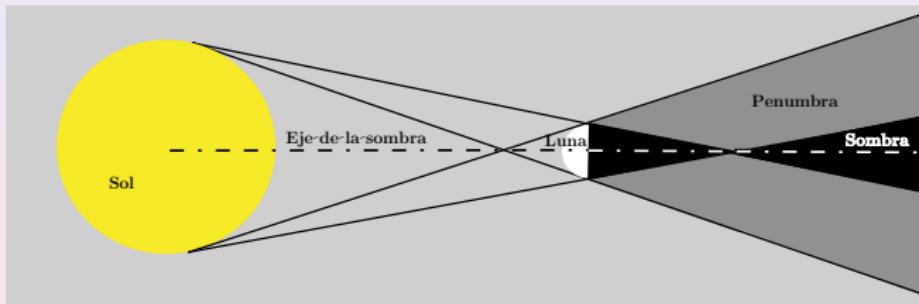
- Implementación algoritmos
- Dibujo del mapa
- Conclusiones

# Motivación del trabajo

- A propuesta del Jefe de la sección de Efemérides del Real Observatorio de la Armada.
- Aprovechar la gran capacidad de un procesador simbólico como Mathematica, para el cálculo de los parámetros y curvas de un eclipse de Sol.
- Formulación elegante y sencilla frente a complejidad de los métodos clásicos (analíticos y numéricos).
- Automatizar la representación en mapas. Cálculo de puntos particulares.

# Tipos de eclipses de Sol

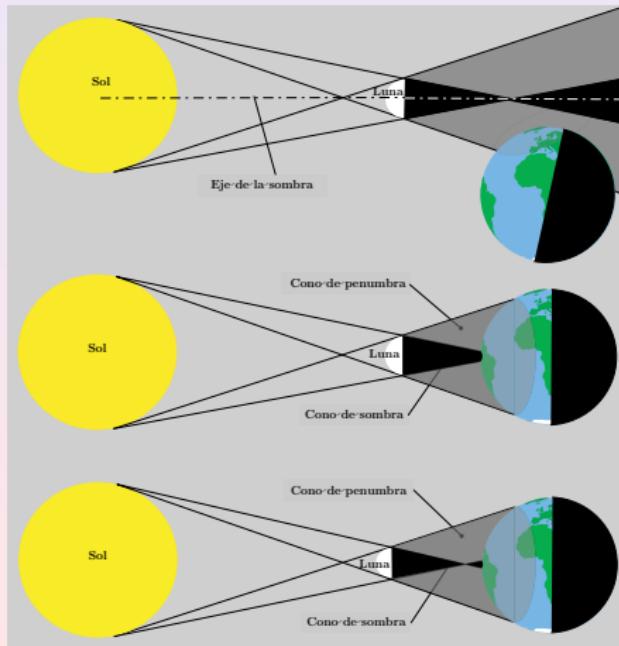
- Condiciones eclipses de Sol
- Cono de sombra, de penumbra y eje de la sombra



- Modelo IAU (Unión Astronómica Internacional)

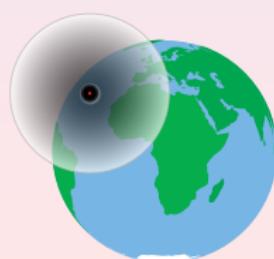
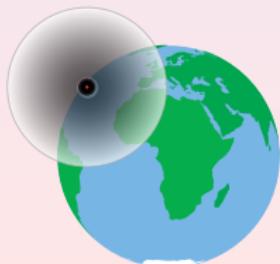
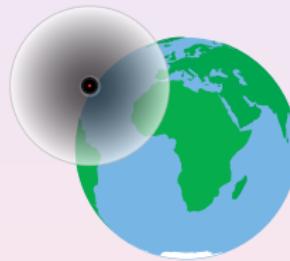
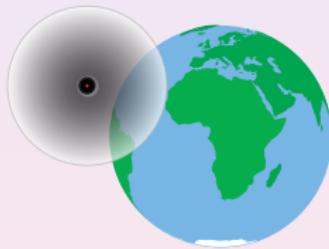
# Tipos de eclipses de Sol

División clásica de los eclipses: parcial (arriba), total (centro) y anular (abajo)



# Tipos de eclipses de Sol

En este trabajo: parcial (arriba, izda), no central (arriba, dcha), central con una sola curva de totalidad (abajo, izda), central con una sola curva de parcialidad (abajo, ctro) y central con las dos curvas de parcialidad (abajo, dcha).



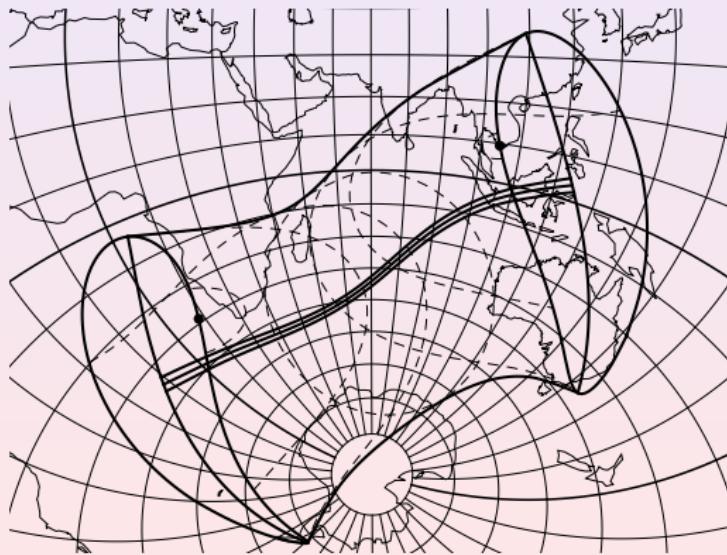
# Circunstancias generales del eclipse

Destacan las siguientes:

- Principio y fin del eclipse.
- Principio y fin del eclipse total/anular.
- Principio y fin de la curva central del eclipse.
- Máximo del eclipse.
- Magnitud del eclipse.

# Mapa del Eclipse

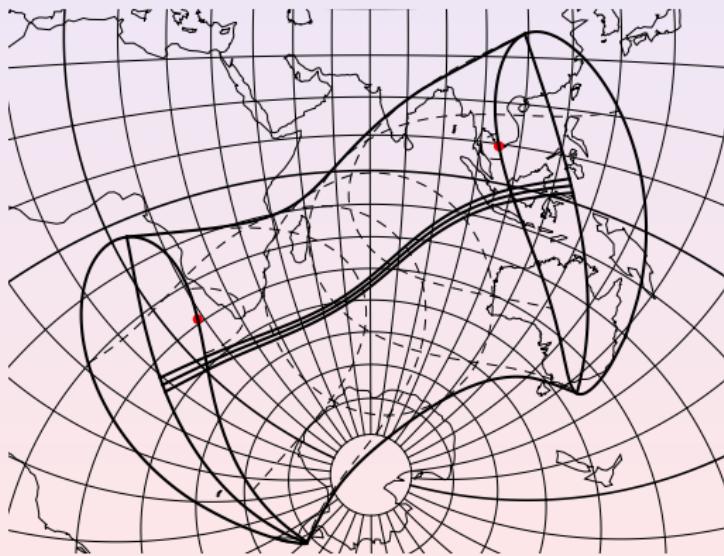
Eclipse central con las dos curvas de parcialidad



# Mapa del Eclipse

Eclipse central con las dos curvas de parcialidad

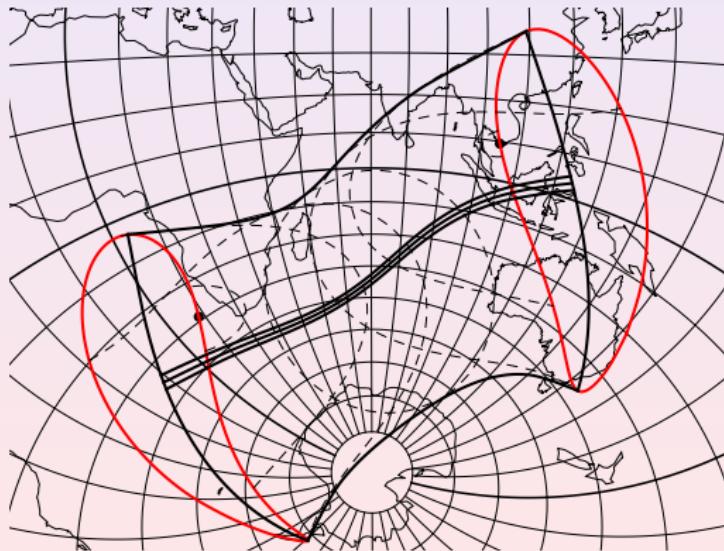
- Primer y último contactos



# Mapa del Eclipse

Eclipse central con las dos curvas de parcialidad

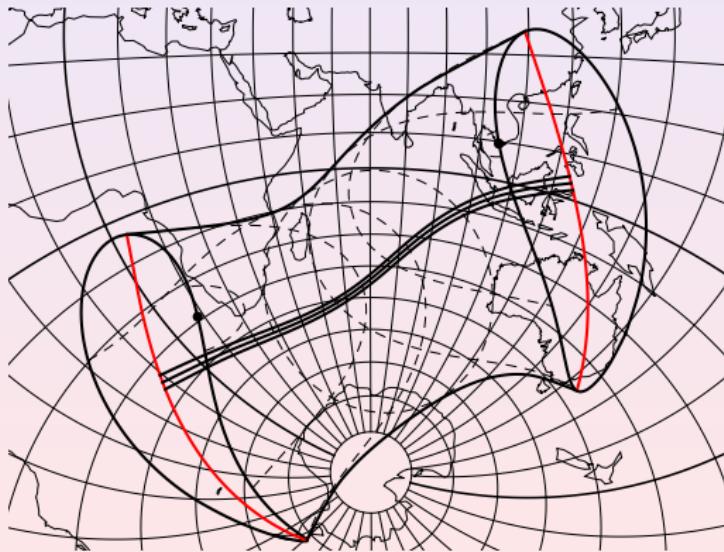
- Curvas de contacto en el horizonte



# Mapa del Eclipse

Eclipse central con las dos curvas de parcialidad

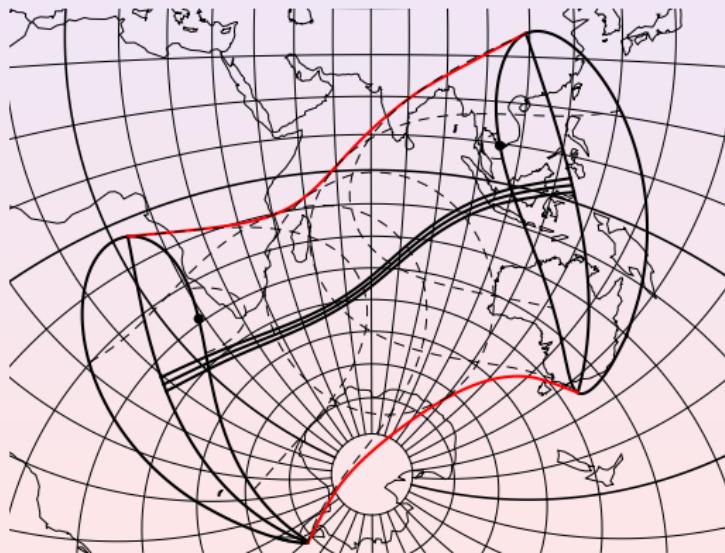
- Curvas de máximo en el horizonte



# Mapa del Eclipse

Eclipse central con las dos curvas de parcialidad

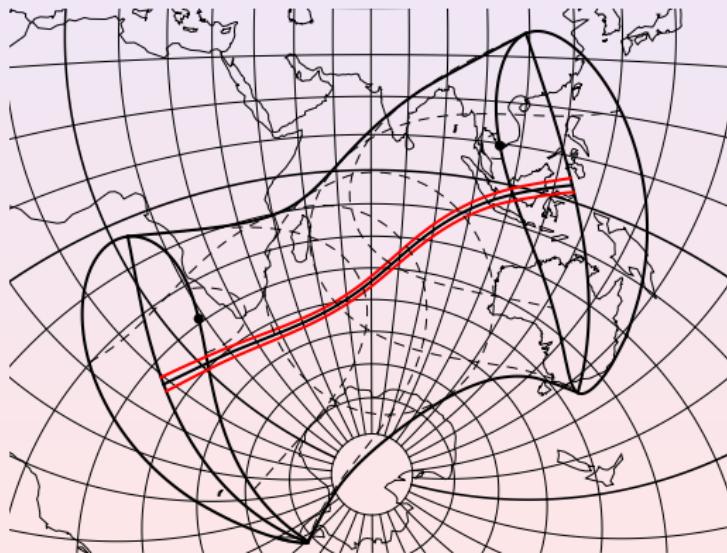
- Curvas límite Norte y Sur de la penumbra



# Mapa del Eclipse

Eclipse central con las dos curvas de parcialidad

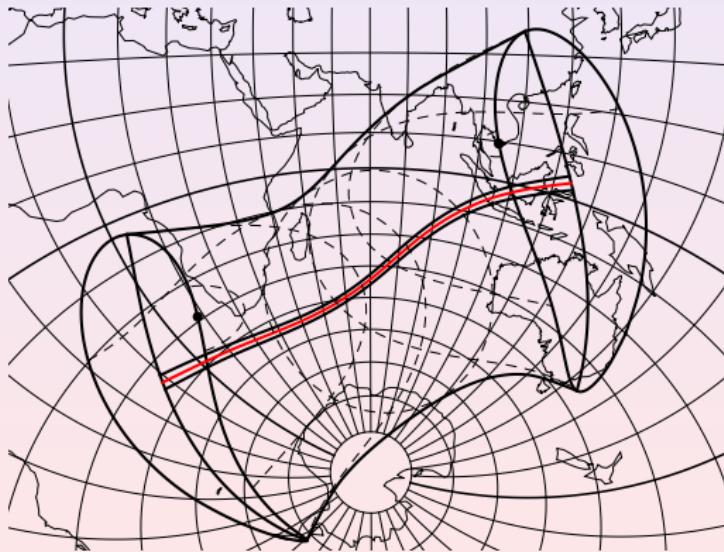
- Curvas límite Norte y Sur de la sombra



# Mapa del Eclipse

Eclipse central con las dos curvas de parcialidad

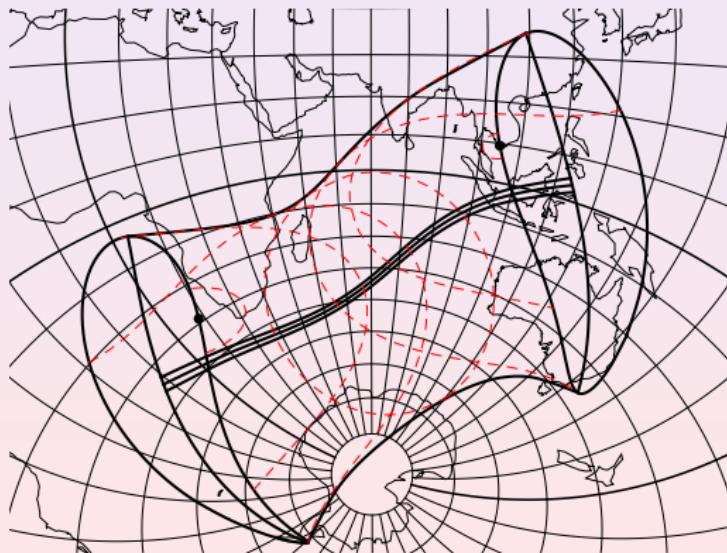
- Curva de la centralidad



# Mapa del Eclipse

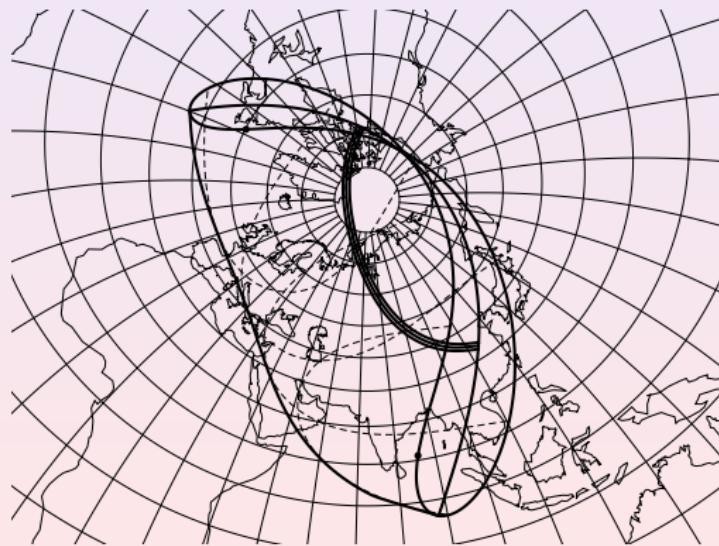
Eclipse central con las dos curvas de parcialidad

- Curvas de simultaneidad de principio y fin del eclipse



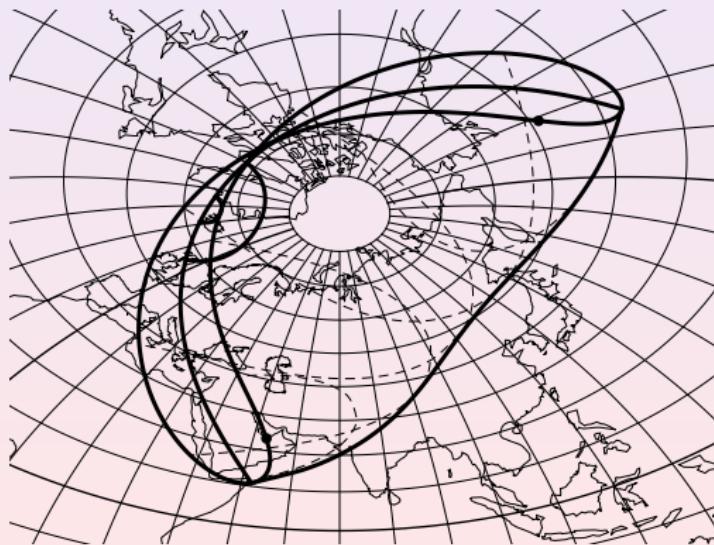
# Mapa del Eclipse

Eclipse central con una sola curva de parcialidad



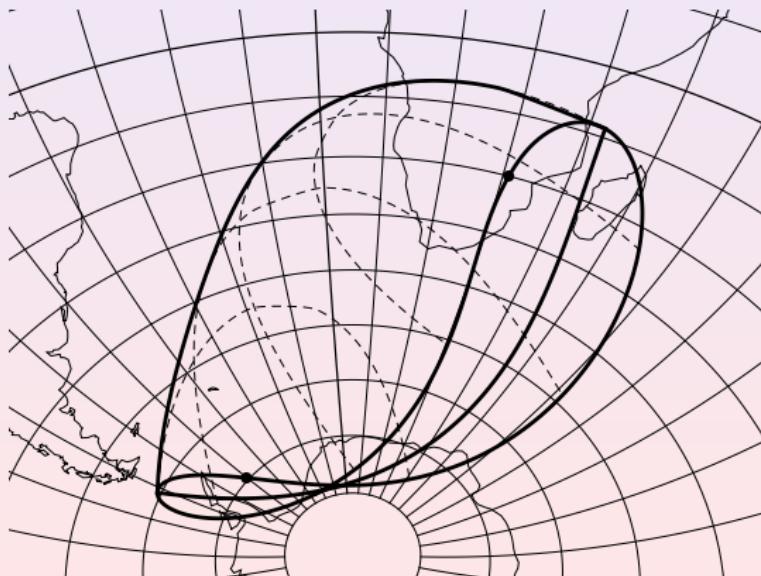
# Mapa del Eclipse

Eclipse central con una sola curva de totalidad

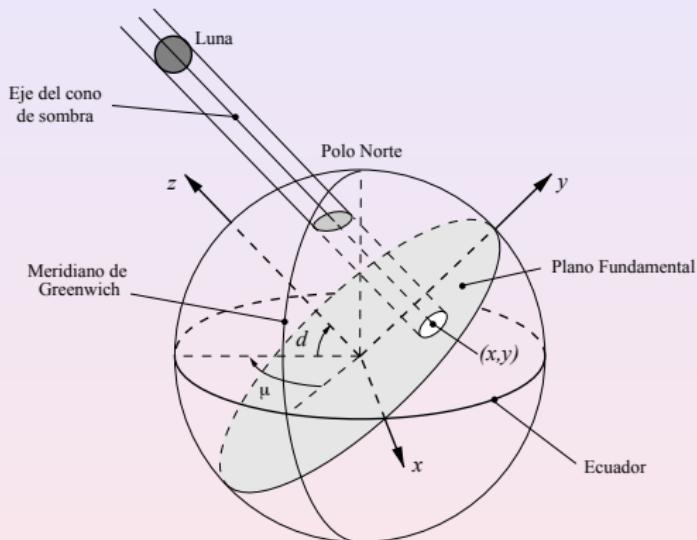


# Mapa del Eclipse

## Eclipse parcial

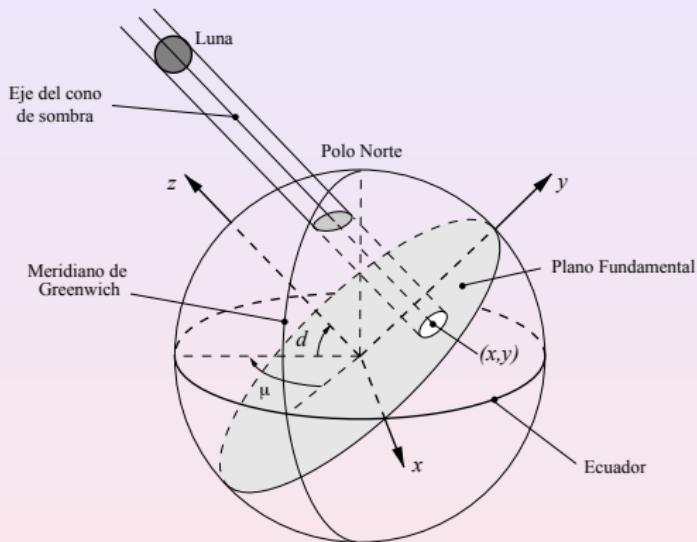


# Sistema fundamental de coordenadas



- Definición
- Plano y elipse fundamental
- Plano del observador

# Sistema fundamental de coordenadas



## Elementos besselianos

- Definición
- $x, y, d, \mu, l_p, l_s, i_p, i_s$

# Sistema fundamental de coordenadas

Las coordenadas en el sistema fundamental  $(\xi, \eta, \zeta)$ , de un punto de coordenadas geográficas  $(\lambda, \phi)$ , serán:

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \phi \operatorname{sen} h, \\ \eta &= \rho \operatorname{sen} \phi \cos d - \rho \cos \phi \operatorname{sen} d \cos h, \\ \zeta &= \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} d + \rho \cos \phi \cos d \cos h,\end{aligned}$$

donde  $h = \mu + \lambda$  es el horario local del eje de la sombra.

Sus derivadas con respecto al tiempo son:

$$\begin{aligned}\xi' &= \mu'(\zeta \cos d - \eta \operatorname{sen} d), \\ \eta' &= -\zeta d' + \mu' \xi \operatorname{sen} d, \\ \zeta' &= \eta d' - \mu' \xi \cos d.\end{aligned}$$

# Sistema fundamental de coordenadas

Para un observador de coordenadas  $(\xi, \eta, \zeta)$ , el radio del cono de penumbra en el plano del observador ( $L_p$ ), del de sombra ( $L_s$ ), así como la distancia ( $\Delta$ ) al eje de la sombra, están definidos por:

$$\begin{aligned} L_p &= l_p - \zeta i_p, \\ L_s &= l_s - \zeta i_s, \\ \Delta &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \end{aligned} \tag{1}$$

# Datos iniciales y elementos besselianos

- De las efemérides básicas del Jet Propulsion Laboratory se obtiene una base de datos a intervalos de tiempo constante de lo siguiente:
  - Ascensión recta, declinación y distancia geocéntrica de Sol y Luna.
  - Tiempo Sidéreo.
- Por geometría y trigonometría se obtienen los elementos besselianos para los instantes de los datos.
- Además de los elementos besselianos se requieren dos parámetros más:
  - Valor del semieje menor de la elipse fundamental ( $b$ ).
  - Distancia del eje de sombra a la elipse fundamental ( $q$ ).
- De todos los elementos besselianos, así como de estos nuevos parámetros, se obtienen funciones interpolantes y sus derivadas mediante Interpolation y Derivative.

# Determinación tipo de eclipse

Se determinan en función de lo siguiente:

- Si  $\min(q - l_p) > 0$ : no hay eclipse.
- Si  $\min(q - l_p \leq 0)$  y  $\min(q - l_s > 0)$ : Eclipse parcial.
- Si  $\min(q - l_s \leq 0)$  y  $\min(q > 0)$ : Eclipse no central.
- Si  $\min(q \leq 0)$  y  $\min(q + l_s > 0)$ : Eclipse central con una sola curva de totalidad.
- Si  $\min(q + l_s \leq 0)$  y  $\min(q + l_p > 0)$ : Eclipse central con una sola curva de parcialidad.
- Si  $\min(q + l_p \leq 0)$ : Eclipse central con las dos curvas de parcialidad.

Se crean variables auxiliares lógicas.

# Principio y fin de las distintas fases

Utilizando la función FindRoot el principio y fin de cada fase se obtiene calculando las horas para las que se anulan las siguientes funciones:

Principio y fin del eclipse parcial: .....  $q - l_p$

Principio y fin del eclipse total/anular: .....  $q - l_s$

Principio y fin del eclipse central: .....  $q$

# Máximo del eclipse

Es el instante de mínima distancia del eje de la sombra al centro de la Tierra. Se obtiene aplicando la función `FindRoot` a la derivada de la expresión  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

# Curva central del eclipse

Se calcula para distintos instantes, el punto de corte del eje de sombra con el elipsoide. Se obtienen los puntos resolviendo, mediante la función NSolve, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\xi &= x, \\ \eta &= y, \\ X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{(1-f)^2} &= 1,\end{aligned}$$

donde  $x$  e  $y$  son los valores correspondientes al instante de máximo, y  $(X, Y, Z)$  deben expresarse en coordenadas fundamentales  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

# Curvas de contacto en el horizonte, de máximo en el horizonte y de simultaneidad de principio y fin del eclipse

Se obtienen, igual que para la curva anterior, resolviendo respectivamente los siguientes sistemas:

$$\left. \begin{array}{l} \zeta = 0, \\ \frac{\eta^2}{b^2} + \xi^2 = 1, \\ \Delta = I_p, \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \zeta = 0, \\ \frac{\eta^2}{b^2} + \xi^2 = 1, \\ \frac{d(\Delta)}{dt} = 0, \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \zeta = \text{cte.}, \\ \Delta = L_p, \\ X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{(1-f)^2} = 1. \end{array} \right\}$$

# Curvas límite Norte y Sur

Según la bibliografía son las curvas formadas por los puntos de coordenada  $\zeta \geq 0$ , para los que el eclipse se reduce a una única tangencia de los discos del Sol y de la Luna. Para ellos la función  $L - \Delta$  (donde  $L$  será  $L_s$  o  $L_p$  según se trate del cono de sombra o de penumbra) se anula y tiene un máximo.

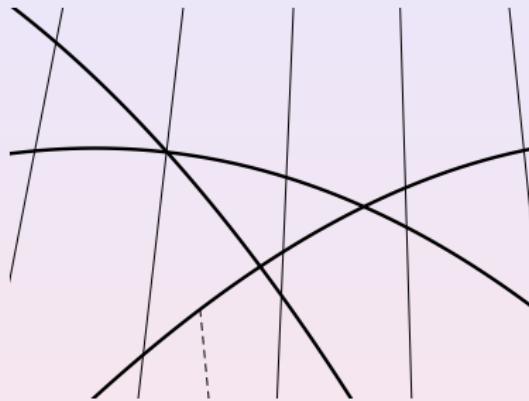
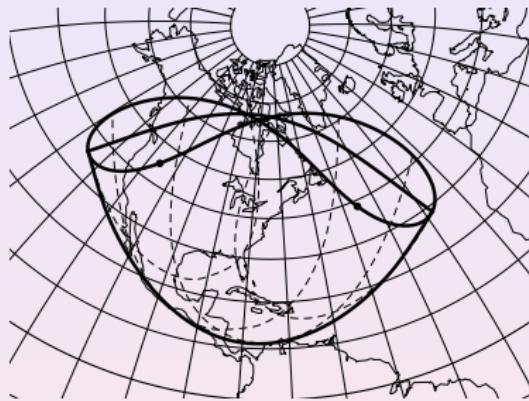
Se resuelve el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\frac{d(L - \Delta)}{dt} = 0,$$

$$L - \Delta = 0,$$

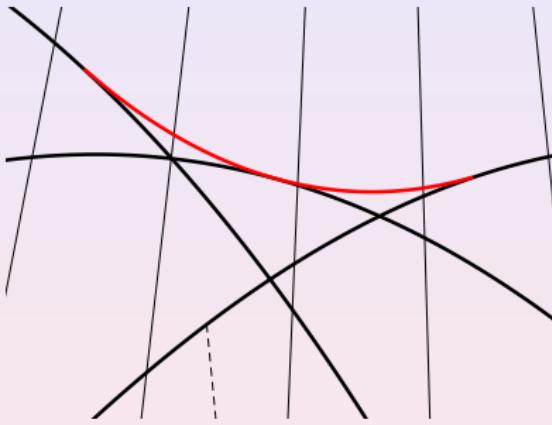
$$X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{(1-f)^2} = 1.$$

# Curvas límite Norte y Sur



Vista ampliada (derecha) de la zona de unión de las curvas de contacto en el horizonte para un eclipse parcial (izquierda).

# Curvas límite Norte y Sur

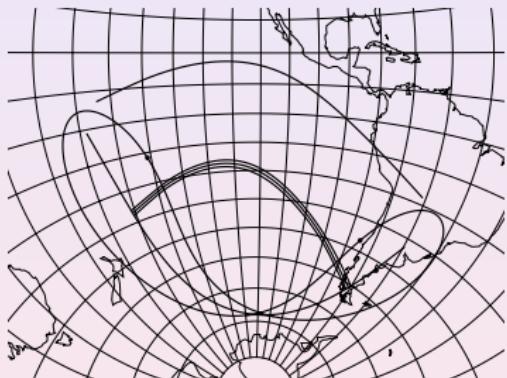


La nueva curva se calcula hallando los puntos que maximizan y anulan a la vez la función  $\zeta$ . Son la solución del siguiente sistema:

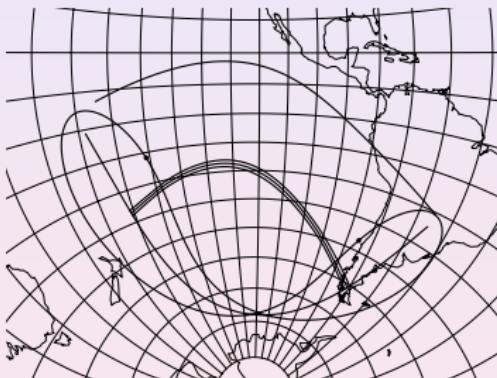
$$\begin{aligned}\zeta &= 0, \\ \frac{\eta^2}{b^2} + \xi^2 &= 1, \\ \frac{d(\zeta)}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

# Puntos de coincidencia de las curvas de máximo en el horizonte con las límite Norte y Sur

Ejemplo de mapas sin haber calculado estos puntos.



Puntos cada cinco minutos



Puntos cada minuto

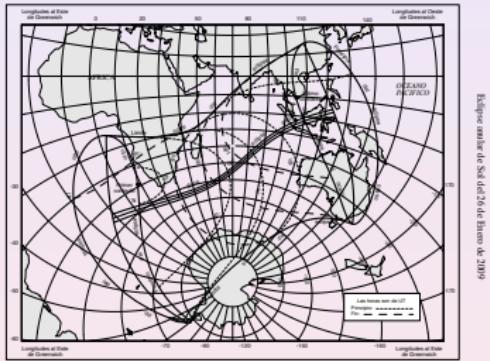
Se calcula, mediante `FindRoot`, el instante en que los puntos de la curva de máximo en el horizonte tienen nula su distancia al borde del cono.

# Ordenado de puntos y tipo de representación

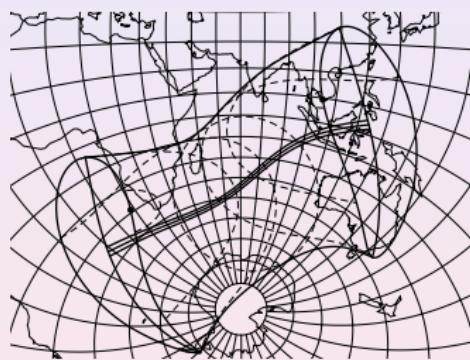
- Ordenado de puntos de una misma curva y distribución en sus curvas respectivas.
- Obtención de curvas mediante la función BSpline.
- Representación estereográfica tangente de las curvas, junto con retícula y continentes.

# Mapas

## Eclipse anular de 26 de enero de 2009



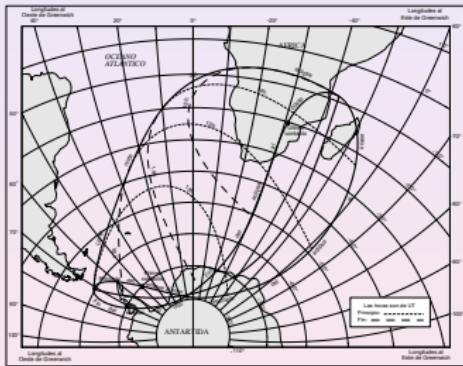
Mapa almanaque



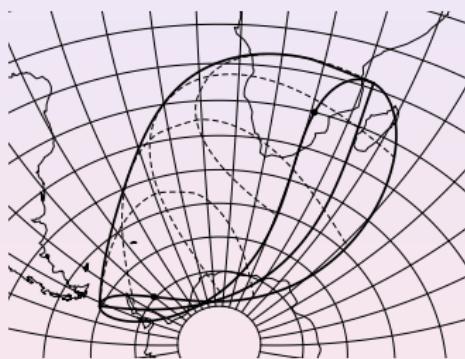
Mapa programa

# Mapas

## Eclipse parcial de 19 de abril de 2004



Mapa almanaque



Mapa programa

# Conclusiones

- Utilidad de procesador simbólico para obtención de curvas y parámetros mediante ecuaciones sencillas y claras.
- Muy buena herramienta para el dibujo.
- Se completa el dibujo con la obtención de puntos característicos.
- Hallazgo de nueva curva límite en zonas críticas de algunos eclipses.
- Utilidad del programa para la sección de Efemérides del ROA.