

# **Cálculo y representación de eclipses de Sol**

Federico Baeza Richer

Máster Modelización Matemática, Estadística y Computación. (2009–2010)

# Índice

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
<b>2. Generalidades sobre eclipses</b>	<b>4</b>
<b>3. Tipos de Eclipses de Sol</b>	<b>4</b>
<b>4. Parámetros y curvas características de los eclipses solares</b>	<b>6</b>
4.1. Conjunción en Ascensión Recta . . . . .	6
4.2. Circunstancias generales del eclipse . . . . .	7
4.3. Mapa del eclipse . . . . .	7
4.4. Sistema fundamental de coordenadas y elementos besselianos . . . . .	10
4.4.1. Coordenadas del observador en el sistema fundamental . . . . .	11
<b>5. Métodos clásicos frente a método utilizado</b>	<b>12</b>
<b>6. Datos utilizados para los eclipses y su lectura</b>	<b>13</b>
<b>7. Simplificaciones utilizadas</b>	<b>14</b>
<b>8. Iniciación del programa y algoritmos utilizados</b>	<b>14</b>
<b>9. Dibujo en Planisferio</b>	<b>19</b>
<b>10. Conclusiones</b>	<b>19</b>
<b>A. Funciones auxiliares utilizadas</b>	<b>19</b>
<b>B. Glosario</b>	<b>23</b>

## Índice de figuras

1.	Tipos de eclipses de Sol . . . . .	5
2.	Conos de sombra y penumbra respecto a la Tierra, según el tipo de eclipse . . . .	6
3.	Ejemplo de mapa de eclipse anular . . . . .	8
4.	Ejemplo de mapa de eclipse parcial . . . . .	9
5.	Sistema fundamental de coordenadas . . . . .	11

# 1. Introducción

Se presenta el trabajo fin de máster de título Cálculo y representación de eclipses de Sol, correspondiente al Máster en Modelización Matemática, Estadística y Computación (curso 2009-2010). El trabajo, como su nombre indica, consiste en el cálculo de todos los parámetros y elementos característicos de un eclipse solar, y del posterior dibujo sobre la esfera terrestre, de todas las curvas representativas.

El punto de partida de este trabajo es el conocimiento de la existencia de un eclipse en una fecha determinada. Queda para un análisis posterior la determinación de los días de cada año en que esto ocurrirá.

Desde tiempo remotos el hombre se ha sentido atraído por los fenómenos astronómicos, siendo el del eclipse de Sol el que probablemente más impresión, asombro, supersticiones etc ha generado a lo largo de la historia. La observación de este fenómeno va más allá de la simple contemplación, ya que gracias las observaciones realizadas durante el desarrollo del mismo, han servido para a veces descubrir, otras corroborar, conocimientos claves en la comprensión del sistema solar. Es por ello que a lo largo de la historia y conforme los conocimientos de las civilizaciones avanzaban, se ha intentado conocer, cada vez con más precisión, el cuándo, en qué circunstancias y desde dónde, se podrán observar estos acontecimientos.

Desde finales del siglo *XIX*, ya se tenían conocimientos y herramientas suficientes para predecir, con bastante precisión la ocurrencia de eclipses. Sin embargo los métodos tradicionales no son en absoluto sencillos. Los analíticos no eran fáciles de comprender, ya que se basaban en una serie de transformaciones de variables, que además de introducir simplificaciones que hacían perder precisión, hacían perder toda la noción geométrica de qué se estaba calculando. En cuanto a los métodos numéricos, la aparición de las computadoras automatizó completamente el cálculo, desarrollándose inmediatamente programas (sobre todo en Fortran) que realizaban esta tarea. Sin embargo los algoritmos utilizados están basados en una serie de iteraciones (inicialmente consideran la Tierra esférica para luego llegar al elipsoide etc), para ir finalmente convergiendo a los resultados deseados, estos sí con la precisión deseada. La aparición de procesadores simbólicos de gran capacidad (como el *Mathematica* aquí utilizado), invita a plantear y resolver las ecuaciones que determinan los parámetros característicos de los eclipses de una forma mucho más sencilla y clara que hasta ahora. Si bien la precisión obtenida no mejora las que ya se tienen, y las propias funciones resolutoras lleven un mecanismo intrínseco parecido en cuanto a iteraciones etc, a los programas ya existentes, el hecho de poder plantear la resolución de los distintos problemas mediante sencillas y elegantes fórmulas, suponen un avance importante.

El Real Instituto y Observatorio de la Armada (ROA) es el encargado en España de la publicación de las efemérides astronómicas, haciéndolo desde el *SXVIII* hasta nuestros días, con las tecnologías de que se ha dispuesto en cada momento. Si bien lógicamente los cálculos obtenidos con estos programas no van a aportar datos ni precisión nueva a la que ya se dispone, sí que tiene su importancia. En primer lugar sirve para cotejar los resultados obtenidos mediante los medios tradicionales, hecho que se realiza con los datos de otros observatorios, en segundo sirve para automatizar más la representación de los datos en las curvas mediante su dibujo, y por último auxilia a sus labores de docencia, facilitando la explicación sencilla y elegante de este fenómeno.

En el apéndice B se ha incluido un glosario de los términos astronómicos utilizados en este trabajo, al que acudir en caso necesario.

Este trabajo ha sido codirigido por los doctores Teodoro López Moratalla (Jefe de la Sección de Efemérides del ROA) y Alberto Abad Medina (Profesor de Astrodinámica de la Universidad de Zaragoza).

## 2. Generalidades sobre eclipses

El término eclipse se aplica indistintamente a dos fenómenos provocados por las posiciones relativas de tres astros: el Sol (emisor luminoso), la Tierra y la Luna (cuerpos opacos que interceptan la luz solar).

Un eclipse de Sol se produce cuando este astro es ocultado, total o parcialmente, por el disco de la Luna, que se interpone entre la Tierra y el Sol. Un eclipse de Sol tiene lugar siempre en Luna Nueva, siendo ésta una condición necesaria pero no suficiente para que se produzca el fenómeno.

La condición de Luna Nueva sería suficiente si las órbitas del Sol y de la Luna fueran coplanarias. Pero esto no ocurre al ser su inclinación relativa próxima a los  $5^\circ$ , por lo tanto la Luna se encuentra en la mayoría de las ocasiones por debajo o por encima de la eclíptica (plano del movimiento Tierra-Sol).

Para que se produzca un eclipse de Sol, la Luna debe hallarse en el plano de la eclíptica, o muy cerca de él, y en fase de Luna Nueva. Es decir, la Luna debe encontrarse en las proximidades de un nodo.

Los eclipses de Luna están determinados por el paso de nuestro satélite por la sombra de la Tierra y siempre suceden en fase de Luna Llena y al igual que en los eclipses solares cuando la Luna se encuentra en el nodo o en sus proximidades.

Mientras que los eclipses de Luna son visibles para todos los puntos de la superficie terrestre que tengan en ese momento a la Luna por encima del horizonte, los de Sol sólo serán visibles para algunos puntos de la Tierra.

## 3. Tipos de Eclipses de Sol

Se llama *cono de sombra* al cono formado por las tangentes exteriores del Sol y la Luna y *cono de penumbra* al formado por las tangentes interiores. El eje común a ambos conos, materializado por la línea que une los centros del Sol y de la Luna, se denomina *eje de la sombra* (ver figura 1).

Un eclipse de Sol se produce cuando el cono de penumbra alcanza algún punto de la superficie terrestre. Según la posición de la Tierra respecto a los conos de sombra y de penumbra, podemos dividir los eclipses de Sol en parciales, totales y anulares.

Eclipses Parciales son aquellos en los que el cono de sombra no corta en ningún momento la superficie terrestre. En estos eclipses el disco del Sol sólo se oculta parcialmente.

Si el cono de sombra alcanza algún punto de la superficie terrestre, se producirá un eclipse total o anular. La diferencia entre ambos tipos de eclipse se debe a que el diámetro aparente de la Luna puede ser mayor o menor que el del Sol, en función de las distancias a la Tierra de estos astros.

Cuando el diámetro de la Luna es mayor que el del Sol, el disco de éste quedará totalmente oculto para aquellos puntos de la Tierra inmersos en el cono de sombra, que observarán un eclipse total. Cuando el diámetro es menor, desde los puntos de la superficie terrestre dentro del cono de sombra, será visible un anillo del disco solar; de ahí el nombre de eclipse anular. En ocasiones ocurre que un mismo eclipse se observa como total en algunos puntos de la Tierra y como anular en otros; entonces el eclipse se denomina total-anular o mixto. El mecanismo de los tres tipos de eclipses se ha esquematizado en la figura 1. Los eclipses totales y anulares pueden ser centrales y no centrales, dependiendo de si el eje de sombra corta o no la superficie terrestre en algún momento. Además, en los eclipses centrales puede ocurrir que en algún instante del eclipse, los dos conos queden totalmente inmersos en la superficie de la Tierra, que sólo lo haga el cono de sombra o que no lo haga ninguno de ellos.

En resumen, en este trabajo distinguiremos los siguientes tipos de eclipses:

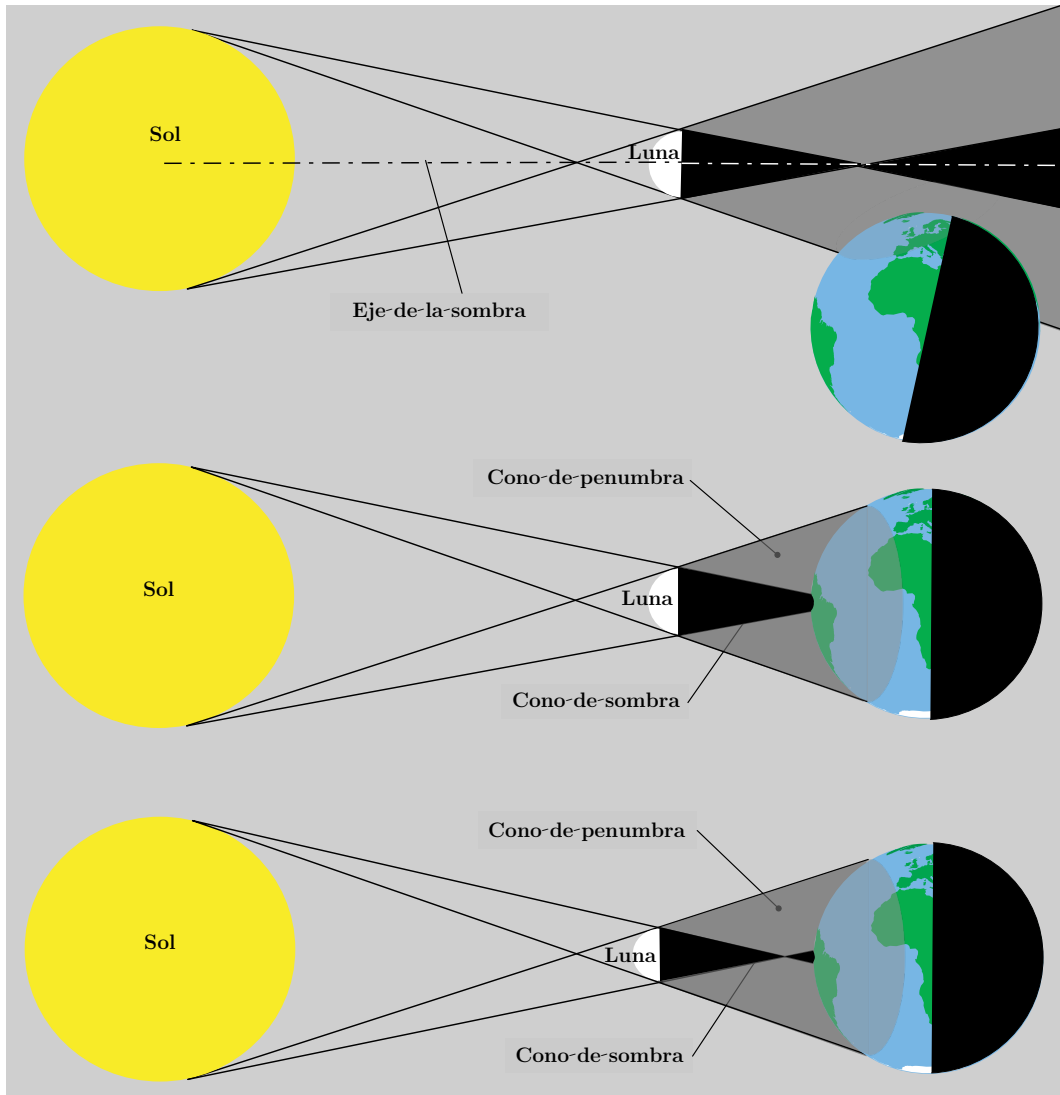


Figura 1: Tipos de eclipses de Sol: parcial (arriba), total (centro) y anular (abajo). Las dimensiones se han deformado para mayor claridad.

- Parcial
- Total, anular, total-anular:
  - No central
  - Central:
    - Central con una sola curva de totalidad
    - Central con una sola curva de parcialidad
    - Central con las dos curvas de parcialidad

La subdivisión de los eclipses centrales que hemos realizado no es habitual. Sin ser un extremo de especial relevancia, en el ámbito de este trabajo es importante para la sistematización de los cálculos que se desarrollan en los siguientes apartados. Además, está justificada por las trazas que los conos de sombra y de penumbra dejarán sobre la superficie terrestre en cada caso. Los distintos tipos de eclipse se ilustran en la figura 2.

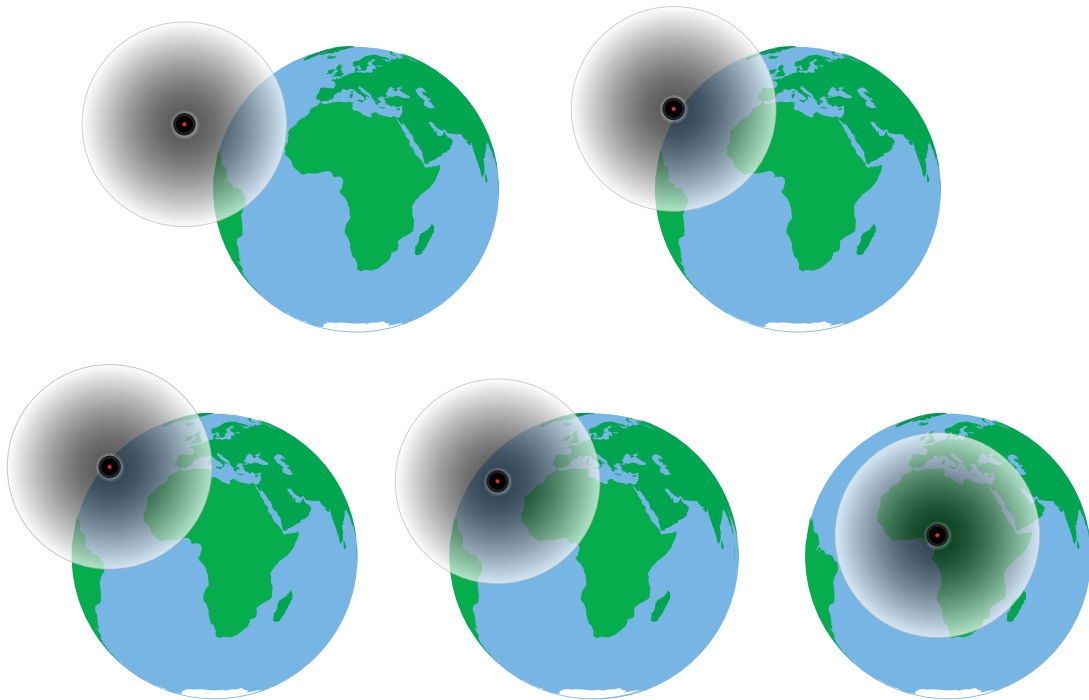


Figura 2: Posiciones de los conos de sombra y de penumbra respecto a la Tierra, en el momento de máximo acercamiento del eje de la sombra al centro de la Tierra, en un eclipse: parcial (arriba, izquierda), no central (arriba, derecha), central con una curva de totalidad (abajo, izquierda), central con una curva de parcialidad (abajo, centro) y central con dos curvas de parcialidad (abajo, derecha).

## 4. Parámetros y curvas características de los eclipses solares

Como ya se ha comentado, los eclipses de Sol son visibles únicamente desde determinadas zonas de la superficie terrestre, variando su desarrollo de una localización a otra. Por tanto, es necesario dar la información suficiente para que los usuarios puedan conocer, no sólo la fecha y el tipo de eclipse, sino en qué lugares y en qué condiciones se desarrollará éste. Tradicionalmente, esta información consta de lo siguiente:

- Datos del Sol y la Luna en el instante de la conjunción en ascensión recta.
- Circunstancias generales del eclipse
- Elementos besselianos
- Mapa de visibilidad

### 4.1. Conjunción en Ascensión Recta

Los eclipse de Sol ocurren aproximadamente cuando el Sol y la Luna tienen la misma ascensión recta. Esta hora se toma como referencia para facilitar al usuario los datos que necesita para calcular cómo se desarrollará el eclipse en una localización concreta, es decir, las circunstancias locales del eclipse. Aunque actualmente el cálculo de las circunstancias locales se realiza mediante los elementos besselianos, las publicaciones especializadas siguen incluyendo los siguientes datos a la hora de la conjunción en ascensión recta:

- Hora de la conjunción.

- Declinación de Sol y Luna.
- Movimiento horario en declinación y en ascensión recta del Sol y de la Luna.
- Paralaje horizontal ecuatorial de Sol y Luna.
- Semidiámetro verdadero de Sol y Luna.

## 4.2. Circunstancias generales del eclipse

Están constituidas por los datos siguientes, aunque no todos suelen facilitarse a los usuarios.

- *Principio y fin del eclipse.* El eclipse comienza cuando el cono de penumbra tangentea la Tierra. Además de la hora en que esto ocurre, también se facilitan las coordenadas geográficas del punto de tangencia: este punto será el primero de la Tierra desde el que los limbos del Sol y la Luna son tangentes exteriores. Análogamente para el fin del eclipse.
- *Principio y fin del eclipse total/anular.* Análogo al anterior, pero con el cono de sombra en lugar del de penumbra. Los puntos correspondientes de la Tierra son el primero y el último que ven los limbos del Sol y la Luna tangentes interiores.
- *Principio y fin de la curva central del eclipse.* Son los dos puntos de tangencia del eje de la sombra con el elipsoide terrestre.
- *Contactos interiores del cono de sombra.* Son los puntos de tangencia interior del cono de sombra con el elipsoide. Son el primer y último momento en que el corte del cono de sombra con el elipsoide dibuja una curva cerrada.
- *Contactos interiores del cono de penumbra.* Análogo al anterior, pero con el cono de penumbra en lugar del de sombra.
- *Máximo del eclipse.* Es el instante de máxima proximidad del eje de la sombra al centro de la Tierra. Para un eclipse central el punto de máximo es el de corte del eje con la Tierra en ese instante. Para un eclipse no central es el punto de la Tierra más cercano al eje en ese instante.
- *Eclipse central al mediodía.* Punto de la curva central que tiene el máximo del eclipse local al Norte o al Sur y por ello a mayor altura sobre el horizonte.
- *Coincidencia de las curvas de máximo en el horizonte con las curvas límite Norte/Sur sombra/penumbra.* Son los puntos pertenecientes a la vez a las curvas mencionadas, cuyas características se describen en el apartado siguiente.

## 4.3. Mapa del eclipse

**Curva de eclipse central** Es el lugar geométrico de los puntos de corte del eje de la sombra con la Tierra.

**Curvas de contacto en el horizonte** Son las cuatro curvas siguientes, formadas por los puntos a los que les ocurre lo que se explica a continuación:

- *Fin del eclipse al orto:* En el momento en que empieza a ser visible el eclipse por encima del horizonte, a la salida del Sol, este termina. Es el límite occidental del eclipse.
- *Inicio del eclipse al orto:* La tangencia inicial de los limbos de Sol y Luna se observan justo en el horizonte. Es el límite occidental de los puntos que pueden ver todo el eclipse por encima del horizonte.



## Eclipse anular de Sol del 26 de Enero de 2009

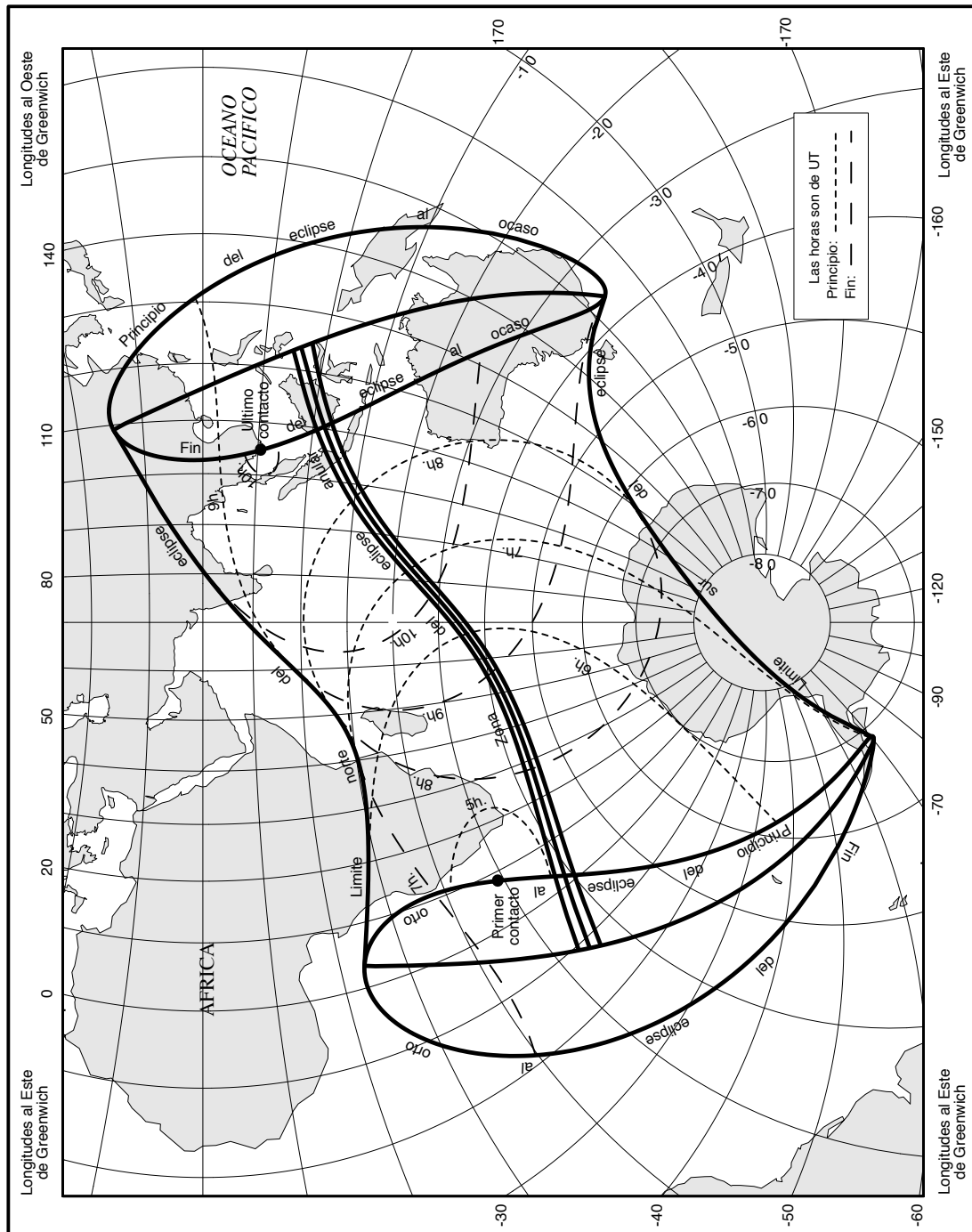


Figura 3: Ejemplo de mapa de eclipse anular

## Eclipse parcial de Sol del 5 de Febrero de 2000

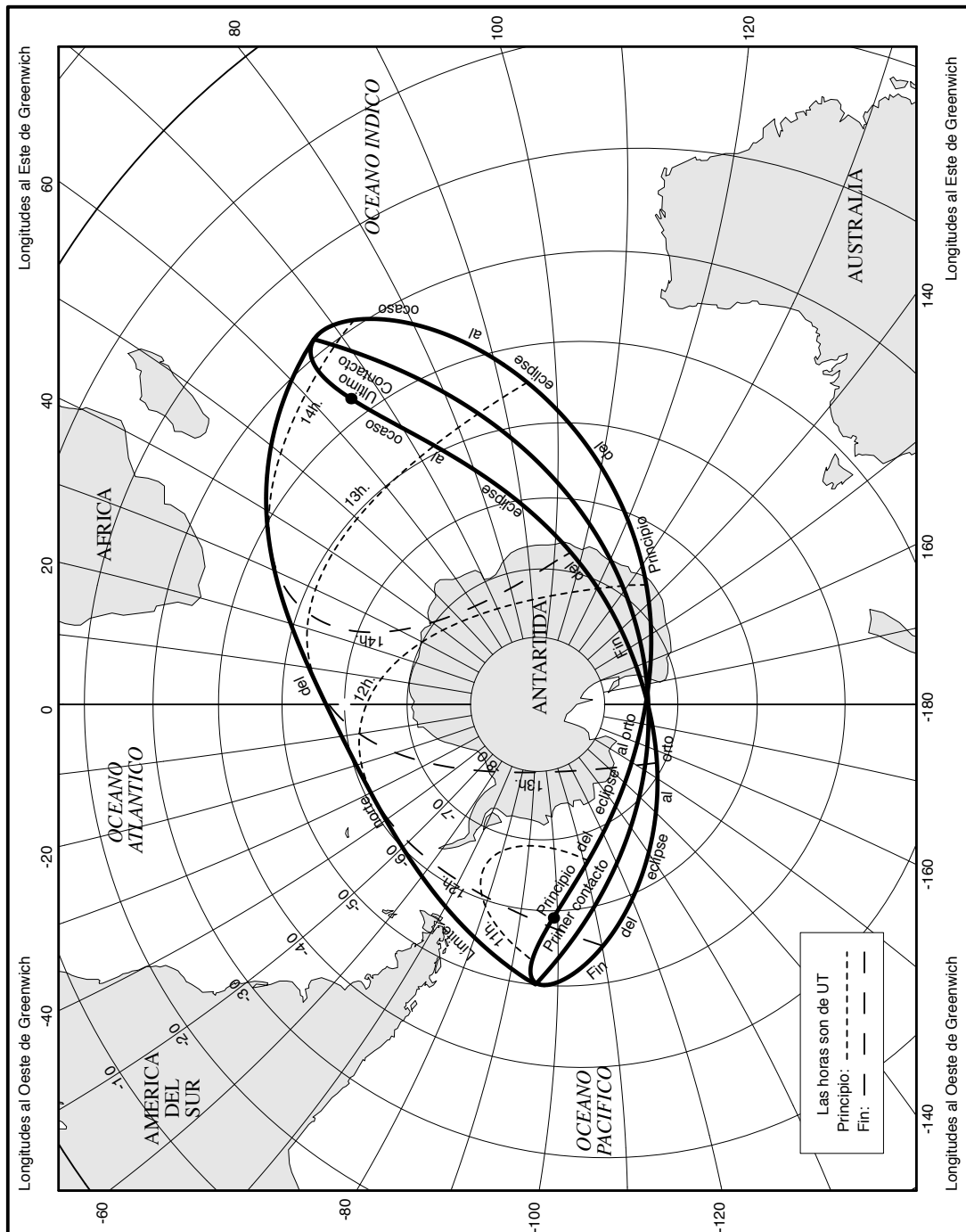


Figura 4: Ejemplo de mapa de eclipse parcial

- *Fin del eclipse al ocaso*: La última tangencia de ambos limbos se produce en el horizonte, mientras se pone el Sol. Es el límite oriental de los puntos que pueden ver todo el eclipse por encima del horizonte.
- *Inicio del eclipse al ocaso*: La tangencia inicial se ve al ocaso, cuando se oculta por el horizonte. Es el límite oriental de visualización del eclipse.

**Curvas de máximo de eclipse en el horizonte** Conjunto de puntos sobre la superficie para los que el instante de máximo del eclipse local (mínima distancia angular que observan entre los centros de los discos solar y anular), se produce cuando el Sol está en el horizonte. Lógicamente hay dos curvas:

- *Curva de máximo al orto*: Al orto es el máximo del eclipse y conforme sale el Sol va disminuyendo el eclipse. Esta curva se encuentra comprendida entre las de inicio y fin del eclipse al orto.
- *Curva de máximo al ocaso*: Comienza el eclipse sobre el horizonte y va aumentando conforme va bajando el Sol hasta llegar al máximo justo al ocaso. De forma análoga a la anterior, esta curva se encuentra comprendida entre las de inicio y fin del eclipse al ocaso.

**Curvas límite Norte y Sur de sombra/penumbra** Curvas límite superior e inferior (esencialmente Norte y Sur) sobre la Tierra, de los puntos desde donde se puede ver el eclipse ya sea como parcial o como total/anular.

**Curvas instantáneas del eclipse** Cortes del cono de penumbra con la Tierra para un instante determinado. Lógicamente sólo se considera el primer corte de cada generatriz del cono con el elipsoide ya que desde los puntos del segundo corte no es visible el eclipse al encontrarse por debajo del horizonte.

#### 4.4. Sistema fundamental de coordenadas y elementos besselianos

Definimos el *Sistema Fundamental de Coordenadas* (figura 5) como un sistema de referencia geocéntrico, tal que: el eje  $z$  es paralelo al eje de sombra, positivo en el sentido Tierra-Luna; el eje  $x$  es la intersección del ecuador con el plano perpendicular a  $z$ , positivo hacia el Este; y el eje  $y$  forma un triedro directo con los otros dos. El plano  $xy$  se denomina *plano fundamental*. Se llama *plano del observador* al plano paralelo al fundamental que pasa por la situación del observador. Las coordenadas de los puntos en este sistema de referencia se denotarán por  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$ .

Los elementos besselianos son un conjunto de funciones dependientes del tiempo que describen la geometría del eclipse. Estas funciones son:

- $x, y$ : Coordenadas, en el sistema fundamental, de la intersección del eje de la sombra con el plano fundamental. Se dan en unidades de radio ecuatorial terrestre.
- $d, \mu$ : Declinación y ángulo horario en Greenwich, del eje de la sombra (y por lo tanto del eje  $z$ ). Se dan en grados sexagesimales, aunque también es habitual proporcionar el  $\sin d$  y el  $\cos d$ , en lugar de  $d$ .
- $l_p, l_s$ : Radios, en unidades del radio ecuatorial terrestre, de las respectivas intersecciones de los conos de sombra y penumbra con el plano fundamental. Por convenio, estos radios tienen el mismo signo que la coordenada  $z$  del vértice del cono correspondiente. Así,  $l_p$  es siempre positivo, mientras que  $l_s$  puede ser positivo (eclipse anular), negativo (eclipse total) o nulo (eclipse mixto, normalmente).
- $i_p, i_s$ : Tangentes de la semiapertura del cono de penumbra y de sombra respectivamente.

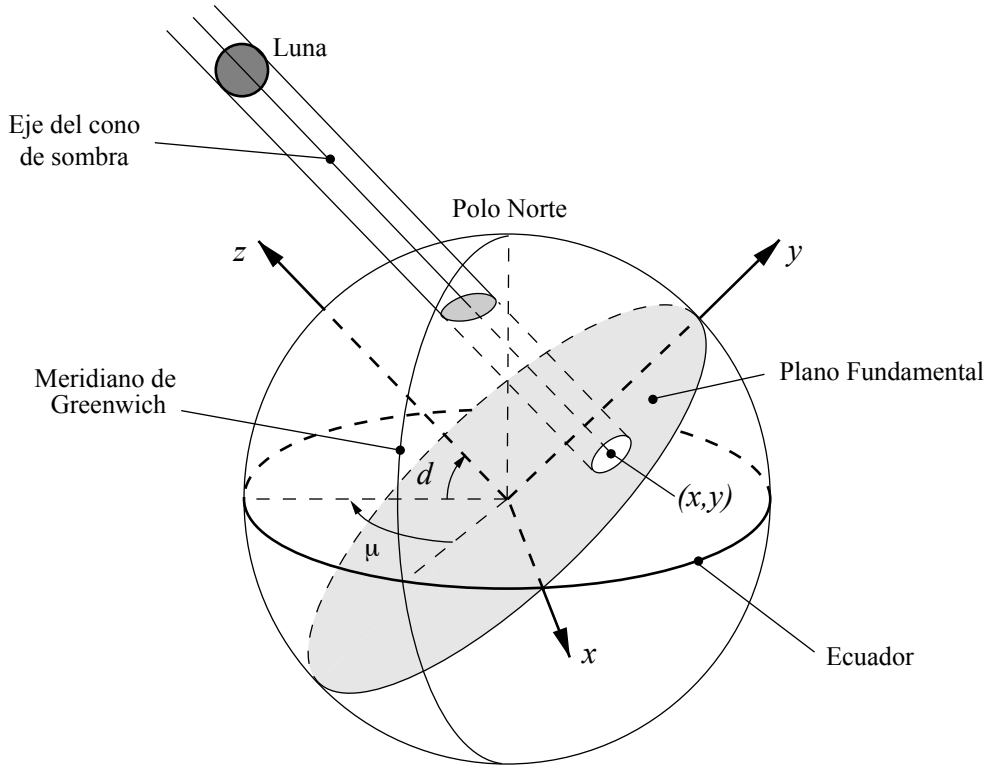


Figura 5: Sistema fundamental de coordenadas

Los elementos  $i_p$  e  $i_s$  determinan la amplitud de los conos de penumbra y sombra. Los elementos  $x$ ,  $y$ ,  $l_p$  y  $l_s$  su situación con respecto al plano fundamental. Por último  $\mu$  y  $d$  relacionan el plano fundamental con la Tierra en rotación.

De esta forma, y gracias a los elementos besselianos, es sencillo relacionar las coordenadas geográficas de los puntos de la Tierra, con las del sistema fundamental. Esto es muy útil ya que es mucho más sencillo estudiar la geometría del eclipse en el sistema fundamental y luego transformar las coordenadas, que no hacerlo directamente.

#### 4.4.1. Coordenadas del observador en el sistema fundamental

Consideremos un observador cuya posición viene definida por su longitud geográfica  $l$ , su latitud geodésica  $\varphi$  y su altura  $H$  sobre el elipsoide. La situación geodésica está relacionada con la geocéntrica mediante:

$$\begin{aligned}\rho \cos \phi' &= (C + H) \cos \phi, \\ \rho \sin \phi' &= (S + H) \sin \phi,\end{aligned}$$

en las que  $\phi'$  y  $\rho$  son respectivamente la latitud y la distancia geocéntricas, las cantidades  $C$  y  $S$  son

donde  $f$  es el factor de achatamiento terrestre, cuyo valor en el Sistema de Constantes Astronómicas UAI (1976) es  $1/298,257$ ;  $C$  y  $S$  también pueden obtenerse de la Tabla de la página 375 de las *Efemérides Astronómicas*. La altura  $H$  debe expresarse en unidades del radio ecuatorial terrestre.

Las coordenadas en el sistema ecuatorial referido a Greenwich  $(x, y, z)$ , de un punto de coordenadas geográficas  $(l, \phi)$ , sabiendo que la latitud geográfica  $\phi$  implica una latitud geocéntrica

$\varphi$  y una distancia al centro del elipsoide  $\rho$ . Son las siguientes:

$$\begin{aligned}x &= \rho \cos \varphi \cos l \\y &= \rho \cos \varphi \sin l \\z &= \rho \sin \varphi\end{aligned}$$

Las coordenadas del observador en el sistema fundamental  $(\xi, \eta, \zeta)$ , son:

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \varphi \sin(\mu + l) \\ \eta &= \rho [\sin \varphi \cos d - \cos \varphi \sin d \cos(\mu + l)] \\ \zeta &= \rho [\sin \varphi \sin d + \cos \varphi \cos d \cos(\mu + l)]\end{aligned}$$

El horario local  $h$  del eje de la sombra es

$$h = \mu + \lambda. \quad (1)$$

Una vez calculados  $\rho \cos \phi'$ ,  $\rho \sin \phi'$  y  $h$ , las coordenadas del observador en el sistema fundamental son

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \phi' \sin h, \\ \eta &= \rho \sin \phi' \cos d - \rho \cos \phi' \sin d \cos h, \\ \zeta &= \rho \sin \phi' \sin d + \rho \cos \phi' \cos d \cos h.\end{aligned} \quad (2)$$

También son útiles las derivadas de estas expresiones. Utilizando de nuevo los elementos besselianos y sus derivadas, quedan así:

$$\begin{aligned}\xi' &= \mu'(\zeta \cos d - \eta \sin d) \\ \eta' &= -\zeta d' + \mu' \xi \sin d \\ \zeta' &= \eta d' - \mu' \xi \cos d\end{aligned}$$

## 5. Métodos clásicos frente a método utilizado

## **6. Datos utilizados para los eclipses y su lectura**

Datos del JPL

## 7. Simplificaciones utilizadas

- Forma de La Tierra elipsoide de revolución con parámetros definidos por IAU (1976).
- Formas Sol y Luna esferas con radio definido por IAU (1976).
- Se considera que el eclipse está en el horizonte, es decir que se está produciendo al orto o al ocaso, cuando el punto de observación tiene nula su componente  $\zeta$  en coordenadas fundamentales. El error máximo geométrico de considerarlo así es, en el pero de los casos aproximadamente  $16'$  de arco (semiapertura del cono de penumbra). Tampoco se considera la refracción atmosférica, que en el horizonte puede alcanzar los  $32'$  de arco y que es muy difícil de modelizar. Si se quisiese ser más preciso habría que estudiar las condiciones locales del eclipse.
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 
- 

## 8. Iniciación del programa y algoritmos utilizados

**Introducción de direcciones y parámetros** Los datos que se han de introducir son los siguientes:

- Dirección de los archivos que contienen los datos del Sol, Luna y Tiempo Sidéreo.
- Intervalo de tiempo en que se dan los datos.
- Valor de  $\Delta t$  (diferencia entre el tiempo terrestre y el universal).

**Extracción de datos** *Mathematica* extrae los datos de la forma adecuada según el formato en que vengan dados. Además evitará los saltos de escala al pasar de ángulos de  $359^\circ$  a  $0^\circ$  ó de  $-179^\circ$  a  $180^\circ$ .

También se crea una escala de tiempo con inicio en el primer dato. Gracias a ella se conforman listas, cuyos elementos están referidos a esa escala de tiempos y que corresponden a minutos exactos de hora UT, a cinco minutos exactos de hora UT y a horas exactas de hora UT.

**Cálculo de elementos besselianos**

**Cálculo de funciones interpolantes de elementos besselianos y de sus derivadas** Con los valores obtenidos de los elementos besselianos, en los distintos instantes de tiempo en que venían los datos, se crean las funciones interpolantes y sus derivadas gracias a las funciones `Interpolation` y `Derivative` de `Mathematica`, que serán las utilizadas a lo largo de todo el programa para estos efectos.

**Cálculo de la distancias del eje de sombra a la elipse fundamental** Para cada instante y gracias al *elemento*  $d$ , se obtiene el tamaño del eje menor de la elipse fundamental, que se sitúa en el eje  $y$  del plano fundamental. Situada la elipse y conociendo la coordenadas  $(\xi, \eta)$  del corte del eje de sombra con el plano fundamental, se calcula la posición del punto más cercano de la elipse al eje de sombra, como el punto de la elipse cuya perpendicular pasa por el eje. Además, la distancia se toma negativa o positiva según el eje de sombra pase o no por el interior de la elipse fundamental.

Tanto del tamaño del eje menor de la elipse fundamental, como de la distancia del eje a la elipse, se obtienen funciones interpolantes.

**Determinación del tipo de eclipse** Mediante la función `FindMinimum`, se halla el valor mínimo de la función resta de las funciones interpolantes de la distancia del eje a la elipse fundamental y del *elemento*  $l_p$ . Si este valor es negativo, supone que al menos hay eclipse parcial. Además se le da el valor 1 a una variable auxiliar ó 0 en caso contrario.

Se procede de modo análogo sustituyendo la función interpolante del *elemento*  $l_p$  por la de *elemento*  $l_s$ , 0, *-elemento*  $l_s$  y *-elemento*  $l_p$ , para verificar si el eclipse llega a ser no central, central con una sola curva de totalidad, central con una sola curva de parcialidad o central con ambas curvas de parcialidad. También se generan las respectivas variables auxiliares.

A partir de este momento, para todos los cálculo que se pidan al programa se verificará primero que tanga sentido lo que se pide, según el tipo de eclipse, mediante la comprobación que la variable auxiliar que proceda tenga valor 1.

**Obtención de funciones interpolantes de ascensión recta, declinación, distancia y tiempo sidéreo** Se obtienen las funciones interpolantes de dichos datos tanto del Sol como de la Luna.

**Obtención de parámetros para la conjunción en ascensión recta** Mediante la función `FindRoot`, se obtiene el valor que anula la resta de las funciones interpolantes de las ascensiones rectas de Sol y Luna.

Se da la hora de ese instante y para esa hora, la declinación de ambos astros, así como el paralaje horizontal ecuatorial ( $PHE$ ) y el semidiámetro ( $SD$ ) mediante las fórmulas respectivas:

$$PHE = \arcsin\left[\frac{radio_{ecuatorialterrestre}}{distancia_{astro-Tierra}}\right]$$

$$SD = \arcsin\left[\frac{radio_{astro}}{distancia_{astro-Tierra}}\right]$$

**Cálculo de la hora y situación del principio y fin del eclipse parcial** Mediante `FindRoot` se calculan los instantes para los que se anula la resta entre las funciones interpolantes de la distancia del eje a la elipse fundamental y la del *elemento*  $l_p$ . Además, para dichos instantes se calcula el punto de la elipse fundamental más cercano al eje de sombra y a través de sus coordenadas fundamentales se obtienen las geográficas.

Además, gracias a los dos instantes obtenidos, se crean intervalos de tiempo acotados por ellos, y espaciados cada minuto, cinco minutos o una hora.



**Cálculo de la hora y situación del principio y fin del eclipse total/anular** Igual que el apartado anterior pero la función que resta pasa a ser la del *elemento*  $l_s$ .

**Cálculo de la hora y situación del principio y fin de la curva central del eclipse** En este caso se procede de igual forma pero no existe la función a la que se le busca el cero es la de la distancia del eje a la elipse fundamental, sin restarle ninguna otra función.

**Cálculo de la hora y situación de los contactos interiores del cono de sombra** Aquí en vez de restarle una función se le suma la del *elemento*  $l_s$ .

**Cálculo de la hora y situación de los contactos interiores del cono de penumbra** En este apartado la función que se suma es la del *elemento*  $l_p$ .

**Cálculo del punto de máximo eclipse** Mediante la función `FindRoot` aplicada a la derivada de la función que determina la distancia del eje al centro de la Tierra  $\sqrt{elementox^2 + elementoy^2}$ , se obtiene el instante de máxima proximidad.

Para obtener el punto de máximo eclipse se distinguen dos casos según el eje de sombra corte o no el elipsoide en dicho instante. Si no lo hace, se trata de hallar para dicho instante el punto de la elipse fundamental más cercano al eje de sombra. Si lo hace, hay que hallar el punto de corte entre elipsoide y eje de sombra. El punto de corte se calcula resolviendo, en coordenadas fundamentales y mediante la función `NSolve`, el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\xi &= elementox \\ \eta &= elementoy \\ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(1-f)^2} &= 1\end{aligned}$$

donde  $f$  es el factor de aplanamiento terrestre y  $(x, y, z)$  se han de expresar en coordenadas fundamentales  $(\xi, \eta, \zeta)$  mediante la matriz de cambio de coordenadas. Se obtienen dos valores de los cuales sólo interesa evidentemente el de  $\zeta > 0$ , y se transforman a coordenadas geográficas.

**Determinación del tipo de eclipse total/anular y de la magnitud y oscurecimiento** Para los eclipses parciales obviamente no tiene sentido determinar si es total o anular. El procedimiento es el siguiente, para los puntos de principio y fin del eclipse total/anular, así como para el de máximo de eclipse, se calcula el valor del radio del cono de sombra siendo este valor  $l_s - \zeta i_s$ . Si en todos ellos es mayor que cero, el eclipse es anular, si es menor que cero, es total, y si cambia de signo es total-anular.

Sean  $(\xi, \eta, \zeta)$  las coordenadas en el sistema fundamental de un punto cualquiera, se definen los siguientes parámetros para dicho punto en cada instante:

- $L_p = l_p - \zeta i_p$ , al valor del radio del cono penumbra
- $L_s = l_s - \zeta i_s$ , al valor del radio del cono de sombra
- $\Delta = \sqrt{(elementox - \xi)^2 + (elementoy - \eta)^2}$ , a la distancia del punto al eje de sombra

Calculando dichos parámetros para el punto de máximo de eclipse, la magnitud del eclipse viene dada por la siguiente fórmula:

$$M = \frac{L_p - \Theta}{L_p - L_s}$$

donde  $\Theta = L_s$  para los eclipses anulares y  $\Theta = \Delta$  para los eclipses parciales y totales.

En cuanto al oscurecimiento ( $O$ ), si el eclipse es total en el punto de máximo de eclipse, toma el valor del 100 %, si es anular toma el valor de  $O = 100M^2$  %, y si es parcial toma la siguiente expresión

$$O = \frac{100}{\pi} [\beta + (\pi - \beta - \gamma)s^2 - s \sin \gamma] \%$$

$$\text{siendo } s = \frac{L_p - L_s}{L_p + L_s}, \cos \beta = \frac{L_p L_s + \Delta^2}{\Delta(L_p + L_s)} \text{ y } \cos \gamma = \frac{L_p^2 + L_s^2 - 2\Delta^2}{L_p^2 - L_s^2}$$

**Obtención de la Curva central del Eclipse y de la duración de la totalidad en sus puntos** Se calcula para distintos instantes, el punto de corte del eje de sombra con el elipsoide. Para ello se procede de la misma forma que para obtener el punto de máximo de eclipse cuando existía corte entre el eje de sombra y el elipsoide terrestre. De nuevo sólo interesan el valor para el que  $seta > 0$ .

Una vez obtenidos los puntos de la curva central, para un intervalo de tiempo suficiente anterior y posterior, se calcula la distancia del punto al borde del cono de sombra con signo positivo si se encuentra fuera de él y negativo si se encuentra en el interior. Se crea una función interpolante con estos valores, función que tendrá dos ceros que se obtendrán mediante **FindRoot** y cuya diferencia es la duración de la totalidad.

**Cálculo del eclipse central al medio día** De los puntos que componen la curva central se obtienen los distintos valores de su coordenada  $\xi$ . Si esta cambia de signo a lo largo de la curva, se obtiene una función interpolante con dicho valor y mediante **FindRoot** se halla el instante para el que se anula  $\xi$ . Para dicho instante se calcula de nuevo el punto de corte del eje con el elipsoide y dicho punto es el del eclipse central al medio día.

**Obtención de las curvas de contacto en el horizonte** Las conforman, para cada instante, los puntos de la elipse fundamental, para los cuales la distancia al eje de sombra coincide con el radio del cono de penumbra en el plano fundamental. Para ello se resuelve mediante la función **NSolve** el siguiente sistema de ecuaciones, del que se desechan las soluciones no reales.

$$\begin{aligned} \zeta &= 0 \\ \frac{\eta^2}{r_{semieje}^2} + \xi^2 &= 1 \\ \Delta &= elementol_p \end{aligned}$$

siendo  $r_{semieje}$  el tamaño del semieje menor de la elipse fundamental para cada instante.

**Obtención de las curvas de máximo de eclipse en el horizonte** Las conforman, para cada instante, los puntos de la elipse fundamental que se encuentran en dicho instante en su momento más cercano al eje de sombra. Para ellos pues, la función  $\Delta$  tiene un mínimo. Para obtenerlos se resuelve mediante la función **NSolve** el siguiente sistema de ecuaciones, del que se mantienen exclusivamente los puntos reales y que además  $l_p - \Delta \geq 0$ , ya que si no no verían el eclipse en ese instante.

$$\begin{aligned} \zeta &= 0 \\ \frac{\eta^2}{r_{semieje}^2} + \xi^2 &= 1 \\ \frac{d(\Delta)}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

**Obtención de las curvas límite Norte y Sur** Se distinguen dos casos completamente distintos. Por un lado los puntos, que estando sobre el horizonte, sólo alcanzan a ver la tangencia de los discos del Sol y Luna, ya sean tangencias interiores o exteriores según sean curvas límite de sombra o penumbra. Por otro, los puntos que estando inmersos en el cono de sombra/penumbra, tienen el eclipse por debajo del horizonte y para los que el máximo valor que alcanza  $\zeta$  durante este periodo es 0.

Los primeros son puntos a la vez del elipsoide y del cono (sombra o penumbra según el caso, para los cuales además la función  $L - \Delta$  tiene un máximo, ya que ésta toma siempre valor positivo excepto en ese preciso instante en que se anula. Por facilidad computacional y por ser equivalente en este caso, se maximiza la función  $L^2 - \Delta^2$ . Se resuelve, como en casos anteriores mediante la función `NSolve`, el siguiente sistema de ecuaciones del que se eliminan las soluciones imaginarias y las que dan un valor de  $\zeta < 0$ .

$$\begin{aligned}\frac{d(L^2 - \Delta^2)}{dt} &= 0 \\ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(1-f)^2} &= 1\end{aligned}$$

recordando de nuevo que las coordenadas  $(x, y, z)$  se han de expresar en coordenadas fundamentales  $(\xi, \eta, \zeta)$  mediante la matriz de cambio de coordenadas.

Para el segundo caso se calculan los puntos que maximizan la función  $\zeta$  y que la anulan. Se mantienen sólo las soluciones reales y para las que  $L - \Delta > 0$ . Son la resolución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\zeta &= 0 \\ \frac{\eta^2}{r_{semieje}^2} + \xi^2 &= 1 \\ \frac{d(\zeta)}{dt} &= 0\end{aligned}$$

**Cálculo de los puntos de coincidencia de curva de máximo en el horizonte con las curvas de máximo Norte/Sur sombra/penumbra** En este caso las curvas de máximo Norte y Sur son las del primer tipo mencionado en el apartado anterior. El modo de proceder es utilizar los puntos obtenidos en las curvas de máximo en el horizonte e ir comprobando su distancia (con signo) al borde del cono de penumbra/sombra para los distintos instantes. Con estos valores se hace una función interpolante, cuyos ceros mediante `FindRoot` serán los instantes de coincidencia de ambas curvas. Para estos instantes se obtienen los puntos de la curva de máximo en el horizonte que son los buscados.

**Obtención de las curvas instantáneas del eclipse** Son los puntos, para cada instante, de corte del cono de penumbra con el elipsoide terrestre. Lo que se hace es ir calculando puntos en distintos planos de  $\zeta = cte$ , para valores de  $0 < \zeta < 1$ . Son los puntos de corte de la circunferencia y la elipse, que forman el cono y el elipsoide respectivamente en dicho plano. Se mantienen sólo las soluciones reales. Para obtenerlos se resuelve, utilizando de nuevo la función `NSolve`, el siguiente sistema de ecuaciones del que se desechan las soluciones no reales.

$$\begin{aligned}\zeta &= cte \\ \Delta &= L_p \\ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{(1-f)^2} &= 1\end{aligned}$$

## 9. Dibujo en Planisferio

Para la representación de los puntos y curvas en la superficie terrestre se ha utilizado la representación estereográfica tangente. Recordemos que es una representación:

- *azimutal*: Todos los puntos se proyectan desde uno fijo.
- *estereográfica*: El foco de proyección se encuentra en una esfera.
- *tangente*: El plano de representación es el punto de la esfera opuesto al de tangencia.

Este tipo de representación cuenta con la propiedad de la isogonalidad, es decir mantiene los ángulos. Las distancias sin embargo aumentan conforme se aleja del punto de tangencia.

Como punto de tangencia se escoge el punto de máximo de eclipse y unos parámetros que definen la cantidad de superficie que se representa. Lógicamente estos parámetros se pueden variar para encuadrar mejor el eclipse en el dibujo.

Los datos que se pasan son la latitud y longitud de los puntos en grados sexagesimales y décimas de grado. Los puntos de las curvas obtenidos en los algoritmos hay distribuirlos en cada curva cuando son dos, y ordenarlos respectivamente en su curva. Para ello se utilizan criterios basados en la proximidad entre puntos (minimizar distancias) y en la continuidad (minimizar ángulo). Con los puntos ya ordenados y diferenciados en sus respectivas curvas, se obtiene la curva en sí mediante la función **BSpline**.

Una vez obtenidas todas las curvas, éstas se muestran, junto con la retícula de paralelos y meridianos y los puntos de los continentes (ambos de una librería), en pantalla según la representación ya descrita.

## 10. Conclusiones

Utilidad para el ROA

Cálculo directo frente a iteraciones

Localización de puntos extremos para los mapas

Curva nueva

## A. Funciones auxiliares utilizadas

Conjunto de funciones creadas en **Mathematica** para la ejecución de todos los algoritmos necesarios.

### Formatos de horas, grados y radianes

- **hms2h**: Paso de horas, minutos y segundos a horas.
- **h2hms**: Paso de horas a horas, minutos y segundos.
- **h2hm**: Paso de horas a horas y minutos.
- **gms2rad**: Paso de grados, minutos y segundos a radianes.
- **rad2gms**: Paso de radianes a grados, minutos y segundos.
- **grad2gm**: Paso de grados a grados y minutos.
- **hms2rad**: Paso de horas, minutos y segundos a radianes.

- **rad2hms**: Paso de radianes a horas, minutos y segundos.
- **hms2gms**: Paso de horas, minutos y segundos a grados, minutos y segundos.
- **gms2hms**: Paso de grados, minutos y segundos a horas, minutos y segundos.
- **gm2grad**: Paso de grados y minutos a grados.
- **h2ms**: Paso de horas a minutos y segundos.
- **h2s**: Paso de horas a segundos.

## Fechas y tiempos

- **diajuliano**: A partir del día, mes y año se obtiene el día juliano.
- **tsidmedloc**: Da el tiempo sidéreo medio local, a partir del día, mes, año, hora UT y longitud.
- **cormerefe**, **coramerefe**: Corrección en grados de longitud debido a la diferencia entre el Tiempo Terrestre (en el que figuran los datos) y el Tiempo Universal Coordinado (por el que nos regimos).

## Transformación de coordenadas

- **ecu2cart**: Paso de coordenadas polares a cartesianas.
- **cart2ecu**: Paso de coordenadas cartesianas a polares.
- **Rx**: Rotación en torno al eje  $x$ .
- **Ry**: Rotación en torno al eje  $y$ .
- **Rz**: Rotación en torno al eje  $z$ .
- **Matcambcoor**: Matriz de cambio de coordenadas del sistema fundamental al ecuatorial referido a Greenwich dados los elementos besselianos  $d$  y  $\mu$ .
- **matcambcoor**: Matriz de cambio de coordenadas del sistema fundamental al ecuatorial referido a Greenwich para un instante determinado.
- **cambcoorcart**: Paso de coordenadas cartesianas del sistema fundamental al ecuatorial referido a Greenwich para un instante determinado.
- **geodes2geocen**: Paso latitud geodésica y altura a latitud geocéntrica y distancia radial.
- **latgeocen2latgeode**: Paso de latitud geocéntrica a geodésica.
- **ecu2ekli**: Paso de coordenadas polares del sistema ecuatorial al eclíptico.
- **ekli2ecu**: Paso de coordenadas polares del sistema eclíptico al ecuatorial.
- **correcluna**: Corrección de coordenadas de la Luna por diferencia entre centro de masas y centro geométrico.

## Funciones geométricas del elipsoide

- **radeliphor**: Valor del semieje menor de la elipse fundamental (corte de plano fundamental con elipsoide terrestre) para cada valor del elemento  $d$ .
- **disEjeElip**: Distancia con signo (positiva exterior, negativa interior) de un punto a una elipse.

### Coordenadas en cada instante del punto de la elipse fundamental más próximo al eje de sombra

- $\xi\eta fun$ : Coordenadas fundamentales de dicho punto.
- $\xi\eta fun2xyz$ : Coordenadas cartesianas de ese punto en el sistema ecuatorial referido a Greenwich.
- $\xi\eta fun2ecu$ : Coordenadas polares de dicho punto en el sistema ecuatorial referido a Greenwich.
- $\xi\eta fun2lonlat$ : Coordenadas geográficas del referido punto.

### Coordenadas en sistema fundamental en cada instante, de cualquier punto del elipsoide

- $lonlatt2xyz$ ,  $lonlatth2xyz$ : Coordenadas cartesianas en el sistema ecuatorial referido a Greenwich, de cualquier punto terrestre (sin o con elevación respecto a la superficie) para un instante determinado.
- $lonlatt2\xi\eta\zeta$ ,  $lonlatth2\xi\eta\zeta$ : Idem pero ya en coordenadas fundamentales.

### Funciones de corte del eje de sombra con el elipsoide y duración de la totalidad en el eje

- $corteejeelip2\xi\eta\zeta$ : Coordenadas en el sistema fundamental del punto de corte del eje de sombra con el elipsoide, dados los elementos besselianos.
- $corteejeelip2xyz$ : Coordenadas en el sistema ecuatorial referido a Greenwich del punto de corte.
- $corteejeelip2lonlat$ : Coordenadas geográficas del punto de corte.
- $corteejeelip$ : Coordenadas geográficas del punto de corte para un instante determinado.

### Funciones de duración de la totalidad en el eje

- $deltamenosL$ : Da la distancia de un punto al borde del cono de sombra para un instante determinado.
- $deltamenosLt$ : Igual que la anterior pero los distintos valores para un intervalo de tiempo en torno al instante actual.
- $duraciontoteje$ : Da el tiempo (en minutos y segundos) de totalidad de un punto del eje.
- $puntoejedur$ : Igual que el anterior pero devolviendo además la hora y la posición.

### Funciones corte del cono de penumbra con la elipse fundamental

- $cortehor$ : Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de corte del cono de penumbra con la elipse fundamental dados los elementos besselianos.
- $cortehor2xyz$ : Idem pero en el sistema ecuatorial referido a Greenwich.
- $cortehor2lonlat$ : Idem pero en coordenadas geográficas.
- $cortehor2lonlatt$ : Coordenadas geográficas de los puntos de corte para un instante determinado.

### Funciones de corte del cono de penumbra con el elipsoide

- *corteconopelip2ξηζ*: Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de corte del cono de penumbra con elipsoide, dados los elementos besselianos.
- *corteconopelip2xyz*: Idem pero en el sistema ecuatorial referido a Greenwich.
- *corteconopelip2lonlat*: Idem pero en coordenadas geográficas.
- *corteconopelip*: Coordenadas geográficas de puntos de corte para un instante determinado.

### Funciones curvas límite Norte y Sur por tangente cono

- *elxelylpipdμ2ζQ*: Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de la curva límite dados los elementos besselianos.
- *elxelylpipdμ2xyz*: Idem pero en el sistema ecuatorial referido a Greenwich.
- *elxelylpipdμ2lonlat*: Idem pero en coordenadas geográficas.
- *puntoslimitep*: Coordenadas geográficas de los puntos límite del cono de penumbra para un instante determinado.
- *puntoslimites*: Coordenadas geográficas de los puntos límite del cono de sombra para un instante determinado.

### Funciones curvas límite Norte y Sur por estar el eclipse bajo el horizonte

- *climite2ξηζ*: Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de la curva límite dados los elementos besselianos.
- *climite2xyz*: Idem pero en el sistema ecuatorial referido a Greenwich.
- *climite2lonlat*: Idem pero en coordenadas geográficas.
- *climite*: Coordenadas geográficas de los puntos límite para un instante determinado.

### Funciones curvas de máximo de eclipse al orto/ocaso

- *maxhor2ξηζ*: Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de máximo en el horizonte dados los elementos besselianos.
- *maxhor2xyz*: Idem pero en el sistema ecuatorial referido a Greenwich.
- *maxhor2lonlat*: Idem pero en coordenadas geográficas.
- *maxhor*: Coordenadas geográficas de los puntos de máximo en el horizonte para un instante determinado.

### Funciones para hallar los puntos de corte de las curvas de máximo en el horizonte con las límites Norte y Sur de conos de penumbra y de sombra

- *maxhorbis2ξηζ*: Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de elipse fundamental de máxima cercanía al eje de sombra, estén dentro o no del cono. Los parámetros son los elementos besselianos.
- *dismaxcono*: Devuelve la distancia de los puntos anteriores al borde del cono siendo positiva si están fuera del cono y negativa si está dentro.

- **dismaxconosign**: Devuelve la distancia (con signo) del punto de los calculados por *maxhorbis2ξηζ* que está más cerca del borde del cono.
- **maxhorbisselecξηζ**: Devuelve las coordenadas fundamentales del punto, de los hallados por *maxhorbis2ξηζ* que se encuentra más cerca del borde del cono.
- **maxhorbis2xyz**: Idem pero en coordenadas ecuatoriales referidas a Greenwich.
- **maxhorbis2xyz**: Idem pero en coordenadas geográficas.
- **maxhorbisp**: Coordenadas geográficas del punto de la elipse fundamental cuya distancia al eje de sombra alcanza un mínimo y que se encuentra más cerca del borde del cono de penumbra, para cada instante.
- **maxhorbiss**: Igual que el anterior pero para el cono de sombra.

### Funciones para ordenado de puntos de curvas

- **NormsinSalto**: Calcula distancia entre dos puntos dados en coordenadas geográficas.
- **ordenaLobulo**: Ordena los puntos de inicio/fin eclipse del eclipse en el horizonte, ya sean uno o dos lóbulos.
- **ordenaCurvCen**: Or
- **ordenaCurva1Lim**: Ordena puntos límite Norte/Sur cuando sólo hay una curva de totalidad o parcialidad.
- **ordenaCurva2Lim**: Idem que la anterior pero cuando existen las dos curvas.
- **ordenaCurvamaxhor**: Ordena los puntos de máximo de eclipse en el horizonte.
- **ordenaCortehoras**: Ordena los puntos de los cortes horarios del cono de penumbra al elipsoide.
- **incluyePunto**: Incluye puntos intermedios a una curva.

### Funciones para dibujo de continentes y retícula

- **ejes**
- **coor**
- **par**
- **mer**
- **reticula**
- **continentes**

## B. Glosario

términos del glosario



## Referencias

- [1] W. M. SMART, (1977): Textbook on Spherical Astronomy.
- [2] F. JAVIER GIL CHICA (1996): Teoría de eclipses, ocultaciones y tránsitos.
- [3] JEAN MEEUS, (1989): Elements of Solar Eclipses 1951-2200.
- [4] ORUS, J.J., CATALA, M.A., (1987)Apuntes de Astronomía Tomo I.
- [5] F. ESPENAK, (1997): Total Solar Eclipse of 1999 August 11. ed. NASA (RP1398).
- [6] JUAN CARLOS C., MIQUEL S.-R.(2003): Unidad Didáctica Eclipses.  
<http://www.fecyt.es/semanadelaciencia2003/eclipse/pdf/UDE.pdf>