

# **Cálculo y representación de eclipses de Sol**

Federico Baeza Richer

Máster en Modelización Matemática, Estadística y Computación (2009–2010).



# Índice general

1.	Introducción . . . . .	7
2.	Generalidades sobre eclipses . . . . .	8
3.	Tipos de eclipses de Sol . . . . .	8
4.	Parámetros y curvas características de los eclipses solares . . . . .	11
4.1.	Conjunción en ascensión recta . . . . .	11
4.2.	Circunstancias generales del eclipse . . . . .	11
4.3.	Mapa del eclipse . . . . .	12
5.	Sistema fundamental de coordenadas y elementos besselianos . . . . .	15
6.	Restricciones del modelo . . . . .	18
7.	Datos iniciales . . . . .	18
8.	Implementación . . . . .	19
8.1.	Cálculo de elementos besselianos . . . . .	19
8.2.	Cálculo de funciones interpolantes de elementos besselianos y de sus derivadas . . . . .	20
8.3.	Cálculo de la distancia $q$ del eje de la sombra a la elipse fundamental . . . . .	20
8.4.	Determinación del tipo de eclipse . . . . .	20
8.5.	Obtención de parámetros para la conjunción en ascensión recta . . . . .	21
8.6.	Cálculo de las circunstancias generales . . . . .	21
8.7.	Obtención de la curva central del eclipse y de la duración de la totalidad en sus puntos . . . . .	23
8.8.	Cálculo del eclipse central al mediodía local . . . . .	23
8.9.	Obtención de las curvas de contacto en el horizonte . . . . .	23
8.10.	Obtención de las curvas de máximo de eclipse en el horizonte . . . . .	24
8.11.	Obtención de las curvas límite Norte y Sur . . . . .	24
8.12.	Cálculo de los puntos de coincidencia de las curvas de máximo en el horizonte con las curvas límite Norte/Sur . . . . .	26
8.13.	Obtención de las curvas de simultaneidad de principio y fin del eclipse . . . . .	26
9.	Dibujo del Mapa . . . . .	26

10. Conclusiones . . . . .	27
A. Funciones auxiliares utilizadas . . . . .	32
B. Glosario . . . . .	37
Bibliografía . . . . .	41

# Índice de figuras

1.	Tipos de eclipses de Sol . . . . .	9
2.	Conos de sombra y penumbra respecto a la Tierra, según el tipo de eclipse . . . . .	10
3.	Ejemplo de mapa de eclipse anular . . . . .	13
4.	Ejemplo de mapa de eclipse parcial . . . . .	14
5.	Sistema fundamental de coordenadas . . . . .	16
6.	Descripción nueva curva límite . . . . .	25
7.	Representación eclipse central con las dos curvas de parcialidad . . . . .	28
8.	Representación eclipse central con una sola curva de parcialidad . . . . .	29
9.	Representación eclipse central con una sola curva de totalidad . . . . .	30
10.	Representación eclipse parcial . . . . .	31



## 1. Introducción

Se presenta el trabajo fin de máster titulado “Cálculo y representación de eclipses de Sol”, correspondiente al Máster en Modelización Matemática, Estadística y Computación (curso 2009-2010). El trabajo consiste en el cálculo de todos los parámetros y elementos característicos de un eclipse solar, y de la posterior representación del mapa correspondiente, con todas las curvas significativas.

El punto de partida de este trabajo es el conocimiento de la existencia de un eclipse en una fecha determinada. Queda para un análisis posterior la determinación de los días de cada año en que esto ocurrirá.

Desde tiempos remotos el hombre se ha sentido atraído por los fenómenos astronómicos, siendo el del eclipse de Sol el que probablemente más impresión, asombro, supersticiones, etc., ha generado a lo largo de la historia. La observación de este fenómeno va más allá de la simple contemplación, ya que las conclusiones obtenidas de su observación, han servido a veces para descubrir, y otras para corroborar, conocimientos claves en la comprensión del sistema solar. Es por ello que a lo largo de la historia y conforme los conocimientos de las civilizaciones avanzaban, se ha intentado conocer, cada vez con más precisión, el cuándo, en qué circunstancias y desde dónde, se podían observar estos acontecimientos.

Desde finales del siglo XIX, ya se tenían conocimientos y herramientas suficientes para predecir, con bastante precisión, la ocurrencia de eclipses. Sin embargo los métodos tradicionales no son en absoluto sencillos. Se han utilizado métodos analíticos que resuelven parte del problema; estos métodos se basan en una serie de transformaciones de variables, que, además de introducir simplificaciones que implican pérdida de precisión, hacen perder la noción geométrica de qué se está calculando. Pero los procedimientos numéricos han sido desde siempre los empleados en el cálculo de eclipses. Basados en algoritmos de iteración, permiten calcular los distintos elementos de un eclipse partiendo de un dato aproximado, que se refina en pocas iteraciones; como datos iniciales solían tomarse una hora aproximada, calculada además para una Tierra esférica, hora que se hacía converger a la real, introduciendo en algunos casos el achatamiento terrestre. La aparición de las computadoras automatizó completamente estos procedimientos, desarrollándose inmediatamente programas (sobre todo en FORTRAN) que realizaban esta tarea.

La aparición relativamente reciente de los procesadores simbólicos de gran capacidad (como el Mathematica aquí utilizado), invita a plantear y resolver las ecuaciones que determinan los parámetros característicos de los eclipses de una forma mucho más sencilla y clara que hasta ahora. Si bien la precisión obtenida no mejora las que ya se tienen, y las propias funciones internas llevan un mecanismo parecido en cuanto a iteraciones etc, a los programas ya existentes, el hecho de poder plantear la resolución de los distintos problemas mediante sencillas y elegantes fórmulas, supone una novedoso enfoque del problema.

El Real Instituto y Observatorio de la Armada (ROA) publica desde 1791 las *Efemérides Astronómicas*, siendo esta publicación el cuarto de los almanaques de carácter nacional que aparecieron en el mundo; desde entonces, las efemérides se han publicado anualmente sin interrupción, con las técnicas disponibles en cada momento, incluso durante los períodos más oscuros de la historia de España. Aunque, como hemos dicho, los cálculos realizados con estos programas no van a aportar mayor precisión a los datos que actualmente se publican, sí servirán para cotejar los resultados obtenidos mediante los medios actuales, para automatizar más la representación de los mapas de eclipses, y, por último, para auxiliar a la docencia, facilitando la explicación sencilla y clara de este fenómeno.

Por último, durante la realización del trabajo, nos hemos encontrado con algunos eclipses que presentan unas peculiaridades especiales en su desarrollo en las proximidades de los polos terrestres. Tales peculiaridades no las hemos encontrado explicadas en la bibliografía consultada. Si bien la relevancia de este hecho es muy escasa desde el punto de vista práctico, consideramos que sí es importante conceptualmente para la total comprensión del fenómeno en estas zonas. La interpretación correcta de estos casos la presentamos en la sección 8.11.

En el apéndice B se ha incluido un glosario de los términos astronómicos utilizados en este trabajo, al que acudir en caso necesario.

Este trabajo ha sido codirigido por los doctores Teodoro López Moratalla (Jefe de la Sección de Efemérides del ROA) y Alberto Abad Medina (Profesor de Astrodinámica de la Universidad de Zaragoza).

## 2. Generalidades sobre eclipses

El término eclipse se aplica indistintamente a dos fenómenos provocados por las posiciones relativas de tres astros: el Sol (emisor luminoso), la Tierra y la Luna (cuerpos opacos que interceptan la luz solar).

Un eclipse de Sol se produce cuando este astro es ocultado, total o parcialmente, por el disco de la Luna, que se interpone entre la Tierra y el Sol. Un eclipse de Sol tiene lugar siempre en Luna Nueva, siendo ésta una condición necesaria pero no suficiente para que se produzca el fenómeno.

La condición de Luna Nueva sería suficiente si las órbitas del Sol y de la Luna fueran coplanares. Pero esto no ocurre al ser su inclinación relativa próxima a los  $5^\circ$ , por lo tanto la Luna se encuentra en la mayoría de las ocasiones por debajo o por encima de la eclíptica (plano del movimiento Tierra-Sol).

Para que se produzca un eclipse de Sol, la Luna debe hallarse en el plano de la eclíptica, o muy cerca de él, y en fase de Luna Nueva. Es decir la Luna debe encontrarse en las proximidades de un nodo.

Los eclipses de Luna están determinados por el paso de nuestro satélite por la sombra de la Tierra y siempre suceden en fase de Luna Llena, y al igual que en los eclipses solares, cuando la Luna se encuentra en el nodo o en sus proximidades.

Mientras que los eclipses de Luna son visibles para todos los puntos de la superficie terrestre que tengan en ese momento a la Luna por encima del horizonte, los de Sol sólo serán visibles para algunos puntos de la Tierra.

## 3. Tipos de eclipses de Sol

Se llama *cono de sombra* al cono formado por las tangentes exteriores del Sol y la Luna y *cono de penumbra* al formado por las tangentes interiores. El eje común a ambos conos, materializado por la línea que une los centros del Sol y de la Luna, se denomina *eje de la sombra* (ver figura 1).

Un eclipse de Sol se produce cuando el cono de penumbra alcanza algún punto de la superficie terrestre. Según la posición de la Tierra respecto a los conos de sombra y de penumbra, podemos dividir los eclipses de Sol en parciales, totales y anulares.

Eclipses Parciales son aquellos en los que el cono de sombra no corta en ningún momento la

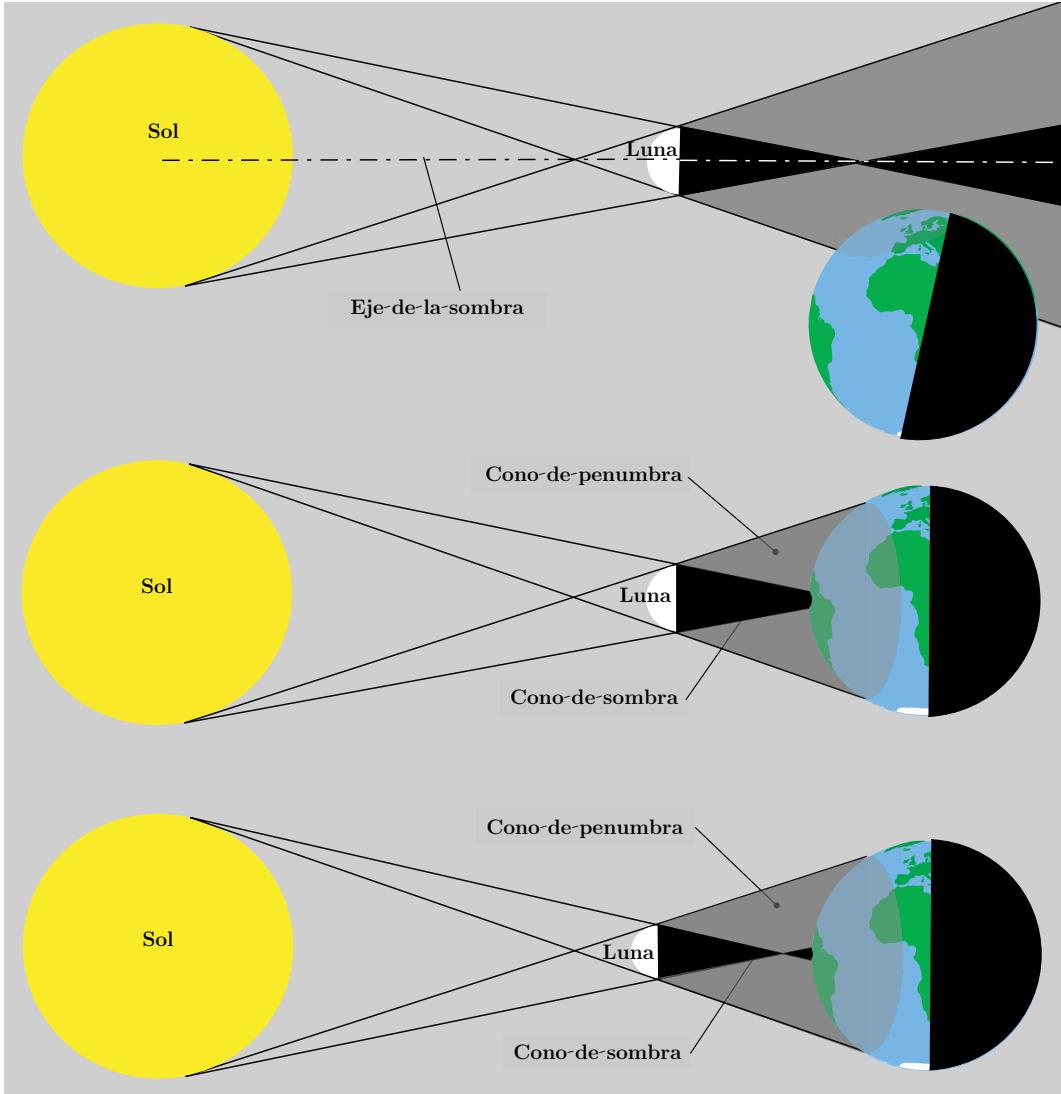


Figura 1: Tipos de eclipses de Sol: parcial (arriba), total (centro) y anular (abajo). Las dimensiones se han deformado para mayor claridad.

superficie terrestre. En estos eclipses el disco del Sol sólo se oculta parcialmente.

Si el cono de sombra alcanza algún punto de la superficie terrestre, se producirá un eclipse total o anular. La diferencia entre ambos tipos de eclipse se debe a que el diámetro aparente de la Luna puede ser mayor o menor que el del Sol, en función de las distancias a la Tierra de estos astros.

Cuando el diámetro de la Luna es mayor que el del Sol, el disco de éste quedará totalmente oculto para aquellos puntos de la Tierra inmersos en el cono de sombra, que observarán un eclipse total. Cuando el diámetro es menor, desde los puntos de la superficie terrestre dentro del cono de sombra, será visible un anillo del disco solar; de ahí el nombre de eclipse anular. En ocasiones ocurre que un mismo eclipse se observa como total en algunos puntos de la Tierra y como anular en otros; entonces el eclipse se denomina total-anular o mixto. El mecanismo de los tres tipos de eclipses se ha esquematizado en la figura 1. Los eclipses totales y anulares pueden ser centrales y no centrales, dependiendo de si el eje de sombra corta o no la superficie terrestre en algún momento. Además, en los eclipses centrales puede ocurrir que en algún instante del eclipse, los

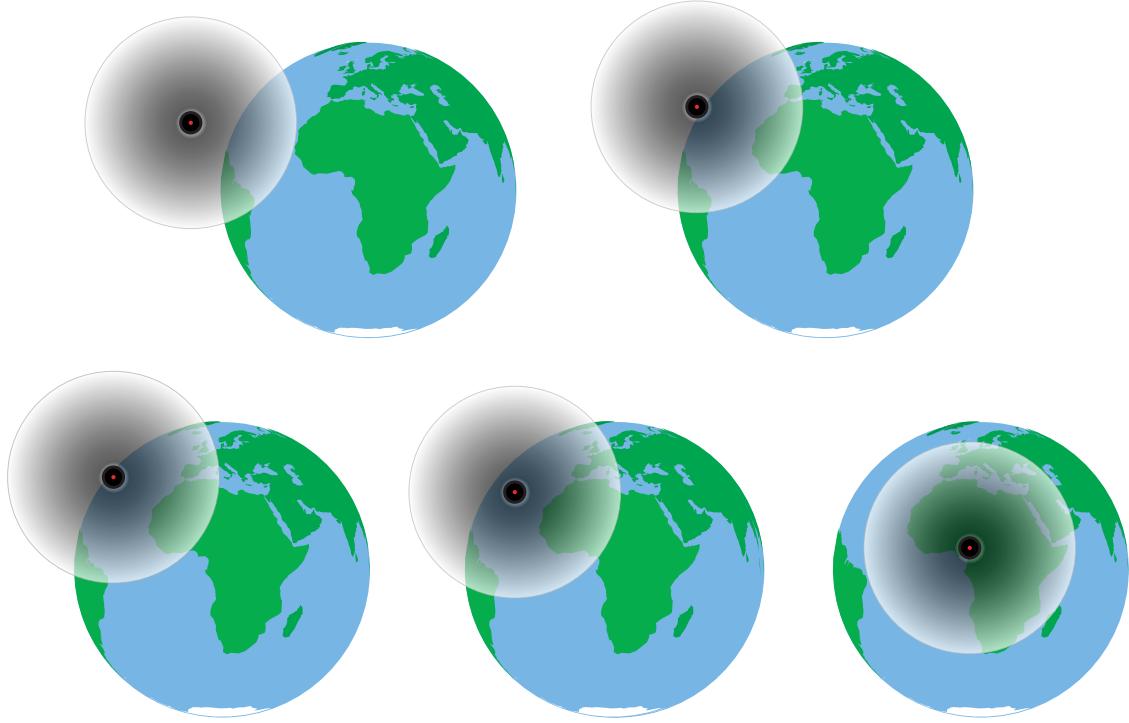


Figura 2: Posiciones de los conos de sombra y de penumbra respecto a la Tierra, en el momento de máximo acercamiento del eje de la sombra al centro de la Tierra, en un eclipse: parcial (arriba, izquierda), no central (arriba, derecha), central con una curva de totalidad (abajo, izquierda), central con una curva de parcialidad (abajo, centro) y central con dos curvas de parcialidad (abajo, derecha).

dos conos queden totalmente inmersos en la superficie de la Tierra, que sólo lo haga el cono de sombra o que no lo haga ninguno de ellos.

En resumen, en este trabajo distinguiremos los siguientes tipos de eclipses:

- Parcial
- Total, anular, total-anular:
  - No central
  - Central:
    - Central con una sola curva de totalidad
    - Central con una sola curva de parcialidad
    - Central con las dos curvas de parcialidad

La subdivisión de los eclipses centrales que hemos realizado no es habitual. Sin ser un extremo de especial relevancia, en el ámbito de este trabajo es importante para la sistematización de los cálculos que se desarrollan en los siguientes apartados. Además, está justificada por las trazas que los conos de sombra y de penumbra dejarán sobre la superficie terrestre en cada caso. Los distintos tipos de eclipse se ilustran en la figura 2.

## 4. Parámetros y curvas características de los eclipses solares

Como ya se ha comentado, los eclipses de Sol son visibles únicamente desde determinadas zonas de la superficie terrestre, variando su desarrollo de una localización a otra. Por tanto, es necesario dar la información suficiente para que los usuarios puedan conocer, no sólo la fecha y el tipo de eclipse, sino en qué lugares y en qué condiciones se desarrollará éste. Tradicionalmente, esta información consta de lo siguiente:

- Datos del Sol y la Luna en el instante de la conjunción en ascensión recta.
- Circunstancias generales del eclipse.
- Mapa de visibilidad.
- Elementos besselianos.

### 4.1. Conjunción en ascensión recta

Los eclipses de Sol ocurren aproximadamente cuando el Sol y la Luna tienen la misma ascensión recta. Esta hora se toma como referencia para facilitar al usuario los datos que necesita para calcular cómo se desarrollará el eclipse en una localización concreta, es decir, las circunstancias locales del eclipse. Aunque actualmente el cálculo de las circunstancias locales se realiza mediante los elementos besselianos, las publicaciones especializadas siguen incluyendo los siguientes datos en el instante de la conjunción en ascensión recta:

- Hora de la conjunción.
- Declinación y ascensión recta de Sol y Luna.
- Movimiento horario en declinación y en ascensión recta de Sol y Luna.
- Paralaje horizontal ecuatorial de Sol y Luna.
- Semidiámetro verdadero de Sol y Luna.

### 4.2. Circunstancias generales del eclipse

Están constituidas por los datos siguientes, aunque no todos suelen facilitarse a los usuarios, ni todos ocurren en todos los eclipses.

- *Principio y fin del eclipse.* El eclipse comienza cuando el cono de penumbra es tangente a la Tierra. Además de la hora en que esto ocurre, también se facilitan las coordenadas geográficas del punto de tangencia: este punto será el primero de la Tierra desde el que los límbos del Sol y la Luna son tangentes exteriores. Análogamente para el fin del eclipse.

Estos puntos existen en todos los eclipses.

- *Principio y fin del eclipse total/anular.* Análogo al anterior, pero con el cono de sombra en lugar del de penumbra. Los puntos correspondientes de la Tierra son el primero y el último que ven los límbos del Sol y la Luna tangentes interiores.

Estos puntos sólo existen en los eclipses *totales, anulares y totales-anulares*.

- *Principio y fin de la curva central del eclipse.* Son los dos puntos de tangencia del eje de la sombra con el elipsoide terrestre.

Estos puntos sólo existen en los eclipses *centrales*.

- *Contactos interiores del cono de sombra.* Son los puntos de tangencia interior del cono de sombra con el elipsoide. Corresponden al primer y último momento en que el corte del cono de sombra con el elipsoide dibuja una curva cerrada.

Estos puntos sólo existen en los eclipses *centrales con una o dos curvas de parcialidad*, pero no en los *centrales con una sola curva de totalidad*.

- *Contactos interiores del cono de penumbra.* Análogo al anterior, pero con el cono de penumbra en lugar del de sombra.

Estos puntos sólo existen en los eclipses *centrales con las dos curvas de parcialidad*.

- *Máximo del eclipse.* Es el instante de máxima proximidad del eje de la sombra al centro de la Tierra. Para un eclipse central el punto de máximo es el de corte del eje con la Tierra en ese instante. Para un eclipse no central es el punto de la Tierra más cercano al eje en ese instante.

- *Eclipse central al mediodía local.* Punto de la curva central para el que el *máximo del eclipse local* (mínima distancia angular aparente entre los centros de los discos solar y lunar) se produce al paso por el meridiano y por ello a mayor altura sobre el horizonte.

Estos puntos suelen existir para la mayoría de los eclipses *centrales*.

- *Coincidencia de las curvas de máximo en el horizonte con las curvas límite Norte/Sur sombra/penumbra.* Son los puntos pertenecientes a la vez a las curvas mencionadas, cuyas características se describen en el apartado siguiente.

- *Magnitud del eclipse.* Se mide en el máximo del eclipse. En los parciales y anulares es la fracción del diámetro solar oculto por la Luna. Para los eclipses totales es la distancia entre el borde del Sol más próximo al centro de la Luna y el borde de la Luna más próximo al centro del Sol, dividido por el diámetro solar.

### 4.3. Mapa del eclipse

Las distintas fases del desarrollo de un eclipse se suelen representar en mapas, en los que se delimitan las zonas donde el eclipse es visible, y cuya interpretación permite conocer cómo se verá desde cualquier punto de la Tierra. Los puntos y curvas características que habitualmente se dibujan son los que se describen a continuación. En las figuras 3 y 4 se presentan ejemplos de los mapas de un eclipse central y uno parcial, respectivamente.

**Primer y último contactos** Son el primer y el último punto de la Tierra en observar el eclipse. Corresponden a los instantes de principio y fin del eclipse descritos en el apartado anterior.

**Curvas de contacto en el horizonte.** Estas curvas corresponden a los lugares de la Tierra para los que el eclipse comienza o finaliza al orto o al ocaso. Son las cuatro curvas siguientes:

- *Principio del eclipse al orto:* La tangencia inicial de los limbos de Sol y Luna se observa justo en el horizonte. Es el límite occidental de los puntos que pueden ver todo el eclipse por encima del horizonte; sobre ella se encuentra el primer contacto.

## Eclipse anular de Sol del 26 de Enero de 2009

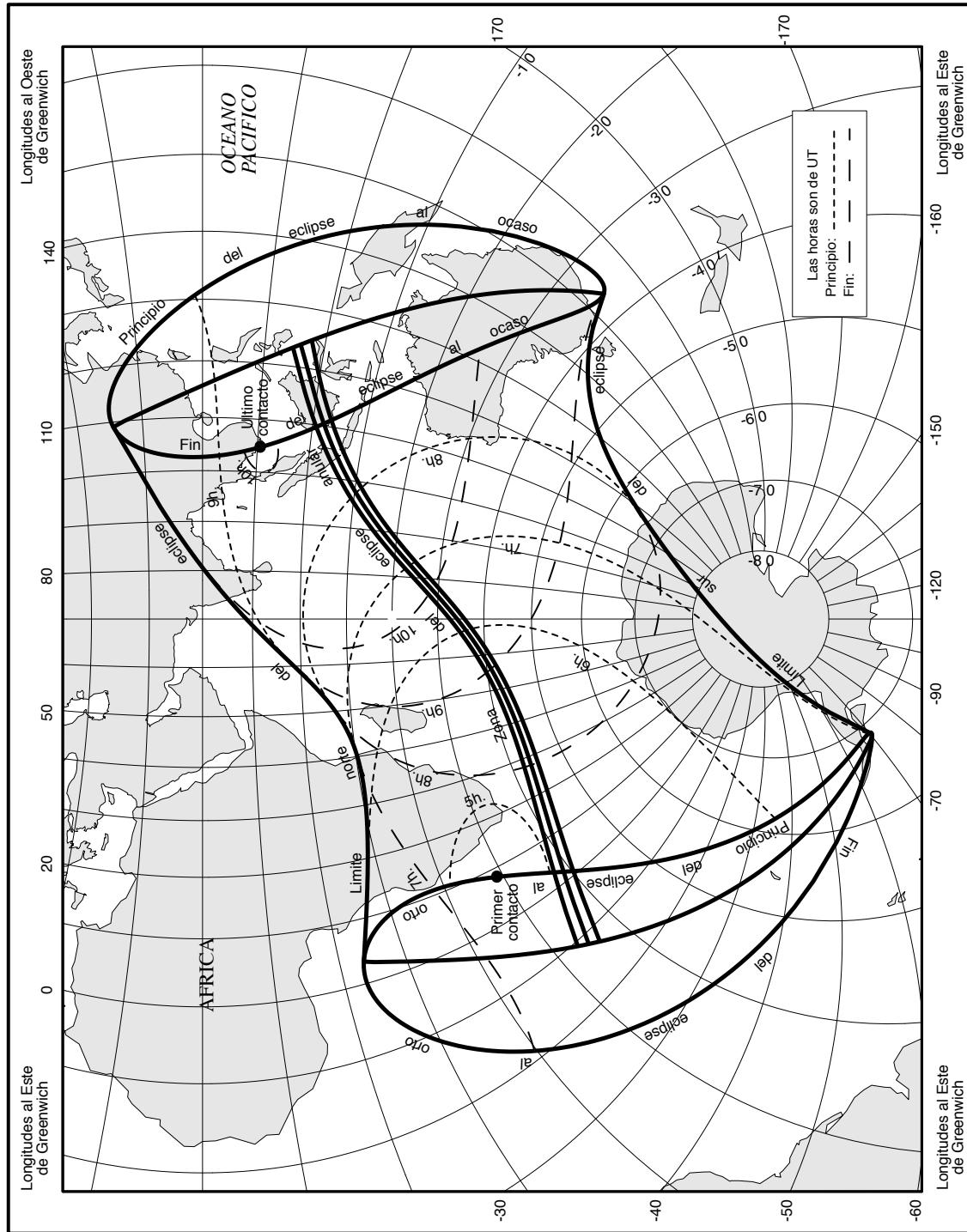


Figura 3: Ejemplo de mapa de eclipse anular

### Eclipse parcial de Sol del 19 de Abril de 2004

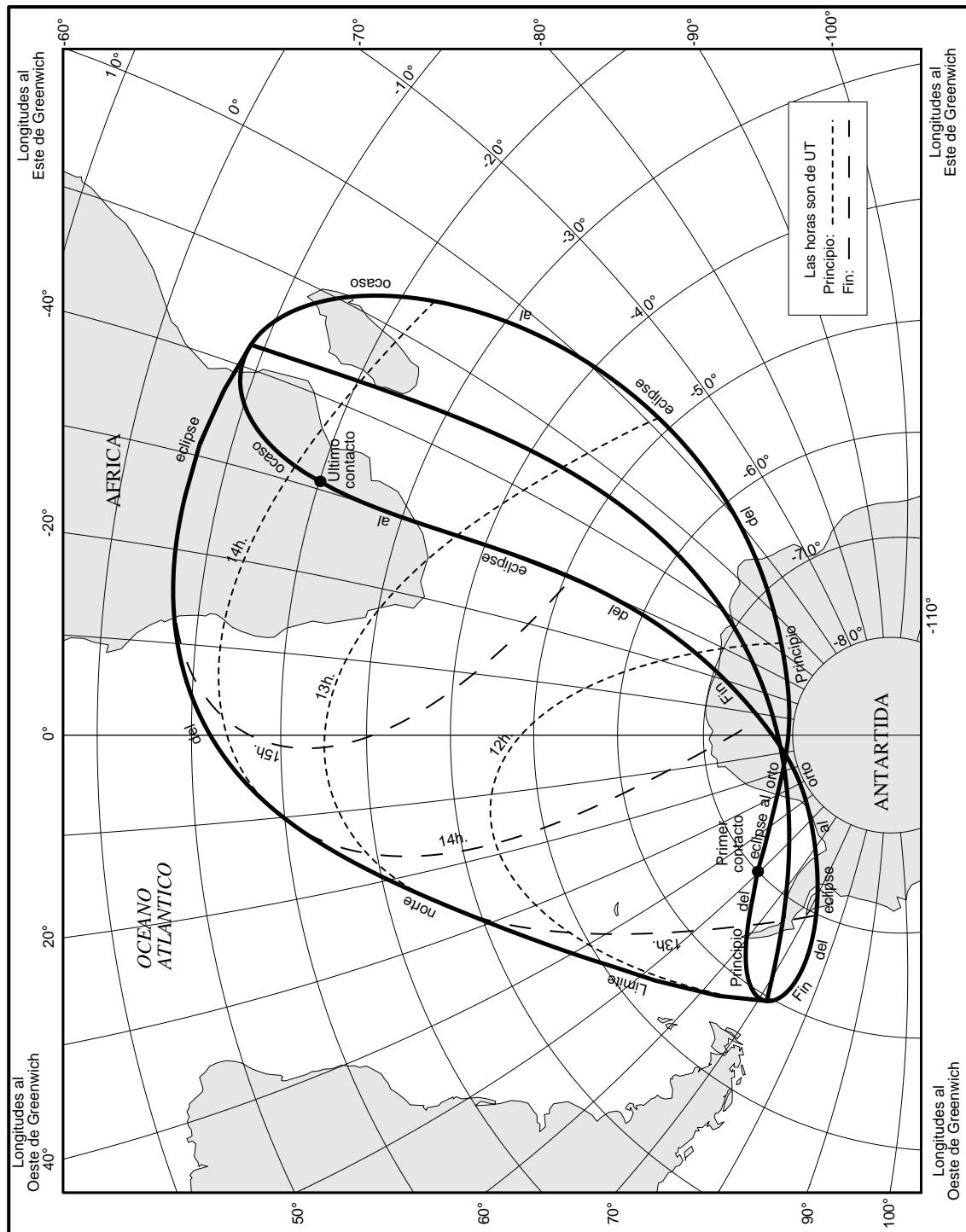


Figura 4: Ejemplo de mapa de eclipse parcial

- *Fin del eclipse al orto:* Para los puntos de esta curva el eclipse finalizará coincidiendo con la salida del Sol. Es el límite occidental del eclipse.
- *Principio del eclipse al ocaso:* Para los puntos de esta curva el eclipse comienza coincidiendo con la puesta del Sol. Es el límite oriental del eclipse.
- *Fin del eclipse al ocaso:* La última tangencia de ambos limbos se produce en el horizonte, mientras se pone el Sol. Es el límite oriental de los puntos que pueden ver todo el eclipse por encima del horizonte; sobre ella se encuentra el último contacto.

**Curvas de máximo del eclipse en el horizonte.** Conjunto de puntos sobre la superficie para los que el instante de máximo del eclipse local se produce cuando el Sol está en el horizonte. Lógicamente hay dos curvas:

- *Curva de máximo al orto:* Al orto es el máximo del eclipse y, conforme sale el Sol, éste va disminuyendo. Esta curva se encuentra comprendida entre las de principio y fin del eclipse al orto.
- *Curva de máximo al ocaso:* El eclipse aumenta conforme la altura del Sol disminuye, hasta llegar al máximo justo al ocaso. De forma análoga a la anterior, esta curva se encuentra comprendida entre las de principio y fin del eclipse al ocaso.

**Curvas límite Norte y Sur de la penumbra.** Curvas límite superior e inferior (esencialmente Norte y Sur) sobre la Tierra, de los puntos desde donde se puede ver el eclipse.

**Curvas límite Norte y Sur de la sombra.** Curvas límite superior e inferior de los puntos desde donde se puede ver el eclipse como total/anular.

**Curva de la centralidad.** Es el lugar geométrico de los puntos de corte del eje de la sombra con la Tierra. Cuando existe, está flanqueada por las curvas límite norte y sur de la sombra (en caso de existir ambas).

**Curvas de simultaneidad de principio y fin del eclipse.** Corresponden con el corte del cono de penumbra con la Tierra en un instante determinado, que se suele proporcionar a horas exactas. Para los puntos de estas curvas el eclipse comienza o finaliza a la hora en cuestión.

## 5. Sistema fundamental de coordenadas y elementos besselianos

Definimos el *Sistema Fundamental de Coordenadas* (figura 5) como un sistema de referencia geocéntrico, tal que: el eje  $z$  es paralelo al eje de sombra, positivo en el sentido Tierra-Luna; el eje  $x$  es la intersección del ecuador con el plano perpendicular a  $z$ , positivo hacia el Este; y el eje  $y$  forma un triángulo directo con los otros dos. Evidentemente, este sistema no es ni fijo en el espacio ni solidario a la Tierra, sino que varía respecto a ésta conforme se desarrolla el eclipse.

El plano  $xy$  se denomina *plano fundamental* y su corte con el elipsoide terrestre lo denominaremos *elipse fundamental*, cuyos semiejes mayor y menor se encuentran en los ejes  $x$  e  $y$  respectivamente. Se llama *plano del observador* al plano paralelo al fundamental que pasa por la situación del observador. Las coordenadas de un punto de la superficie terrestre en este sistema de referencia las denotaremos por  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\zeta$ .

Los elementos besselianos son un conjunto de funciones dependientes del tiempo que describen la geometría del eclipse y facilitan su cálculo. Estas funciones son:

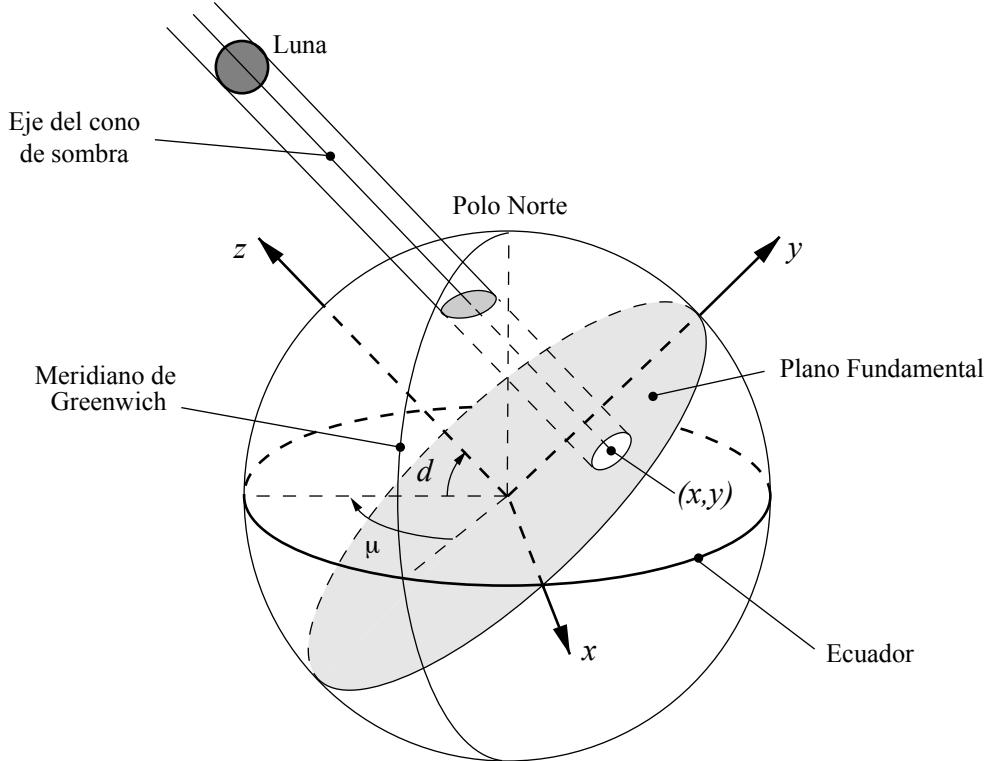


Figura 5: Sistema fundamental de coordenadas

- $x, y$ : Coordenadas, en el sistema fundamental, de la intersección del eje de la sombra con el plano fundamental. Se dan en unidades del radio ecuatorial terrestre.
- $d, \mu$ : Declinación y ángulo horario en Greenwich del eje  $z$ . Se dan en grados sexagesimales. También es habitual proporcionar el  $\sin d$  y el  $\cos d$ , en lugar de  $d$ .
- $l_p, l_s$ : Radios, en unidades del radio ecuatorial terrestre, de las respectivas intersecciones de los conos de penumbra y sombra con el plano fundamental. Por convenio, estos radios tienen el mismo signo que la coordenada  $z$  del vértice del cono correspondiente. Por tanto,  $l_p$  es siempre positivo, mientras que  $l_s$  puede ser positivo (eclipse anular en el plano fundamental), negativo (eclipse total en el plano fundamental) o nulo (vértice del cono de sombra en plano fundamental).
- $i_p, i_s$ : Tangentes de la semiapertura del cono de penumbra y de sombra respectivamente.

Los elementos  $x, y, l_p, l_s, i_p$  e  $i_s$  determinan las dimensiones de los conos y su situación con respecto al plano fundamental, mientras que los elementos  $\mu$  y  $d$  relacionan el plano fundamental con la Tierra en rotación.

De esta forma, y gracias a los elementos besselianos, es sencillo relacionar las coordenadas geográficas de los puntos de la Tierra, con las del sistema fundamental. Esto es muy útil ya que es mucho más sencillo estudiar la geometría del eclipse en el sistema fundamental y luego transformar las coordenadas, que no hacerlo directamente.

### Coordenadas del observador en el sistema fundamental

Consideramos un sistema geográfico geocéntrico, cuyo eje  $Z$  coincide con el eje polar, el plano  $X, Y$  el Ecuador, el eje  $X$  en la dirección del meridiano origen de longitudes y el eje  $Y$  de manera que formen un triángulo recto.

La posición geográfica de un observador viene dada por su longitud  $\lambda$ , su latitud geodésica  $\phi$ , definidas de la forma habitual, y su altura  $H$  sobre el elipsoide de referencia. Para calcular sus coordenadas geográficas cartesianas, es necesario calcular la latitud geocéntrica  $\psi$ , cuya relación con la geodésica viene dada por:

$$\begin{aligned}\rho \cos \phi &= (C + H) \cos \psi, \\ \rho \sin \phi &= (S + H) \sin \psi,\end{aligned}$$

en donde  $\rho$  es la distancia geocéntrica del observador, y las cantidades  $C$  y  $S$  son

$$C = \frac{1}{\sqrt{\cos^2 \phi + (1-f)^2 \sin^2 \phi}}, \quad S = C(1-f)^2,$$

con  $f$  el factor de aplanamiento terrestre. Tanto  $\rho$  como  $H$  deben expresarse en unidades del radio ecuatorial terrestre.

Las coordenadas geográficas cartesianas son:

$$\begin{aligned}X &= \rho \cos \phi \cos \lambda, \\ Y &= \rho \cos \phi \sin \lambda, \\ Z &= \rho \sin \phi.\end{aligned}$$

Para pasar del sistema fundamental de coordenadas al geocéntrico, es preciso realizar un giro de  $(d - 90)$  grados en torno al eje  $x$ , llevando el eje  $z$  sobre el  $Z$ , y de  $(\mu - 90)$  grados en torno al eje  $Z$ . Los cambios de coordenadas cartesianas de un sistema a otro quedan definidos por las siguientes relaciones matriciales:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \mathcal{R} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \mathcal{R}^T \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix},$$

donde  $\mathcal{R}$  es la matriz

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \sin \mu & -\sin d \cos \mu & \cos d \cos \mu \\ \cos \mu & \sin d \sin \mu & -\cos d \sin \mu \\ 0 & \cos d & \sin d \end{pmatrix}$$

y  $\mathcal{R}^T$  su transpuesta.

Las coordenadas en el sistema fundamental  $(\xi, \eta, \zeta)$ , de un punto de coordenadas geográficas  $(\lambda, \phi)$ , serán:

$$\begin{aligned}\xi &= \rho \cos \phi \sin h, \\ \eta &= \rho \sin \phi \cos d - \rho \cos \phi \sin d \cos h, \\ \zeta &= \rho \sin \phi \sin d + \rho \cos \phi \cos d \cos h,\end{aligned}$$

donde  $h = \mu + \lambda$  es el horario local del eje de la sombra.

Derivando con respecto al tiempo, y tras las oportunas manipulaciones, se obtienen las derivadas temporales de las coordenadas del observador en el sistema fundamental:

$$\begin{aligned}\xi' &= \mu'(\zeta \cos d - \eta \operatorname{sen} d), \\ \eta' &= -\zeta d' + \mu' \xi \operatorname{sen} d, \\ \zeta' &= \eta d' - \mu' \xi \cos d.\end{aligned}$$

Para un observador de coordenadas  $(\xi, \eta, \zeta)$ , el radio del cono de penumbra en el plano del observador ( $L_p$ ), del de sombra ( $L_s$ ), así como la distancia ( $\Delta$ ) al eje de la sombra, están definidos por:

$$\begin{aligned}L_p &= l_p - \zeta i_p, \\ L_s &= l_s - \zeta i_s, \\ \Delta &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.\end{aligned}\tag{1}$$

## 6. Restricciones del modelo

Son las que habitualmente toman los distintos observatorios y agencias para la promulgación de datos generales de eclipses en almanaques y efemérides, y son las siguientes:

- Forma de la Tierra elipsoide de revolución con parámetros definidos por IAU (1976).
- Formas de Sol y Luna esferas con radio definido por IAU (1976).
- Centros geométricos de Sol y Tierra coincidiendo con el centro de masas. Desviación del centro geométrico de la Luna respecto de su centro de masas el indicado por IAU (1976).
- Se considera que el eclipse está en el horizonte, es decir que se está produciendo al orto o al ocaso, cuando el punto de observación tiene nula su componente  $\zeta$ . Esto supone despreciar la refracción atmosférica y considerar, para estos puntos, el cono como un cilindro de la misma base. Si se quisiese ser más preciso habría que estudiar las circunstancias locales del eclipse.

## 7. Datos iniciales

Los datos necesarios para el cálculo de eclipses son las coordenadas ecuatoriales geocéntricas de Sol ( $\odot$ ) y Luna ( $\mathbb{C}$ ): distancia ( $r$ ), ascensión recta ( $\alpha$ ) y declinación ( $\delta$ ). Extraemos estos datos de las efemérides básicas DE405/LE405, del Jet Propulsion Laboratory[1], que proporcionan las coordenadas rectangulares ecuatoriales baricéntricas para el período 1600//2201, del Sol, la Luna, los planetas y el baricentro Tierra-Luna, así como la nutación en longitud y oblicuidad.

A partir de estas efemérides se prepara una pequeña base de datos que cubre el período de desarrollo del eclipse. En concreto, se generan dos ficheros (una para el Sol y otro para la Luna) que contienen las coordenadas requeridas, tabuladas a intervalos regulares de Tiempo Terrestre (TT).

El tiempo que se utiliza para calcular y presentar las circunstancias de un eclipse es, lógicamente, el Tiempo Universal (UT). Como es bien conocido, ésta no es una escala uniforme, sino que está ligada a la rotación terrestre y, por tanto, afectada de todas sus irregularidades. A efectos de cálculo, se trabaja con una estimación de  $\Delta T = \text{TT} - \text{UT}$ , diferencia entre el Tiempo Terrestre

y el Tiempo Universal. Una vez que se conozca con precisión el valor de  $\Delta T$ , es necesario corregir los tiempos UT y las longitudes calculadas en las circunstancias del eclipse.

La relación entre las ascensiones rectas y los horarios, que forzosamente intervienen en los cálculos, es el Tiempo Sidéreo aparente (TS). Éste se calcula a partir del UT y de la ecuación de equinoccios, en la que intervienen la nutación en longitud y oblicuidad, la longitud del nodo ascendente de la Luna, y una serie de términos en los que aparecen argumentos relacionados con la rotación terrestre. Por razones de simplicidad de cálculo, también generamos un fichero con los tiempos sidéreos aparentes correspondientes a las horas UT en cuestión.

## 8. Implementación

### 8.1. Cálculo de elementos besselianos

Sean  $\vec{r}_\odot$  y  $\vec{r}_\mathbb{Q}$  los vectores de posición geocéntricos del Sol y la Luna, dados por:

$$\begin{aligned}\vec{r}_\odot &= r_\odot (\cos \alpha_\odot \cos \delta_\odot, \sin \alpha_\odot \cos \delta_\odot, \sin \delta_\odot), \\ \vec{r}_\mathbb{Q} &= r_\mathbb{Q} (\cos \alpha_\mathbb{Q} \cos \delta_\mathbb{Q}, \sin \alpha_\mathbb{Q} \cos \delta_\mathbb{Q}, \sin \delta_\mathbb{Q}).\end{aligned}$$

La dirección del eje  $z$  está definida por el vector de posición del Sol respecto a la Luna  $\vec{r}_{\mathbb{Q}-\odot} = \vec{r}_\odot - \vec{r}_\mathbb{Q}$ , cuyas componentes son:

$$\vec{r}_{\mathbb{Q}-\odot} = r_{\mathbb{Q}-\odot} (\cos a \cos d, \sin a \cos d, \sin d),$$

donde  $d$  ya es uno de los elementos besselianos y  $a$  es la ascensión recta del eje  $z$ . Estos dos argumentos fijan la orientación del sistema fundamental respecto al ecuador y equinoccio verdaderos de la fecha.

Los elementos besselianos  $x$  e  $y$  se calculan hallando las coordenadas de la Luna en el sistema fundamental:

$$\begin{aligned}x &= x_\mathbb{Q} = r_\mathbb{Q} \cos \delta_\mathbb{Q} \sin (\alpha_\mathbb{Q} - a), \\ y &= y_\mathbb{Q} = r_\mathbb{Q} [\sin \delta_\mathbb{Q} \cos d - \cos \delta_\mathbb{Q} \sin d \cos (\alpha_\mathbb{Q} - a)], \\ z &= z_\mathbb{Q} = r_\mathbb{Q} [\sin \delta_\mathbb{Q} \sin d + \cos \delta_\mathbb{Q} \cos d \cos (\alpha_\mathbb{Q} - a)].\end{aligned}$$

En cuanto a los elementos  $i_p$  e  $i_s$ , se obtienen de:

$$\begin{aligned}i_s &= \tan \left[ \arcsen \left( \frac{R_\odot - R_\mathbb{Q}}{r_{\mathbb{Q}-\odot}} \right) \right], \\ i_p &= \tan \left[ \arcsen \left( \frac{R_\odot + R_\mathbb{Q}}{r_{\mathbb{Q}-\odot}} \right) \right],\end{aligned}$$

donde  $R_\odot$  y  $R_\mathbb{Q}$  son los radios del Sol y la Luna, respectivamente.

Los valores de los elementos  $l_s$  y  $l_p$  son:

$$\begin{aligned}l_s &= z_\mathbb{Q} i_s - R_\mathbb{Q} \sqrt{1 + i_s^2}, \\ l_p &= z_\mathbb{Q} i_p + R_\mathbb{Q} \sqrt{1 + i_p^2}.\end{aligned}$$

Por último el elemento  $\mu$  es

$$\mu = \text{TS} - a.$$

Con las fórmulas anteriores se calculan todos los elementos besselianos, para los instantes tabulados en los datos iniciales.

## 8.2. Cálculo de funciones interpolantes de elementos besselianos y de sus derivadas

Con los valores discretos de los elementos besselianos a lo largo de todo el período, mediante las funciones `Interpolation` y `Derivative` de `Mathematica`, se crean funciones interpolantes y sus derivadas, que serán utilizadas a lo largo de todo el programa.

## 8.3. Cálculo de la distancia $q$ del eje de la sombra a la elipse fundamental

El semieje menor  $b$  de la elipse fundamental se calcula a partir del elemento  $d$ , para cada instante tabulado. Su valor, en unidades del radio ecuatorial terrestre, es el siguiente:

$$b = \sqrt{\cos^2 u + (1-f)^2 \sin^2 u}, \quad (2)$$

donde  $u$  es la latitud reducida correspondiente a una latitud geocéntrica  $90^\circ - d$ , dada por:

$$\tan u = \frac{\cos d}{(1-f) \sin d}.$$

Situada la elipse y conocidas las coordenadas  $(x, y)$  del corte del eje de la sombra con el plano fundamental, se calcula la posición del punto de la elipse más cercano al eje de sombra, como el punto de la elipse cuya perpendicular contenida en el plano fundamental, pasa por el eje. La distancia entre el punto así calculado y el  $(x, y)$  es la distancia  $q$  buscada, que tomaremos negativa o positiva según el eje de sombra pase o no por el interior de la elipse fundamental.

Tanto del semieje menor de la elipse fundamental, como de la distancia  $q$ , se hallan funciones interpolantes.

## 8.4. Determinación del tipo de eclipse

Para que se produzca un eclipse, el radio del cono de penumbra en el plano fundamental (elemento  $l_p$ ) debe ser en algún instante mayor que la distancia  $q$  del eje de la sombra a la elipse fundamental. Mediante la función `FindMinimum`, se halla el valor mínimo de la función  $q - l_p$ . Si este valor es positivo no hay eclipse, y en caso contrario al menos hay eclipse parcial.

Si  $\min(q - l_p) < 0$ , se calcula el valor de  $\min(q - l_s)$ . Si éste es  $> 0$ , el eclipse es *parcial*, y en caso contrario, es *total/anular*; la discusión de si es total, anular o mixto se realiza en el apartado 8.6. En estos últimos casos, si  $\min(q) > 0$  el eclipse es *no central*, siendo central en caso contrario.

Cuando el eclipse es central, será del tipo *central con una sola curva de totalidad* cuando  $\min(q + l_s) > 0$ , y tendrá dos curvas de totalidad en caso contrario.

Para estos últimos, el eclipse será *central con una sola curva de parcialidad* si  $\min(q + l_p) > 0$ , y *central con las dos curvas de parcialidad* cuando  $\min(q + l_p) < 0$ .

Las condiciones descritas para los distintos tipos de eclipse se visualizan fácilmente en la figura 2. El cumplimiento o no de cada una de las condiciones se almacena en variables auxiliares lógicas, cuyo valor determinará si un cálculo concreto tiene sentido o no, según el tipo de eclipse.

## 8.5. Obtención de parámetros para la conjunción en ascensión recta

En primer lugar, se obtienen las funciones interpolantes de todos los datos iniciales: ascensión recta, declinación y distancia de Sol y Luna y tiempo sidéreo.

El instante de conjunción en ascensión recta se obtiene mediante la función `FindRoot`, calculando el cero de la diferencia entre las ascensiones rectas de Sol y Luna. Con esta hora se calculan la declinación de ambos astros, así como su paralaje horizontal ecuatorial (*PHE*) y semidiámetro (*SD*), dados por:

$$\begin{aligned} PHE_{\odot} &= \text{arc sen} \left( \frac{R_{\oplus}}{r_{\odot}} \right), & SD_{\odot} &= \text{arc sen} \left( \frac{R_{\odot}}{r_{\odot}} \right), \\ PHE_{\mathbb{C}} &= \text{arc sen} \left( \frac{R_{\oplus}}{r_{\mathbb{C}}} \right), & SD_{\mathbb{C}} &= \text{arc sen} \left( \frac{R_{\mathbb{C}}}{r_{\mathbb{C}}} \right), \end{aligned}$$

donde  $R_{\oplus}$  es el radio ecuatorial de la Tierra.

## 8.6. Cálculo de las circunstancias generales

A continuación se describe el cálculo de las circunstancias generales de un eclipse, aunque, como ya se indicó anteriormente, no todas tienen sentido en todos los eclipses. Gracias a las variables lógicas auxiliares definidas al determinar el tipo de eclipse, el programa calcula únicamente aquellas circunstancias que sean procedentes.

### Principio y fin de las distintas fases

Utilizando la función `FindRoot`, el principio y fin de cada fase se obtiene calculando las horas para las que se anulan las siguientes funciones:

Principio y fin del eclipse parcial: .....	$q - l_p$
Principio y fin del eclipse total/anular: .....	$q - l_s$
Principio y fin del eclipse central: .....	$q$
Contactos interiores del cono de sombra: .....	$q + l_s$
Contactos interiores del cono de penumbra: ...	$q + l_p$

Además, para cada instante calculado, y mediante el método ya descrito para la obtención de  $q$ , se calcula el punto de la elipse fundamental más cercano al eje de sombra. Estos puntos se obtienen en coordenadas fundamentales, a partir de las cuales se calculan las geográficas.

Los instantes de principio y fin de cada fase acotan los intervalos de tiempo que se utilizarán en los cálculos que siguen.

### Cálculo del máximo del eclipse

La distancia del eje de la sombra al centro de la Tierra es  $\sqrt{x^2 + y^2}$ . El instante en que esta distancia es mínima lo obtenemos mediante la función `FindRoot` aplicada a la derivada de dicha expresión.

Para obtener el punto de máximo del eclipse distinguimos dos casos, según el eclipse sea central o no.

En un eclipse central hay que hallar el punto de corte del elipsoide y el eje de sombra, en el instante de máximo. Éste se calcula resolviendo, mediante la función `NSolve`, el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\xi &= x, \\ \eta &= y, \\ X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{(1-f)^2} &= 1,\end{aligned}$$

donde  $x$  e  $y$  son los valores correspondientes al instante de máximo, y  $(X, Y, Z)$  deben expresarse en coordenadas fundamentales  $(\xi, \eta, \zeta)$  mediante el cambio de coordenadas descrito en la sección 5. De las dos soluciones obtenidas, lógicamente sólo interesa la de  $\zeta > 0$ , que se transforma a coordenadas geográficas.

Cuando el eclipse es *no central*, se calcula para el instante de máximo el punto de la elipse fundamental más cercano al eje de sombra, que es el punto de máximo.

### Determinación del tipo de eclipse total, anular o mixto

Para los eclipses parciales, lógicamente, lo que sigue no es de aplicación.

Para que el eclipse se vea como total desde algún punto, hace falta que éste se encuentre inmerso en el cono de sombra, y que su coordenada  $\zeta$  sea superior a la del vértice del cono, cuyo valor es  $l_s/i_s$ . Si bien la coordenada  $z$  del vértice (distancia de éste al plano fundamental) no es constante a lo largo del eclipse, su variación es muy pequeña en comparación con la variación de la coordenada  $\zeta$  de los puntos de la superficie terrestre interiores al cono de sombra. El momento más idóneo para estar en la “parte alta” del cono de sombra es en el instante de máximo de eclipse, ya que es cuando los puntos de mayor  $\zeta$  están más próximos al eje. Se puede concluir que, si en este instante ninguno de los puntos ve el eclipse como total, entonces el eclipse será anular.

Para comprobar lo anterior se calculan las coordenadas del eje de sombra para el instante de máximo. Si resultaran ser exactamente  $(0, 0)$ , se calcularía la coordenada  $\zeta$  del punto de máximo y, en función de su valor, se vería si el eclipse tiene o no algún punto de totalidad. En el caso general en que el eje de sombra no pase exactamente por el centro de la Tierra, se determinará la generatriz del cono que pasa por la vertical del centro de la Tierra en el instante de máximo, ya que ésta define la parte del cono más próxima a la Tierra. Esta generatriz es una recta que pasa por el vértice  $V$ , de coordenadas  $(x, y, l_s/i_s)$  y tiene la dirección  $\vec{g}$ , de componentes

$$(g_x, g_y, g_z) = \frac{1}{\sqrt{1+i_s^2}} \left( -\frac{x i_s}{\sqrt{x^2+y^2}}, -\frac{y i_s}{\sqrt{x^2+y^2}}, 1 \right).$$

Para que haya eclipse total, el corte de esta generatriz con el elipsoide tiene que tener al menos una solución real, con  $\zeta \geq l_s/i_s$ . El corte, en este caso, se calcula aplicando la función `NSolve` al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}g_z(\eta - y) &= g_y(\zeta - l_s/i_s), \\ g_z(\xi - x) &= g_x(\zeta - l_s/i_s), \\ X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{(1-f)^2} &= 1.\end{aligned}$$

Si resultara que sí hay puntos que ven el eclipse como total, faltaría determinar si algún punto lo ve o no como anular, para clasificar el eclipse como mixto o como total. Los puntos idóneos para

calcular esto son los de primer y último contacto del cono de sombra. Esto es debido a que, de entre todos los puntos que durante el eclipse están inmersos en el cono de sombra y que tienen  $\zeta = 0$ , el vértice del cono de sombra tendrá su mayor  $z$  en uno de estos dos instantes. Para determinar si existe anularidad o no, basta pues hallar el valor de  $l_s$  en estos dos instantes. Si ambos son negativos el eclipse es total, y si alguno es positivo el eclipse es mixto.

### Cálculo de la magnitud del eclipse

La magnitud  $M$  del eclipse viene dada por la siguiente fórmula, calculada para el máximo del eclipse:

$$M = \frac{L_p - \Theta}{L_p - L_s},$$

donde  $\Theta = L_s$  para los eclipses anulares y  $\Theta = \Delta$  para los eclipses parciales y totales.

### 8.7. Obtención de la curva central del eclipse y de la duración de la totalidad en sus puntos

Se calcula para distintos instantes, el punto de corte del eje de sombra con el elipsoide. Para ello se procede de la misma forma que para obtener el punto de máximo de eclipse cuando existía corte entre el eje de sombra y el elipsoide terrestre. De nuevo sólo interesa el valor para el que  $\zeta > 0$ .

Para determinar el principio y fin del eclipse total en cada uno de los puntos calculados, determinamos mediante `FindRoot` los ceros de la función  $\Delta - L_s$ , cuya diferencia será la duración de la totalidad.

### 8.8. Cálculo del eclipse central al mediodía local

Es el punto de la curva central que se encuentra sobre el plano  $x = 0$ . De los puntos calculados de la curva central, se obtienen los distintos valores de su coordenada  $\xi$ . Si ésta cambia de signo a lo largo de la curva, se obtiene una función interpolante con dicho valor y mediante `FindRoot` se halla el instante para el que se anula. Para dicho instante se calcula de nuevo el punto de corte del eje con el elipsoide y dicho punto corresponde al del eclipse central al mediodía local.

### 8.9. Obtención de las curvas de contacto en el horizonte

Las conforman, para cada instante, los puntos de la elipse fundamental, para los cuales la distancia al eje de sombra coincide con el radio del cono de penumbra en el plano fundamental. Para obtenerlos, se resuelve mediante la función `NSolve` el siguiente sistema de ecuaciones, del que se desechan las soluciones no reales:

$$\begin{aligned} \zeta &= 0, \\ \frac{\eta^2}{b^2} + \xi^2 &= 1, \\ \Delta &= l_p, \end{aligned}$$

donde  $b$  es el semieje menor de la elipse fundamental dado por (2).

### 8.10. Obtención de las curvas de máximo de eclipse en el horizonte

Las conforman, para cada instante, los puntos de la elipse fundamental que se encuentran a su mínima distancia del eje de la sombra. Para ellos pues, la función  $\Delta$  tiene un mínimo. Para obtenerlos, se resuelve mediante la función `NSolve` el siguiente sistema de ecuaciones, del que se mantienen exclusivamente los puntos reales y que cumplan además  $l_p - \Delta \geq 0$ , ya que de no ser así, se encontrarían fuera del cono de penumbra y por lo tanto no verían el eclipse en ese instante.

$$\begin{aligned}\zeta &= 0, \\ \frac{\eta^2}{b^2} + \xi^2 &= 1, \\ \frac{d(\Delta)}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

### 8.11. Obtención de las curvas límite Norte y Sur

Se distinguen dos tipos de curvas completamente distintas. El primer tipo, es de las curvas formadas por los puntos de coordenada  $\zeta \geq 0$ , para los que el eclipse se reduce a una única tangencia de los discos del Sol y de la Luna. Si la tangencia es exterior, para esos puntos el eclipse será parcial, y conforman las curvas límite de la penumbra. Si, por contra, la tangencia es interior, el eclipse será total o anular y los puntos conforman las curvas límite de la sombra.

Estos puntos verifican la condición de que pertenecen a la vez al elipsoide y al cono. Además, para ellos la función  $L - \Delta$  (donde  $L$  será  $L_s$  o  $L_p$  según se trate del cono de sombra o de penumbra) se anula y tiene un máximo, ya que ésta toma siempre valor negativo excepto en ese preciso instante. Para facilitar el cálculo, y por ser equivalente en este caso, se maximiza la función  $L^2 - \Delta^2$ . Se resuelve mediante la función `NSolve`, como en casos anteriores, el siguiente sistema de ecuaciones, del que se eliminan las soluciones imaginarias y las que dan un valor de  $\zeta < 0$ .

$$\begin{aligned}\frac{d(L^2 - \Delta^2)}{dt} &= 0, \\ L - \Delta &= 0, \\ X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{(1-f)^2} &= 1;\end{aligned}$$

recordando de nuevo que las coordenadas  $(X, Y, Z)$  se han de expresar en coordenadas fundamentales  $(\xi, \eta, \zeta)$ .

La condición anterior es la que aparece en toda la bibliografía consultada cuando se refieren a curvas límite Norte y Sur. En estas fuentes, para todos los eclipses, excepto para los *centrales con las dos curvas de parcialidad*, sólo existe una curva límite Norte o Sur, quedando el resto del eclipse limitado por las curvas de contacto en el horizonte, que aparecen unidas formando un “ocho” característico.

De los mapas estándar de algunos eclipses, puede interpretarse que no hay eclipse en puntos próximos a la unión de las curvas de contacto en el horizonte, situados fuera de ellas. Sin embargo, si se calculan las circunstancias locales del eclipse para esos puntos, se comprueba que sí ven el eclipse, lo que lleva obligatoriamente a la existencia, para estos eclipses, de otro tipo de curva límite (ver figura 6). Esta curva es la formada por los puntos que, estando inmersos en el cono de penumbra, tienen siempre el eclipse por debajo del horizonte ( $\zeta < 0$ ), excepto en un instante en el que se hace  $\zeta = 0$ .

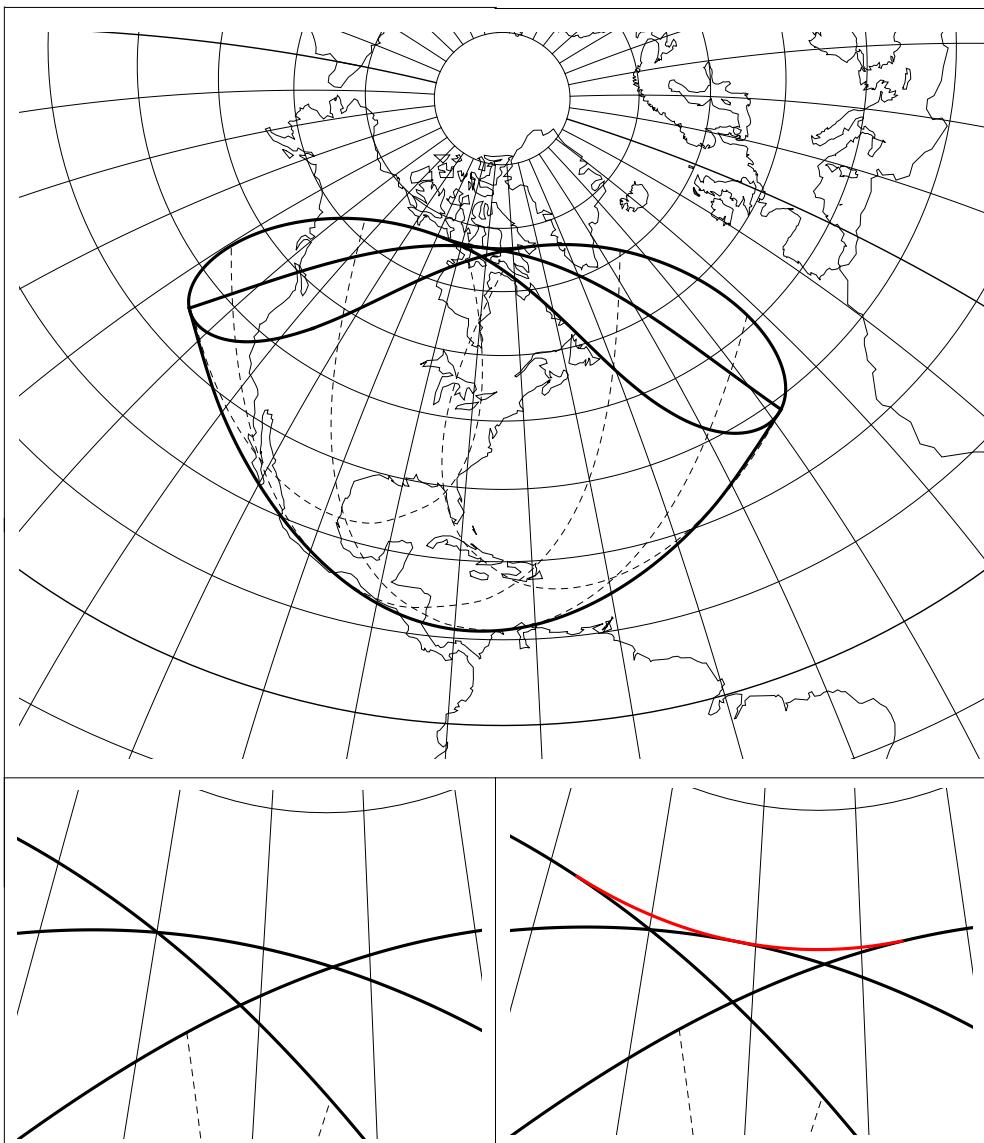


Figura 6: Eclipse parcial de 25 de diciembre de 2000: Mapa completo (arriba), ampliación de la zona de unión de las curvas de contacto en el horizonte sin curva nueva (abajo, izquierda) y con la curva nueva en rojo (abajo, derecha).

Esta nueva curva se calcula hallando los puntos que maximizan y anulan a la vez la función  $\zeta$ . Se conservan sólo las soluciones reales y para las que  $l_p - \Delta \geq 0$ . Son la solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned}\zeta &= 0, \\ \frac{\eta^2}{b^2} + \xi^2 &= 1, \\ \frac{d(\zeta)}{dt} &= 0.\end{aligned}$$

### 8.12. Cálculo de los puntos de coincidencia de las curvas de máximo en el horizonte con las curvas límite Norte/Sur

Estos puntos son de gran interés para el dibujo de los mapas de los eclipses. En este caso, las curvas límite Norte y Sur son las del primer tipo mencionado en el apartado anterior.

El modo de proceder es utilizar los puntos obtenidos en las curvas de máximo en el horizonte e ir comprobando su distancia (con signo) al borde del cono de penumbra/sombra para los distintos instantes. Con estos valores se hace una función interpolante, cuyos ceros, calculados mediante `FindRoot`, serán los instantes de coincidencia de ambas curvas. Para estos instantes se obtienen los puntos de la curva de máximo en el horizonte, que serán los buscados.

### 8.13. Obtención de las curvas de simultaneidad de principio y fin del eclipse

Son los puntos, para cada instante, de corte del cono de penumbra con el elipsoide terrestre. El método que se aplica es ir calculando puntos de estas curvas en distintos planos  $\zeta = \text{cte.}$ , para valores  $0 \leq \zeta \leq 1$ . Los puntos que se obtienen son los de corte de una circunferencia y una elipse, que son las figuras geométricas que forman el cono y el elipsoide, respectivamente, en cada plano. Para obtenerlos se resuelve, utilizando la función `NSolve`, el siguiente sistema de ecuaciones, del que se desechan las soluciones no reales.

$$\begin{aligned}\zeta &= \text{cte.}, \\ \Delta &= L_p, \\ X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{(1-f)^2} &= 1.\end{aligned}$$

## 9. Dibujo del Mapa

De los algoritmos utilizados para el cálculo de cada tipo de curvas, se obtienen en cada instante, un punto aislado o una pareja de puntos. En este segundo caso puede que pertenezcan a una misma curva, debiendo aparecer ordenados, o a dos curvas distintas, debiéndose entonces distribuir correctamente. Para ello se utilizan criterios basados en la proximidad entre puntos (minimizar distancias) y en la continuidad (minimizar ángulo). Con los puntos ya ordenados y diferenciados en sus respectivas curvas, se obtiene la curva en sí mediante la función `BSpline`.

Una vez obtenidas todas las curvas, éstas se muestran, junto con la retícula de paralelos y meridianos, y el contorno de los continentes (ambos de una librería), mediante una representación estereográfica tangente. En este tipo de representación, el plano de proyección es tangente a una

esfera, y todos los puntos se proyectan desde un foco que es el punto de la esfera opuesto al de tangencia. Cuenta con la propiedad de la isogonalidad, es decir mantiene los ángulos. Las distancias, sin embargo, aumentan conforme se alejan del punto de tangencia.

Como punto de tangencia se escoge el punto de máximo de eclipse y se fijan unos parámetros que definen la cantidad de superficie que se representa. Lógicamente, estos parámetros se pueden variar para encuadrar mejor el eclipse en el dibujo.

En las figuras 7, 8, 9 y 10 se muestran ejemplos de los mapas generados por el programa, para distintos tipos de eclipses. Dos de ellos corresponden a los mapas de las figuras 3 y 4 que se utilizaron para describir las diferentes curvas.

## 10. Conclusiones

La utilidad de poder calcular todos los elementos de un eclipse y de representar las curvas características mediante un procesador simbólico ha quedado manifiesta. La sencillez y elegancia de las ecuaciones presentadas contrasta con la complejidad de los cálculos basados en iteraciones.

Además, la resolución de las ecuaciones mediante procesadores simbólicos permite obtener resultados que las iteraciones no consiguen alcanzar. Muestra de ello es el cálculo de los puntos de coincidencia de las curvas de máximo en el horizonte con las de límite Norte/Sur. De otra forma, es necesario ir disminuyendo asintóticamente el intervalo de tiempos para el cálculo de puntos, para obtener una determinación aceptable de estos puntos de coincidencia, lo que sin duda complica el proceso, cuando no lo hace imposible.

Los procesadores simbólicos, especialmente *Mathematica*, son una gran herramienta a la hora de dibujar los mapas de los eclipses.

Debemos destacar el estudio detallado del desarrollo del eclipse en zonas críticas, que ha conluido en el descubrimiento de una nueva curva límite, de cuya existencia no se tiene constancia en la bibliografía consultada. La utilidad de esta nueva curva es muy cuestionable desde el punto de vista práctico. Ésta aparece en regiones polares, donde la presencia humana es escasa y además su situación difiere muy poco de las curvas próximas. A todo esto hay que añadir el hecho de que el eclipse en esos puntos se ve en el horizonte, con las imprecisiones que ello conlleva debido a la refracción atmosférica. Sin embargo, desde el punto de vista conceptual y académico sí es importante, ya que permite comprender la geometría del eclipse en esas zonas críticas.

Los programas desarrollados se utilizarán en la Sección de Efemérides del ROA, como complemento de los ya existentes.

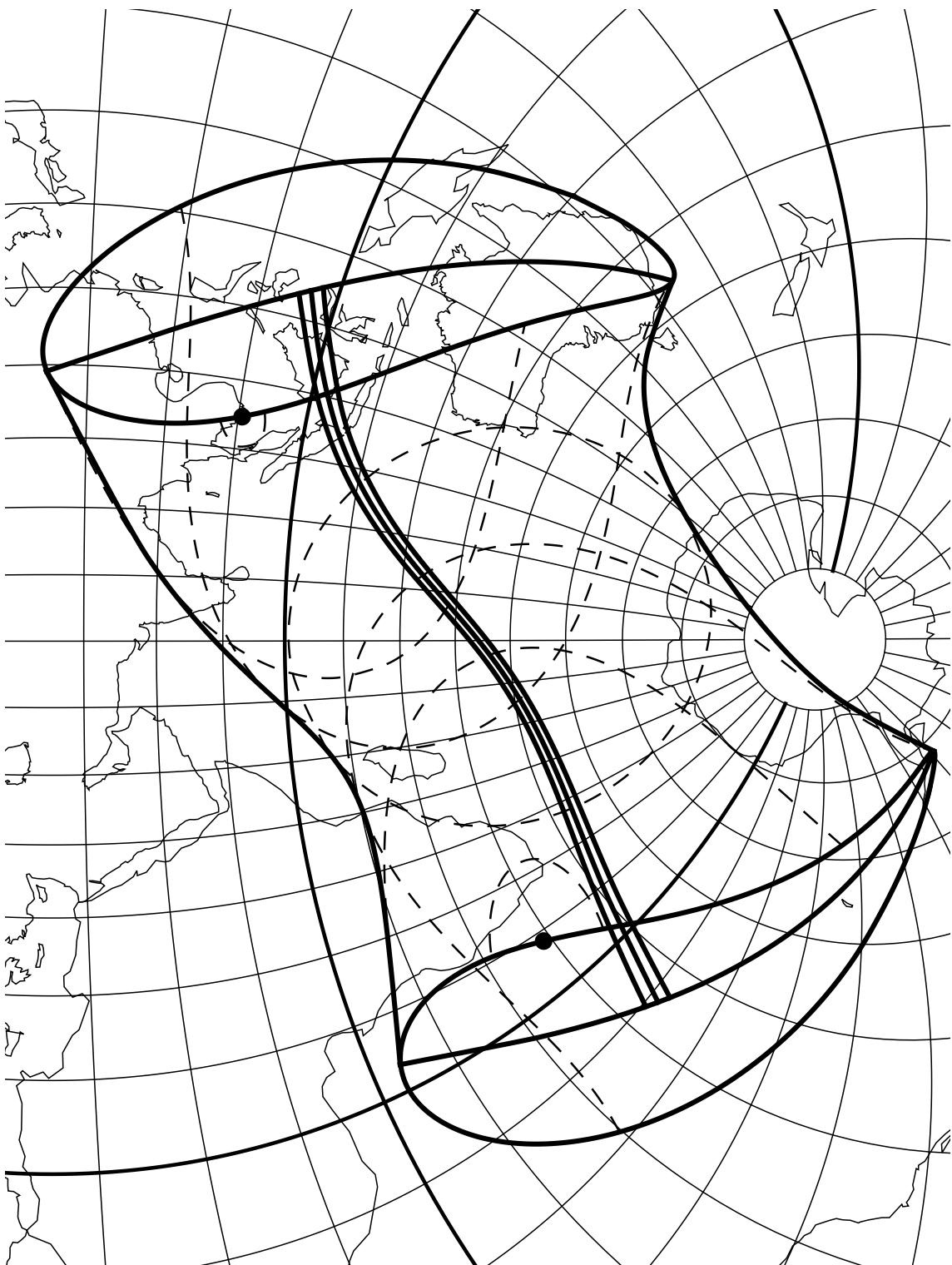


Figura 7: Representación de eclipse central con las dos curvas de parcialidad. Eclipse anular de 26 de enero de 2009.

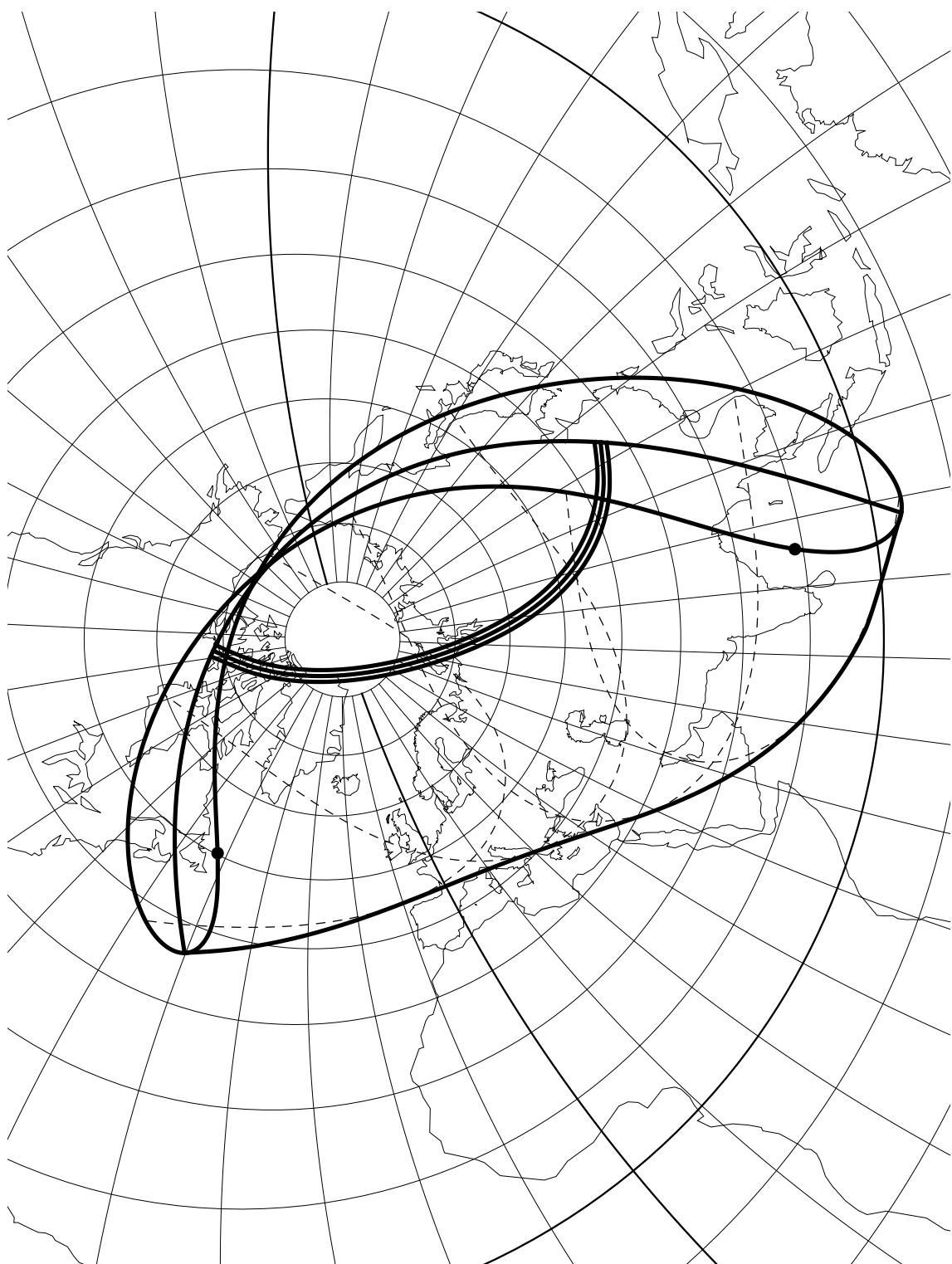


Figura 8: Representación de eclipse central con una sola curva de parcialidad. Eclipse total de 1 de agosto de 2008.

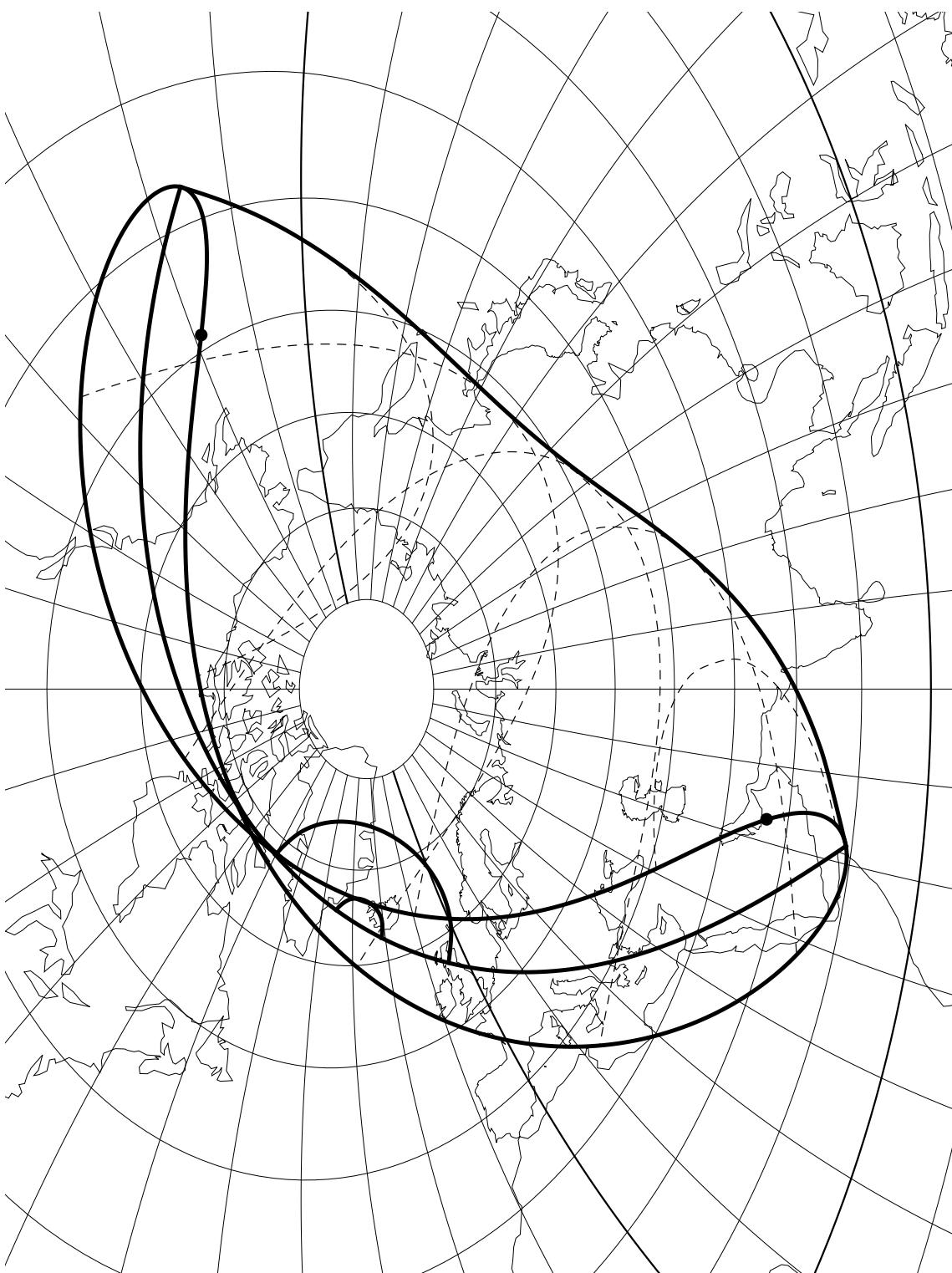


Figura 9: Representación de eclipse central con una sola curva de totalidad. Eclipse anular de 31 de mayo de 2003.

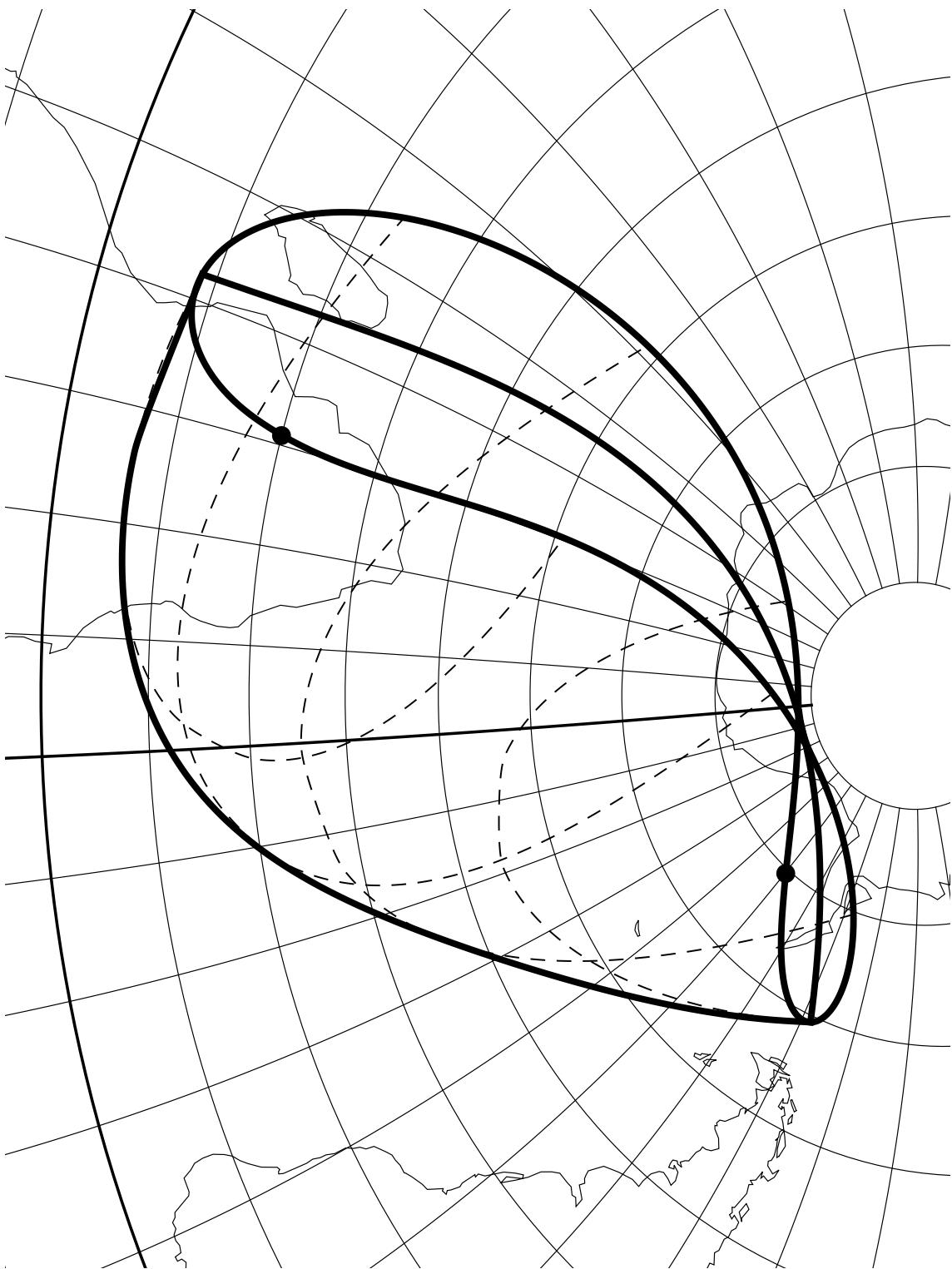


Figura 10: Representación de eclipse parcial. Eclipse parcial de 19 de abril de 2004.

## A. Funciones auxiliares utilizadas

Son el conjunto de funciones creadas en Mathematica para la ejecución de todos los algoritmos necesarios.

### Formatos de horas, grados y radianes

- `hms2h`: Paso de horas, minutos y segundos a horas.
- `h2hms`: Paso de horas a horas, minutos y segundos.
- `h2hm`: Paso de horas a horas y minutos.
- `gms2rad`: Paso de grados, minutos y segundos a radianes.
- `rad2gms`: Paso de radianes a grados, minutos y segundos.
- `grad2gm`: Paso de grados a grados y minutos.
- `hms2rad`: Paso de horas, minutos y segundos a radianes.
- `rad2hms`: Paso de radianes a horas, minutos y segundos.
- `hms2gms`: Paso de horas, minutos y segundos a grados, minutos y segundos.
- `gms2hms`: Paso de grados, minutos y segundos a horas, minutos y segundos.
- `gm2grad`: Paso de grados y minutos a grados.
- `h2ms`: Paso de horas a minutos y segundos.
- `h2s`: Paso de horas a segundos.

### Fechas y tiempos

- `diajuliano`: A partir del día, mes y año se obtiene el día juliano.
- `tsidmedloc`: Da el tiempo sidéreo medio local, a partir del día, mes, año, hora UT y longitud.
- `cormerefe`, `coramerefe`: Corrección en grados de longitud debido a la diferencia entre el Tiempo Terrestre (en el que figuran los datos) y el Tiempo Universal (ligado a la rotación terrestre).

### Transformación de coordenadas

- `ecu2cart`: Paso de coordenadas polares a cartesianas.
- `cart2ecu`: Paso de coordenadas cartesianas a polares.
- `Rx`: Rotación en torno al eje *x*.
- `Ry`: Rotación en torno al eje *y*.

- Rz: Rotación en torno al eje  $z$ .
- Matcambcoor: Matriz de cambio de coordenadas del sistema fundamental al geográfico dados los elementos besselianos  $d$  y  $\mu$ .
- matcambcoor: Matriz de cambio de coordenadas del sistema fundamental al geográfico para un instante determinado.
- cambcoorcarr: Paso de coordenadas cartesianas del sistema fundamental al geográfico para un instante determinado.
- geodes2geocen: Paso de latitud geodésica y altura a latitud geocéntrica y distancia radial.
- latgeocen2latgeode: Paso de latitud geocéntrica a geodésica.
- ecu2ecli: Paso de coordenadas polares del sistema ecuatorial al eclíptico.
- ecli2ecu: Paso de coordenadas polares del sistema eclíptico al ecuatorial.
- correcluna: Corrección de coordenadas de la Luna por diferencia entre centro de masas y centro geométrico.

### Funciones geométricas del elipsoide

- radeliphor: Valor del semieje menor de la elipse fundamental para cada valor del elemento  $d$ .
- disEjeElip: Distancia con signo (positiva exterior, negativa interior) de un punto a una elipse.

### Coordenadas en cada instante del punto de la elipse fundamental más próximo al eje de sombra

- $\xi \eta$  fun: Coordenadas fundamentales de dicho punto.
- $\xi \eta$  fun2xyz: Coordenadas cartesianas de ese punto en el sistema geográfico.
- $\xi \eta$  fun2ecu: Coordenadas polares de dicho punto en el sistema geográfico.
- $\xi \eta$  fun2lonlat: Coordenadas geográficas del referido punto.

### Coordenadas en sistema fundamental en cada instante, de cualquier punto del elipsoide

- lonlatt2xyz, lonlatth2xyz: Coordenadas cartesianas en el sistema geográfico, de cualquier punto terrestre (sin o con elevación respecto a la superficie) para un instante determinado.
- lonlatt2 $\xi \eta \zeta$ , lonlatth2 $\xi \eta \zeta$ : Idem pero ya en coordenadas fundamentales.

### Funciones de corte del eje de sombra con el elipsoide y duración de la totalidad en el eje

- `corteejeelip2ξηζ`: Coordenadas en el sistema fundamental del punto de corte del eje de sombra con el elipsoide, dados los elementos besselianos.
- `corteejeelip2xyz`: Coordenadas cartesianas en el sistema geográfico del punto de corte.
- `corteejeelip2lonlat`: Coordenadas geográficas del punto de corte.
- `corteejeelip`: Coordenadas geográficas del punto de corte para un instante determinado.

### Funciones de duración de la totalidad en el eje

- `deltamenosL`: Da la distancia de un punto al borde del cono de sombra para un instante determinado.
- `deltamenosLt`: Igual que la anterior pero los distintos valores para un intervalo de tiempo en torno al instante actual.
- `duraciontoteje`: Da el tiempo (en minutos y segundos) de la totalidad para un punto del eje.
- `puntoejedur`: Igual que el anterior pero devolviendo además la hora y la posición.

### Funciones de corte del cono de penumbra con la elipse fundamental

- `cortehor`: Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de corte del cono de penumbra con la elipse fundamental dados los elementos besselianos.
- `cortehor2xyz`: Idem pero en cartesianas en el sistema geográfico.
- `cortehor2lonlat`: Idem pero en coordenadas geográficas.
- `cortehor2lonlatt`: Coordenadas geográficas de los puntos de corte para un instante determinado.

### Funciones de corte del cono de penumbra con el elipsoide

- `corteconopelip2ξηζ`: Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de corte del cono de penumbra con el elipsoide, dados los elementos besselianos.
- `corteconopelip2xyz`: Idem pero en cartesianas en el sistema geográfico.
- `corteconopelip2lonlat`: Idem pero en coordenadas geográficas.
- `corteconopelip`: Coordenadas geográficas de puntos de corte de cono y elipsoide para un instante determinado.

### Funciones de cálculo de curvas límite Norte y Sur por tangencia de cono y elipsoide

- $\text{elxelylpipd}\mu2\zeta Q$ : Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de la curva límite dados los elementos besselianos.
- $\text{elxelylpipd}\mu2xyz$ : Idem pero en cartesianas en el sistema geográfico.
- $\text{elxelylpipd}\mu2lonlat$ : Idem pero en coordenadas geográficas.
- $\text{puntoslimitep}$ : Coordenadas geográficas de los puntos límite del cono de penumbra para un instante determinado.
- $\text{puntoslimites}$ : Coordenadas geográficas de los puntos límite del cono de sombra para un instante determinado.

### Funciones de cálculo de curvas límite Norte y Sur por estar el eclipse bajo el horizonte

- $\text{climite2}\xi\eta\zeta$ : Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de la curva límite dados los elementos besselianos.
- $\text{climite2xyz}$ : Idem pero en cartesianas en el sistema geográfico.
- $\text{climite2lonlat}$ : Idem pero en coordenadas geográficas.
- $\text{climite}$ : Coordenadas geográficas de los puntos límite para un instante determinado.

### Funciones de cálculo de curvas de máximo de eclipse al orto/ocaso

- $\text{maxhor2}\xi\eta\zeta$ : Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de máximo en el horizonte dados los elementos besselianos.
- $\text{maxhor2xyz}$ : Idem pero en cartesianas en el sistema geográfico.
- $\text{maxhor2lonlat}$ : Idem pero en coordenadas geográficas.
- $\text{maxhor}$ : Coordenadas geográficas de los puntos de máximo en el horizonte para un instante determinado.

### Funciones para hallar los puntos de corte de las curvas de máximo en el horizonte con las límite Norte y Sur de conos de penumbra y de sombra

- $\text{maxhorbis2}\xi\eta\zeta$ : Coordenadas en el sistema fundamental de los puntos de la elipse fundamental de máxima cercanía al eje de sombra, estén dentro o no del cono. Los parámetros son los elementos besselianos.
- $\text{dismaxcono}$ : Devuelve la distancia de los puntos anteriores al borde del cono siendo positiva si están fuera del cono y negativa si están dentro.
- $\text{dismaxconosign}$ : Devuelve la distancia (con signo) del punto de los calculados por  $\text{maxhorbis2}\xi\eta\zeta$  que está más cerca del borde del cono.

- `maxhorbisselect`: Devuelve las coordenadas fundamentales del punto, de los hallados por `maxhorbis2` que se encuentra más cerca del borde del cono.
- `maxhorbis2xyz`: Idem pero en cartesianas en el sistema geográfico.
- `maxhorbis2lonlat`: Idem pero en coordenadas geográficas.
- `maxhorbisp`: Coordenadas geográficas del punto de la elipse fundamental cuya distancia al eje de sombra alcanza un mínimo y que se encuentra más cerca del borde del cono de penumbra, para cada instante.
- `maxhorbiss`: Igual que el anterior pero para el cono de sombra.

### Funciones para ordenado de puntos de curvas

- `NormsinSalto`: Calcula distancia entre dos puntos dados en coordenadas geográficas.
- `ordenaLobulo`: Ordena los puntos de inicio/fin del eclipse en el horizonte, ya sean uno o dos lóbulos.
- `ordenaCurvCen`: Ordena los puntos de la curva central.
- `ordenaCurva1Lim`: Ordena puntos límite Norte/Sur cuando sólo hay una curva de totalidad o parcialidad.
- `ordenaCurva2Lim`: Idem que la anterior pero cuando existen las dos curvas.
- `ordenaCurvamaxhor`: Ordena los puntos de máximo de eclipse en el horizonte.
- `ordenaCortehoras`: Ordena los puntos de los cortes horarios del cono de penumbra al elipsoide.
- `incluyePunto`: Incluye puntos intermedios a una curva.

### Funciones para dibujo de continentes y retícula

- `ejes`: Define la orientación el mapa.
- `coor`: Permite el paso de coordenadas geográficas a las coordenadas planas del mapa.
- `par`: Define los paralelos.
- `mer`: Define los meridianos.
- `reticula`: Define la retícula de meridianos y paralelos.
- `continentes`: Define el contorno de los continentes.

## B. Glosario

**altura:** distancia esférica del **horizonte** al astro. Se mide sobre el **vertical** del astro y es positiva cuando el astro está por encima del horizonte y negativa en caso contrario. Su valor absoluto es menor o igual que  $90^\circ$ . La altura es el complemento de la **distancia cenital**.

**ángulo horario:** distancia angular medida hacia el W sobre el **ecuador celeste**, desde el **meridiano superior del lugar** hasta el **círculo horario** del astro.

**ángulo sidéreo:** distancia angular medida hacia el W sobre el **ecuador celeste**, desde **Aries** hasta el **círculo horario** del astro.

**aplanamiento:** ver **factor de aplanamiento**.

**Aries:** es el **equinoccio** en el cual el Sol pasa del hemisferio celeste sur al hemisferio celeste norte. Debido a la **precesión**, Aries retrograda sobre la eclíptica  $50''.29$  por año.

**azimut:** distancia angular medida sobre el **horizonte** desde un punto de referencia (generalmente el norte o el sur) hasta el **vertical** del astro.

**cenit:** corte de la prolongación de la línea de la plomada con el hemisferio visible de la **esfera celeste**.

**círculo horario:** círculo máximo de la **esfera celeste** que pasa por los **polos celestes**.

**declinación:** distancia esférica del **ecuador celeste** al astro. Se mide sobre un **círculo horario** y es positiva cuando el astro está al norte del ecuador y negativa en caso contrario. Su valor absoluto es menor o igual que  $90^\circ$ .

**eclipse:** paso de un cuerpo frente a otro ocultando su luz.

**eclipse anular:** un **eclipse solar** en el cual el disco solar nunca se oculta completamente y en el máximo del eclipse se ve como un anillo.

**eclipse lunar:** aquél que se produce cuando la Luna pasa a través de la sombra que proyecta la Tierra. Puede ser total, parcial y penumbral.

**eclipse solar:** aquél que se produce cuando la Luna se sitúa entre el Sol y la Tierra, tapando la luz del primero. Puede ser total, parcial y **anular**.

**eclíptica:** trayectoria aparente del Sol sobre la **esfera celeste**.

**ecuador celeste:** círculo máximo de la **esfera celeste** perpendicular a la línea que une los **polos celestes**.

**efemérides:** secuencia ordenada para un número de fechas de las posiciones de los objetos celestes. Normalmente se presentan en tablas.

**equinoccio:** cada uno de los puntos de corte de la **eclíptica** con el **ecuador celeste**.

**esfera celeste:** esfera imaginaria de radio arbitrario y centro en el observador, sobre la que se proyectan los astros para estudiar sus posiciones relativas.

**factor de aplanamiento:** parámetro de un planeta dado por la relación  $(a - b)/a$ , donde  $a$  es el radio ecuatorial y  $b$  el radio polar. Indica el grado de aproximación entre una esfera y la figura del planeta.

**fases de la Luna:** diversos aspectos de la Luna que se suceden cíclicamente.

**geocéntrico:** con referencia al centro de la Tierra.

**horizonte (verdadero):** plano que contiene al observador y es ortogonal a la línea **cenit-nadir**.

La intersección de dicho plano con la **esfera celeste** es un círculo máximo también denominado horizonte.

**limbo:** borde aparente del Sol, la Luna o un planeta con disco apreciable.

**lunación:** período entre dos lunas nuevas consecutivas (ver **fases de la Luna**). Su duración es aproximadamente 29.5 días.

**meridiano del lugar:** círculo máximo que pasa por los **polos celestes** y contiene al **cenit** y **nadir**.

El meridiano del lugar también es un **vertical**.

**meridiano superior del lugar:** semicírculo en que la línea de los polos divide al **meridiano del lugar** y que contiene el **cenit**.

**movimiento del polo:** movimiento variable irregular del polo de rotación de la Tierra con respecto a la corteza terrestre.

**nadir:** punto de la **esfera celeste** diametralmente opuesto al **cenit**.

**nutación:** oscilaciones de corto período en el movimiento del polo debidas al par producido por fuerzas gravitacionales externas. Este efecto se debe principalmente a la influencia de la Luna y el Sol.

**oblicuidad de la eclíptica:** ángulo que forma el plano que contiene a la **eclíptica** con el plano que contiene al **ecuador celeste**.

**ocaso:** instante en el que un astro corta al **horizonte** pasando del hemisferio visible al invisible.

**orto:** instante en el que un astro corta al **horizonte** pasando del hemisferio invisible al visible.

**paralaje:** diferencia entre las posiciones **topocéntrica** y **geocéntrica** de un objeto, es decir, el ángulo subtendido desde el objeto por el radio terrestre del observador.

**paralaje horizontal:** es la **paralaje** de un objeto que se encuentra en el **horizonte**.

**polos celestes:** puntos de corte con la **esfera celeste** de la prolongación del eje de rotación de la Tierra.

**precesión:** movimiento uniforme de largo período a que está sometido el eje de rotación terrestre debido a la atracción gravitacional del Sol, la Luna y los planetas sobre la Tierra.

**puesta:** instante en el cual se oculta tras el **horizonte** un astro con **limbo** observable. En el caso del Sol, la puesta ocurre cuando el punto central del disco tiene **distancia cenital** de  $90^\circ 50'$ . Esta cantidad se obtiene suponiendo unos valores estándar para la **refracción** en el horizonte de  $34'$  y para el **semidiámetro** de  $16'$ . En el caso de la Luna la **distancia cenital** correspondiente es de  $90^\circ 34' + s - \pi$ , donde  $s$  es el **semidiámetro** de la Luna y  $\pi$  es la **paralaje horizontal**.

**refracción:** ángulo que forman las direcciones verdadera y observada de un objeto celeste debido al cambio de dirección en la trayectoria que sigue un rayo de luz al pasar oblicuamente a través de la atmósfera.

**salida:** instante en el cual comienza a aparecer sobre el **horizonte** un astro con limbo observable.

En el caso del Sol, la salida ocurre cuando el punto central del disco tiene **distancia cenital** de  $90^\circ 50'$ . Esta cantidad se obtiene de suponer unos valores estándar para la **refracción** en el horizonte de  $34'$  y para el **semidiámetro** de  $16'$ . En el caso de la Luna la **distancia cenital** correspondiente es de  $90^\circ 34' + s - \pi$ , donde  $s$  es el **semidiámetro** de la Luna y  $\pi$  es la **paralaje horizontal**.

**segundo del Sistema Internacional:** duración de  $9\,192\,631\,770$  períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de Cesio 133.

**segundo intercalar:** un segundo que en ocasiones es necesario añadir al **Tiempo Universal Coordinado** para que la diferencia con el **Tiempo Universal** se mantenga inferior a 0.9 segundos. Convencionalmente, de ser necesaria esta corrección se efectuará a finales de Junio o Diciembre.

**semidiámetro:** ángulo desde el observador subtendido por el radio ecuatorial de un astro con disco observable.

**solsticio:** cada uno de los puntos de la **eclíptica** apartados  $90^\circ$  de los **equinoccios**.

**Tiempo Atómico Internacional (TAI):** escala internacional de referencia proporcionada por la Oficina Internacional de Pesas y Medidas a partir de los relojes atómicos que mantienen los laboratorios de tiempo de varios países. La unidad fundamental del TAI es el **segundo del Sistema Internacional**.

**tiempo sidéreo:** **ángulo horario de Aries**. Es una medida de la rotación de la Tierra con respecto a las estrellas.

**Tiempo Universal (UT):** medida del tiempo que se ajusta al movimiento diurno medio del Sol y cuyo valor se deduce del **tiempo sidéreo** mediante una fórmula matemática. Es el argumento habitual de las efemérides y se deduce de la observación de las estrellas. La escala obtenida directamente de tales observaciones corregida de las pequeñas desigualdades que introduce el desplazamiento del polo terrestre y que dependen de las coordenadas del observador se designa UT1. Debido a la irregularidad de la velocidad de rotación de la Tierra no es una escala uniforme, por lo que para datar acontecimientos científicos se utiliza el **Tiempo Atómico Internacional**.

**Tiempo Universal Coordinado (UTC):** escala de tiempo que se emite por radiodifusión a través de las señales horarias. Se basa en el **Tiempo Atómico Internacional**. La vida diaria está regulada por el movimiento del Sol, al cual se ajusta el **Tiempo Universal (UT)**. Mediante la introducción, cuando corresponda, de un **segundo intercalar** en el UTC, la diferencia con la escala UT se mantiene inferior a 0.9 segundos.

**topocéntrico:** con referencia a un punto de la superficie de la Tierra.

**unidad astronómica de distancia:** constante definida por la Unión Astronómica Internacional y que corresponde a  $1,495\,978\,10 \times 10^{11}$  metros. Aproximadamente coincide con un valor promediado de la distancia de la Tierra al Sol.

**vertical:** círculo máximo de la **esfera celeste** que pasa por el **cenit** y el **nadir**.



# Bibliografía

- [1] Standish, E. M., “JPL Planetary and Lunar Ephemerides, DE405/LE404”, *JPL Interoffice Memorandum, IOM 312.f-98-048*, 1998.
- [2] Smart, W. M., *Textbook on Spherical Astronomy* (1977).
- [3] Gil Chica, F. J., *Teoría de eclipses, ocultaciones y tránsitos* (1996).
- [4] Seidelman, P. K., Edit, *Explanatory Supplement to the Astronomical Almanach* (1992).
- [5] Orús, J. J., Catalá, M. A., Núñez de Murga, J., *Astronomía esférica y Mecánica Celeste* (2007).
- [6] Salazar de la Cruz, A., Lopez Moratalla, T. *Eclipses de Sol 2000-2010 (Boletín ROA 7/99)*.
- [7] Lopez Moratalla, T., Lara Coira, M., Salazar de la Cruz, A., *El eclipse total de Sol del 11 de agosto de 1999 (Boletín ROA 10/98)*.
- [8] Casado, J. C., Serra-Ricart, M., *Unidad Didáctica de Eclipses* (2003).  
<http://www.fecyt.es/semanadelaciencia2003/eclipse/pdf/UD.E.pdf>