



INSTITUTO POLITÉCNICO NACIONAL
ESCUELA SUPERIOR DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

“Tripas de gato y análisis vectorial”

Arturo Zúñiga-Segundo

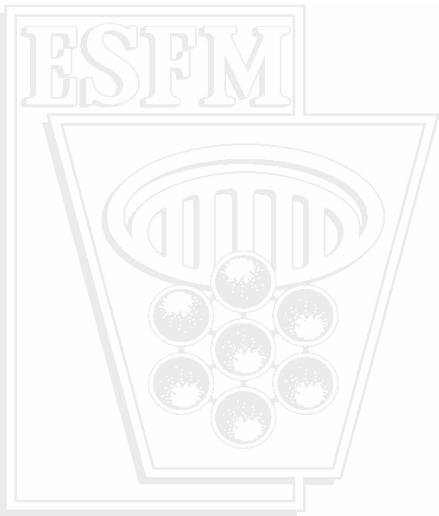
DIPLOMADO USO PEDAGÓGICO DE LAS TIC EN LA DOCENCIA
POLITÉCNICA

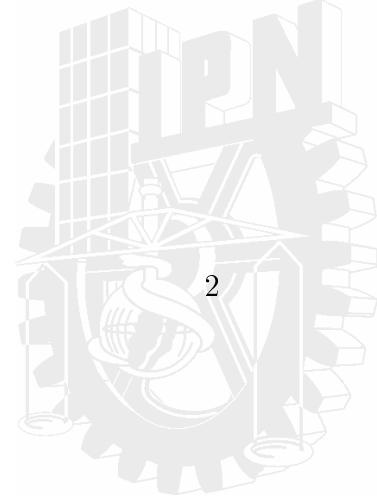
Asesores

Dra. Jessie Paulina Guzmán Flores

Dr. Juan Jesús Gutiérrez García

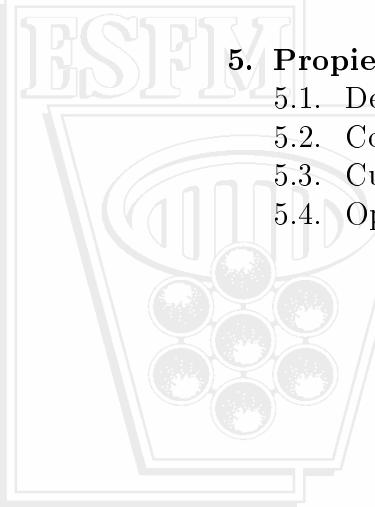
México, Ciudad de México, abril del 2021

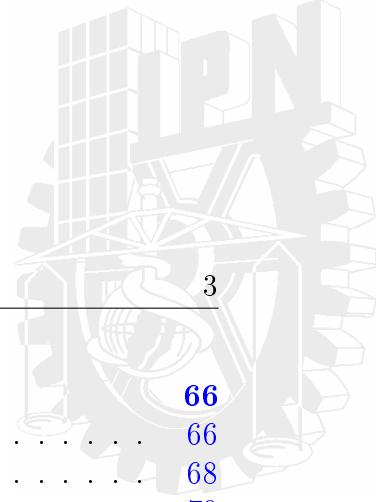




Índice general

1. Introducción	4
1.1. Juego Tripas de gato	5
2. Representaciones	6
2.1. Espacio vectorial.	6
2.2. Representación geométrica.	8
2.3. Representación en coordenadas cartesianas.	9
2.4. Representación en coordenadas cilíndricas.	12
2.5. Representación en coordenadas esféricas.	15
3. Productos: “punto y cruz”	17
3.1. Productos entre vectores: punto y cruz.	17
3.2. Ecuaciones de la recta y el plano.	21
3.3. Cambio de coordenadas.	25
3.4. El producto punto y cruz en coordenadas cilíndricas y esféricas.	31
3.5. Rotaciones.	32
3.6. Cosenos directores.	34
4. Gradiente, divergencia y rotacional	36
4.1. Una motivación: las ecuaciones de Maxwell.	37
4.2. Gradiente.	38
4.3. Divergencia.	41
4.4. Rotacional.	43
4.5. Electrostática y magnetostática.	44
5. Propiedades de Nabla	47
5.1. Derivadas parciales	47
5.2. Convención de suma.	49
5.3. Cuando los Chuckies se encuentran.	54
5.4. Operaciones básicas	57





ÍNDICE GENERAL

3

6. El vector de posición	66
6.1. Mecánica	66
6.2. Operaciones básicas	68
6.3. Electrostática	70
7. Integrales de superficie y volumen	74
7.1. Integrales de superficie	76
7.2. Transformación B.E.	79
7.3. Integrales de volumen	85
7.4. Una aplicación a física	94
7.4.1. Momento de Inercia	94
7.5. El método «Catemaco» de integración	95
8. Integrales de línea o camino	101
8.1. Guía mágica de solución	102
8.2. Parametrización	102
8.3. Sistemas conservativos	124
9. Teoremas integrales de Stokes y Gauss	128
9.1. Teorema de Stokes	129
9.2. Teorema de Green	131
9.3. Teorema «del foco»	139
9.4. Teorema de Gauss	143
10. Generalizaciones	154
10.1. Teoremas del conejo	154
10.2. Solución a la ecuación de Poisson	158
Bibliografía	163





1

Introducción

Escribir unas notas de análisis vectorial es sin duda un reto, ya que habiendo libros tan maravillosos y profesores tan eminentes, con mucha experiencia y conocimientos, tenga yo que dar una versión al respecto.

Alguna vez cuando era estudiante de secundaria, me encontré en un libro de mecánica un símbolo raro, una especie de serpiente o letra “S” alargada con una bola al centro, que sólo había visto en las carrozas funerarias; había también unos símbolos que parecían caracolitos uno arriba de otro. Cruces, puntos y flechas sobre letras, que las hacían parecer helados con confitería de chocolate, triángulos de cabeza y muchos números al cuadrado y a la $3/2!$ Que maravilloso resultaba ver ese libro que me hacia soñar en aquella biblioteca popular de ciudad Netzahualcoyolt.

Posteriormente encontré el libro de George Gamow, *Materia, tierra y cielo* y recuerdo que por primera vez vi la palabra campo, electricidad y ondas, que me hicieron pensar en el reciente viaje a la luna y las naves espaciales. Encontré en esa biblioteca unos ejemplares de la Enciclopedia Salvat sobre los mayas y mexicas, ví nuevamente símbolos tan maravillosos e impresionantes, que hasta la fecha no puedo en lo más mínimo dibujar, pero me despertó el interés de tratar de entender y descifrar los símbolos más modernos, que mis maestros de la vocacional podían explicarme.

Y aquí estoy ahora, explicando a una o a un joven estudiante, y compartiendo su excelente buen humor, que es esa serpiente matemática, que es ese triángulo de cabeza, recordando siempre las frases tan amables de mis maestros que me dedicaron muchas horas de su tiempo y de sus palabras, para que hoy pueda repetirlas, no con su maestría y sabiduría, pero si con mucho gusto y alegría. Finalmente, me gustaría se dijera que estas notas son triviales, ya que habré logrado mi objetivo.

Muchas gracias por los sueños y la oportunidad de hablar de ellos.

1.1. Juego Tripas de gato

1.1. Juego Tripas de gato

El juego de Tripas de Gato es un juego de lapices de colores y papel donde se apuntan parejas de números consecutivos u objetos en una hoja de papel. Las parejas se unen con una tripa o línea curva sin despegar el lápiz de color del papel. Se juega por turnos, se recomienda usar un lápiz de diferente color para identificar al jugador en turno. El primer jugador une el 1 con el 1 y el siguiente jugador debe juntar con una línea el 2 con el 2 ... y así sucesivamente. Las líneas de un jugador no deben cruzar las líneas del contrincante. Pierde el jugador que despega el lápiz del papel durante su jugada, o si se sale del papel o bien toca otra línea dentro del juego.

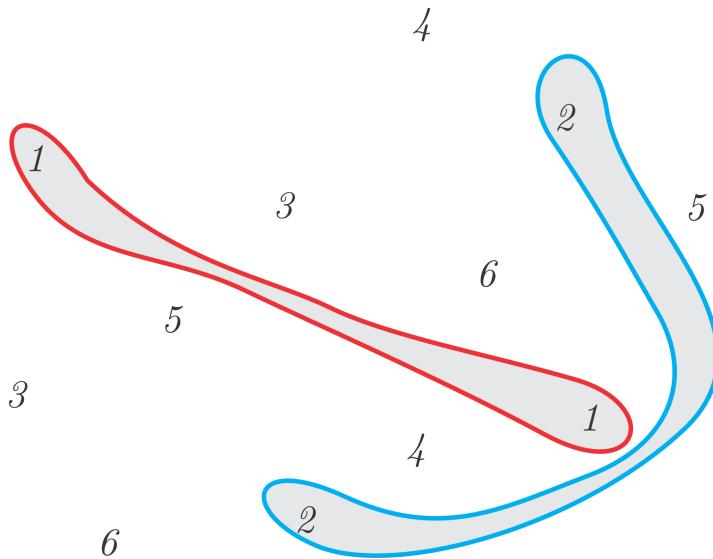


Figura 1.1: ¡Buena suerte!.

2

Representaciones

En la mayoría de los cursos de vectores se dice que un vector es una cantidad que tiene magnitud dirección y sentido. En lo personal esta definición me parece muy imprecisa. Considero que es mejor definirlo por medio del concepto de espacio vectorial, y posteriormente sin ser formal, representarlo como una flecha en el espacio tridimensional.

2.1. Espacio vectorial.

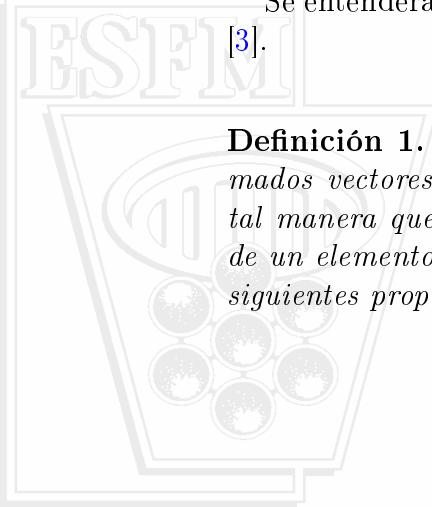
Me gustaría iniciar a la manera tradicional, es decir, basados en el siguiente diálogo [1]:

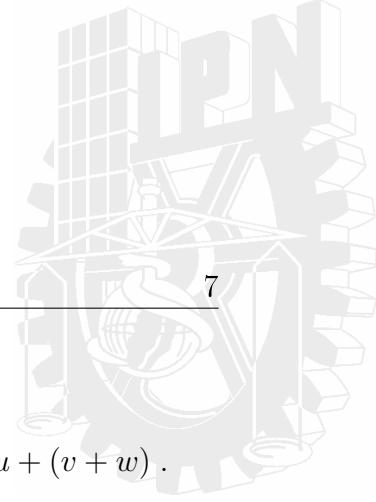
- ¡Nos tienen rodeados los Indios, Toro!
- ¿Nos tienen, Kimosabi?

Pero en un instante, nos sentiríamos acosados por muchas flechas. En consecuencia, iniciar definiendo un espacio vectorial –definiendo un vector en abstracto– representa la ventaja de extender el concepto de vector, a sistemas donde una “visualización directa” no es posible, tal es el caso de la mecánica cuántica [2]. Para interpretar qué es un vector, será necesario introducir el concepto de representación, o sistema de coordenadas.

Se entenderá por un cuerpo F , a los números reales. Definamos qué es un espacio vectorial [3].

Definición 1. *Un espacio vectorial V sobre el cuerpo F es un conjunto de elementos, llamados vectores, que se pueden sumar y que se pueden multiplicar por elementos de F , de tal manera que la suma de dos elementos de V , es un nuevo elemento de V , el producto de un elemento de V por un elemento de F es un elemento de V . Además se satisfacen las siguientes propiedades:*





2.1. Espacio vectorial.

1. Para todos los elementos u y v de V , se tiene que: $u + v = v + u$.
2. Para todos los elementos u , v y w de V , se tiene que: $(u + v) + w = u + (v + w)$.
3. Dado un elemento u de V , el elemento $-u$ de V es tal que: $u + (-u) = 0$.
4. Existe un elemento de V , denotado por 0 , tal que: $0 + u = u + 0 = u$.
5. Si c es un número, entonces, $c(u + v) = cu + cv$.
6. Si a y b son numeros, entonces, $(a + b)v = av + bv$.
7. Si a y b son numeros, entonces, $(ab)v = a(bv)$.
8. Para los elementos u de V , se tiene que, $1 \cdot u = u$ donde 1 es la unidad.

Todas estas reglas son independientes de la representación, es decir, son propiedades intrínsecas de los vectores, heredadas de la definición de espacio vectorial. La forma de escribir un vector en el espacio R^n , es por medio del arreglo de n -entradas:

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_n),$$

donde cada una de ellas es un número real. Las propiedades de los números en un espacio n dimensional, son muy parecidas a las de un espacio vectorial, por consiguiente, a los puntos en un espacio R^n también les llaman vectores [3]. Esta afirmación, supone que los vectores no dependen del origen del sistema de coordenadas.

Definición 2. Sea V un espacio vectorial arbitrario y sean u_1, \dots, u_n elementos de V , y c_1, \dots, c_n , números. Una combinación lineal de u_1, \dots, u_n , será una expresión del tipo:

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n.$$

Definición 3. Sea V un espacio vectorial arbitrario sobre el cuerpo F , y u_1, \dots, u_n elementos de V . Decimos que u_1, \dots, u_n , son linealmente dependientes sobre F , si existen elementos en F no todos iguales a 0 , tales que:

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n = 0.$$

Si no existen tales numeros entonces decimos que u_1, \dots, u_n , son linealmente independientes.

Definición 4. Decimos que cuando u_1, \dots, u_n , son linealmente independientes, u_1, \dots, u_n , generan a V y el conjunto de vectores $\{u_1, \dots, u_n\}$, se conoce como una base de V .

2.2. Representación geométrica.

Definición 5. Si u_1, \dots, u_n , son linealmente independientes, entonces la dimensión de V es n .

La importancia de tener una base $\{u_1, \dots, u_n\}$, de V , fundamenta el hecho de escribir cualquier vector u de V , como una combinación lineal de la base, o sea,

$$u = c_1u_1 + c_2u_2 + \dots + c_nu_n ,$$

donde los c_1, \dots, c_n , son números.

2.2. Representación geométrica.

¿Qué es un vector? Esta pregunta es difícil de contestar sin recurrir a la definición de espacio vectorial, sin embargo, al representar o proyectar estos vectores abstractos, en un sistema de coordenadas, obtenemos la forma práctica de visualizarlos gráficamente. En este caso, un vector se representa por medio de una flecha o segmento dirigido, es decir, dos puntos unidos por una recta, en la dirección determinada por la cabeza de la flecha; cuya longitud es la magnitud del vector. Desde este momento resulta claro denotar a los vectores con ayuda de una flecha, por ejemplo, el vector A será denotado; \vec{A} ó \vec{A} (el vector cero sin flecha), y su magnitud por A ó $|A|$.

La forma gráfica de cómo sumar dos vectores, es conocida como: el método del paralelogramo; que describiremos a continuación.

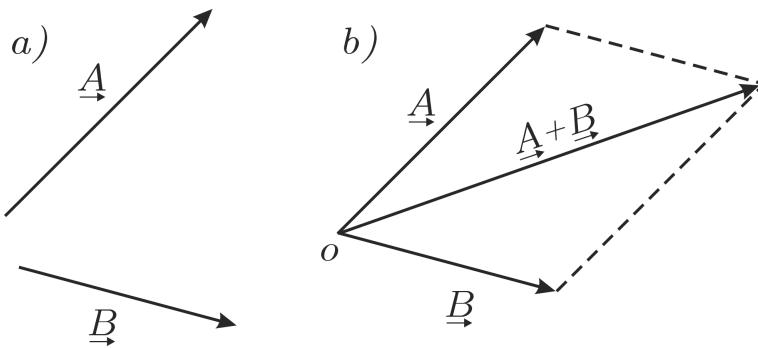


Figura 2.1: Método del paralelogramo. a) Consideremos dos vectores arbitrarios \vec{A} y \vec{B} . b) Los vectores se mueven paralelamente y sus extremos sin flecha se coloca en el punto fijo o . La suma $\vec{A} + \vec{B}$ es la flecha que une o , con la intersección de las líneas paralelas a los vectores. Observe que los vectores se pueden desplazar en todo el plano.

2.3. Representación en coordenadas cartesianas.

9

Para sumar dos vectores gráficamente, muévase el primer vector (asegurándose de no cambiar su orientación), a un punto fijo o , donde fijamos el lado que no tiene flecha. A continuación muévase de la misma forma el siguiente vector, fijandolo del lado que no tiene flecha del punto o . Por último, trácese paralelas a los vectores que pasen por las puntas de las flechas. La suma de los vectores será la flecha dirigida del punto o , a la intersección de la dos paralelas a los vectores, ver figura (2.1). Nótese que los vectores se desplazan hacia cualquier lugar, sin cambiar sus propiedades; es decir, no dependen del origen del sistema de coordenadas. La suma de dos vectores \vec{A} y \vec{B} , cumple:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A},$$

o sea, la adición vectorial es commutativa. La adición vectorial también es asociativa,

$$\vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C}.$$

Observe que estas relaciones, son identicas a las dos primeras que definen un espacio vectorial. Reemplazando $u \leftrightarrow \vec{A}$; $v \leftrightarrow \vec{B}$; $w \leftrightarrow \vec{C}$ se obtienen todas las propiedades de un espacio vectorial. Es importante insistir que las propiedades de los vectores son independientes de la representación, de aquí surgen definiciones de vector muy sofisticadas, ya que no es suficiente una magnitud y una dirección [4].

2.3. Representación en coordenadas cartesianas.

En física, generalmente los espacios son hólogeneos, es decir, las ecuaciones de las leyes físicas son independientes del origen de coordenadas [5]. ¡Qué coincidencia, verdad!

Para representar un punto en el espacio, son necesarias tres coordenadas, porque la dimensión del espacio es tres. En el sistema de coordenadas cartesianas, estos puntos los denotamos por (x, y, z) , donde x , y y z son las coordenadas a lo largo de los ejes x , y y z respectivamente. Estas coordenadas no tienen restricción alguna en sus valores, es decir, pueden tener cualquier valor en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Ya que los vectores son independientes del origen de coordenadas, entonces, es posible denotarlos igual que los puntos en el espacio, o sea, el vector

$$\vec{A} = (A_x, A_y, A_z), \quad (2.1)$$

donde A_x , A_y y A_z son las componentes a lo largo de los ejes x , y y z respectivamente.

Para ubicar el punto $p(1, 2, 3)$, donde esta el corazón del hombre de hojalata [6], iniciamos con un paso de una unidad a lo largo del eje x , hasta el punto $a(1, 0, 0)$, a continuación dos,

2.3. Representación en coordenadas cartesianas.

10

a lo largo del eje y , para arribar al punto $b(1, 2, 0)$ y finalmente tres, a lo largo del eje z hasta el punto $p(1, 2, 3)$. Es decir, realizamos el recorrido del origen o al punto $p(1, 2, 3)$, a lo largo del camino indicado por la línea de puntos cercanos. Esta forma de ubicar los puntos, es similar a la realizada por el “sensor de posición digitalizado”, utilizado en los ojos del hombre de hojalata, ver figura (2.2 (a)).

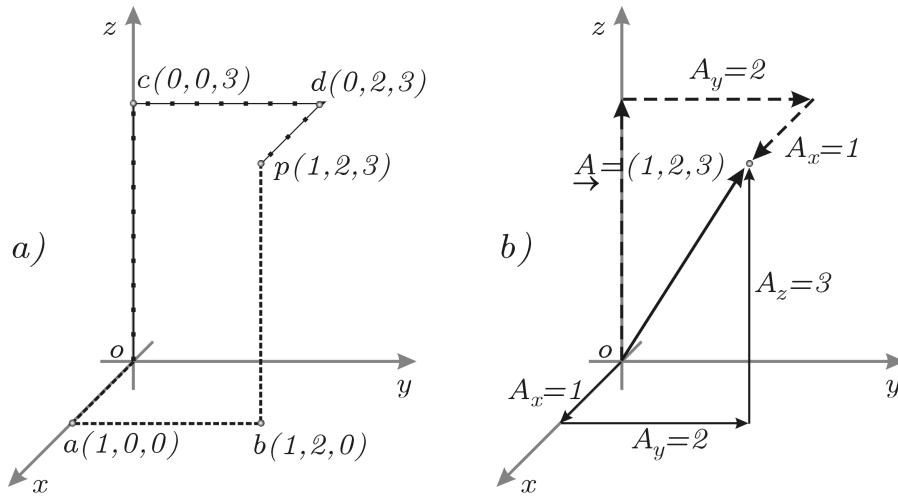


Figura 2.2: a) Ubicación del punto $p(1, 2, 3)$, como lo haría un sistema de “ubicación digital”, utilizado en los ojos del hombre de hojalata. b) Ubicación del vector $\vec{A} = (1, 2, 3)$. Los movimientos de la mano del hombre de hojalata, corresponden a las componentes del vector.

Es posible ubicar el punto $p(1, 2, 3)$, de otra forma, por ejemplo: moviéndose tres unidades a lo largo del eje z , hasta $c(0, 0, 3)$, posteriormente, dos unidades a lo largo del eje y , hasta $d(0, 2, 3)$, finalmente, una unidad a lo largo del eje x hasta $p(1, 2, 3)$, o sea, a lo largo del camino indicado por la línea de puntos separados en la figura (2.2(a)).

Para dibujar el vector $A = (1, 2, 3)$, permitamos al hombre de hojalata (ubicado en el origen) tocar el punto $\vec{p}(1, 2, 3)$. El tendrá, en consecuencia que estirar su brazo a lo largo del eje x una unidad, o sea, su movimiento tendrá componente $A_x = 1$ (ver flechas sólidas de la figura (2.2 (b))). El brazo del hombre de hojalata no es elástico, por lo tanto, no es posible doblarlo, pero si puede mover su mano a lo largo del eje y dos unidades (componente $A_y = 2$), finalmente subirá su mano al lo largo del eje z tres unidades (componente $A_z = 3$). El vector $A = (1, 2, 3)$, estará determinado por el brazo del hombre de hojalata, que parte del origen y llega hasta $p(1, 2, 3)$.

Para tocar el punto $p(1, 2, 3)$, él puede realizar sus movimientos en cualquier orden, es decir, cada movimiento será independiente, por ejemplo: ver las flechas punteadas en la figura

2.3. Representación en coordenadas cartesianas.

(2.2) (b)).

Esta última observación, nos lleva a interpretar físicamente, la definición de vectores linealmente independientes. Por medio del jostick (mecanismo utilizado en la mayoría de los juegos de video) ampliaremos este concepto. Supongamos el objetivo del juego es: tocar el corazón, localizado en el punto $p(1, 2, 3)$. Rápidamente movemos nuestro jostick a lo largo del eje x , una unidad, posteriormente dos unidades a lo largo del eje y , para finalmente moverlo tres unidades a lo largo del eje z y sujetar el corazón. Debido a la emoción del juego, esta secuencia de movimientos puede cambiar de acuerdo a nuestra posición de la mano o influencia de la Bruja Mala del Oeste [6]; obteniendo los mismos resultados. La necesidad de realizar una secuencia de tres movimientos en las direcciones permitidas, permanecerá sin cambio. Denotemos a estas direcciones permitidas como:

$$\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z, \quad (2.2)$$

para los movimientos, en las direcciones positivas –dirección donde aumentan– de las coordenadas x , y y z , respectivamente, ver en la figura (2.3) (a)).

El movimiento neto, o sea, el vector \vec{A} se escribirá como:

$$\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z, \quad (2.3)$$

$$= 1\hat{a}_x + 2\hat{a}_y + 3\hat{a}_z, \quad (2.4)$$

donde A_x , A_y y A_z , son las componentes del vector, o bien, las magnitudes de los movimientos necesarios del jostick en cada una de las direcciones permitidas, ver en la figura (2.3(b)). A las direcciones permitidas, ver ecuación (2.2), se les conoce como vectores unitarios (de magnitud uno), y al conjunto

$$\{\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z\}, \quad (2.5)$$

le llamaremos base cartesiana. Antiguamente se denotaba por $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$. Es importante notar que el orden en los términos de la ecuación (2.4), no afecta la representación del vector, o sea, podemos mover el jostick en cualquier secuencia, sin afectar el objetivo final.

¿Qué pasaría, si el corazón estuviera localizado en $q(-1, 4, -3)$? ¿Comó lo ubicaría el hombre de hojalata? ¡Claro! En relación con la propiedad 3 del espacio vectorial, podemos cambiar la dirección de un vector cuando lo multiplicamos por -1 , permitiéndonos cambiar las direcciones de algunas componentes del vector o movimientos del jostick. Entonces el vector \vec{B} , correspondiente al punto $q(-1, 4, -3)$, será:

$$\vec{B} = -1\hat{a}_x + 4\hat{a}_y - 3\hat{a}_z.$$

2.4. Representación en coordenadas cilíndricas.

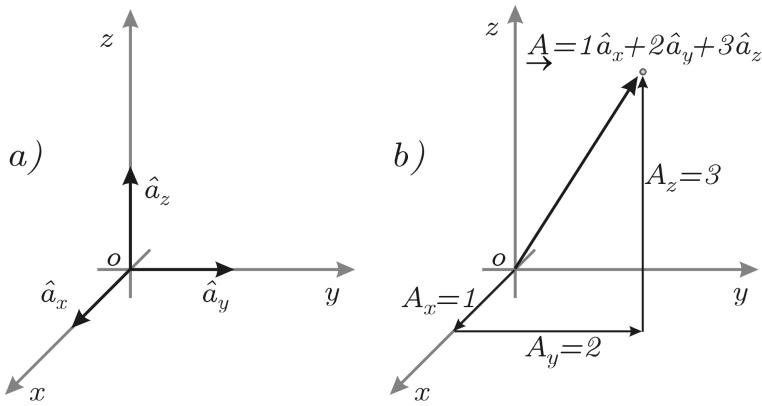


Figura 2.3: Para encontrar la dirección de un vector que no pase por el origen de coordenadas, basta con restar de las coordenadas de la flecha, las coordenadas de origen del vector.

Entonces, cualquier vector en el espacio, podrá ser representado por la combinación lineal de la forma definida en la ecuación (2.3), es decir, los vectores (2.5) forman una base y son linealmente independientes.

Además, es importante observar que: dos vectores son iguales si y sólo si son iguales componente a componente.

Analicemos cómo ubicar un vector, que no necesariamente pase por el origen de coordenadas. Supongamos que deseamos encontrar la dirección del vector \vec{C} en la figura (2.4). Aquí, por la método del paralelogramo, la suma de los vectores $\vec{A} + \vec{C}$ será el vector \vec{B} , de donde

$$\vec{C} = \vec{B} - \vec{A} .$$

Sí, $\vec{A} = (A_x, A_y, A_z)$ y $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$, el vector \vec{C} , tiene por coordenadas o dirección

$$\vec{C} = (B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z) ,$$

es decir, para hallar su dirección basta con restar, de las coordenadas de la flecha, las coordenadas de origen del vector.

2.4. Representación en coordenadas cilíndricas.

Debido a la forma de los objetos considerados en problemas físicos (cables, esferas, tapaderas, etc), los parámetros y cantidades involucradas, resultan ser difíciles de manipular en coordenadas cartesianas, de ahí surge la necesidad de introducir coordenadas más adecuadas.

2.4. Representación en coordenadas cilíndricas.

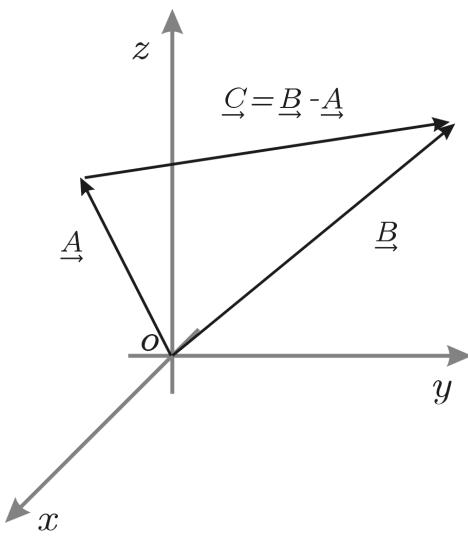


Figura 2.4: Para encontrar la dirección de un vector que no pase por el origen de coordenadas, basta con restar de las coordenadas de la flecha, las coordenadas de origen del vector.

Para problemas que involucren, alambres rectos o en espiral, tapas circulares o bien objetos en forma cilíndrica, utilizaremos las coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \\ z &= z \end{aligned} \tag{2.6}$$

cuyos rangos de valores son: $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $-\infty < z < \infty$. Haciendo uso de la Fig. 1.5a, la coordenada r , es medida desde el origen o , hasta el punto $p(r, \theta, 0)$, que es la proyección del punto $p(r, \theta, z)$, en el plano xy . La coordenada θ , es el ángulo (medido sobre el plano xy), entre el eje x y la línea imaginaria a lo largo de r . Finalmente z se mide igual que en las coordenadas cartesianas.

Si nuestra amiga, la Bruja Buena del Norte [6], desea tocar con su varita mágica el punto $p(r, \theta, z)$ (localizada inicialmente en el origen), tendrá que mover su mano a lo largo de eje x una distancia r , posteriormente rotar su brazo un ángulo θ , para finalmente deslizar su mano paralelamente al eje z , la distancia z requerida para tocar el punto.

Cuando $z = 0$ (o cuando es constante), obtenemos las coordenadas polares (r, θ) , definidas en el plano xy ($z = \text{constante}$), como consecuencia podemos escribir,

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z. \tag{2.7}$$

Los vectores unitarios \hat{a}_r , \hat{a}_θ y \hat{a}_z , están dirigidos hacia las direcciones donde aumentan

2.4. Representación en coordenadas cilíndricas.

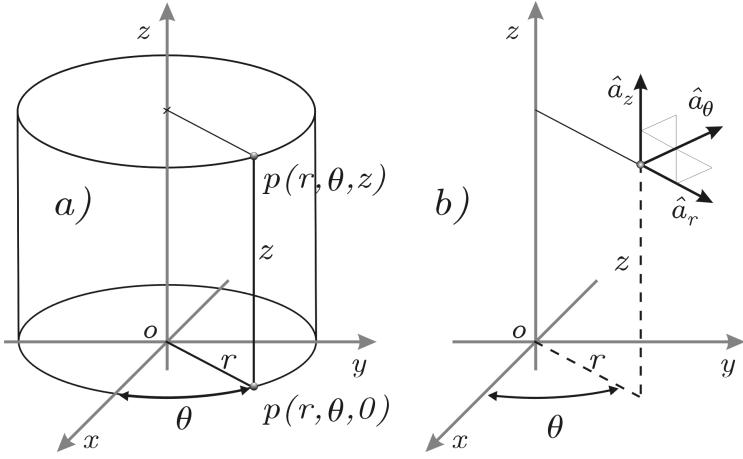


Figura 2.5: a) Localización del punto $p(r, \theta, z)$, en coordenadas cilíndricas. b) Los vectores unitarios \hat{a}_r , \hat{a}_θ y \hat{a}_z , están dirigidos en las direcciones que aumentan las coordenadas r , θ y z , respectivamente.

sus coordenadas respectivas, r , θ y z , ver figura (2.5(b)). Estos vectores, aunque son de magnitud constante (unitarios), sus direcciones no lo son, excepto el vector \hat{a}_z .

Supongamos que la Bruja Mala del Oeste usa de “mira telescopica”, el vector unitario \hat{a}_r , para ubicar a Dorothy y las zapatillas de Rubí [6]. Al cambiar el ángulo θ apuntará a distintos objetivos; siempre de manera radial (en la dirección que aumenta r), pero en distintos ángulos θ . Para el vector unitario \hat{a}_θ , sucederá algo similar; apuntará a distintos objetivos siempre de manera tangente a la envoltura del cilindro (en la dirección que aumenta la coordenada θ), pero en distintos ángulos $\theta + \pi/2$.

Si la Bruja Mala de Oeste, usará de “mira telescopica” al vector \hat{a}_z , siempre apuntará hacia arriba, (donde aumenta la coordenada z), independientemente del ángulo θ . Una situación similar, se tendrá con los vectores unitarios \hat{a}_x y \hat{a}_y , de las coordenadas cartesianas, ya que siempre apuntarán a lo largo de las coordenadas x y y , respectivamente. Concluimos, que los vectores unitarios (2.2), son constantes en magnitud y dirección, es decir, son vectores constantes.

Los vectores unitarios \hat{a}_r , \hat{a}_θ y \hat{a}_z , forman una base para los vectores en el espacio, o sea, cualquier vector en coordenadas cilíndricas, se podrá escribir como la combinación lineal,

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_z \hat{a}_z , \quad (2.8)$$

donde A_r , A_θ y A_z , son las componentes del vector en coordenadas cilíndricas.

2.5. Representación en coordenadas esféricas.

Con la misma motivación, el uso de las coordenadas esféricas nos permitirá resolver problemas donde se involucren, esferas o semi-esferas (huecas o sólidas), conos con “helado”, etcétera. Las coordenadas para ubicar un punto en este sistema son; r , θ y ϕ , a decir verdad, un punto en coordenadas esféricas se denota como $p(r, \theta, \phi)$, cuyos rangos de valores son: $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$, como lo mostramos en la figura (2.6(a)). La coordenada r , es medida desde el origen o , hasta el punto $p(r, \theta, \phi)$. La coordenada θ , se mide a partir del eje z , sobre el plano que forma la línea imaginaria a lo largo r y el eje z . Finalmente ϕ , es el ángulo formado (sobre el plano xy), entre el eje x y la proyección de r , sobre el plano xy .

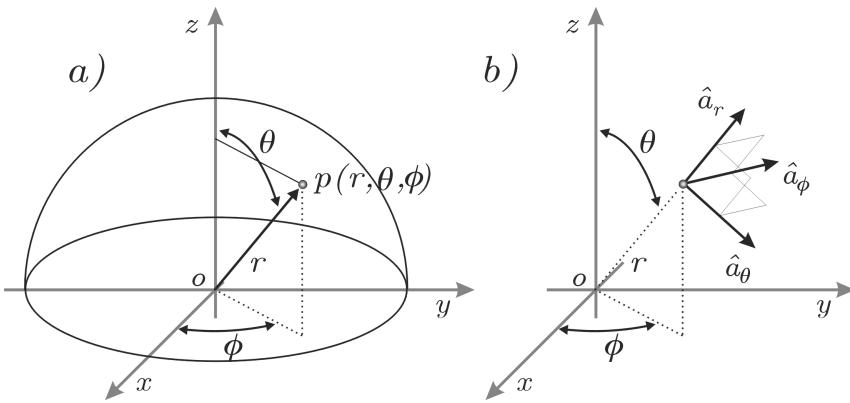


Figura 2.6: a) Localización del punto $p(r, \theta, \phi)$, en coordenadas esféricas. b) Los vectores unitarios \hat{a}_r , \hat{a}_θ y \hat{a}_ϕ , están dirigidos en las direcciones que aumentan las coordenadas r , θ y ϕ , respectivamente.

La relación entre las coordenadas cartesianas y las esféricas es,

$$x = r \sin \theta \cos \phi , \quad y = r \sin \theta \sin \phi , \quad z = r \cos \theta . \quad (2.9)$$

Los vectores unitarios \hat{a}_r , \hat{a}_θ y \hat{a}_ϕ , están dirigidos, en las direcciones que aumentan sus coordenadas respectivas r , θ y ϕ , ver figura (2.6(b)). Estos vectores no son constantes (aunque su magnitud es constante sus direcciones cambian).

Los vectores unitarios \hat{a}_r , \hat{a}_θ y \hat{a}_ϕ , forman una base para los vectores en el espacio, o sea, cualquier vector en coordenadas esféricas, se podrá escribir como la combinación lineal

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi , \quad (2.10)$$

donde A_r , A_θ y A_ϕ , son las componentes del vector en coordenadas esféricas.

2.5. Representación en coordenadas esféricas.

16

La despedida del hombre de hojalata es en coordenadas esféricas; aparece de pie a lo largo del eje z , con su cabeza a una altura r , nos hace reverencias de ángulo θ , girando alrededor de su pies un ángulo ϕ , agradeciendo su ayuda para encontrar su corazón.

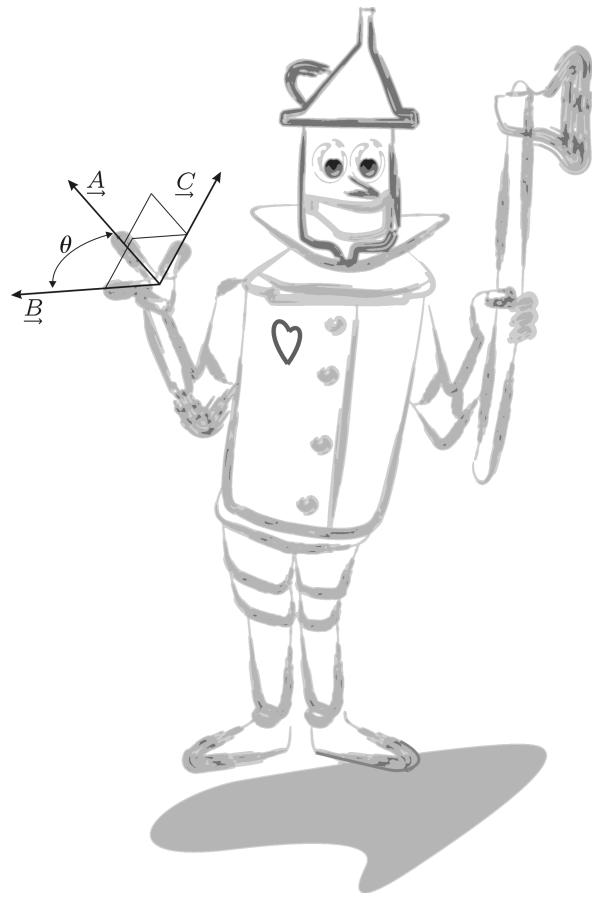


Figura 2.7: El hombre de hojalata enviando con su mano derecha, un “saludo vectorial”.

3

Productos: “punto y cruz”

3.1. Productos entre vectores: punto y cruz.

En la práctica es más sencillo trabajar con cantidades, de la misma manera que usamos números y vectores. En general, se trabaja con dos tipos de cantidades; escalares y vectoriales. Son cantidades escalares, aquellas que están perfectamente determinadas por una magnitud (número), como son: la masa, el trabajo, el tiempo, la temperatura y el voltaje. Las cantidades vectoriales requieren además de una magnitud una dirección, por ejemplo: el desplazamiento, la velocidad, la fuerza y la intensidad de campo eléctrico.

Es claro, que si nos preguntan la hora, bastará decir, son las 3 : 25 pm, sin embargo, si nos piden aplicar una fuerza sobre un objeto, tendríamos que preguntar la dirección o hacia donde debemos aplicarla.

Resulta natural (de la definición de espacio vectorial), multiplicar a un vector por un escalar. Sí, el escalar c es positivo, el vector no cambiará su dirección; por el contrario si es negativo. Además, si c es mayor que la unidad, aumentará su amplitud en la misma proporción; si es menor, la disminuye.

¿Habrá alguna forma de multiplicar dos vectores? En realidad hay dos formas; un tipo produce una cantidad escalar (producto punto), mientras otro, una cantidad vectorial (producto cruz).

Definamos los productos “punto y cruz”, para tejer nuestra telaraña de propiedades vec-

3.1. Productos entre vectores: punto y cruz.

toriales. El producto punto entre dos vectores \vec{A} y \vec{B} , es una cantidad escalar definida por

$$\begin{aligned}\vec{A} \bullet \vec{B} &= \vec{B} \bullet \vec{A} \\ &= |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \theta = AB \cos \theta,\end{aligned}\tag{3.1}$$

donde θ , es el ángulo entre los vectores \vec{A} y \vec{B} . Ver figura (3.1).

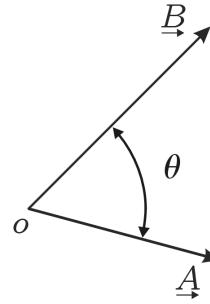


Figura 3.1: El producto punto de dos vectores \vec{A} y \vec{B} , es una cantidad escalar definida por $\vec{A} \bullet \vec{B} = AB \cos \theta$, donde A y B son las magnitudes y θ , es el ángulo entre los vectores.

Sí, \vec{A} y \vec{B} son ortogonales, es decir, si en ángulo entre ellos es de $\theta = \pi/2 = 90^\circ$, el producto punto de \vec{A} y \vec{B} , será cero, ver ecuación (3.1). Y aún más; dos vectores distintos de cero tienen producto punto cero, si y sólo si, ellos son ortogonales.

Cuando $\vec{A} = \vec{B}$, en (3.1) tendremos:

$$\vec{A} \bullet \vec{A} = A^2 = |\vec{A}|^2,\tag{3.2}$$

como consecuencia, que el ángulo entre un vector y él mismo es cero.

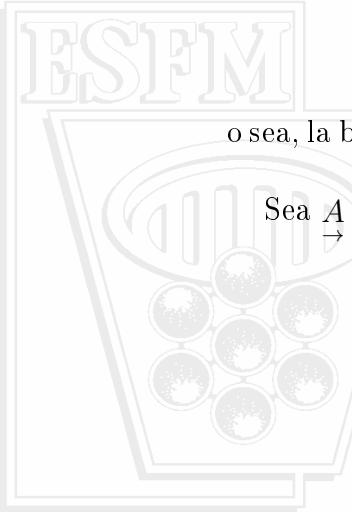
Aplicando lo anterior, a los vectores base en coordenadas cartesianas, tendremos:

$$\begin{aligned}\hat{a}_x \bullet \hat{a}_y &= \hat{a}_y \bullet \hat{a}_z = \hat{a}_z \bullet \hat{a}_x = 0, \\ \hat{a}_x \bullet \hat{a}_x &= \hat{a}_y \bullet \hat{a}_y = \hat{a}_z \bullet \hat{a}_z = 1,\end{aligned}\tag{3.3}$$

o sea, la base (2.5), es ortonormal; vectores base, mutuamente ortogonales y de magnitud uno.

Sea $\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$ y $\vec{B} = B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z$, entonces:

$$\begin{aligned}\vec{A} \bullet \vec{B} &= (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \bullet (B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z), \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z,\end{aligned}\tag{3.4}$$



3.1. Productos entre vectores: punto y cruz.

19

donde hemos aplicado recurrentemente las relaciones (3.3). La magnitud del \vec{A} , será

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}, \quad (3.5)$$

obtenida con ayuda de (3.2).

El producto cruz entre dos vectores, es más elaborado, porque además de determinar su magnitud debemos encontrar su dirección. El producto cruz de dos vectores, es un vector perpendicular a ambos vectores. Por ejemplo: Consideremos los vectores \vec{A} y \vec{B} , la dirección del producto $\vec{A} \times \vec{B}$, estará dada por la regla de la mano derecha; estire su dedos de la mano derecha en la dirección del primer vector, en nuestro caso es el vector \vec{A} , cierre su mano simulando que desea “atrapar” al vector \vec{B} , de tal manera, que el dedo pulgar determinará la dirección del producto cruz, ver la figura (3.2) y el vector \vec{C} de la figura (2.7).

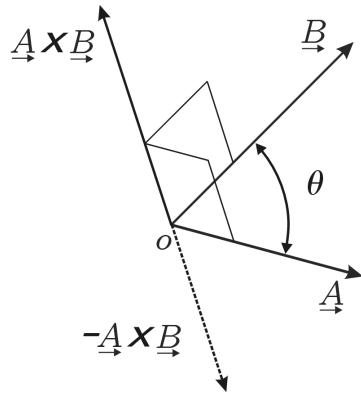


Figura 3.2: El producto cruz de dos vectores \vec{A} y \vec{B} , es un vector perpendicular a ambos vectores –ver los recuadros entre los vectores– cuya dirección está determinada por la regla de la mano derecha, y su magnitud definida por $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta$, donde θ es el ángulo entre los vectores; A y B son sus magnitudes.

La magnitud del producto cruz es:

$$|\vec{A} \times \vec{B}| = AB \sin \theta \quad (3.6)$$

El producto cruz, no es comutativo, es decir $\vec{B} \times \vec{A} \neq \vec{A} \times \vec{B}$, para probarlo, será ilustrativo utilizar la regla de la mano derecha; iniciando con el vector \vec{B} , tratamos de “atrapar” el vector \vec{A} , y el dedo pulgar apuntará en la dirección contraria a $\vec{A} \times \vec{B}$. Como el único cambio que

3.1. Productos entre vectores: punto y cruz.

20

realizamos fue en el orden del producto, o sea, mantuvimos sin cambio las magnitudes y el ángulo entre los vectores, escribimos que:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}, \quad (3.7)$$

de donde

$$\vec{A} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{A} = 0 \quad (3.8)$$

porque el cero es el único número igual a su negativo. Este resultado esta de acuerdo con la ecuación (3.6), en virtud que el ángulo entre un vector y sí mismo, es cero.

$$\begin{aligned} \hat{a}_x \times \hat{a}_y &= \hat{a}_z, & \hat{a}_y \times \hat{a}_x &= -\hat{a}_z, \\ \hat{a}_y \times \hat{a}_z &= \hat{a}_x, & \hat{a}_z \times \hat{a}_y &= -\hat{a}_x, \\ \hat{a}_z \times \hat{a}_x &= \hat{a}_y, & \hat{a}_x \times \hat{a}_z &= -\hat{a}_y, \\ \hat{a}_x \times \hat{a}_x &= \hat{a}_y \times \hat{a}_y = \hat{a}_z \times \hat{a}_z = 0. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Sea $\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$ y $\vec{B} = B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z$, entonces:

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \times (B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z), \\ &= (A_y B_z - A_z B_y) \hat{a}_x + (A_z B_x - A_x B_z) \hat{a}_y + (A_x B_y - A_y B_x) \hat{a}_z, \end{aligned} \quad (3.10)$$

donde hemos aplicado recurrentemente las relaciones (3.9). La relación (3.10), se puede escribir como un determinante, sin embargo, considero que es una costumbre anticuada. Es importante hacer notar, que las relaciones (3.1), (3.2), (3.7) y (3.8), son independientes de la representación, es decir, son propiedades intrínsecas de los vectores.



3.2. Ecuaciones de la recta y el plano.

21

3.2. Ecuaciones de la recta y el plano.

Para encontrar la ecuación de la recta en forma vectorial, será necesario suponer que tiene por dirección el vector $\vec{D} = (A, B, C)$ (línea punteada en la figura (3.3) y que pasa por el punto $p_o(x_o, y_o, z_o)$.

La ecuación de la recta define las coordenadas del punto $p(x, y, z)$, a lo largo del vector D , es decir, localiza la punta de la flecha del vector $t\vec{D}$. El parámetro t , mueve la punta de la flecha a lo largo del vector \vec{D} . Si t es positivo, el punto p , se alejará de p_o en dirección de \vec{D} ; si es negativo, en dirección contraria. Cuando $t = 0$, $p = p_o$, ver figura (3.3).

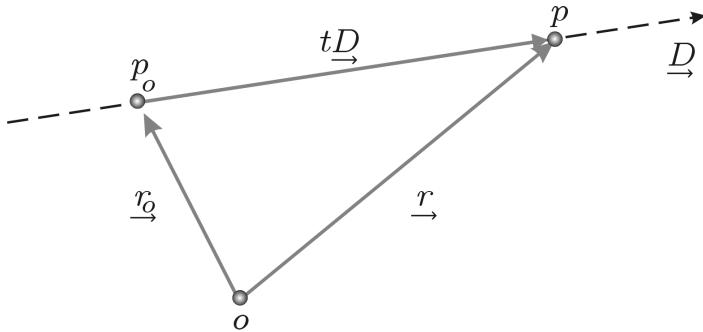


Figura 3.3: La ecuación de la recta, esta determinada por una dirección $\vec{D} = (A, B, C)$ y un punto $r_o = (x_o, y_o, z_o)$. En forma vectorial es: $\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{D}t$. En sus componentes o forma escalar es: $x - x_o = tA$, $y - y_o = tB$, $z - z_o = tC$, donde t es el parámetro que da movimiento al punto p sobre la recta.

Por la ley del paralelogramo, escribimos $\vec{r} - \vec{r}_o = \vec{tD}$, de donde

$$\vec{r} = \vec{r}_o + \vec{tD}, \quad (3.11)$$

que es la ecuación de la recta en forma vectorial. Al sustituir los vectores; $\vec{r} = (x, y, z)$, $\vec{r}_o = (x_o, y_o, z_o)$ y $\vec{D} = (A, B, C)$, obtenemos

$$(x - x_o, y - y_o, z - z_o) = t(A, B, C). \quad (3.12)$$

Recordando que un vector es igual a otro si sus componentes son iguales, obtenemos finalmente

$$\frac{x - x_o}{A} = \frac{y - y_o}{B} = \frac{z - z_o}{C} = t, \quad (3.13)$$

3.2. Ecuaciones de la recta y el plano.

22

que es la ecuación de la recta en forma parámetrica o escalar. Supongamos que $C = 0$, podemos escribir $(x - x_o, y - y_o, z - z_o) = t(A, B, 0)$, de donde:

$$\frac{x - x_o}{A} = \frac{y - y_o}{B} = t, \quad z = z_o, \quad (3.14)$$

eliminando t : obtenemos la conocida ecuación de la recta en el plano xy

$$y - y_o = \left(\frac{B}{A}\right)(x - x_o). \quad (3.15)$$

¿Cómo determinamos la ecuación de un plano? ¡Claro! También por medio de una dirección **perpendicular** al plano, y un punto sobre el mismo, ver la figura (3.4).

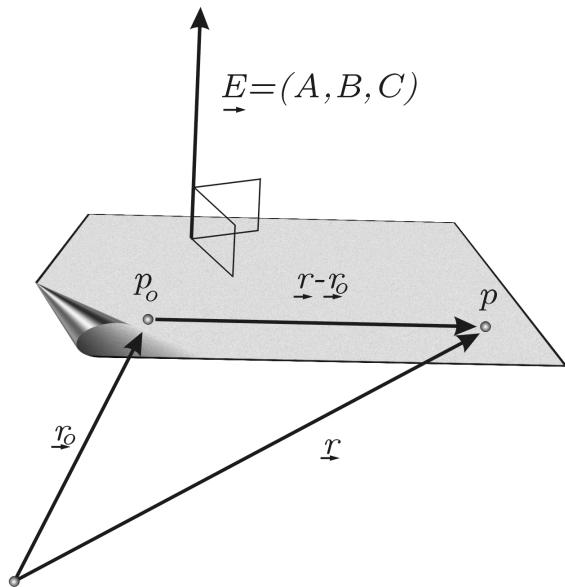


Figura 3.4: La ecuación del plano es: $Ax + By + Cz + D = 0$, donde A, B, C , son las componentes del vector perpendicular al plano, y D se calcula conociendo un punto $p_o(x_o, y_o, z_o)$ sobre el plano, es decir, $D = -(Ax_o + By_o + Cz_o)$.

La ecuación de un plano determina la posición del punto $p(x, y, z)$, deslizándose sobre una superficie plana. La forma de “orientar.” las superficies es por medio de un vector perpendicular a ellas, entonces para nuestro plano será el vector $\vec{E} = (A, B, C)$, ver la figura (3.4). El vector \vec{r} , se mueve sobre el plano, mientras que el vector \vec{r}_o está fijo. El vector $\vec{r} - \vec{r}_o$, está sobre el plano, es decir, es perpendicular al vector \vec{E} , entonces la ecuación vectorial de plano es:

$$(\vec{r} - \vec{r}_o) \bullet \vec{E} = 0, \quad (3.16)$$

3.2. Ecuaciones de la recta y el plano.

que determina la condición –restricción– que debe cumplir el punto p , para moverse sobre el plano. Al desarrollar (2,13), obtenemos

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (3.17)$$

donde $D = -(Ax_o + By_o + Cz_o)$.

Otra forma de explicar lo anterior sería: La ecuación (2,13) es la ecuación general del plano, donde A, B, C y D son constantes a determinar. A, B y C son las componentes x, y y z del vector perpendicular al plano. Para determinar D , es necesario conocer un punto sobre el plano, por ejemplo $p_o = (x_o, y_o, z_o)$, si este punto está sobre el plano, debe satisfacer su ecuación, por lo tanto al sustituirlo tendremos que: $D = -(Ax_o + By_o + Cz_o)$.

Como un aplicación de las ecuaciones del plano y la recta, supongamos que deseamos calcular la distancia que hay del punto $p(x_o, y_o, z_o)$, al plano $Ax + By + Cz + D = 0$, ver la figura (3.5).

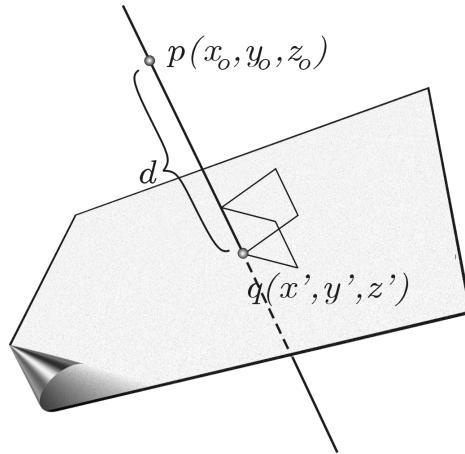


Figura 3.5: La distancia del punto $p(x_o, y_o, z_o)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$, es $d = \frac{|Ax_o + By_o + Cz_o + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Seríamos muy felices si conocieramos el punto $q(x', y', z')$, es decir, el punto de intersección del plano y la recta perpendicular al mismo –que pasa por $p(x_o, y_o, z_o)$ – porque la distancia entre los puntos p y q , es:

$$d = \sqrt{(x' - x_o)^2 + (y' - y_o)^2 + (z' - z_o)^2}. \quad (3.18)$$

Observando la ecuación del plano $Ax + By + Cz + D = 0$, tenemos que las componentes de un vector perpendicular al mismo, son (A, B, C) , por lo tanto, la ecuación de la recta que pase por $p(x_o, y_o, z_o)$ en la dirección (A, B, C) , es:

$$\frac{x - x_o}{A} = \frac{y - y_o}{B} = \frac{z - z_o}{C} = t. \quad (3.19)$$

3.2. Ecuaciones de la recta y el plano.

Si $q(x', y', z')$, es el punto de intersección de la recta y el plano, esté debe satisfacer ambas ecuaciones, es decir,

$$\begin{aligned} x' - x_o &= At , \\ y' - y_o &= Bt , \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned} z' - z_o &= Ct , \\ Ax' + By' + Cz' + D &= 0 . \end{aligned} \tag{3.21}$$

De las ecuaciones (3.20), obtenemos

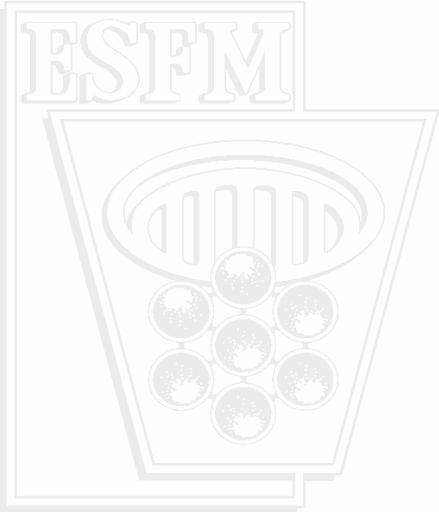
$$d = \sqrt{(x' - x_o)^2 + (y' - y_o)^2 + (z' - z_o)^2} = | t | \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} . \tag{3.22}$$

De la combinación de las ecuaciones (3.20) y (3.21), obtenemos

$$t = -\frac{Ax_o + By_o + Cz_o + D}{A^2 + B^2 + C^2} , \tag{3.23}$$

donde finalmente combinando las ecuaciones (3.22) y (3.23), obtenemos

$$d = \frac{| Ax_o + By_o + Cz_o + D |}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} . \tag{3.24}$$



3.3. Cambio de coordenadas.

3.3. Cambio de coordenadas.

Una aplicación importante del producto punto son las proyecciones. La proyección escalar de un vector \vec{a} sobre un vector \vec{b} , es la longitud del segmento AB mostrado en la Fig.2.6. La proyección del vector \vec{a} sobre \vec{b} es el vector cuya longitud es el segmento AB y tiene la misma dirección (o dirección opuesta si el escalar es negativo) que \vec{b} .

La proyección escalar del vector \vec{a} en \vec{b} , es decir, la componente de \vec{a} sobre \vec{b} es:

$$a_b = \vec{a} \bullet \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad (3.25)$$

de donde, la proyección del vector \vec{a} en \vec{b} se escribe

$$\vec{a}_b = a_b \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = (\vec{a} \bullet \vec{b}) \frac{\vec{b}}{|\vec{b}|^2}, \quad (3.26)$$

Aquí se observamos la utilidad de tener vectores unitarios, por ejemplo definiendo el vector unitario $\hat{b} = \vec{b}/|\vec{b}|$, las ecuaciones (3.25) y (3.26) se escriben

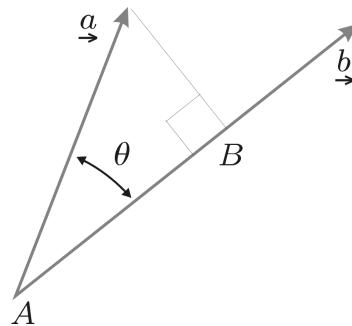


Figura 3.6: La proyección escalar de un vector \vec{a} sobre un vector \vec{b} , es: $a_b = \vec{a} \bullet \hat{b}$; la proyección del vector \vec{a} sobre \vec{b} es: $\vec{a}_b = (\vec{a} \bullet \hat{b}) \hat{b}$, donde en ambos casos $\hat{b} (= \vec{b}/|\vec{b}|)$, es el vector unitario en la dirección de \vec{b} . En otras palabras, cuando se deseé calcular la proyección de un vector en otro, asegúrese que ése otro sea un vector unitario.

Como hemos mencionado en el capítulo uno, los vectores son independientes de la representación, es decir, el vector \vec{A} , será igual en cualquier sistema de coordenadas. Es claro que cambiarán sus componentes en cada representación.

3.3. Cambio de coordenadas.

26

Consideremos el vector $\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$, en coordenadas cartesianas; suponga además, que desea calcular la componente x del vector \vec{A} , es decir A_x , entonces, será necesario proyectar el vector \vec{A} en la dirección de \hat{a}_x –observe que \hat{a}_x es un vector unitario–, por lo tanto,

$$\vec{A} \bullet \hat{a}_x = (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \bullet \hat{a}_x = A_x ,$$

donde hemos utilizado (3.3). Es claro que $A_y = \vec{A} \bullet \hat{a}_y$ y que $A_z = \vec{A} \bullet \hat{a}_z$.

Si deseamos cambiar a coordenadas cilíndricas el vector \vec{A} , este deberá tener la forma,

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_z \hat{a}_z ,$$

donde

$$\begin{aligned} A_r &= \vec{A} \bullet \hat{a}_r = (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \bullet \hat{a}_r , \\ A_\theta &= \vec{A} \bullet \hat{a}_\theta = (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \bullet \hat{a}_\theta , \\ A_z &= \vec{A} \bullet \hat{a}_z = (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \bullet \hat{a}_z . \end{aligned} \quad (3.27)$$

Para calcular dichas componentes, debemos realizar los productos punto indicados en (3.27). Por ejemplo: para la componente A_r , debemos efectuar $\hat{a}_x \bullet \hat{a}_r$, $\hat{a}_y \bullet \hat{a}_r$ y $\hat{a}_z \bullet \hat{a}_r$.

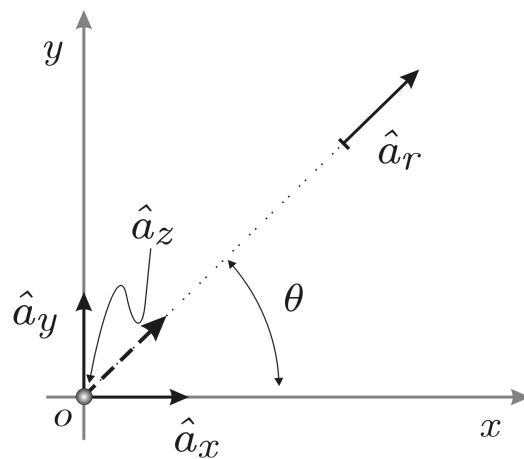


Figura 3.7: Trasladando el vector \hat{a}_r al origen de coordenadas (vector en línea punteada), es evidente que los ángulos entre éste y los vectores \hat{a}_x , \hat{a}_y y \hat{a}_z son: θ , $\pi/2 - \theta$ y $\pi/2$ respectivamente. El vector \hat{a}_z se indica con un punto en el origen, semejando la cabeza de una flecha dirigiéndose hacia afuera de la página.

3.3. Cambio de coordenadas.

•	\hat{a}_r	\hat{a}_θ	\hat{a}_z
\hat{a}_x	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0
\hat{a}_y	$\sin \theta$	$\cos \theta$	0
\hat{a}_z	0	0	1

Tabla 3.1: Productos punto necesarios para realizar el cambio a coordenadas cilíndricas del vector \vec{A} en coordenadas cartesianas, o viceversa.

Con ayuda de la figura (3.7), en donde transladamos el vector unitario \hat{a}_r al origen de coordenadas (vector en línea punteada) y de la definición de producto punto (2.1), escribimos,

$$\hat{a}_x \bullet \hat{a}_r = (1)(1) \cos \theta = \cos \theta ,$$

donde hemos considerado que: ambos vectores son de magnitud uno y el ángulo entre ellos es θ . Con la misma idea

$$\hat{a}_y \bullet \hat{a}_r = (1)(1) \cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta ,$$

ya que el ángulo entre ellos es de, $\pi/2 - \theta$, además utilizamos la identidad, $\cos(\pi/2 - \theta) = \cos(\pi/2) \cos \theta + \sin(\pi/2) \sin \theta = \sin \theta$. Por último,

$$\hat{a}_z \bullet \hat{a}_r = (1)(1) \cos(\pi/2) = 0 ,$$

ya que \hat{a}_z y \hat{a}_r son ortogonales.

Con ayuda de la figura (3.8), donde hemos trasladado el vector \hat{a}_θ al origen de coordenadas (vector en línea punteada), observamos que los ángulos entre éste y los vectores \hat{a}_x , \hat{a}_y y \hat{a}_z son: $\pi/2 + \theta$, θ y $\pi/2$ respectivamente. Entonces directamente,

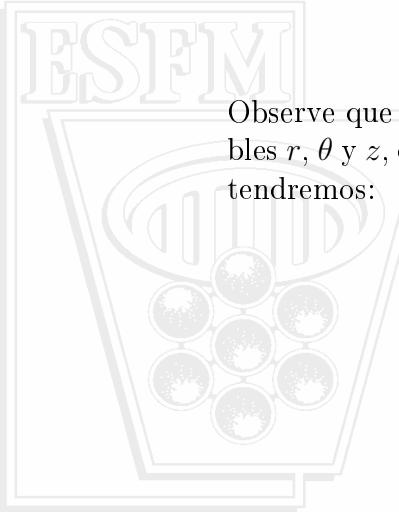
$$\hat{a}_x \bullet \hat{a}_\theta = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta , \quad \hat{a}_y \bullet \hat{a}_\theta = \cos \theta , \quad \hat{a}_z \bullet \hat{a}_\theta = 0 .$$

Los productos punto, necesarios para realizar el cambio de coordenadas del vector \vec{A} , los escribimos en la tabla 3.1. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} A_r &= A_x(r, \theta, z) \cos \theta + A_y(r, \theta, z) \sin \theta , \\ A_\theta &= -A_x(r, \theta, z) \sin \theta + A_y(r, \theta, z) \cos \theta , \\ A_z &= A_z(r, \theta, z) . \end{aligned} \tag{3.28}$$

Observe que las componentes A_x , A_y y A_z , deben escribirse en términos de las nuevas variables r , θ y z , definidas por (2.7). De la misma manera, de coordenadas cilíndricas a cartesianas, tendremos:

$$\begin{aligned} A_x &= A_r(x, y, z) \cos \theta - A_\theta(x, y, z) \sin \theta , \\ A_y &= A_r(x, y, z) \sin \theta + A_\theta(x, y, z) \cos \theta , \\ A_z &= A_z(x, y, z) . \end{aligned} \tag{3.29}$$



3.3. Cambio de coordenadas.

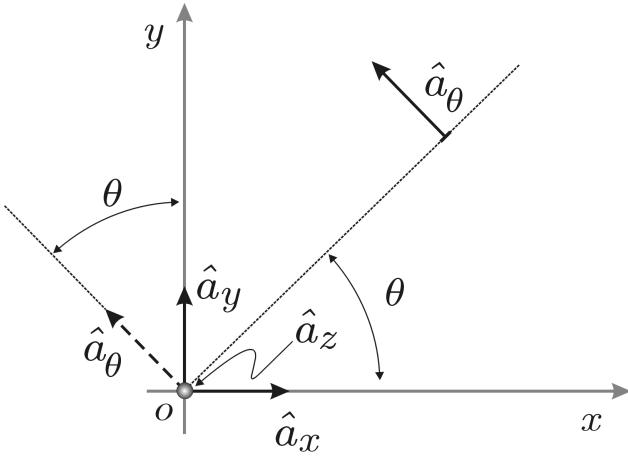


Figura 3.8: Trasladando el vector \hat{a}_θ al origen de coordenadas, tenemos que los ángulos entre éste y los vectores \hat{a}_x , \hat{a}_y y \hat{a}_z son: $\pi/2 + \theta$, θ y $\pi/2$ respectivamente. El vector \hat{a}_z se indica con un punto en el origen, semejando la cabeza de una flecha dirigiéndose hacia afuera de la página.

Para terminar esta sección, realicemos el cambio del vector \vec{A} en coordenadas cartesianas a coordenadas esféricas, es decir, a la forma

$$\vec{A} = A_r \hat{a}_r + A_\theta \hat{a}_\theta + A_\phi \hat{a}_\phi ,$$

donde sus componentes son:

$$\begin{aligned} A_r &= \vec{A} \bullet \hat{a}_r = (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \bullet \hat{a}_r , \\ A_\theta &= \vec{A} \bullet \hat{a}_\theta = (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \bullet \hat{a}_\theta , \\ A_\phi &= \vec{A} \bullet \hat{a}_\phi = (A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z) \bullet \hat{a}_\phi . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Para simplificar los productos sugeridos en (3.30), proyectemos el vector \hat{a}_r , en coordenadas esféricas en la dirección del vector \hat{n} , definido sobre el plano xy , ver la figura (3.9). Observando que el ángulo entre ellos es de $\pi/2 - \theta$, la proyección será:

$$(\hat{a}_r \bullet \hat{n}) \hat{n} = \hat{n} \cos(\pi/2 - \theta) = \hat{n} \sin \theta ,$$

Entonces con ayuda de la proyección en el plano xy

$$\begin{aligned} \hat{a}_x \bullet \hat{a}_r &= \hat{a}_x \bullet \hat{n} \sin \theta = \sin \theta \cos \phi , \\ \hat{a}_y \bullet \hat{a}_r &= \hat{a}_y \bullet \hat{n} \sin \theta = \sin \theta \sin \phi , \\ \hat{a}_z \bullet \hat{a}_r &= \cos \theta , \end{aligned}$$

3.3. Cambio de coordenadas.

debido a que los ángulos entre $\hat{n} \sin \theta$ con \hat{a}_x , y \hat{a}_y , son: ϕ y $\pi/2 - \phi$, respectivamente, además el ángulo entre \hat{a}_r y \hat{a}_z es: θ .

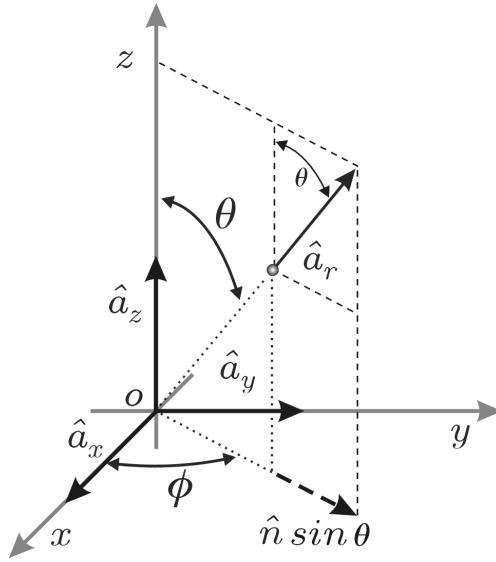


Figura 3.9: La proyección del vector en coordenadas esféricas \hat{a}_r , sobre el vector \hat{n} definido en el plano xy es: $\hat{n} \sin \theta$, debido a que el ángulo entre ellos es: $\pi/2 - \theta$. Los ángulos entre $\hat{n} \sin \theta$ con \hat{a}_x , y \hat{a}_y , son: ϕ y $\pi/2 - \phi$, respectivamente. El ángulo entre \hat{a}_r y \hat{a}_z es: θ .

Para realizar la segunda serie de productos, proyectemos ahora en vector \hat{a}_θ , en la dirección del vector en coordenadas cilíndricas \hat{n} , ver la figura (3.10). Observando que el ángulo entre ellos es de θ , la proyección será:

$$(\hat{a}_\theta \bullet \hat{n})\hat{n} = \hat{n} \cos \theta ,$$

Entonces nuevamente con ayuda de la proyección de \hat{a}_θ , en el plano xy

$$\begin{aligned}\hat{a}_x \bullet \hat{a}_\theta &= \hat{a}_x \bullet \hat{n} \cos \theta = \cos \theta \cos \phi , \\ \hat{a}_y \bullet \hat{a}_\theta &= \hat{a}_y \bullet \hat{n} \cos \theta = \cos \theta \sin \phi , \\ \hat{a}_z \bullet \hat{a}_\theta &= -\sin \theta ,\end{aligned}$$

debido a que los ángulos entre $\hat{n} \cos \theta$ con \hat{a}_x , y \hat{a}_y , son: ϕ y $\pi/2 - \phi$, respectivamente, además el ángulo entre \hat{a}_θ y \hat{a}_z es: $\pi/2 + \theta$.

Para realizar la última serie de productos, basta recordar que el vector \hat{a}_ϕ es igual al vector

3.3. Cambio de coordenadas.

\bullet	\hat{a}_r	\hat{a}_θ	\hat{a}_ϕ
\hat{a}_x	$\sin \theta \cos \phi$	$\cos \theta \cos \phi$	$-\sin \phi$
\hat{a}_y	$\sin \theta \sin \phi$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$
\hat{a}_z	$\cos \theta$	$-\sin \theta$	0

Tabla 3.2: Productos punto necesarios para realizar el cambio a coordenadas esféricas del vector \vec{A} en coordenadas cartesianas, o viceversa.

en coordenadas cilíndricas \hat{a}_θ , de tal manera que:

$$\begin{aligned}\hat{a}_x \bullet \hat{a}_\phi &= -\sin \phi, \\ \hat{a}_y \bullet \hat{a}_\phi &= \cos \phi, \\ \hat{a}_z \bullet \hat{a}_\phi &= 0.\end{aligned}$$

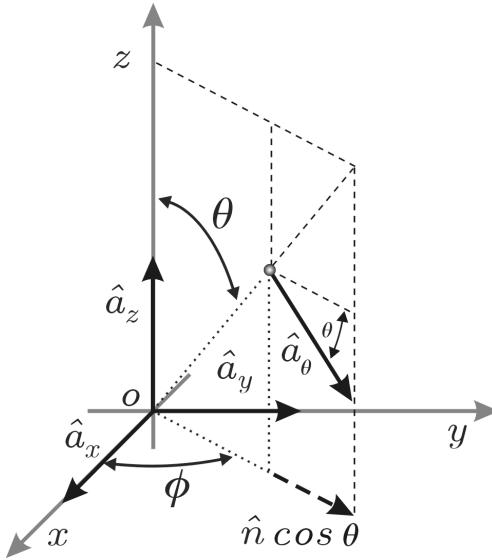


Figura 3.10: La proyección del vector \hat{a}_θ , sobre el vector \hat{n} es: $\hat{n} \cos \theta$, debido a que el ángulo entre ellos es: θ . Los ángulos entre $\hat{n} \cos \theta$ con \hat{a}_x , y \hat{a}_y , son: ϕ y $\pi/2 - \phi$, respectivamente. El ángulo entre \hat{a}_θ y \hat{a}_z es: $\pi/2 + \theta$.

De la información anterior, podemos construir la tabla 3.2. Con ayuda de esta tabla, podemos escribir las componentes del vector A , en coordenadas esféricas

$$\begin{aligned}A_r &= A_x(r, \theta, \phi) \sin \theta \cos \phi + A_y(r, \theta, \phi) \sin \theta \sin \phi + A_z(r, \theta, \phi) \cos \theta, \\ A_\theta &= A_x(r, \theta, \phi) \cos \theta \cos \phi + A_y(r, \theta, \phi) \cos \theta \sin \phi - A_z(r, \theta, \phi) \sin \theta, \\ A_\phi &= -A_x(r, \theta, \phi) \sin \phi + A_y(r, \theta, \phi) \cos \phi.\end{aligned}\tag{3.31}$$

3.4. El producto punto y cruz en coordenadas cilíndricas y esféricas.

31

Donde las componentes A_x , A_y y A_z , deben escribirse en términos de las nuevas variables r , θ y ϕ y las relaciones (2.9). Nuevamente con ayuda de la tabla 3.2, podemos escribir las componentes del vector en coordenadas cartesianas conociendo inicialmente las componentes en coordenadas esféricas, es decir

$$\begin{aligned} A_x &= A_r(x, y, z) \sin \theta \cos \phi + A_\theta(x, y, z) \cos \theta \cos \phi - A_\phi(x, y, z) \sin \phi , \\ A_y &= A_r(x, y, z) \sin \theta \sin \phi + A_\theta(x, y, z) \cos \theta \sin \phi - A_\phi(x, y, z) \cos \phi , \\ A_z &= A_r(x, y, z) \cos \theta - A_\theta(x, y, z) \sin \theta . \end{aligned} \quad (3.32)$$

3.4. El producto punto y cruz en coordenadas cilíndricas y esféricas.

La utilidad de usar sistemas de coordenadas ortogonales (cartesianas, cilíndricas y esféricas), radica en que cualquier vector se representa de la misma manera (ver ecuaciones (2.3), (2.8) y (2.10)), es decir, tendrán la forma

$$A = A_1 \hat{a}_1 + A_2 \hat{a}_2 + A_3 \hat{a}_3 ,$$

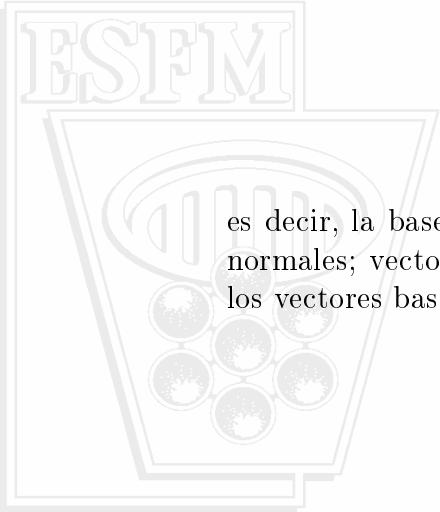
donde los números 1, 2, 3 corresponden a las coordenadas x, y, z , cuando está representado en coordenadas cartesianas, o sea, $1, 2, 3 \rightarrow x, y, z$. Si deseamos representar al vector en coordenadas cilíndricas $1, 2, 3 \rightarrow r, \theta, z$. Por último, en coordenadas esféricas $1, 2, 3 \rightarrow r, \theta, \phi$.

Además de la ventaja de la representación, tenemos que los productos punto y cruz entre los vectores base, siguen manteniéndose sin cambio,

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 \bullet \hat{a}_2 &= \hat{a}_2 \bullet \hat{a}_3 = \hat{a}_3 \bullet \hat{a}_1 = 0 , \\ \hat{a}_1 \bullet \hat{a}_1 &= \hat{a}_2 \bullet \hat{a}_2 = \hat{a}_3 \bullet \hat{a}_3 = 1 , \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \hat{a}_1 \times \hat{a}_2 &= \hat{a}_3 , \quad \hat{a}_2 \times \hat{a}_1 = -\hat{a}_3 , \\ \hat{a}_2 \times \hat{a}_3 &= \hat{a}_1 , \quad \hat{a}_3 \times \hat{a}_2 = -\hat{a}_1 , \\ \hat{a}_3 \times \hat{a}_1 &= \hat{a}_2 , \quad \hat{a}_1 \times \hat{a}_3 = -\hat{a}_2 , \\ \hat{a}_1 \times \hat{a}_1 &= \hat{a}_2 \times \hat{a}_2 = \hat{a}_3 \times \hat{a}_3 = 0 . \end{aligned} \quad (3.34)$$

es decir, la bases cartesianas (en coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas) son orthonormales; vectores base, mutuamente ortogonales y de magnitud uno, ver recuadros entre los vectores base en las figuras (2.5(b)) y (2.6(b)).



3.5. Rotaciones.

Como consecuencia al considerar; $\vec{A} = A_1\hat{a}_1 + A_2\hat{a}_2 + A_3\hat{a}_3$ y $\vec{B} = B_1\hat{a}_1 + B_2\hat{a}_2 + B_3\hat{a}_3$, tendremos que los productos punto y cruz tienen la misma forma funcional en las bases cartesianas, es decir,

$$\begin{aligned}\vec{A} \bullet \vec{B} &= (A_1\hat{a}_1 + A_2\hat{a}_2 + A_3\hat{a}_3) \bullet (B_1\hat{a}_1 + B_2\hat{a}_2 + B_3\hat{a}_3) , \\ &= A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 ,\end{aligned}\quad (3.35)$$

$$\begin{aligned}\vec{A} \times \vec{B} &= (A_1\hat{a}_1 + A_2\hat{a}_2 + A_3\hat{a}_3) \times (B_1\hat{a}_1 + B_2\hat{a}_2 + B_3\hat{a}_3) , \\ &= (A_2B_3 - A_3B_2)\hat{a}_1 + (A_3B_1 - A_1B_3)\hat{a}_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)\hat{a}_3\end{aligned}\quad (3.36)$$

donde hemos aplicado recurrentemente las relaciones (2.29) y (2.30). La magnitud del \vec{A} , será también la misma,

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2} . \quad (3.37)$$

3.5. Rotaciones.

Para introducir la matriz ortogonal y la de rotación (simplemente rotación), obtendremos la forma explícita del producto punto en coordenadas cilíndricas. Las componentes (3.28)-(3.29), se pueden escribir en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \quad (3.38)$$

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

Observamos que las matrices que nos permiten cambiar de coordenadas son transpuestas, es decir, obtenemos una de la otra, cambiando sus filas por sus columnas. Definiendo las siguientes matrices:

$$\begin{aligned}A_{\text{Cart.}} &= \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} , \quad A_{\text{Cart.}}^t = (A_x \ A_y \ A_z) , \\ A_{\text{Cil.}} &= \begin{pmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_z \end{pmatrix} , \quad A_{\text{Cil.}}^t = (A_r \ A_\theta \ A_z) ,\end{aligned}$$



3.5. Rotaciones.

33

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{R}^t = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donde denotamos transpuesta con el superíndice t y la matriz identidad por \mathcal{I} , podemos rescribir las ecuaciones (2.34 – 35), como:

$$A_{\text{Cil.}} = \mathcal{R} A_{\text{Cart.}}, \quad (3.40)$$

$$A_{\text{Cart.}} = \mathcal{R}^t A_{\text{Cil.}}. \quad (3.41)$$

Combinando las ecuaciones (3.40) y (3.41), obtenemos:

$$\begin{aligned} A_{\text{Cil.}} &= \mathcal{R} \mathcal{R}^t A_{\text{Cil.}} = \mathcal{I} A_{\text{Cil.}} = A_{\text{Cil.}}, \\ A_{\text{Cart.}} &= \mathcal{R}^t \mathcal{R} A_{\text{Cart.}} = \mathcal{I} A_{\text{Cart.}} = A_{\text{Cart.}}, \end{aligned}$$

Las matrices que satisfacen la propiedad, $\mathcal{R} \mathcal{R}^t = \mathcal{R}^t \mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{R} = \mathcal{I}$, son llamadas ortogonales [3]: es decir, son aquellas matrices cuya inversa es su transpuesta.

El producto punto de los vectores $\vec{A} = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$ y $\vec{B} = B_x \hat{a}_x + B_y \hat{a}_y + B_z \hat{a}_z$, es:

$$\begin{aligned} \vec{A} \bullet \vec{B} &= \vec{A}_x \vec{B}_x + \vec{A}_y \vec{B}_y + \vec{A}_z \vec{B}_z, \\ &= (A_x \ A_y \ A_z) \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}, \\ &= A_{\text{Cart.}}^t B_{\text{Cart.}} = (\mathcal{R} A_{\text{Cil.}})^t \mathcal{R} B_{\text{Cil.}}, \\ &= A_{\text{Cil.}}^t \mathcal{R}^t \mathcal{R} B_{\text{Cil.}}, \\ &= (A_r \ A_\theta \ A_z) \begin{pmatrix} B_r \\ B_\theta \\ B_z \end{pmatrix}, \\ &= A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_z B_z, \end{aligned} \quad (3.42)$$

¡Bingo! El producto punto en coordenadas cilíndricas, es idéntico al calculado en coordenadas cartesianas, además conserva la misma forma funcional, es decir, la suma de los productos de cada una de sus componentes (“entrada por entrada”).

En realidad el producto punto (al igual que el cruz), siempre tendrá el mismo valor –es invariante–, independientemente si el sistema de coordenadas es ortogonal; que tenga la misma forma funcional, se debe a que la matriz ortogonal \mathcal{R} , transforma una base ortogonal

3.6. Cosenos directores.

$\{\hat{a}_x, \hat{a}_y, \hat{a}_z\}$, a otra base ortogonal $\{\hat{a}_r, \hat{a}_\theta, \hat{a}_z\}$, ver recuadros en la Fig. 1.5b. De lo anterior resulta claro, que la magnitud de un vector es invariante también, ya que se puede calcular con ayuda de un producto punto, ver la ecuación (3.2).

Las matriz \mathcal{R} , es llamada de rotación alrededor del eje z . Para ilustrar lo anterior consideremos el punto $(1, 0, 0)$, localizado sobre el eje x y $\theta = \pi/6$, sustituyendo los valores en \mathcal{R} , tendremos:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix},$$

que es un punto $(1, 0, 0)$, rotado un ángulo $\theta = 30^\circ$ negativo, alrededor del eje z . Ahora resulta claro que \mathcal{R}^t es una rotación de θ alrededor de z en el sentido positivo.

3.6. Cosenos directores.

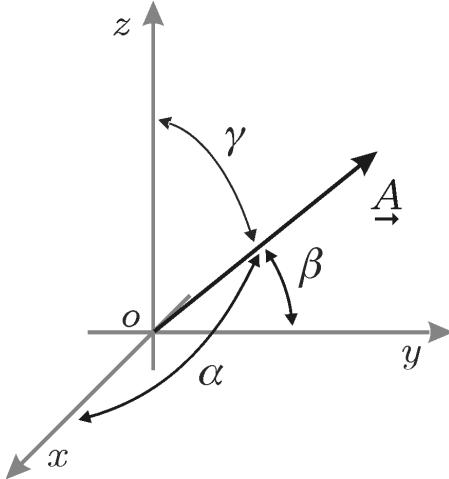
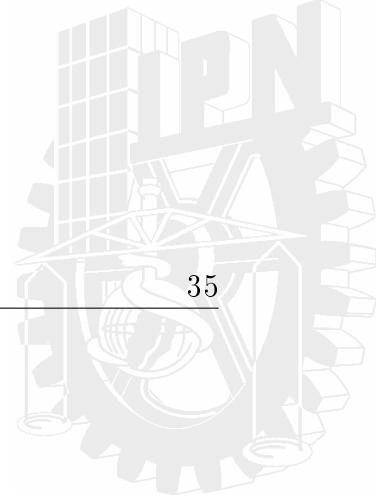


Figura 3.11: La proyección del vector \vec{A} en la direcciones \hat{a}_x , \hat{a}_y y \hat{a}_z , nos definen los cosenos directores α , β y γ respectivamente.

Los cosenos de los ángulos que forma un vector con los ejes cartesianos son llamados los cosenos directores del vector (ver Fig. 2.11). Denotando a los ángulos que forma el vector $A = A_x \hat{a}_x + A_y \hat{a}_y + A_z \hat{a}_z$, con los ejes cartesianos x , y y z , como α , β y γ , respectivamente,



3.6. Cosenos directores.

es directo escribir:

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{A_x}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \\ \cos \beta &= \frac{A_y}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}}, \\ \cos \gamma &= \frac{A_z}{\sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}},\end{aligned}\tag{3.43}$$

observamos que los cosenos directores de \vec{A} son proporcionales a sus componentes A_x , A_y y A_z . Es fácil demostrar que:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.\tag{3.44}$$



4

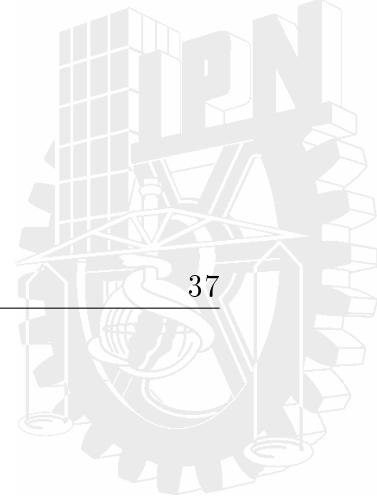
Gradiente, divergencia y rotacional

Como es bien sabido, la noción de límite, es el pilar básico del cálculo [7], del cual se deriva el concepto de derivada y de integral. Siendo estos conceptos el fundamento para la descripción de la física en general. En otras palabras, no podríamos describir el movimiento de los planetas y galaxias [5], ni tampoco podríamos explicar los fenómenos de la interacción de los átomos y moléculas [8]. Y lo más importante a mi parecer, no podríamos describir el concepto de la luz, el fenómeno cuántico más visto de la humanidad [9].

Sin ninguna duda, el trabajo de Newton revolucionó la ciencia como nadie antes lo había hecho, explicó el movimiento de los planetas, por medio de una relación tan simple y sencilla, pero basada en el poderoso concepto de la derivada. Posteriormente su mecánica, fue objeto de muchas objeciones; todas resueltas con la llegada de la teoría de la relatividad de Einstein, pero la ciencia como una bola de nieve ya estaba en movimiento, y la mecánica de Newton se hizo más general con la reformulación propuesta por Einstein [10].

Newton también describió el concepto de luz, como un corpusculo que fue abandonado con la llegada de la teoría ondulatoria de Fresnel, que consideraba a la luz como una onda transversal. Finalmente en la teoría electromagnética de Maxwell, se unificaron los campos eléctrico y magnético y el concepto de luz como una onda electromagnética amplió el horizonte científico [11, 12]. Nuevamente Einstein, retomó la idea del corpusculo para describir el efecto fotoeléctrico, y con las ideas de Planck introdujo al fotón como la partícula componente de la luz [9].

Dentro de los postulados de la relatividad, se tiene que las ecuaciones de la física son las mismas en todos los sistemas de referencia inerciales y que existe una constante absoluta, la velocidad de la luz, que es la misma en todos los sistemas de referencia. En este caso, Maxwell pudo describir la teoría física perfecta, ya que sus ecuaciones son covariantes bajo transformaciones de Lorentz, es decir, los principios de relatividad mencionados se extienden al electromagnetismo [13].



4.1. Una motivación: las ecuaciones de Maxwell.

Antes de escribir las ecuaciones de Maxwell, es conveniente resaltar lo siguiente. En nuestro curso de cálculo diferencial, si deseábamos calcular la derivada respecto a x , de la función $g(x)$, escribíamos dg/dx , es decir, el operador d/dx , actúa sobre la función $g(x)$, que se localiza a su derecha.

Como en todo curso nuevo, hojeamos el libro de texto a estudiar, en este caso tenemos en nuestras manos el libro del profesor J. D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*” [12]. Empezamos a mirar las pastas interiores y encontramos muchos símbolos raros, continuamos hojeando hasta que llegamos a las ecuaciones de Maxwell, donde se dice que describen de manera unificada los fenómenos electromagnéticos. En el sistema gaussiano de unidades (cgs), se escriben como [12],

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 4\pi\rho, & \nabla \cdot \vec{B} &= 0, \\ \nabla \times \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}, & \nabla \times \vec{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} + \frac{4\pi}{c} \vec{J}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

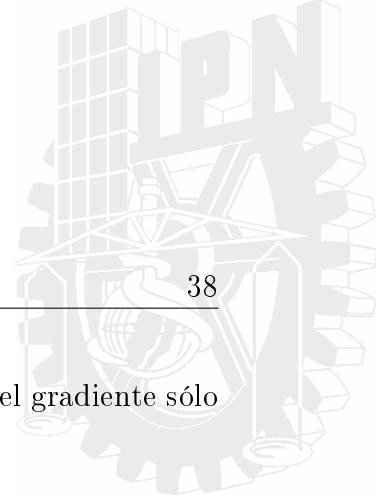
A primera vista estas ecuaciones se ven muy complicadas, pero con el concepto de operador su interpretación es muy sencilla. Primero notamos que aparecen unas nuevas “criaturas” matemáticas, $\nabla \cdot$ y $\nabla \times$, llamadas divergencia y rotacional respectivamente; y unos “caracolitos” $\partial/\partial t$, llamados derivada parcial respecto de “ t ” o del tiempo. Estas ecuaciones se componen de: un par de divergencia y rotacional para el campo eléctrico \vec{E} y otro par de divergencia y rotacional para el campo magnético \vec{B} .

Si continuamos revisando este libro [12], encontramos las siguientes relaciones,

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \quad (4.2)$$

que permiten calcular los campos eléctrico y magnético en términos del potencial escalar eléctrico ϕ y el potencial vectorial magnético \vec{A} . Aquí notamos que aparece la “criatura” ∇ , (llamado operador nabla), ahora sin punto ni cruz, y la combinación $\nabla\phi$ se conoce como el gradiente de ϕ .

De las ecuaciones anteriores, observamos que el operador diferencial nabla con punto o cruz, (divergencia y rotacional respectivamente), aplican sobre los campos o potenciales vectoriales (\vec{E} , \vec{B} , \vec{A}), de manera similar a nuestros productos punto y cruz, si consideramos al



4.2. Gradiente.

38

operador nabla como un vector. Con esta suposición en mente, es claro que el gradiente sólo podrá aplicar a campos o potenciales escalares ϕ .

Además, los potenciales ϕ y \vec{A} , satisfacen las relaciones,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \phi = -4\pi\rho , \quad \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} . \quad (4.3)$$

Donde el operador nabla al cuadado semeja un producto punto del operador nabla con él mismo, y es llamado laplaciano, es decir, $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$, (de manera similar a $\vec{A}^2 = \vec{A} \cdot \vec{A}$). Entonces el laplaciano aplica tanto a funciones o campos escalares como a los vectoriales, como puede verse en las ecuaciones (4.3). De estas mismas ecuaciones, observamos que los términos entre paréntesis conforman la ecuación de onda, cuando las densidades de carga ρ y de corriente J sean cero. Entonces los potenciales ϕ y \vec{A} son ondas que viajan a la velocidad de la luz c . Cabe mencionar que lo anterior es consecuencia de la condición,

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \phi = 0 , \quad (4.4)$$

llamada norma de Lorentz, que como veremos posteriormente, se puede escribir como una 4-divergencia de un 4-vector [13, 14].

Antes de continuar con las ecuaciones de Maxwell, describiremos el significado físico del gradiente, divergencia y rotacional, para posteriormente en el siguiente capítulo calcular sus propiedades.

4.2. Gradiente.

Para la construcción de una casa, carretera, edificio, o para realizar un experimento óptico en el laboratorio, es necesario nivelar las superficies o paredes. Los señores albañiles con su maravilloso ingenio y técnica, preparan las superficies a una altura de referencia, generalmente a 1.0 metros respecto al nivel del piso. Marcan estos niveles en la pared o estacas, por medio de una mangera transparente llena de agua, (que funciona por medio del principio de vasos comunicantes), y unen estos puntos nivelados con un hilo visible muy resistente. Ingenioso, ¿No?

Ahora imaginemos que deseamos marcar estos niveles, y trazar las curvas de nivel, en el cerro del Chiquihuite, localizado al norte de la CDMX. Nos armanos con nuestras estacas y mangueras y empezamos a trazar nuestras curvas de nivel, para distintas alturas, por medio de una línea roja como se muestra en la figura (4.1(a)). La línea cercana a la base le corresponde la altura más baja z_1 . Para la siguiente altura mayor z_2 realizamos la misma rutina,

4.2. Gradiente.

39

y así sucesivamente, aumentando la altura y trazando, llegamos a la curva de mayor altura z_n que se localiza sobre la cima derecha del icónico cerro.

Recordando nuestras clases de física, definímos a la energía potencial de una partícula de masa m como, mgz , donde la variable z es la altura, respecto a un nivel de referencia, donde se coloca la masa y g el valor de la gravedad. Donde $z_1 < z_2 < \dots < z_n$.

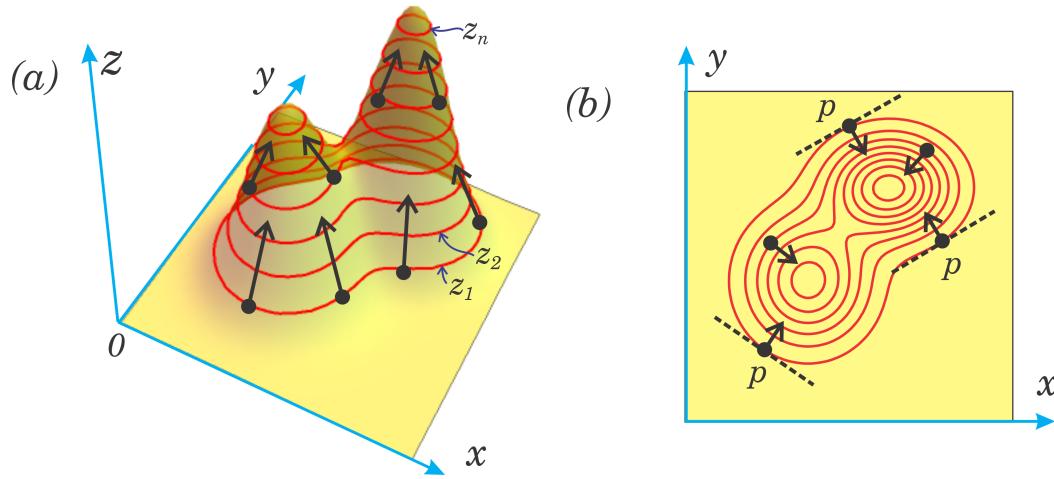


Figura 4.1: Representación gráfica de las curvas equipotenciales.

La primera curva de nivel, está indicada por z_1 , y todos los puntos sobre esta curva tienen la misma altura u energía potencial mgz_1 ; como consecuencia a esta curva se le conoce por equipotencial o de igual potencial. Similarmente para las equipotenciales z_2, \dots, z_n . En la figura (4.1(b)), mostramos estas equipotenciales, vistas sobre el eje z o “a vista de pájaro”, donde las equipotenciales con más altos valores corresponden a las curvas internas. En general, estas curvas equipotenciales no son necesariamente energías potenciales, pueden relacionarse con el potencial eléctrico, la temperatura, etc., sin afectar su representación gráfica. Las equipotenciales las denotaremos por $\phi(x, y, z)$, o simplemente por ϕ 's.

El gradiente de un potencial ϕ , lo denotaremos por $\nabla\phi$, y es un vector perpendicular a una equipotencial, cuya dirección es hacia donde las equipotenciales aumentan, es decir, se dirige hacia donde las equipotenciales tienen el mayor valor. En la figura (4.1(b)), mostramos por medio de una flecha negra, el gradiente del potencial gravitacional en un punto p . La línea punteada corresponde a la recta tangente y la flecha al vector perpendicular a esa recta. La dirección de este vector está dirigida hacia las curvas equipotenciales centrales, ya que estas tienen valores mayores a la del punto p . En la figura (4.1(a)), mostramos con mayor claridad estos gradientes, aunque no en los mismos puntos.

4.2. Gradiente.

40

Lo anterior aunque matemáticamente es correcto, carece de sentido físico. Ya que nuestra experiencia nos dice, que un objeto cae para abajo, pero en el caso matemático puede “caer” para arriba. Esto lo podemos comprobar con ayuda de la figura (4.1(a)), donde al colocar un objeto en la base del cerro, éste por la acción del gradiente ¡subiría aceleradamente hacia arriba!, cosa que contradice con la realidad. Para evitar esta contrariedad le agregamos al gradiente un signo menos y con esto le daremos un sentido físico al gradiente, de acuerdo a nuestra experiencia. Como podemos observar, este cambio ya está incluido en el primer término de la ecuación (4.2), donde el campo eléctrico lo calcula como:

$$\vec{E} = -\nabla\phi + \dots . \quad (4.5)$$



Recordando aquellos maravillosos años de la escuela secundaria, donde nos gustaba mojarnos con el agua de los bebederos. La máxima travesura, que en algunos casos podría terminar en expulsión, era llenar globos con agua en la llave de los bebederos (ver figura (4.2)), y lanzarlos sobre nuestros “rivales”, en las míticas batallas en el desierto [15]. Para finalmente secar nuestros uniformes, en un amistoso juego de futbol bajo el hermoso sol del medio día.

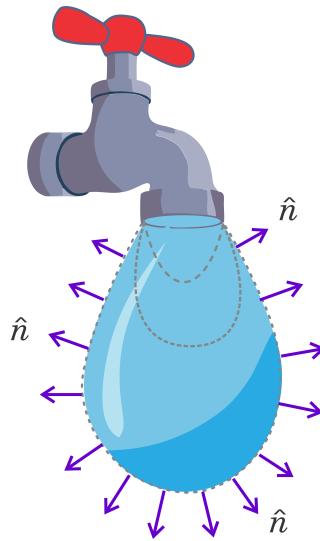


Figura 4.2: El gradiente es un vector perpendicular a una superficie.

Si observamos el llenado del globo con agua, y lo relacionamos con en potencial, decimos que cuando el globo tiene poca agua, tendrá poco potencial, conforme se llene de agua adquirirá más potencial, (indicado por las líneas punteadas), es decir, entre más volumen de

4.3. Divergencia.

41

agua tenga el globo más potencial de “ataque” tendrá. Entonces en este caso, decimos que el gradiente es un vector perpendicular a la superficie del globo, cuya dirección será hacia afuera, porque este vector indica la dirección en la que el volumen del globo aumenta y su potencial deberá ser mayor.

Matemáticamente este juego permite calcular un vector perpendicular a una superficie, es decir, si conocemos la ecuación de la superficie ϕ , el vector unitario normal a ésta será:

$$\hat{n} = \frac{\nabla\phi}{|\nabla\phi|} . \quad (4.6)$$

Finalmente, otra manera de definir el gradiente es mediante la derivada direccional, denotada por

$$D_{\hat{n}}\phi = \hat{n} \cdot \nabla\phi = |\hat{n}|^1 |\nabla\phi| \cos\theta , \quad (4.7)$$

donde \hat{n} , es el vector unitario de la dirección donde se desea calcular la derivada de ϕ y θ el ángulo entre el gradiente y el vector unitario. Como el valor máximo del coseno es uno, entonces tendremos que el gradiente es la máxima derivada direccional.

Por otra parte, la divergencia y rotacional se relacionan con las fuentes del campo, es decir, nos dirá quién produce el campo y cómo es la calidad de ese campo. Son dos operaciones complementarias como lo haremos notar a continuación.

4.3. Divergencia.



Figura 4.3: Matoaka, la hija mayor del jefe Powhatan en uno de sus acostumbrados viajes por el río Potomac.

Para describir la divergencia imaginemos a la princesa Matoaka, paseando en canoa por el río Potomac, en compañía de su mascota favorita, como se observa en la figura (4.3). Para

4.3. Divergencia.

que tenga un paseo tranquilo nos han encargado construir un sistema de seguridad satelital, que nos informe sobre la tranquilidad de las aguas del río.

Las principales causas de accidentes en el río, son por los remolinos e inesperados chorros de agua, ambos provenientes de los extensos mantos acuíferos subterráneos de la zona. Para el sistema de seguridad, le colocamos a la canoa un motor fuera de borda, controlado por una señal proveniente de un detector localizado al frente, indicado por una elipse amarilla. El control del motor y el procesamiento de la señal del detector la hacemos con un Arduino, localizado en la caja de control CC. La visualización de la señal se ve en un monitor LCD, como se indica el diagrama de la figura (4.4). Además, en todo momento la canoa está localizada con un GPS.

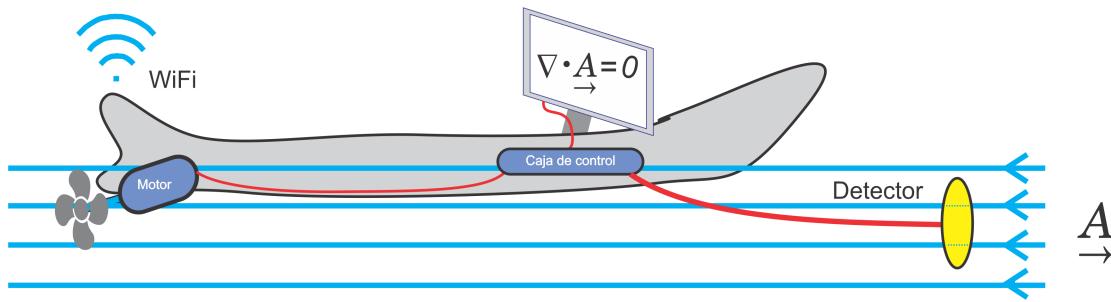
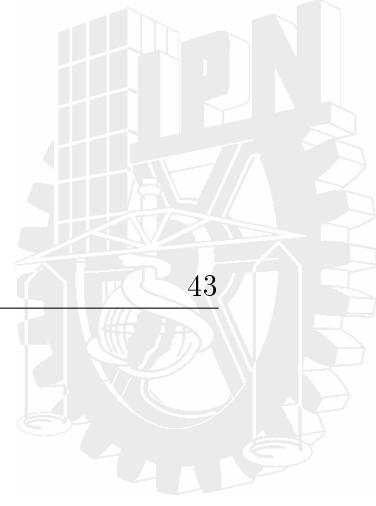


Figura 4.4: Canoa con alta tecnología. El agua del río, la denotamos por \vec{A} .

El funcionamiento del detector es muy simple, está diseñado con un diferenciador de "líneas" de agua o del campo \vec{A} , es decir, al avanzar la canoa cuenta cuántas líneas de campo entran al detector y cuantas salen de él. Así, cuando esta diferencia es cero, se tiene que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, y la canoa avanzará sin ninguna posibilidad de accidente; pero cuando dicha diferencia no sea cero, la canoa retrocederá rápidamente para poner a salvo a sus ocupantes.

¿Cuáles son los casos, donde la diferencia de líneas no es cero? Son precisamente las fuentes o sumideros de campo. En la figura (4.5(a)), mostramos una fuente de campo, donde el detector colocado al centro, (círculo amarillo), indica que nuestras líneas de campo salen o nacen de ese punto y tendremos que $\nabla \cdot \vec{A} > 0$. Por otra parte en la figura (4.5(b)), mostramos un sumidero tipo remolino, donde las líneas del campo se desvanecen en el detector, nuevamente colocado al centro, para este caso $\nabla \cdot \vec{A} < 0$.

Como hemos podido observar, la divergencia se relaciona con la fuente del campo, en otras palabras, la divergencia nos dice quién produce tal campo. Como veremos el rotacional también se relacionará con la fuente de dicho campo.



4.4. Rotacional.

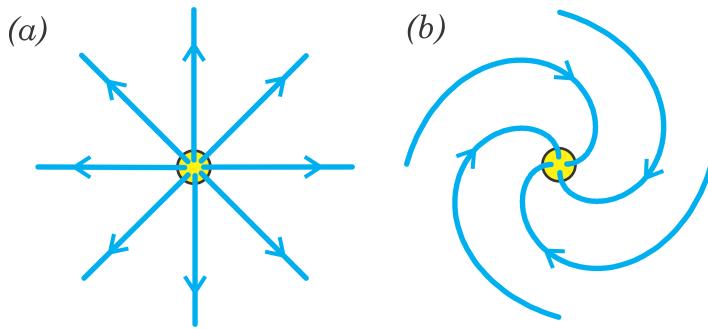


Figura 4.5: (a) Fuente de campo. (b) Sumidero de campo.

4.4. Rotacional.

Para describir el rotacional, imaginemos una rueda de paletas que usaban los antiguos buques de guerra de la armada de México. Cuando un flujo de agua incide sobre esta paleta, y las líneas de agua están espaciadas uniformemente, como se muestra en la figura (4.6(a)), esta paleta no girará, y consideraremos que $\nabla \cdot \vec{A} = 0$.

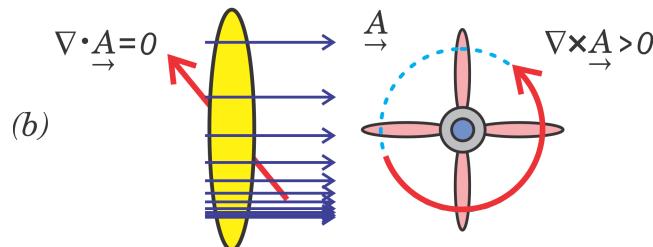
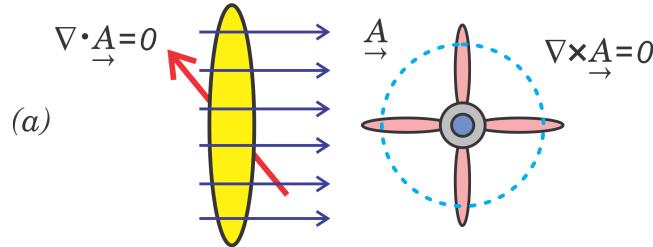


Figura 4.6: La divergencia y rotacional de un campo son relaciones complementarias. Todo campo tiene una componente solenoidal y otra irrotacional.

En el caso que las líneas de agua no estén igualmente espaciadas, como se muestra en la figura (4.6(b)), la paleta girará en sentido contrario a las manecillas del reloj y tendremos que $\nabla \times \vec{A} > 0$. En ambos casos observamos que el detector de líneas de campo indica que

4.5. Electrostática y magnetostática.

$\nabla \cdot \vec{A} = 0$, es decir, que la divergencia por si sola no es suficiente para describir un campo. Y que además de la divergencia se necesita el rotacional. En otras palabras, la divergencia y el rotacional se relacionan con las fuentes del campo. Por definición, cuando el campo tenga divergencia cero, este campo es llamado solenoideal. Y cuando tenga rotacional cero el campo se conoce como irrotacional o conservativo.

Lo anterior es muy importante, ya que esto define el teorema fundamental del cálculo vectorial, que afirma que cualquier campo es la suma de una componente solenoideal más una componente irrotacional, es decir, la fuente de un campo arbitrario, proviene de una divergencia y de un rotacional. Sin ser redundante, para que un campo quede bien definido es necesario conocer su divergencia y rotacional. Por esta razón las ecuaciones de Maxwell son cuatro; un par de divergencia y rotacional para el campo \vec{E} , y otro par divergencia-rotacional para \vec{B} , como puede observarse en las ecuaciones (4.1).

4.5. Electrostática y magnetostática.

Con la finalidad de consolidar nuestros conceptos anteriores, utilizaremos nuevamente las ecuaciones de Maxwell, pero ahora independientes del tiempo, es decir, cuando los campos eléctrico y magnético \vec{E} y \vec{B} respectivamente, no dependan del tiempo y por lo tanto las derivadas de estos campos serán cero. Para el campo eléctrico \vec{E} , escribimos [11],

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho, \quad \nabla \times \vec{E} = 0. \quad (4.8)$$

Como mencionamos anteriormente, la divergencia y rotacional se relacionan con las fuentes de los campos. En este caso la primera ecuación, $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$, nos dice explícitamente que el campo eléctrico lo producen las densidades de carga eléctrica ρ , (o simplemente las cargas eléctricas) y que el campo producido será conservativo. Observe que son necesarias las dos ecuaciones, ya que mientras una nos dice quién produce el campo, (la densidad de carga), la otra nos habla de la calidad de dicho campo, (conservativo).

Para ilustrar, consideremos un sistema de dos cargas eléctricas una positiva y otra negativa, este sistema de llama dipolo eléctrico [11], cuyas líneas de campo se indican en la figura (4.7(a)). En esta gráfica observamos que las líneas de campo eléctrico “salen” de las cargas positiva y “entran” en las cargas negativas. Si colocamos nuestro detector para la divergencia sobre estas cargas, tendremos que $\nabla \cdot \vec{E} > 0$ y $\nabla \cdot \vec{E} < 0$, para la carga positiva y negativa respectivamente, ya que la densidad de carga ρ es positiva o negativa en estos puntos, como puede observarse en la figura (4.7(b)). Esto significa que sólo se crea campo eléctrico en la regiones donde la densidad de carga $\rho > 0$ y se absorbe el campo donde es $\rho < 0$, verificando

4.5. Electrostática y magnetostática.

que $\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$. La constante 4π es debido al sistema de unidades.

Si colocamos ahora nuestro detector en cualquier otro punto, observamos que tendremos $\nabla \cdot \vec{E} = 0$, ya que el número de líneas de campo que entran, son el mismo número de las líneas que salen, o equivalentemente que la densidad de carga en estos puntos es cero ($\rho = 0$). Finalmente si colocamos la rueda de paletas esta no rotará en ningún punto.

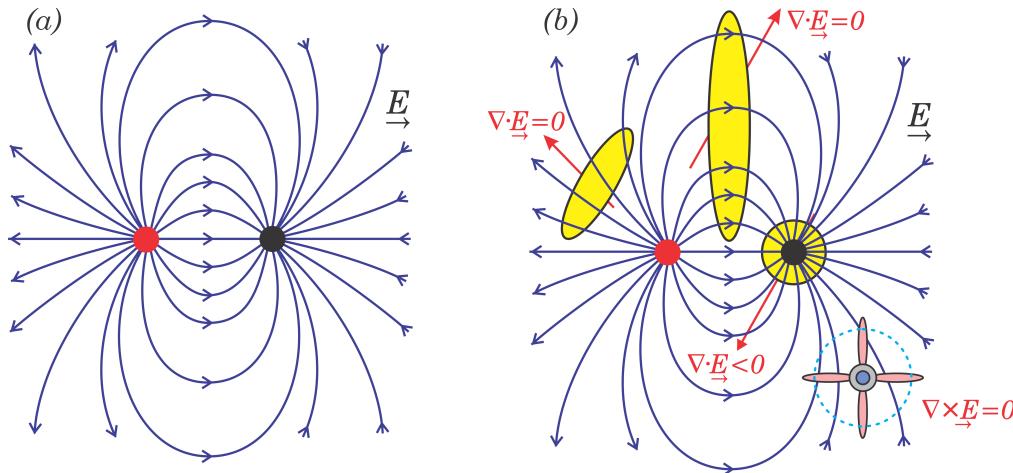


Figura 4.7: (a) Líneas de campo de un dipolo eléctrico. Las cargas $+q$ y $-q$ están en rojo y negro respectivamente. (b) Colocación de los medidores de divergencia y rotacional para el campo eléctrico.

De nuestras experiencias cotidianas, sabemos que un imán produce campo magnético sin la necesidad de una corriente eléctrica. Que consta de un polo norte por donde salen sus líneas de campo y un polo sur donde se absorben tales líneas de campo. Además si rompiésemos ese imán, se formarían nuevos imanes con sus respectivos polos norte y sur. En la figura (4.8(a)), mostramos uno de esos imanes o dipolo magnético. Sus dos ecuaciones de Maxwell respectivas serán,

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = 0, \quad (4.9)$$

donde hemos considerado que la densidad de corriente J es cero por tratarse de un imán.

A diferencia del dipolo eléctrico, si colocamos el detector de divergencia sobre cualquiera de los polos magnéticos este indicará cero, ya que el número de líneas de campo magnético que entran, son el mismo número de las líneas que salen, o equivalentemente $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, como se observa en la figura (4.8(b)). ¡Y todavía más! Nuestro detector de divergencia siempre indicará cero sin importar el lugar donde se encuentre colocado. La implicación física de este hecho es muy importante, e indica la no existencia de los monopolos magnéticos [11], es

4.5. Electrostatica y magnetostatica.

46

decir, que no existen los polos magnéticos aislados, siempre habrá un polo norte y un sur. Además este es un indicador de que las líneas de campo magnético son cerradas como se muestra en la figura (4.8(a)).

Finalmente si colocamos la rueda de paletas esta no rotará en ningún punto, como puede observarse en la figura (4.8(b)), ya que siempre $\nabla \times \vec{B} = 0$.

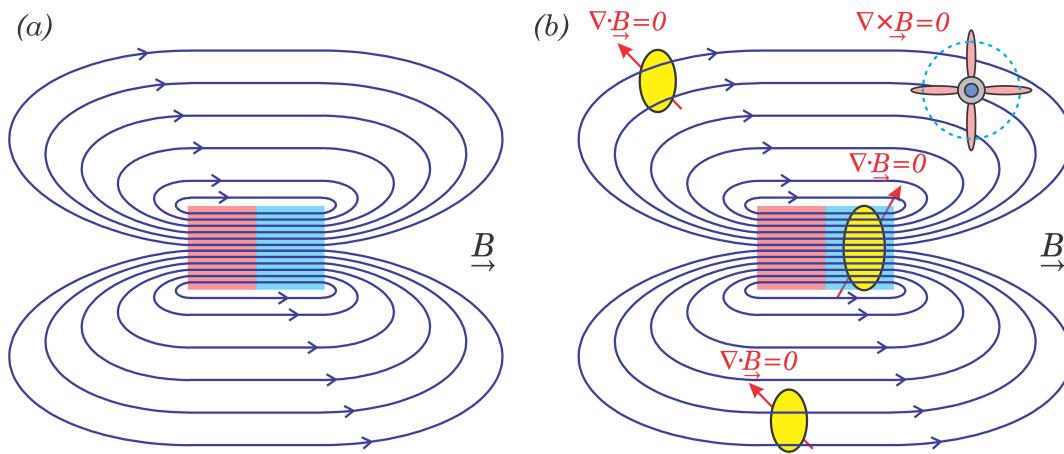


Figura 4.8: Dipolo magnético. Siempre los polos magnéticos se presentan por pares; norte y sur.



Como hemos mostrado, los conceptos básicos de los campos físicos se describen por medio de los operadores gradiente, divergencia y rotacional. Pero el verdadero poder, radica en aplicar sus propiedades tanto diferenciales como integrales, por lo que será necesario demostrarlas y aplicarlas. Este es precisamente el objetivo de este curso a desarrollar en los siguientes capítulos.

ESFM ¿Y la electrodinámica? Para describir este tema es necesario hacer uso de algunas de estas propiedades diferenciales, pero podemos adelantar que la electrodinámica es similar a un juego de fútbol. ¡En serio, no es broma!.

5

Propiedades de Nabla

“El análisis vectorial es una taquigrafía matemática” [16], es decir, en apariencia tendremos ecuaciones parecidas pero de un significado muy distinto. En este capítulo, escribiremos las operaciones básicas entre los vectores, pero ahora de una manera más “simpática”. Después, conociendo la derivada de un producto –cosa nada difícil– desarrollaremos las relaciones diferenciales más importantes del análisis vectorial. Se recomienda al lector, repetir –con distintos índices– cada una de las demostraciones, hasta realizarlas en un espacio de cinco renglones como máximo y dos minutos de tiempo cada una.

5.1. Derivadas parciales

Antes de iniciar es necesario brevemente discutir e introducir el concepto de derivada parcial. El cálculo elemental nos familiarizó con funciones de una variable. En la vida real, las cantidades físicas comúnmente dependen de dos o más variables, para nuestra fortuna es posible la extensión de los conceptos aprendidos en una variable a funciones de varias variables [17].

La temperatura T en un punto sobre la superficie de la tierra, a un tiempo determinado, depende de la latitud x y la altitud y del punto. Podemos decir que la T es una función del par (x, y) , esta dependencia se escribe como $T = (x, y)$. El volumen de un cilindro circular depende de su radio r y de su altura h . Del cálculo elemental sabemos que su volumen es $V = \pi r^2 h$, entonces se decimos que V es una función de r y h y la denotamos como $V(r, h) = \pi r^2 h$. Como hemos observado en los ejemplos anteriores, es común escribir $z = f(x, y)$ para explicitamente denotar que la variable dependiente z es función de las variables independientes x y y . Las funciones que dependen de dos o más variables se llaman funciones multivariadas.

Suponga que f es una función de dos variables x y y . Si dejamos que sólo varie x manteniendo fija la y , digamos $y = b$, entonces estamos considerando un función de una sola variable x , denotada por $z = f(x, b)$. Decimos que si z tiene una derivada respecto a x en a ,

5.1. Derivadas parciales

48

ésta la llamamos la derivada parcial de f con respecto a x en (a, b) . Similarmente, la derivada parcial de f con respecto a y en (a, b) es obtenida manteniendo fijo x ($x = a$) y encontrando la derivada ordinaria con respecto a y en b de la función $z = f(a, y)$. La misma notación de límites para funciones de una variable es aplicable a funciones multivariadas, esto nos conduce a la definición de derivada parcial [17].

Definición 6. La derivada parcial de una función $f(x, y)$ con respecto a x es

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}, \quad (5.1)$$

y la derivada parcial con respecto a y es

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \quad (5.2)$$

Observamos claramente de (3.1) que la derivada parcial de $f(x, y)$ con respecto a x es simplemente la derivada ordinaria de $f(x, y)$ con respecto a x , donde y es considerada constante. Similarmente la derivada $\partial f / \partial y$ es la derivada ordinaria de $f(x, y)$ con respecto a y , manteniendo constante a x . Para calcular las derivadas parciales de funciones de más de dos variables independientes, la regla es: sólo variar la variable respecto a la cual derivamos, mientras mantenemos las otras constantes. Por ejemplo, la derivada parcial de $f(x, y, z, t, \dots)$ con respecto a z es

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(x, y, z + \Delta z, t, \dots) - f(x, y, z, t, \dots)}{\Delta z}.$$

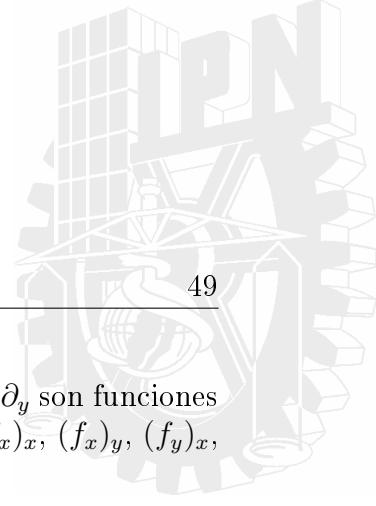
En otras palabras, derivamos respecto a z mientras tratamos a x, y, t, \dots como constantes. Es común denotar a las derivadas parciales de la siguiente manera: Si $z = f(x, y)$, escribimos

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = D_x f = \partial_x f, \\ f_y(x, y) &= f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = D_y f = \partial_y f, \end{aligned} \quad (5.3)$$

Note que no podemos interpretar $\partial f / \partial x$ como una razón de diferenciales.

Ejemplo: Si $f(x, y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$, encontrar $\partial_x f(2, 1)$ y $\partial_y f(2, 1)$.

Solución: Manteniendo y constante y diferenciando parcialmente respecto a x , obtenemos: $\partial_x f(x, y) = 3x^2 + 2xy^3$, y entonces $\partial_x f(2, 1) = 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 1^3 = 16$. Manteniendo x constante y diferenciando parcialmente con respecto a y , obtenemos: $\partial_y f(x, y) = 3x^2y^2 - 4y^3$, y entonces $\partial_y f(2, 1) = 3 \cdot 2^2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 = 8$.



5.2. Convención de suma.

Sí f es una función de dos variables, entonces sus derivadas parciales ∂_x y ∂_y son funciones de dos variables. Sin embargo podemos considerar las derivadas parciales $(f_x)_x$, $(f_x)_y$, $(f_y)_x$, $(f_y)_y$, las cuales se llaman segundas derivadas parciales de f .

$$\begin{aligned} (f_x)_x &= f_{xx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \partial_{xx} f, \\ (f_x)_y &= f_{xy} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \partial_{xy} f, \\ (f_y)_x &= f_{yx} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \partial_{yx} f, \\ (f_y)_y &= f_{yy} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \partial_{yy} f. \end{aligned} \quad (5.4)$$

La notación ∂_{xy} significa que primero derivamos parcialmente con respecto a x y a continuación respecto a y , como opuesto a ∂_{yx} donde derivamos primero respecto a y y finalmente respecto a x .

Decimos que la función $f(x, y)$ es continua en (a, b) si y sólo si

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Una función continua ϕ es aquella que es continua en todos los puntos donde está definida. A estas funciones les llamamos “bonitas”. En estas condiciones, de las definiciones (5.1,-5.2) mostramos que:

$$\partial_{yx} \phi = \partial_{xy} \phi. \quad (5.5)$$

5.2. Convención de suma.

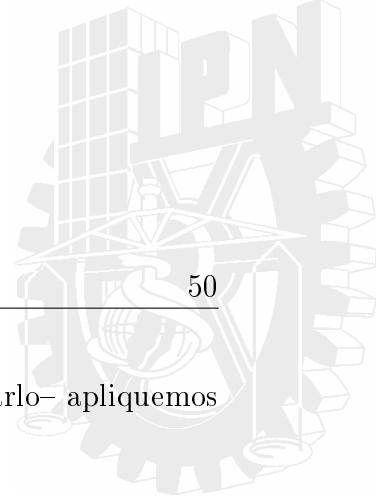
Frecuentemente cuando realizamos sumas escribimos, por ejemplo:

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^n b_i d_i,$$

esta suma es indistinta, si en lugar de los índices i usáramos –en el mismo rango de 1 a n – los índices j, k, m, r, s , etc. A estos índices se les llama mudos. Entonces, escribimos lo anterior de manera compacta como:

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^n b_i d_i = \sum_{m=1}^n b_m d_m = \sum_{r=1}^n b_r d_r = b_i d_i = b_m d_m = b_r d_r = b_\ell d_\ell, \quad (5.6)$$

que para nosotros significará lo mismo, y ahorraremos el símbolo de sumatoria. A esto se lo conoce como convención de suma de Einstein [18].



5.2. Convención de suma.

50

Ahora convenido lo anterior –aunque por el momento no sea fácil aceptarlo– apliquemos la convención de suma al producto de dos vectores \vec{A} y \vec{B} ,

$$\vec{A} \bullet \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3 = A_\ell B_\ell = A \text{ } \overset{\leftrightarrow{\text{conejo}}}{\text{ }} B \text{ } \overset{\leftrightarrow{\text{conejo}}}{\text{ }} , \quad (5.7)$$

donde la suma se realiza sobre los índices 1, 2 y 3, que corresponden al sistema de coordenadas utilizado. Obviamente en lugar de las parejas de índices ℓ , se puede usar el que su imaginación le proponga, por ejemplo, tochtli o conejo [19, 20]. Parafraseando la convención de suma, diremos: cuando se escriba una pareja de índices mudos, esto significará que hay que sumar desde “1” a “3”. Es importante resaltar que para evitar confusiones, sólo se puede repetir dos veces el mismo índice mudo, es decir, cómo el título del libro infantil “cada oveja con su pareja”[21].

Surge una pregunta, ¿Qué significa A_ℓ en la ecuación ? ¡Exactamente!, es la componente ℓ (ó 1, 2 y 3), del vector \vec{A} , que denotaremos como,

$$\left[\vec{A} \right]_\ell = A_\ell , \quad (5.8)$$

y la ecuación (5.7), la interpretaremos como la suma de los productos de las componentes ℓ de los vectores \vec{A} y \vec{B} , como se había definido. Además observamos lo siguiente; El producto punto es un escalar y la expresión (5.7) no tiene índices libres, ya que ℓ suma o contrae con ℓ , o conejo con conejo (ver figura (5.1)), de tal forma que no queda un índice libre, por lo tanto la cantidad definida es un escalar. No sucede así con la ecuación 5.8 donde sólo hay un índice libre y la cantidad será un vector. Cuando hay dos índices libres, es decir, la cantidad $A_{\ell m}$ se llamará matriz, donde los índices ℓ y m denotan la fila y la columna. Y si tiene más índices libres se conoce como tensor. En general, los escalares, vectores y matrices son tensores de orden cero, uno y dos respectivamente.



Figura 5.1: Conejo suma con conejo, “cada oveja con su pareja”, no hay índice libre y la cantidad definida es un escalar. La tripa de gato se reemplazó por la flecha.

Para desarrollar el producto cruz, necesitamos definir a unas nuevas “criaturas”, que simplificarán nuestro trabajo. Pero antes recordemos lo que es una permutación par e impar. Las permutaciones pares o ciclícicas de 123 son: 231, 312, 123, y las denotaremos por 123.

5.2. Convención de suma.

51

Cualquier otra combinación de 123, por ejemplo 132, 213, 321 son permutaciones no ciclásicas, y las denotaremos como $\underline{123}$. Por último, cuando tengamos algún índice repetido, digamos: 112, 322, 232, lo denotaremos por $\underline{123}^R$.

DEFINICION: Símbolo de Levy-Civita (para los cuates Chucky).

$$\epsilon_{rst} = \begin{cases} 1, & \text{para, } \underline{123}, \\ -1, & \text{para, } \underline{123}', \\ 0, & \text{para, } \underline{123}^R, \end{cases} \quad (5.9)$$

donde los índices r, s, t definen que Chucky es un tensor antisimétrico de rango 3, y pueden tomar los valores de 1, 2, 3. Por ejemplo: $\epsilon_{231} = 1$, $\epsilon_{213} = -1$ y $\epsilon_{112} = 0$ y así sucesivamente.

DEFINICION: Delta de Kronecker:

$$\delta_{rs} = \begin{cases} 1, & \text{cuando } r = s, \\ 0, & \text{cuando } r \neq s, \end{cases} \quad (5.10)$$

donde los índices r, s definen que la delta de Kronecker es un tensor simétrico de rango 2, y pueden tomar los valores de 1, 2, 3. Por ejemplo: $\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1$. Además $\delta_{21} = \delta_{21} = 0$ etc. etc.

Con lo anterior escribimos que el producto cruz de dos vectores \vec{A} y \vec{B} , cuyas componentes son como lo indica la relación (3.36), se escribe “simplemente”, para la componente ℓ , como:

$$\left(\vec{A} \times \vec{B} \right)_\ell = \epsilon_{\ell m n} A_m B_n, \quad (5.11)$$

nótese que el primer índice del Chucky es la componente del producto, y se proponen dos índices distintos arbitrarios, en este caso m y n donde se aplica la convención de suma como en la ecuación (5.7). Supongamos que $\ell = 1$, entonces escribimos

$$\left(\vec{A} \times \vec{B} \right)_1 = \epsilon_{1 m n} A_m B_n, \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} &= +\epsilon_{111} \overset{0}{A_1} B_1 + \epsilon_{112} \overset{0}{A_1} B_2 + \epsilon_{113} \overset{0}{A_1} B_3 \\ &\quad + \epsilon_{121} \overset{0}{A_2} B_1 + \epsilon_{122} \overset{0}{A_2} B_2 + \epsilon_{123} \overset{0}{A_2} B_3 \\ &\quad + \epsilon_{131} \overset{0}{A_3} B_1 + \epsilon_{132} \overset{0}{A_3} B_2 + \epsilon_{133} \overset{0}{A_3} B_3, \\ &= \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2, \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.2. Convención de suma.

52

esta relación es reveladora; observamos que salvo dos Chuckies la mayoría de ellos son cero ya que tienen índices repetidos. Como iniciamos el Chucky con el índice 1, ver ecuación (5.12), las únicas posibilidades para el resto de los indices son 2,3 y 3,2. Como consecuencia sólo dos Chuckies son distintos de cero, ver la ecuación (5.13). Finalmente,

$$\left(\begin{matrix} A & \times & B \\ \rightarrow & & \rightarrow \end{matrix} \right)_1 = \epsilon_{123} A_2 B_3 + \epsilon_{132} A_3 B_2 = A_2 B_3 - A_3 B_2 . \quad (5.14)$$

Si, ahora iniciamos con el índice 2, las únicas posibilidades para los restantes dos índices de los Chuckies distintos de cero, serán 3,1 y 1,3, es decir

$$\left(\begin{matrix} A & \times & B \\ \rightarrow & & \rightarrow \end{matrix} \right)_2 = \epsilon_{231} A_3 B_1 + \epsilon_{213} A_1 B_3 = A_3 B_1 - A_1 B_3 . \quad (5.15)$$

Similiarmente, si iniciamos con el índice 3, las únicas posibilidades para los restantes dos índices, serán 1,2 y 2,1, entonces

$$\left(\begin{matrix} A & \times & B \\ \rightarrow & & \rightarrow \end{matrix} \right)_3 = \epsilon_{312} A_1 B_2 + \epsilon_{321} A_2 B_1 = A_1 B_2 - A_2 B_1 . \quad (5.16)$$

Finalmente como un vector es igual a otro vector, podemos escribir con ayuda de las componentes (5.14),(5.15) y (5.16) que el producto cruz de los vectores \vec{A} y \vec{B} es,

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2, A_3 B_1 - A_1 B_3, A_1 B_2 - A_2 B_1) , \quad (5.17)$$

donde hemos representado el vector como un punto (2.1). Esta expresión es idéntica a la ecuación (3.36), obtenida anteriormente de manera “artesanal”. Como mencionamos al principio del capítulo, que el análisis vectorial era la taquigrafía de la matemática, observe que es posible escribir las relaciones (3.34) de manera muy compacta como

$$\hat{a}_\ell \times \hat{a}_m = \epsilon_{\ell m n} \hat{a}_n , \quad (5.18)$$

donde, los índices ℓ, m, n pueden tomar los valores de 1, 2, 3, para explicitamente tener las relaciones (3.34).

Es importante resaltar, que hasta aquí hemos fijado los índices del Chucky y la delta a los valores de 1, 2 y 3. Pero en general podemos escribir algunas relaciones útiles:

$$\begin{aligned} \epsilon_{rst} &= \epsilon_{str} = \epsilon_{trs} = -\epsilon_{srt} , \\ \epsilon_{rrt} &= \epsilon_{trt} = \epsilon_{rrr} = 0 , \end{aligned} \quad (5.19)$$

además

$$\delta_{mm} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3 , \quad (5.20)$$

5.2. Convención de suma.

53

donde hemos aplicado la convención de suma (5.8).

Es importante resaltar que las definiciones anteriores son independientes de la elección de los índices, recuerde que son mudos, y por lo tanto sujetos al juego de las tripas de Gato. Es decir, en la definición (5.11) estos índices, se pueden reemplazar por otros símbolos o letras. Aquí y en todas nuestras operaciones, lo importante es observar la secuencia o contracción de los índices mudos. En este caso entre los índices del Chucky y las componentes de los vectores \vec{A} y \vec{B} .

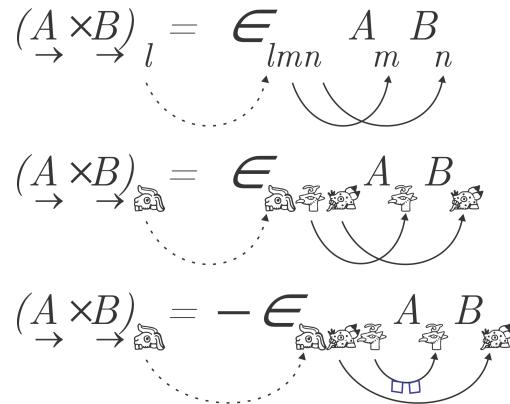
$$\begin{aligned}
 (\vec{A} \times \vec{B})_l &= \epsilon_{lmn} A_m B_n \\
 (\vec{A} \times \vec{B})_{\text{ej}} &= \epsilon_{\text{ejag} \text{ejag} \text{ejag}} A_{\text{ejag}} B_{\text{ejag}} \\
 (\vec{A} \times \vec{B})_{\text{vaj}} &= -\epsilon_{\text{vajag} \text{vajag} \text{vajag}} A_{\text{vajag}} B_{\text{vajag}}
 \end{aligned}$$


Figura 5.2: Conejo suma con conejo y venado con venado , “cada oveja con su pareja” [21], hay índice libre y la cantidad definida es un escalar. La tripa de gato se reemplazó por la flecha. Sonrisa normal venado-jaguar en el Chucky. Sonrisa Bob Esponja cuando intercambiamos a jaguar-venado.

En la figura (5.2), mostramos la definición de producto cruz utilizando el juego de tripas de Gato, para simplificar en lugar de encerrar los índices iguales en una tripa los unimos con una flecha. Porque que los índices son mudos los podemos reemplazar en parejas, por cualquier otro índice o símbolo. En nuestro caso utilizamos los días de las trecenas del calendario mexica [19]. Observe que el primer índice está sujeto a las componentes que se desee calcular, conejo. A la secuencia venado-jaguar, le llamaremos orden normal; cuando en este orden intercambiamos en el Chucky a jaguar-venado tenemos que colocar un índice menos porque es una permutación no cíclica y las flechas ahora se parecen a la sonrisa de Bob Esponja, observe sus dientes frontales.

La convención de suma nos dinamiza nuestras operaciones vectoriales, es decir, nos genera una secuencia de índices que depende de la dimensión del espacio. Por otra parte la delta de Kronecker sólo tomará alguno o algunos de estos como lo hemos mostrado en la ecuación (5.20). La operación más común con una delta de Kronecker es la mostrada en la figura (5.3), donde una componente vectorial se contrae o suma con una delta, observamos que la

5.3. Cuando los Chuckies se encuentran.

operación resultante es el intercambio de los índices de la componente contraída por el índice libre.

$$O_{\alpha} \delta_{\alpha\beta} = O_{\beta}$$

Figura 5.3: Teorema de sustitución.

De manera muy “artesanal” o por casos, podemos verificar esta relación. Desarrollando la convención de suma escribimos,

$$O_m \delta_{m\ell} = O_1 \delta_{1\ell} + O_2 \delta_{2\ell} + O_3 \delta_{3\ell} . \quad (5.21)$$

Sí $\ell = 1$, tendremos

$$O_m \delta_{m1} = O_1 \delta_{11}^1 + O_2 \delta_{21}^0 + O_3 \delta_{31}^0 = O_1 . \quad (5.22)$$

Cuando $\ell = 2$, escribimos

$$O_m \delta_{m1} = O_1 \delta_{12}^0 + O_2 \delta_{22}^1 + O_3 \delta_{32}^0 = O_2 . \quad (5.23)$$

Similiarmente si $\ell = 3$, el resultado será $O_m \delta_{m3} = O_3$, y en general para todo ℓ , tendremos que,

$$O_m \delta_{m\ell} = O_\ell . \quad (5.24)$$

5.3. Cuando los Chuckies se encuentran.

La mayoría de los juegos de azar se realizan en parejas, de la misma manera se tiene la creencia que los velociraptores y sus parientes los chuckies, cazan en manada como lo hacen los perros y los lobos. Como el Chucky es una criatura peligrosa, por las evidencias encontradas de las mordidas más bien que de las sonrisas, consideramos que aumenta su poder letal en pareja. Una expresión muy utilizada es el producto de dos Chuckies, digamos uno americano ϵ_{lmn} y otro alemán ϵ_{uvw} . En los libros de relatividad a este producto se le llama delta multidimensional [13] la cual escribimos:

$$\epsilon_{lmn} \epsilon_{uvw} = \begin{vmatrix} \delta_{\ell u} & \delta_{mu} & \delta_{nu} \\ \delta_{\ell v} & \delta_{mv} & \delta_{nv} \\ \delta_{\ell w} & \delta_{mw} & \delta_{nw} \end{vmatrix}^{(*)} \quad (5.25)$$

5.3. Cuando los Chuckies se encuentran.

55

donde el asterisco entre paréntesis (*) indica que para el cálculo de este determinante no aplicaremos la convención de suma.

De nuestro curso de álgebra sabemos que el determinante de una matriz es igual al determinante de su matriz traspuesta, (traspuesta significa que en una matriz cambiamos sus filas por columnas). Observamos el llenado de los índices de las deltas, los llenamos primeramente por filas, para los índices o colmillos del Chucky americano, y a continuación por columnas para los colmillos del Chucky alemán, como se observa en la ecuación (5.25). Pero se puede realizar la asignación de los índices de manera inversa, sin ningún problema.



Figura 5.4: Producto de dos Chuckys $\epsilon_{lmn} \epsilon_{uvw}$. Los índices de los Chuckies son los colmillos de los velociraptores con cubrebocas, americano en verde y alemán en morado por sus dos últimos colmillos vw (volkswagen).

Consideremos un ejemplo muy útil, el caso que los Chuckies tengan un colmillo o índice igual, es decir, cuando deseamos calcular,

$$\epsilon_{lmn} \epsilon_{uvw} = \begin{vmatrix} \delta_{\ell n} & \delta_{mn} & \delta_{nn} \\ \delta_{\ell v} & \delta_{mv} & \delta_{nv} \\ \delta_{\ell w} & \delta_{mw} & \delta_{nw} \end{vmatrix}^{(*)}. \quad (5.26)$$

En este caso observamos que $\delta_{nn} = 1$, ya que en este caso no consideramos la convención de suma y sus índices son iguales. En el caso de δ_{mn} , a primera vista podríamos pensar que esta delta es cero, ya que $m \neq n$, pero esto es sólo en el sentido semántico o si consideramos que los índices son signos lingüísticos y no expresiones matemáticas. De hecho, si esto fuera cierto, los restantes términos serían cero, lo cual contradice nuestra propuesta. Pero observemos lo siguiente; como los colmillos m y n pertenecen al Chucky americano, necesariamente

5.3. Cuando los Chuckies se encuentran.

56

deben ser distintos, porque nuestro resultado por hipótesis no es cero, entonces $m \neq n$, y $\delta_{mn} = 0$. Similarmente, $\delta_{\ell n} = 0$, ya que los colmillos ℓ y n pertenecen a un mismo Chucky y deben ser distintos, por lo tanto $\delta_{\ell n} = 0$. Para los colmillos del Chucky alemán, tenemos: $\delta_{nv} = 0$ y $\delta_{nw} = 0$.

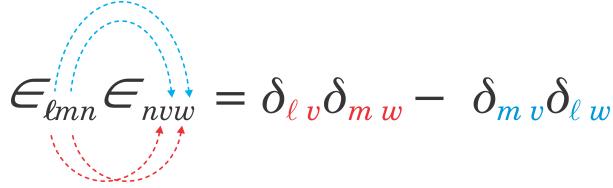
Finalmente, para el caso de $\delta_{\ell v}$, no podemos concluir nada, ya que los índices ℓ y v , pertenecen a un Chuckies distintos. Lo mismo sucede para el resto de las deltas, y lo más salomónico es dejarlos sin cambios, es decir, escribimos

$$\epsilon_{\ell mn} \epsilon_{nvw} = \begin{vmatrix} \delta_{\ell n}^0 & \delta_{mn}^0 & \delta_{nn}^1 \\ \delta_{\ell v} & \delta_{mv} & \delta_{nv}^0 \\ \delta_{\ell w} & \delta_{mw} & \delta_{nw}^0 \end{vmatrix}, \quad (5.27)$$

donde finalmente escribimos

$$\epsilon_{\ell mn} \epsilon_{nvw} = \delta_{\ell v} \delta_{mw} - \delta_{mv} \delta_{\ell w}. \quad (5.28)$$

Se pensaría que esto, no es práctico, pero recordemos las sonrisas, ahora mordidas, normales y Bob esponja o mordida fingida, como lo indica la figura (5.5). Una regla mnemotécnica para recordar los índices de las deltas es: mordida normal menos mordida fingida.



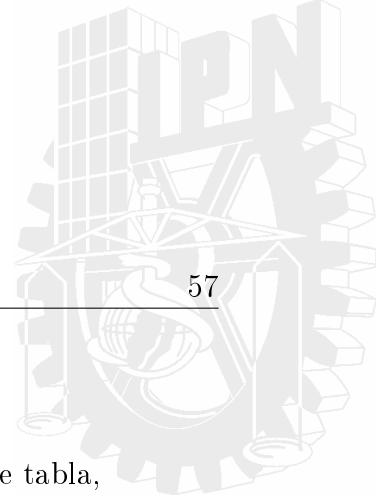
$$\epsilon_{\ell mn} \epsilon_{nvw} = \delta_{\ell v} \delta_{m w} - \delta_{m v} \delta_{\ell w}$$

Figura 5.5: Producto de dos Chuckys $\epsilon_{\ell mn} \epsilon_{nvw}$. Los índices de las deltas son de mordida normal menos mordida fingida, como lo indican los colores.

Para finalizar esta sección consideremos el siguiente producto con dos índices repetidos

$$\begin{aligned} \epsilon_{\ell mn} \epsilon_{\ell mw} &= \epsilon_{\ell mn} \epsilon_{\ell vw} \delta_{vm}, \\ &= (\delta_{mv} \delta_{nw} - \delta_{mw} \delta_{nv}) \delta_{vm}, \\ &= \delta_{mm}^3 \delta_{nw} - \delta_{mw} \delta_{nm}, \\ &= 2 \delta_{nw}. \end{aligned} \quad (5.29)$$





5.4. Operaciones básicas

Las operaciones vectoriales más simples se pueden resumir en la siguiente tabla,

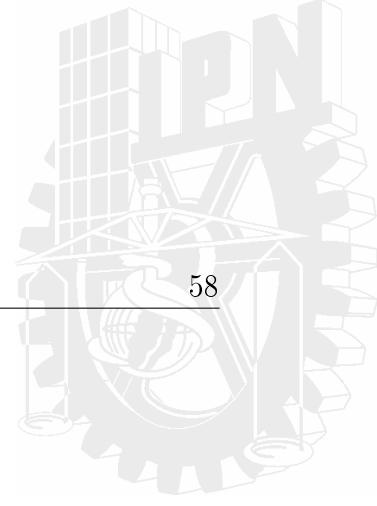
$$\begin{aligned} (1) \quad & [A]_\ell = A_\ell , \\ (2) \quad & \underset{\rightarrow}{A} \cdot \underset{\rightarrow}{B} = A_\ell B_\ell , \\ (3) \quad & \underset{\rightarrow}{[A \times B]}_\ell = \underset{\rightarrow}{\epsilon}_{lmn} A_m B_n , \\ (4) \quad & [\nabla \phi]_\ell = \partial_\ell \phi , \quad , \\ (5) \quad & \underset{\rightarrow}{\nabla} \cdot \underset{\rightarrow}{A} = \partial_\ell A_\ell , \\ (6) \quad & [\nabla \times \underset{\rightarrow}{A}]_\ell = \underset{\rightarrow}{\epsilon}_{lmn} \partial_m A_n , \\ (7) \quad & \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \partial_\ell \partial_\ell . \end{aligned} \tag{5.30}$$

donde hemos agregado el operador deriva parcial ∂_ℓ . Esta tabla explicitamente muestra que el análisis vectorial es la taquigrafía de la física, como fue mencionado en la introducción del libro de electromagnetismo de Hayt [16]. Del diccionario sabemos que, la taquigrafía es un sistema de escritura rápido y conciso el cual permite escribir una conversación a la misma velocidad a la que se está hablando. Para ello se emplean trazos, abreviaturas y caracteres especiales, y es precisamente lo que mostramos en la tabla anterior, donde mostramos nuestras reglas “taquigráficas” para la física.

Con lo anterior, siguiendo las reglas del juego (5.30), demostremos las identidades mostradas en la primer guarda del Jackson [12]; recordando no utilizar más de cinco renglones y cinco minutos por demostración. Bueno se hará en un poco más de espacio por las explicaciones y denotaremos bajo el signo de igualdad la regla “taquigráfica” utilizada.

Es importante resaltar que para iniciar y/o plantear una demostración, debemos saber si la relación a demostrar es un vector o un escalar, es decir, recomendamos que:

- (i) Sí la cantidad a demostrar es un vector, la demostración se inicia con una componente, ya que un vector es igual a otro vector cuando son iguales componente a componente.
- (ii) Sí la cantidad a demostrar es un escalar, la demostración se realiza directamente.



5.4. Operaciones básicas

58



- (1) Muestre que: $\underset{\rightarrow}{A} \cdot (\underset{\rightarrow}{B} \times \underset{\rightarrow}{C}) \stackrel{(?)}{=} \underset{\rightarrow}{B} \cdot (\underset{\rightarrow}{C} \times \underset{\rightarrow}{A}) \stackrel{(?)}{=} \underset{\rightarrow}{C} \cdot (\underset{\rightarrow}{A} \times \underset{\rightarrow}{B})$.

Colocamos el signo de interrogación sobre el de igual, para indicar que no la hemos probado. Escribimos directamente:

$$\begin{aligned} \underset{\rightarrow}{A} \cdot (\underset{\rightarrow}{B} \times \underset{\rightarrow}{C}) &= A_\ell (\underset{\rightarrow}{B} \times \underset{\rightarrow}{C})_\ell \stackrel{(2)}{=} A_\ell \in_{\ell mn} B_m C_n, \\ &= B_m \in_{\ell mn} C_n A_\ell = B_m \in_{m n \ell} C_n A_\ell, \\ &\stackrel{(3)}{=} B_m (\underset{\rightarrow}{C} \times \underset{\rightarrow}{A})_m \stackrel{(2)}{=} \underset{\rightarrow}{B} \cdot (\underset{\rightarrow}{C} \times \underset{\rightarrow}{A}). \end{aligned}$$

- Explicación: La demostración la realizamos de manera directa, ya que la cantidad a demostrar es un escalar. Utilizamos la relación (2) y a continuación la (3), con lo que completamos el primer renglón. Para el segundo renglón, utilizamos una permutación cíclica en el Chucky $\in_{\ell mn} = \in_{m n \ell}$ como se mostró en la relación (5.19). Finalmente para el tercer renglón, utilizamos las relaciones (3) y (2) de manera inversa al procedimiento utilizado en el primer renglón. De manera similar escribimos:

$$\begin{aligned} \underset{\rightarrow}{B} \cdot (\underset{\rightarrow}{C} \times \underset{\rightarrow}{A}) &= B_\ell (\underset{\rightarrow}{C} \times \underset{\rightarrow}{A})_\ell \stackrel{(2)}{=} B_\ell \in_{\ell mn} C_m A_n, \\ &= C_m \in_{\ell mn} A_n B_\ell = C_m \in_{m n \ell} A_n B_\ell, \\ &\stackrel{(3)}{=} C_m (\underset{\rightarrow}{A} \times \underset{\rightarrow}{B})_m \stackrel{(2)}{=} \underset{\rightarrow}{C} \cdot (\underset{\rightarrow}{A} \times \underset{\rightarrow}{B}), \end{aligned}$$

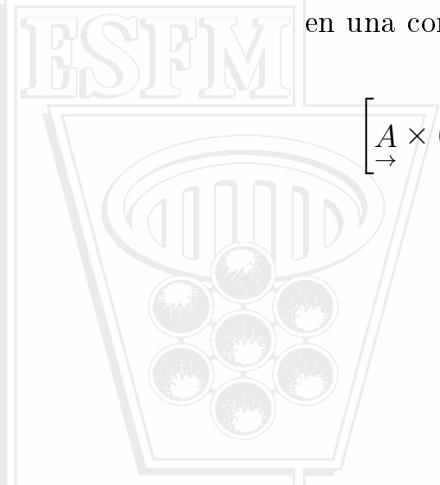
para finalmente mostrar que: $\underset{\rightarrow}{A} \cdot (\underset{\rightarrow}{B} \times \underset{\rightarrow}{C}) = \underset{\rightarrow}{B} \cdot (\underset{\rightarrow}{C} \times \underset{\rightarrow}{A}) = \underset{\rightarrow}{C} \cdot (\underset{\rightarrow}{A} \times \underset{\rightarrow}{B})$.



- (2) Muestre que: $\underset{\rightarrow}{A} \times (\underset{\rightarrow}{B} \times \underset{\rightarrow}{C}) \stackrel{(?)}{=} \underset{\rightarrow}{B}(\underset{\rightarrow}{A} \cdot \underset{\rightarrow}{C}) - \underset{\rightarrow}{C}(\underset{\rightarrow}{A} \cdot \underset{\rightarrow}{B})$.

Nuevamente el signo de interrogación sobre el de igual, indica que no hemos probado dicha relación. La demostración es una cantidad vectorial, por tal motivo la iniciamos en una componente, digamos la componente ℓ , por lo que escribimos,

$$\begin{aligned} \left[\underset{\rightarrow}{A} \times (\underset{\rightarrow}{B} \times \underset{\rightarrow}{C}) \right]_\ell &\stackrel{(3)}{=} \in_{\ell mn} A_m (\underset{\rightarrow}{B} \times \underset{\rightarrow}{C})_n \stackrel{(3)}{=} \in_{\ell mn} A_m \in_{nvw} B_v C_w, \\ &= \in_{\ell mn} \in_{nvw} A_m B_v C_w = (\delta_{\ell v} \delta_{mw} - \delta_{mv} \delta_{\ell w}) A_m B_v C_w, \\ &= \delta_{\ell v} \delta_{mw} A_m B_v C_w - \delta_{mv} \delta_{\ell w} A_m B_v C_w = A_m B_\ell C_m - A_m B_m C_\ell, \\ &\stackrel{(2)}{=} B_\ell (A \cdot C) - (A \cdot B) C_\ell \stackrel{(1)}{=} \left[\underset{\rightarrow}{B}(\underset{\rightarrow}{A} \cdot \underset{\rightarrow}{C}) - \underset{\rightarrow}{C}(\underset{\rightarrow}{A} \cdot \underset{\rightarrow}{B}) \right]_\ell. \end{aligned}$$



5.4. Operaciones básicas

59

- Explicación: Para el primer renglón utilizamos la relación (3) dos veces. Para el segundo renglón, reordenamos los términos para tener un producto de Chuckies definido en la ecuación (5.28). Para el tercer renglón distribuimos el producto de las deltas y aplicamos el “teorema de sustitución” (5.24), en los índices resaltados en rojo. Por ejemplo, para el término tenemos: $\delta_{\ell v} B_v = B_\ell$. Similiarmente para los restantes tres términos. Para el cuarto renglón, reagrupamos los términos resultantes y utilizamos las relaciones (2) y (1). Finalmente,

$$\left[\underset{\rightarrow}{A} \times \left(\underset{\rightarrow}{B} \times \underset{\rightarrow}{C} \right) \right]_{\ell} = \left[\underset{\rightarrow}{B} \left(\underset{\rightarrow}{A} \cdot \underset{\rightarrow}{C} \right) - \left(\underset{\rightarrow}{A} \cdot \underset{\rightarrow}{B} \right) \underset{\rightarrow}{C} \right]_{\ell},$$

como la componente ℓ de un vector es igual a la componente ℓ de otro escribimos:

$$\underset{\rightarrow}{A} \times \left(\underset{\rightarrow}{B} \times \underset{\rightarrow}{C} \right) = \underset{\rightarrow}{B} \left(\underset{\rightarrow}{A} \cdot \underset{\rightarrow}{C} \right) - \left(\underset{\rightarrow}{A} \cdot \underset{\rightarrow}{B} \right) \underset{\rightarrow}{C}.$$



- (3) Muestre que: $\left(\underset{\rightarrow}{A} \times \underset{\rightarrow}{B} \right) \cdot \left(\underset{\rightarrow}{C} \times \underset{\rightarrow}{D} \right) \stackrel{(?)}{=} \underset{\rightarrow}{(A \cdot C)} \left(\underset{\rightarrow}{B} \cdot \underset{\rightarrow}{D} \right) - \underset{\rightarrow}{(A \cdot D)} \left(\underset{\rightarrow}{B} \cdot \underset{\rightarrow}{C} \right)$.

Nuevamente, la demostración es una cantidad escalar, por lo que escribimos directamente,

$$\begin{aligned} \left(\underset{\rightarrow}{A} \times \underset{\rightarrow}{B} \right) \cdot \left(\underset{\rightarrow}{C} \times \underset{\rightarrow}{D} \right) &\stackrel{(2)}{=} \left(\underset{\rightarrow}{A} \times \underset{\rightarrow}{B} \right)_n \left(\underset{\rightarrow}{C} \times \underset{\rightarrow}{D} \right)_n \stackrel{(3)}{=} \underset{\in n m \ell}{A_m B_\ell} \underset{\in n v w}{C_v D_w}, \\ &= \underset{\in n m \ell \in n v w}{A_m B_\ell C_v D_w} = (\delta_{mv} \delta_{\ell w} - \delta_{mw} \delta_{\ell v}) A_m B_\ell C_v D_w, \\ &= \delta_{m \textcolor{red}{v}} \delta_{\ell w} A_m B_\ell C_{\textcolor{red}{v}} D_w - \delta_{m w} \delta_{\ell v} A_m B_\ell C_{\textcolor{red}{v}} D_{\textcolor{red}{w}}, \\ &= A_m B_\ell C_m D_\ell - A_m B_\ell C_\ell D_m, \\ &\stackrel{(2)}{=} \left(\underset{\rightarrow}{A} \cdot \underset{\rightarrow}{C} \right) \left(\underset{\rightarrow}{B} \cdot \underset{\rightarrow}{D} \right) - \left(\underset{\rightarrow}{A} \cdot \underset{\rightarrow}{D} \right) \left(\underset{\rightarrow}{B} \cdot \underset{\rightarrow}{C} \right). \end{aligned}$$

- Explicación: Para el primer renglón utilizamos las relaciones (2) y (3). Para el segundo renglón, reordenamos los términos para tener un producto de Chuckies definido en la ecuación (5.28). En el tercer renglón distribuimos el producto de las deltas y en el cuarto renglón aplicamos el “teorema de sustitución” (5.24), en los índices resaltados en rojo. Por ejemplo, para el término tenemos: $\delta_{mv} C_{\textcolor{red}{v}} = C_m$. Similiarmente para los restantes tres términos. Finalmente, para el quinto renglón, reagrupamos los términos resultantes y utilizamos la relación (2).



5.4. Operaciones básicas

60

- (4) Muestre que: $\nabla \times \nabla \phi \stackrel{(?)}{=} 0$.

Observamos que la función ϕ es continua, y la cantidad a demostrar es vectorial, por lo tanto será necesario empezar por una componente, digamos para variar utilizamos la componente ℓ , por lo tanto escribimos,

$$\begin{aligned} [\nabla \times \nabla \phi]_\ell &= \underset{(6)}{\in}_{\ell mn} \partial_m (\nabla \phi)_n = \underset{(4)}{\in}_{\ell mn} \partial_m \partial_n \phi, \\ &= \underset{(6)}{\in}_{\ell mn} \partial_n \partial_m \phi = - \underset{(4)}{\in}_{\ell nm} \partial_n \partial_m \phi, \\ &= - \underset{(4)}{\in}_{\ell nm} \partial_n (\nabla \phi)_m = - [\nabla \times \nabla \phi]_\ell. \end{aligned}$$

- Explicación: Para el primer renglón utilizamos las relaciones (6) y (4). Para el segundo renglón, consideramos que la función ϕ es continua y que $\partial_m \partial_n \phi = \partial_n \partial_m \phi$, como lo mostramos en la ecuación (5.5). Pero al realizar este cambio de índices notamos que la secuencia o “sonrisa” de nuestra relación ha cambiado. Por lo tanto para recuperar esta secuencia debemos intercambiar los índices mn en el Chucky generando un signo menos como se ilustra en la figura (5.2). Para el último renglón utilizamos nuevamente las relaciones (4) y (6) en orden inverso, para escribir

$$[\nabla \times \nabla \phi]_\ell = - [\nabla \times \nabla \phi]_\ell.$$

Como la componente ℓ de un vector es igual a la componente ℓ de otro escribimos:

$$\nabla \times \nabla \phi = -\nabla \times \nabla \phi.$$

6

$$2\nabla \times \nabla \phi = 0,$$

finalmente obtenemos nuestra relación. Lo anterior lo podemos ver desde $\nabla \times \nabla \phi = -\nabla \times \nabla \phi$, o un poco antes ya que el único número que es igual a su negativo es el cero.



- (5) Muestre que: $\nabla \cdot (\nabla \times A) \stackrel{(?)}{=} 0$.

Nuevamente suponemos que la función A es continua, y la cantidad a demostrar es un escalar, por lo tanto directamente escribimos,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times A) &\stackrel{\rightarrow}{=} \partial_\ell (\nabla \times A)_\ell = \underset{(5)}{\in}_{\ell mn} \partial_\ell \partial_m A_n, \\ &= \underset{(6)}{\in}_{\ell mn} \partial_m \partial_\ell A_n = - \underset{(5)}{\in}_{m\ell n} \partial_m \partial_\ell A_n, \\ &\stackrel{(6)}{=} - \partial_m (\nabla \times A)_m = - \nabla \cdot (\nabla \times A). \end{aligned}$$



- Explicación: Para el primer renglón utilizamos las relaciones (5) y (6). Para el segundo renglón, consideramos que la función componente A_n es continua y que $\partial_\ell \partial_m A_n = \partial_m \partial_\ell A_n$, como lo mostramos en la ecuación (5.5). Para compensar este cambio de índices y recuperar la secuencia o “sonrisa” inicial de nuestra relación, necesitamos intercambiar los índices ℓm en el Chucky generando un signo menos como lo indicamos en la figura (5.2). Para el último aplicamos las relaciones (6) y (5) en orden inverso, y como el cero es el único número que es igual a su negativo, tendremos que $\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$.
 \rightarrow



- (6) Muestre que: $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \stackrel{(?)}{=} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$.

Nuevamente suponemos que la función \vec{A} es continua, y la cantidad a demostrar es un vector, por lo tanto para la componente ℓ escribimos,

$$\begin{aligned}
 \left[\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) \right]_\ell &\stackrel{(6)}{=} \in_{\ell mn} \partial_m (\nabla \times \vec{A})_n = \in_{\ell mn} A_m \in_{nvw} \partial_m \partial_v A_w , \\
 &= \in_{\ell mn} \in_{nvw} \partial_m \partial_v A_w = (\delta_{\ell v} \delta_{mw} - \delta_{mv} \delta_{\ell w}) \partial_m \partial_v A_w , \\
 &= \delta_{\ell \textcolor{red}{v}} \delta_{m \textcolor{red}{w}} \partial_m \partial_{\textcolor{red}{v}} A_{\textcolor{red}{w}} - \delta_{m \textcolor{red}{v}} \delta_{\ell \textcolor{red}{w}} \partial_m \partial_{\textcolor{red}{v}} A_{\textcolor{red}{w}} = \partial_m \partial_\ell A_m - \partial_m \partial_m A_\ell , \\
 &\stackrel{(5)}{=} \partial_\ell (\nabla \cdot \vec{A}) - (\nabla \cdot \nabla) A_\ell \stackrel{(1)}{=} \left[\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \right]_\ell .
 \end{aligned}$$

- Explicación: Para el primer renglón utilizamos dos veces la relación (6). En el segundo renglón, reordenamos los términos para tener un producto de Chuckies definido en la ecuación (5.28). En el tercer renglón distribuimos el producto de las deltas y aplicamos el “teorema de sustitución” (5.24), en los índices resaltados en rojo. Por ejemplo, para el término tenemos: $\delta_{\ell \textcolor{red}{v}} \partial_{\textcolor{red}{v}} = \partial_\ell$. Similiarmente para los restantes tres términos. Para el cuarto renglón, reagrupamos los términos resultantes y utilizamos las relaciones (5) y (1). Finalmente, cuando un vector es igual a otro sus componentes ℓ deben ser iguales y escribimos:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} .$$



Para las siguientes demostraciones es conveniente recordar que la derivada de un producto de funciones $\phi\psi$ es:

$$\partial_\ell(\phi\psi) = \phi\partial_\ell\psi + (\partial_\ell\phi)\psi . \quad (5.31)$$

5.4. Operaciones básicas

62

- (7) Muestre que: $\nabla \cdot (\phi A) \stackrel{(?)}{\rightarrow} A \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot A$.

Nuevamente suponemos que las funciones ϕ y A son continuas, y la cantidad a demostrar es un escalar por lo tanto directamente escribimos,

$$\begin{aligned}\nabla \cdot (\phi A) &\stackrel{(3)}{\rightarrow} \partial_\ell(\phi A)_\ell = \partial_\ell(\phi A_\ell), \\ &= \phi \partial_\ell A_\ell + (\partial_\ell \phi) A_\ell \stackrel{(5,4)}{\rightarrow} \phi \nabla \cdot A + (\nabla \phi)_\ell A_\ell, \\ &\stackrel{(1)}{=} \phi \nabla \cdot A + A \cdot \nabla \phi.\end{aligned}$$

- Explicación: Para el primer renglón utilizamos las relaciones (3) y (1). En el segundo renglón, aplicamos la derivada de un producto (dp), el paso “más difícil” de la demostración, y las relaciones (5) y (4). Finalmente, utilizando (1) terminamos la demostración.



- (8) Muestre que: $\nabla \times (\phi A) \stackrel{(?)}{\rightarrow} (\nabla \phi) \times A + \phi \nabla \times A$.

Nuevamente suponemos que las funciones ϕ y A son continuas, y la cantidad a demostrar es un vector por lo tanto para la componente ℓ escribimos,

$$\begin{aligned}\left[\nabla \times (\phi A) \right]_\ell &\stackrel{(6)}{=} \in_{\ell m n} \partial_m (\phi A)_n = \in_{\ell m n} \partial_m (\phi A_n), \\ &= \phi \in_{\ell m n} \partial_m A_n + \in_{\ell m n} (\partial_m \phi) A_n \stackrel{(6,4)}{=} \phi (\nabla \times A)_\ell + \in_{\ell m n} (\nabla \phi)_m A_n, \\ &\stackrel{(3,1)}{=} \left[\phi (\nabla \times A) + (\nabla \phi) \times A \right]_\ell.\end{aligned}$$

- Explicación: Para el primer renglón utilizamos las relaciones (6) y (1). En el segundo renglón, aplicamos nuevamente el paso “más difícil” de la demostración, la derivada de un producto (dp), y las relaciones (6) y (4). Finalmente, utilizando las relaciones (3) y (1) y el hecho que un vector es igual a otro cuando sus componentes ℓ son iguales y escribimos:

$$\nabla \times (\phi A) \stackrel{\rightarrow}{=} \phi (\nabla \times A) + (\nabla \phi) \times A.$$



5.4. Operaciones básicas

- (9) Muestre que: $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \stackrel{(?)}{=} \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$.

Nuevamente suponemos que las funciones \vec{A} y \vec{B} son continuas, y la cantidad a demostrar es un escalar por lo tanto directamente escribimos,

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) &= \partial_\ell (\vec{A} \times \vec{B})_\ell \stackrel{(5)}{=} \in_{\ell m n} \partial_\ell (A_m B_n), \\
 &\stackrel{(dp)}{=} (\in_{\ell m n} \partial_\ell A_m) B_n + A_m \in_{\ell m n} \partial_\ell B_n, \\
 &= (\in_{n \ell m} \partial_\ell A_m) B_n - A_m (\in_{m \ell n} \partial_\ell B_n), \\
 &\stackrel{(3)}{=} (\nabla \times \vec{A})_n B_n - A_m (\nabla \times \vec{B})_m, \\
 &\stackrel{(2)}{=} \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}).
 \end{aligned}$$

- Explicación: Para el primer renglón utilizamos las relaciones (5) y (3). En el segundo renglón, aplicamos nuevamente la derivada de un producto (dp). Para el tercer renglón utilizamos las permutaciones cíclicas y no cíclicas del Chucky (5.19) para que en el cuarto renglón apliquemos la relación (3). Finalmente, utilizando la relación (2) obtenemos nuestro resultado.



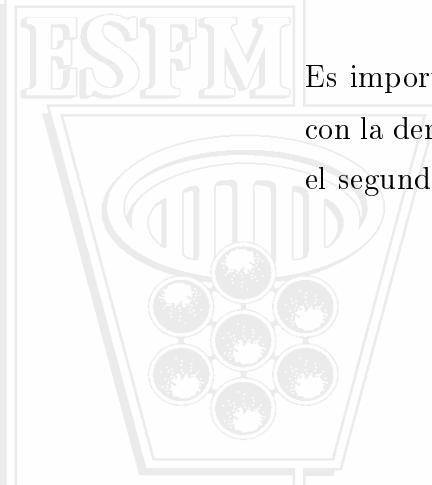
- (10) Muestre que: $\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) \stackrel{(?)}{=} (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A})$.

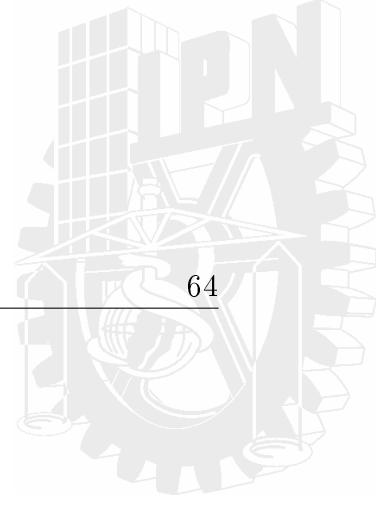
Esta demostración nos permite aprender algo nuevo, para esto haremos la demostración en sentido contrario, ya que es complicado a simple vista saber que cantidad necesitamos sumar y restar para hacerla directamente. Nuevamente suponemos que las funciones \vec{A} y \vec{B} son continuas, además la cantidad a demostrar es un vector, por lo tanto la componente ℓ del primer término de lado derecho lo escribimos,

$$\left[(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \right]_\ell = A_m \partial_m B_\ell. \quad (a)$$

Es importante resaltar que $(\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} \neq (\nabla \cdot \vec{A}) \vec{B}$, más bien este término se relaciona con la derivada direccional (4.7), en la dirección de \vec{A} . Intercambiando \vec{A} y \vec{B} escribimos el segundo término de la derecha como:

$$\left[(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} \right]_\ell = B_m \partial_m A_\ell. \quad (b)$$





5.4. Operaciones básicas

64

Para el tercer término escribimos:

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{matrix} B \times (\nabla \times A) \\ \rightarrow \end{matrix} \right]_{\ell} &\stackrel{(6)}{=} \in_{\ell mn} A_m (\nabla \times B)_n = \in_{\ell mn} \in_{nvw} A_m \partial_v B_w , \\
 &= \in_{\ell mn} \in_{nvw} A_m \partial_v B_w = (\delta_{\ell v} \delta_{mw} - \delta_{mv} \delta_{\ell w}) A_m \partial_v B_w , \\
 &= \delta_{\ell v} \delta_{mw} A_m \partial_v B_w - \delta_{mv} \delta_{\ell w} A_m \partial_v B_w = A_m \partial_{\ell} B_m - A_m \partial_m B_{\ell} ,
 \end{aligned} \tag{c}$$

donde hemos utilizado el producto de dos Chuckies (5.28) y el “teorema de sustitución” (5.24), en los índices resaltados en rojo. Similarmente intercambiando A por B , escribimos

$$\left[\begin{matrix} A \times (\nabla \times B) \\ \rightarrow \end{matrix} \right]_{\ell} = B_m \partial_{\ell} A_m - B_m \partial_m A_{\ell} . \tag{d}$$

Sumando las ecuaciones (a), (b), (c) y (d), tenemos

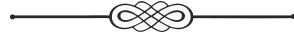
$$\begin{aligned}
 \cancel{A_m \partial_m B_{\ell}} + \cancel{B_m \partial_m A_{\ell}} + A_m \partial_{\ell} B_m - \cancel{A_m \partial_m B_{\ell}} + B_m \partial_{\ell} A_m - \cancel{B_m \partial_m A_{\ell}} = \\
 = \partial_{\ell} (A_m B_m) = \left[\begin{matrix} \nabla (A \cdot B) \\ \rightarrow \end{matrix} \right]_{\ell} ,
 \end{aligned}$$

por lo tanto igualando las componentes

$$\left[\begin{matrix} \nabla (A \cdot B) \\ \rightarrow \end{matrix} \right]_{\ell} = \left[\begin{matrix} (A \cdot \nabla) B + (B \cdot \nabla) A + A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) \\ \rightarrow \end{matrix} \right]_{\ell} ,$$

y finalmente, como las componentes ℓ de los vectores involucrados son iguales, los vectores deben ser iguales y escribimos:

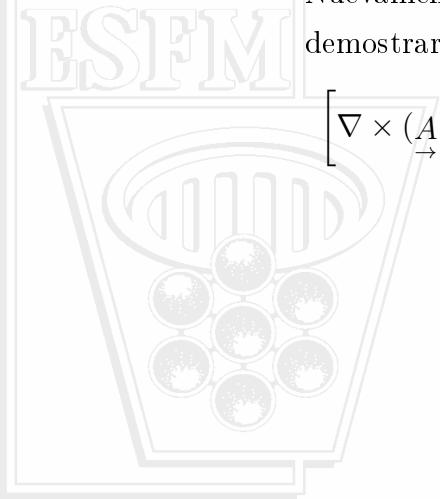
$$\nabla (A \cdot B) = (A \cdot \nabla) B + (B \cdot \nabla) A + A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) .$$



- (11) Muestre que: $\nabla \times (A \times B) \stackrel{(?)}{=} \rightarrow \partial_m (A \times B)_n = \in_{\ell mn} \in_{nvw} \partial_m (A_v B_w)$.

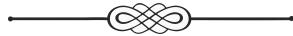
Nuevamente suponemos que las funciones A y B son continuas, además la cantidad a demostrar es un vector, por lo tanto la componente ℓ la escribimos,

$$\begin{aligned}
 \left[\begin{matrix} \nabla \times (A \times B) \\ \rightarrow \end{matrix} \right]_{\ell} &\stackrel{(6)}{=} \in_{\ell mn} \partial_m (A \times B)_n = \in_{\ell mn} \in_{nvw} \partial_m (A_v B_w) , \\
 &= (\delta_{\ell v} \delta_{mw} - \delta_{mv} \delta_{\ell w}) \partial_m (A_v B_w) , \\
 &= \delta_{\ell v} \delta_{mw} \partial_m (A_v B_w) - \delta_{mv} \delta_{\ell w} \partial_m (A_v B_w) = \partial_m (A_{\ell} B_m) - \partial_m (A_m B_{\ell}) , \\
 &\stackrel{(5,1)}{=} \left[\begin{matrix} A(\nabla \cdot B) - B(\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla) A - (A \cdot \nabla) B \\ \rightarrow \end{matrix} \right]_{\ell} .
 \end{aligned}$$



- Explicación: Para el primer renglón utilizamos dos veces la relación (6), reordenando los términos para tener un producto de Chuckies definido en la ecuación (5.28) mostrado en el segundo renglón. En el tercer renglón distribuimos el producto de las deltas y aplicamos el “teorema de sustitución” (5.24), en los índices resaltados en rojo. Para el último renglón desarrollamos las drivadas y reagrupamos los términos resultantes para utilizar las relaciones (5) y (1). Finalmente, cuando un vector es igual a otro sus componentes ℓ deben ser iguales y escribimos:

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} .$$



Las relaciones anteriores son muy generales, pero en física se utiliza el vector de posición para definir un estado mecánico o el punto donde deseamos calcular un campo o un potencial, como lo mostraremos en el siguiente capítulo. A manera de resumen escribimos:

RESUMEN: (5.32)

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) , \quad (5.33)$$

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) , \quad (5.34)$$

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C}) , \quad (5.35)$$

$$\nabla \times \nabla \phi = 0 , \quad (5.36)$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0 , \quad (5.37)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} , \quad (5.38)$$

$$\nabla \cdot (\overset{\rightarrow}{\phi} \vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \vec{A} , \quad (5.39)$$

$$\nabla \times (\overset{\rightarrow}{\phi} \vec{A}) = \phi \nabla \times \vec{A} - \vec{A} \times \nabla \phi , \quad (5.40)$$

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) , \quad (5.41)$$

$$\nabla(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + \vec{A} \times (\nabla \times \vec{B}) + \vec{B} \times (\nabla \times \vec{A}) , \quad (5.42)$$

$$\nabla \times (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A}(\nabla \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\nabla \cdot \vec{A}) + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} . \quad (5.43)$$



6

El vector de posición

En el capítulo anterior desarrollamos las relaciones diferenciales más utilizadas, pero sin mostrar alguna aplicación práctica de tales operaciones generales. Por si solas podrían ser plasmadas por algún artista en un graffiti o poster. Pero lo que deseamos es evitar tenerlas en un nicho de grandeza y sobre todo evitar creer que son complejas e inútiles.

En física, particularmente en la mecánica utilizamos el concepto de estado de una partícula, es decir, con un vector de posición o estado describimos la evolución o la dinámica de una partícula u objeto, y con este vector definimos la velocidad y aceleración [5]. Además en electromagnetismo ese vector de posición nos permite describir los campos electromagnéticos y sus principales relaciones operacionales.

6.1. Mecánica

En la figura (6.1), mostramos de manera general, la descripción de la dinámica de un sistema mecánico; que en este caso corresponde a una abeja moviéndose en el espacio. Claramente la abeja además de trasladarse, puede rotar, pero para simplificar consideramos a la abeja como un punto $p(x, y, z)$ y con una masa m . Entonces el vector de posición \vec{r} , con respecto al origen o , está definido por las coordenadas $x(t)$, $y(t)$ y $z(t)$ dependientes del tiempo como:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= x(t) \hat{\mathbf{e}}_x + y(t) \hat{\mathbf{e}}_y + z(t) \hat{\mathbf{e}}_z , \\ &= (x(t), y(t), z(t)) ,\end{aligned}\tag{6.1}$$

donde hemos reemplazado $\hat{\mathbf{a}}$ por $\hat{\mathbf{e}}$, en los vectores unitarios, para no confundirlos posteriormente con la aceleración.

La velocidad \vec{u} se define como la derivada del vector de posición con respecto al tiempo [5], o la razón de cambio del vector de posición respecto del tiempo $\overset{\rightarrow}{\dot{r}}$, donde el punto sobre el vector denota derivada en el tiempo. Similiarmente, la aceleración \vec{a} es la segunda derivada del vector posición respecto del tiempo $\overset{\rightarrow}{\ddot{r}}$, o la razón de cambio de la velocidad respecto del tiempo $\overset{\rightarrow}{\dot{u}}$. Brevemente escribimos,

$$\begin{aligned} \vec{u} &= \overset{\rightarrow}{\dot{r}} = \dot{x} \hat{\mathbf{e}}_x + \dot{y} \hat{\mathbf{e}}_y + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}), \\ \vec{a} &= \overset{\rightarrow}{\ddot{r}} = \ddot{x} \hat{\mathbf{e}}_x + \ddot{y} \hat{\mathbf{e}}_y + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z = (\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}). \end{aligned} \quad (6.2)$$

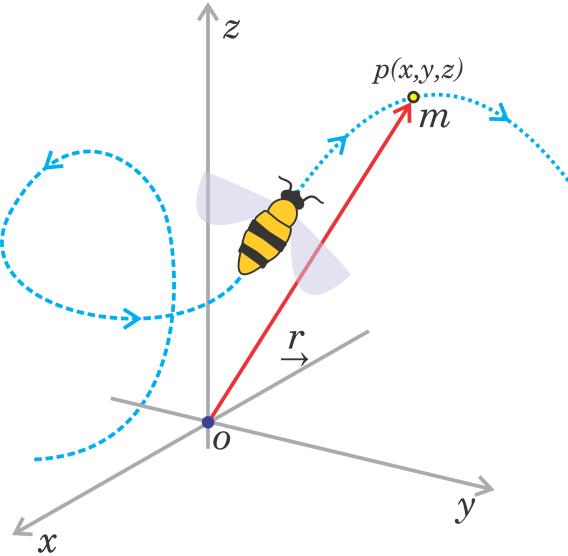


Figura 6.1: El estado dinámico de una partícula se representa por el vector de posición \vec{r} .

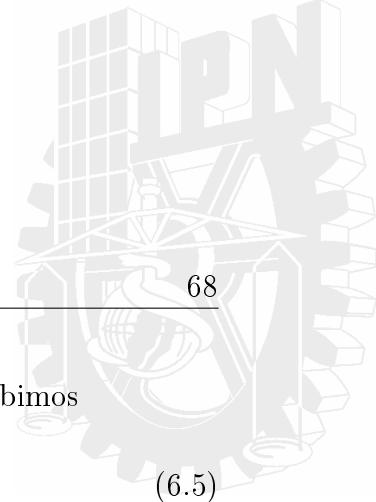
La dinámica se obtiene a partir de la segunda ley de Newton [5],

$$\frac{d}{dt} \vec{p} = \overset{\rightarrow}{\dot{p}} = m \overset{\rightarrow}{\ddot{r}}, \quad (6.3)$$

donde $\overset{\rightarrow}{\dot{p}}$ define la fuerza externa. Dependiendo del sistema de coordenadas es la forma funcional de la aceleración, por ejemplo, para las coordenadas cilíndricas escribimos el vector de posición como,

$$\vec{r} = r \hat{\mathbf{e}}_r + z \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (6.4)$$

Para calcular la derivada en el tiempo del vector de posición, es conveniente escribir los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$, en términos de los vectores fijos de las coordenadas cartesianas,



6.2. Operaciones básicas

68

es decir, con ayuda de las relaciones del cambio de coordenadas (3.28) escribimos

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_r &= \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_y , \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta &= -\sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x + \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_y ,\end{aligned}\quad (6.5)$$

donde obtenemos

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\mathbf{e}}}_r &= -\dot{\theta} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_x + \dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_y = \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta , \\ \dot{\hat{\mathbf{e}}}_\theta &= -\dot{\theta} \cos \theta \hat{\mathbf{e}}_x - \dot{\theta} \sin \theta \hat{\mathbf{e}}_y = -\dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_r .\end{aligned}\quad (6.6)$$

Sustituyendo lo anterior en la ecuación (6.4), la velocidad será

$$\begin{aligned}\overset{\rightarrow}{\dot{\mathbf{r}}} &= \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\hat{\mathbf{e}}}_r + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z , \\ &= \dot{r} \hat{\mathbf{e}}_r + r \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + \dot{z} \hat{\mathbf{e}}_z ,\end{aligned}\quad (6.7)$$

de donde obtenemos, el diferencial de camino u arco en coordenadas cilíndricas como,

$$\overset{\rightarrow}{dr} = dr \hat{\mathbf{e}}_r + r d\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + dz \hat{\mathbf{e}}_z . \quad (6.8)$$

De manera similar la aceleración en coordenadas cilíndricas la escribimos

$$\overset{\rightarrow}{\ddot{\mathbf{r}}} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_r + (2\dot{\theta} \dot{r} + r \ddot{\theta}) \hat{\mathbf{e}}_\theta + \ddot{z} \hat{\mathbf{e}}_z . \quad (6.9)$$

Sí consideramos un círculo de radio $r = R$ en el plano $z = 0$, la velocidad y aceleración se reducen a las bien conocidas relaciones de la velocidad y aceleración tangencial y centrípeta para el movimiento circular [5], que se escriben como

$$\begin{aligned}\overset{\rightarrow}{\dot{\mathbf{r}}} &= R \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta , \\ \overset{\rightarrow}{\ddot{\mathbf{r}}} &= -R \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_r + R \ddot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta .\end{aligned}\quad (6.10)$$

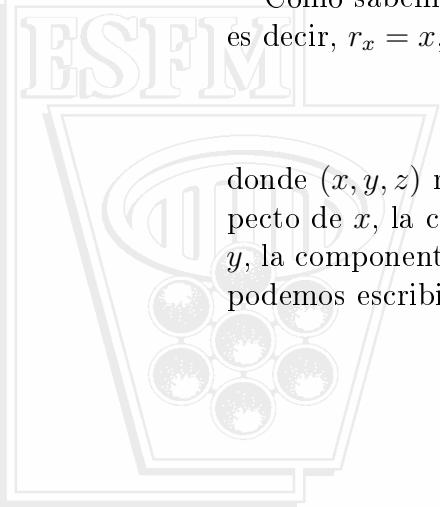
6.2. Operaciones básicas

Como sabemos el vector de posición lo podemos definir en términos de sus componentes, es decir, $r_x = x$, $r_y = y$ y $r_z = z$, de tal manera que escribimos

$$\vec{r} = (x, y, z) , \quad (6.11)$$

donde (x, y, z) representa un punto en el espacio. De la propia definición, si derivamos respecto de x , la componente r_x , tendremos $\partial_x r_x = \partial_x x = 1$. O bien, si derivamos respecto de y , la componente r_z , tendremos $\partial_y r_z = \partial_x z = 0$, etc., de tal manera que para todos los casos podemos escribir

$$\partial_\ell r_m = \delta_{\ell m} . \quad (6.12)$$



6.2. Operaciones básicas

De las relaciones vectoriales (5.30), tenemos que $\nabla \cdot \vec{A} = \partial_\ell A_\ell$, entonces

$$\nabla \cdot \vec{r} = \partial_\ell r_\ell = \delta_{\ell\ell} = 3 , \quad (6.13)$$

donde hemos ocupado la convención de suma sobre la delta de Kronecker (5.20). Nuevamente, de las relaciones vectoriales (5.30), tenemos que el rotacional de \vec{r} , será

$$[\nabla \times \vec{r}]_\ell = \epsilon_{\ell mn} \partial_m r_n = \epsilon_{\ell mn} \delta_{mn} = \epsilon_{\ell mn} = 0 , \quad (6.14)$$

es decir el campo \vec{r} es conservativo,

$$\nabla \times \vec{r} = 0 . \quad (6.15)$$

Para el caso del cálculo del gradiente de una función de r^n , donde n es un entero, la realizaremos por medio de inducción. Reescribimos la magnitud de \vec{r} como,

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{r_m r_m} , \quad (6.16)$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} [\nabla r]_\ell &= \partial_\ell r = \partial_\ell \sqrt{r_m r_m} , \\ &= \frac{1}{2r} \partial_\ell (r_m r_m) = \frac{2r_m \partial_\ell r_m}{2r} , \\ &= \frac{r_m \delta_{\ell m}}{r} = \frac{r_\ell}{r} = \left[\frac{\vec{r}}{r} \right]_\ell = [\hat{r}]_\ell , \end{aligned} \quad (6.17)$$

de donde

$$\nabla r = \hat{r} , \quad (6.18)$$

y de pilón tenemos una relación muy útil

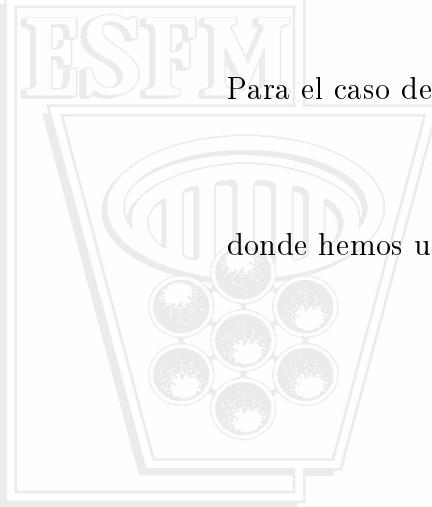
$$\partial_\ell r = \frac{r_\ell}{r} . \quad (6.19)$$

Para el caso de r^2 escribimos,

$$[\nabla r^2]_\ell = \partial_\ell r^2 = 2r \partial_\ell r = 2r \frac{r_\ell}{r} = [2r \hat{r}]_\ell , \quad (6.20)$$

donde hemos utilizado la ecuación (6.19) y el hecho que $\vec{r} = r \hat{r}$, para escribir

$$\nabla r^2 = 2r \hat{r} . \quad (6.21)$$



6.3. Electrostática

70

Similarmente para r^n , escribimos

$$[\nabla r^n]_\ell = \partial_\ell r^n = nr^{n-1} \frac{r_\ell}{r} = [nr^{n-1} \hat{r}]_\ell , \quad (6.22)$$

de donde

$$\nabla r^n = nr^{n-1} \hat{r} . \quad (6.23)$$

De manera general podemos suponer que una función que dependa de r se escribe como

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n r^n , \quad (6.24)$$

donde A_n es una constante, aplicando el operador líneal gradiente y la relación (6.23), proponemos

$$\nabla f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \nabla r^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n n r^{n-1} \hat{r} = f'(r) \hat{r} . \quad (6.25)$$

En resumen podemos escribir,

$$\text{Sí, } \vec{r} = (x, y, z) \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \vec{r} = 3 , \\ \nabla \times \vec{r} = 0 , \\ \nabla f(r) = f'(r) \hat{r} . \end{cases} \quad (6.26)$$

6.3. Electrostática

A diferencia de la mecánica, en electromagnetismo el vector de posición \vec{r} , indica el punto $p(x, y, z)$, donde deseamos calcular el potencial o campo, pero será necesario un vector de posición “mudo” \vec{r}' , que nos indica donde está localizada la fuente de dicho potencial o campo. Aunque es muy utilizado, pero nunca mencionado, para la solución a los problemas de electromagnetismo es necesario considerar: un sistema de coordenadas adecuado, y el “secreto” o clave para la solución será simplemente, saber quién es \vec{r} y saber quién es \vec{r}' en términos de este sistema de coordenadas [11, 12].

En la figura (6.2), describimos de manera particular el “secreto” del electromagnetismo, aplicado a electrostática, donde una carga puntual q produce un potencial eléctrico $\phi(r)$. En este caso el vector \vec{r} , describe el punto donde deseamos calcular el potencial $\phi(r)$ y el vector mudo \vec{r}' , describe el punto donde está localizada la carga q o la fuente de ese potencial. Cuando la descripción sea de manera general, ese vector de posición mudo será la variable de integración, como lo describiremos posteriormente.

Ofrecemos disculpas por escribir el siguiente resultado, pero es un hecho experimental y matemático tan importante, que merece al final del curso ser discutido. El potencial eléctrico en el punto \vec{r} , producido por una carga puntual q , localizada en \vec{r}' , es:

$$\phi(r) = \frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (6.27)$$

donde claramente en la figura (6.2), describimos quiénes son los vectores \vec{r} y \vec{r}' . El módulo de la diferencia de estos vectores $|\vec{r} - \vec{r}'|$, es la distancia entre la carga y el punto donde deseamos calcular el potencial. Cuando $\vec{r}' = 0$, recobramos el resultado conocido desde la escuela secundaria $\phi = q/r$.

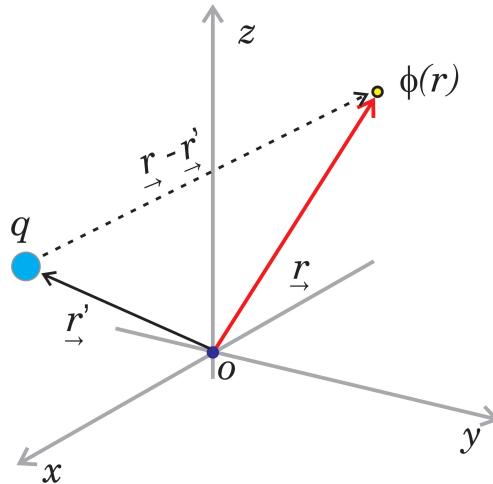


Figura 6.2: El “secreto” o clave para la solución electrostática es saber que: \vec{r} es el vector que va del origen al punto donde deseamos calcular el campo o potencial. Y que \vec{r}' es el vector que va del origen a donde está localizada la carga q .

De este potencial es muy sencillo calcular el campo eléctrico, definido por $\vec{E} = -\nabla\phi$, recordando que el potencial es función de r , $\phi = \phi(r)$. Aplicando la relación (6.26), escribimos

$$\vec{E}(r) = -\nabla\phi(r) = +\frac{q}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (6.28)$$

el primer término es la derivada respecto a r de $\phi(r) = q/|\vec{r} - \vec{r}'|$, (que cambia de signo por el signo menos de la definición), y el segundo término es el vector unitario para el gradiente. Entonces escribimos,

$$\vec{E}(r) = \frac{q(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}, \quad (6.29)$$

6.3. Electrostática

que cuando $\underset{\rightarrow}{r}' = 0$, se reduce a la conocida relación,

$$\underset{\rightarrow}{E}(r) = \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r . \quad (6.30)$$

Como el campo eléctrico es definido por la relación causal $\underset{\rightarrow}{F} = Q\underset{\rightarrow}{E}$ [5], donde Q es la carga de prueba, utilizando la relación anterior escribimos la ley de Coulomb

$$\underset{\rightarrow}{F}(r) = \frac{qQ}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r . \quad (6.31)$$

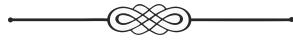
El campo eléctrico electrostático debe ser irrotacional, es decir, debe ser un campo conservativo por definición, ya que la relación (5.36) $\nabla \times \nabla\phi = 0$, se cumple directamente en:

$$\nabla \times \underset{\rightarrow}{E} = -\nabla \times \nabla\phi = 0 . \quad (6.32)$$

Si deseamos mostrarlo directamente del campo (6.29), podemos utilizar la ecuación (5.40), $\nabla \times (\phi\underset{\rightarrow}{A}) = \phi\nabla \times \underset{\rightarrow}{A} - \underset{\rightarrow}{A} \times \nabla\phi$, que al comparar estas ecuaciones $\underset{\rightarrow}{A} = \underset{\rightarrow}{E}(r) = q(\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}')$, y $\phi = 1/|\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}'|^3$, y escribimos directamente

$$\begin{aligned} \nabla \times \underset{\rightarrow}{E} &= q \left\{ \frac{1}{|\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}'|^3} \nabla \times (\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}') - (\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}') \times \nabla \left[\frac{1}{|\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}'|^3} \right] \right\} , \\ &= \left\{ \frac{\nabla \times \underset{\rightarrow}{r}^0 - \nabla \times \underset{\rightarrow}{r}'^0}{|\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}'|^3} - \frac{(\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}') \times (\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}')}{|\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}'|} \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{|\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}'|^3} \right] \right\} , \\ &= 0 , \end{aligned} \quad (6.33)$$

donde utilizamos finalmente que, $(\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}') \times (\underset{\rightarrow}{r} - \underset{\rightarrow}{r}') = \underset{\rightarrow}{A} \times \underset{\rightarrow}{A} = 0$.



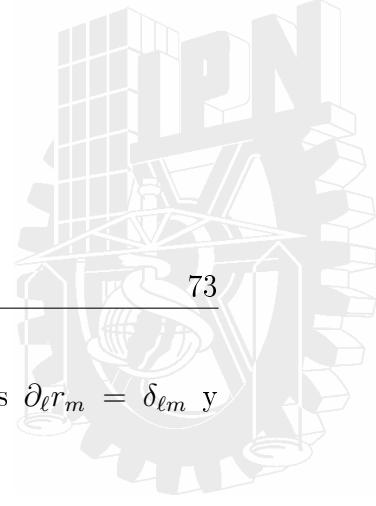
Del último ejemplo, mostramos que en algunas ocasiones no es muy práctico aplicar las relaciones generales, supongamos que tenemos el potencial producido por un dipolo eléctrico $\underset{\rightarrow}{d}$ constante, localizado en el origen dado por:

$$\phi(r) = \frac{\underset{\rightarrow}{d} \cdot \underset{\rightarrow}{r}}{r^3} , \quad (6.34)$$

deseamos hallar el campo eléctrico. Como la cantidad deseada es un vector, calculemos la componente ℓ , es decir,

$$\left[\underset{\rightarrow}{E} \right]_\ell = -\partial_\ell \left[\frac{d_m r_m}{r^3} \right] = -d_m \partial_\ell \left(\frac{r_m}{r^3} \right) , \quad (6.35)$$





6.3. Electrostática

73

que coincide con la derivada de un cociente. Si recordamos las relaciones $\partial_\ell r_m = \delta_{\ell m}$ y $\partial_\ell r = r_\ell/r$, escribimos directamente,

$$\begin{aligned}
 \left[\vec{E} \right]_\ell &= -d_m \frac{r^3 \partial_\ell r_m - r_m \partial_\ell r^3}{r^6}, \\
 &= -d_m \frac{r^3 \delta_{\ell m} - 3r^2 r_m \frac{r_\ell}{r}}{r^6}, \\
 &= 3 \frac{d_m r_m r_\ell}{r^5} - \frac{d_m \delta_{\ell m}}{r^3}, \\
 &= \left[3 \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{d}}{r^3} \right]_\ell,
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

de donde

$$\vec{E} = 3 \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{d}}{r^3}. \tag{6.37}$$



Otra manera de demostrar la relación (6.33), es por medio del cambio de variable $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Y tendremos que $\partial_\ell R_m = \delta_{\ell m}$ y $\partial_\ell R = R_\ell/R$, entonces directamente escribimos

$$\begin{aligned}
 \left[\nabla \times \vec{E} \right]_\ell &= q \in_{\ell mn} \partial_m \left(\frac{R_n}{R^3} \right), \\
 &= q \in_{\ell mn} \frac{R^3 \partial_m R_n - R_n 3R^2 \partial_m R}{R^6}, \\
 &= q \in_{\ell mn} \frac{\delta_{mn}}{R^3} - q \in_{\ell mn} \left(\frac{3R^2 \frac{R_n R_m}{R}}{R^6} \right), \\
 &= \frac{q}{R^3} \underset{\in_{\ell mn}}{\cancel{\delta_{mn}}}{}^0 - \frac{3q}{R^5} \underset{\in_{\ell mn}}{\cancel{R_m R_n}}{}^0, \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{6.38}$$

Que es una demostración muy directa y no utilizamos las relaciones generales.



7

Integrales de superficie y volumen

Iniciar un curso de integración siempre nos impone un poco de temor, aunque existen libros tan agradables y maravillosos que pronto perdemos este natural miedo [22]. Momentáneamente nos sentimos como Tom Sawyer cuando echó una mirada a la cerca de la tía Poly, « y de pronto su bello y hermoso día perdió toda su alegría y una aplastante tristeza descendió sobre su alegre espíritu. ¡Treinta varas de valla de nueve pies de altura! Le pareció que su vida era vana y su existencia una pesadumbre. Lanzando un suspiro, mojó la brocha y la pasó a lo largo del tablón más alto; repitió la operación; la volvió a repetir, comparó la insignificante franja blanqueada con el vasto tramo de cerca sin encalar » [23].

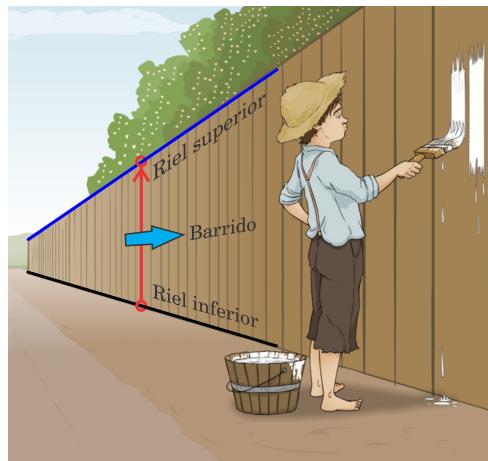
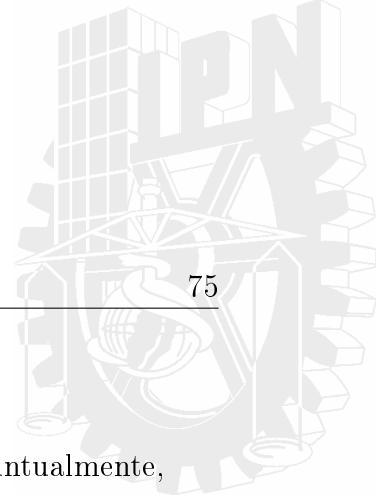


Figura 7.1: —¿Qué es Integrar Tom? Nos diría pensativo —¡Integrar es pintar!. Las flechas no indican el sentido de la calle, ni son graffitis. (Imagen tomada de <http://bunnypanda.blogspot.com/p/illustrations.html>)



Si en ese momento le preguntásemos

—¿Qué es integrar Tom?! — Nos diría pensativo al principio, pero muy puntualmente,
—No sé. Bueno, sí ¡es pintar! — y sonriendo sumergiría la brocha en cubo con lechada de cal, para continuar con su trabajo.

¡Qué palabras tan estupendas!, ¡Claro! nada más sencillo que pintar, no se nos hubiera ocurrido esta idea para definir la integración. Entonces, ¿cuál será el mejor método de pintar, perdon de integrar? El sueño de todo pintor inexperto o de brocha gorda como un servidor, es hacerlo de un sólo brochazo y de una sola pasada. Con esta idea en nuestra mente le diseñamos a Tom una pistola autoajustable para pintar, la cual representamos en la figura (7.2).

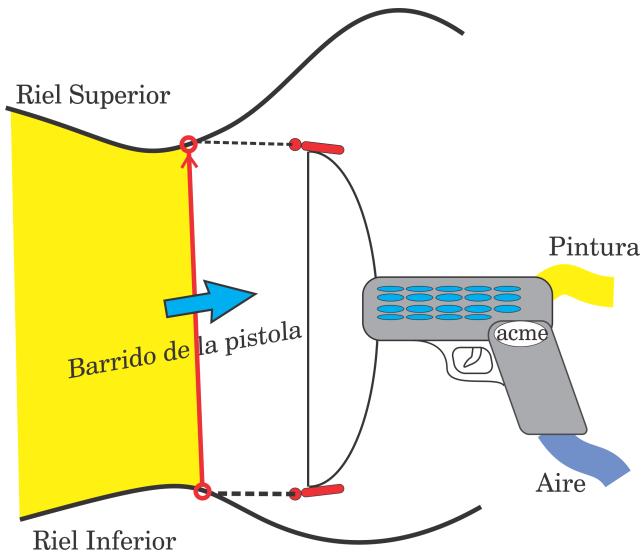


Figura 7.2: Pistola autoajustable, the Tom's dream.

Esta pistola cuenta con dos rieles, superior e inferior, que se doblan de acuerdo al perfil de la superficie a pintar, y sirven para guiar a los dos pernos de la boca autoajustable de la pistola, como se muestra con las líneas punteadas en la figura (7.2). Una vez ajustados los pernos, simplemente se oprime el gatillo y se desplaza la pistola, haciendo un barrido de izquierda a derecha. ¡Pintando la superficie de una sola pasada!

Pues manos a la obra, nuestro manual de diseño diría:

- Coloque los rieles inferior y superior.
- Ajuste firmemente el perno de la pistola al riel inferior.

7.1. Integrales de superficie

- A continuación ajuste el siguiente perno al riel superior.
- Finalmente desplace la pistola de izquierda a derecha.

El arreglo experimental es muy sencillo y lo mostramos por medio de las flechas y líneas en la figura (7.1). Para un pintado eficiente, es conveniente seguir este orden de ajuste. Se recomienda no usar sustitutos y hacerlo bajo la supervisión de un adulto.

7.1. Integrales de superficie

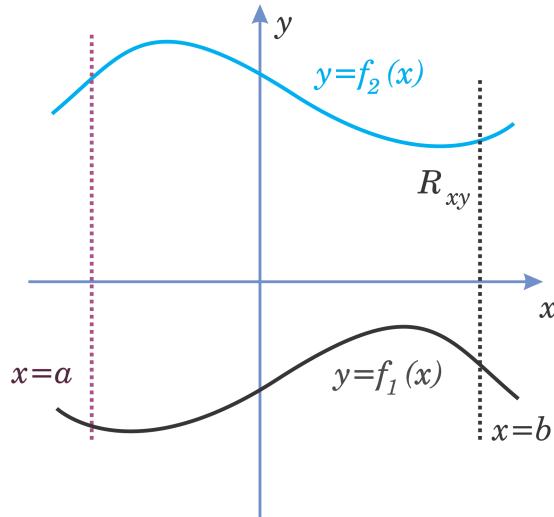


Figura 7.3: Región de integración R_{xy} , definida entre las funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ y las líneas $x = a$ y $x = b$.

Ahora hagamos nuestro proceso de pintado por medio de funciones. Supongamos que los rieles inferior y superior son las funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$, respectivamente. Y el barrido de la pistola lo haremos desde $x = a$ hasta $x = b$, como se muestra en la figura (7.3). Observamos que la región de pintado o de integración está contenida entre estas curvas y la denotamos por R_{xy} . Cabe mencionar que esta región es lo más importante para la integración porque definirá el sistema de coordenadas a utilizar.

El elemento diferencial de área es $dA = dx dy$, si deseamos calcular el área debemos integral este diferencial en la región R_{xy} , es decir, escribimos

$$\text{Área} = \iint_{R_{xy}} dA , \quad (7.1)$$

7.1. Integrales de superficie

donde los límites de integración, que definen la región R_{xy} , los colocaremos de acuerdo a nuestro manual de diseño. La boca de la pistola autoajustable está orientada a lo largo del eje y , por lo tanto la primer integral es para el diferencial dy , y los límites son las funciones $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$, que definen los rieles de abajo hacia arriba respectivamente. La boca autoajustable la indicamos por la flecha vertical de la figura (7.4). Finalmente realizamos el barrido de la pistola en el eje x , por lo que el segundo diferencial será el dx y la integral será desde $x = a$ hasta $x = b$, como el arrastre de la pistola e indicado por la flecha.

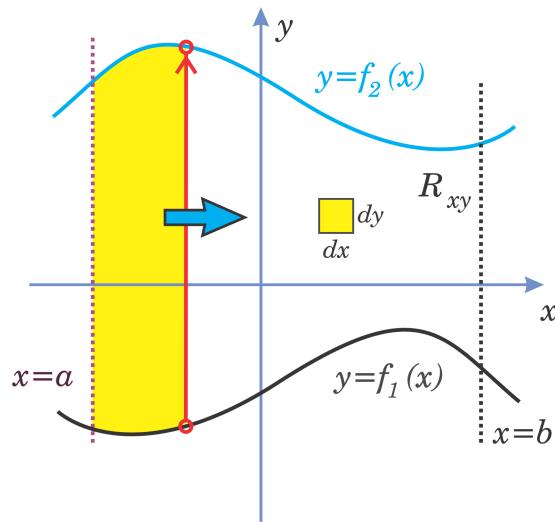
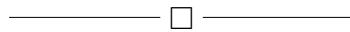


Figura 7.4: La región R_{xy} define los límites de la integral.

El área será entonces,

$$\text{Área} = \iint_{R_{xy}} dA = \int_{x=a}^b \left[\int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} dy \right] dx , \quad (7.2)$$

donde la integral entre paréntesis cuadrados corresponde a la colocación de los rieles en el eje y y los límites de la segunda integral corresponde al barrido de la pistola en el eje x .



Hagamos un ejemplo ilustrativo y sencillo, calculemos el área de una región triangular mostrada en la figura (7.5), limitada por las rectas $y = x$, $y = 0$, $x = 0$ y $x = b$.

Los rieles inferior y superior están definidos por las rectas $y = 0$ y $y = x$, y la pistola está colocada a lo largo del eje y . El barrido será a lo largo del eje x desde $x = 0$ a $x = b$, por lo

7.1. Integrales de superficie

tanto escribimos,

$$A = \iint_{R_{xy}} dA = \int_{x=0}^b \left[\int_{y=0}^x dy \right] dx = \int_{x=0}^b x dx = \frac{1}{2} b^2 . \quad (7.3)$$

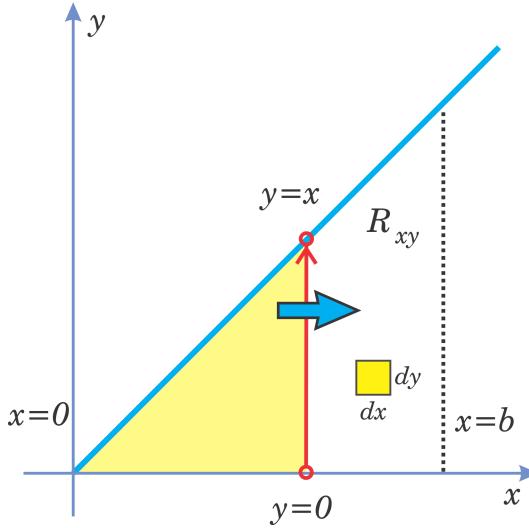


Figura 7.5: El área de la región R_{xy} , es la de un triángulo de base y altura b , cuyo valor es $A = b^2/2$.

Nuevamente la integral entre paréntesis cuadrados corresponde a la colocación de los rieles en el eje y , o la boca de la pistola autoajustable. Los límites de la segunda integral corresponden al barrido de la pistola en el eje x .



Hagamos otro ejemplo ilustrativo y sencillo, calculemos el área de una región circular mostrada en la figura (7.6), limitada por el círculo $x^2 + y^2 = R^2$ y las rectas $x = 0$ y $y = 0$.

Los rieles inferior y superior están definidos por las rectas $y = 0$ y $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, entonces la boca de la pistola queda colocada a lo largo del eje y , y primeramente haremos esta integral en dy . Como el barrido es a lo largo del eje x desde $x = 0$ a $x = R$. Por lo tanto escribimos,

$$A = \iint_{R_{xy}} dA = \int_{x=0}^R \left[\int_{y=0}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \right] dx = \int_{x=0}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx . \quad (7.4)$$

La integral (7.4), la resolvemos de manera directa con una tabla de integrales, pero nos perderíamos del uso de una transformación y definir un teorema importante.

7.2. Transformación B.E.

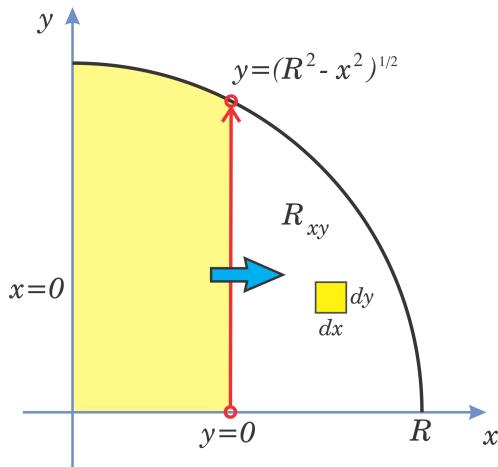


Figura 7.6: El área de la región R_{xy} , es la de un cuarto de círculo de radio R , cuyo valor es $A = \pi R^2 / 4$.

7.2. Transformación B.E.

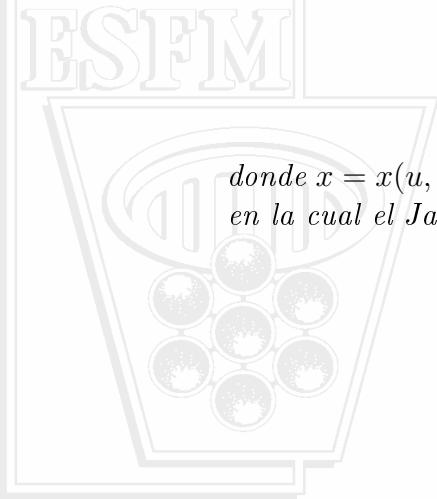
Como hemos podido observar en los dos ejemplos anteriores, la región de integración define los límites de las integrales y por esta razón consideramos que es más importante la región que el integrando. Pero de acuerdo a nuestra experiencia en nuestros cursos de cálculo [22], un cambio de variable el integrando nos facilita resolver integrales. De la misma manera, esto también es verdadero para las integrales múltiples, y un cambio de variables o una transformación adecuada, nos permitirá cambiar la región de integración inicial a una nueva y más adecuada. La relación entre estas regiones de integración se llama Jacobiano de la transformación [17, 24]. Enunciaremos este importante teorema llamado teorema de cambio de variable. Lo haremos para dos variables, aunque no lo demostraremos aquí [24].

Teorema 1. Supóngase que R_{xy} es una región en el plano xy acotada por una curva simple y cerrada, y que R_{uv} es la imagen de R_{xy} bajo la transformación invertible

$$T_{uv} : \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases}$$

donde $x = x(u, v)$ e $y = y(u, v)$ son funciones continuamente diferenciables en la región R_{xy} , en la cual el Jacobiano

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0 .$$



7.2. Transformación B.E.

Si suponemos además que $f(x, y)$ es una función continua sobre R_{xy} , entonces,

$$\iint_{R_{xy}} f(x, y) dxdy = \iint_{R_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dudv , \quad (7.5)$$

donde las regiones las ilustramos en la figura (7.7).

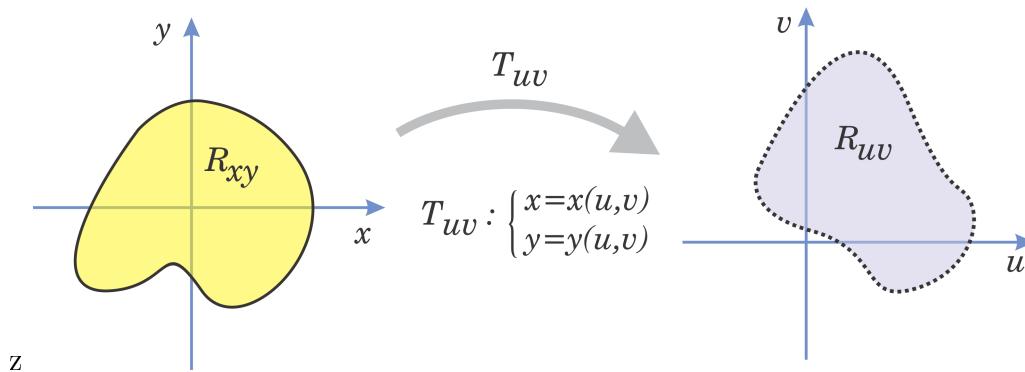


Figura 7.7: Ilustración para el teorema de cambio de variable.

————— □ —————

Regresemos a nuestro problema anterior, donde deseamos hallar el área de un cuarto de círculo, pero ahora con nuestro teorema de cambio de variable a la mano. Consideremos la figura (7.8), donde dibujamos un círculo de radio R , que define nuestra región R_{xy} .

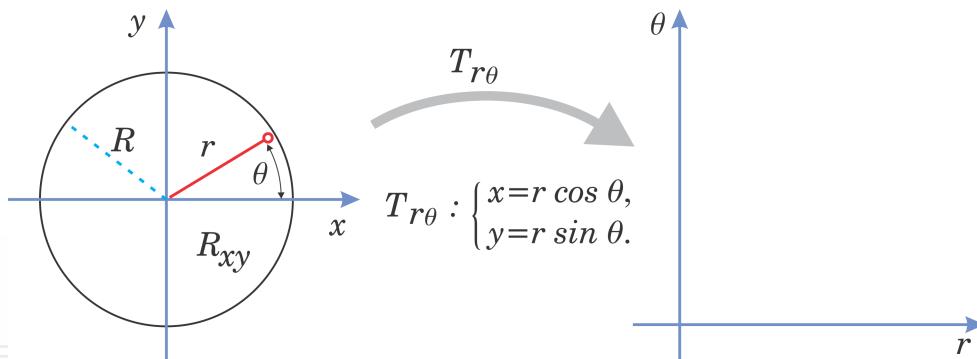


Figura 7.8: Transformación de coordenadas cartesianas a polares. La idea principal es construir una nueva región $R_{r\theta}$, a partir de la región inicial R_{xy} .

Nuestro pensamiento intuitivo, nos dice que para el cálculo del área de un círculo, es conveniente el uso de las coordenadas polares; las cuales se definen por el radio r y el ángulo θ ,

7.2. Transformación B.E.

como se muestra en la figura (7.8). Observe que para parametrizar una superficie necesitamos dos parámetros, siendo redundantes, nuestros parámetros serán r y θ y la transformación la escribimos,

$$T_{r\theta} : \begin{cases} x = r \cos \theta , \\ y = r \sin \theta , \end{cases}$$

que es invertible ya que podemos escribir $r^2 = x^2 + y^2$, y $\theta = \tan^{-1}(y/x)$.

Con el fin de aprender a construir transformaciones, consideramos que es necesario resaltar cómo actúa esta transformación o mapeo. Es claro que vamos a cambiar la región circular R_{xy} a una nueva región $R_{r\theta}$, que dibujaremos sobre el plano $r\theta$, indicado por los ejes r y θ en la figura (7.8). De acuerdo a la región R_{xy} , el parámetro r tomará los valores $0 \leq r \leq R$ y $0 \leq \theta \leq 2\pi$, e intuitivamente pensamos que esta nueva región será un cuadrado, y en verdad no estamos para nada equivocados pero expliquemos el porqué.

En la figura (7.8(a)), mostramos en la región R_{xy} el punto en $a(R, 0)$, de coordenadas $x = R$ y $y = 0$. Este mismo punto lo denotamos en el plano $r\theta$ como $A(R, 0)$, que a simple vista es el mismo, pero ahora sus coordenadas serán $r = R$ y $\theta = 0$. A continuación mapearemos el punto $b(R \cos(\pi/4), R \sin(\pi/4))$, definido en la región R_{xy} , al plano $r\theta$ denotado por $B(R, \pi/4)$ con coordenadas $r = R$ y $\theta = \pi/4$, como se muestra en la figura (7.8(b)).

Las coordenadas anteriores, las podemos considerar como parte de una sucesión de puntos sobre un círculo de radio R , que define la región R_{xy} , localizados a distintos ángulos, $\theta = 0, \pi/4, \pi/2, \pi$ y 2π , denotados por a, b, c, d y e respectivamente, como se muestra en la figura (7.8(c)). Su mapeo al plano $r\theta$ serán los puntos $A(R, 0), B(R, \pi/4), C(R, \pi/2), D(R, \pi)$ y $E(R, 2\pi)$ respectivamente, los cuales se representarán por una línea recta $r = R$. En otras palabras, la circunferencia $r = R$ en el plano xy , se mapea a una línea recta $r = R$ en el plano $r\theta$ con $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Si hacemos “ligeramente” menor el radio del círculo, encontraremos nuevamente que el mapeo de este círculo es una línea recta con $r < R$, que varía entre $0 \leq \theta \leq 2\pi$, y así sucesivamente para círculos más cercanos al origen, se trazarán líneas rectas cada vez más cercanas al eje $r = 0$, como se muestra en la figura (7.8(d)). Esto reafirma lo que intuitivamente imaginamos; que la nueva región $R_{r\theta}$ es un cuadrado.

Pero, ¿cómo pintamos esta superficie? Perdonen ustedes ¿cómo integramos esta superficie? De acuerdo a nuestra superficie, tendremos que uno de los rieles estará sobre el perímetro del círculo y el otro riel será un pivote localizado en el origen de coordenadas. Fijemos un extremo de la boca de la pistola en el pivote y su otro extremo en el punto $x = R$, como lo indicamos por la flecha de la figura (7.10(a)). La imagen de la boca de la pistola en el plano $r\theta$, será también indicada por una flecha.

7.2. Transformación B.E.

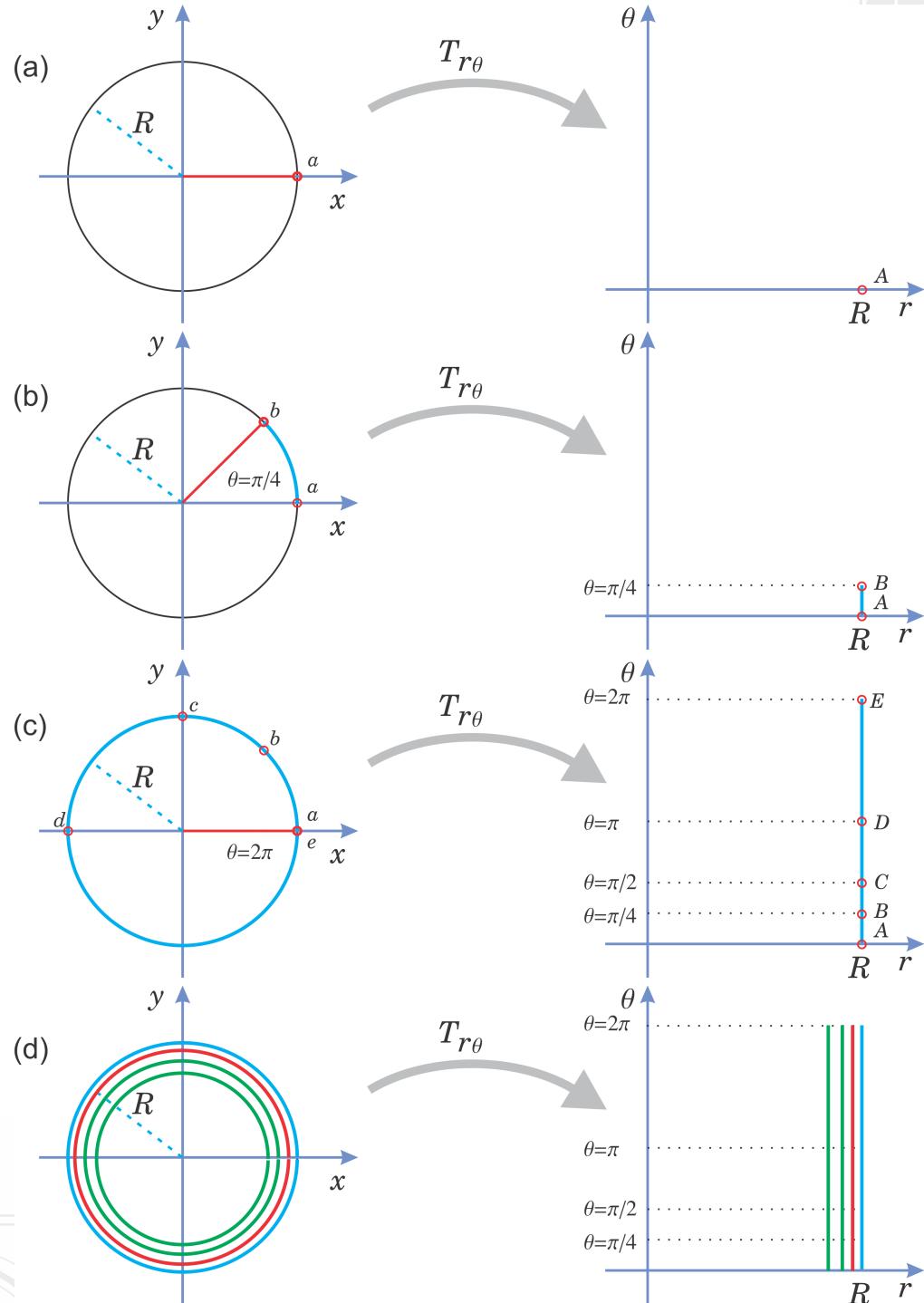


Figura 7.9: Transformación de puntos sobre círculos por medio de las coordenadas polares.

7.2. Transformación B.E.

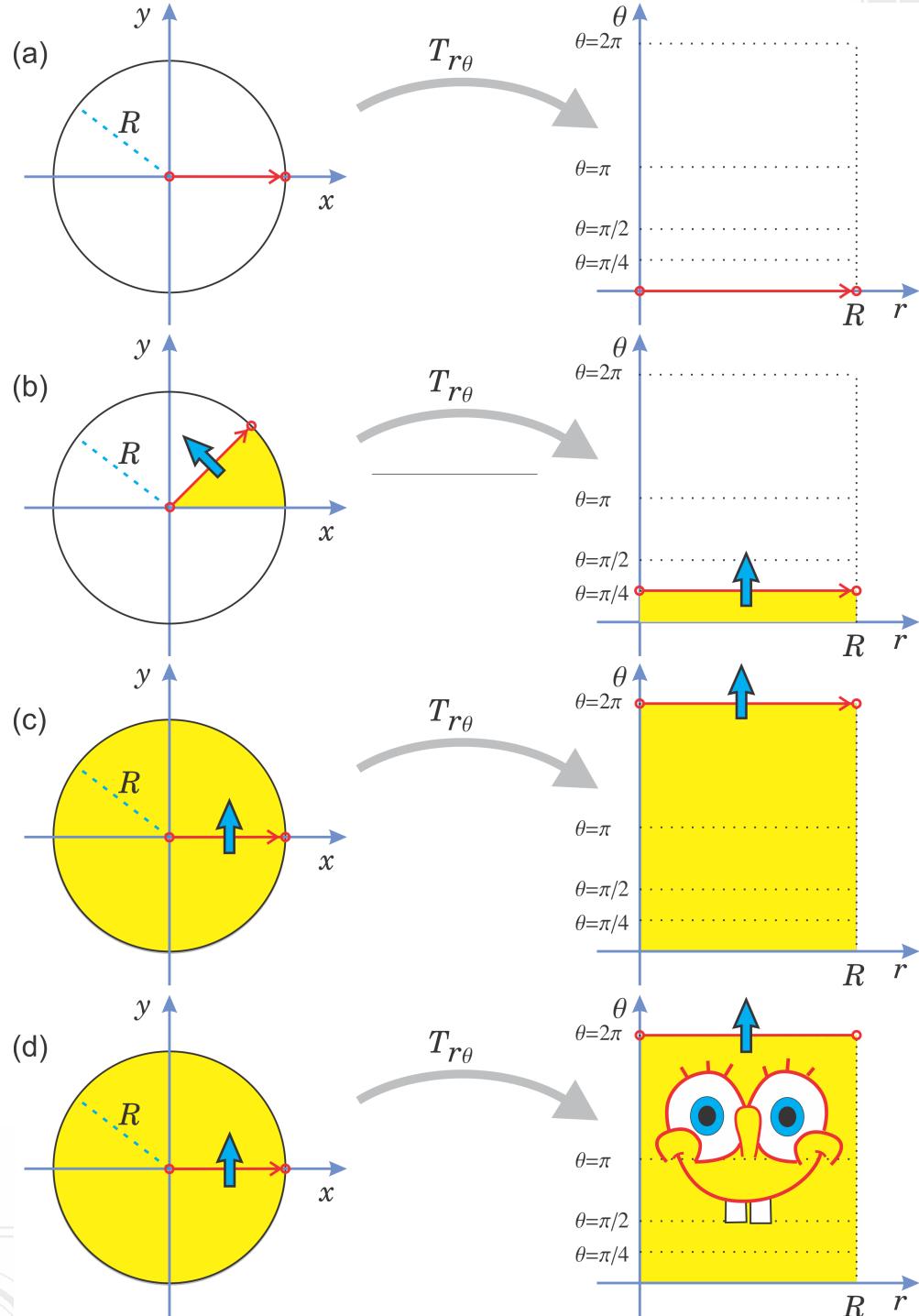


Figura 7.10: Transformación B.E. La región más sencilla para integración.

7.2. Transformación B.E.

Girando, arrastremos la pistola a un ángulo $\theta = \pi/4, \pi/2, \pi \dots$ y así sucesivamente, como se muestra en la figura (7.10(b)). Continuamos girando la pistola, hasta justamente antes de llegar a $\theta = 2\pi$, nuestro mapeo claramente dibujará una región cuadrada, como se observa en la (7.10(c)). De repente, desde nickelodeon aparece Bob Esponja en la figura (7.10(d)), indicando que esta región cuadrada es la más sencilla para integrar. De ahí el nombre de transformación B.E, nada que ver con condensados de Bose-Einstein.

Ahora bien, teniendo nuestro teorema de cambio de variable, ecuación (7.5), necesitamos calcular el jacobiano de la transformación, el cual se define como el determinante:

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r .$$

Es importante resaltar que en nuestro teorema de cambio de variable, se pide el valor absoluto del jacobiano, pero como la coordenada r es positiva obviaremos este paso. Entonces el área de un círculo de radio se escribe como:

$$\begin{aligned} A &= \iint_{R_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{R_{r\theta}} f(x(r, \theta), y(r, \theta)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta , \\ &= \iint_{R_{r\theta}} r dr d\theta . \end{aligned}$$

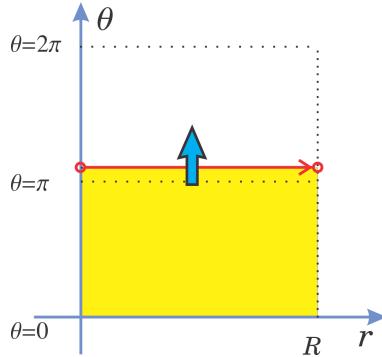


Figura 7.11: La región ideal para aplicar el teorema de Fubini-Espónja [17]. Límites constantes e integrando separable. Observe que ahora la pistola de la figura (7.2) está en posición horizontal, y se mueve de abajo hacia arriba.

7.3. Integrales de volumen

Para definir los límites de integración para la región, utilizemos la figura (7.11), donde la boca de la pistola, (flecha horizontal), está colocada en $r = 0$ y $r = R$, y el barrido lo haremos de $\theta = 0$ a $\theta = 2\pi$. Por lo tanto escribimos:

$$\begin{aligned} A &= \iint_{R_{r\theta}} r dr d\theta = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r dr d\theta, \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[\int_{r=0}^R r dr \right] d\theta = \left[\int_{r=0}^R r dr \right] \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta, \\ &= \int_{r=0}^R r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \frac{1}{2} R^2 2\pi = \pi R^2. \end{aligned}$$

¡Guau! ¡de manera que una integral doble es el producto de dos integrales sencillas! La clave de todo esto es la región cuadrada, porque nos lleva a tener límites constantes en nuestras integrales. Por lo tanto, la integral colocada entre paréntesis cuadrados, (o en una tripa como en el juego), es una constante y “sale” de la integral en θ , entonces la integral doble se puede escribir como el producto de dos integrales. Este es el teorema de Fubini [17], el cual básicamente es válido, cuando los límites de las integrales son constantes y el integrando se puede separar en productos de las variables involucradas. Nosotros le llamaremos teorema Fubini-España.

7.3. Integrales de volumen

Reescribiendo nuestro teorema de cambio de variable a un volumen, decimos. Si $f(x, y, z)$ es una función continua sobre R_{xyz} , entonces,

$$\begin{aligned} \iiint_{R_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz &= \\ \iiint_{R_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw, \end{aligned} \quad (7.6)$$

donde el Jacobiano es el determinante

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

7.3. Integrales de volumen

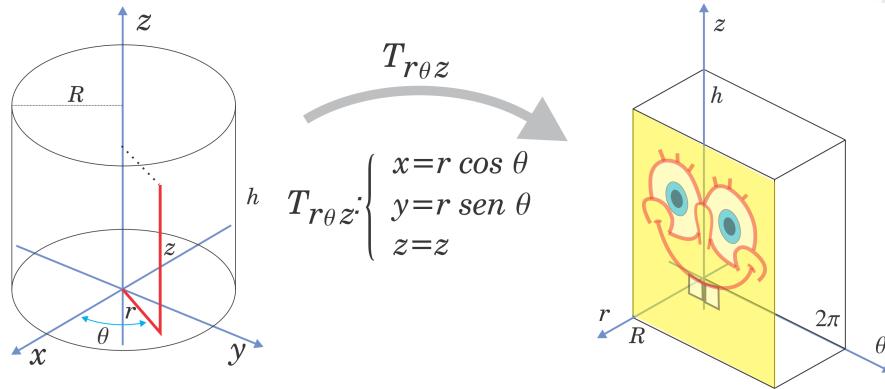


Figura 7.12: Do you Fubini? Región ideal en el espacio para aplicar el teorema de Fubini-Espónja. Límites constantes e integrando separable. El Jacobiano en coordenadas cilíndricas es r .

Para aplicar la extensión del teorema de cambio de variable, calculemos el volumen de un cilindro recto de radio R , altura h . Consideremos la figura (7.12), donde dibujamos dicho cilindro que define la región R_{xyz} . Nuevamente nuestro pensamiento intuitivo, nos dice que para el cálculo del volumen de un cilindro recto, es conveniente el uso de las coordenadas cilíndricas; las cuales se definen por el radio r , el ángulo θ y la altura z , como se muestra en la figura (7.12). Observe que para parametrizar un volumen necesitamos tres parámetros. En este caso, la transformación la escribimos,

$$T_{r\theta} : \begin{cases} x = r \cos \theta , \\ y = r \sin \theta , \\ z = z , \end{cases}$$

que es invertible ya que podemos escribir $r^2 = x^2 + y^2$, $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ y $z = z$. Es claro que vamos a cambiar la región cilíndrica R_{xyz} a una nueva región $R_{r\theta z}$. De acuerdo a la región R_{xyz} , los parámetros r , θ y z tomarán los valores; $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ y $0 \leq z \leq h$ respectivamente, e intuitivamente esta nueva región será un rectángulo. Nos hacemos la pregunta, Do you Fubini?, para saber si, podemos aplicar el teorema de Fubini-Espónja, y claro contestamos, Yes, I do!, entonces escribimos

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{R_{xyz}} dV = \iiint_{R_{r\theta z}} r dr d\theta dz = \int_{z=0}^h \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^R r dr d\theta dz , \\ &= \int_{r=0}^R r dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=0}^h dz , \\ &= \frac{1}{2} R^2 2\pi h = \pi R^2 h . \end{aligned}$$

7.3. Integrales de volumen

Donde la integrales en los cuadros de colores son constantes y “salen” de la integral en z , escribiendo una integral triple como un producto de tres integrales. ¿Y el Jacobiano? ¡Perdon lo había olvidado, es igual que en coordenadas polares!, r .



A manera de complemento calculemos el volumen de una esfera de radio R . Nuevamente nuestro pensamiento intuitivo, nos dice que para el cálculo de este volumen es conveniente el uso de las coordenadas esféricas. Las cuales se definen por el radio r y los ángulos θ y ϕ , como se muestra en la figura (7.13).

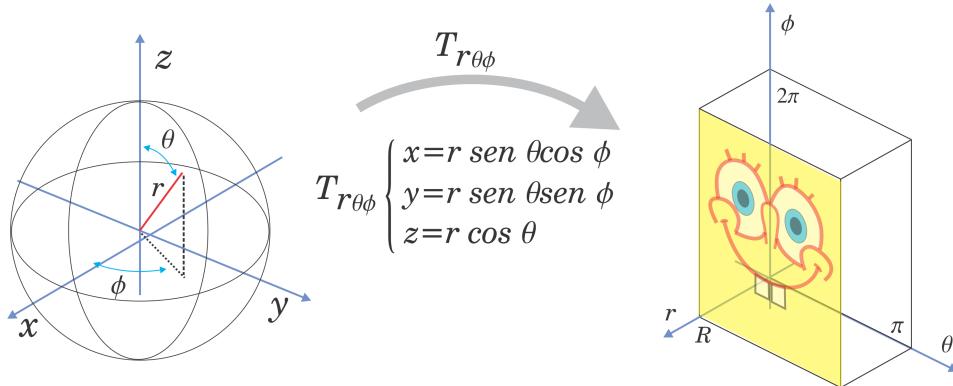


Figura 7.13: El Jacobiano en coordenadas esféricas es $J = r^2 \sin \theta$.

En el caso de las coordenadas esféricas, la transformación la escribimos como:

$$T_{r\theta} : \begin{cases} x = r \sin \theta \cos \phi, \\ y = r \sin \theta \sin \phi; \\ z = r \cos \theta, \end{cases}$$

con Jacobiano $J = r^2 \sin \theta$. De acuerdo a la región R_{xyz} , los parámetros r , θ y ϕ tomarán los valores; $0 \leq r \leq R$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$ respectivamente, y con estos valores el Jacobiano es positivo. Esta nueva región será un rectángulo y podemos aplicar el teorema de Fubini-Espónja, entonces el volumen será

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{R_{xyz}} dV = \iiint_{R_{r\theta\phi}} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi, \\ &= \int_{r=0}^R r^2 dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = \frac{4}{3}\pi R^3. \end{aligned} \tag{7.7}$$



7.3. Integrales de volumen

Para ilustrar otras transformaciones de coordenadas resolvamos las integrales propuesta en el ejercicio 4(a) al 4(c) de la página 193 del libro de Amazigo [24]. Cabe mencionar que algunas veces hay errores tipográficos en los libros, todos involuntarios, y estas notas para nada son la excepción. A nuestro criterio y conocimiento Amazigo tiene algunos, pero eso no le resta calidad a su excelente contenido. Cuando esto suceda lo haremos notar y si es posible verificaremos nuestros resultados por otros caminos y/o métodos. Esperamos que con estos ejercicios nos quede más clara las ideas de las transformaciones.



- 4(a) Utilícese la sustitución $u = y/x$, $v = y + x^2$ para evaluar $\iint_{R_{xy}} (y + 2x^2)/(x^2 + xy) dx dy$, en donde R_{xy} es la región el el primer cuadrante acotada por las curvas $y = 3 - x^3$, $y = 8 - x^2$, $y = 0$, e $y = 2x$.

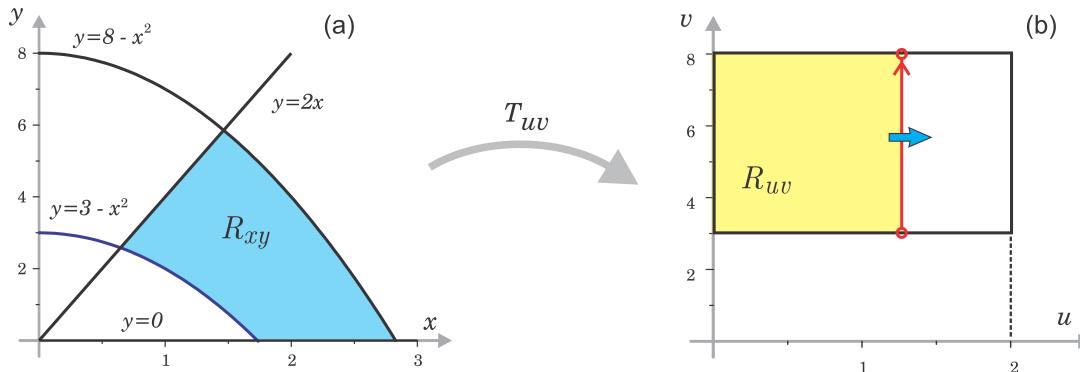


Figura 7.14: La región R_{xy} se transforma a la región R_{uv} .

La región R_{xy} , definida por las ecuaciones $y = 3 - x^3$, $y = 8 - x^2$, $y = 0$, $y = 2x$. la mostramos en la figura (7.14(a)). Este problema nos regala la transformación, y observamos que ésta es no lineal, entonces no necesariamente las líneas rectas se transformarán a líneas rectas. Si consideramos que $u = y/x$, cuando $y = 0$ transformará a $u = 0$. Si ahora $y = 2x$ entonces $u = 2$, como se muestra en la figura (7.14(b)). Similarmente si $v = y + x^2$, cuando $y = 8 - x^2$ y $y = 3 - x^3$ tendremos que $v = 8$ y $v = 3$ respectivamente. Resumiendo la región R_{uv} está definida por $u = 0$, $u = 2$, $v = 3$ y $v = 8$, que es un Bob-Espónja.

Si observamos la ecuación (7.5), notamos que es necesario calcular el Jacobiano, $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, entonces tendríamos que despejar a x y y de las transformaciones $u = y/x$ y $v = y + x^2$, pero esto no es necesario porque [24], ya que

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \left[\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \right]^{-1}, \quad (7.8)$$

7.3. Integrales de volumen

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \\ 2x & 1 \end{vmatrix} = -\frac{y + 2x^2}{x^2}.$$

Sin olvidar el valor absoluto del jacobiano y la ecuación (7.8), sustituyendo lo anterior en la ecuación (7.5), escribimos

$$\begin{aligned} \iint_{R_{xy}} \left(\frac{y + 2x^2}{x^2 + xy} \right) dx dy &= \iint_{R_{uv}} \left(\frac{y + 2x^2}{x^2 + xy} \right) \left(\frac{x^2}{y - 2x^2} \right) dudv, \\ &= \iint_{R_{uv}} \frac{x^2}{x^2(1+u)} dudv = \iint_{R_{uv}} \frac{1}{(1+u)} dudv, \\ &= \int_{v=3}^8 \int_{u=0}^2 \frac{1}{(1+u)} dudv = \int_{v=3}^8 dv \int_{u=0}^2 \frac{du}{(1+u)}, \\ &= 5 \ln(3), \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el teorema de Fubini-Espónja. ¡Guau, muy ilustrativo y sencillo!



4(b) Utilícese la sustitución $u = 2xy$, $v = x^2 - y^2$ para evaluar la integral iterada

$$\int_0^1 \int_{-y}^y xy(x^4 - y^4) \sqrt{1 + (x^2 - y^2)^2} dx dy.$$

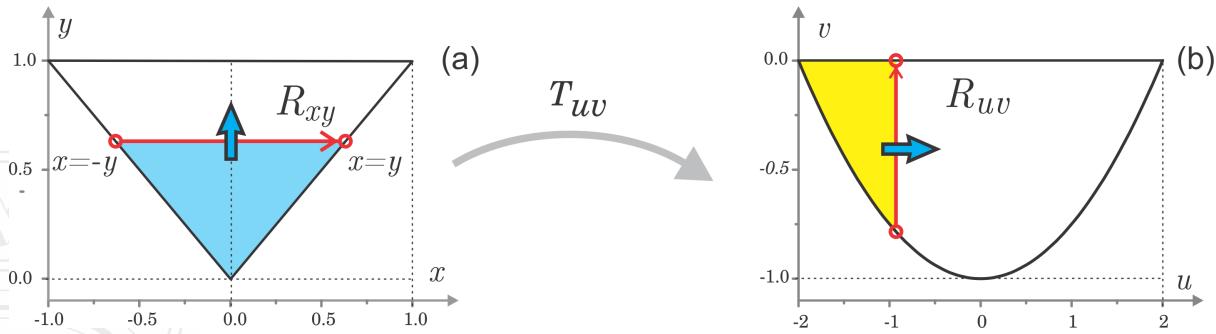


Figura 7.15: La región R_{xy} se transforma a la región R_{uv} .

En este problema, no nos indican la región de integración, pero la podemos encontrar observando los límites de integración. La primer integral es en el eje x desde $x = -y$ a $x = y$,

7.3. Integrales de volumen

90

después se hace el barrido a lo largo del eje y , desde $y = 0$ hasta $y = 1$. Donde la región R_{xy} , queda definida por las ecuaciones $y = x$, $y = -x$, $y = 0$, e $y = 1$, como se muestra en la figura (7.15(a)). Similarmente, al considerar que $x = y$ y $y = -x$ tendremos que $v = x^2 - y^2 = 0$. Si ahora tenemos que $y = 1$ $u = 2xy = 2x$ que al combinar con $v = x^2 - y^2$, tendremos $v = u^2/4 - 1$, que es una parábola de vértice $(0, -1)$ como se muestra en la figura (7.15(b)).

Nuevamente, si observamos la ecuación (7.5), notamos que es necesario calcular el Jacobiano, $\partial(x, y)/\partial(u, v)$, pero con ayuda de la relación (7.8), no será necesario despejar a x y y de las transformaciones $u = 2xy$ y $v = x^2 - y^2$, entonces

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2x \\ 2x & -2y \end{vmatrix} = -4(x^2 + y^2).$$

Sin olvidar el valor absoluto del jacobiano y la ecuación (7.8), sustituyendo lo anterior en la ecuación (7.5), escribimos

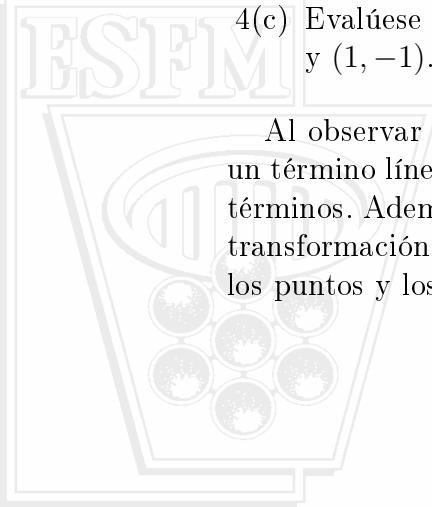
$$\begin{aligned} \int_{y=0}^1 \int_{x=-y}^y xy(x^4 - y^4) \sqrt{1 + (x^2 - y^2)^2} dx dy &= \frac{1}{8} \iint_{R_{uv}} uv \sqrt{1 + v^2} dudv, \\ &= \frac{1}{8} \int_{u=2}^{-2} \int_{v=\frac{1}{4}u^2-1}^0 uv \sqrt{1 + v^2} dv du, \\ &= \frac{1}{8} \int_{u=2}^{-2} \left[\frac{1}{3}u - \frac{1}{192}u(u^4 - 8u^2 + 32)^{3/2} \right] du, \\ &= 0, \end{aligned}$$

resultado esperado ya que el integrando es una función impar en u y la integral es sobre un intervalo simétrico. En este caso no pudimos aplicar el teorema de Fubini-Espónja.



- 4(c) Evalúese $\iint_R (x^2 - y^2) \sqrt{x + y} dA$, en donde R es el triángulo con vértices en $(0, 0)$, $(1, 1)$ y $(1, -1)$.

Al observar la integral, vemos una diferencia de cuadrados y dentro de la raíz cuadrada un término líneo. Lo más salomónico es proponer $u = x + y$ y $v = x - y$, que generan ambos términos. Además es una transformación líneo. Esto simplifica nuestro trabajo, porque una transformación líneo transforma líneas a líneas [3]. Entonces simplemente transformamos los puntos y los unimos con líneas rectas.



7.3. Integrales de volumen

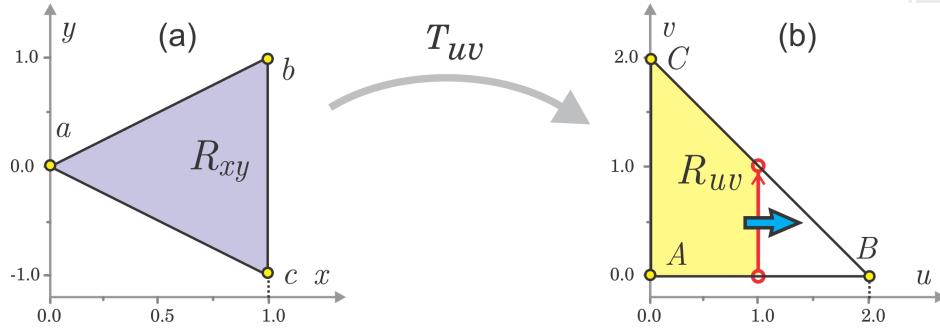


Figura 7.16: La región R_{xy} se transforma a la región R_{uv} .

Denotemos los puntos $a(0,0)$, $b(1,1)$ y $c(1,-1)$, los cuales bajo la transformación $u = x+y$ y $v = x-y$, se transforman a $B(0,0)$, $B(2,0)$ y $C(0,2)$, respectivamente, como se muestran en las figura (7.16).

Nuevamente, al observar la ecuación (7.5), notamos que es necesario calcular el Jacobiano, $\partial(x,y)/\partial(u,v)$, pero con ayuda de la relación (7.8), no será necesario despejar a x y y de las transformaciones $u = x+y$ y $v = x-y$, entonces

$$J = \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

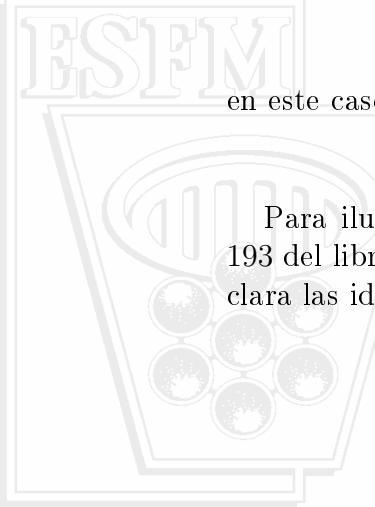
Otra vez, sin olvidar el valor absoluto del jacobiano y la ecuación (7.8), sustituyendo lo anterior en la ecuación (7.5), escribimos

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 - y^2)\sqrt{x+y} dA &= \frac{1}{2} \iint_{R_{uv}} uv\sqrt{u} du dv, \\ &= \frac{1}{2} \int_{u=0}^2 u^{3/2} \int_{v=0}^{2-u} v dv du, \\ &= \frac{1}{4} \int_{u=0}^2 (2-u)^2 u^{3/2} du, \\ &= \frac{64\sqrt{2}}{315}, \end{aligned}$$

en este caso tampoco pudimos aplicar el teorema de Fubini-Espónja.



Para ilustrar el cálculo de volúmenes resolvamos los ejercicios 3(a) y 3(c) de la página 193 del libro de Amazigo [24]. Nuevamente esperamos que con estos ejercicios nos quede más clara las ideas de las transformaciones.



7.3. Integrales de volumen

92

- 3(a) Obténgase el volumen del sólido tridimensional cuyas coordenadas cartesianas (x, y, z) satisfacen las desigualdades $1 \leq z \leq 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$. Puede resultar conveniente trabajar con coordenadas cilíndricas.

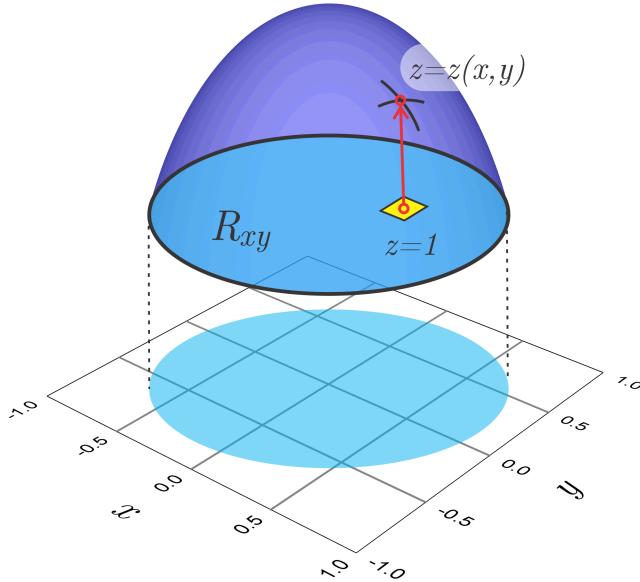


Figura 7.17: Volumen del paraboloide, $1 \leq z \leq 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$.

Claramente el volumen es el del paraboloide $x^2 + y^2 + z^2/4 = 1$, por arriba del plano $z = 1$, que lo corta en el círculo $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}$, como se muestra en la figura (7.17). Exactamente como hace los movimientos una impresora 3D, en este caso, fijamos nuestro punto inicial en plano $z = 1$, hasta el punto sobre el paraboloide $z(x, y) = 2\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, indicado por la flecha en la figura (7.17). Con el fin de sumar todas las alturas, barremos este punto para toda x y y sobre el plano $z = 1$, que denotamos por la región R_{xy} . La proyección del plano $z = 1$, sobre el plano xy es la región $x^2 + y^2 \leq \frac{3}{4}$, como se mencionó en el enunciado del problema.

El volumen será,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{R_{xyz}} dV = \iint_{R_{xy}} \int_{z=1}^{2\sqrt{1-x^2-y^2}} dz dx dy, \\ &= \iint_{R_{xy}} (2\sqrt{1-x^2-y^2} - 1) dx dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{r=0}^{\sqrt{\frac{3}{4}}} (2\sqrt{1-r^2} - 1) r dr = \frac{5}{12}\pi, \end{aligned}$$

donde aplicamos el teorema de Fubini-Espónja.



7.3. Integrales de volumen

93

- 3(c) Obténgase el volumen de la región acotada contenida entre las dos superficies $4x^2 + y^2 = 4$ y $4x^2 + z^2 = 4$.

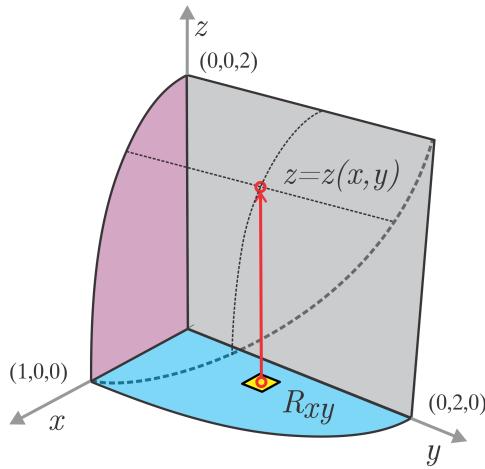


Figura 7.18: La intuición nos dice que las coordenadas polares simplican el problema, en este caso no es así.

Claramente el volumen es entre los cilindros $x^2 + y^2/4 = 1$ y $x^2 + z^2/4 = 1$, que por simplicidad calculamos en el primer octante, como se muestra en la figura (7.18). Nuevamente fijamos nuestro punto inicial en plano $z = 0$, hasta el punto sobre el el cilindro $z(x, y) = 2\sqrt{1 - x^2}$, indicado por la flecha. Nuevamente, con el fin de sumar todas las alturas, barremos este punto para toda x y y sobre el plano $z = 0$, que denotamos por la región R_{xy} ; la cual queda parametrizada por $x = r \cos \theta$ y $y = 2 \sin \theta$ donde $0 \leq r \leq 1$ y $0 \leq \theta \leq \pi/2$, con Jacobiano $2r$. Entonces, el volumen será ocho veces el volumen de un octante, es decir,

$$\begin{aligned} V &= 8 \iiint_{R_{xyz}} dV = 8 \iint_{R_{xy}} \int_{z=0}^{2\sqrt{1-x^2}} dz dx dy, \\ &= 16 \iint_{R_{xy}} \sqrt{1-x^2} dx dy = 32 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 \sqrt{1-r^2 \cos^2 \theta} r dr d\theta = \frac{64}{3}, \end{aligned}$$

donde aplicamos el teorema de Fubini-Espónja. La integral anterior es muy laboriosa de realizar; pero en coordenadas cartesianas es muy directa

$$\begin{aligned} V &= 16 \iint_{R_{xy}} \sqrt{1-x^2} dx dy = 16 \int_{x=0}^1 \sqrt{1-x^2} \int_{y=0}^{2\sqrt{1-x^2}} dy dx \\ &= 32 \int_{x=0}^1 (1-x^2) dx = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$



7.4. Una aplicación a física

De la misma manera que trabajamos el operador nabla, en nuestros cursos de álgebra [3] y mecánica [2], aprendimos que es más conveniente hablar de operadores. Estos operadores se asocian a observables físicos, como puede ser la energía, el momento líneo u angular, etc. Y cuando estos operadores actuán sobre ciertas funciones se involucra el problema de vectores y valores propios, donde los valores propios se pueden medir experimentalmente [2].

Al ver nuestros cálculos anteriores, pensaremos inmediatamente que las integrales sirven sólo para calcular áreas y volúmenes, o que una integral doble o triple debe ser una área o un volumen respectivamente. Pero reescibiendo nuestras integrales a la “europea”, es decir, colocando los diferenciales primero, las integrales las podemos utilizar como operadores [2], incrementando sus posibilidades de aplicación.

7.4.1. Momento de Inercia

El momento de inercia a lo largo de un eje de rotación z se define como, $I_z = \iiint r_{\perp}^2 dm$, donde r_{\perp} es la distancia perpendicular del diferencial de masa dm al eje de giro [5]. Si $\rho = M/V$ es la densidad de volumen del material, entonces $dm = \rho dV$ cuando el objeto es homogéneo. Calculemos entonces el momento de inercia de una esfera de radio R y masa M a lo largo de un eje que pase por su centro.

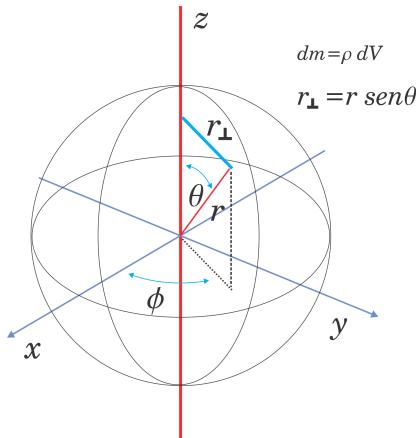
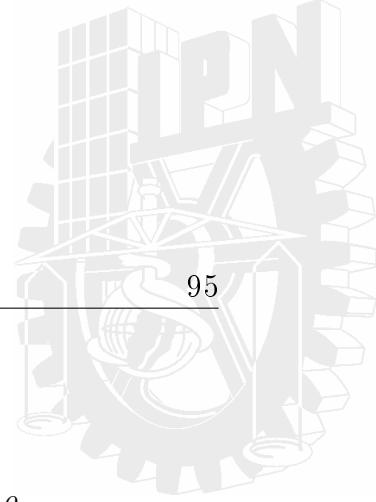


Figura 7.19: La distancia perpendicular al eje z , es $r_{\perp} = r \sin \theta$.

La masa es esféricamente simétrica, y sin perder generalidad consideremos el cálculo del momento de inercia a lo largo del eje z . Escribiendo nuestra relación a la europea, o con el



diferencial en primer lugar en el integrando, tendremos

$$\begin{aligned} I_z &= \left[\iiint_{R_{xyz}} dV \right] r_{\perp}^2 \rho = \left[\iiint_{R_{r\theta z}} dr d\theta d\phi r^2 \sin \theta \right] (r \sin \theta)^2 \rho , \\ &= \rho \int_{r=0}^R dr r^4 \int_{\theta=0}^{\pi} d\theta \sin^3 \theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi , \\ &= \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{R^5}{5} \frac{4}{3} 2\pi = \frac{4}{5} M R^2 , \end{aligned}$$

donde los términos dentro de los paréntesis cuadrados son exactamente los mismos que utilizamos para el cálculo del volumen de una esfera (7.7), y los interpretamos como un operador, que actúa sobre el término fuera de los paréntesis o de la caja. En este caso los límites de las integrales son constantes y podemos aplicar el teorema de Fubini. Utilizamos que el volumen de la esfera es $4\pi R^3/3$. Entonces claramente una integral triple ya no es un volumen.

7.5. El método «Catemaco» de integración

Existe un método directo para calcular integrales que involucren regiones o partes de cilindros y/o esferas, prácticamente para cualquier región. Le hemos llamado método de Catemaco por el maravilloso lugar del sur del estado de Veracruz México, y porque al aplicarlo hacemos magia. Su versatilidad procede de una varita mágica o distribución muy importante en física, llamada delta de Dirac [4, 25, 11], ni Harry Potter cuenta con una varita así. Sin ninguna exageración, esta distribución transforma las funciones discontinuas en continuas y *n* veces derivables, además de generar las funciones de Green o propagadores para las ecuaciones diferenciales, entre otras muchas y muy variadas aplicaciones [4, 26].



Supongamos ahora que queremos calcular el área de un cascarón esférico de radio R , es claro que esta área es $4\pi R^2$. Si sólo hemos trabajado superficies planas ¿cómo integramos en una superficie curva? Claramente lo tenemos que hacer en coordenadas esféricas, donde el diferencial de volumen es,

$$dV = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi ,$$

como la cascara es de radio constante $r = R$, entonces su diferencial $dr = 0$, que al sustituir en la ecuación anterior, tendríamos que el diferencial de volumen es cero y todo acabaría mal, porque nuestro resultado no es cero. Como este diferencial nos trae dificultades pues lo

7.5. El método «Catemaco» de integración

quitamos y el diferencial de volumen lo cambiamos a un diferencial de superficie y escribimos

$$dV \overset{dS}{=} r^2 \sin \theta d\theta d\phi , \\ dS = R^2 \sin \theta d\theta d\phi ,$$

que al integrar escribimos

$$S = R^2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi = 4\pi R^2.$$

¡Es así de mágico! Pero, ¿Es cierto lo anterior? Bueno al menos es divertido. Formalmente lo hacemos con la función delta de Dirac.

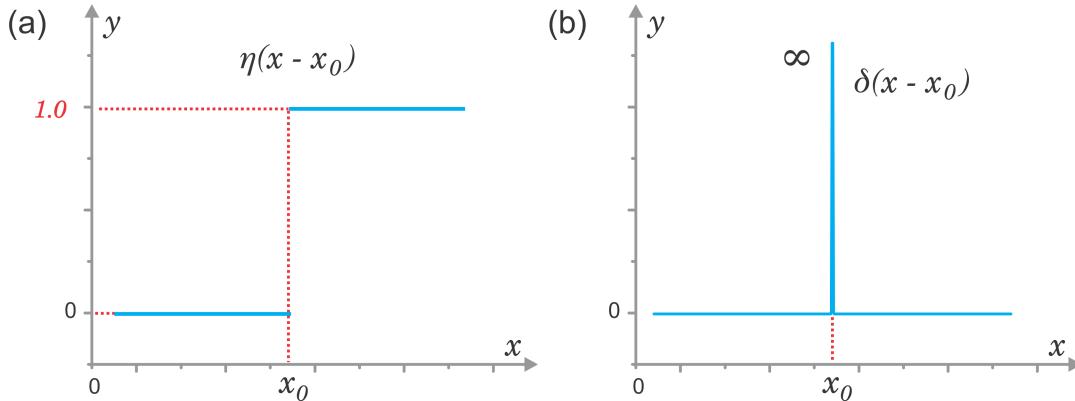


Figura 7.20: La varita mágica, delta de Dirac $\delta(x - x_0)$.

Una forma muy simple de definir la función delta de Dirac, es por medio de la función escalón $\eta(x - x_0)$ [4]. Esta función tiene dos valores; es 0 cuando su argumento es negativo, es decir, cuando $x - x_0 < 0$, y 1,0 cuando su argumento es mayor o igual a cero, $x - x_0 \geq 0$, como se muestra en la figura (7.20(a)). La función delta de Dirac es la derivada de la función escalón, es decir, es cero para los valores distintos de x_0 e infinito cuando $x = x_0$, como se muestra en la figura (7.20(b)).

Otra manera de definir la delta de Dirac, es considerarla como una función cuyo valor es cero en todo el eje x , salvo en un punto x_0 donde su valor es infinito; como la mostramos en la figura (7.20), donde dibujamos la función $\delta(x - x_0)$. Una buena aproximación de una delta de Dirac, es una función gaussiana cuando su anchura o cintura sea muy pequeña [4]. Una de sus propiedades es:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0) , \quad (7.9)$$

7.5. El método «Catemaco» de integración

97

donde la función $f(x)$ esta definida en algún intervalo que contenga al punto x_0 , si no lo contiene la integral es cero. Para garantizar lo anterior hemos integrado sobre todo x . Un caso particular es cuando $f(x) = 1$, con lo cual mostramos que tiene área uno, es decir,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (7.10)$$

Consideremos el cascarón esférico anterior, muy delgado y de radio R , mostrado en la figura (7.21). Físicamente, podemos ver a este cascarón como una densidad de masa, carga eléctrica o volumen. Supongamos que la asociamos a la densidad de masa. En el origen del cascarón ($r = 0$), por ser una esfera hueca no tenemos masa y la densidad será cero. Conforme aumenta la coordenada r la función sigue siendo cero hasta que en $r = R$ encontramos el cascarón y la densidad de masa será distinta de cero. Cuando pasemos este punto la densidad nuevamente es cero hasta el infinito.

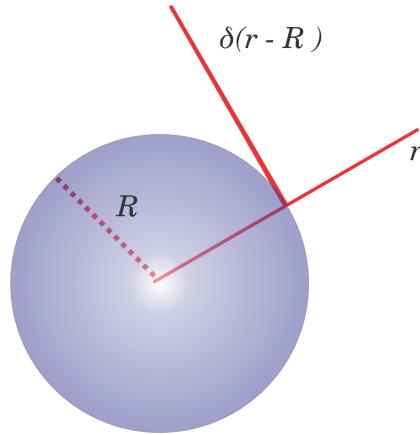


Figura 7.21: La función delta de Dirac $\delta(r - R)$ asociada a una esfera de radio R .

Claramente esta densidad de masa no es continua, pero al asociarla a la función delta $\delta(r - R)$, la hacemos continua en todo el espacio. Denotaremos el término todo el espacio por \mathcal{U} , que en coordenadas esféricas será cuando $0 \leq r \leq \infty$, $0 \leq \theta \leq \pi$ y $0 \leq \phi \leq 2\pi$. Si Integraremos la densidad anterior en todo el espacio, escribimos, $dS = \delta(r - R)dV$, que al integrar

$$\begin{aligned} S &= \iiint_{\mathcal{U}} \delta(r - R)dV, \\ &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} r^2 \delta(r - R) \sin \theta dr d\theta d\phi, \\ &= \int_{r=0}^{\infty} r^2 \delta(r - R) dr \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta \int_{\phi=0}^{2\pi} d\phi, \\ &= 4\pi R^2, \end{aligned}$$

7.5. El método «Catemaco» de integración

98

donde hemos utilizado el teorema de Fubini y la ecuación (7.9). Como la primer integral es R^2 , podemos escribir como al principio

$$dS = R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi,$$

donde la función delta de Dirac, reduce la dimensión del diferencial de volumen. Finalmente el término $d\Omega = \sin \theta \, d\theta \, d\phi$ se llama diferencial de ángulo sólido, y su integral es 4π .

————— □ —————

Si deseamos ahora calcular el área de una tapa circular de un cilindro de radio R , es claro que esta área es πR^2 . Claramente los haremos en coordenadas cilíndricas, donde el diferencial de volumen es,

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz,$$

como la tapa está en el plano z constante, ($z = cte$), entonces su diferencial $dz = 0$, que al sustituirlo en la ecuación anterior, tendríamos que el diferencial de volumen es cero. Como este diferencial nos trae dificultades pues lo borramos y el diferencial de volumen lo cambiamos a un diferencial de área y escribimos

$$\begin{aligned} dV &\rightarrow dA \\ dA &= r \, dr \, d\theta, \end{aligned}$$

que al integrar escribimos

$$A = \int_{r=0}^R r \, dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = \pi R^2.$$

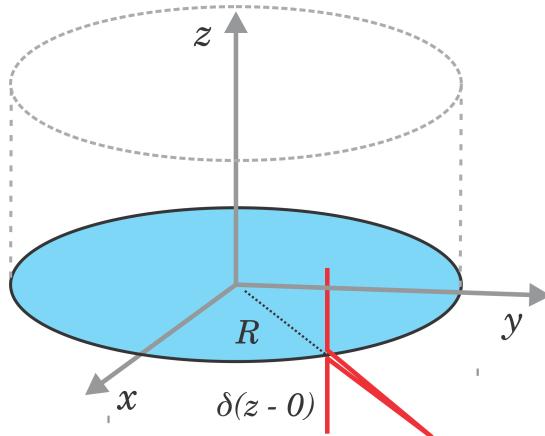
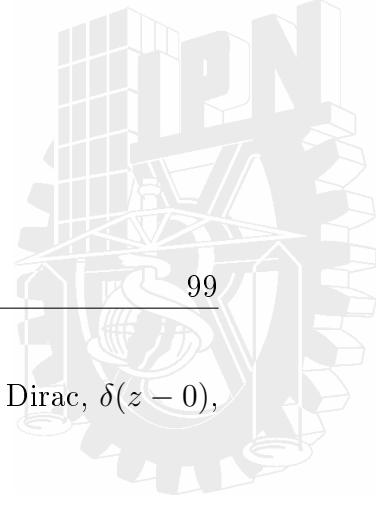


Figura 7.22: La función delta de Dirac $\delta(z - 0)$ asociada a un cilindro de radio R .



7.5. El método «Catemaco» de integración

Como la tapa está en el plano $z = 0$, entonces necesitamos una delta de Dirac, $\delta(z - 0)$, (ver figura (7.22)), y el diferencial de área será,

$$dA = r\delta(z - 0)\eta(R - r) dr d\theta dz ,$$

donde hemos incluido una función escalón para limitar el radio r al intervalo $0 \leq r \leq R$. Integrando en todo el espacio, tenemos

$$\begin{aligned} A &= \iiint_U \delta(z - 0)\eta(R - r)dV , \\ &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-\infty}^{\infty} r\delta(z - 0)\eta(R - r)dr d\theta dz , \\ &= \int_{r=0}^{\infty} r\eta(R - r)dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-\infty}^{\infty} \delta(z - 0)dz , \\ &= 2\pi \int_{r=0}^R rdr = \pi R^2 , \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el teorema de Fubini y la ecuación (7.9). Observe que la función escalón limita el intervalo de integración.

————— □ —————

Finalmente, supongamos ahora que deseamos calcular el perímetro de un anillo de radio R , es claro que el resultado es $2\pi R$. Nuevamente los haremos en coordenadas cilíndricas, donde el diferencial de volumen es, $dV = r dr d\theta dz$, como el anillo está en el plano z , ($z = 0$), entonces su diferencial $dz = 0$, además $r = R$ y $dr = 0$, escribimos

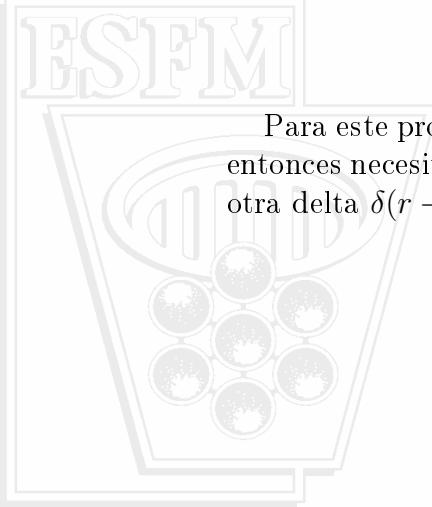
$$\begin{aligned} dV &\stackrel{d\ell}{=} r \cancel{dr} \cancel{d\theta} \cancel{dz} , \\ d\ell &= R d\theta , \end{aligned}$$

que al integrar escribimos

$$\ell = R \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta = 2\pi R .$$

Para este problema necesitamos dos deltas de Dirac. Como el anillo está en el plano $z = 0$, entonces necesitamos una delta de Dirac, $\delta(z - 0)$. Para definir la orilla del anillo necesitamos otra delta $\delta(r - R)$, como se muestra en la figura (7.23)), y el diferencial de arco será,

$$d\ell = r\delta(z - 0)\delta(r - R) dr d\theta dz ,$$



7.5. El método «Catemaco» de integración

100

Integrando en todo el espacio, tenemos

$$\begin{aligned}
 \ell &= \iiint_{\mathcal{U}} \delta(z - 0) \delta(r - R) dV, \\
 &= \int_{r=0}^{\infty} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=-\infty}^{\infty} r \delta(z - 0) \delta(r - R) dr d\theta dz, \\
 &= \int_{r=0}^{\infty} r \delta(r - R) dr \int_{\theta=0}^{2\pi} d\theta \int_{z=-\infty}^{\infty} \delta(z - 0) dz, \\
 &= 2\pi R,
 \end{aligned}$$

donde hemos utilizado el teorema de Fubini y la ecuación (7.9). Observe que las dos deltas de Dirac reducen el espacio a una dimensión.

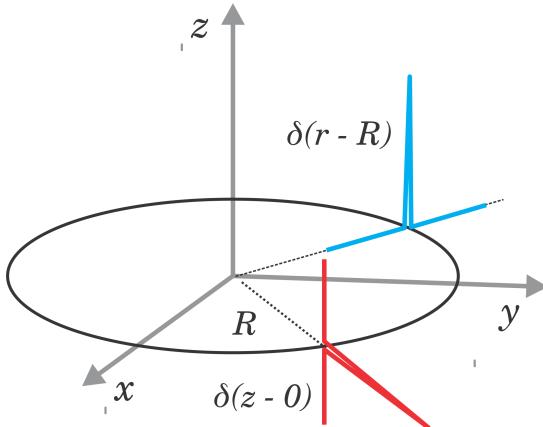


Figura 7.23: Las funciones delta de Dirac $\delta(z - 0)$ y $\delta(r - R)$, asociadas a un anillo de radio R .

————— □ —————

«Y en el cenit de su fama aparecería de pronto en el pueblo, y entraría arrogante en la iglesia, tostado y curtido por la intemperie, con su justillo y calzas de negro terciopelo, sus grandes botas de campana, su tahalí escarlata, el cinto erizado de pistolones de arzón, el machete tinto en sangre al costado, el ancho sombrero con ondulantes plumas, y desplegada la bandera negra ostentando la calavera y los huesos cruzados, y oiría con orgulloso deleite los cuchicheos: “¡Éste es Tom Sawyer el Pirata! ¡El Tenebroso Vengador de la América Española!” [23]»

8

Integrales de línea o camino

En física frecuentemente aparecen integrales de la forma:

$$\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{r} , \quad \frac{1}{c} \oint \vec{r} \times I d\vec{r} , \quad (8.1)$$

que definen el potencial eléctrico y el momento dipolar magnético respectivamente [25, 11]. Estas integrales se conocen como integrales de línea. Aunque algunas en apariencia se “vean” muy complicadas, en su mayoría son muy sencillas de resolver. Iniciemos este capítulo recordando que \vec{r} es el vector de posición, trayectoria o el camino

$$\vec{r} = x\hat{a}_x + y\hat{a}_y + z\hat{a}_z , \quad (8.2)$$

y su diferencial de camino será:

$$d\vec{r} = dx\hat{a}_x + dy\hat{a}_y + dz\hat{a}_z . \quad (8.3)$$

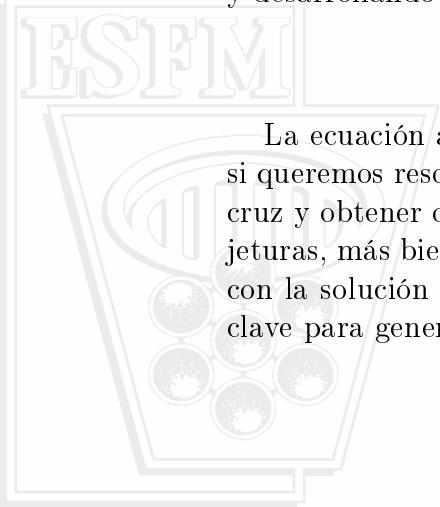
Si suponemos un campo vectorial de la forma,

$$\vec{F} = F_x(x, y, z)\hat{a}_x + F_y(x, y, z)\hat{a}_y + F_z(x, y, z)\hat{a}_z , \quad (8.4)$$

y desarrollando el integrando, de la primera integral de la ecuación (8.1), escribimos

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x(x, y, z)dx + F_y(x, y, z)dy + F_z(x, y, z)dz . \quad (8.5)$$

La ecuación anterior (8.5), se parece mucho a una ecuación diferencial ¿Verdad? Además si queremos resolver la segunda integral de (8.1), tendríamos que realizar ahora un producto cruz y obtener otra ecuación difencial más compleja ¿Complicado? Bueno, no hagamos conjeturas, más bien esto nos motiva a relacionar las soluciones de estas ecuaciones diferenciales con la solución de las integrales de línea. En todos los casos la forma diferencial (8.5) es la clave para generalizar los resultados de nuestras integrales de línea con punto o con cruz.



8.1. Guía mágica de solución

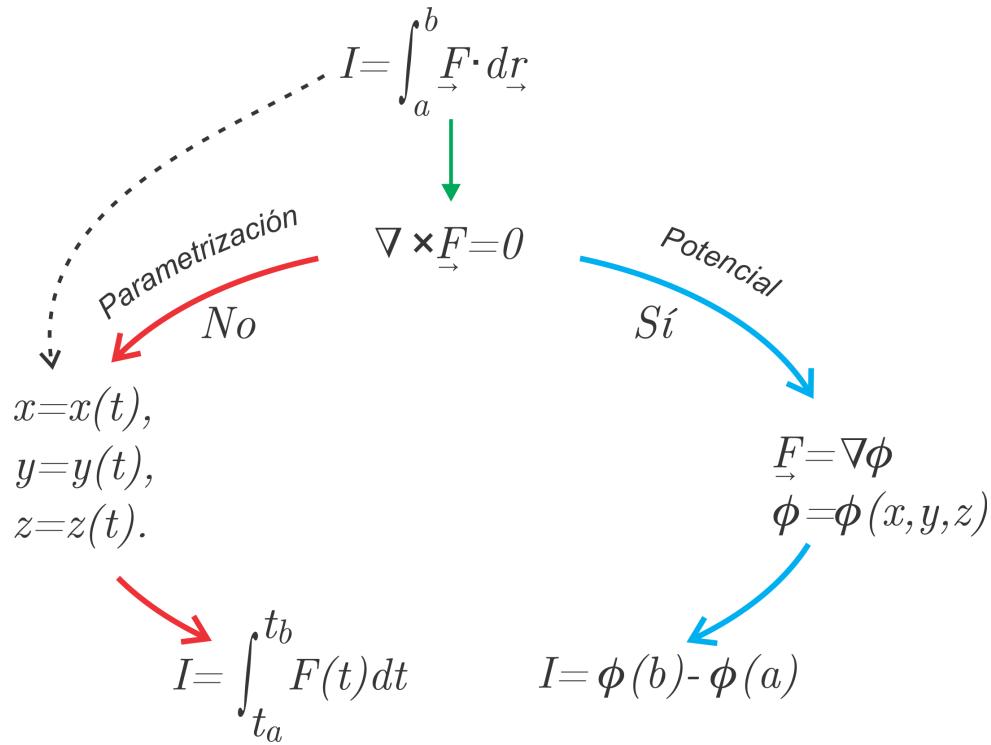


Figura 8.1: Como en el Mago de Oz...“Para resolver una integral de línea, del punto (a) al punto (b) sigue el camino amarillo” [6].

La figura (8.1), muestra la guía para resolver integrales de línea. Hay un método directo que se llama parametrización, indicado por la flecha en línea punteada. La otra alternativa es por medio de la función potencial. El criterio para definir que ruta utilizar, depende del rotacional del campo. Cuando un campo es conservativo o tiene rotacional cero, es conveniente encontrar el potencial para resolver la integral de línea. De lo contrario, o porque así lo deseemos, utilizamos la parametrización.

8.2. Parametrización

En nuestras clases de física hemos considerado que el parámetro tiempo, denotado por t , define de manera precisa una trayectoria [5]. Este parámetro nos permite definir el recorrido de una partícula de un punto inicial a un punto final. A esta trayectoria o camino se le llama estado dinámico, ya que con la trayectoria podemos calcular su velocidad y aceleración. De

8.2. Parametrización

103

la misma manera, para las integrales de línea, propondremos nuestras parametrizaciones con un sólo parámetro, que definirá la dirección del recorrido desde un punto inicial “ a ” a un punto final “ b ”.



Para ilustrar el uso de la “guía mágica” resolvamos las integrales propuesta en el ejercicio 2(a) al 2(i) de la página 220 del libro de Amazigo [24]. Esperamos que con estos ejercicios quede más clara las ideas de la parametrización.

- (a) $\int_C x dy$, en donde C es la trayectoria $y = x^4 + x^3$ que une los puntos $(0, 0)$ con $(1, 2)$.

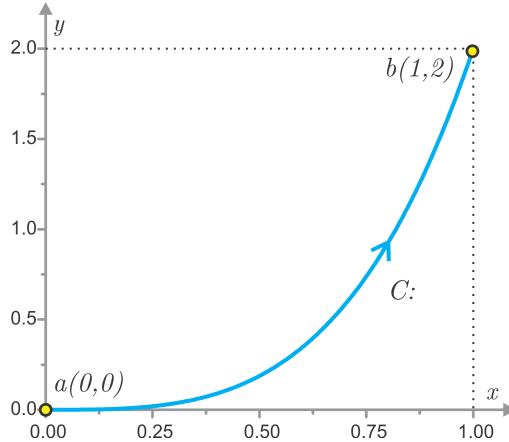
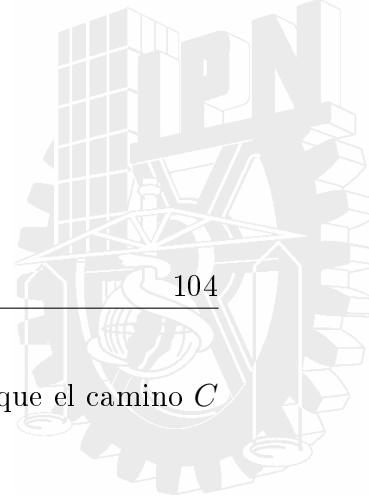


Figura 8.2: Parametrización simple $x = t$. Con esto tendremos $y = t^4 + t^3$, y si deseamos ir del punto a al punto b , $a \rightarrow b$ escribimos $t : 0 \rightarrow 1$. La parametrización describe el camino y su sentido.

Claramente el campo asociado es $F = \vec{x} \hat{a}_y$, ver ecuación (8.5), y no es conservativo ya que $\nabla \times F = \hat{a}_z \neq 0$. Y de acuerdo a la guía mágica, su solución será por parametrización. En la figura (8.2) se muestra el camino para ir del punto $a(0, 0)$ al punto $b(1, 2)$ sobre la curva $y = x^4 + x^3$. La flecha nos indica el sentido. La manera más sencilla para parametrizar esta curva es hacer: $x = t$, como consecuencia $y = t^4 + t^3$, ya que recorremos el camino sobre la curva $y = x^4 + x^3$. Cuando $t = 0$, tendremos $x = 0$ y $y = 0$, es decir, estaremos en el punto $a(0, 0)$. Similarmente, si escogemos $t = 1$ estaremos en el punto $b(1, 2)$. En otras palabras, cuando hacemos variar el parámetro t de $t = 0$ a $t = 1$, la parametrización nos indicará la trayectoria a seguir y el sentido del recorrido. Por simplicidad, escribimos $t : 0 \rightarrow 1$, para



recorrerlo en el sentido indicado en la figura (8.2). Brevemente escribimos, que el camino C queda parametrizado por:

$$C : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = t^4 + t^3, \end{cases} t : 1 \rightarrow 0, \quad (8.6)$$

de donde $dy = (4t^3 + 3t^2)dt$, sustituyendo este diferencial y (8.6), escribimos

$$\int_C xdy = \int_{t=0}^1 t(4t^3 + 3t^2)dt = \frac{31}{20}.$$

Cabe resaltar que, podemos utilizar otra parametrización por ejemplo $x = t^2$ y $y = t^8 + t^6$ con $t : 0 \rightarrow 1$, para escribir,

$$\int_C xdy = \int_{t=0}^1 t^2(8t^7 + 6t^5)dt = \frac{31}{20},$$

que es exactamente el mismo resultado. ¿Cuál es la diferencia entre estas parametrizaciones? Sí, la “velocidad” con que nos moviésemos del punto a al b . Si $x = t$, su velocidad o derivada será $dx/dt = 1$, mientras que cuando $x = t^2$, esta razón de cambio es mayor, $dx/dt = 2t > 1$ en este intervalo de tiempo.

Finalmente, si quisiéramos recorrer este camino de $b(1, 2)$ a $a(0, 0)$, escribimos $t : 1 \rightarrow 0$, cambiaríamos los límites de integración de $t = 1$ a $t = 0$, es decir

$$\int_{-C} xdy = \int_{t=1}^0 t(4t^3 + 3t^2)dt = -\frac{31}{20}.$$

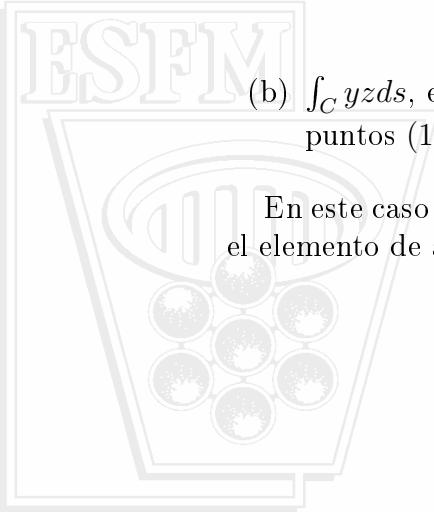
El camino $-C$ indica dirección contraria al camino C , note que la integral sobre de $-C$ cambia de signo, respecto de la integral sobre C .



- (b) $\int_C yzds$, en donde C es la hélice circular $x = \cos(\pi t)$, $y = \sin(\pi t)$, $z = 6t$ que une los puntos $(1/2, \sqrt{3}/2, 2)$ con $(-1, 0, 6)$.

En este caso nos han regalado la parametrización, pero nos piden calcular la integral sobre el elemento de arco ds definido por el módulo de (8.3), es decir,

$$ds = \sqrt{\vec{dr} \cdot \vec{dr}} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}. \quad (8.7)$$



8.2. Parametrización

105

Como el integrando no tiene la forma de la ecuación (8.5), lo más Salomónico es hacerlo por parametrización. Pero primero hay que convencerse que ésta es una hélice. En la figura (8.3) mostramos la curva parametrizada para $t : 0 \rightarrow 3$, para $t = 0$ la curva inicia en el punto $(1, 0, 0)$ y para $t = 3$ termina en $(-1, 0, 18)$ como se puede apreciar en la figura. Para los puntos de este problema tenemos que, $t : 1/3 \rightarrow 1$; en $t = 1/3$ tenemos el caso del punto $a(\cos(\pi/3), \sin(\pi/3), 6/3) = a(1/2, \sqrt{3}/2, 2)$ y en $t = 1$ es el caso del punto $b(\cos(\pi), \sin(\pi), 6) = b(-1, 0, 6)$ como se ve en la figura.

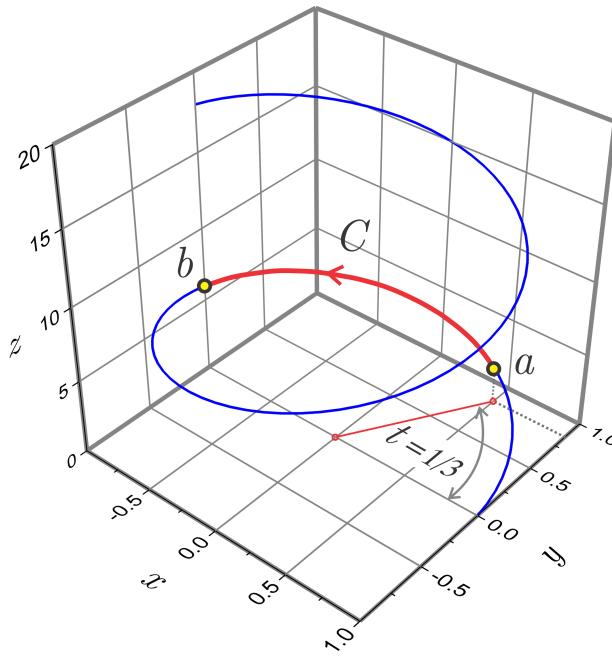


Figura 8.3: Parametrización de una hélice circular $x = \cos(\pi t)$, $y = \sin(\pi t)$, $z = 6t$. Para ir del punto a al punto b , el parámetro t debe cambiar de $t : 1/3 \rightarrow 1$.

En resumen, la parametrización es,

$$C : \begin{cases} x(t) = \cos(\pi t) , \\ y(t) = \sin(\pi t) , \\ z(t) = 6t , \end{cases} t : 1/3 \rightarrow 1 , \quad (8.8)$$

de donde: $dx = -\pi \sin(\pi t)$, $dy = \pi \cos(\pi t)$ y $dz = 6dt$, sustituyendo esto en la ecuación (8.7), directamente escribimos, $ds = \sqrt{\pi^2 + 36} dt$. Finalmente, con ayuda de (8.8) escribimos,

$$\int_C yz ds = 6\sqrt{\pi^2 + 36} \int_{t=1/3}^1 t \sin(\pi t) dt = \frac{\sqrt{\pi^2 + 36}}{\pi} \left(7 - \frac{3\sqrt{3}}{\pi} \right) .$$



8.2. Parametrización

106

$$(c) \int_C (2xy + 1)dx + x^2dy, \text{ en donde } C \text{ es la elipse } x^2 + 2y^2 = 1.$$

Este problema es muy ilustrativo, porque el camino es una curva cerrada, además de permitirnos encontrar su relación con las ecuaciones diferenciales ordinarias. Si recordamos la ecuación canónica de la elipse, de semiejes c y d , en los ejes x y y respectivamente, como

$$\left(\frac{x}{c}\right)^2 + \left(\frac{y}{d}\right)^2 = 1, \quad (8.9)$$

en automático pensamos en las funciones trigonométricas $\cos \theta$ y $\sin \theta$, porque la suma de sus cuadrados es uno. Entonces, nada nos impide escribir

$$\frac{x}{c} = \cos \theta, \frac{y}{d} = \sin \theta, \quad (8.10)$$

que satisface directamente la ecuación (8.9). Entonces, para una elipse es útil la parametrización

$$x = c \cos \theta, y = d \sin \theta. \quad (8.11)$$

Para el caso de un círculo de radio R , tendremos que $c = d = R$.

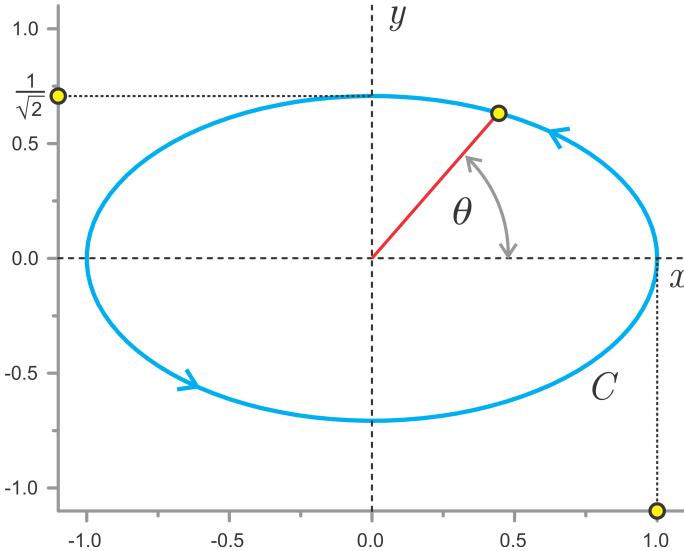


Figura 8.4: Parametrización de una elipse $x = (1) \cos \theta, y = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta$. Si deseamos recorrerlo en sentido de las manecillas del reloj, el parámetro θ debe cambiar de, $\theta : 0 \rightarrow 2\pi$.

En nuestro caso, el semieje mayor $c = 1$ y el menor $d = 1/\sqrt{2}$; además si escogemos como parámetro el ángulo θ , escribimos:

$$C : \begin{cases} x(\theta) = \cos \theta, \\ y(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta, \end{cases} \theta : 0 \rightarrow 2\pi. \quad (8.12)$$



Notamos que para recorrer el camino en sentido contrario a las manecillas del reloj, el ángulo θ debe variar de 0 a 2π , es decir $\theta : 0 \rightarrow 2\pi$. Sustituyendo nuestra parametrización (8.12), en nuestra integral escribimos

$$\int_C (2xy + 1)dx + x^2dy = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[-\left(\frac{2}{\sqrt{2}} \cos \theta \sin \theta + 1\right) \sin \theta + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos^3 \theta \right] d\theta = 0 ,$$

este resultado es muy importante, y merece ser distinguido de las otras integrales con un círculo sobre la integral para resaltar que la trayectoría es cerrada. El hecho importante es que su valor sea cero para toda trayectoría cerrada. La denotaremos como:

$$\oint_C (2xy + 1)dx + x^2dy = 0 , \quad (8.13)$$

y a continuación trataremos de explicar su significado.

Como mencionamos, en todos los casos la forma diferencial (8.5) será la clave para generalizar estos resultados y nos permitirá resolver estas integrales a simple vista. En nuestro curso de ecuaciones diferenciales [27], se mostró que una ecuación diferencial ordinaria exacta presenta la forma $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$, donde sus derivadas parciales satisfacen

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} . \quad (8.14)$$

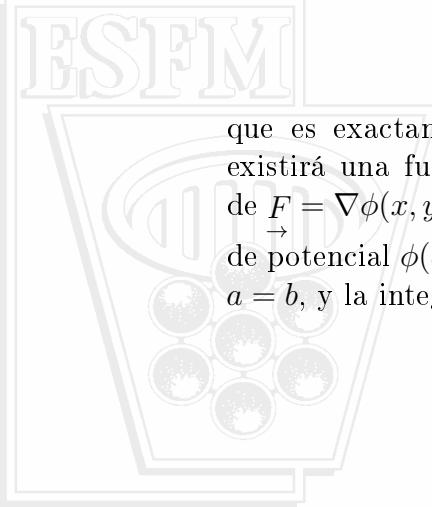
Comparando el integrando de (8.13) con la forma de una ecuación diferencial exacta, tenemos que: $M(x, y) = 2xy + 1$ y $N(x, y) = x^2$ y claramente cumple con las ecuaciones (8.14). Entonces la ecuación diferencial asociada a la integral (8.13) es exacta. ¿Será esta la razón por la que la integral es cero? Para contestar, apliquemos nuestra guía mágica. El campo vectorial asociado a la integral (8.13) es

$$F = \underset{\rightarrow}{(2xy + 1)\hat{a}_x + x^2\hat{a}_y} , \quad (8.15)$$

y obviamente sólo necesitamos calcular la componente z del rotacional, las otras componentes son cero porque el campo no depende de la coordenada z , entonces

$$\begin{aligned} (\nabla \times F)_3 &= \epsilon_{312} \partial_1 F_2 + \epsilon_{321} \partial_2 F_1 , \\ &= \partial_x(x^2) - \partial_y(2xy + 1) = 2x - 2x = 0 , \end{aligned} \quad (8.16)$$

que es exactamente la condición (8.14). Esto significa que el campo es conservativo, y existirá una función potencial $\phi(x, y)$, (la solución a la ecuación diferencial exacta), donde $F = \nabla \phi(x, y)$. Y el valor de la integral de línea del punto (a) al punto (b) , es la diferencia de potencial $\phi(b) - \phi(a)$. Para una trayectoría cerrada en punto inicial es igual al punto final $a = b$, y la integral es cero, como es nuestro caso.



8.2. Parametrización

Es muy sencillo verificar que una ecuación diferencial es exacta, o que el campo bidimensional es conservativo, a la vista lo hacemos. Y ¿si fuera tridimensional? aquí necesitamos calcular las tres componentes del rotacional; pero podemos empezar con la componente z , si es cero pues nos motiva a seguir con las otras componentes; si no es cero pues ya no es conservativo.

Finalmente, observe que en este caso, no fue necesario parametrizar ni encontrar la función potencial, solamente verificar mentalmente la condición de “exactitud”; y la integral en cualquier trayectoria cerrada será cero.



- (d) $\int_C x \, ds$, en donde C es la trayectoria cerrada que consiste en el elemento de recta $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$ y la porción de la parábola $y = 1 - x^2$, $-1 \leq x \leq 1$.

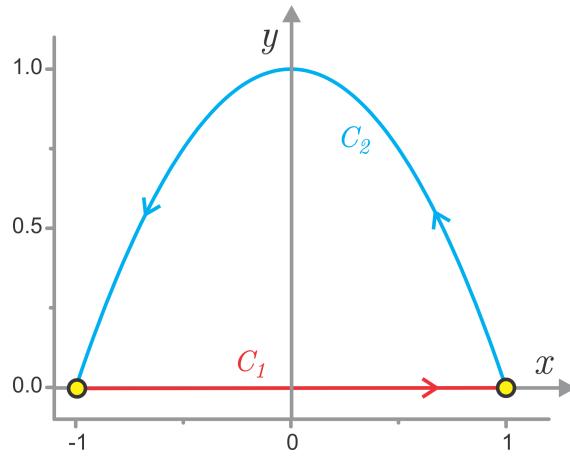


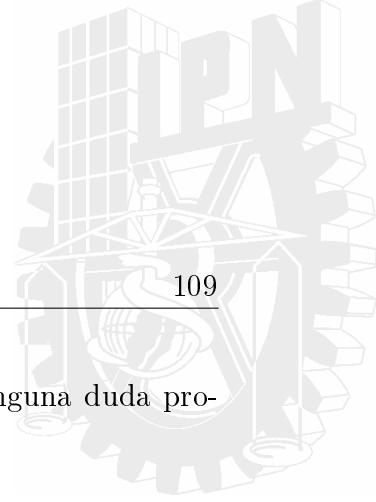
Figura 8.5: Parametrización compuesta: $C_1 : x(t) = t$, $y = 0$, $t : -1 \rightarrow 1$. $C_2 : x(t) = t$, $y = 1 - t^2$, $t : 1 \rightarrow -1$.

Esta integral es sobre un arco bidimensional, con $z = 0$ en la ecuación (8.7), es decir,

$$ds = \sqrt{\overrightarrow{dr} \cdot \overrightarrow{dr}} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}. \quad (8.17)$$

Nuevamente, como el integrando no tiene la forma de la ecuación (8.5), lo más Salomónico es hacerlo por parametrización, porque no hay forma de definir un campo F . Dividimos la trayectoria cerrada C en dos caminos C_1 y C_2 , como se puede apreciar en la figura (8.5), entonces

$$\int_C x \, ds = \int_{C_1} x \, ds + \int_{C_2} x \, ds. \quad (8.18)$$



8.2. Parametrización

109

Para la parametrización del camino C_1 , observamos que $y = 0$, y sin ninguna duda proponemos $x = t$, con $t : -1 \rightarrow 1$, en directo escribimos

$$C_1 : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 0, \end{cases} t : -1 \rightarrow 1, \quad (8.19)$$

y la integral sobre C_1 , se escribe

$$\int_{C_1} x ds = \int_{t=-1}^1 t \sqrt{(dt)^2 + 0^2} = \int_{t=-1}^1 t dt = 0, \quad (8.20)$$

donde hemos utilizado el arco (8.17), $dx = dt$ y $dy = 0$.

Para este mismo caso, si queremos ser muy sofisticados, podemos proponer $x = \sin \theta$, $y = 0$ con $\theta : -\pi/2 \rightarrow \pi/2$, y ¿Qué creen?, pues a ver...

$$\int_{C_1} x ds = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \sqrt{(\cos \theta d\theta)^2 + 0^2} = \int_{\theta=-\pi/2}^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = 0,$$

¡da lo mismo!. Pero, ¿A ver hazlo con $x = t^2$?

Para la parametrización del camino C_2 , sin ninguna duda proponemos $x = t$, y la ordenada será $y = 1 - t^2$, con $t : 1 \rightarrow -1$, rápidamente escribimos

$$C_2 : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 1 - t^2, \end{cases} t : 1 \rightarrow -1, \quad (8.21)$$

$$\int_{C_2} x ds = \int_{t=1}^{-1} t \sqrt{(dt)^2 + (-2t)^2} = \int_{t=1}^{-1} t \sqrt{1 + 4t^2} dt = 0, \quad (8.22)$$

finalmente (por pura coincidencia),

$$\oint_C x ds = 0.$$



8.2. Parametrización

110

- (e) $\int_{(1,0)}^{(2,1)} \frac{1+y^2}{x^3} dx - \frac{y(1+x^2)}{x^2} dy$, en donde la trayectoria consiste en los segmentos de recta que unen a $(1, 0)$ con $(2, 0)$ y $(2, 0)$ con $(2, 1)$.

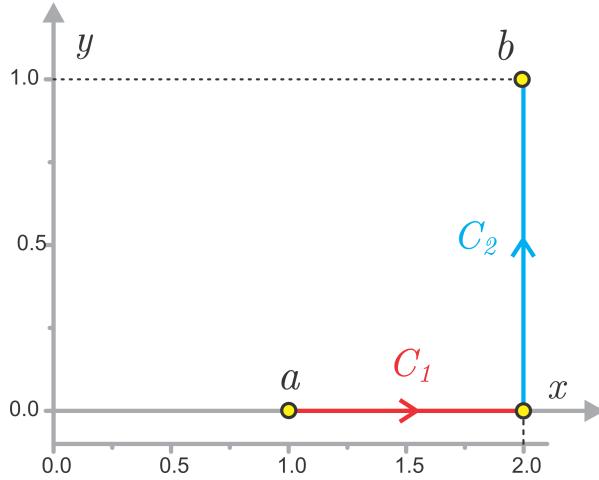


Figura 8.6: Parametrización compuesta: $C_1 : x(t) = t, y = 0, t : 1 \rightarrow 2$. $C_2 : x(t) = 2, y(t) = t, t : 0 \rightarrow 1$.

De la misma manera que el problema anterior, dividimos la trayectoría en dos caminos C_1 y C_2 . A primera vista de la figura (8.6), la parametrización es muy directa; por ejemplo proponemos,

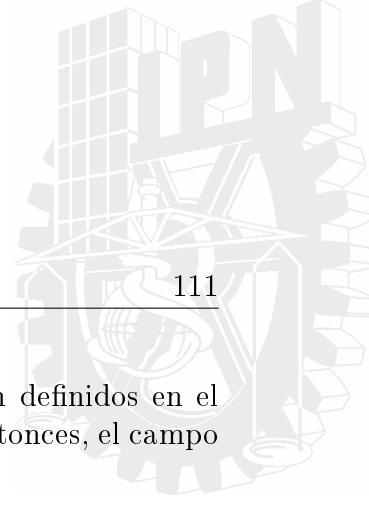
$$C_1 : \begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = 0, \\ t : 1 \rightarrow 2, \end{cases} \quad C_2 : \begin{cases} x(t) = 2, \\ y(t) = t, \\ t : 0 \rightarrow 1, \end{cases} \quad (8.23)$$

de donde la integral

$$\begin{aligned} I &= \int_{(1,0)}^{(2,1)} \frac{1+y^2}{x^3} dx - \frac{y(1+x^2)}{x^2} dy, \\ &= \int_{t=1}^2 \frac{1+0^2}{t^3} dt - \int_{t=0}^1 \frac{t(1+2^2)}{2^2} dt, \\ &= -\frac{1}{4}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

————— □ —————

Con mucha alegría, porque ya hemos entendido; pensaríamos, que no necesitamos la guía mágica. Pero una vocecita nos pregunta ¿El sistema es conservativo? Esto es algo muy



importante. Observamos, que la integral (8.24) y su campo asociado están definidos en el plano xy , por lo tanto sólo necesitaremos la componente z del rotacional. Entonces, el campo vectorial asociado a esta integral será

$$\vec{F} = \frac{1+y^2}{x^3} \hat{a}_x - \frac{y(1+x^2)}{x^2} \hat{a}_y . \quad (8.25)$$

A “simple ojo” calculamos la condición de “exactitud” (8.14), y ver que la derivada parcial respecto de y del término con \hat{a}_x es igual a la derivada parcial respecto a x del término con \hat{a}_y . Por lo tanto el campo es conservativo, pero verifiquemos esto con detalle

$$\begin{aligned} (\nabla \times F)_3 &= \epsilon_{312} \partial_1 F_2 + \epsilon_{321} \partial_2 F_1 , \\ &= \partial_x \left[-\frac{y(1+x^2)}{x^2} \right] - \partial_y \left[\frac{1+y^2}{x^3} \right] = \frac{2y}{x^3} - \frac{2y}{x^3} = 0 , \end{aligned} \quad (8.26)$$

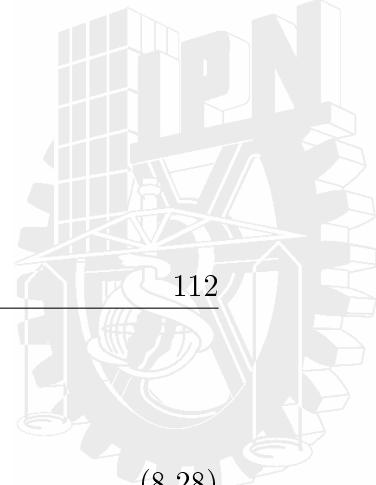
los otros dos términos del rotacional también serán cero, porque el vector no depende de z , y sus derivadas respecto de x , y y z serán cero, además el término $F_z = F_3$ es cero. Para que no quede duda las escribimos,

$$\begin{aligned} (\nabla \times F)_1 &= \epsilon_{123} \partial_2 \overset{0}{F_3} + \epsilon_{132} \partial_z \overset{0}{F_1} , \\ &= -\partial_z \left[\frac{1+y^2}{x^3} \right] = 0 , \\ (\nabla \times F)_2 &= \epsilon_{231} \partial_z \overset{0}{F_1} + \epsilon_{213} \partial_x \overset{0}{F_3} , \\ &= \partial_z \left[\frac{y(1+x^2)}{x^2} \right] = 0 , \end{aligned}$$

es decir, el campo \vec{F} es conservativo, o el integrando de (8.24) es una ecuación diferencial exacta. Entonces, existe una función potencial $\phi(x, y)$, tal que el valor de la integral (8.24), del punto (a) al punto (b), será simplemente $\phi(b) - \phi(a)$; al ver la figura (8.6), observamos que no hay necesidad de dividir la trayectoria, simplemente determinamos los puntos (a) y (b). Hallemos entonces ese potencial o solución a la ecuación diferencial exacta.

Como el campo \vec{F} es conservativo, entonces $\vec{F} = \nabla\phi$. E igualando las componentes de estos vectores, escribimos:

$$\vec{F} = \frac{1+y^2}{x^3} \hat{a}_x - \frac{y(1+x^2)}{x^2} \hat{a}_y = \frac{\partial\phi}{\partial x} \hat{a}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y} \hat{a}_y , \quad (8.27)$$



8.2. Parametrización

ó,

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1+y^2}{x^3}, \quad (8.28)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{y(1+x^2)}{x^2}. \quad (8.29)$$

Como en el juego de canicas, hagamos algunos “calis” o tiros sin válidez, para tratar de calcular la función potencial o potencial. Iniciemos con alguna de las componentes (8.28) ó (8.29).

De la misma manera como derivamos parcialmente, podemos también integrar parcialmente, es decir, si escogemos la primera componente donde $\partial_x \phi = (1+y^2)/x^3$, e integramos parcialmente respecto de x , tendremos el primer calis para ϕ como:

$$\phi_{Calis}^{1er} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1+y^2}{x^2} \right) + g(y), \quad (8.30)$$

donde la función $g(y)$ “juega” el papel de constante respecto de x , ya que $\partial_x g(y) = 0$. En otras palabras cuando derivamos $\partial_x \phi_{Calis}^{1er}$, recuperamos la ecuación (8.28). Ahora, esta función de prueba o primer calis, debe satisfacer la segunda componente, por ejemplo si escogemos ahora (8.29), tendremos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{y(1+x^2)}{x^2} = \frac{\partial \phi_{Calis}^{1er}}{\partial y} = -\frac{y}{x^2} + \frac{\partial g(y)}{\partial y}, \quad (8.31)$$

de donde $\partial_y g(y) = -1$, es decir, la función $g(y) = -y^2/2 + K$ donde K es una constante. Entonces el potencial es,

$$\phi(x, y) = -\frac{1}{2} \left(\frac{1+y^2}{x^2} \right) - \frac{1}{2}y^2 + K. \quad (8.32)$$

Esta constante la podríamos determinar si tuvieramos un valor del campo en un punto, pero como estamos interesados en diferencias de potencial es irrelevante. Sí somos muy desconfiados, podemos calcular el gradiente de esta función y recuperar el campo \vec{F} propuesto.

Hasta aquí, ya tenemos el potencial y bastaría simplemente restar $\phi(b) - \phi(a)$ para calcular el valor de la integral (8.24), definida del punto (a) al punto (b) . Pero expliquemos el porqué en general esto es válido, para completar la guía mágica.

Como $\vec{F} = \nabla \phi$, el integrando de la ecuación (8.1) lo escribimos,

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = \nabla \phi \cdot d\vec{r} = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz, \quad (8.33)$$

8.2. Parametrización

113

que es precisamente la diferencial de $\phi(x, y, z)$ [24], es decir

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz , \quad (8.34)$$

que al sustituir en la integral (8.50), tendremos por solución

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b d\phi = \phi(b) - \phi(a) . \quad (8.35)$$

Para este caso en particular

$$\begin{aligned} \int_{(1,0)}^{(2,1)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \phi(2, 1) - \phi(1, 0) , \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1+1^2}{2^2} \right) - \frac{1}{2} 1^2 + K + \frac{1}{2} \left(\frac{1+0^2}{1^2} \right) + \frac{1}{2} 0^2 - K , \\ &= -\frac{1}{4} . \end{aligned} \quad (8.36)$$



- (f) $\int_{(0,0,0)}^{(2,0,\pi^3)} ydx + xdy + zdz$, en donde la trayectoría consiste en la curva $x = 1 - \cos t$, $y = \sin t$ y $z = t^3$.

A primera vista, esta integral “parece” ser conservativa, porque la condición de “exactitud” (8.14) se cumple, (vemos que la derivada parcial respecto de y del término con dx es igual a la derivada parcial respecto a x del término con dy , ambas son uno). Decimos “parece” porque con la condición de exactitud, sólo probamos que la componente z del rotacional es cero, pero esto nos motiva a seguir calculando el resto de las componentes. Como el campo asociado a la integral de línea es,

$$\vec{F} = (y, x, z) , \quad (8.37)$$

8.2. Parametrización

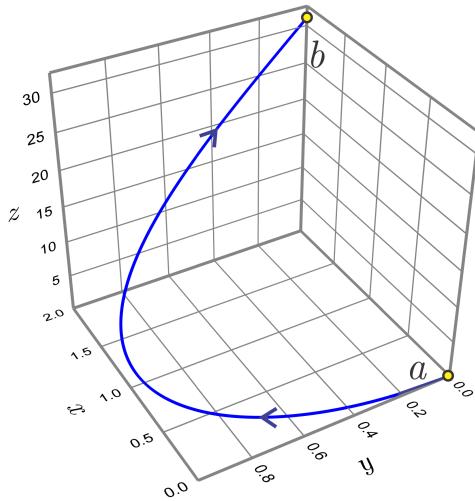


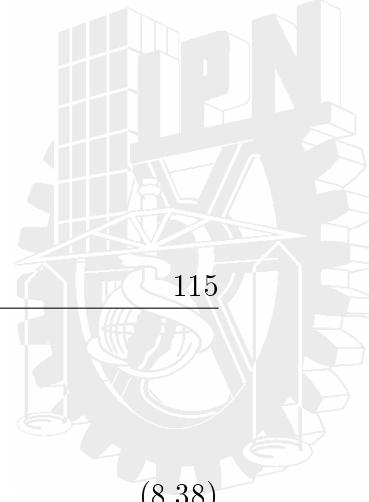
Figura 8.7: Parametrización de la curva, $x = 1 - \cos t$, $y = \sin t$ y $z = t^3$, del punto $(0, 0, 0)$ al punto $(2, 0, \pi^3)$. Para ir del punto a al punto b , el parametro t debe cambiar de 0 a π .

escribimos entonces,

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times \vec{F} \right)_1 &= \epsilon_{123} \partial_2 F_3 + \epsilon_{132} \partial_3 F_2 , \\ &= \partial_y(z) - \partial_z(y) = 0 , \\ \left(\nabla \times \vec{F} \right)_2 &= \epsilon_{231} \partial_3 F_1 + \epsilon_{213} \partial_1 F_3 , \\ &= \partial_z(x) - \partial_x(z) = 0 , \\ \left(\nabla \times \vec{F} \right)_3 &= \epsilon_{312} \partial_1 F_2 + \epsilon_{321} \partial_2 F_1 , \\ &= \partial_x(y) - \partial_y(x) = 0 . \end{aligned}$$

Con lo anterior como guía, podemos ahora sí, sin ningún temor escribir: Como el campo \vec{F} es conservativo, existe un potencial escalar ϕ , tal que $\vec{F} = \nabla \phi$. Esto nace de la igualdad vectorial $\nabla \times \vec{F} = \nabla \times (\nabla \phi) = 0$.

Siguiendo la rutina; como un vector es igual a otro cuando sus componentes son iguales,



entonces, si $\vec{F} = \nabla\phi$ de la ecuación (8.37) escribimos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = y , \quad (8.38)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x , \quad (8.39)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = z . \quad (8.40)$$

Aunque no lo parezca, los matemáticos juegan también canicas, pero a sus tiros de prueba no les llaman “calis” sino le llaman “ansatz” o función de acercamiento. Similarmente al juego de canicas, hagamos algunos “ansatz”, para proponer la forma del potencial. Iniciemos con la componente (8.38), (recordando que al integrar parcialmente respecto de x , todo lo que no sea x es constante), donde $\partial_x\phi = y$, y al integrar parcialmente respecto de x , tendremos el primer ansatz para ϕ como:

$$\phi_{Ansatz}^{1^{er}} = xy + f(y, z) , \quad (8.41)$$

donde la función $f(y, z)$ es una función constante respecto de x , ya que $\partial_x f(y, z) = 0$. Al derivar $\partial_x \phi_{Ansatz}^{1^{er}}$, recuperamos la ecuación (8.38). Nuevamente, esta función de acercamiento o primer ansatz, debe satisfacer las restantes dos componentes, por ejemplo sí escogemos la segunda componente (8.39), tendremos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = x = \frac{\partial\phi_{Ansatz}^{1^{er}}}{\partial y} = x + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} , \quad (8.42)$$

de donde $\partial_y f(y, z) = 0$, es decir, la función $f(y, z)$ no es función de y , ó $f(y, z) = f(z)$, por lo cual proponemos el segundo ansatz para ϕ como:

$$\phi_{Ansatz}^{2^o} = xy + f(z) . \quad (8.43)$$

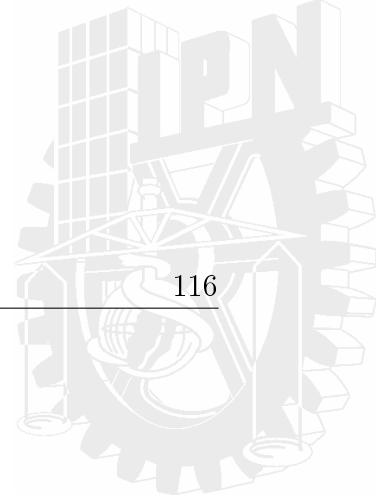
Finalmente, esta función de prueba o segundo calis, debe satisfacer la última componente (8.40) y tendremos,

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = z = \frac{\partial\phi_{Ansatz}^{2^o}}{\partial z} = \frac{\partial f(z)}{\partial z} , \quad (8.44)$$

de donde $\partial_z f(z) = z$, es decir, $f(z) = z^2/2 + C$ donde C es una constante. Entonces escribimos al potencial como,

$$\phi(x, y, z) = xy + \frac{1}{2}z^2 + C . \quad (8.45)$$

Nuevamente, esta constante la podríamos determinar si tuvieramos un valor del campo en un punto, pero como estamos interesados en diferencias de potencial es irrelevante.



8.2. Parametrización

116

Para concluir, tendremos por solución

$$\begin{aligned} \int_{(0,0,0)}^{(2,0,\pi^3)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \phi(2, 0, \pi^3) - \phi(0, 0, 0), \\ &= (2)(0) + \frac{1}{2}(\pi^3)^2 + C - (0)(0) - \frac{1}{2}(0)^2 - C, \\ &= \frac{1}{2}\pi^6. \end{aligned}$$

————— □ —————

Mil disculpas se me había olvidado la parametrización. Es claro que para ir del punto (a) punto (b), el parámetro t debe cambiar de $t : 0 \rightarrow \pi$, pues entonces escribimos

$$\begin{aligned} I &= \int_{(0,0,0)}^{(2,0,\pi^3)} ydx + xdy + zdz, \\ &= \int_0^\pi [\sin t(\sin t) + (1 - \cos t)\cos t + t^3 3t^2] dt, \\ &= \frac{1}{2}\pi^6. \end{aligned}$$

————— ♪ —————



8.2. Parametrización

- (g) $\int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} -\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^4}dx + \frac{x^3}{(x^2+y^2)^4}dy + 3zdz$, en donde la trayectoria es la recta que une los dos puntos.

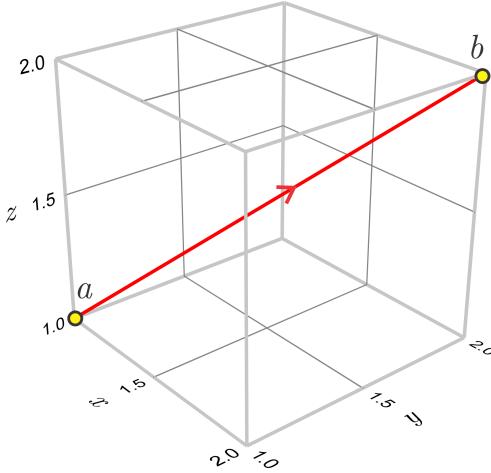


Figura 8.8: Parametrización; $x = t + 1$, $y = t + 1$ y $z = t + 1$, donde $t : 0 \rightarrow 1$, para cubrir el camino del punto $(1, 1, 1)$ al punto $(2, 2, 2)$.

A simple vista este caso da miedo. Pero calculemos la condición de exactitud. Derivando el primer término respecto de y , y el segundo respecto de x , (y rogando a San Cupertino, que no sean iguales), escribimos

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{x^2y}{(x^2+y^2)^4} \right] = \frac{x^2(7y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^5},$$

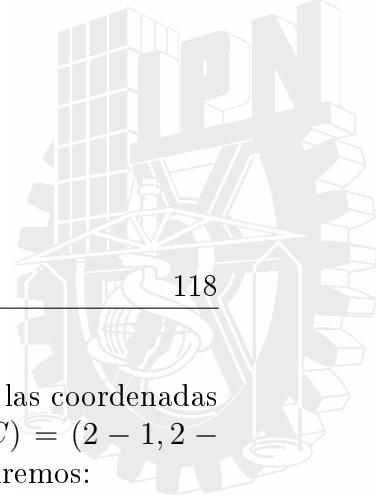
$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{x^3}{(x^2+y^2)^4} \right] = -\frac{x^2(5x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^5},$$

afortunadamente no son iguales y no es posible calcular el potencial porque el campo no es conservativo. La alternativa es por parametrización, en este caso hallar la ecuación de una línea recta que une los puntos $(1, 1, 1)$ y $(2, 2, 2)$, ver figura (8.8).

Para definir la ecuación de la línea recta, (ver ecuación (3.13)),

$$\frac{x-x_o}{A} = \frac{y-y_o}{B} = \frac{z-z_o}{C} = t, \quad (8.46)$$

es necesario conocer un punto por donde pase, digamos (x_o, y_o, z_o) y un vector dirección (A, B, C) . Como la recta va del punto $(1, 1, 1)$ al punto $(2, 2, 2)$, podemos escoger que el punto



$(x_o, y_o, z_o) = (1, 1, 1)$, y el vector que indica la dirección, estará definido por las coordenadas del punto final menos las coordenadas del punto inicial, es decir, $(A, B, C) = (2 - 1, 2 - 1, 2 - 1) = (1, 1, 1)$. Sustituyendo esto en la ecuación de la recta (8.46) tendremos:

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{1} = \frac{z - 1}{1} = t.$$

O de otra forma la parametrización será

$$\begin{aligned} x &= t + 1, \\ y &= t + 1, \\ z &= t + 1. \end{aligned} \tag{8.47}$$

Observe que t debe variar de 0 a 1, ya que en $t = 0$ recuperamos el punto inicial $x = 1, y = 1$ y $z = 1$, y en $t = 1$ recuperamos el punto final $x = 2, y = 2$ y $z = 2$. Entonces, $t : 0 \rightarrow 1$. Sustituyendo la parametrización (8.47), la integral se escribe como:

$$\begin{aligned} I &= \int_{(1,1,1)}^{(2,2,2)} -\frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^4} dx + \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^4} dy + 3z dz, \\ &= \int_{t=0}^1 3(t+1) dt, \\ &= \frac{9}{2}. \end{aligned}$$



(g) $\int_C z ds$, en donde C es la trayectoria $x = 3t, y = 4t$ y $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

En este caso, no hay alternativa tiene que resolverse por parametrización, ya que tenemos un diferencial de arco, como en el caso de la hélice, es decir

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

La parametrización dada es; $x = 3t, y = 4t$ y $z = t^3$, con $0 \leq t \leq 1$, sustituyendo en la integral, ver figura (8.9), escribimos

$$\int_C z ds = \int_{t=0}^1 t^3 \sqrt{25 + 9t^4} dt = \frac{1}{54} [(34)^{3/2} - 125].$$



8.2. Parametrización

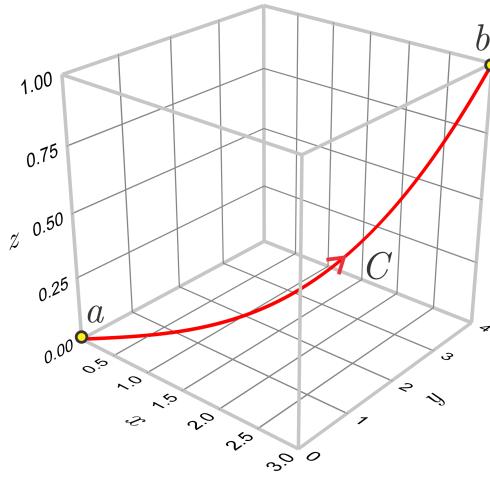


Figura 8.9: Parametrización de la curva C , $x = 3t$, $y = 4t$ y $z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.



- (g) $\int_C (x^3 + 4y)dx + (e^{2y} - 2z)dy + zdz$, en donde C es el triángulo con vértices $P_0(1, 0, 0)$, $P_1(0, 1, 0)$ y $P_2(0, 0, 1)$ recorrido de P_1 a P_2 a P_0 .

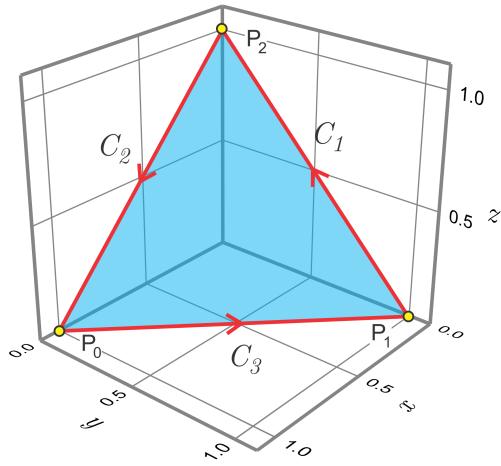
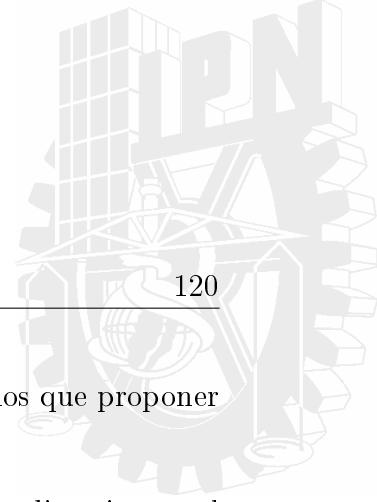


Figura 8.10: Parametrización de la curva C , recorrido de P_1 a P_2 a P_0 .

A simple vista la condición de exactitud no es válida ($4 \neq 0$). Derivando el primer término respecto de y , y el segundo respecto de x , escribimos

$$\frac{\partial}{\partial y}(x^3 + 4y) = 4 \neq \frac{\partial}{\partial x}(e^{2y} - 2z) = 0 ,$$



8.2. Parametrización

120

claramente son distintas las derivadas y el campo no es conservativo. Tenemos que proponer una parametrización para cada camino.

Para el camino C_1 , el punto inicial es $P_1(0, 1, 0)$ y el final $P_2(0, 0, 1)$ y su dirección es el vector $(A, B, C) = (0, 0, 1) - (0, 1, 0) = (0, -1, 1)$, (punto final menos punto inicial), y si escogemos a $(x_o, y_o, z_o) = (0, 1, 0)$, como el punto inicial para llevar un orden, la ecuación de la recta para el camino C_1 es:

$$\frac{x - 0}{0} = \frac{y - 1}{-1} = \frac{z - 0}{1} = t ,$$

intencionalmente dejamos la división entre cero, para recalcar que una recta sobre el plano yz es sólo función de las coordenadas y y z , y no involucra la coordenada x , por lo que debemos eliminarla de la ecuación de la recta. Además en la parametrización debemos hacerla cero porque define al plano yz . Entonces

$$\begin{aligned} x &= 0 , \\ y &= 1 - t , \\ z &= t . \end{aligned} \tag{8.48}$$

Similarmente para los otros caminos, escribimos:

$$C_1 : \begin{cases} x(t) = 0 , \\ y(t) = 1 - t , \\ z(t) = t \\ t : 0 \rightarrow 1 , \end{cases} \quad C_2 : \begin{cases} x(t) = t , \\ y(t) = 0 , \\ z(t) = 1 - t , \\ t : 0 \rightarrow 1 , \end{cases} \quad C_3 : \begin{cases} x(t) = 1 - t , \\ y(t) = t , \\ z(t) = 0 , \\ t : 0 \rightarrow 1 . \end{cases} \tag{8.49}$$

Para el camino C_1 la integral sera:

$$\int_{t=0}^1 [(1-t)^3 + 4t] (-dt) + [e^{2t} - 2(0)] dt = -\frac{9}{4} + \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} ,$$

Para el camino C_2 la integral sera:

$$\int_{t=0}^1 [e^{2(1-t)} - 2t] (-dt) + t dt = -\frac{e^2}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} ,$$

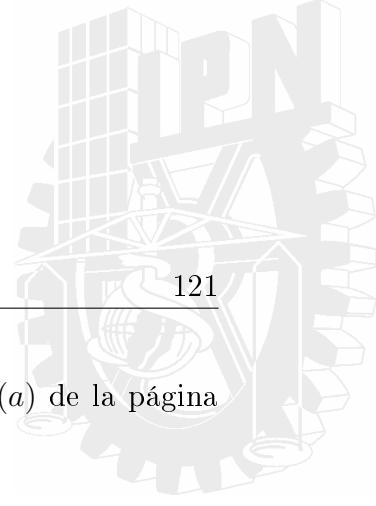
Para el camino C_3 la integral sera:

$$\int_{t=0}^1 [t^3 + 4(0)] dt + (1-t)(-dt) dt = \frac{1}{4} - 1 + \frac{1}{2} ,$$

Sumando las integrales de cada camino tendremos,

$$\int_C (x^3 + 4y) dx + (e^{2y} - 2z) dy + zdz = -1.$$





A manera de resumen resolvamos la integral propuesta en el ejercicio 4(a) de la página 220 del libro de Amazigo [24].

- Obténgase el trabajo realizado por el campo de fuerza \vec{F} al mover una masa unitaria a lo largo de la curva C en donde \vec{F} y C son como a continuación se indican:

$$\vec{F} = (2x + yz)\hat{a}_x + xz\hat{a}_y + xy\hat{a}_z \text{ y } C \text{ la recta que une a } (1, -1, 0) \text{ y } (2, 1, 4).$$

El trabajo se define como:

$$\int_{(1, -1, 0)}^{(2, 1, 4)} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (8.50)$$

Resolvamos esta integral directamente, es decir por parametrización. Para definir una línea recta, ver ecuación (3.13),

$$\frac{x - x_o}{A} = \frac{y - y_o}{B} = \frac{z - z_o}{C} = t,$$

necesitamos un punto (x_o, y_o, z_o) y un vector dirección (A, B, C) . Como la recta va del punto $(1, -1, 0)$ al punto $(2, 1, 4)$, podemos escoger que el punto $(x_o, y_o, z_o) = (1, -1, 0)$, y el vector que indica la dirección, estará definido por las coordenadas del punto final menos las coordenadas del punto inicial, es decir, $(A, B, C) = [2 - 1, 1 - (-1), 4 - 0] = (1, 2, 4)$. Entonces la ecuación de la recta será:

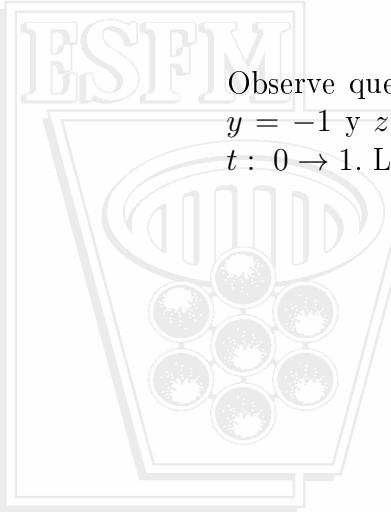
$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y + 1}{2} = \frac{z - 0}{4} = t.$$

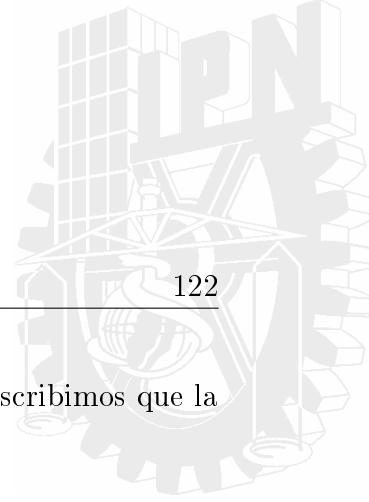
O de otra forma la parametrización será

$$\begin{aligned} x &= t + 1, \\ y &= 2t - 1, \\ z &= 4t. \end{aligned} \quad (8.51)$$

Observe que t debe variar de 0 a 1, ya que en $t = 0$ recuperamos el punto inicial $x = 1$, $y = -1$ y $z = 0$, y en $t = 1$ recuperamos el punto final $x = 2$, $y = 1$ y $z = 4$. Entonces, $t : 0 \rightarrow 1$. La integral (8.50) se escribe como:

$$I = \int_{(1, -1, 0)}^{(2, 1, 4)} (2x + yz)dx + xzdy + xydz, \quad (8.52)$$





donde al sustituir la parametrización (8.51) y sus diferenciales, finalmente escribimos que la integral (8.50) o (8.52) se escribe como:

$$I = \int_{t=0}^1 [2(t+1) + (2t-1)(4t)]dt + (t+1)(4t)2dt + (t+1)(2t-1)4dt = 11 . \quad (8.53)$$

Ahora usemos el algoritmo de la figura (8.1). Primero calculemos las componentes del rotacional del campo, es decir,

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times \vec{F} \right)_1 &= \epsilon_{123} \partial_2 F_3 + \epsilon_{132} \partial_3 F_2 , \\ &= \partial_y(xy) - \partial_z(xz) = x - x = 0 , \end{aligned} \quad (8.54)$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times \vec{F} \right)_2 &= \epsilon_{231} \partial_3 F_1 + \epsilon_{213} \partial_1 F_3 , \\ &= \partial_z(2x + yz) - \partial_x(xy) = y - y = 0 , \end{aligned} \quad (8.54)$$

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times \vec{F} \right)_3 &= \epsilon_{312} \partial_1 F_2 + \epsilon_{321} \partial_2 F_1 , \\ &= \partial_x(xz) - \partial_y(2x + yz) = z - z = 0 . \end{aligned} \quad (8.55)$$

Como un vector es igual a otro cuando sus componentes son iguales, se tiene

$$\nabla \times \vec{F} = (0, 0, 0) . \quad (8.56)$$

La ecuación (8.56) es crucial, porque cuando un campo \vec{F} es conservativo o su rotacional $\nabla \times \vec{F} = 0$, existe una función potencial $\phi(x, y, z)$; tal que el campo se obtiene como $\vec{F} = \nabla\phi$. Esto es consecuencia de que siempre $\nabla \times \nabla\phi = 0$.

Por lo tanto, si $\vec{F} = \nabla\phi$ escribimos:

$$(2x + yz)\hat{a}_x + xz\hat{a}_y + xy\hat{a}_z = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{a}_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{a}_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{a}_z . \quad (8.57)$$

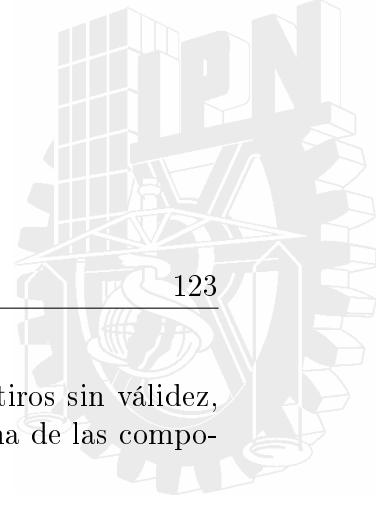
e igualando sus componentes tendremos,

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2x + yz , \quad (8.58)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = xz , \quad (8.59)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial z} = xy . \quad (8.60)$$





Una vez más regresemos al juego de canicas, hagamos algunos “calis” o tiros sin validez, para tratar de calcular la función potencial o potencial. Iniciemos con alguna de las componentes (8.58), (8.59) o (8.60).

De la misma manera como derivamos parcialmente, podemos también integrar parcialmente, es decir, si escogemos la primera componente donde $\partial_x \phi = 2x + yz$, e integremos parcialmente respecto de x , tendremos el primer calis para ϕ como:

$$\phi_{\text{Calis}}^{1^{\text{er}}} = x^2 + xyz + f(y, z) , \quad (8.61)$$

donde la función $f(y, z)$ “juega” el papel de constante respecto de x , ya que $\partial_x f(y, z) = 0$. En otras palabras cuando derivamos $\partial_x \phi_{\text{Calis}}^{1^{\text{er}}}$, recuperamos la ecuación (8.58). Ahora, esta función de prueba o primer calis, debe satisfacer las restantes dos componentes, por ejemplo si escojemos la segunda componente (8.59), tendremos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = xz = \frac{\partial \phi_{\text{Calis}}^{1^{\text{er}}}}{\partial y} = xz + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} , \quad (8.62)$$

de donde $\partial_y f(y, z) = 0$, es decir, la función $f(y, z)$ no es función de y , ó $f(y, z) = f(z)$, por lo cual proponemos el segundo calis para ϕ como:

$$\phi_{\text{Calis}}^{2^{\text{o}}} = x^2 + xyz + f(z) . \quad (8.63)$$

Finalmente, esta función de prueba o segundo calis, debe satisfacer la última componente (8.60) y tendremos,

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = xy = \frac{\partial \phi_{\text{Calis}}^{2^{\text{o}}}}{\partial z} = xy + \frac{\partial f(z)}{\partial z} , \quad (8.64)$$

de donde $\partial_z f(z) = 0$, es decir, $f(z)$ es una constante, ya que no fue función de z ni de y . Entonces escribimos al potencial como,

$$\phi(x, y, z) = x^2 + xyz + cte . \quad (8.65)$$

Esta constante la podríamos determinar si tuvieramos un valor del campo en un punto, pero como estamos interesados en diferencias de potencial es irrelevante. Finalmente, al sustituir en la integral (8.50), tendremos por solución

$$\begin{aligned} \int_{(1,-1,0)}^{(2,1,4)} \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \phi(2, 1, 4) - \phi(1, -1, 0) , \\ &= (2)^2 + (2)(1)(4) + cte - (1)^2 - (1)(-1)(0) - cte , \\ &= 11 . \end{aligned} \quad (8.66)$$



8.3. Sistemas conservativos

Estaríamos tentados a creer que el método de parametrización es más práctico y/o sencillo en comparación con método de hallar el potencial. Pero perderíamos la oportunidad de escribir uno de los conceptos más importantes de la física; la conservación de la energía [5].

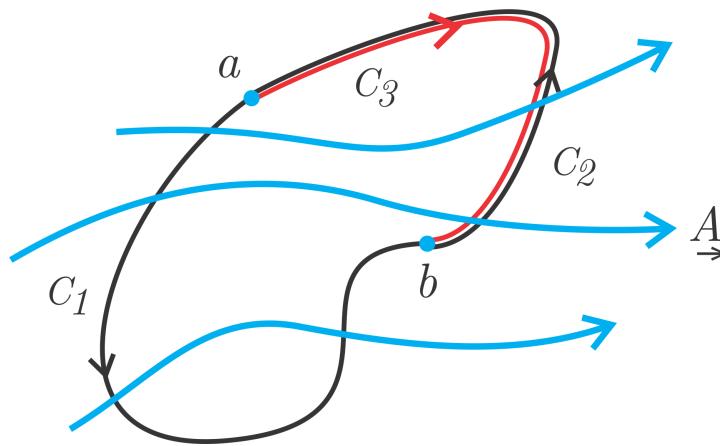


Figura 8.11: Cuando el campo \vec{A} es conservativo la integral de línea del punto a al b es independiente del camino seleccionado. Es decir, podríamos escoger el camino C_1 o el camino C_3 para ir del punto a al punto b y obtendríamos el mismo resultado.

La ecuación (8.35) nos indica que la integral de línea entre los puntos a y b es igual a la diferencia entre los potenciales entre dichos puntos, es decir $\phi(b) - \phi(a)$, cuando lo recorremos, por ejemplo, sobre el camino C_1 de la figura (8.11). Dicho potencial los produce el campo \vec{A} , mostrado por flechas. Si continúaramos nuestro recorrido por el camino C_2 , del punto \vec{b} hasta llegar nuevamente al punto a , tendríamos un camino cerrado y la integral de línea sobre este camino sería cero, ya que el punto inicial es igual al punto final y $\phi(a) - \phi(a) = 0$. Entonces, si el campo es conservativo ($\nabla \times \vec{A} = 0$),

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0 , \quad (8.67)$$

donde el camino C es la suma de los caminos C_1 y C_2 , es decir, $C = C_1 + C_2$ y la integral cerrada anterior se escribe como,

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} + \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = 0 . \quad (8.68)$$



Pero el camino $C_3 = -C_2$, es decir, que el camino C_3 se recorre en sentido contrario al camino C_2 , y podemos escribir despejando la integral de sobre C_1 de la ecuación (8.68)

$$\int_{C_1} \vec{A} \cdot d\vec{r} = - \int_{C_2} \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int_{C_3} \vec{A} \cdot d\vec{r}. \quad (8.69)$$

Que finalmente nos indica que cuando el campo es conservativo, la integral de línea es independiente de la trayectoria, para ir de un punto a otro.

Lo anterior se puede aplicar directamente a la mecánica (capítulo 5 de [5]). Supongamos ahora, que deseamos calcular el trabajo en mover de un punto a otro, una partícula de masa m , inmersa en un campo \vec{F} conservativo. Inmediatamente nos preguntamos: ¿Qué relación tiene este trabajo con la energía cinética y potencial? ¿Y la energía? ¿Y si el campo no fuese conservativo?

- Obténgase el trabajo realizado, en mover una partícula de masa m del punto a al punto b a lo largo de la curva C , como se indica en la figura (8.12), bajo el campo de fuerza conservativo \vec{F} . Además describa el teorema trabajo-energía.

Rápidamente pensamos en la definición de trabajo, (ver ecuación (8.50)):

$$W_{ab} = \int_{C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (8.70)$$

Se oye muy bien, pero: ¿Qué es físicamente una integral de línea? Recordamos que el producto punto es la proyección de un vector a otro, siempre y cuando el otro sea unitario ($\vec{A} \cdot \hat{n} = A_n$). Si consideramos que el vector diferencial de camino lo escribimos como, $d\vec{r} = d\ell \hat{\tau}$, donde $\hat{\tau}$ es un vector unitario tangente al camino y $d\ell$ es un elemento diferencial de arco, ver figura (8.12). entonces

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot \hat{\tau} d\ell = \int_a^b F_\tau d\ell, \quad (8.71)$$

es decir, la integral de línea es la suma de todas las proyecciones del campo en la dirección tangente a la trayectoria o diferencial de arco. En este caso, el trabajo es la suma de las proyecciones de la fuerza sobre los arcos tangentes al camino.

Como el campo \vec{F} es conservativo, entonces $\vec{F} = -\nabla U(r)$, donde $U(r)$ lo llamamos potencial escalar, porque depende únicamente de las coordenadas r , y el signo menos lo incluimos

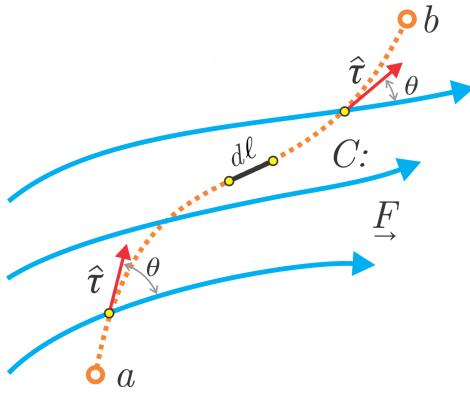


Figura 8.12: La integral de línea $\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r}$, es la suma de las proyecciones del campo \vec{F} sobre las direcciones tangentes a la trayectoria C .

para darle sentido físico a nuestra fuerza, es decir, para que los objetos caigan para abajo [5]. Como en la ecuación (8.70), escribimos

$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_a^b \nabla U \cdot d\vec{r} = -[U(b) - U(a)] . \quad (8.72)$$

Por otra parte, sabemos que el momento lineal se define como $\vec{p} = m\vec{u}$, donde m es la masa y \vec{u} la velocidad, entonces la segunda ley de Newton se escribe,

$$\vec{F} = \frac{d}{dt} \vec{p} = m \frac{d}{dt} \vec{u} , \quad (8.73)$$

donde hemos denotado la derivada en el tiempo con un punto superior. Entonces $\vec{u} = d\vec{r}/dt$ ó $d\vec{r} = \vec{u} dt$. Sustituyendo lo anterior en la ecuación (8.72),

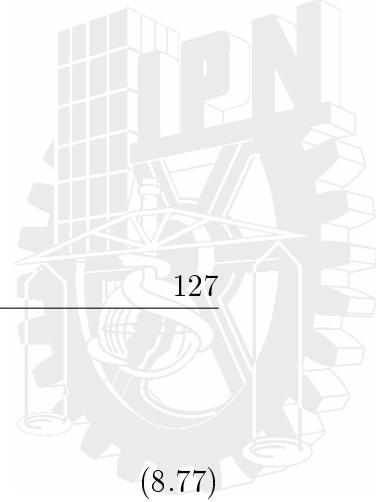
$$W_{ab} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \int_a^b \dot{\vec{u}} \cdot \vec{u} dt . \quad (8.74)$$

Pero sabemos que $\vec{u} \cdot \vec{u} = u^2$, derivando respecto al tiempo esta relación tendremos, $2\vec{u} \cdot \dot{\vec{u}} = 2\vec{u}\vec{u}$, donde $du = \dot{\vec{u}} dt$. Nuevamente sustituyendo lo anterior en (8.74), escribimos

$$W_{ab} = m \int_a^b \dot{\vec{u}} \cdot \vec{u} dt = m \int_a^b \vec{u} \cdot du = m \int_a^b u du . \quad (8.75)$$

Si definimos la energía cinética

$$T = \frac{1}{2} mu^2 , \quad (8.76)$$



de la ecuación anterior y la (8.75) escribimos

$$W_{ab} = \frac{1}{2}mu_b^2 - \frac{1}{2}mu_a^2 = T(b) - T(a) . \quad (8.77)$$

Esta sorprendente manera de calcular el trabajo por medio del potencial escalar y de la energía cinética, nos permite describir la dinámica de un sistema ya no en términos de una fuerza, como lo define la segunda ley de Newton (8.73), sino en términos de funciones dinámicas generales. Igualando las relaciones (8.72) y (8.77), escribimos

$$\begin{aligned} T(b) - T(a) &= -[U(b) - U(a)] , \\ \Delta T &= -\Delta U , \end{aligned} \quad (8.78)$$

que define la conservación de la energía, $\Delta T + \Delta U = 0$. En otras palabras la suma de los cambios o incrementos de la energía cinética y la potencial es igual a cero.

Finalmente si suponemos que las fuerzas aplicadas a nuestro sistema no fuesen todas conservativas, como es el caso de la fricción, la fuerza la escribimos $\vec{F} = -\nabla U + \vec{f}$, donde \vec{f} son las fuerzas no conservativas, nuestro teorema de trabajo energía será

$$\Delta T + \Delta U = W_{ab}^{(f)} . \quad (8.79)$$

donde $W_{ab}^{(f)}$ es el trabajo de las fuerzas no conservativas que se calculan directamente por parametrización, del punto inicial (a) al punto final (b),

$$W_{ab}^{(f)} = \int_a^b \vec{f} \cdot d\vec{r} . \quad (8.80)$$



9

Teoremas integrales de Stokes y Gauss

Como hemos visto en los capítulos anteriores, las integrales de línea, superficie y volumen nos permiten resolver algunos problemas físicos que van desde la teoría del potencial, hasta la dinámica rotacional [5]. Pero todavía hay algunas otras leyes tan generales y maravillosas descritas por integrales; como lo es la ley de Gauss y la de Ampère [25, 11], expresadas como,

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = Q_{enc.} \text{ y } \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{enc}, \quad (9.1)$$

respectivamente. La primera integral se llama flujo eléctrico total, (total por la “bola” o el círculo sobre la integral doble), sobre una superficie S cerrada; donde la variable Q_{enc} es la carga encerrada por dicha superficie. La siguiente integral de línea sobre un camino cerrado C , (o con “bola”), se llama circulación; donde la variable I_{enc} es la corriente eléctrica encerrada por tal camino.

Aquí surgen algunos conceptos nuevos como encerrado, que entenderemos simplemente como contenido por una superficie o trayectoría. Cuando las superficies o caminos no sean cerrados, pues los cerraremos con alguna superficie o camino adecuado, esta sencilla acción, es la clave para la solución de muchas integrales. Las ecuaciones anteriores se relacionan muy cercanamente con los teoremas integrales de Gauss y Stokes, de ahí la importancia para este curso. Estos teoremas se pueden generalizar y extender al espacio tiempo (4-dimensiones), para escribir las extraordinarias leyes de conservación del tensor electromagnético momento-energía, o poder enunciar el teorema de Noether, que relaciona las leyes de conservación con las simetrías del sistema [13].

Además, no hay que relacionar los términos “bola” con “bolera” o “bolo” descritos en el diccionario de La Rial Academia de la Lengua Fraylescana, que a palabras de Julio Derbez es, “la condensación de la identidad de Chiapas” [28].

9.1. Teorema de Stokes

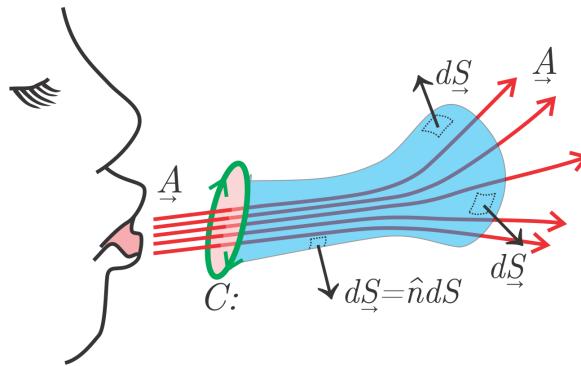


Figura 9.1: Formación de burbujas de jabón, cuando un “campo de aire” \vec{A} , circula un camino cerrado C , se genera una familia de superficies con un diferencial de superficie $d\vec{S}$ y un contorno común C .

Para explicar este teorema, imaginemos un hermoso día soleado de abril, en el parque de la marimba de la ciudad de Tuxtla Gutiérrez, Chiapas. Con muchos globos de colores, música y los únicos e infalibles hacedores de burbujas. Imaginemos ese anillo creador de burbujas; tan divertido que nos hizo saltar de alegría y felicidad. Cómo jugábamos, cuando sacábamos el anillo de la solución jabonosa, veíamos una película de jabón, como un espejo formado en el anillo. Posteriormente, le soplábamos y esta película se deformaba alargándose hasta que finalmente se desprendía del anillo, una hermosa y brillante burbuja, que nos hacia perseguirla y querer volar junto a ella, ver la figura (9.1).

Esta experiencia contiene la esencia del teorema de Stokes, porque la formación de la burbuja, es una sucesión de superficies. Es decir, empezamos con una superficie plana formada por la solución jabonosa en el anillo, y conforme el aire pasa por él, deforma esta superficie alargándola justo antes de desprenderse del anillo. ¿Qué tienen en común esta familia de superficies? Obviamente el jabón, pero también el anillo C , como se ve en la figura (9.1). Hablando técnicamente, cuando un campo \vec{A} fluye por un camino cerrado, (no necesariamente dentro del anillo), se cumple la relación

$$\oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S}, \quad (9.2)$$

donde C es el contorno o el anillo, y S es cualquiera de las superficies de la familia que tienen el común el contorno C , es decir, siendo redundante cualquiera de las superficies justo antes de desprenderse del anillo, incluyendo la superficie plana inicial. Es importante hacer una diferencia entre área y superficie, usaremos el término área para una superficie plana.

La primera integral es una integral de línea cerrada o con bola, llamada circulación, que se relaciona con otra integral de superficie llamada flujo. Ahora resulta claro el porqué cuando el campo es conservativo, la circulación es cero. La segunda integral se llama flujo, en general el flujo de un campo \vec{u} en una superficie S , se escribe como $\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S}$, donde $d\vec{S}$ se llama diferencial de superficie; cuya dirección depende del sentido en la cual se circule dicha superficie, es decir la superficie S está orientada.

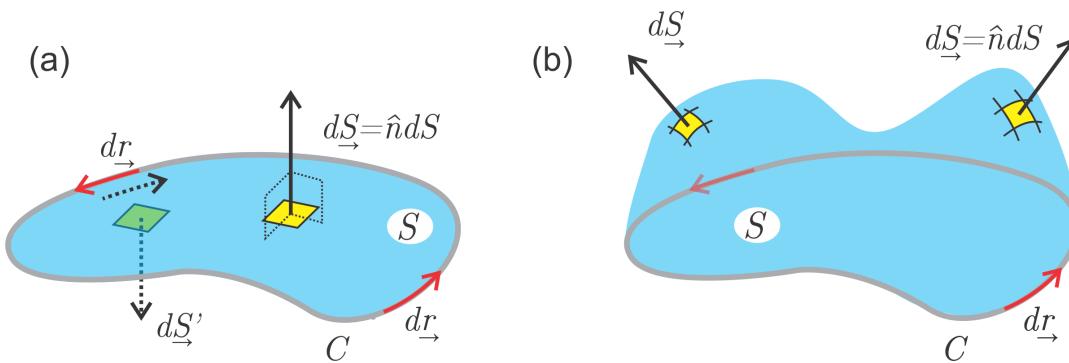


Figura 9.2: Superficies orientadas. (a) En esta figura tenemos una superficie plana, donde su diferencial de área $d\vec{S}$ es perpendicular, y su dirección está determinada por el pulgar de la mano derecha, cuando circulamos con los dedos restantes, el contorno C en el sentido del $d\vec{r}$. (b) La misma situación pero ahora en una superficie no plana, aquí el vector unitario \hat{n} , no será constante y el diferencial de superficie $d\vec{S}$, está definido sobre dicha superficie.

En la figura (9.2(a)), mostramos el diferencial de área $d\vec{S}$ con respecto al diferencial de camino $d\vec{r}$, o bien decimos que el área S está orientada, con respecto al diferencial de camino $d\vec{r}$. Para orientarla hacemos uso de la mano derecha: Si extendemos nuestros dedos de la mano derecha en la dirección del diferencial de camino $d\vec{r}$, y cerramos la mano como queriendo atrapar el área S , nuestro pulgar nos señalará la dirección del diferencial de área $d\vec{S}$. A esto le llamamos circulación positiva o en sentido contrario a las manecillas del reloj. Claramente cuando circulamos el camino en dirección negativa o en sentido de las manecillas del reloj, el diferencial de área cambia de dirección, como lo muestran las flechas con línea punteada en la figura (9.2(a)).

De la misma manera, para el caso de una superficie arbitraria o no plana, como es el caso de la figura (9.2(b)), la circulación en sentido positivo, (o por medio también de la mano derecha), definirá la dirección del diferencial de superficie $d\vec{S} = \hat{n} dS$, donde \hat{n} es un vector unitario normal a la superficie y dS su diferencial de área definido sobre tal superficie.

El vector unitario perpendicular lo calcularemos mediante el gradiente de la superficie en dicho punto, el cual no será necesariamente constante, salvo para las superficies planas. Es claro entonces, que trabajar en superficies planas es muy sencillo, pero con un poco de más cálculos las superficies no planas también serán sencillas, como lo veremos más adelante.

En resumen: El teorema de Stokes, (ecuación (9.2)), relaciona la circulación de un campo con el flujo de su rotacional, en la superficie contenida por tal contorno.

Bien, pues es hora de poner en práctica los conocimientos adquiridos, garantizando que será un juego muy divertido, como perseguir burbujas de jabón.

9.2. Teorema de Green

El teorema de Green es un caso particular del teorema de Stokes definido en un plano. Sin ningún afán de generalizar, el teorema de Green lo aplicaremos cuando la superficie contenida por el contorno es plana; como cuando sacábamos el anillo de la superficie jabonosa.

Resolvamos las integrales propuesta en el ejercicio 7(a) al 7(e) de la página 221 del libro de Amazigo [24]. Esperamos que con estos ejercicios quede más clara las ideas de orientación de la superficie y de cuando aplicar el teorema de Green.

7.- Utilice el teorema de Green, para evaluar cada una de las integrales de línea $\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r}$, en donde \vec{v} y C son como a continuación se indica.

$$(a) \quad \vec{v} = (2x - y)\hat{a}_x + (x + 3y)\hat{a}_y, \text{ y } C \text{ es el triángulo con vértices en } (0, 0), (2, 0) \text{ y } (2, 2).$$

Al ver la pregunta, vemos que es una integral de línea cerrada o integral con bola, e inmediatamente pensamos en calcular la componente tres o z del rotacional del campo bidimensional, $\vec{v} = (2x - y)\hat{a}_x + (x + 3y)\hat{a}_y$, que a simple vista no es cero, porque no cumple la condición de exactitud (8.14), ya que las derivadas “cruzadas” $\partial_x(x + 3y)$, $\partial_y(2x - y)$ no son iguales. Las componentes x y y del rotacional, también serán cero porque no tenemos componente z en el campo \vec{u} , ni sus componentes dependen de z ; como lo mostramos en el problema 2(e), del capítulo anterior. Entonces la integral con bola será distinta de cero.

En la figura (9.3), mostramos el contorno C que une los vértices del triángulo $(0, 0)$, $(2, 2)$ y $(2, 0)$, que se recorre en el sentido positivo o contrario al sentido de las manecillas del reloj. Entonces, el área estará orientada hacia el eje z , y su diferencial será $dS = dx dy \hat{a}_z$, donde

9.2. Teorema de Green

132

hemos utilizado el hecho que el diferencial de área es $dS = dx dy$.

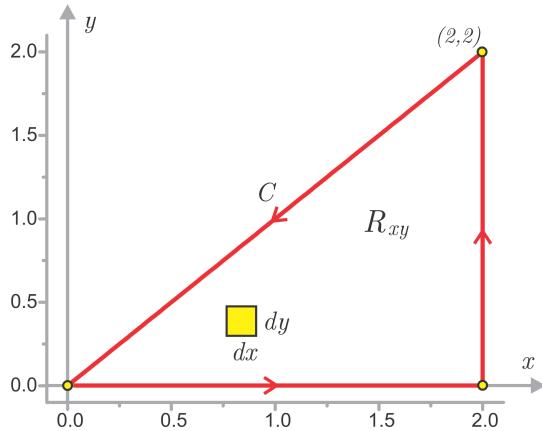


Figura 9.3: Para un campo bidimensional en función de x y y , el teorema de Stokes se reduce a un plano, y se llama teorema de Green. Si circulamos el camino C , en sentido contrario de las manecillas del reloj, el diferencial de área es $dS = dx dy \hat{a}_z$.

Explicitamente, para un campo bidimensional en general, la ecuación (9.2), se escribe como,

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{A} \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{d}S, \\ &= \iint_S (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{a}_z dx dy, \\ &= \iint_{R_{xy}} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned} \quad (9.3)$$

que se conoce como teorema de Green [26], donde claramente para la región R_{xy} se necesita únicamente la componente z del rotacional, (para una región R_{yz} se necesitará la componente x , Etc.). Sustituyendo nuestro campo, escribimos

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \iint_{R_{xy}} [\partial_x(x + 3y) - \partial_y(2x - y)] dx dy, \\ &= 2 \iint_{R_{xy}} dx dy = 2 \frac{(2)(2)}{2} = 4, \end{aligned}$$

donde lo más complicado era calcular el área del triángulo, (base por altura entre 2).



(b) $\vec{v} = (x^2 + y, y^2)$, y C es el triángulo con vértices en $(1, 1)$, $(2, 1)$ y $(2, 2)$.

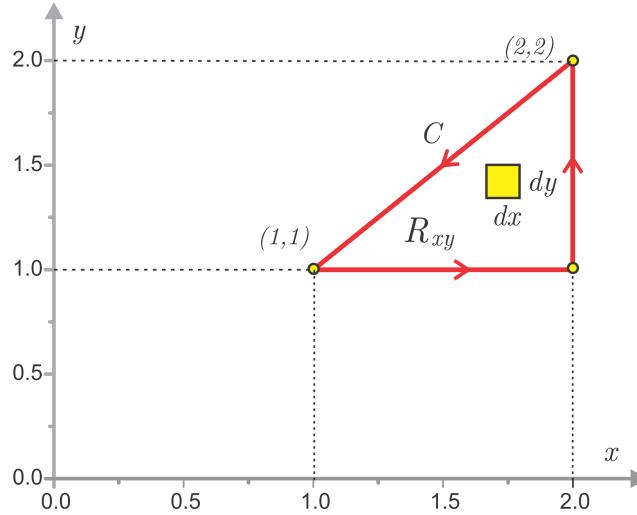


Figura 9.4: Por la mano derecha sabemos que el diferencial de área es $d\vec{S} = dx dy \hat{a}_z$, donde $dx dy$ es la magnitud del diferencial de área.

Nuevamente, vemos una integral de línea cerrada e inmediatamente calculamos la componente z del rotacional del campo bidimensional. No cumple la condición de exactitud (8.14), ya que las derivadas “cruzadas” $\partial_x(y^2)$, $\partial_y(x^2 + y)$ no son iguales. Las otras componentes son cero también, porque no tenemos componente z en el campo \vec{v} , ni sus componentes dependen de z .

Si todavía no queda claro el porqué solo es necesaria la componente z del rotacional, observemos la figura (9.4), donde mostramos el contorno C que une los vértices del triángulo $(1, 1)$, $(2, 1)$ y $(2, 2)$, que se recorre en el sentido positivo o contrario al sentido de las manecillas del reloj. Entonces, su diferencial de área será $d\vec{S} = dx dy \hat{a}_z$. Este diferencial será ortogonal a los vectores unitarios \hat{a}_x y \hat{a}_y , por tal motivo sólo necesitamos la componente z del rotacional.

Utilizando el teorema de Green (9.3), escribimos

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \iint_{R_{xy}} [\partial_x(y^2) - \partial_y(x^2 + y)] dx dy, \\ &= - \iint_{R_{xy}} dx dy = -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donde nuevamente lo más complicado fué calcular el área del triángulo.



9.2. Teorema de Green

134

- (c) $\vec{v} = x^2y\hat{a}_x - xy^2\hat{a}_y$, y C consisten la línea recta $y = 0$, $-1 \leq x \leq 1$ y la parte de la parábola $y = 1 - x^2$ que se encuentra en el medio plano superior.

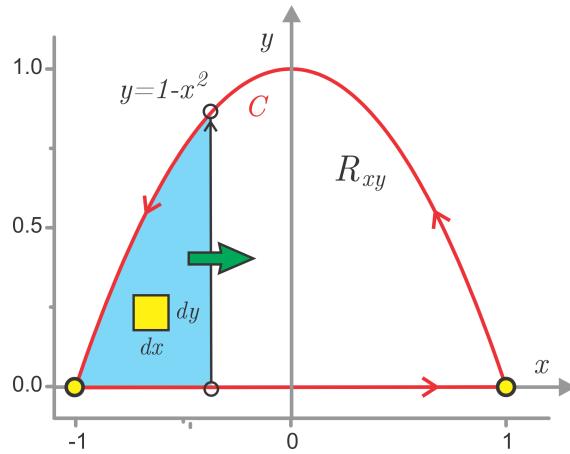


Figura 9.5: Las flechas indican los límites de integración. La flecha vertical define los límites de $y = 0$ a $y = 1 - x^2$; la flecha horizontal define los límites de $x = -1$ a $x = 1$.

Nuevamente, a simple vista no se cumple la condición de exactitud (8.14). Observando la figura (9.5), donde se muestra el contorno C que une los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 0)$, por medio de las líneas $y = 0$ y $y = 1 - x^2$. El camino C se recorre en el sentido positivo o contrario al sentido de las manecillas del reloj. Entonces, su diferencial de área será $dS = dx dy \hat{a}_z$ y sólo necesitaremos la componente z del rotacional.

Utilizando el teorema de Green (9.3), escribimos

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} &= \iint_{R_{xy}} [\partial_x(-xy^2) - \partial_y(x^2y)] dx dy = - \iint_{R_{xy}} (x^2 + y^2) dx dy, \\ &= - \int_{x=-1}^1 \int_{y=0}^{1-x^2} (x^2 + y^2) dy dx, \\ &= - \int_{x=-1}^1 \left[x^2(1 - x^2) + \frac{1}{3}(1 - x^2)^3 \right] dx = - \frac{4}{7}. \end{aligned}$$

En este caso colocamos los límites de integración siguiendo la regla de “pintar” u orden de los diferenciales; el primer diferencial que aparece en la integral doble es el dy , indicado por la flecha vertical, que define los límites de $y = 0$ a $y = 1 - x^2$; le sigue el diferencial dx indicado por la flecha horizontal que define el recorrido de la “brocha” o los límites de $x = -1$ a $x = 1$. Ver la figura (9.5).



9.2. Teorema de Green

135

- (d) $\vec{v} = x^3\hat{a}_x - xy^3\hat{a}_y$, y C es el rectángulo con vértices en $(\pm a, \pm b)$.

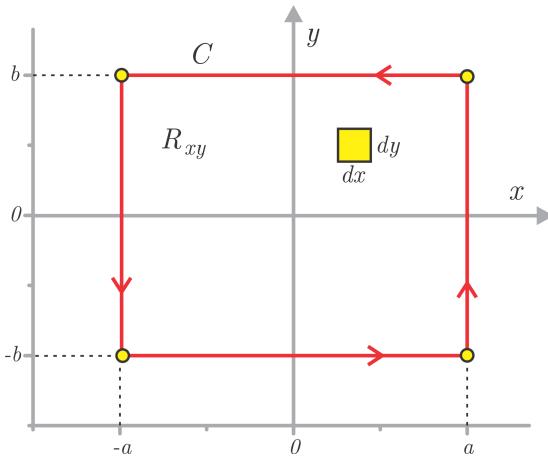
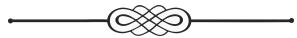


Figura 9.6: Contorno para el problema 7(d). Las integrales en regiones cuadradas son muy sencillas porque se aplica el teorema de Fubini.

Este problema es muy especial. Es claro que no cumple las condiciones de exactitud, y por lo tanto en principio la integral con bola es distinta de cero. Además porque se recorre el camino C en el sentido positivo, el diferencial de área es $dS = dx dy \hat{a}_z$, y aplicando el teorema de Stokes (Green en este caso), escribimos,

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{R_{xy}} [\partial_x(-xy^3) - \partial_y(x^3)] dx dy = - \iint_{R_{xy}} y^3 dx dy , \\ = - \int_{x=-a}^a dx \int_{y=-b}^b y^3 dy = -(2a)(0) = 0 .$$

¿Se dieron cuenta? Sí, tenemos una integral de línea cerrada cuyo valor es cero, cuando tiene un rotacional distinto de cero! Entonces no necesariamente si $\oint u \cdot d\vec{r} = 0$, el campo \vec{u} es conservativo; bueno pero en muchos casos si resulta. Además utilizamos el teorema de Fubini, donde una integral doble es el producto de dos integrales.



9.2. Teorema de Green

136

- (f) $\vec{v} = (x^3 - 4y^3)\hat{a}_x + (4x^3 + 7xy^2)\hat{a}_y$, y C es la elipse $x^2 + y^2/4 = 1$.

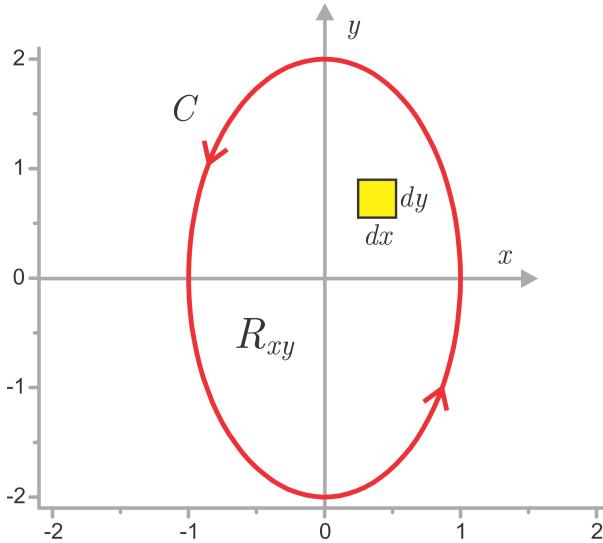


Figura 9.7: La parametrización más simple para esta área elíptica es: $x = r \cos \theta$, $y = 2r \sin \theta$, con $\theta : 0 \rightarrow 2\pi$ y $r : 0 \rightarrow 1$.

Una vez más, es claro que no cumple las condiciones de exactitud, y por lo tanto en principio la integral con bola es distinta de cero. Además porque se recorre el camino C en el sentido positivo, el diferencial de área es $dS = dx dy \hat{a}_z$, y aplicando el teorema de Green, escribimos,

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{R_{xy}} [\partial_x(4x^3 + 7xy^2) - \partial_y(x^3 - 4y^3)] dx dy = \iint_{R_{xy}} (12x^2 + 19y^2) dx dy .$$

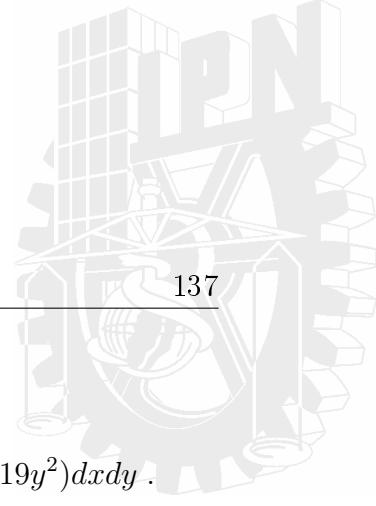
Para hacer esta integral es necesario parametrizar el área contenida en la elipse $x^2 + y^2/4 = 1$. Como ya hemos experimentado, las funciones seno y coseno se adaptan muy bien a esta ecuación. Serán necesarios dos parámetros para cubrir esta superficie, obviamente las coordenadas polares son útiles. El área contenida o encerrada en el contorno C , la describimos con la restricción

$$x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 \leq 1 ,$$

de donde proponemos que,

$$x = r \cos \theta , \quad y = 2r \sin \theta ,$$

para decir que $r \leq 1$. Es decir, los valores de los parámetros serán: $\theta : 0 \rightarrow 2\pi$ y $r : 0 \rightarrow 1$. Además tenemos que el Jacobiano de la transformación es $2r$. Sustituyendo lo anterior en la



integral, escribimos

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{R_{xy}} [\partial_x(4x^3 + 7xy^2) - \partial_y(x^3 - 4y^3)] dx dy = \iint_{R_{xy}} (12x^2 + 19y^2) dx dy .$$

$$= 24 \int_{r=0}^1 r^3 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta + 152 \int_{r=0}^1 r^3 dr \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta = 44\pi ,$$

que no es el resultado del libro $43\pi/4$. ¡Oh, idiay pue! [28], hagámoslo por otro camino. Si vamos a recorrer la orilla de la elipse, tenemos que en la parametrización anterior $r = 1$, y entonces

$$C : \begin{cases} x(t) = \cos \theta , \\ y(t) = 2 \sin \theta , \\ \theta : 0 \rightarrow 2\pi , \end{cases}$$

que al sustituir, tenemos

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = - \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^3 \theta \sin \theta d\theta + 32 \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^4 \theta d\theta + 8 \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^4 \theta d\theta + 56 \int_{\theta=0}^{2\pi} \cos^2 \theta \sin^2 \theta d\theta ,$$

$$= (96 + 24 + 56) \frac{\pi}{4} = 44\pi .$$



- (e) $\vec{v} = f(x)\hat{a}_x + g(y)\hat{a}_y$, en donde f y g son funciones cualesquiera continuamente diferenciales y C es cualquier curva simple cerrada seccionalmente suave.

Este problema lo dejamos al final de esta lista porque es claro que cumple las condiciones de exactitud, y por lo tanto la integral con bola es cero. Pero lo explicaremos con el teorema de Green. Suponemos que se recorre el camino C en el sentido positivo, el diferencial de área será $dS = dx dy \hat{a}_z$. Además como es una superficie plana, aplicamos el teorema de Green, y escribimos,

$$\oint_C \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_{R_{xy}} \left[\frac{\partial}{\partial x} g(y) - \frac{\partial}{\partial y} f(x) \right] dx dy ,$$

$$= 0 .$$

Sin novedad ¿verdad?, pero veremos en el siguiente problema que, aunque la superficie sea plana, no siempre podremos aplicar el teorema de Green.



El siguiente problema lo resolvimos en el capítulo anterior, pero ahora lo resolveremos con ayuda del teorema de “……”. Por cierto el resultado es -1 .

- (g) $\int_C (x^3 + 4y)dx + (e^{2y} - 2z)dy + zdz$, en donde C es el triángulo con vértices $P_0(1, 0, 0)$, $P_1(0, 1, 0)$ y $P_2(0, 0, 1)$ recorrido de P_1 a P_2 a P_0 .

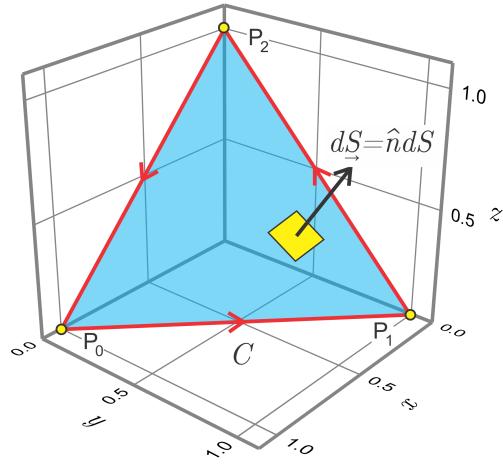
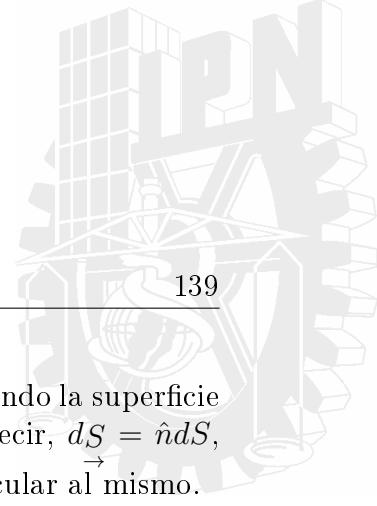


Figura 9.8: Parametrización de la curva C , recorrido de P_1 a P_2 a P_0 .

A primera vista la condición de exactitud no es válida, además de la figura (9.8) claramente la superficie es plana, pero ¿A ver aplica el teorema de Green? Considero que con alguna rotación de ejes podríamos hacerlo, pero lo más salomónico es aplicar el teorema de Stokes. Empecemos calculando las componentes del rotacional del campo asociado a la integral, $F = (x^3 + 4y, e^{2y} - 2z, z)$,

$$\begin{aligned} \left(\nabla \times \vec{F}\right)_1 &= \epsilon_{123} \partial_2 F_3 + \epsilon_{132} \partial_3 F_2, \\ &= \partial_y(z) - \partial_z(e^{2y} - 2z) = 2, \\ \left(\nabla \times \vec{F}\right)_2 &= \epsilon_{231} \partial_3 F_1 + \epsilon_{213} \partial_1 F_3, \\ &= \partial_z(x^3 + 4y) - \partial_x(z) = 0, \\ \left(\nabla \times \vec{F}\right)_3 &= \epsilon_{312} \partial_1 F_2 + \epsilon_{321} \partial_2 F_1, \\ &= \partial_x(e^{2y} - 2z) - \partial_y(x^3 + 4y) = -4. \end{aligned}$$

donde $\nabla \times \vec{F} = (2, 0, -4)$.



A continuación, necesitamos orientar la superficie. Porque estamos circulando la superficie en el sentido positivo, el diferencial de superficie es saliente al plano, es decir, $dS = \hat{n}d\vec{S}$, donde dS es el diferencial de área sobre el plano y \hat{n} es un vector perpendicular al mismo.

Como el plano está formado por los puntos P_0 , P_1 y P_2 , el vector perpendicular lo calculamos, con el producto cruz de las rectas dirigidas de los puntos $\overrightarrow{P_0P_1}$ y $\overrightarrow{P_0P_2}$, recordando que los vectores asociados a la rectas dirigidas se calculan restando el punto final del inicial, donde: $\overrightarrow{P_0P_1} = (0, 1, 0) - (1, 0, 0) = (-1, 1, 0)$, $\overrightarrow{P_0P_2} = (0, 0, 1) - (1, 0, 0) = (-1, 0, 1)$ y el producto $\overrightarrow{P_0P_1} \times \overrightarrow{P_0P_2} = (1, 1, 1)$. Por lo tanto escribimos,

$$\begin{aligned}\oint_{C'} F \cdot d\vec{r} &= \iint_S (\nabla \times F) \cdot \hat{n} dS, \\ &= \iint_S (2, 0, -4) \cdot \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} dS, \\ &= -\frac{2}{\sqrt{3}} \iint_S dS.\end{aligned}\tag{9.4}$$

Es importante resaltar, que el valor de la última integral es el área del plano triangular, que es un triángulo equilátero de lado $\ell = \sqrt{2}$, de la formula de Herón de Alejandría, tenemos que el área es $S = \sqrt{3}\ell^2/4$, al sustituir finalmente tenemos,

$$\oint_{C'} F \cdot d\vec{r} = -\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{2\sqrt{3}}{4} = -1.$$

Tuvimos un poco de suerte que el rotacional fuera constante, y que la superficie fuera plana y triangular, pero mostraremos que por medio del teorema de Gauss, podemos hacer esta misma integral sin la necesidad de calcular el vector unitario \hat{n} . Pero antes de definir el teorema de Gauss, aprendamos a calcular áreas de superficies curvas, por si llegáramos a utilizarlas.

9.3. Teorema «del foco»

Este teorema básicamente, relaciona los diferenciales de área sobre una superficie curva con el de una plana. De la misma forma que proyectamos la sombra de un objeto por medio de un foco o lámpara. Mil disculpas por bautizar este teorema, pero en los libros, Marsden-Tromba [17], Amazigo [24] y Colley [29], aunque demuestran el teorema no le otorgan nombre. Le podemos llamar de proyección también.

Para garantizar que la superficie plana o área, sea la más simple posible se escogen los planos xy , yz o xz . Por esta razón en la figura (9.9), mostramos la proyección de la superficie $z = z(x, y)$ en el plano xy , como si se hubiera colocado un foco en un punto lejano sobre eje

9.3. Teorema «del foco»

z. Sea dS el diferencial de superficie sobre la superficie curva y $dxdy$ el diferencial de área en el plano xy , entonces se cumple la relación,

$$dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy ,$$

que al integrar, tendremos el área de la superficie curva en términos de una integral en region R_{xy} o la sombra de dicha superficie, es decir,

$$S = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} dxdy . \quad (9.5)$$

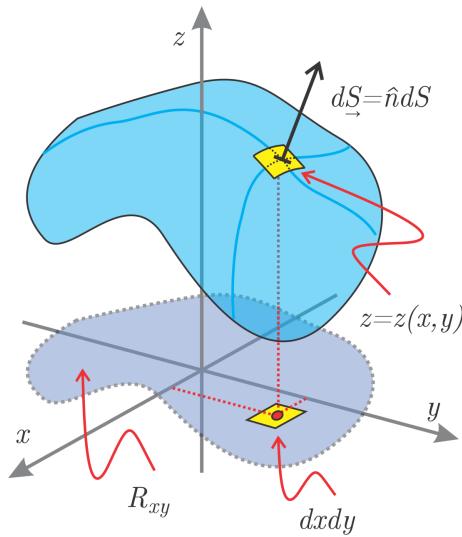


Figura 9.9: Para determinar el área de la superficie curva o sabana, se utiliza la relación entre el diferencial de la superficie curva dS , con el diferencial de área del plano xy .

Muy bien, con la relación anterior calculemos el área de la superficie de la figura (9.8). La ecuación de este plano es $x + y + z = 1$, es muy fácil verificar esta ecuación, basta con sustituir los valores de P_0 , P_1 y P_2 . De la misma tenemos que $z = 1 - x - y$, y donde $\partial_x z = -1$, $\partial_y z = -1$. Entonces el área es

$$S = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dxdy = \sqrt{3} \iint_{R_{xy}} dxdy = \frac{\sqrt{3}}{2} ,$$

donde la integral es el área del triángulo sobre el plano xy e igual a $1/2$. Es más fácil ¿No?

9.3. Teorema «del foco»

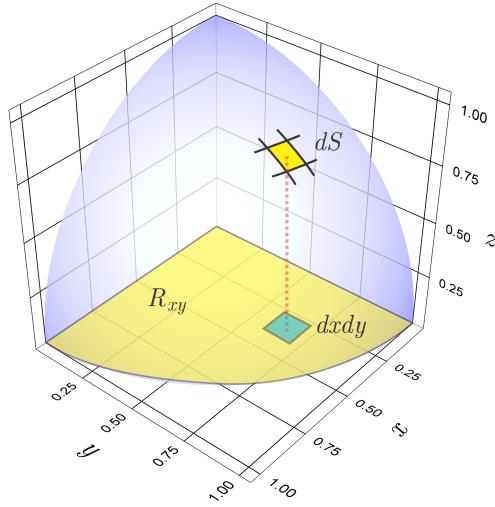


Figura 9.10: Existe una relación entre el diferencial de la superficie curva, con el diferencial de área del plano xy . De esta relación se calcula el área de la superficie $z = z(x, y)$.

Ya que vimos que es fácil, calculemos el área de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, es claro que el área de una esfera de radio R es $4\pi R^2$, pero vamos a hacerlo por medio del teorema del foco. En la figura (9.10), mostramos en el primer octante la esfera de radio 1. Si proyectamos o ponemos un foco en el eje z la sobra será la región R_{xy} . Despejando z de la ecuación de la esfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, escribimos:

$$\partial_x z = -\frac{\not{x}}{\not{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}}, \quad \partial_y z = -\frac{\not{y}}{\not{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}},$$

sustituyendo en la ecuación (9.5), tenemos

$$S = \iint_{R_{xy}} \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}} dx dy = \iint_{R_{xy}} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}. \quad (9.6)$$

Como habíamos comentado, lo más importante en integración no es la integral, sino la región de integración. En este caso R_{xy} , está definida por la “sombra” de la esfera, que es un cuarto de la tapa circular de radio 1, que obviamente la parametrizaremos en coordenadas polares, ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ y jacobiano $r dr d\theta$), entonces

$$S = \iint_{R_{xy}} \frac{dx dy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta \int_{r=0}^1 \frac{r dr}{\sqrt{1 - r^2}} = \frac{\pi}{2},$$

que al multiplicar por 8, nos da 4π que es el área de una esfera de radio 1.

9.3. Teorema «del foco»

142

Aprovechando el viaje a Tuxtla, calculemos el volumen de la esfera con una modificación del teorema del foco. Perdonando la redundancia; el cálculo del volumen es por integración del diferencial de volumen, es decir,

$$V = \iiint_{R_{xyz}} dx dy dz ,$$

donde R_{xyz} es, en este caso, la región contenida por los planos $x = y = z = 0$ y la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, como se ve en la figura (9.10). Reescribiendo la integral anterior tenemos,

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{R_{xyz}} dx dy dz , \\ &= \iint_{R_{xy}} \int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy , \\ &= \iint_{R_{xy}} \sqrt{1-x^2-y^2} dx dy , \\ &= \int_{\theta=0}^{\pi/2} d\theta \int_{r=0}^1 \sqrt{1-r^2} r dr = \frac{\pi}{6} , \end{aligned}$$

donde hemos utilizado las coordenadas polares para integrar en la región R_{xy} . Al multiplicar este resultado por 8, obtenemos el volumen de la esfera de radio 1 que es $4\pi/3$.

Tratando de generalizar lo anterior, podemos escribir el volumen como

$$V = \iiint_{R_{xyz}} dx dy dz = \iint_{R_{xy}} z(x, y) dx dy , \quad (9.7)$$

cuando la superficie este definida de $z = 0$ a $z = z(x, y)$. De la misma manera que se calcula el área bajo una curva $y = y(x)$, como $\int_c^d y(x) dx$, cuando x pertenece a la “región” o al intervalo $[c, d]$.

————— □ —————



9.4. Teorema de Gauss

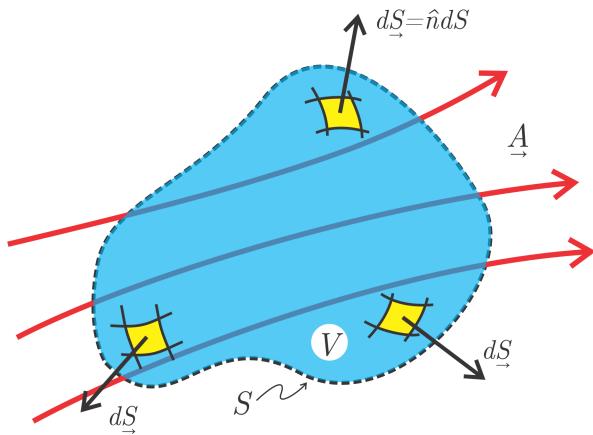


Figura 9.11: Nuestras burbujas de jabón tienen una superficie cerrada S y un volumen V . Su diferencial de superficie $d\vec{S}$ es perpendicular a la superficie.

Regresemos a ese día tan hermoso en la plaza de Tuxtla, ahora nuestras burbujas de jabón se las lleva el aire y corremos felices tras ellas, extendiendo nuestros brazos como avión mig, para alcanzarlas rápidamente. Nuevamente esta experiencia contiene la esencia del teorema de Gauss, porque la burbuja está formada de una superficie cerrada y por esta razón con un volumen bien definido. Volviendo a la realidad o hablando técnicamente, cuando un campo \vec{A} fluye por una superficie cerrada, se cumple la relación

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iiint_V (\nabla \cdot \vec{A}) dV , \quad (9.8)$$

donde el diferencial de superficie $d\vec{S}$ es perpendicular a la superficie. Es importante resaltar que nosotros sólo pedimos que la superficie sea cerrada, (en realidad para la prueba hay más condiciones cerrada-conexa [26, 30]), para definir un volumen.

Resolvamos las integrales propuesta en el ejercicio 1(a) al 1(e) de la página 246 del libro de Amazigo [24]. Esperamos con estos ejercicios hacer algunas combinaciones con el teorema de Stokes.

- 1.- Utilice el teorema de la divergencia para evaluar la integral $\iint_S \vec{u} \cdot \hat{n} d\sigma$, en donde \vec{u} y S son como a continuación se indica y \hat{n} es la normal unitaria exterior a S .

9.4. Teorema de Gauss

144

- (a) $\vec{u} = \left(\frac{1}{3}xy - x^2 \right) \hat{a}_x - \frac{1}{6}y^2 \hat{a}_y + (2x + 2xz) \hat{a}_z$, y S es la superficie que consiste en el disco $y = 0, x^2 + z^2 \leq 1$ y la porción de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1, y \geq 0$.

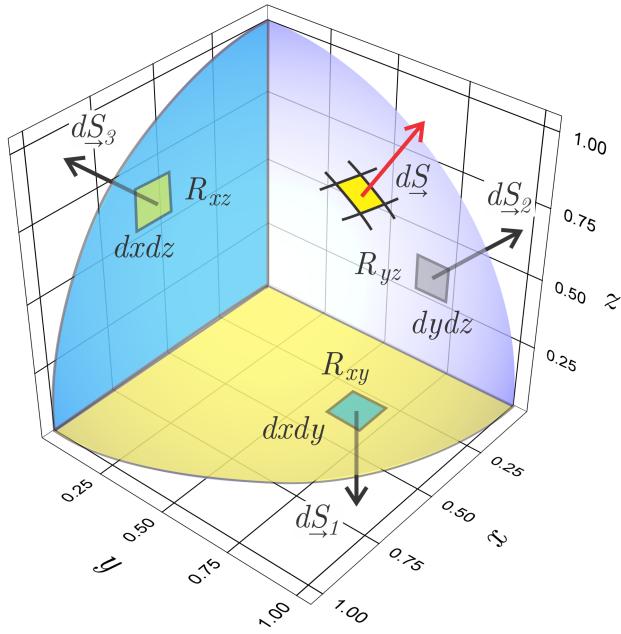


Figura 9.12: Superficie cerrada, compuesta por cuatro superficies con diferenciales. Esfera $r = 1$ con $d\vec{S} = dS \hat{a}_r$, plano xy con $d\vec{S}_1 = -dxdy \hat{a}_z$, plano yz con $d\vec{S}_2 = -dydz \hat{a}_x$ y plano xz con $d\vec{S}_3 = -dxdz \hat{a}_y$.

En la pregunta entendemos que se desea calcular, $\iint_S \vec{u} \cdot \hat{n} d\sigma$, que es sobre una superficie cerrada; entonces cumple con requisitos de la ley de Gauss. Si consideramos que $d\vec{S} = \hat{n} d\sigma$, sustituyendo nuestro campo \vec{u} , en la ecuación (9.8), tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} &= \iiint_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV, \\ &= \iiint_V \left(\frac{1}{3}y - 2x - \frac{1}{3}y + 2x \right) dV = 0, \end{aligned}$$

pues bastante sencillo ¿No?

□

Hagamos algunos “experimentos” con este problema, por ejemplo, suponga que deseamos calcular en flujo del campo \vec{u} sobre la superficie curva de la figura (9.12). Es decir $\iint_S \vec{u} \cdot \hat{n} d\sigma$.

Esta integral ya no es cerrada, y no podemos aplicar el teorema de Gauss, tendríamos que hacerlo directamente, es decir, calcular un vector unitario \hat{n} perpendicular a esta superficie, luego hacer el producto punto con el campo \vec{u} y después integrar sobre una superficie curva con el teorema del foco, ¡Ah, qué complicado!

Pero tenemos otra alternativa; si nuestra integral no es cerrada, ¡Pues la cerramos! Obviamente con superficies planas, para no buscar problemas. ¿Qué mejores tapas, que las mostradas en la figura (9.12)? Entonces escribimos,

$$\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} \vec{u} \cdot d\vec{S}_3 = 0 ,$$

de donde

$$\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = - \iint_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S}_1 - \iint_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S}_2 - \iint_{S_3} \vec{u} \cdot d\vec{S}_3 . \quad (9.9)$$

Para la integral en la superficie 1, o sobre el plano xy , tenemos que; $z = 0$, $d\vec{S}_1 = -dxdy \hat{a}_z$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S}_1 &= - \iint_{R_{xy}} \vec{u} \cdot \hat{a}_z dxdy , \\ &= - \iint_{R_{xy}} (2x + 2xz) \vec{0} dxdy , \\ &= -2 \int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos \theta d\theta \int_{r=0}^1 r^2 dr = -\frac{2}{3} , \end{aligned}$$

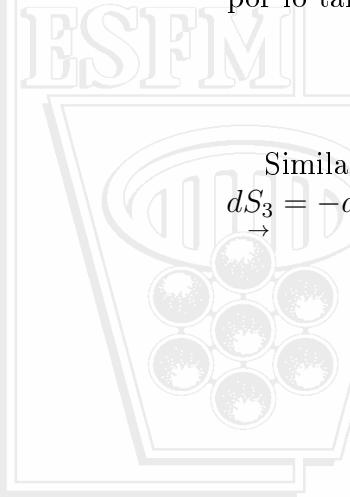
donde utilizamos las coordenadas polares sobre el plano xy ($z = 0$), con $x = r \cos \theta$ y el jacobiano $rdrd\theta$, ver la figura (9.12), para los límites de integración.

Para la integral en la superficie 2, o sobre el plano zy , tenemos que; $x = 0$, $d\vec{S}_2 = -dydz \hat{a}_x$, por lo tanto

$$\iint_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S}_2 = - \iint_{R_{zy}} \vec{u} \cdot \hat{a}_x dzdy = - \iint_{R_{zy}} \left(\frac{1}{3} \vec{x} \vec{y}^0 - \vec{x}^2 \vec{0} \right) dzdy = 0 .$$

Similarmente, para la integral en la superficie 3, o sobre el plano zx , tenemos que; $y = 0$, $d\vec{S}_3 = -dxdz \hat{a}_y$, por lo tanto

$$\iint_{S_3} \vec{u} \cdot d\vec{S}_3 = - \iint_{R_{zx}} \vec{u} \cdot \hat{a}_y dzdx = \iint_{R_{zx}} \left(\frac{1}{3} \vec{y}^0 - \vec{y}^2 \vec{0} \right) dzdx = 0 .$$



9.4. Teorema de Gauss

146

Sustituyendo en la ecuación (9.11), finalmente escribimos

$$\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \frac{2}{3}. \quad (9.10)$$

No dudamos de nuestra destreza, algún día lo haremos con el teorema del foco, lo combatiremos lápiz a lápiz.



- (b) $\vec{u} = (xy, zy, xy)$, y S es la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, junto con el disco $z = 0$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

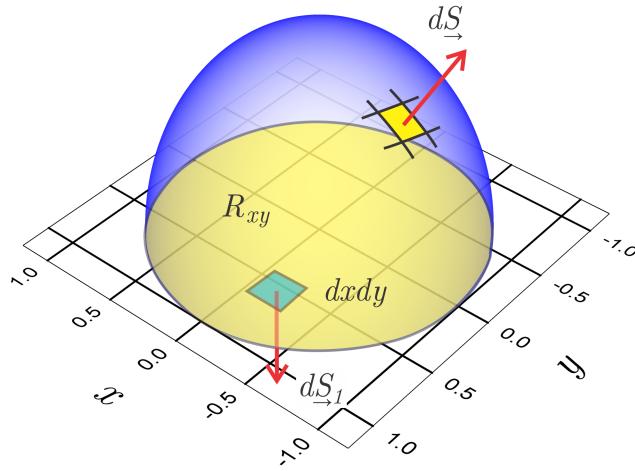
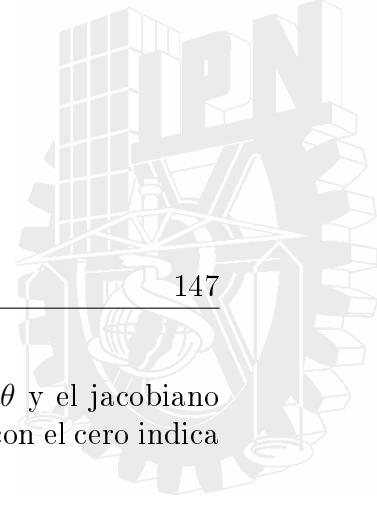


Figura 9.13: Superficie cerrada, compuesta por dos superficies. Semiesfera $r = 1$ con $dS = dS \hat{a}_r$ y tapa en el plano xy con $dS_1 = -dx dy \hat{a}_z$.

Nuevamente, en la pregunta entendemos que se desea calcular, $\iint_S \vec{u} \cdot \hat{n} d\sigma$, que es sobre una superficie cerrada; entonces cumple con requisitos de la ley de Gauss. Si consideramos que $dS = \hat{n} d\sigma$, sustituyendo nuestro campo \vec{u} , en la ecuación (9.8), tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} &= \iiint_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV, \\ &= \iiint_V (y + z) dV, \\ &= \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^1 (r \sin \theta \cos \phi + r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{\pi}{4}, \end{aligned}$$



donde utilizamos las coordenadas esféricas, con $y = r \sin \theta \cos \phi$, $z = r \cos \theta$ y el jacobiano $r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$, ver la figura (9.13), para los límites de integración. La flecha con el cero indica que una integral es cero para ese término. Otra vez, bastante sencillo ¡No?

————— □ —————

Nuevamente vamos a jugar con este problema, por ejemplo, suponga que deseamos calcular en flujo del campo \vec{u} sobre la semiesfera de la figura (9.13), o la integral $\iint_S \vec{u} \cdot \hat{n} dS$. Esta integral ya no es cerrada, y no podemos aplicar el teorema de Gauss, tendríamos que hacerlo directamente, aplicando la rutina antes descrita; calcular un vector unitario \hat{n} perpendicular a esta superficie, luego hacer el producto punto con el campo \vec{u} y después integrar sobre una superficie curva con el teorema del foco. Bien, hagámoslo. El vector unitario perpendicular, lo calculamos por medio del gradiente de $\phi = x^2 + y^2 + z^2 - 1$, de donde

$$\hat{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$

entonces,

$$\vec{u} \cdot \hat{n} dS = \frac{x^2 y + z y^2 + x y z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dS ,$$

que al sustituir en la ecuación (9.6), escribimos

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{u} \cdot \hat{n} dS &= \iint_{R_{xy}} \frac{x^2 y + z y^2 + x y z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} dx dy , \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta + \sqrt{1 - r^2} r^2 \sin^2 \theta + \sqrt{1 - r^2} r^2 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{1 - r^2}} r dr d\theta , \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{r=0}^1 r^3 dr = \frac{\pi}{4} , \end{aligned}$$

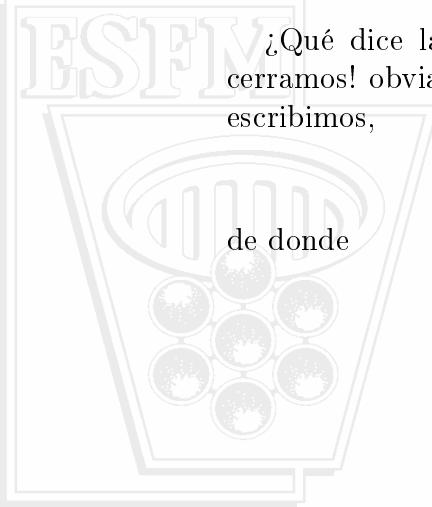
donde hemos usado que $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, ademas porque R_{xy} es una región circular, el uso de las coordenadas polares.

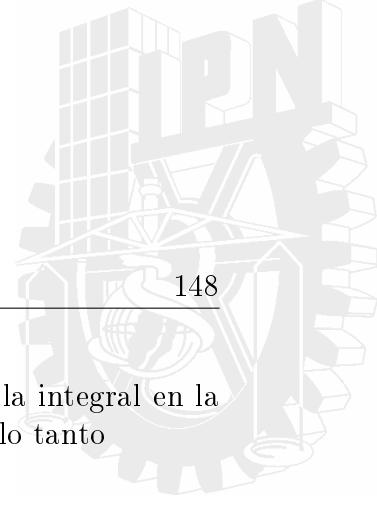
¿Qué dice la otra alternativa? ¡Ah, claro! Si nuestra integral no es cerrada, ¡Pues la cerramos! obviamente con la tapa en el plano xy , como se ve en la figura (9.13) Entonces escribimos,

$$\iint_S \vec{u} \cdot dS = \iint_S \vec{u} \cdot dS + \iint_{S_1} \vec{u} \cdot dS_1 = \frac{\pi}{4} ,$$

de donde

$$\iint_{S_1} \vec{u} \cdot dS_1 = \frac{\pi}{4} - \iint_S \vec{u} \cdot dS = 0 , \quad (9.11)$$





9.4. Teorema de Gauss

¡Ah! Yo no tengo muy buenos ojos para ver esto sin integrar, amigo. Para la integral en la superficie 1, o sobre el plano xy , tenemos que; $z = 0$, $dS_1 = -dxdy \hat{a}_z$, por lo tanto

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S}_1 &= - \iint_{R_{xy}} \vec{u} \cdot \hat{a}_z dxdy, \\ &= - \iint_{R_{xy}} xy dxdy, \\ &= - \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_{r=0}^1 r^3 dr = 0, \end{aligned}$$

donde utilizamos las coordenadas polares sobre el plano xy , ver la figura (9.13), para los límites de integración.



- (c) $\vec{u} = (xy, zy, xy)$, y S es la superficie del “cono de helado” dado por $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$, y $(z+1)^2 = x^2 + y^2$, $z \leq 0$.

Una vez más, en la pregunta entendemos que se desea calcular, $\iint_S \vec{u} \cdot \hat{n} d\sigma$, que es sobre una superficie cerrada el helado más el cono; entonces cumple con requisitos de la ley de Gauss. Si consideramos que $dS = \hat{n} d\sigma$, sustituyendo nuestro campo \vec{u} , en la ecuación (9.8), tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} &= \iiint_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV, \\ &= \iiint_V (y + z) dV, \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=-1+r}^{\sqrt{1-r^2}} (r \sin \theta \hat{a}_r + z) r dz dr d\theta = \frac{\pi}{6}, \end{aligned}$$

donde utilizamos las coordenadas cilíndricas, ver la figura (9.14), para los límites de integración. La flecha con el cero indica que una integral es cero para ese término. Otra vez, bastante sencillo ¡No?



Nuevamente vamos a jugar con este problema, supongamos que deseamos calcular en flujo del campo \vec{u} sobre un cono con helado, ver la figura (9.14), o la integral $\iint_S \vec{u} \cdot \hat{n} dS$. Esta

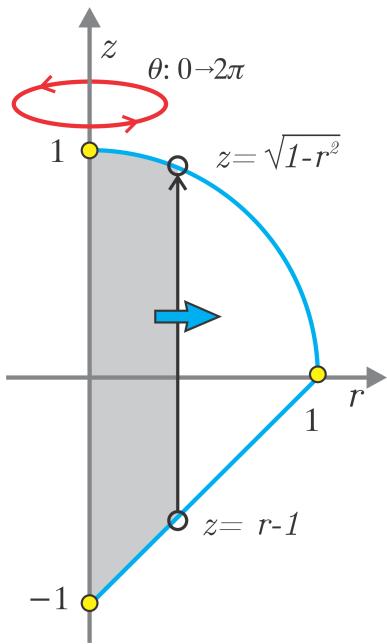


Figura 9.14: Parametrización de la superficie de cono con helado en coordenadas cilíndricas, compuesta por dos superficies; el helado es la semiesfera $z = \sqrt{1 - r^2}$ y el cono $z = r - 1$. Esta superficie al girar genera el cono con el helado. El giro lo indicamos con la aureola $\theta : 0 \rightarrow 2\pi$.

integral es cerrada, y ya aplicamos el teorema de Gauss y sabemos que su valor es $\pi/6$.

Como se ve en la figura (9.14), la superficie cerrada esta compuesta de una semiesfera, el helado, y un cono. Entonces escribimos,

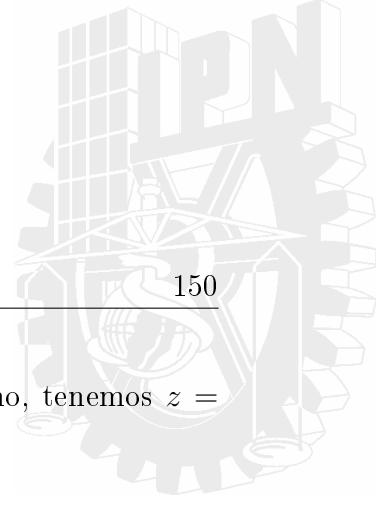
$$\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iint_{Esf.} \vec{u} \cdot d\vec{S} + \iint_{Cono} \vec{u} \cdot d\vec{S}_1 . \quad (9.12)$$

La primera integral sobre la semiesfera, ya la resolvimos en el problema anterior y su valor es $\pi/4$. La integral sobre el cono la tendríamos que hacer directamente. Entonces, calculamos un vector unitario \hat{n} perpendicular al cono, luego hacer el producto punto con el campo \vec{u} y después integrar sobre la superficie del cono con el teorema del foco. La sombra o región de integración R_{xy} , es igual para ambas superficies. Bien, hagámoslo. El vector unitario perpendicular, lo calculamos por medio del gradiente de $\phi = x^2 + y^2 - (z + 1)^2$, de donde

$$\hat{n} = \frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} = \frac{(x, y, -(z + 1))}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 1)^2}} ,$$

entonces,

$$\vec{u} \cdot \hat{n} dS = \frac{x^2 y + z y^2 - x y(z + 1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 1)^2}} dS .$$



9.4. Teorema de Gauss

150

Nos hace falta calcular el dS en términos de $dxdy$. De la ecuación del cono, tenemos $z = -1 + \sqrt{x^2 + y^2}$, de donde

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

que al sustituir en la ecuación (9.5), tenemos que $dS = \sqrt{2}dxdy$ y escribimos

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{u} \cdot \hat{n} dS &= \sqrt{2} \iint_{R_{xy}} \frac{x^2 y + z y^2 - xy(z+1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z+1)^2}} dxdy, \\ &= \sqrt{2} \iint_{R_{xy}} \frac{x^2 y + (-1 + \sqrt{x^2 + y^2})y^2 - xy\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (\sqrt{x^2 + y^2})^2}} dxdy, \\ &= \sqrt{2} \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \frac{r^3 \cos^2 \theta \sin \theta + (-1+r)r^2 \sin^2 \theta - r^3 \cos \theta \sin \theta}{\sqrt{2}r} r dr d\theta, \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \sin^2 \theta d\theta \int_{r=0}^1 (r-1)r^2 dr = -\frac{\pi}{12}, \end{aligned}$$

donde hemos usado que $z = -1 + r$, ademas porque R_{xy} es una región circular, el uso de las coordenadas polares. Sustituyendo estos valores en la ecuación (9.12), y finalmente escribimos,

$$\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6},$$

como lo habíamos encontrado.



- (e) $\vec{u} = (-x^2, 3yz, 5z)$, y S es la superficie acotada por el cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y los planos $z = \pm 1$.

Una vez más, en la pregunta entendemos que se desea calcular, $\iint_S \vec{u} \cdot \hat{n} d\sigma$, que es sobre una superficie cerrada, el cilindro más las dos tapas; entonces cumple con requisitos de la ley de Gauss. Si consideramos que $dS = \hat{n} d\sigma$, sustituyendo nuestro campo \vec{u} , en la ecuación (9.8), tenemos

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} &= \iiint_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV, \\ &= \iiint_V (-2x + 3z + 5) dV, \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{r=0}^1 \int_{z=-1}^1 (-2r \cos \theta + 3z + 5) r dz dr d\theta = 10\pi, \end{aligned}$$

claramente esta integral es 5 veces el volumen del cilindro. A simple vista ¿Cuánto vale el flujo sobre el cilindro? ¡Sin duda es cero! Sí; vamos a ver.

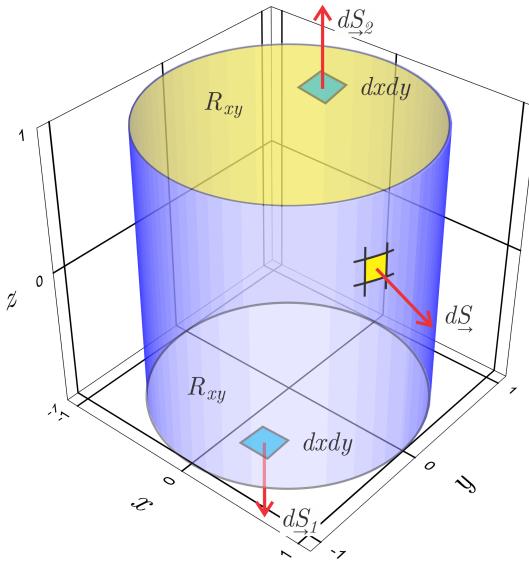


Figura 9.15: Superficie cerrada, compuesta por tres superficies. Cilindro $r = 1$ con $dS = dS\hat{a}_r$ y dos tapas en los planos $z = \pm 1$ con diferenciales $dS_2 = dx dy \hat{a}_z$ y $dS_1 = dx dy \hat{a}_z$, respectivamente.

Claramente escribimos

$$\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S}_2 = 10\pi ,$$

de la figura (9.15), tenemos que solamente la componente z del campo \vec{u} será necesaria para el calculo del flujo, porque los diferenciales de las tapas están en las direcciones $\pm \hat{a}_z$, entonces

$$\begin{aligned} \iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} &= 10\pi - \iint_{S_1} \vec{u} \cdot d\vec{S}_1 - \iint_{S_2} \vec{u} \cdot d\vec{S}_2 , \\ &= 10\pi - \iint_{S_1:z=-1} (-5z) dS_1 - \iint_{S_2:z=1} 5z dS_2 , \\ &= 10\pi - 5 \iint_{S_1} dS_1 - 5 \iint_{S_2} dS_2 = 10\pi - 10\pi = 0 , \end{aligned}$$

donde hemos considerado que el “apellido” de la superficie S_1 es $z = -1$, similarmente que en la superficie S_2 , $z = 1$.



- (d) $\vec{u} = (2x + y^2 - 6y + 9)\hat{a}_x - (z \exp(z^2) - x - 2)\hat{a}_y + x \cos(y - 1)\hat{a}_z$, y S es la esfera $(x + 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 25$.

De nuevo, dejamos este problema al final porque es claro que cumple las condiciones para aplicar el teorema de Gauss. Si quisieramos hacerlo directamente por el teorema del foco, sería muy complicado por el término z del campo, que genera un $\cos(r \sin \theta - 3)$ que para integrar espanta más que “el cadejo” [28]. A simple vista es 2 veces el volumen de una esfera de radio 5, vamos a ver

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{u} \cdot d\vec{S} &= \iiint_V (\nabla \cdot \vec{u}) dV , \\ &= \iiint_V (2) dV = \frac{1000}{3} \pi .\end{aligned}$$

Sin novedad ¿verdad?, pero nos hace falta un problema que combine los teoremas de Stokes y Gauss.



El siguiente problema lo resolvimos en el capítulo anterior, pero ahora lo resolveremos con ayuda del teorema de Gauss, el resultado es -1 .

- (g) $\int_C (x^3 + 4y)dx + (e^{2y} - 2z)dy + zdz$, en donde C es el triángulo con vértices $P_0(1, 0, 0)$, $P_1(0, 1, 0)$ y $P_2(0, 0, 1)$ recorrido de P_1 a P_2 a P_0 .

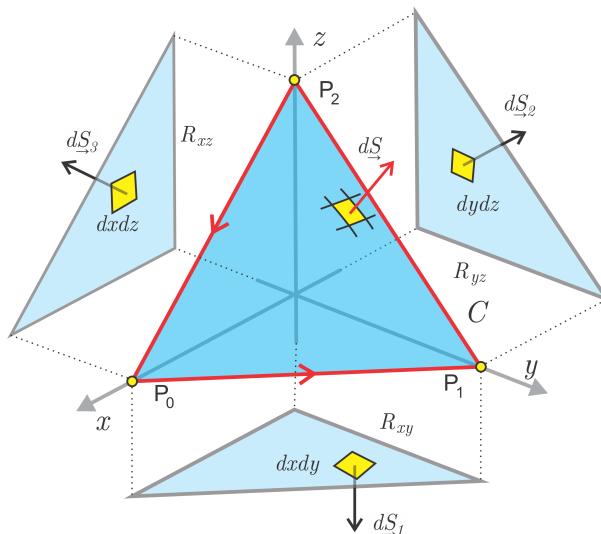


Figura 9.16: La superficie contenida en la curva C , recorrido de P_1 a P_2 a P_0 , no es cerrada, pero la podemos cerrar con las tapas triangulares de área $1/2$.

Como lo planteamos anteriormente, tenemos que aplicar el teorema de Stokes, para esto calculamos el rotacional del campo asociado a la integral, $F = (x^3 + 4y, e^{2y} - 2z, z)$, que es $\nabla \times F = (2, 0, -4)$. A continuación, orientamos la superficie con un $dS = \hat{n}d\vec{S}$, donde dS es el diferencial de área sobre el plano y \hat{n} es un vector perpendicular al mismo. Por lo tanto escribimos,

$$\oint_{C \rightarrow} F \cdot d\vec{r} = \iint_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{S} . \quad (9.13)$$

Como la superficie S no es cerrada, debemos cerrarla si deseamos aplicar el teorema de Gauss. Considerando que la mejor manera de hacer esto es por medio de tapas planas triangulares como lo muestra la figura (10.1)

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{S} &= \iint_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{S} + \iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot d\vec{S}_1 + \\ &+ \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot d\vec{S}_2 + \iint_{S_3} (\nabla \times F) \cdot d\vec{S}_3 = \iiint_V \nabla \cdot (\nabla \times F) dV = 0 , \end{aligned}$$

de donde

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times F) \cdot d\vec{S} &= - \iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot d\vec{S}_1 - \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot d\vec{S}_2 - \iint_{S_3} (\nabla \times F) \cdot d\vec{S}_3 , \\ \oint_{C \rightarrow} F \cdot d\vec{r} &= -(4) \iint_{R_{xy}} dx dy - (0) \iint_{R_{yz}} dy dz - (-2) \iint_{R_{xz}} dx dz , \\ \oint_{C \rightarrow} F \cdot d\vec{r} &= -\frac{4}{2} + \frac{2}{2} = -1 , \end{aligned}$$

donde hemos utilizado la ecuación (9.13).



Disfrutemos este parque que es un punto de reunión y entretenimiento familiar, y gozemos de un pozol blanco, tamales y antojitos que se venden en los alrededores. Además no dejamos de estremecernos al escuchar el instrumento musical que más identifica a Chiapas; la marimba.

10

Generalizaciones

Como mencionamos en un principio, el concepto de operador permite generalizar algunas operaciones vectoriales, particularmente en las integrales se tiene la costumbre de escribir el diferencial al final de la misma. Esta costumbre es muy limitante, para visualizar a la integral como un operador, en este capítulo generalizaremos los teoremas integrales de Gauss y Stokes escribiéndolos como operadores y para terminar el curso, daremos un panorama general de la teoría electromagnética para resaltar la importancia de las operaciones vectoriales.

10.1. Teoremas del conejo

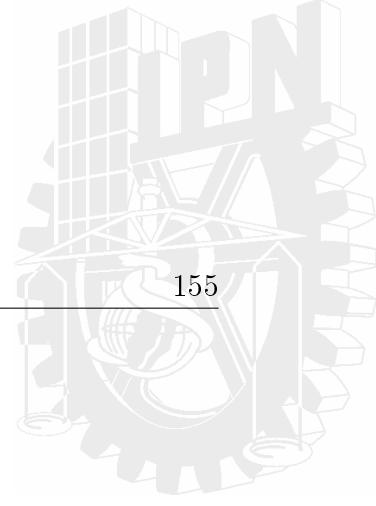
Los teoremas de Gauss y Stokes son las versiones “comerciales” de otros teoremas más generales, que llamaremos teoremas del conejo. Este conejo es una función arbitraria, sobre la cual actúa nuestro operador integral, en particular cuando este conejo es la componente de un vector, se recuperan los teoremas conocidos de Gauss y Stokes.

Considerando el teorema de Gauss, escribimos:

$$\begin{aligned}\oint_S dS \cdot \vec{A} &= \iiint_V dV \nabla \cdot \vec{A}, \\ \oint_S dS_\ell A_\ell &= \iiint_V dV \partial_\ell A_\ell,\end{aligned}$$

Como A_ℓ es una componente arbitraria, podemos reemplazarla por cualquier cantidad, que puede ser el conejo mexica, y lo llamaremos teorema del conejo I,

$$\oint_S dS_\ell \text{conejo} = \iiint_V dV \partial_\ell \text{conejo}, \quad (10.1)$$



10.1. Teoremas del conejo

155

Similarmente utilizando el teorema de Stokes, escribimos

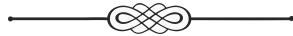
$$\oint_C \vec{dr} \cdot \vec{A} = \iint_S \vec{dS} \cdot (\nabla \times \vec{A}) ,$$

$$\oint_C dr_\ell A_\ell = \iint_S dS_m \in_{mn\ell} \partial_n A_\ell ,$$

nuevamente como A_ℓ es una componente arbitraria, podemos reemplazarla por cualquier cantidad, que puede ser el conejo Mexica, y lo llamaremos teorema del conejo II,

$$\oint_C dr_\ell \text{conejo} = \iint_S dS_m \in_{mn\ell} \partial_n \text{conejo} , \quad (10.2)$$

De los teoremas anteriores, cuando $\text{conejo} = A_\ell$ recuperamos los teoremas de Gauss y Stokes.



Para practicar, resolvamos las integrales propuesta en el ejercicio 59 de la página 133 del libro de Schaum [31]. Pruebe que:

$$\iint_S r^5 \hat{n} dS = \iiint_V 5r^3 r dV .$$

Directamente no podemos aplicar el teorema de Gauss. Pero comparando nuestra notación con la del Schaum, notamos que $\hat{n} dS = dS \rightarrow$, y escribimos

$$\left[\iint_S r^5 dS \right]_\ell = \iint_S dS_\ell r^5 ,$$

que al comparar con el teorema del conejo I (ecuación (10.1)), vemos que $\text{conejo} = r^5$ y por lo tanto escribimos directamente

$$\begin{aligned} \left[\iint_S r^5 dS \right]_\ell &= \iint_S dS_\ell r^5 , \\ &= \iiint_V dV \partial_\ell r^5 = \iiint_V dV 5r^4 \frac{r_\ell}{r} , \\ &= \left[\iiint_V dV 5r^3 r \right]_\ell , \end{aligned}$$

de donde obtenemos el resultado

$$\iint_S r^5 \hat{n} dS = \iiint_V 5r^3 r dV .$$



10.1. Teoremas del conejo

————— □ —————

Consideremos ahora, el ejercicio 60 de la página 133 del libro de Schaum [31]. Pruebe que:

$$\iint_S \hat{n} dS = 0 .$$

Comparando nuestra notación con la del Schaum, notamos que $\hat{n} dS = dS_\ell$, y escribimos

$$\left[\iint_S \vec{dS} \right]_\ell = \iint_S dS_\ell ,$$

nuevamente, al comparar con el teorema del conejo I (ecuación (10.1)), vemos que $\vec{\epsilon} = 1$ y por lo tanto escribimos directamente

$$\left[\iint_S \vec{dS} \right]_\ell = \iint_S dS_\ell = \iiint_V dV \partial_\ell(1) = 0 ,$$

de donde obtenemos el resultado.

————— □ —————

Consideremos ahora las integral propuesta en el ejercicio 62 de la página 133 del libro de Schaum [31]. Pruebe que:

$$\iint_S \vec{r} \times \vec{dS} = 0 .$$

Comparando la integral con el teorema del conejo I, escribimos

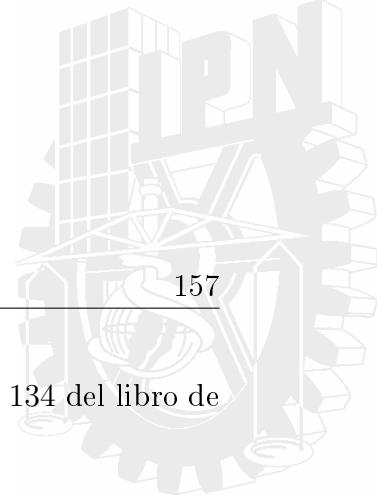
$$\left[\iint_S \vec{r} \times \vec{dS} \right]_\ell = \iint_S dS_n \in_{\ell mn} r_m ,$$

de donde $\vec{\epsilon} = \in_{\ell mn} r_m$ y por lo tanto escribimos directamente

$$\begin{aligned} \left[\iint_S \vec{r} \times \vec{dS} \right]_\ell &= \iint_S dS_n \in_{\ell mn} r_m , \\ &= \iiint_V dV \partial_n \in_{\ell mn} r_m = - \iiint_V dV \in_{\ell nm} \partial_n r_m , \\ &= - \left[\iiint_V dV \nabla \cancel{\times} \vec{r}^0 \right]_\ell = 0 . \end{aligned}$$

————— □ —————





Consideremos ahora la integral propuesta en el ejercicio 69 de la página 134 del libro de Schaum [31]. Pruebe que:

$$\oint_C \phi d\vec{r} = \iint_S \vec{dS} \times \nabla \phi .$$

Comparando la integral con el teorema del conejo II (ecuación (10.2)), escribimos

$$\left[\oint_C \phi d\vec{r} \right]_n = \oint_C dr_n \phi ,$$

de donde $\oint_C = \phi$ y por lo tanto escribimos directamente

$$\begin{aligned} \left[\oint_C \phi d\vec{r} \right]_n &= \oint_C dr_n \phi , \\ &= \iint_S \vec{dS}_\ell \in_{\ell mn} \partial_m \phi , \\ &= \left[\iint_S \vec{dS} \times \nabla \phi \right]_n , \end{aligned}$$

de donde concluimos

$$\oint_C \phi d\vec{r} = \iint_S \vec{dS} \times \nabla \phi .$$

Finalmente, consideremos ahora la integral propuesta en el ejercicio 61 de la página 133 del libro de Schaum [31]. Pruebe que:

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{dS} .$$

Iniciemos con la ley de Gauss,

$$\iint_S A \cdot \vec{dS} = \iiint_V \nabla \cdot A dV ,$$

si consideramos $A = \psi \nabla \phi$, donde ψ y ϕ son dos campos escalares. Si utilizamos la relación general (5.39), escribimos la primera identidad de Green como:

$$\iint_S \psi \nabla \phi \cdot \vec{dS} = \iiint_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \psi) dV , \quad (10.3)$$

de manera similar, intercambiando los campos ψ y ϕ , escribimos

$$\iint_S \phi \nabla \psi \cdot \vec{dS} = \iiint_V (\phi \nabla^2 \psi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dV .$$

Restando las ecuaciones anteriores, llegamos a la segunda identidad de Green, dada por,

$$\iiint_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \iint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{dS} . \quad (10.4)$$



10.2. Solución a la ecuación de Poisson

El problema electrostático es sin duda, la poderosa manifestación de la teoría más perfecta de la física, la teoría electromagnética. Sin ninguna exageración, el concepto de carga eléctrica está tan arraigado en nuestras mentes que es muy sencillo entender que dos cargas con signos contrarios se atraen y con el mismo signo se repelen. Además, desde la escuela secundaria nos enseñaron la solución a la teoría del potencial $\phi = q/r$, o la versión conocida como ley de Coulomb donde la fuerza era proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

Aunque la explicación física de la repulsión de cargas del mismo signo no es matemáticamente un problema sencillo de explicar, sin ayuda de la electrodinámica cuántica [9], si podemos con lo aprendido anteriormente formalizar nuestra teoría electromagnética con la solución general al problema electrostático y con ello motivarnos a estudiar sus consecuencias en nuestros cursos de física.

La parte central de la teoría electromagnética, es determinar los campos vectoriales, el campo eléctrico o el campo magnético, y para determinar estos campos la condición suficiente es el conocimiento de su divergencia y rotacional, como lo indica el teorema de Helmholtz,

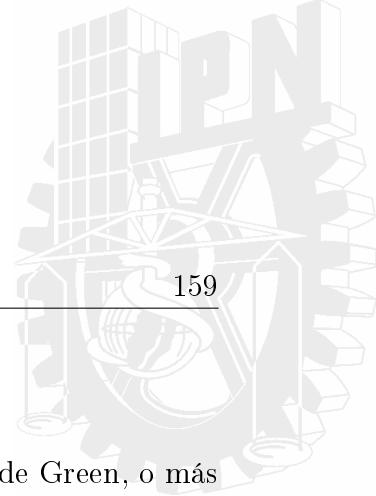
Teorema 2. Teorema de Helmholtz. *La condición suficiente para determinar un campo vectorial en todo el espacio, es conocer su divergencia y su rotacional.*

Por esta razón las ecuaciones de Maxwell son cuatro, dos ecuaciones con divergencia y dos con rotacional para los campos eléctrico y magnético.

En electrostática, es necesario determinar el campo eléctrico \vec{E} , y por el teorema de Helmholtz, para que este campo quede “bien definido” es necesario conocer su divergencia y rotacional, de tal manera que dibujamos el siguiente esquema, donde al combinar estas relaciones llegamos a la ecuación de Poisson $\nabla^2\phi = -4\pi\rho$.

$$\begin{array}{c}
 \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\
 \nabla \times \vec{E} = 0 \\
 \hline
 \vec{E} = -\nabla\phi
 \end{array}
 \quad
 \boxed{\nabla^2\phi = -4\pi\rho}$$

Donde hemos considerado que el campo eléctrico \vec{E} es conservativo, y por lo tanto existe un potencial ϕ , tal que $\vec{E} = -\nabla\phi$. Por otra parte, estas ecuaciones nos dicen que la fuente de campo eléctrico son las densidades de carga ρ y que el campo producido es conservativo.



Como $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$, llegamos al la ecuación de Poisson.

Para la solución a la ecuación de Poisson, utilizaremos tercera identidad de Green, o más precisamente la función de Green para el espacio, definida por

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}'), \quad (10.5)$$

donde $\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$, es la función de Green para el espacio [4, 12]. Observamos también, que aparece la delta de Dirac, que como siempre hará la magia. Es importante observar que nuevamente aparecen los vectores \vec{r} y \vec{r}' , que como explicamos en la sección 6.3, describen el vector donde deseamos calcular el campo y en este caso la variable de integración, respectivamente.

Haremos uso de la segunda identidad de Green (10.4), pero en la variable de integración r' , que se escribe como

$$\iiint_V [\phi(r') \nabla'^2 \psi(r') - \psi(r') \nabla'^2 \phi(r')] dV' = \oint_S [\phi(r') \nabla' \psi(r') - \psi(r') \nabla' \phi(r')] \cdot d\vec{S}'. \quad (10.6)$$

La ecuación de Poisson que vamos a resolver, es una ecuación diferencial con valores a la frontera [27], por lo cual será necesario involucrarla en el cálculo. Si consideramos

$$\psi(r') = \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}, \quad (10.7)$$

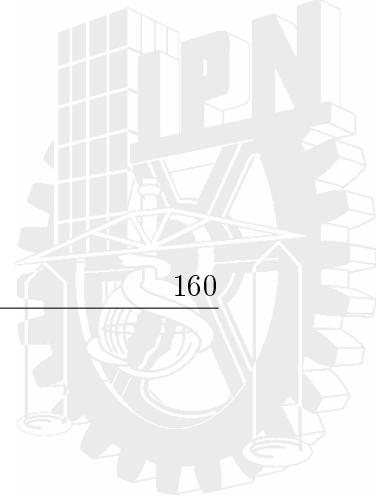
el lado derecho de la ecuación (10.6) será cero.

Esto es muy fácil de ver, ya que este lado derecho tiene una integral de superficie, y el secreto para resolver estas integrales es evaluar el integrando o campos en dicha superficie. Si consideramos que esta superficie es la frontera, y además consideramos que se encuentra en el infinito, los campos y sus derivadas de este lado derecho, decaerán más rápidamente que $1/r'^2$, y porque el diferencial de superficie varía como r'^2 , en el límite le “ganará” el integrando, haciendo tender a cero la integral.

Entonces escribimos la ecuación (10.6), como

$$\iiint_V \phi(r') \nabla'^2 \psi(r') dV' = \iiint_V \psi(r') \nabla'^2 \phi(r') dV'. \quad (10.8)$$

Todo el “juego” matemático de la teoría electromagnética es: formula, sustitución y resultado. Pero debemos ser cuidadosos en las sustituciones, y no confundir r con r' , por ejemplo,



de la ecuación de Poisson definida en la variable r

$$\nabla^2 \phi(r) = -4\pi\rho(r) ,$$

podemos cambiarla a la variable r' , como

$$\nabla'^2 \phi(r') = -4\pi\rho(r') . \quad (10.9)$$

Similarmente, es directo de la ecuación (10.5), que

$$\nabla'^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') . \quad (10.10)$$

¡Pues, vamos a Jugar! Si sustituimos lo anterior en la ecuación (10.8), escribimos

$$\begin{aligned} \iiint_V \phi(r') \nabla'^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] dV' &= \iiint_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \nabla'^2 \phi(r') dV' , \\ -4\pi \iiint_V \phi(r') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' &= -4\pi \iiint_V \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' , \\ \phi(r) &= \iiint_V \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' , \end{aligned}$$

donde hemos utilizado, el hecho que

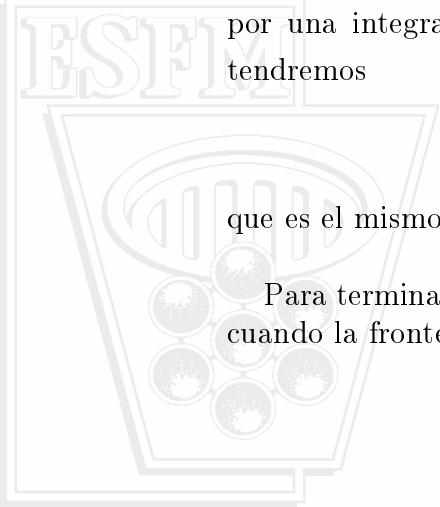
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x') \delta(x - x') dx' = \phi(x) .$$

Esta ecuación, es la misma que nos enseñaron en la secundaria, pero ahora “maquillada” por una integral. ¿Por qué no me creen? Suponga que $\rho(r') = q\delta(\vec{r}' - 0)$, sustituyendo tendremos

$$\phi(r) = \iiint_V \frac{q\delta(\vec{r}' - 0)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{q}{r} ,$$

que es el mismo resultado conocido desde nuestros inicios en el mundo de la física.

Para terminar el curso, mostramos un mapa mental de la solución a la ecuación de Poisson, cuando las fronteras están alejadas como:



10.2. Solución a la ecuación de Poisson

161

$\psi(r') \doteq$ Función de Green

$$\nabla^2 \left[\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = -4\pi\delta(\vec{r} - \vec{r}') \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x') \delta(x - x') dx' = \phi(x)$$

$$\nabla^2 \phi = -4\pi\rho$$

$$\iiint_V [\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi] dV = \oint_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \vec{dS} = 0$$

$$\phi(r) = \iiint_V \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{dS} = 4\pi Q_{ENC}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho$$

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi$$

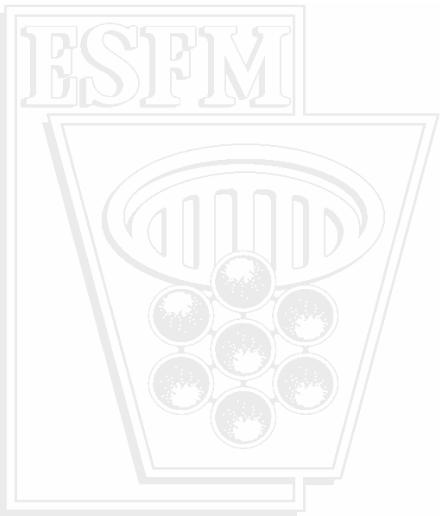
$$\oint_C \vec{E} \cdot \vec{dr} = 0$$

$$\phi(r) = \iiint_{V'} \frac{\rho(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'$$

$$\vec{E}(r) = \iiint_{V'} \frac{\rho(r')(r - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'$$

$$E = -\nabla\phi$$

Mapas mentales de la electrostática.



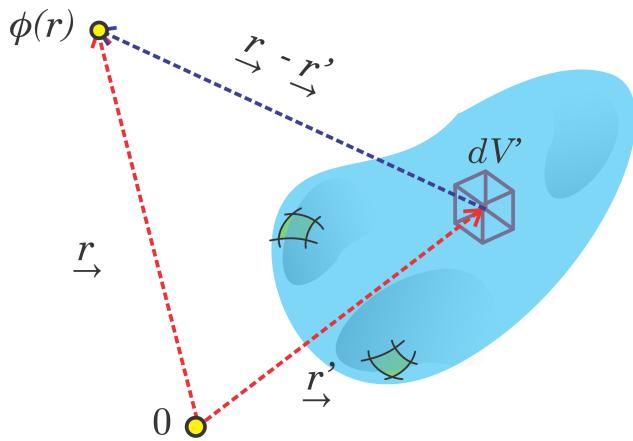
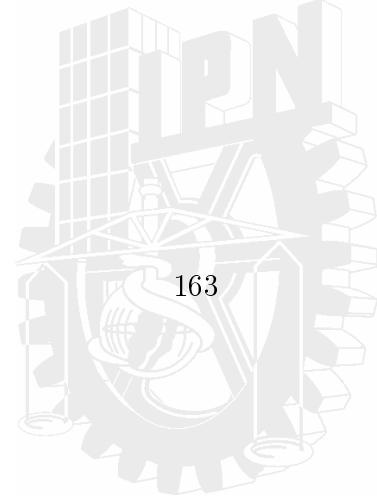


Figura 10.1: Diagrama conceptual para la solución a la ecuación de Poisson, cuando las fronteras están en infinito o muy alejadas.

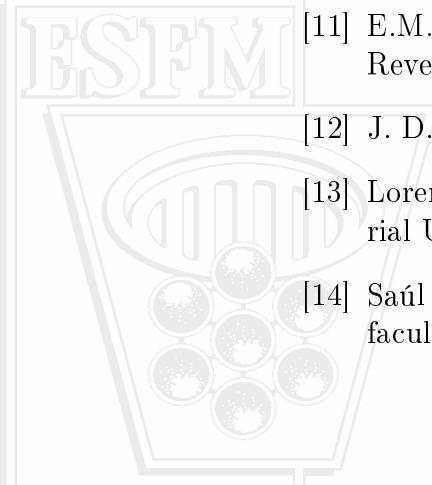
- Finalmente, el “secreto” o clave para la solución electrostática es utilizar el diagrama de la figura (10.1) donde:
 1. \vec{r} es el vector que va del origen al punto donde deseamos calcular el campo o potencial.
 2. Y que \vec{r}' es el vector que va del origen a donde está localizado el elemento diferencial de volumen dV .





Bibliografía

- [1] Sherman Alexie, “*The Lone Ranger and Tonto Fistfight in Heaven*”, Open Road New York, 1993.
- [2] J. J. Sakurai, “*Modern quantum mechanics*”, Addison-Wesley, New York, 1994.
- [3] Serge Lang, “*Algebra Lineal*”, Fondo educativo interamericano S. A., México, 1976.
- [4] George B Arfken, Hans J Weber, “*Mathematical Methods for Physicists*”, Elsevier Academic Press, New York, 2005.
- [5] Charles Kittel, Walter D. Knight, Malvin A. Ruderman, A. Carl Helmholtz, Burton J. Moyer, “*Mecánica*”, (Berkeley Physics Course I), Editorial Reverté S. A., Madrid, 1989.
- [6] L. Frank Baum, “*El mago de Oz*”, Editorial Porrúa, México, 2015.
- [7] Antonio Rivera Figueroa, “*Cálculo Diferencial*”, Grupo Editorial Patria, México, 2013.
- [8] M. Orzag, “*Quantum Optics*”, Springer-Verlag, Berlín, 2008.
- [9] Richard P. Feynman, “*QED: The Strange Theory Of Light And Matter*”. Princeton University Press, New Jersey, 1986.
- [10] Paul Arthur Schilpp (editor), “*ALBERT EINSTEIN: Philosopher-Scientist*”, Tudor Publishing Co., New York, 1951.
- [11] E.M. Purcell, “*Electricidad y magnetismo*”, (Berkeley Physics Course II), Editorial Reverté S.A., Madrid, 1989.
- [12] J. D. Jackson, “*Classical Electrodynamics*”, Wiley & Sons, Berkeley, 1999.
- [13] Lorenzo de la Torre, “*Elementos de relatividad*”, Serie ciencia y tecnología, Editorial Universidad de Antioquia, Medellín Colombia, 2008.
- [14] Saúl Ramos-Sánchez, “*Relatividad para futuros físicos*”, Las prensas de ciencias; facultad de ciencias UNAM, (temas de física), México, 2018.



BIBLIOGRAFÍA

164

- [15] José Emilio Pacheco, “*Las batallas en el desierto*”, Editorial Era, México 1981.
- [16] William H. Hayt Jr, John A. Buck, “*Teoría Electromagnética*”, Mc Graw Hill, México 2014.
- [17] Jerrold E. Marsden, Anthony Tromba, “*Cálculo vectorial*”, Addison-Wesley / Pearson, México, 2004.
- [18] D. E Bourne, P. C. Kendall, “*Análisis vectorial y tensores cartesianos*”, Editorial Limusa, S. A., México, 1976.
- [19] Ferdinand Anders, Marteem Jansen y Gabina A. Pérez Jiménez, “*El Libro de Tezcatlipoca, Señor del Tiempo Libro explicativo del llamado Códice Fejéraváry-Mayer*”, Fondo de Cultura Económica, México, 1994.
- [20] Arnold Lebeuf, “*1-Tochtli, 2-Acatl. 1558/1559, 1610/1611. Reminiscencias de la Ceremonia del Fuego Nuevo*”, Estudios Latinoamericanos, **30**, 107-128 (2010).
- [21] Estrella Ortiz Arroyo, Paloma Valdivia, “*Cada Oveja Con Su Pareja*”, La Fraguatina, Madrid, 2014.
- [22] Antonio Rivera Figueroa, “*Cálculo Integral*”, Grupo Editorial Patria, México, 2013.
- [23] Mark Twain, “*Las aventuras de Tom Sawyer*”, Susaeta ediciones S.A., Madrid, 2013.
- [24] John C. Amazigo, Lester A. Rubenfeld, “*Cálculo avanzado con aplicaciones a la ingeniería y la física*”, McGraw-Hill, México, 1983.
- [25] A. I. Alexéiev, “*Problemas de electrodinámica clásica*”, Editorial Mir, Moscú, 1980.
- [26] Guillermo Monsivais, Sylvia de Neymet “*Teoremas de Green, Gauss y Stokes para funciones continuas y discontinuas*”, Las prensas de ciencias; facultad de ciencias UNAM, (temas de matemáticas), México, 2013.
- [27] Willian E. Prima, Richard C. DiPrima, “*Ecuaciones Diferenciales y Problemas con Valores en la Frontera*”, Editorial Limusa S. A., México, 1980.
- [28] Julio Derbez, “*El habla chiapaneca*”, Revista de la Universidad de México, **62**, 55-58 (2009). https://wiki2.org/es/La_Rial_Academia_de_la_Lengua_Fraylesiana
- [29] Susan Jane Colley, “*Cálculo vectorial*”, Pearson educación, México, 2013.
- [30] Carlos Prieto, “*Topología básica*”, Fondo de Cultura Económica, México, 2011.
- [31] Murray R. Spiegel, “*Vector Analysis and an introduction to tensor analysis*”, Schaum's outline series McGraw-Hill, first edition 1959.

