

CM202 - Lista de Exercício 1

1. Considere as funções $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ abaixo. Para cada uma, encontre e represente seu domínio, e encontre a imagem de cada uma quando possível.

(i) $f(x, y) = x - y$.

(ii) $f(x, y) = xy + 1$.

(iii) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}$.

(iv) $f(x, y) = \frac{x + y}{x - y}$.

(v) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.

(vi) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

(vii) $f(x, y) = \ln(x + y)$.

(viii) $f(x, y) = \ln(xy)$.

(ix) $f(x, y) = \ln x + \ln y$.

(x) $f(x, y) = e^{x+y}$.

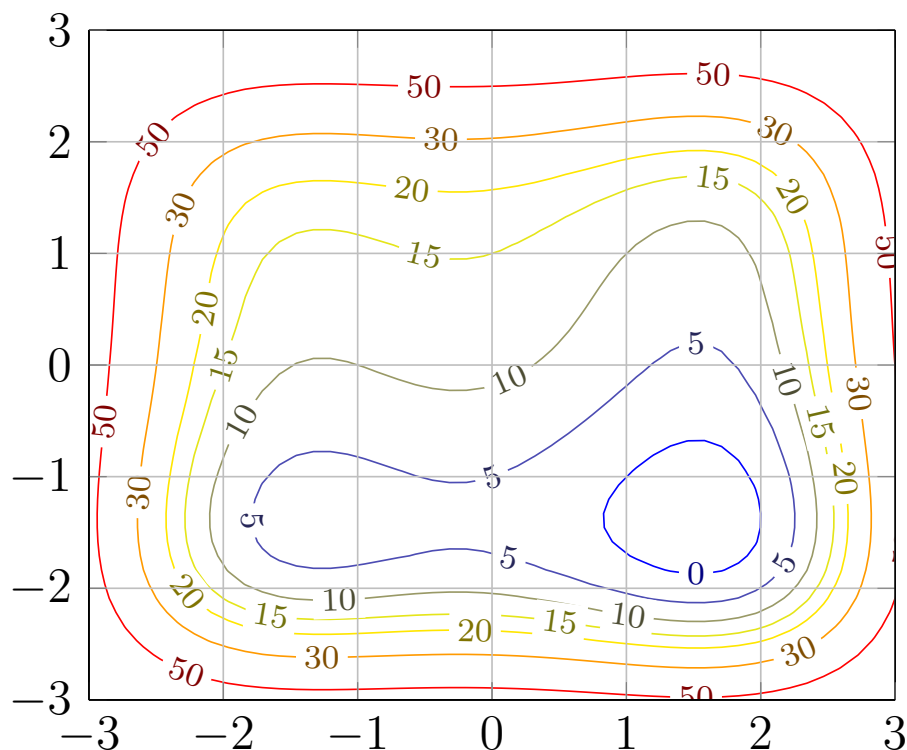
(xi) $f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$.

(xii) $f(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$.

(xiii) $f(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$.

(xiv) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 - 1}$.

2. Considere as curvas de nível de uma certa função f abaixo.



Preencha a tabela com estimativas para o valor de $f(x, y)$.

		y				
		-2	-1	0	1	2
x	-2					
	-1					
	0					
	1					
	2					

3. Desenhe as curvas de nível das funções abaixo.

(i) $f(x, y) = -2x + 5y + 3$.

(vi) $f(x, y) = \frac{y}{x^2 + 1}$.

(ii) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 1$.

(vii) $f(x, y) = \ln(x^2 + 1) - y$.

(iii) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2 + 1$.

(viii) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$.

(iv) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

(ix) $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2)}$.

(v) $f(x, y) = y + 4x^2 + 1$.

4. Calcule os limites abaixo pela definição.

(i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x + 3y$

(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x^2 + y^2$

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 5x - 2y$

(iv) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

5. Verifique que os limites abaixo não existem (Dica: para alguns limites, você precisará usar a regra de L'Hospital).

(i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

(v) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\ln(x^2 + y^2 + 1)}$.

(ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y + y^4}{x^4 + y^4}$.

(vi) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 + y^2}$.

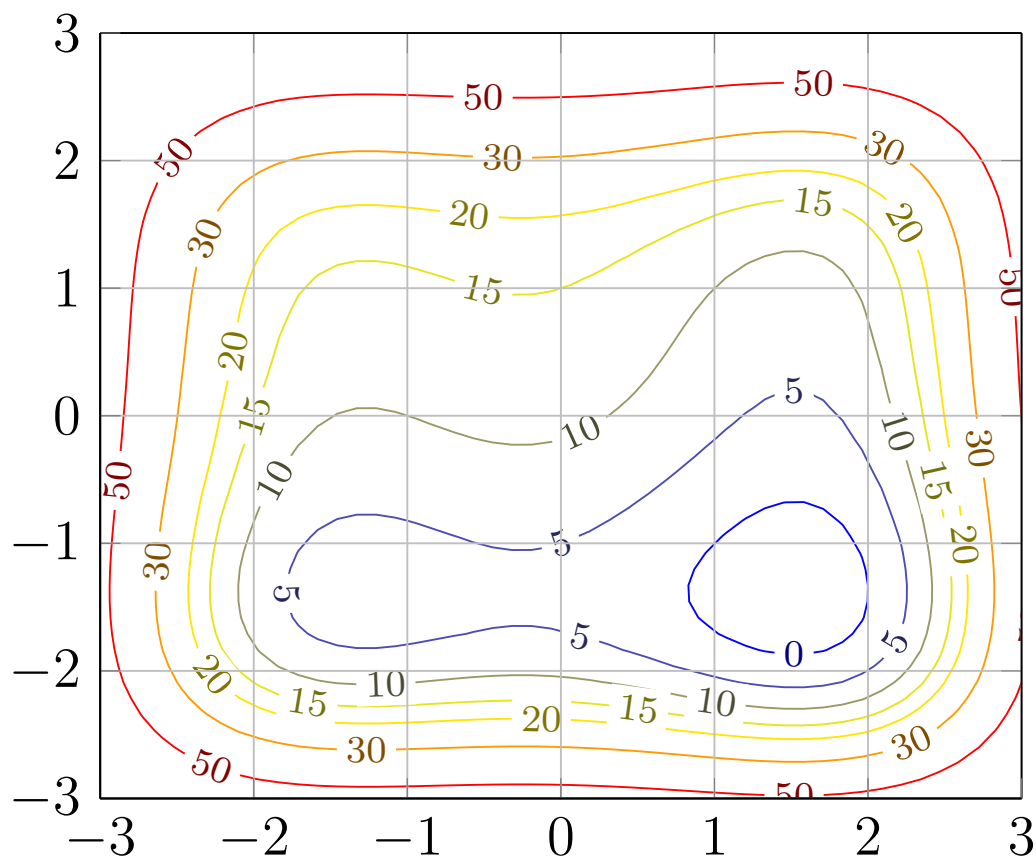
(iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{(y - x^2)^2}{x^4 + y^2}$.

(vii) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2}$.

(iv) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

(viii) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^8 + y^4 + z^2}$.

6. Considere as curvas de nível de uma certa função f abaixo.



Estime os valores abaixo (use uma régua)

- | | |
|--|---|
| (i) $D_{\vec{d}}f(-1, 0)$ na direção $\vec{d} = \langle 1, 1 \rangle$, | (vi) $\frac{\partial f}{\partial y}(-2, 0)$, |
| (ii) $D_{\vec{d}}f(1, -1)$ na direção $\vec{d} = \langle 1, 1 \rangle$, | (vii) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, -1)$, |
| (iii) $D_{\vec{d}}f(2, -2)$ na direção $\vec{d} = \langle 1, -1 \rangle$, | (viii) $\frac{\partial f}{\partial y}(0, -1)$. |
| (iv) $D_{\vec{d}}f(0, 0)$ na direção $\vec{d} = \langle -1, -2 \rangle$, | |
| (v) $\frac{\partial f}{\partial x}(-2, 0)$, | |

7. Para cada função abaixo, (a) calcule as derivadas $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, as segundas derivadas (b) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, (c) a derivada direcional em $(2, 1)$ na direção $\langle 1, 1 \rangle$, e (d) a aproximação linear nesse mesmo ponto.

- | | |
|-----------------------------------|--|
| (i) $f(x, y) = x^3 - 2y^2$, | (vii) $f(x, y) = \frac{x}{y}$, |
| (ii) $f(x, y) = (x - y)^2$, | (viii) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 + 1)$, |
| (iii) $f(x, y) = x^2y + x^3y^2$, | (ix) $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$, |
| (iv) $f(x, y) = e^{x+y}$, | (x) $f(x, y) = (1 - x)^2 + 100(y - x^2)^2$. |
| (v) $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$, | |
| (vi) $f(x, y) = xe^y - ye^x$, | |

8. A equação $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ descreve a temperatura numa barra de ferro de comprimento L , onde $u(t, x)$ é a temperatura na posição $x \in [0, L]$ e instante $t > 0$, e $\alpha > 0$ é o coeficiente de difusão.

- (i) Verifique que a função

$$u(t, x) = T_f + Ae^{-\lambda t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

satisfaz essa equação e relacione $\lambda > 0$ e α .

- (ii) Desenhe essa função num gráfico $u \times x$ nos instantes $t = 0$ e $t = 1/\lambda$.