Cálculo Diferencial e Integral II - Turma B

21 de Maio de 2015

Questão 1 .... $\boxed{20}$

Para cada função abaixo, calcule o gradiente.

(a) (10 points) $f(x, y) = x^2 + xy - 4y^2$

> **Solution:** $\nabla f(x, y) = (2x + y)\hat{\imath} + (x - 8y)\hat{\jmath}$

(b) (10 points) $f(x, y, z) = x^2 - 2y^3 + 4z^2 - xyz$

> **Solution:** $\nabla f(x, y, z) = (2x - yz)\hat{\imath} + (-6y^2 - xz)\hat{\jmath} + (8z - xy)\hat{\mathrm{k}}$

Questão 2 .... $\boxed{10}$

Calcule a seguinte derivada pela regra da cadeia

(a) (10 points) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, onde $f(x, y) = e^x + xy^2$, onde $x = -t$ e $y = t^2$.

> **Solution:** Temos
>
> $$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x + y^2 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy$$
>
> e
>
> $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 2t.$$
>
> Daí,
>
> $$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (e^x + y^2)(-1) + 2xy2t = -e^{-t} - t^4 - 4t^4 = -e^{-t} - 5t^4$$

Questão 3 .... $\boxed{30}$

Considere a função $f(x, y, z) = 2x^2 + xy + y^2 + z^2 - 5x - 3y - 2z + 1$.

(a) (10 points) No ponto $(0, -1, 1)$, qual a taxa de crescimento na direção que leva à origem?

> **Solution:** Ponto $P = (0, -1, 1)$. Direção à origem: $d = (0, 1, -1) = \hat{\jmath} - \hat{\mathrm{k}}$. Módulo de d: $|d| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$. Gradiente:
>
> $$\nabla f(x, y, z) = (4x + y - 5)\hat{\imath} + (2y + x - 3)\hat{\jmath} + (2z - 2)\hat{\mathrm{k}}.$$
>
> Gradiente no ponto: $\nabla f(0, -1, 1) = -6\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}$. Taxa: Produto interno de $\nabla f(0, -1, 1)$ e d, dividido pela norma de d. $(-6\hat{\imath} - 5\hat{\jmath}) \cdot (\hat{\jmath} - \hat{\mathrm{k}})/\sqrt{2} = -5/\sqrt{2}$.

(b) (20 points) Encontre os pontos críticos do problema de minimizar f sujeito a $-2x + 3y + 4z = 13$.

Solution: Resolvendo pelo Método dos Multiplicadores de Lagrange: Devemos encontrar λ e (x, y, z) tais que

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \lambda \nabla h(x, y, z) \\ h(x, y, z) &= 13, \end{aligned}$$

onde $h(x, y, z) = -2x + 3y + 4z$. Como $\nabla h(x, y, z) + -2\hat{\imath} + 3\hat{\jmath} + 4\hat{k}$, então esse sistema fica

$$\begin{aligned} 4x + y - 5 &= -2\lambda \\ x + 2y - 3 &= 3\lambda \\ 2z - 2 &= 4\lambda \\ -2x + 3y + 4z &= 13 \end{aligned}$$

Podemos resolver esse sistema para encontra x, y e z em função de λ:

$$x = 1 - \lambda \qquad y = 2\lambda + 1 \qquad z = 2\lambda + 1$$

Substituindo na quarta equação, obtemos

$$\begin{aligned} -2(1 - \lambda) + 3(2\lambda + 1) + 4(2\lambda + 1) &= 13 \\ -2 + 3 + 4 + \lambda(2 + 6 + 8) &= 13 \\ \lambda &= \frac{13 - 5}{16} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Portanto

$$x = \frac{1}{2} \qquad y = 2 \qquad z = 2.$$

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Encontre e classifique os pontos críticos da função $f(x, y) = x^3 - 3x + 3xy^2$.

Solution: Calculamos o gradiente e igualamos a 0.

$$\nabla f(x, y) = (3x^2 - 3 + 3y^2)\hat{\imath} + 6xy\hat{\jmath} = 0.$$

Então, temos

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3 + 3y^2 &= 0 \\ 6xy &= 0. \end{aligned}$$

Da segunda equação tiramos $x = 0$ ou $y = 0$. Se $x = 0$, então a primeira equação fica $y^2 = 1$, de modo que a solução é $y = \pm 1$. Se $y = 0$, então $x^2 = 1$, de modo que $x = \pm 1$.

Portanto, temos 4 soluções: $(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)$. Vamos classificá-los agora.

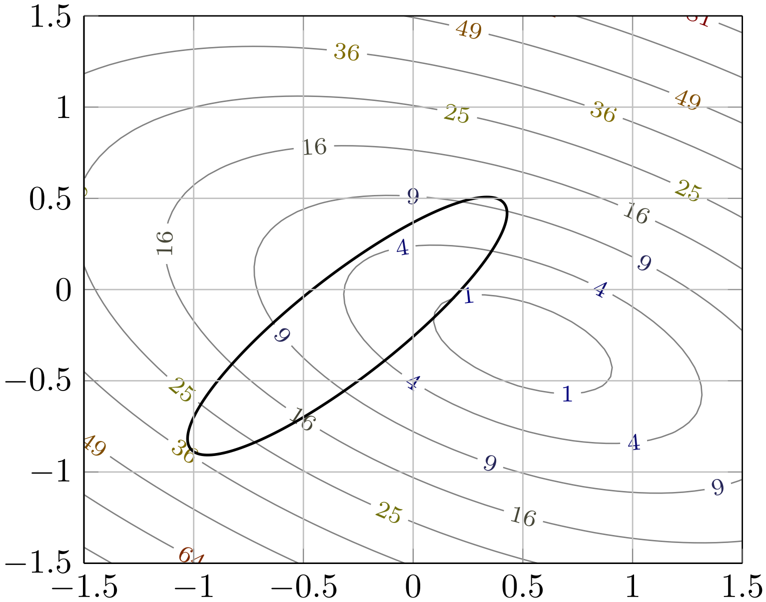
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 6x$$

O discriminante é $D(x,y) = f_{xx}(x,y)f_{yy}(x,y) - f_{xy}(x,y)^2 = 36(x^2 - y^2)$.

Para $(0,\pm 1)$, temos $D(0,\pm 1) = -36 < 0$, então $(0,1)$ e $(0,-1)$ são pontos de sela. Para $(\pm 1, 0)$, temos $D(\pm 1, 0) = 36 > 0$. Como $f_{xx}(1,0) = 6 > 0$, então $(1,0)$ é minimizador local. Como $f_{xx}(-1,0) = -6 < 0$, então $(-1,0)$ é maximizador local.

Questão 5 .... $\boxed{20}$

Considere as curvas de nível da função f, as elipses numeradas esboçadas abaixo, e uma curva $h(x,y) = 0$ também representada (sem numeração).



(a) (5 points) Desenhe no gráfico representações para o gradiente nos pontos $(0,1)$, $(-\frac{1}{2},-1)$ e $(-1,1)$.

Solution: Os gradiente são normais às curvas de nível no ponto, e apontam para longe do ponto $(0.5,-0.25)$.

(b) (15 points) Pelo gráfico, indique os minimizadores e maximizadores locias e globais da função f com a restrição $h(x,y)=0$, **justificando**. Estime os valores da função nesses pontos conjunto.

Solution: O menor valor possível é logo abaixo de 1, perto do ponto $(0.2,-0.2)$. O maior valor possível é perto de 36, perto do ponto $(-1,-0.9)$. Perto do ponto $(0.3,0.5)$ temos um maximizador local, e perto do ponto $(-0.25,0.25)$ temos um minimizador local.

Questão 6 .... $\boxed{10}$

Calcule a integral dupla

$$\int_0^2\int_0^3 x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Solution:

$$\int_0^2\int_0^3 x^2y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^2 \frac{x^3}{3}y\Big|_0^3\mathrm{d}y=\frac{x^3}{3}\Big|_0^3\frac{y^2}{2}\Big|_0^2=18$$

Questão 7 .... $\boxed{10}$

Calculo o volume da figura abaixo do plano $2x-3y+z-6=0$ e acima do triângulo no plano x-y de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

Solution: O plano $z = 6 - 2x + 3y$ está acima do triângulo dado em toda região, então o volume é

$$\iint_D (6 - 2x + 3y)\mathrm{d}A.$$

A região D é o triângulo dado. que pode ser descrito por $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 - x\}$. Então a integral é

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} (6 - 2x + 3y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1 \left[(6 - 2x)(1 - x) + \frac{3}{2}(1 - x)^2\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[6 - 2x - 6x + 2x^2 + \frac{3}{2} - 3x + \frac{3}{2}x^2\right]\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left[\frac{15}{2} - 11x + \frac{7}{2}x^2\right]\mathrm{d}x \\
&= \frac{15}{2} - \frac{11}{2} + \frac{7}{6} \\
&= \frac{19}{6}
\end{aligned}$$

Derivadas

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(x)) = -\sin(x)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(x)) = \cos(x)$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$

Integrais

- $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$

Regras

- Regra da cadeia com $f(x, y)$, x e y dependendo de t.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$