

TopAL - Tópicos de Álgebra Linear

Lista 2

1. Se $\dim(V) = n$, então todo subconjunto de V com mais de n vetores é L.D. e nenhum subconjunto de V com menos de n vetores pode ser base.
2. Seja $S \subset V$ um conjunto L.I. e $v \in V - [S]$. Então $S \cup \{v\}$ é L.I..
3. Seja W subespaço de V . Se V tem dimensão finita, então W tem dimensão finita e $\dim(W) \leq \dim(V)$.
4. Se o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ é L.I. em V então $R = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ também é L.I. sobre V .
5. Seja $T : V \rightarrow W$ uma aplicação linear. Mostre que
 - (a) Mostre que $\text{Nu}(T)$ é subespaço de V .
 - (b) Mostre que $\text{Im}(T)$ é subespaço de W .
 - (c) Mostre que T é injetiva se, e somente se, $\text{Nu}(T) = \{0\}$.
 - (d) Seja $T : X \rightarrow Y$ uma aplicação linear bijetora (isomorfismo). Mostre que a inversa $T^{-1} : Y \rightarrow X$ é linear.
6. Mostre que todo espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo \mathbb{K} é isomorfo a \mathbb{K}^n e conclua que dois espaços quaisquer de mesma dimensão sobre um mesmo corpo são sempre isomorfos.
7. Mostre que S é uma base de V se, e somente se, todo elemento de V pode ser escrito de maneira única como combinação linear de elementos de S .
8. Se $\dim(V) = n$ e $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$ for L.I., então S é base de V .
9. Se $\dim(V) = n$ e $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset V$ gera V , então S é base de V .
10. Seja \mathbb{K}^∞ o conjunto de todas as sequências $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots)$, com $\xi_j \in \mathbb{K}$ e operações de adição e multiplicação por escalar usuais.
 - (a) Mostre que \mathbb{K}^∞ é um espaço vetorial.
 - (b) Considere o conjunto $\mathbb{K}_0^\infty \subset \mathbb{K}^\infty$, constituído por todas as sequências $\xi = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tais que $\xi_j = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$, exceto para um número finito de índices. Mostre que \mathbb{K}_0^∞ é subespaço de \mathbb{K}^∞ .
 - (c) Mostre que \mathbb{K}_0^∞ é isomorfo a $\mathbb{K}[t]$ (espaço vetorial dos polinômios com coeficiente em \mathbb{K}).
11. Sejam $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $S \in \mathcal{L}(W, U)$. Mostre que $S \circ T \in \mathcal{L}(V, U)$.
12. Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$ um isomorfismo. Mostre que a inversa $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.
13. Mostre que todo espaço vetorial de dimensão n é isomorfo a \mathbb{K}^n . Conclua que dois espaços de dimensão n sobre o mesmo corpo são sempre isomorfos.
14. \mathbb{R}^n e \mathbb{C}^n são isomorfos?
15. Seja $S = \{A \in M_{m \times m}(\mathbb{K}); A^t = A\}$ o conjunto das matrizes simétricas e $A = \{A \in M_{m \times m}(\mathbb{K}); A^t = -A\}$ o conjunto das matrizes antissimétricas.
 - (a) Mostre que A e S são subespaços de $M_{m \times m}(\mathbb{K})$.

- (b) Prove que $M_{m \times m}(\mathbb{K}) = S \oplus A$.
16. Considere os polinômios $p_1(t) = 2t^3 + 1$ e $p_2(t) = t^3 - t$ em $\mathbb{K}_3[t]$.
- Descreva $[p_1, p_2]$.
 - Mostre que $S = \{p_1, p_2\}$ é L.I..
 - Obtenha uma base de $\mathbb{K}_3[t]$ completando o conjunto S .
 - Encontre a representação de cada um dos vetores de S nessa base,
 - Seja $q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + a_3t^3$ um polinômio de $\mathbb{K}_3[t]$. Encontre a representação de $q(t)$ na base encontrada.
17. Defina $T : \mathbb{K}[t] \rightarrow \mathbb{K}_3[t]$ como
- $$T\left(a_0 + \sum_{j=1}^m a_j t^j\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$
- Mostre que T é linear.
 - Determine $\text{Nu}(T)$ e $\text{Im}(T)$.
 - Encontre uma base para o núcleo e imagem de T .
 - O Teorema do núcleo e da imagem pode ser aplicado nesse exemplo? Justifique.
18. Uma projeção é uma aplicação linear $\Pi : V \rightarrow V$ tal que $\Pi \circ \Pi = \Pi$. Seja $\Pi : V \rightarrow V$ uma projeção:
- Prove que $V = \text{Nu}(\Pi) \oplus \text{Im}(\Pi)$.
 - Sejam $W_1, W_2 \subset V$ subespaços tais que $V = W_1 \oplus W_2$. Se $x = w_1 + w_2 \in W_1 \oplus W_2$, mostre que a aplicação $\Pi_1 : V \rightarrow W_1$ definida por $\Pi_1(x) = w_1$ é uma projeção.
19. Prove que as seguintes afirmações a respeito de $\Pi_1, \Pi_2 : V \rightarrow V$ são equivalentes:
- $\Pi_1 + \Pi_2$ é projeção;
 - $\Pi_1 \Pi_2 + \Pi_2 \Pi_1 = 0$;
 - $\Pi_1 \Pi_2 = \Pi_2 \Pi_1 = 0$.
20. Sejam $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $R \in \mathcal{L}(W, U)$. Mostre que
- $\text{posto}(S + T) \leq \text{posto}(S) + \text{posto}(T)$.
 - $\text{posto}(RS) \leq \min\{\text{posto}(S), \text{posto}(T)\}$.