Cálculo Diferencial e Integral I

29 de Junho de 2016

Questão 1 .... $\boxed{50}$

Calcule as integrais abaixo.

(a) (10 points) $\displaystyle\int_1^2 (2x^3 - 3x^2 - x + 5)\mathrm{d}x$

Solution:

$$\int_1^2 (2x^3 - 3x^2 - x + 5)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{2} - x^3 - \frac{x^2}{2} + 5x\right]_1^2 = \frac{16-1}{2} - (8-1) - \frac{4-1}{2} + 5$$
$$= \frac{15 - 14 - 3 + 10}{2} = 4$$

(b) (10 points) $\displaystyle\int 3xe^{3x}\mathrm{d}x$

Solution: Por partes $u = 3x$ e $\mathrm{d}v = e^{3x}\mathrm{d}x$, temos $\mathrm{d}u = 3\mathrm{d}x$ e $v = \frac{1}{3}e^{3x}$, daí

$$\int 3xe^{3x}\mathrm{d}x = uv - \int v\mathrm{d}u = 3x\frac{1}{3}e^{3x} - \int e^{3x}\mathrm{d}x = xe^{3x} - \frac{1}{3}e^{3x} + C$$

(c) (10 points) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{\pi/6}} x\cos\left(x^2 + \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}x$

Solution: Por substituição, $u = x^2 + \frac{\pi}{6}$, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$. Daí $x = 0 \Rightarrow u = \pi/6$ e $x = \sqrt{\pi/6} \Rightarrow u = \pi/3$. Assim

$$\int_0^{\sqrt{\pi/6}} x\cos\left(x^2 + \frac{\pi}{6}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos u\mathrm{d}u = \left.\frac{\sin u}{2}\right|_{\pi/6}^{\pi/3}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4}$$

(d) (10 points) $\displaystyle\int \arctan(x)\mathrm{d}x$

Solution: Por partes, com $u = \arctan(x)$ e $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. Daí, $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$ e $v = x$, e temos

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x = uv - \int v\mathrm{d}u = x\arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

Essa integral é resolvida por substituição $u = 1 + x^2$. Daí, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$ e

$$\int \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \frac{\ln|u|}{2} + C.$$

Daí,

$$\int \arctan(x)\mathrm{d}x = x\arctan(x) - \frac{\ln(1+x^2)}{2} - C.$$

(e) (10 points) $\displaystyle\int \frac{3x+3}{x^2+x-2}\mathrm{d}x$

Solution:

$$\frac{3x+3}{x^2+x-2} = \frac{3x+3}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}.$$

Assim,

$$3x + 3 = A(x+2) + B(x-1) = (A+B)x + 2A - B$$

Obtemos o sistema $A + B = 3$ e $2A - B = 3$. Daí, subtraindo as duas obtemos $A = 2$ e, logo $B = 1$. Integrando, temos

$$\int \frac{x+1}{x^2-x+2}\mathrm{d}x = \int \frac{2}{x-1}\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x+2}\mathrm{d}x = 2\ln|x-1| + \ln|x+2| + C$$

Questão 2 .... $\boxed{15}$

Calcule a área de região limitada por $y = 2x^2 - 4x + 2$ e $y = x^2 - 4x + 3$.

Solution: A intersecção dessas curvas é

$$x^2 - 4x + 3 = 2x^2 - 4x + 2 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1.$$

A área é a integral da diferença. Em algum ponto do meio vemos quem está por cima. Em $x = 0$, $x^2 - 4x + 3 = 3$ e $2x^2 - 4x + 2 = 2$, daí

$$\begin{aligned}\text{Área} &= \int_{-1}^{1}(x^2 - 4x + 3 - 2x^2 + 4x - 2)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{1}(1-x^2)\mathrm{d}x = 2\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

Questão 3 .... $\boxed{20}$

Considere a região limitada pelas curvas $y = 2x - 1$, $y = x$ entre $1 \leq x \leq 2$.

(a) (10 points) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação dessa região em torno do eixo x.

> **Solution:** Para $1 \leq x \leq 2$, temos um raio menor, x, e um maior, $2x - 1$. O volume é dado por
>
> $$V = \int_1^2 \pi[(2x-1)^2 - x^2]\mathrm{d}x = \pi \int_1^2 (3x^2 - 4x + 1)\mathrm{d}x = \pi(x^3 - 2x^2 + x)\Big|_1^2$$
> $$= \pi[(8-1) - 2(4-1) + (2-1)] = \pi(7 - 6 + 1) = 2\pi.$$

(b) (10 points) Calcule o volume do sólido obtido pela rotação dessa região em torno do eixo y.

> **Solution:**
>
> $$V = \int_1^2 2\pi x[(2x-1) - x]\mathrm{d}x = 2\pi \int_1^2 (x^2 - x)\mathrm{d}x = 2\pi\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2$$
> $$= 2\pi\left(\frac{8-1}{3} - \frac{4-1}{2}\right) = 2\pi\frac{14-9}{6} = \frac{5\pi}{3}$$

Questão 4 .... $\boxed{10}$

Calcule a derivada da função f dada abaixo $f(t) = \displaystyle\int_0^{t^2+1} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) + x}\mathrm{d}x$

> **Solution:** Vamos fazer pelo TFC, usando $u = t^2 + 1$.
>
> $$f'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^{t^2+1} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) + x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_0^{u} \frac{\sin(x)}{\cos^2(x) + x}\mathrm{d}x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$
> $$= \frac{\sin(u)}{\cos^2(u) + u}(2t) = \frac{2t\sin(t^2+1)}{\cos^2(t^2+1) + t^2 + 1}$$

Questão 5 .... $\boxed{25}$

A previsão de chuva de uma certa cidade nas próximas 12 horas é indicada pela seguinte função:

$$C(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1, \\ 2(t-1), & 1 \leq t < 5, \\ 8 - 8(t-5), & 5 \leq t < 6, \\ 0, & t \geq 6, \end{cases}$$

onde t horas a partir de um certo horário, e $C(t)$ é medido em mm/h.

(a) (10 points) Durante as primeiras 4 horas de chuva, qual a quantidade total de precipitação?

Solution:

$$\int_0^4 C(t)\mathrm{d}t = \int_1^4 2(t-1)\mathrm{d}t = (t-1)^2\Big|_1^4 = 3^2 = 9mm$$

(b) (15 points) A vazão máxima que essa cidade tem é de $4mm/h$. Quando a precipitação é maior que isso, o excesso alaga a cidade. Descubra se a cidade alaga nesse período, e caso alague, descubra quando começa e quando acaba o alagamento.

Solution: Enquanto a precipitação por hora não ultrapassar a vazão, não acontecerá alagamento. Entre 1 e 5, a chuva aumenta. Vamos ver se ultrapassa a vazão nesse período. $2(t-1) > 4 \Rightarrow t-1 > 2 \Rightarrow t > 3$. Então, de $t = 3$ a $t = 5$ a cidade alaga. O alagamento nesse período é de

$$\int_3^5 [2(t-1) - 4]\mathrm{d}t = (t-1)^2\Big|_3^5 - 4t\Big|_3^5 16 - 4 - 8 = 4mm.$$

Agora, para $5 \leq t \leq 6$ a chuva diminui. Talvez o alagamento acabe, mas a priori não sabemos. Fazer fazer a variação do alagamento nesse período.

$$\int_5^6 [8 - 8(t-5) - 4]\mathrm{d}t = 4t\Big|_5^6 - 4(t-5)\Big|_5^6 = 4 - 4 = 0mm.$$

Então, nesse período o alagamento acaba não variando.

Após esse período não há chuva, e a vazão é constante de $4mm/h$. Como precisamos esvaziar $4mm$, trivialmente temos que esperar 1 hora.

Sendo assim, o alagamento começa em 3 horas, e acaba em 7 horas.