

Lista 2: Cálculo I

A. Ramos *

March 17, 2018

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Limites e continuidade

1 Exercícios

Faça do livro texto, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

2.1 Regras de cálculos para limites

Calcule os seguintes limites.

1. $\lim_{u \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+u^2}-2}{1-u} = -\frac{1}{2}$.
2. $\lim_{t \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5+t}}{1-\sqrt{5-t}} = -\frac{1}{3}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3x-2}+\sqrt{x}-\sqrt{5x-1}}{\sqrt{x}-\sqrt{2x-1}} = -\frac{3}{2}$.
4. Se $f(x) = \sqrt{1+3x}$. Calcule $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1} = \frac{49}{24}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{1+\sqrt{2+x}}-\sqrt{3}}{x-2} = \frac{1}{8\sqrt{3}}$.
7. Se $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-1}{x} = 1$. Prove $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(ax)-f(bx)}{x} = a - b$. *Dica:* Considere se a e b são iguais a zero ou não.
8. Dado $a \in \mathbb{R}$. Mostre que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x-a}\sqrt{a}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}} = 3a$.

2.2 Limites laterais

Calcule, se existe, os seguintes limites.

1.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{5}{2}} \sqrt{|x| + \llbracket 3x \rrbracket}.$$

Sim, e o limite é $\sqrt{19/2}$.

2.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{7}{3}} \sqrt{|x| + \llbracket 3x \rrbracket}.$$

Não.

3.

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\llbracket x-1 \rrbracket - x}{\sqrt{|x|^2 - \llbracket x \rrbracket}}.$$

Não.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: albertoramos@ufpr.br.

4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\llbracket x \rrbracket^2 - x^2}{\llbracket x \rrbracket^2 - x}.$$

Não.

5. Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+3x^2-9x-27}{x+3} & , \text{ se } x \in (-\infty, -3) \\ ax^2 - 2bx + 1 & , \text{ se } x \in [-3, 3] \\ \frac{x^2-22x+57}{x-3} & , \text{ se } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

Para quais valores de a e b , existe os limites de f em $x = -3$ e $x = 3$? *Rpta:* $a = -1, b = 4/3$.

2.3 Limites Trigonométricos

Calcule os seguintes limites.

1.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 - \sin(\frac{x}{2})}{x - \pi} = 0$$

2.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin(x)}{x^2} = 0.$$

3.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos(x)}}{x^2} = \frac{1}{4}$$

4.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\frac{\pi x}{2})}{1 - \sqrt{x}} = \pi$$

5.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^7(x)}{x^2} = \frac{7}{2}$$

6.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos(x))}{x^4} = \frac{1}{8}$$

7.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2x) - \cos(2x) - 1}{\sin(x) - \cos(x)} = \sqrt{2}$$

8.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\pi x) + \cos(\frac{\pi x}{2})}{\tan(\frac{\pi x}{4}) - 1} = -\frac{3\pi}{4}$$

2.4 Definição de limite

Usando a definição de limite. Prove que

$$1. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+1}{x-1} = 5.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x^2+16} = \frac{1}{25}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} x^2 \llbracket x + 2 \rrbracket = \frac{1}{2}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3-15x-4}{x-3} = 0.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow a} \cos(x) = \cos(a), \text{ para qualquer } a \in \mathbb{R}.$$