Cálculo Diferencial e Integral I - Turma C

19 de Maio de 2015

Questão 1 .... $\boxed{50}$

Calcule a derivada de cada função abaixo:

(a) (5 points) $3x^3 - 4x^2 + 12x + 7$

> **Solution:** $9x^2 - 8x + 12$

(b) (5 points) xe^{-x}

> **Solution:** Regra do produto, e regra da cadeia para e^{-x}, ou regra do quociente com x/e^x. $[x]'e^{-x} + x[e^{-x}]' = e^{-x} - xe^{-x}$.

(c) (10 points) $\dfrac{(x+x^{-1})^2}{x}$

> **Solution:** $\dfrac{(x+x^{-1})^2}{x} = \frac{x^2+2+x^{-2}}{x} = x + 2x^{-1} + x^{-3}$. A derivada segue direto agora $1 - 2x^{-2} - 3x^{-4}$.

(d) (10 points) $\sqrt{3x^2+4}$

> **Solution:** Regra da cadeia. Função de fora $f(x) = \sqrt{x}$. Função de dentro $g(x) = 3x^2 + 4$. Derivada: $\dfrac{1}{2\sqrt{3x^2+4}}(6x) = \dfrac{3x}{\sqrt{3x^2+4}}$.

(e) (10 points) $\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)+2}$

> **Solution:** Regra do quociente.
>
> $$\frac{[\sin x]'(\cos x + 2) - (\sin x)[\cos x + 2]'}{[\cos x + 2]^2} = \frac{\cos^2 x + 2\cos x + \sin^2 x}{[\cos x + 2]^2} = \frac{2\cos x + 1}{[\cos x + 2]^2}.$$

(f) (10 points) $\dfrac{x^4(3x-4)^8}{(2x+1)^5}$

> **Solution:** Nesta, fica mais fácil se aplicar o logaritmo e derivar implicitamente. $y = \dfrac{x^4(3x-4)^8}{(2x+1)^5}$
>
> $$\ln y = 4\ln x + 8\ln(3x-4) - 5\ln(2x+1).$$
>
> Daí
>
> $$\frac{y'}{y} = 4\frac{1}{x} + 8\frac{3}{3x-4} - 5\frac{2}{2x+1}.$$
>
> Portanto
>
> $$y' = \frac{x^4(3x-4)^8}{(2x+1)^5}\left(\frac{4}{x} + \frac{24}{3x-4} - \frac{10}{2x+1}\right).$$

Questão 2 .... $\boxed{30}$

Considere a função $f(x) = 27x^3 - 54x^2 + 27x$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) (5 points) Encontre suas raízes.

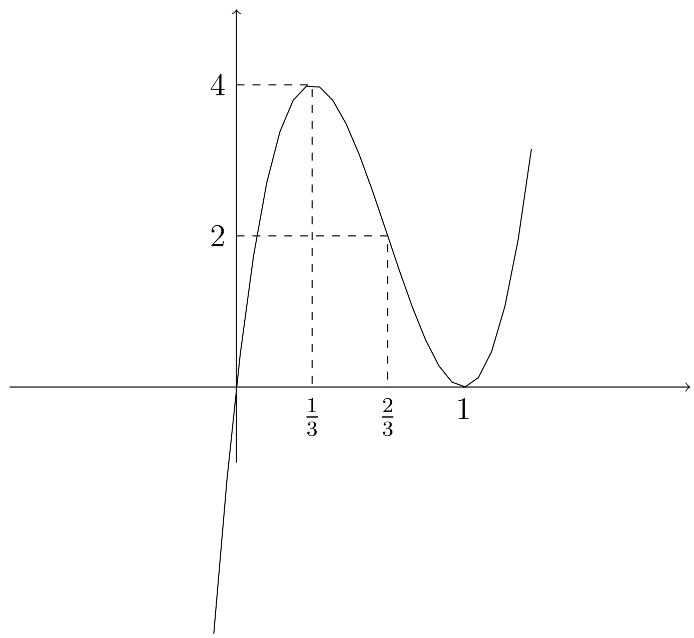
(b) (5 points) Indique os intervalos de crescimento e decrescimento.

(c) (5 points) Determine seus pontos críticos, e classifique-os.

(d) (5 points) Indique os intervalos de concavidade para cima e para baixo da função, e os pontos de inflexão.

(e) (10 points) Faça um esboço do gráfico da função usando as informações acima, e marcando os pontos importantes incluindo seus valores de função.

Solution: Note que 27 pode ser colocado em evidência para toda a questão. Iguale a zero para achar as raízes. Derive e iguale a zero para achar os pontos críticos, e veja os intervalos de crescimento e decrescimento daí. Veja os máximos e mínimos daí. Derive novamente e veja o sinal da segunda derivada para a concavidade.



Questão 3 .... $\boxed{20}$

Calcule todas as assíntotas das funções abaixo.

(a) (10 points) $f(x) = \dfrac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}{x^2 + 1}$.

Solution: Não tem verticais porque é contínua. Horizontais, fazemos o limite para o infinito e para $-\infty$. Facilmente vemos que são ambos ilimitados. Então devemos calcular

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1.$$

Então $m = 1$, e devemos calcular

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\pm\infty} f(x) - x &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - x}{x^2+1} \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^2 + 2x - 1}{x^2+1} = -3.\end{aligned}$$

Então $x - 3$ é assíntota para $+\infty$ e $-\infty$.

(b) (10 points) $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

Solution: Não tem verticais porque é contínua. Para horizontais temos que fazer para $+\infty$ e $-\infty$ separadamente, pois e^x tem comportamento diferente nos dois casos. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$ é do tipo ∞/∞, então aplicamos L'Hospital.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1.$$

Então a função g tem assíntota horizontal $y = 1$ para $+\infty$. Para $-\infty$, $e^x \to 0$, então

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

Então $y = -1$ é assíntota horizontal para $-\infty$.

Questão 4 .... $\boxed{10}$

Seja $y = y(x)$ uma função definida implicitamente por $e^y + y^3 = \sin x + 1$. Verifique que $y(\pi) = 0$, e calcule $y'(\pi)$.

Solution: Quando $x = \pi$, então $y = 0$. Daí, o lado esquedo da equação é $e^y + y^3 = e^0 + 0^3 = 1$, e o lado direito é $\sin x + 1 = \sin \pi + 1 = 1$. Então a igualdade se verifica.

Para calcular $y'(\pi)$ vamos derivar implicitamente.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^y + y^3) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x + 1).e^y y' + 3y^2 y' = \cos x$$

Daí,

$$y'(x) = \frac{\cos x}{e^y + 3y^2} \qquad \Rightarrow \qquad y'(\pi) = \frac{\cos \pi}{e^0 + 3 \times 0^2} = \frac{-1}{1} = -1.$$

Questão 5 .... $\boxed{10}$

Usando a função $f(x) = xe^x - e^x - x$ e o Teorema de Rolle, mostre que a equação $e^{-x} = x$ tem solução.

Solution: O Teorema de Rolle diz que se f é contínua num intervalo $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$. Como tem a ver com a derivada, vamos derivar f.

$$f'(x) = e^x + xe^x - e^x - 1 = xe^x - 1.$$

Bom, se o Teorema de Rolle valer, então existe c num certo intervalo tal que $f'(c) = 0$, isto é $ce^c = 1$, e portanto $e^{-c} = c$. Então, basta mostrarmos as hipóteses do Teorema de Rolle para sabermos que a equação tem solução.

Naturalmente a função f é contínua e diferenciável nos reais. Então nosso trabalho se resume a encontrar a e b tais que $f(a) = f(b)$. Para isso, vamos chutar valores, e os melhores para isso são 0 e 1.

$$f(0) = 0e^0 - e^0 - 0 = 0 - 1 - 0 = -1$$
$$f(1) = 1e^1 - e^1 - 1 = e - e - 1 = -1.$$

Esse valores já satisfazem a condição buscada, então pelo Teorema de Rolle, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.

Derivadas

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$

Regras de derivação

- Regra do produto
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
- Regra do quociente
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
- Regra da cadeia
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))g'(x)$$