CM202 - Lista de Exercício 2

1. Calcule os pontos críticos de cada função abaixo e classifique-os. Quando possível, indique o maximizador e minimizador global da função.

   (i) $f(x, y) = 4x^2 - 8x + 9y^2 + 36y + 1$.

   (ii) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - x + y + 3$.

   (iii) $f(x, y) = x^2 + 3xy + y^2 - 5x + 5y + 3$.

   (iv) $f(x, y) = x^2 + y^3 - 3y$.

   (v) $f(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.

   (vi) $f(x, y) = \sin(x)\cos(y)$.

   (vii) $f(x, y) = (1 - x^2)^2 + 100(y - x^2)^2$.

   (viii) $f(x, y) = (x^2 - 1)^2 - (y^2 - 1)^2$.

   (ix) $f(x, y) = x^3y - xy^3 - y$.

   (x) $f(x, y) = x^3 - 3x - y^3 + 9y + 1$.

2. Encontre todos os pontos críticos da função $f(x, y) = \alpha x^2 + \beta y^2$ e classifique-os, onde α e β não são ambos nulos. Preste atenção ao caso onde um deles é nulo.

3. Encontre o ponto crítico da função

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

   Qual a condição para que ele seja um minimizador local? No caso $B = 0$, como podemos escrever essa condição?

4. Para cada função f à esquerda e cada função g à direita, encontre os pontos críticos do problema de minimizar f com a restrição $g(x) = 0$.

   (i) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

   (ii) $f(x, y) = 4(x - 1)^2 + (y + 2)^2$.

   (iii) $f(x, y) = xy$.

   (iv) $f(x, y) = (x - y)^2$.

   (v) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

   (i) $g(x, y) = x + y - 1$.

   (ii) $g(x, y) = 3x + 5y - 4$.

   (iii) $g(x, y) = -x + 2y + 2$.

   (iv) $g(x, y) = x - y$.

   (v) $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

5. Para cada região R à esquerda, desenhe-a, e calcule a integral de cada função f à direita nessa região, i.e. $\displaystyle\iint_R f(x, y)\mathrm{d}A$.

(i) $R = [0,1] \times [0,1]$

(ii) $R = [1,3] \times [-1,1]$

(iii) R é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(0,1)$ e $(2,1)$.

(iv) R é o triângulo de vértices $(1,0)$, $(0,2)$ e $(1,2)$.

(v) R é o triângulo de vértices $(-1,-1)$, $(-1,1)$ e $(1,1)$.

(vi) R é o triângulo de vértices $(1,0)$, $(2,1)$ e $(3,3)$.

(vii) R é o paralelograma de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(-1,0)$ e $(0,2)$.

(i) $f(x,y) = 1 + 2x + 3y$.

(ii) $f(x,y) = x^2 + 4y^2$.

(iii) $f(x,y) = xy$.

(iv) $f(x,y) = e^{x+y}$.

6. Para cada integral abaixo, identifique a região e faça a mudança na ordem de integração.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \int_y^{2y} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(iii) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{x^2}^{2-x^2} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

(iv) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x.$

(v) $\displaystyle\int_1^e \int_{\ln y}^1 f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

(vi) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{4x(1-x)} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

7. Calcule cada integral abaixo.

(i) $\displaystyle\int_0^1 \int_x^1 e^{-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \int_{1/x}^1 \ln x\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

8. Para cada região R à esquerda, desenhe-a, e calcule a integral de cada função f à direita nessa região usando mudança de variáveis polar.

(i) O círculo de raio 1

(ii) A faixa circular dos raios 1 ao 2.

(iii) A restrição do círculo de raio 1 ao primeiro quadrante.

(iv) A seção circular de raio 1 e entre os ângulos $\pi/6$ e $\pi/3$.

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$

(ii) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

(iii) $f(x,y) = y^2 - x^2$.

(iv) $f(x,y) = xy$.

9. Encontre o volume dos sólidos limitados por cada par de superfícies abaixo. Use integral dupla.

(i) $z = x^2 + y^2$

(ii) $z = 1 + \sqrt{x^2 + y^2}$

(iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

(iv) $z = 9 - x^2 - y^2$

10. Calcule o volume das figuras a seguir usando integral dupla.

    (i) A figura limitada pelos parabolóides $z = x^2 + 2y^2$ e $z = 12 - 2x^2 - y^2$.

    (ii) Um cone de altura h e raio r.

    (iii) A figura abaixo dos parabolóides $z = x^2 + 2y^2$ e $z = 2x^2 + y^2$.

11. Calcule $\displaystyle\iint_R (x-y)^2 \sin^2(x+y)\mathrm{d}A$ onde R é o paralelograma formado pelos pontos $(\pi, 0)$, $(2\pi, \pi)$, $(\pi, 2\pi)$, e $(0, \pi)$.

12. Considere a transformação $x = u + v$ e $y = v - u^2$.

    (i) Calcule o Jacobiano dessa transformação.

    (ii) Um triângulo T no plano uv tem vértices $(0, 0)$, $(2, 0)$, e $(0, 2)$. Desenhe sua imagem S no plano xy.

    (iii) Calcule $\displaystyle\iint_S (x - y + 1)^{-2}\mathrm{d}A$.

13. Calcule a área da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.