12.1 Exercícios

1. Suponha que, a partir da origem, você tenha percorrido uma distância de quatro unidades ao longo do eixo x no sentido positivo e então uma distância de três unidades para baixo. Quais as coordenadas de sua posição atual?

2. Esboce os pontos $(0, 5, 2)$, $(4, 0, -1)$, $(2, 4, 6)$ e $(1, -1, 2)$ em um mesmo conjunto de eixos coordenados.

3. Qual dos pontos está mais próximo do plano xz: $P(6, 2, 3)$, $Q(-5, -1, 4)$ ou $R(0, 3, 8)$? Qual ponto pertence ao plano yz?

4. Quais são as projeções do ponto $(2, 3, 5)$ nos planos xy, yz e xz? Desenhe uma caixa retangular que tenha vértices opostos na origem e em $(2, 3, 5)$ e com faces paralelas aos planos coordenados. Nomeie todos os vértices da caixa. Determine o comprimento da diagonal dessa caixa.

5. Descreva e esboce no $\mathbb{R}^3$ a superfície representada pela equação $x + y = 2$.

6. (a) Qual a representação da equação $x = 4$ em $\mathbb{R}^2$? Em $\mathbb{R}^3$? Faça um esboço delas.
   (b) Qual a representação da equação $y = 3$ em $\mathbb{R}^3$? O que $z = 5$ representa? Qual a representação do par de equações $y = 3$ e $z = 5$? Em outras palavras, descreva o conjunto de pontos (x, y, z) tal que $y = 3$ e $z = 5$. Ilustre com um esboço.

7. Mostre que o triângulo com vértices em $P(-2, 4, 0)$, $Q(1, 2, -1)$ e $R(-1, 1, 2)$ é um triângulo eqüilátero.

8. Encontre o comprimento dos lados do triângulo com vértices $A(1, 2, -3)$, $B(3, 4, -2)$ e $C(3, -2, 1)$. O triângulo ABC é retângulo? É isósceles?

9. Determine se os pontos estão alinhados.
   (a) $A(5, 1, 3)$, $B(7, 9, -1)$, $C(1, -15, 11)$
   (b) $K(0, 3, -4)$, $L(1, 2, -2)$, $M(3, 0, 1)$

10. Determine a distância entre $(3, 7, -5)$ e cada um dos seguintes.
    (a) Plano xy (b) Plano yz
    (c) Plano xz (d) Eixo x
    (e) Eixo y (f) Eixo z

11. Determine a equação da esfera com centro em $(1, -4, 3)$ e raio 5. Qual é a interseção dessa esfera com o plano xz?

12. Determine a equação da esfera com centro em $(6, 5, -2)$ e raio $\sqrt{7}$. Descreva sua interseção com os planos coordenados.

13. Determine a equação da esfera que passa pelo ponto $(4, 3, -1)$ e tem centro em $(3, 8, 1)$.

14. Determine a equação da esfera que passa pela origem e tem centro em $(1, 2, 3)$.

15–18 □ Mostre que a equação representa uma esfera e determine seu centro e raio.

15. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$
16. $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$
17. $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$
18. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$

19. (a) Prove que o ponto médio do segmento de reta que liga $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é
    $$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$
    (b) Determine o comprimento da mediana do triângulo com vértices em $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 0, 5)$ e $C(4, 1, 5)$.

20. Estabeleça a equação de uma esfera que tenha um diâmetro com pontos terminais dados por $(2, 1, 4)$ e $(4, 3, 10)$.

21. Estipule as equações das esferas com centro em $(2, -3, 6)$ e tangência (a) no plano xy, (b) no plano yz e (c) no plano xz.

22. Determine a equação da maior esfera com centro em $(5, 4, 9)$ contida no primeiro octante.

23–34 □ Descreva em palavras a região de $\mathbb{R}^3$ representada pela equação ou inequação.

23. $y = -4$
24. $x = 10$
25. $x > 3$
26. $y \geq 0$
27. $0 \leq z \leq 6$
28. $y = z$
29. $x^2 + y^2 + z^2 > 1$
30. $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25$
31. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z < 3$
32. $x^2 + y^2 = 1$
33. $x^2 + z^2 \leqslant 9$
34. $xyz = 0$

35–38 □ Escreva inequações para descrever a região dada.

35. Semi-espaço de todos os pontos que estão à esquerda do plano xz.

36. Caixa retangular sólida no primeiro octante limitada pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$.

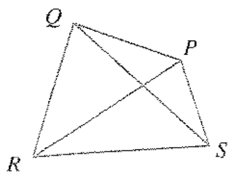
37. A região constituída por todos os pontos entre (mas não sobre) as esferas de raio r e R centradas na origem, onde $r < R$.

38. O hemisfério superior sólido da esfera de raio 2 centrada na origem.

4. Escreva cada combinação de vetores como um único vetor.

(a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (b) $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$

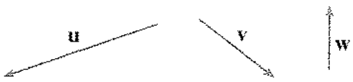
(c) $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PS}$ (d) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$



5. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

(c) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (d) $\mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$

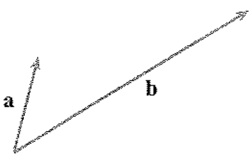


6. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

(c) $2\mathbf{a}$ (d) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$

(e) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (f) $\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$



7–12 □ Determine o vetor **a** com representação dada pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$. Desenhe $\overrightarrow{AB}$ e o equivalente com início na origem.

7. $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$ **8.** $A(-2, -2)$, $B(5, 3)$

9. $A(-1, -1)$, $B(-3, 4)$ **10.** $A(-2, 2)$, $B(3, 0)$

11. $A(0, 3, 1)$, $B(2, 3, -1)$ **12.** $A(4, 0, -2)$, $B(4, 2, 1)$

13–16 □ Determine a soma dos vetores dados e ilustre geometricamente.

13. $\langle 3, -1 \rangle$, $\langle -2, 4 \rangle$ **14.** $\langle -2, -1 \rangle$, $\langle 5, 7 \rangle$

15. $\langle 0, 1, 2 \rangle$, $\langle 0, 0, -3 \rangle$ **16.** $\langle -1, 0, 2 \rangle$, $\langle 0, 4, 0 \rangle$

17–22 □ Determine $|\mathbf{a}|$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$ e $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$.

17. $\mathbf{a} = \langle -4, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 2 \rangle$

18. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

19. $\mathbf{a} = \langle 6, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 5, -2 \rangle$

20. $\mathbf{a} = \langle -3, -4, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 2, -3 \rangle$

21. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

22. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

23–25 □ Determine o vetor unitário com mesma direção e sentido que o vetor dado.

23. $\langle 9, -5 \rangle$ **24.** $12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

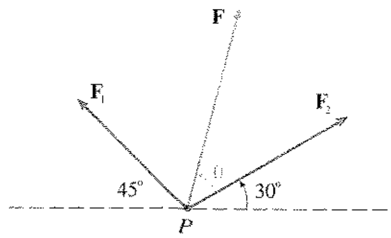
25. $8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

26. Ache um vetor que possui a mesma direção que $\langle -2, 4, 2 \rangle$, mas tem comprimento 6.

27. Se $\mathbf{v}$ está no primeiro quadrante e faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo x-positivo e $|\mathbf{v}| = 4$, ache as componentes de $\mathbf{v}$.

28. Se uma criança puxa um trenó na neve com força de 50 N a um ângulo de 38º com relação à horizontal, ache as componentes horizontal e vertical da força.

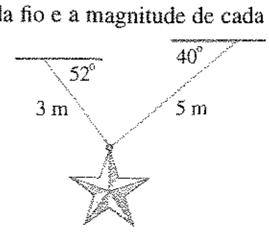
29. Duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ com grandezas 10 lb e 12 lb agem sobre um objeto em um ponto P como mostrado na figura. Determine a força resultante $\mathbf{F}$ agindo em P assim como sua magnitude, direção e sentido. (Indique a direção determinando o ângulo θ exposto na figura.)



30. Velocidades têm módulo, direção e sentido, sendo portanto vetores. O módulo de uma velocidade é chamado *rapidez*. Suponha que esteja ventando na direção N45°W a uma velocidade de 50 km/h. (Isso significa que a direção da qual está ventando está 45° a oeste da direção com sentido para o norte.) Um piloto está virando seu avião na direção N60°E a uma velocidade relativa (velocidade em ar parado) de 250 km/h. O *curso verdadeiro* ou *trajetória* do avião é a direção da resultante dos vetores velocidades do avião e do vento. A *rapidez em relação ao solo* do avião é o módulo da resultante. Determine a trajetória real e a rapidez em relação ao solo do avião.

31. Uma mulher anda em direção ao oeste no tombadilho de um navio a 3 mi/h. O navio está se movendo em direção ao norte com rapidez de 22 mi/h. Determine a rapidez e a direção da mulher em relação à superfície da água.

32. Cordas de 3 m e 5 m de comprimento são atadas na decoração natalina que está suspensa sobre uma praça. A decoração tem uma massa de 5 kg. As cordas, atadas em diferentes alturas, fazem ângulos de 52° e 40° com a horizontal. Determine a tensão em cada fio e a magnitude de cada tensão.



12.3 Exercícios

1. Quais das seguintes expressões têm significado? Quais não fazem sentido? Explique.
   (a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ (b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
   (c) $|\mathbf{a}|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
   (e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (f) $|\mathbf{a}| \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

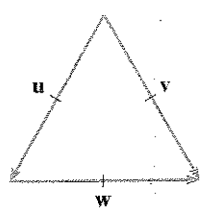
2. Determine o produto escalar de dois vetores cujas normas são respectivamente 6 e $\frac{1}{3}$ e o ângulo entre eles é $\pi/4$.

3–10 □ Determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

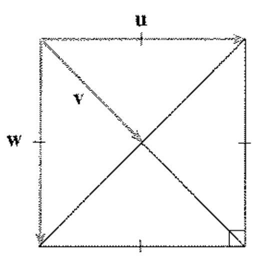
3. $\mathbf{a} = \langle 4, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 6 \rangle$
4. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -8, -3 \rangle$
5. $\mathbf{a} = \langle 5, 0, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -1, 10 \rangle$
6. $\mathbf{a} = \langle s, 2s, 3s \rangle$, $\mathbf{b} = \langle t, -t, 5t \rangle$
7. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$
8. $\mathbf{a} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
9. $|\mathbf{a}| = 12$, $|\mathbf{b}| = 15$, o ângulo entre **a** e **b** é $\pi/6$
10. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 10$, o ângulo entre **a** e **b** é 120°

11–12 □ Se **u** é um vetor unitário, determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

11.



12.



13. (a) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$.
    (b) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$.

14. Um vendedor vende a hambúrgueres, b cachorros-quentes e c refrigerantes em um determinado dia. Ele cobra \$ 2 o hambúrguer, \$ 1,50 o cachorro-quente e \$ 1 o refrigerante. Se $\mathbf{A} = \langle a, b, c \rangle$ e $\mathbf{P} = \langle 2, 1{,}5, 1 \rangle$, qual o significado do produto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$?

15–20 □ Determine o ângulo entre os vetores. (Estabeleça inicialmente uma expressão exata e depois aproxime o valor até o grau mais próximo.)

15. $\mathbf{a} = \langle 3, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 12 \rangle$
16. $\mathbf{a} = \langle \sqrt{3}, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 5 \rangle$
17. $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 0, -1 \rangle$
18. $\mathbf{a} = \langle 6, -3, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 1, -2 \rangle$
19. $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
20. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

21–22 □ Determine, aproximando o valor até o grau mais próximo, os três ângulos do triângulo cujos vértices são dados.

21. $A(1, 0)$, $B(3, 6)$, $C(-1, 4)$
22. $D(0, 1, 1)$, $E(-2, 4, 3)$, $F(1, 2, -1)$

23–28 □ Determine se os vetores dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois.

23. (a) $\mathbf{a} = \langle -5, 3, 7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -8, 2 \rangle$
    (b) $\mathbf{a} = \langle 4, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 2 \rangle$
    (c) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
    (d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

24. (a) $\mathbf{u} = \langle -3, 9, 6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, -12, -8 \rangle$
    (b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
    (c) $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -b, a, 0 \rangle$

25. Use os valores para decidir se o triângulo com vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$, e $R(6, -2, -5)$ é retângulo.

26. Para que valores de b são os vetores $\langle -6, b, 2 \rangle$ e $\langle b, b^2, b \rangle$ ortogonais?

27. Determine um vetor unitário ortogonal $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

28. Ache dois valores unitários que façam um ângulo de 60º com $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.

29–33 □ Determine os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor. (Forneça o ângulo diretor aproximado até o grau mais próximo.)

29. $\langle 3, 4, 5 \rangle$
30. $\langle 1, -2, -1 \rangle$
31. $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
32. $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
33. $\langle c, c, c \rangle$, onde $c > 0$

34. Se um vetor tem ângulos diretores $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/3$, determine o terceiro ângulo diretor γ.

35–40 □ Determine o vetor projeção e a projeção escalar de **b** sobre **a**.

35. $\mathbf{a} = \langle 3, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 0 \rangle$
36. $\mathbf{a} = \langle 1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, 1 \rangle$
37. $\mathbf{a} = \langle 4, 2, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 1 \rangle$
38. $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 3, 4 \rangle$
39. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
40. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

41. Mostre que o vetor $\text{orth}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ é ortogonal a **a**. (Esse vetor é chamado **projeção ortogonal** de **b**.)

42. Para os vetores do Exercício 36, determine $\text{orth}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ e ilustre esboçando os vetores **a**, **b**, $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ e $\text{orth}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$.

43. Se $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$, determine um vetor **b** tal que $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = 2$.

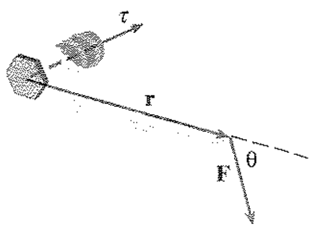


FIGURA 4

A idéia de produto vetorial aparece muito freqüentemente em física. Em particular, considere uma força **F** agindo em um corpo rígido em um ponto fixado dado pelo vetor de posição **r**. (Por exemplo: se apertarmos um parafuso utilizando uma chave de boca como na Figura 4, conseguiremos o efeito de girá-lo.) O **torque** $\boldsymbol{\tau}$ (em relação à origem) é definido pelo produto vetorial dos vetores de posição e força

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

e mede a tendência de um corpo rodar em torno da origem. A direção do vetor torque indica o eixo de rotação. De acordo com o Teorema 6, o módulo do torque é

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen}\theta$$

onde θ é o ângulo entre o vetor de posição e o vetor força. Observe que o único componente da força **F** que pode causar a rotação do objeto é o perpendicular a **r**, ou seja, $|\mathbf{F}| \operatorname{sen}\theta$. O módulo do torque é igual à área do paralelogramo determinado por **r** e **F**.

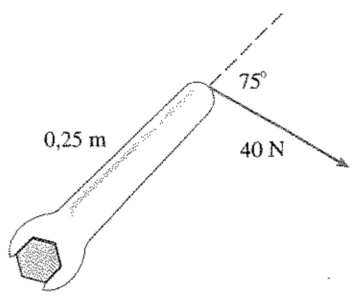


FIGURA 5

EXEMPLO 6 □ Um parafuso é apertado por uma chave de boca que aplica uma força de 40 N em uma chave de 0,25 m, como mostrado na Figura 5. Determine o módulo do torque em torno do centro do parafuso.

SOLUÇÃO O módulo do vetor torque é

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} 75° = (0{,}25)(40) \operatorname{sen} 75°$$
$$= 10 \operatorname{sen} 75° \approx 9{,}66 \text{ N·m} = 9{,}66 \text{ J}$$

Se o parafuso tem a rosca direita, o vetor torque é

$$\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|\,\mathbf{n} \approx 9{,}66\mathbf{n}$$

onde **n** é um vetor unitário com direção perpendicular à página e sentido de entrar no papel. □

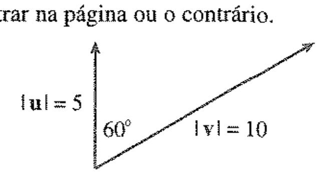
12.4 Exercícios

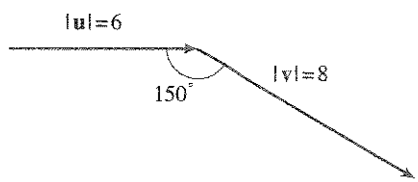
1–7 □ Determine o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e verifique que ele é ortogonal **a** e **b**.

1. $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 3, 1 \rangle$
2. $\mathbf{a} = \langle 5, 1, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 0, 2 \rangle$
3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
4. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
5. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
6. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$
7. $\mathbf{a} = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$

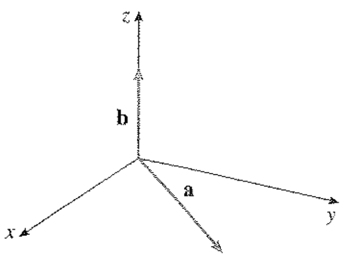
8. Se $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Esboce **a**, **b** e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vetores com início na origem.
9. Diga se as afirmações a seguir fazem sentido. Se não fizerem, explique por quê. Se fizerem, diga se correspondem a um vetor ou a um escalar.
   (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
   (c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (d) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
   (e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ (f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

10–11 □ Calcule $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ e determine se $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tem o sentido de entrar na página ou o contrário.

10.


11.


12. A figura mostra um vetor **a** pertencente ao plano xy e um vetor **b** na direção de **k**. Seus módulos são $|\mathbf{a}| = 3$ e $|\mathbf{b}| = 2$.
(a) Calcule $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.
(b) Utilize a regra da mão direita para decidir se os componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ são positivos, negativos ou nulos.



13. Se $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 3 \rangle$, calcule $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

14. Se $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 0 \rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 0, 0, -4 \rangle$, mostre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

15. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a $\langle 1, -1, 1 \rangle$ quanto a $\langle 0, 4, 4 \rangle$.

16. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ quanto a $2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

17. Mostre que $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{a} \times \mathbf{0}$ para qualquer vetor **a** em V_3.

18. Mostre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ para todos os vetores **a** e **b** em V_3.

19. Prove a Propriedade 1 do Teorema 8.

20. Prove a Propriedade 2 do Teorema 8.

21. Prove a Propriedade 3 do Teorema 8.

22. Prove a Propriedade 4 do Teorema 8.

23. Determine a área do paralelogramo com vértices em $A(-2, 1)$, $B(0, 4)$, $C(4, 2)$, e $D(2, -1)$.

24. Determine a área do paralelogramo com vértices em $K(1, 2, 3)$, $L(1, 3, 6)$, $M(3, 8, 6)$, e $N(3, 7, 3)$.

25–28 □ (a) Ache um vetor ortogonal ao plano que passa pelos pontos P, Q e R e (b) calcule a área do triângulo PQR.

25. $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$, $R(0, 0, 3)$

26. $P(2, 1, 5)$, $Q(-1, 3, 4)$, $R(3, 0, 6)$

27. $P(0, -2, 0)$, $Q(4, 1, -2)$, $R(5, 3, 1)$

28. $P(2, 0, -3)$, $Q(3, 1, 0)$, $R(5, 2, 2)$

29–30 □ Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c**.

29. $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 4, -2, 5 \rangle$

30. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

31–32 □ Calcule o volume do paralelepípedo com lados adjacentes PQ, PR e PS.

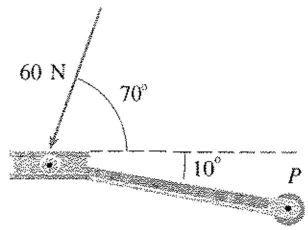
31. $P(2, 0, -1)$, $Q(4, 1, 0)$, $R(3, -1, 1)$, $S(2, -2, 2)$

32. $P(0, 1, 2)$, $Q(2, 4, 5)$, $R(-1, 0, 1)$, $S(6, -1, 4)$

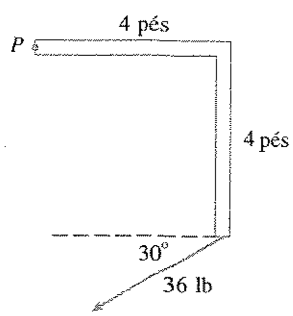
33. Utilize o produto misto para verificar se os vetores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ são coplanares.

34. Use o produto misto para determinar se os pontos $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 4, 6)$, $R(3, -1, 2)$ e $S(6, 2, 8)$ pertencem ao mesmo plano.

35. O pedal de uma bicicleta é empurrado por um pé com uma força de 60 N, como mostrado. A haste do pedal tem 18 cm de comprimento. Determine o módulo do torque em P.



36. Determine a intensidade do torque em P se for aplicada uma força de 36 lb, como mostrado.



37. Uma chave de boca com 30 cm de comprimento posicionada ao longo do eixo y aperta um parafuso colocado na origem. Considere uma força aplicada no final do cabo da chave com direção dada por $\langle 0, 3, -4 \rangle$. Determine o módulo da força necessária para que o torque resultante no parafuso seja de 100 J.

38. Seja $\mathbf{v} = 5\mathbf{j}$ e seja **u** um vetor com norma 3 com início na origem e que gira no plano xy. Determine o máximo e o mínimo valor possível para $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Qual a direção e o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

39. (a) Seja P um ponto não pertencente à reta L que passa pelos pontos Q e R. Mostre que a distância d do ponto P até a reta L é

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

onde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$.
(b) Utilize a fórmula da parte (a) do exercício para determinar a distância do ponto $P(1, 1, 1)$ à reta que passa por $Q(0, 6, 8)$ e $R(-1, 4, 7)$.

4. A reta que passa pela origem e é paralela à reta $x = 2t$, $y = 1 - t$, $z = 4 + 3t$

5. A reta que passa pelo ponto (1, 0, 6) e é perpendicular ao plano $x + 3y + z = 5$

6–12 □ Determine as equações paramétricas e na forma simétrica para a reta.

6. Reta que passa pela origem e pelo ponto (1, 2, 3)

7. Reta que passa pelos pontos (1, 3, 2) e (−4, 3, 0)

8. Reta que passa pelos pontos (6, 1, −3) e (2, 4, 5)

9. Reta que passa pelos pontos $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ e (2, 1, −3)

10. Reta que passa por (2, 1, 0) e é perpendicular à reta $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. Reta que passa por (1, −1, 1) e é paralela à reta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$

12 Reta que é a interseção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$

13. A reta que passa pelos pontos (−4, −6, 1) e (−2, 0 −3) é paralela à reta que passa pelos pontos (10, 18, 4) e (5, 3, 14).

14. A reta que passa pelos pontos (4, 1, −1) e (2, 5, 3) é perpendicular à reta que passa pelos pontos (−3, 2, 0) e (5, 1, 4)?

15. (a) Determine as equações na forma simétrica da reta que passa pelo ponto (0, 2, −1) e é paralela à reta com equações paramétricas $x = 1 + 2t$, $y = 3t$, $z = 5 - 7t$.
    (b) Determine os pontos nos quais a reta da parte (a) intercepta os planos coordenados.

16. (a) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto (5, 1, 0) e que é perpendicular ao plano $2x - y + z = 1$.
    (b) Em que pontos essa reta intercepta os planos coordenados?

17. Ache a equação normal para o segmento de reta de (2, −1, 4) a (4, 6, 1).

18. Ache as equações paramétricas para o segmento de reta de (10, 3, 1) a (5, 6, −3).

19–22 □ Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine seu ponto de interseção.

19. L_1: $x = -6t$, $y = 1 + 9t$, $z = -3t$

    L_2: $x = 1 + 2s$, $y = 4 - 3s$, $z = s$

20. L_1: $x = 1 + 2t$, $y = 3t$, $z = 2 - t$

    L_2: $x = -1 + s$, $y = 4 + s$, $z = 1 + 3s$

21. L_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$, L_2: $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$,

22. L_1: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$

    L_2: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$

23–38 □ Determine a equação do plano.

23. O plano que passa pelo ponto (6, 3, 2) e é perpendicular ao vetor ⟨−2, 1, 5⟩

24. O plano que passa pelo ponto (4, 0, −3) e cujo vetor normal é $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

25. O plano que passa pelo ponto (1, −1, 1) e cujo vetor normal é $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

26. O plano que passa pelo ponto (−2, 8, 10) e é perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - 3t$

27. O plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $2x - y + 3z = 1$

28. O plano que passa pelo ponto (−1, 6, −5) e é paralelo ao plano $x + y + z + 2 = 0$

29. O plano que passa pelo ponto (4, −2, 3) e é paralelo ao plano $3x - 7z = 12$

30. O plano que contém a reta $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 8 - t$ e é paralelo ao plano $2x + 4y + 8z = 17$

31. O plano que passa pelos pontos (0, 1, 1), (1, 0, 1) e (1, 1, 0)

32. O plano que passa pela origem e pelos pontos (2, −4, 6) e (5, 1, 3)

33. O plano que passa pelos pontos (3, −1, 2), (8, 2, 4) e (−1, −2, −3)

34. O plano que passa pelo ponto (1, 2, 3) e contém a reta $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$

35. O plano que passa pelo ponto (6, 0, −2) e contém a reta $x = 4 - 2t$, $y = 3 + 5t$, $z = 7 + 4t$

36. O plano que passa pelo ponto (1, −1, 1) e contém a reta com equação na forma simétrica $x = 2y = 3z$

37. O plano que passa pelo ponto (−1, 2, 1) e contém a reta obtida pela interseção dos planos $x + y - z = 2$ e $2x - y + 3z = 1$

38. Plano que passa pela reta obtida pela interseção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$

39–41 □ Determine o ponto dado pela interseção da reta e do plano especificados.

39. $x = 3 - t$, $y = 2 + t$, $z = 5t$; $x - y + 2z = 9$

40. $x = 1 + 2t$, $y = 4t$, $z = 2 - 3t$; $x + 2y - z + 1 = 0$

41. $x = y - 1 = 2z$; $4x - y + 3z = 8$

42. Onde a reta que passa pelos pontos (1, 0, 1) e (4, −2, 2) intercepta o plano $x + y + z = 6$?

43. Determine as coordenadas do vetor diretor da reta obtida pela interseção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.

44. Determine o cosseno do ângulo entre os planos $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$.

45–50 □ Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.

45. $x + 4y - 3z = 1, \quad -3x + 6y + 7z = 0$

46. $2z = 4y - x, 3x - 12y + 6z = 1$

47. $x + y + z = 1, \quad x - y + z = 1$

48. $2x - 3y + 4z = 5, \quad x + 6y + 4z = 3$

49. $x = 4y - 2z, \quad 8y = 1 + 2x + 4z$

50. $x + 2y + 2z = 1, \quad 2x - y + 2z = 1$

51–52 □ (a) Determine a equação na forma simétrica da reta de interseção dos planos e (b) determine o ângulo entre os planos.

51. $x + y - z = 2, \quad 3x - 4y + 5z = 6$

52. $x - 2y + z = 1, \quad 2x + y + z = 1$

53–54 □ Determine as equações na forma paramétrica da reta obtida pela interseção dos planos.

53. $z = x + y, \quad 2x - 5y - z = 1$

54. $2x + 5z + 3 = 0, \quad x - 3y + z + 2 = 0$

55. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são eqüidistantes dos pontos $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$.

56. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são eqüidistantes dos pontos $(-4, 2, 1)$ e $(2, -4, 3)$.

57. Determine a equação do plano x que intercepta a, o plano que intercepta b e o plano z que intercepta c.

58. (a) Determine o ponto dado pela interseção das retas:

$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 2 \rangle$$

e

$$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2 \rangle + s\langle -1, 1, 0 \rangle$$

(b) Determine a equação do plano que contém essas retas.

59. Determine se as equações paramétricas da reta, que passam pelo ponto $(0, 1, 2)$, são paralelas ao plano $x + y + z = 2$ e perpendiculares à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$.

60. Determine se as equações paramétricas da reta, que passam pelo ponto $(0, 1, 2)$, são perpendiculares à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t$, $z = 2t$, e interceptam essa reta.

61. Quais dos quatro planos seguintes são paralelos? Existem dois coincidentes?

P_1: $4x - 2y + 6z = 3$ $\quad$ P_2: $4x - 2y - 2z = 6$

P_3: $-6x + 3y - 9z = 5$ $\quad$ P_4: $z = 2x - y - 3$

62. Quais das quatro retas seguintes são paralelas? Existem duas coincidentes?

$$L_1\colon x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 2 - 5t$$
$$L_2\colon x + 1 = y - 2 = 1 - z$$
$$L_3\colon x = 1 + t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t$$
$$L_4\colon \mathbf{r} = \langle 2, 1, -3 \rangle + t\langle 2, 2, -10 \rangle$$

63–64 □ Utilize a fórmula que aparece no Exercício 39 da Seção 12.4 para determinar a distância do ponto à reta dada.

63. $(1, 2, 3)$; $\quad x = 2 + t,\ y = 2 - 3t,\ z = 5t$

64. $(1, 0, -1)$; $\quad x = 5 - t,\ y = 3t,\ z = 1 + 2t$

65–66 □ Determine a distância do ponto ao plano dado.

65. $(2, 8, 5), \quad x - 2y - 2z = 1$

66. $(3, -2, 7), \quad 4x - 6y + z = 5$

67–68 □ Determine a distância entre os planos paralelos dados

67. $z = x + 2y + 1, \quad 3x + 6y - 3z = 4$

68. $3x + 6y - 9z = 4, \quad x + 2y - 3z = 1$

69. Mostre que a distância entre os planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ é

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

70. Determine as equações dos planos que são paralelos ao plano $x + 2y - 2z = 1$ e distantes duas unidades um do outro.

71. Mostre que as retas com equações simétricas $x = y = z$ e $x + 1 = y/2 = z/3$ são reversas e determine a distância entre elas.

72. Determine a distância entre as retas reversas com equações paramétricas $x = 1 + t$, $y = 1 + 6t$, $z = 2t$

e $x = 1 + 2s$, $y = 5 + 15s$, $z = -2 + 6s$

73. Se a, b e c não são todos nulos, mostre que a equação $ax + by + cz + d = 0$ representa um plano e $\langle a, b, c \rangle$ é o vetor normal ao plano.

Dica: Suponha $a \neq 0$ e reescreva a equação na forma

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

74. Dê a interpretação geométrica de cada família de planos.

(a) $x + y + z = c$

(b) $x + y + cz = 1$

(c) $y \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta = 1$

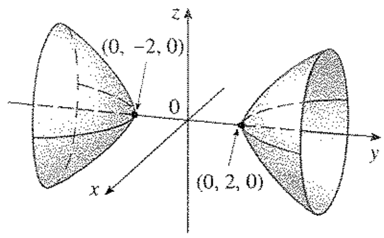


FIGURA 10

$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

A superfície não tem traço no plano xz, mas os traços nos planos verticais $y = k$ para $|k| > 2$ são as elipses

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1 \qquad y = k$$

que podem ser escritas como

$$\frac{x^2}{\frac{k^2}{4} - 1} + \frac{z^2}{2\left(\frac{k^2}{4} - 1\right)} = 1 \qquad y = k$$

Esses traços são usados para fazer o esboço na Figura 10.

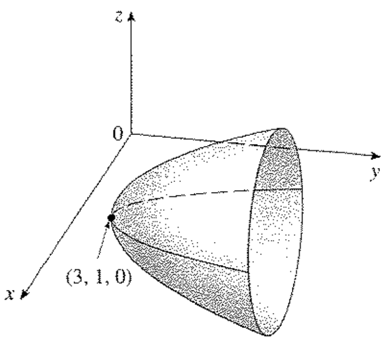


FIGURA 11

$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

EXEMPLO 8 □ Classifique a quádrica $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.

SOLUÇÃO Completando os quadrados, reescrevemos a equação como

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$$

Comparando essa equação com a Tabela 1, vemos que se trata de um parabolóide elíptico. Aqui, entretanto, o eixo de rotação do parabolóide é paralelo ao eixo y, e foi transladado de forma que o vértice é o ponto $(3, 1, 0)$. Os traços nos planos $y = k$ $(k > 1)$ são elipses

$$(x - 3)^2 + 2z^2 = k - 1 \qquad y = k$$

O traço no plano xy é uma parábola com equação $y = 1 + (x - 3)^2$, $z = 0$. O desenho do parabolóide está esboçado na Figura 11.

12.6 Exercícios

1. (a) O que a equação $y = x^2$ representa como uma curva em $\mathbb{R}^2$?
(b) O que ela representa como uma superfície em $\mathbb{R}^3$?
(c) O que a equação $z = y^2$ representa?

2. (a) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma curva em $\mathbb{R}^2$.
(b) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
(c) Descreva e esboce a superfície $z = e^y$.

3–8 □ Descreva e esboce o gráfico da superfície.

3. $y^2 + 4z^2 = 4$

4. $z = 4 - x^2$

5. $x - y^2 = 0$

6. $yz = 4$

7. $z = \cos x$

8. $x^2 - y^2 = 1$

9. (a) Ache e identifique os traços da superfície quádrica $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperbolóide de uma folha da Tabela 1.
(b) Se trocarmos a equação em (a) para $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, como isso afeta o gráfico?
(c) E se trocarmos a equação em (a) para $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0$?

10. (a) Ache e identifique os traços da superfície quádrica $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperbolóide de duas folhas da Tabela 1.
(b) Se a equação na parte (a) for trocada para $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, o que acontece com o gráfico? Esboce o novo gráfico.

11–20 □ Determine o traço da superfície dada nos planos $x = k$, $y = k$, $z = k$. Identifique a superfície e faça um esboço dela.

11. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$

12. $4y = x^2 + z^2$

13. $y^2 = x^2 + z^2$

14. $z = x^2 - y^2$

15. $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$

16. $25y^2 + z^2 = 100 + 4x^2$

17. $x^2 + 4z^2 - y = 0$

18. $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$

19. $y = z^2 - x^2$

20. $16x^2 = y^2 + 4z^2$

21–28 □ Case a equação com seu gráfico (identificado por I–VIII). Dê razões para sua escolha.

21. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

22. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

23. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

24. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

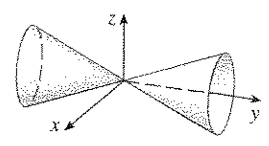
25. $y = 2x^2 + z^2$

26. $y^2 = x^2 + 2z^2$

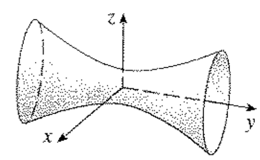
27. $x^2 + 2z^2 = 1$

28. $y = x^2 - z^2$

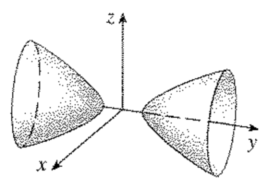
I



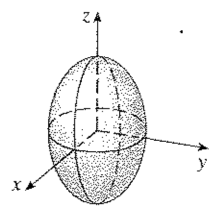
II



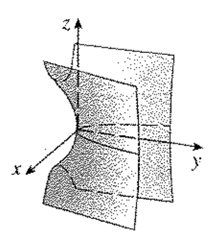
III



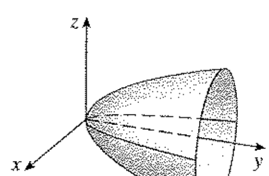
IV



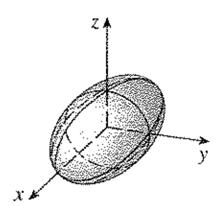
V



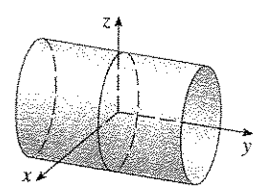
VI



VII



VIII



29–36 □ Coloque a equação na forma padrão, classifique a superfície e faça o esboço.

29. $z^2 = 4x^2 + 9y^2 + 36$

30. $x^2 = 2y^2 + 3z^2$

31. $x = 2y^2 + 3z^2$

32. $4x - y^2 + 4z^2 = 0$

33. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$

34. $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$

35. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$

36. $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$

37–40 □ Use o computador com um programa que trace superfícies tridimensionais. Experimente diversos pontos de vista e diversos tamanhos de janela de inspeção até conseguir uma boa visão da superfície.

37. $z = 3x^2 - 5y^2$

38. $8x^2 + 15y^2 + 5z^2 = 100$

39. $z^2 = x^2 + 4y^2$

40. $z = y^2 + xy$

41. Desenhe a região delimitada pela superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leqslant z \leqslant 2$.

42. Desenhe a região delimitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.

43. Determine a equação da superfície obtida pela rotação da parábola $y = x^2$ em torno do eixo y.

44. Determine a equação da superfície obtida pela rotação da reta $x = 3y$ em torno do eixo x.

45. Determine a equação da superfície constituída de todos os pontos que são eqüidistantes do ponto $(-1, 0, 0)$ e do plano $x = 1$. Identifique essa superfície.

46. Determine a equação da superfície constituída de todos os pontos P para os quais a distância de P ao eixo x é o dobro da distância de P ao plano yz. Identifique a superfície.

47. Mostre que, se o ponto (a, b, c) pertence ao parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, então as retas com equação paramétrica $x = a + t$, $y = b + t$, $z = c + 2(b - a)t$ e $x = a + t$, $y = b - t$, $z = c - 2(b + a)t$ estão contidas inteiramente no parabolóide. (Isso mostra que o parabolóide hiperbólico é o que é chamado **superfície regrada**; ele pode ser gerado pelo movimento de uma reta. De fato, esse exercício mostra que passando emr cada ponto do parabolóide hiperbólico existem duas retas geradoras. As únicas outras quádricas que têm superfície regrada são cilindros, cones e hiperbolóides de uma folha.)

48. Mostre que a curva obtida pela interseção das superfícies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ e $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ pertence a um plano.

49. Desenhe as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - y^2$ em uma mesma tela usando uma janela de tamanho $|x| \leqslant 1.2$, $|y| \leqslant 1.2$, e observe a curva da interseção. Mostre que a projeção dessa curva no plano xy é uma elipse.

12.7 Exercícios

1. O que são as coordenadas cilíndricas? Para que tipo de superfícies elas fornecem uma descrição conveniente?
2. O que são as coordenadas esféricas? Para que tipo de superfícies elas fornecem uma descrição conveniente?

3–8 □ Plote o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. Depois, determine as coordenadas retangulares do ponto.

3. $(2, \pi/4, 1)$
4. $(1, 3\pi/2, 2)$
5. $(3, 0, -6)$
6. $(1, \pi, e)$
7. $(4, -\pi/3, 5)$
8. $(5, \pi/6, 6)$

9–12 □ Converta de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas.

9. $(1, -1, 4)$
10. $(3, 3, -2)$
11. $(-1, -\sqrt{3}, 2)$
12. $(3, 4, 5)$

13–18 □ Plote o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. Depois, determine as coordenadas retangulares do ponto.

13. $(1, 0, 0)$
14. $(3, 0, \pi)$
15. $(1, \pi/6, \pi/6)$
16. $(5, \pi, \pi/2)$
17. $(2, \pi/3, \pi/4)$
18. $(2, \pi/4, \pi/3)$

19–22 □ Converta de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas.

19. $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$
20. $(0, \sqrt{3}, 1)$
21. $(0, -1, -1)$
22. $(-1, 1, \sqrt{6})$

23–26 □ Converta de coordenadas cilíndricas para coordenadas esféricas.

23. $(1, \pi/6, \sqrt{3})$
24. $(\sqrt{6}, \pi/4, \sqrt{2})$
25. $(\sqrt{3}, \pi/2, -1)$
26. $(4, \pi/8, 3)$

27–30 □ Converta de coordenadas esféricas para coordenadas cilíndricas.

27. $(2, 0, 0)$
28. $(2\sqrt{2}, 3\pi/2, \pi/2)$
29. $(8, \pi/6, \pi/2)$
30. $(4, \pi/4, \pi/3)$

31–36 □ Descreva em palavras a superfície cuja equação é dada a seguir.

31. $r = 3$
32. $\rho = 3$
33. $\phi = 0$
34. $\phi = \pi/2$
35. $\phi = \pi/3$
36. $\theta = \pi/3$

37–48 □ Identifique a superfície cuja equação é dada.

37. $z = r^2$
38. $r = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$
39. $\rho\cos\phi = 2$
40. $\rho\,\mathrm{sen}\,\phi = 2$
41. $r = 2\cos\theta$
42. $\rho = 2\cos\phi$
43. $r^2 + z^2 = 25$
44. $r^2 - 2z^2 = 4$
45. $\rho^2(\mathrm{sen}^2\phi\cos^2\theta + \cos^2\phi) = 4$
46. $\rho^2(\mathrm{sen}^2\phi - 4\cos^2\phi) = 1$
47. $r^2 = r$
48. $\rho^2 - 6\rho + 8 = 0$

49–56 □ Escreva a equação (a) em coordenadas cilíndricas e (b) em coordenadas esféricas.

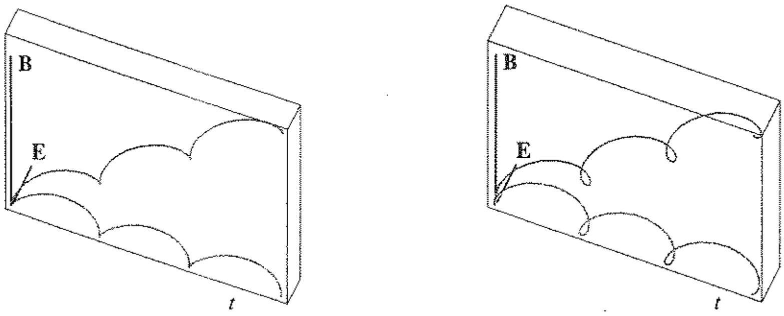
49. $z = x^2 + y^2$
50. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
51. $x = 3$
52. $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 0$
53. $x^2 - y^2 - 2z^2 = 4$
54. $y^2 + z^2 = 1$
55. $x^2 + y^2 = 2y$
56. $z = x^2 - y^2$

57–62 □ Esboce o desenho do sólido descrito pelas desigualdades.

57. $r^2 \leqslant z \leqslant 2 - r^2$
58. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad r \leqslant z \leqslant 2$
59. $\rho \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$
60. $2 \leqslant \rho \leqslant 3, \quad \pi/2 \leqslant \phi \leqslant \pi$
61. $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/6, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \sec\phi$
62. $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/3, \quad \rho \leqslant 2$

63. Uma concha cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno de 6 cm, e raio externo de 7 cm. Escreva as inequações que descrevem a concha em um sistema de coordenadas apropriado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas com respeito à concha.
64. (a) Ache as inequações que descrevem uma bola oca com diâmetro de 30 cm e espessura de 0,5 cm. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas que escolheu.
(b) Suponha que a bola seja cortada pela metade. Escreva as inequações que descrevem uma das metades.
65. Um sólido é constituído do conjunto de pontos que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Descreva o sólido utilizando inequações envolvendo coordenadas esféricas.
66. Utilize um dispositivo gráfico para desenhar o sólido envolvido pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 5 - x^2 - y^2$.
67. Utilize um dispositivo gráfico para desenhar um silo constituído de um cilindro com raio 3 e altura 10 sobreposto por um hemisfério.
68. A latitude e a longitude de um ponto P no hemisfério norte estão relacionadas às coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ como se segue. Tomamos a origem como o centro da Terra e a orientação positiva do eixo z passa pelo pólo norte. A orientação positiva do eixo x passa pelo ponto onde o primeiro meridiano (o meridiano de Greenwich, na Inglaterra) intercepta o equador. Assim a latitude de P é $\alpha = 90° - \phi°$ e a longitude é $\beta = 360° - \theta°$. Determine a distância no grande círculo entre Los Angeles (lat. 34,06° N, long. 118,25° W) e Montreal (lat. 45,50° N, long. 73,60° W). Tome o raio da Terra como sendo 3.960 mi. (Um grande círculo é a circunferência obtida pela interseção da esfera que representa o globo terrestre com um plano que passa pelo centro da Terra.)

estudada na Seção 10.1 [Figura 12(a)] ou é uma curva cuja projeção é a tricóide investigada no Exercício 38 da Seção 10.1 [Figura 12 (b)].



(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \operatorname{sen} t, 1 - \cos t, t \rangle$ (b) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2}\operatorname{sen} t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t \rangle$

FIGURA 12
Movimento de partícula carregada em campos elétrico e magnético orientados ortogonalmente

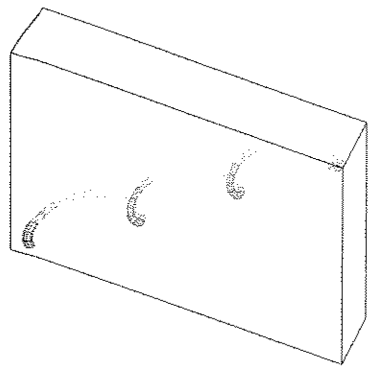


FIGURA 13

Para mais detalhes relativos à física envolvida e animações das trajetórias das partículas, veja os seguintes endereços na web:

- lompado.uah.edu/Links/CrossedFields.html
- www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html
- www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/

13.1 Exercícios

1–2 □ Determine o domínio das funções vetoriais.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t} \rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t-2}{t+2}\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \ln(9 - t^2)\,\mathbf{k}$

3–6 □ Calcule os limites.

3. $\lim_{t\to 0^+} \langle \cos t, \operatorname{sen} t, t \ln t \rangle$

4. $\lim_{t\to 0} \left\langle \dfrac{e^t - 1}{t}, \dfrac{\sqrt{1+t} - 1}{t}, \dfrac{3}{1+t} \right\rangle$

5. $\lim_{t\to 1} \left(\sqrt{t+3}\,\mathbf{i} + \dfrac{t-1}{t^2-1}\mathbf{j} + \dfrac{\operatorname{tg} t}{t}\mathbf{k} \right)$

6. $\lim_{t\to\infty} \left\langle \operatorname{arctg} t, e^{-2t}, \dfrac{\ln t}{t} \right\rangle$

7–14 □ Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com seta a direção na qual o parâmetro cresce.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle t^4 + 1, t \rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2 \rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos 2t, \operatorname{sen} 2t \rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3t, -t \rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, 3, \cos t \rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + t^6\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + \operatorname{sen} t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{k}$

15–18 □ Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga P e Q.

15. $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, 3)$

16. $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 3, 1)$

17. $P(1, -1, 2)$, $Q(4, 1, 7)$

18. $P(-2, 4, 0)$, $Q(6, -1, 2)$

19–24 □ Case as equações paramétricas com os gráficos (identificados com números de I–VI). Explique a razão de sua escolha.

19. $x = \cos 4t$, $y = t$, $z = \operatorname{sen} 4t$

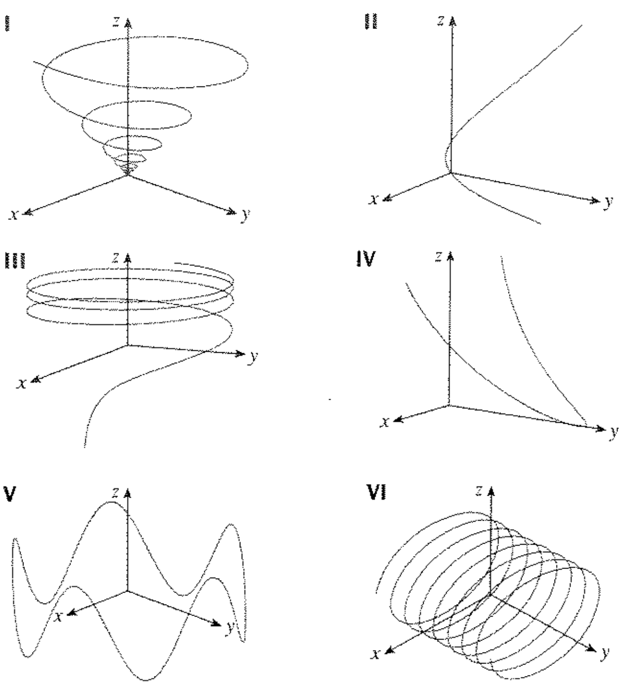
20. $x = t$, $y = t^2$, $z = e^{-t}$

21. $x = t$, $y = 1/(1 + t^2)$, $z = t^2$

22. $x = e^{-t}\cos 10t$, $y = e^{-t}\operatorname{sen} 10t$, $z = e^{-t}$

23. $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \operatorname{sen} 5t$

24. $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = \ln t$



25. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t\cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$ está no $z^2 = x^2 + y^2$, e use esse fato para esboçar a curva.

26. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ é a curva de interseção das superfícies $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Use esse fato para esboçar a curva.

27–30 □ Utilize computador para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a garantir que a visualização é a verdadeira.

27. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t^2 \rangle$

28. $\mathbf{r}(t) = \langle t^4 - t^2 + 1, t, t^2 \rangle$

29. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t} \rangle$

30. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} 3t \rangle$

31. Trace a curva com equações paramétricas $x = (1 + \cos 16t)\cos t$, $y = (1 + \cos 16t) \operatorname{sen} t$, $z = 1 + \cos 16t$. Explique sua aparência mostrando que a curva se desenvolve em um cone.

32. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0{,}25\cos^2 10t}\,\operatorname{sen} t$$
$$z = 0{,}5\cos 10t$$

Explique a aparência da curva mostrando que ela se desenvolve em uma esfera.

33. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ passa pelos pontos $(1, 4, 0)$ e $(9, -8, 28)$ e não passa pelo ponto $(4, 7, -6)$.

34–36 □ Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela interseção de duas superfícies.

34. O cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e a superfície $z = xy$

35. O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 1 + y$

36. O parabolóide $z = 4x^2 + y^2$ e o cilindro parabólico $y = x^2$

37. Tente esboçar à mão a curva obtida pela interseção do cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ com o cilindro parabólico $z = x^2$. Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

38. Tente esboçar à mão a interseção do cilindro parabólico $y = x^2$ com a metade superior do elipsóide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Escreva então as equações paramétricas para a curva e utilize o computador para traçá-la.

39. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes, é sempre importante saber se eles vão se colidir. (Um míssil vai atingir seu alvo móvel? Duas aeronaves vão se colidir?) As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição *no mesmo instante*. Suponha que as trajetórias das duas sejam dadas pelas seguintes funções vetoriais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

para $t \geq 0$. As partículas colidem?

40. Duas partículas viajam ao longo das curvas espaciais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

41. Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam funções vetoriais que possuem limites quando $t \to a$ e seja c uma constante. Prove as seguintes propriedades de limites.

(a) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(b) $\lim_{t \to a} c\mathbf{u}(t) = c \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t)$

(c) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(d) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

42. A visão do nó trevo apresentada na Figura 8 é correta, mas não muito reveladora. Use as equações paramétricas

$$x = (2 + \cos 1{,}5t)\cos t \qquad y = (2 + \cos 1{,}5t)\operatorname{sen} t$$
$$z = \operatorname{sen} 1{,}5t$$

para esboçar a curva à mão vista de cima deixando em branco os pontos onde a curva se sobrepõe. Comece mostrando que