TopAL - Tópicos de Álgebra Linear
Lista 1

1. Seja $V = \{u \in \mathbb{R} : u > 0\}$. Definimos a adição em V como sendo a multiplicação dos números reais, isto é, $u \oplus v = uv, \forall u, v \in V$ e a multiplicação de um elemento de V por um número real α por

$$\alpha u = u^\alpha, \quad \forall u \in V, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$$

   Mostre que V é um espaço vetorial.

2. Sejam U e V espaços vetoriais sobre $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Mostre que $U \times V = \{(u, v) : u \in U, v \in V\}$ é um espaço vetorial em relação às seguintes operações:
   (a) $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$;
   (b) $\alpha(u, v) = (\alpha u, \alpha v)$.

3. Seja $\mathbb{K}$ um corpo. Mostre que $\mathbb{K}^n, (n \in \mathbb{N}, n \geq 1)$, é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

4. Seja V um espaço vetorial. Mostre que:
   (a) $-(-v) = v, \forall v \in V$.
   (b) Se $u, w \in V$, então existe um único $v \in V$ tal que $u + v = w$.
   (c) $(\alpha - \beta)u = \alpha u - \beta u, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall u \in V$.
   (d) $\alpha(u - v) = \alpha u - \alpha v, \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall u, v \in V$.

5. Seja $V = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$. Quais dos seguintes conjuntos de funções são espaços vetoriais?
   (a) $A = \{f \in V | (f(x))^3 = f(x^3)\}$.
   (b) $B = \{f \in V | f(-\pi) = f(\pi)\}$.
   (c) $C = \{f \in V | f(\pi) = 0\}$.
   (d) $D = \{f \in V | f$ é limitada$\}$.

6. Sejam $V = \{f | f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\} = F(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $V_p \subset V$ o conjunto das funções pares, isto é, $V_p = \{f \in V | f(-x) = f(x)\}$ e $V_i \subset V$ o conjunto das funções ímpares, isto é, $V_i = \{f \in V | f(-x) = -f(x)\}$. Mostre que
   (a) V_p e V_i são subespaços vetoriais de V;
   (b) $V = V_p + V_i$;
   (c) $V_p \cap V_i = \{0\}$.

7. Sejam $V = M_{n \times n}(\mathbb{K}); S \subset V$ o conjunto das matrizes simétricas; $A \subset V$ o conjunto das matrizes antisimétricas. Mostre que
   (a) A e S são subespaços vetoriais de V;
   (b) $V = A + S$;
   (c) $A \cap S = \{0\}$.

8. Quais dos seguintes subconjuntos abaixo são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$?

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^3 = 0\}$.

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y \in \mathbb{Z}\}$.

(c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | y \text{ é irracional}\}$.

(d) $D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | ax + by + cz = 0, \text{ com } a^2 + b^2 + c^2 \neq 0\}$.

(e) $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

9. Sejam $V = M_{2\times 2}(\mathbb{R}), W_1, W_2 \subset V$ os subconjuntos dados por

$$W_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & 0 \end{bmatrix} | x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

e

$$W_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{bmatrix} | x, y, \in \mathbb{R} \right\}.$$

Mostre que

(a) W_1 e W_2 são subespaços vetoriais de V;

(b) $V = W_1 + W_2$.

(c) Calcule $W_1 \cap W_2$.

10. Determine o conjunto de geradores de $U \cap V$, onde

$$U = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x + y - z + t = 0\}$$

e

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - y - z - t = 0\}.$$

11. Seja

$$U = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Determine, se possível, W tal que $M_{2\times 2}(\mathbb{R}) = U \oplus W$.

12. Sejam $W_1 = [(1, 0, 2), (1, 1, 2)]$ e $W_2 = [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]$ subespaços do $\mathbb{R}^3$. Encontre uma base para $W_1 \cap W_2$.

13. Verifique que $\{1, 1 - t, 1 + t^2, 1 - t - t^2 - t^3\}$ é uma base para o espaço vetorial $\mathbb{K}_3[t]$, dos polinômios de grau menor ou igual a 3.

14. Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $W = [(1, 0, 0)]$ e $U = [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]$. Mostre que $V = W \oplus U$.

15. Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Verifique se os seguintes pares de vetores são L. I..

(a) $\{\sin(t), \cos(t)\}$,

(b) $\{t, e^t\}$,

(c) $\{t, \sin(t)\}$,

(d) $\{\sin(t), \sin(2t)\}$.

16. Suponha que $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$ seja uma base de um espaço vetorial V. Mostre que $\beta' = \{v_1, v_1 + v_2, \ldots, v_1 + v_2 + \cdots + v_n\}$ é uma base de V. Calcule a matriz de mudança de base $[I]^{\beta}_{\beta'}$.

17. Seja $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 | x - 3y + 2z + t = 0\}$. Encontre uma base para W.

18. (a) Seja $W \subset M_3(\mathbb{R})$ o subespaço das matrizes simétricas. Encontre uma base para W.
    (b) Mostre que o conjunto $\{1, \cos(x), \cos(2x)\}$ é L.I..
    (c) Sejam $v = (a, b)$ e $w = (c, d)$ vetores do $\mathbb{R}^2$. Mostre que:
        i. Se $ad - bc = 0$, então $\{v, w\}$ é L.D..
        ii. Se $ad - bc \neq 0$, então $\{v, w\}$ é L.I..