CM202 - Cálculo Diferencial e Integral II

24 de Novembro de 2015 - Prova 2

Gabarito

1. Calcule as integras a seguir

(a) $\boxed{10}$ $\displaystyle\int_1^2\int_0^1 (x^2 - 2y^3)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Solution:

$$\int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - 2y^3x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=1}\mathrm{d}y = \int_1^2\left(\frac{1}{3} - 2y^3\right)\mathrm{d}y = \frac{1}{3}y\Bigg|_1^2 - \frac{y^4}{2}\Bigg|_1^2$$
$$= \frac{1}{3}(2-1) - \frac{16-1}{2} = \frac{1}{3} - \frac{15}{2} = -\frac{43}{6}$$

(b) $\boxed{15}$ $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 e^{x^3}y\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Solution: Nessa ordem não vamos conseguir integrar. Vamos mudar a ordem da integral. Essa região é descrita como $0 \leq y \leq 1$ e $y \leq x \leq 1$. Mudando a ordem, temos $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq x \leq 1$. Então,

$$\int_0^1\int_0^x e^{x^3}y\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{x^3}\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^2e^{x^3}\mathrm{d}x$$

Fazendo a mudança $u = x^3$, temos $\mathrm{d}u = 3x^3\mathrm{d}x$. Daí,

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^2e^{x^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1\frac{e^u}{3}\mathrm{d}u = \frac{1}{6}e^u\Bigg|_0^1 = \frac{e-1}{6}.$$

(c) $\boxed{15}$ $\displaystyle\iint_R e^{(x+2y)/5}\mathrm{d}A$, onde R é o paralelograma de vértices $(0,0)$, $(3,1)$ e $(1,2)$ e $(4,3)$.

Solution: Nessa região o melhor a fazer é mudar de variáveis. Com $x = 3u + v$ e $y = u + 2v$, temos um quadrado de vértices $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$. O Jacobiano é 5, e a integral vira

$$\int_0^1\int_0^1 e^{u+v}5\ \mathrm{d}v\mathrm{d}u = 5\int_0^1\int_0^1 e^ue^v\mathrm{d}v\mathrm{d}u = 5\left[\int_0^1 e^u\mathrm{d}u\right]\left[\int_0^1 e^v\mathrm{d}v\right] = 5(e-1)^2$$

(d) $\boxed{15}$ $\displaystyle\iint_R\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cos\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathrm{d}A$, onde R é a região entre as circunferências de raios ε e 1, com $\varepsilon \in (0,1)$ e no primeiro quadrante.

Solution: Nessa região temos $\varepsilon \le r \le 1$ e $0 \le \theta \le \pi/2$, com $x = r\cos(\theta)$ e $y = r\sin(\theta)$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2}\int_\varepsilon^1 \frac{r\cos(\theta)}{r^2}\cos\left(\frac{r\sin(\theta)}{r}\right)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi/2}\int_\varepsilon^1 \cos(\theta)\cos(\sin(\theta))\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &= r\Big|_\varepsilon^1 \int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\cos(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta\\ &= (1-\varepsilon)\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\cos(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Fazendo $u = \sin(\theta)$, temos $\mathrm{d}u = \cos(\theta)\mathrm{d}\theta$, daí,

$$\int_0^{\pi/2}\cos(\theta)\cos(\sin(\theta))\mathrm{d}\theta = \int_0^1 \cos(u)\mathrm{d}u = (\sin(1)-\sin(0)) = \sin(1).$$

Portanto, a integral é $(1-\varepsilon)\sin(1)$.

2. $\boxed{15}$ Calcule o volume do parabolóide $z = 9 - x^2 - 4y^2$ acima do plano xy.

Solution: A região que limite o plano em xy é quando $z = 0$, isto é, $x^2 + 4y^2 = 9$. Daí, podemos fazer $x = r\cos(\theta)$ e $y = \frac{r}{2}\sin(\theta)$, com $0 \le r \le 3$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. O Jacobiano dessa transformação será $r/2$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\int_0^3 (9-r^2)\frac{r}{2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta &= \pi\int_0^3 (9r - r^3)\mathrm{d}r = \pi\left(\frac{9r^2}{2} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^3\\ &= \pi\left(\frac{81}{2} - \frac{81}{4}\right) = \frac{81\pi}{4}\end{aligned}$$

3. $\boxed{20}$ Encontre os pontos críticos do problema de minimizar $5x^2 - 6xy + 5y^2$ sujeito à restrição $-x + y = 1$, **usando multiplicadores de Lagrange**, e mostre qual o valor multiplicador.

Solution: $f(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$, então $\nabla f(x,y) = \langle 10x - 6y, 10y - 6x\rangle$. Pelo MML

$$\begin{cases} 10x - 6y = -\lambda\\ -6x + 10y = \lambda\\ -x + y = 1.\end{cases}$$

Eliminamos λ somandos as duas primeiras equações, obtendo

$$\begin{cases} 4x + 4y = 0\\ -x + y = 1.\end{cases}$$

que é o mesmo que

$$\begin{cases} x + y = 0\\ -x + y = 1.\end{cases}$$

Resolvendo, obtemos $x = -\dfrac{1}{2}$ e $y = \dfrac{1}{2}$. Daí, $\lambda = 10y - 6x = 5 + 3 = 8$.

4. $\boxed{20}$ Considere a função $f(x, y) = \dfrac{x^3}{3} - 2xy + xy^2$. Encontre seus pontos críticos e classifique-os.

Solution: $\nabla f(x, y) = \langle x^2 - 2y + y^2, -2x + 2xy \rangle$, então os pontos críticos satisfazem

$$\begin{cases} x^2 - 2y + y^2 & = & 0 \\ -2x + 2xy & = & 0. \end{cases}$$

A segunda equação nos dá $x = 0$ ou $y = 1$. Na primeira equação, se $x = 0$, então $y = 0$ ou $y = 2$, e se $y = 1$, então $x = \pm 1$. As segundas derivadas são $f_{xx}(x, y) = 2x$, $f_{xy}(x, y) = -2 + 2y$ e $f_{yy}(x, y) = 2x$, e portanto o determinante é $D(x, y) = 4x^2 - (2y - 2)^2$.

$D(0, 0) = -4 < 0$ e $D(0, 2) = -4 < 0$, então $(0, 0)$ e $(0, 2)$ são pontos de sela.

$D(\pm 1, 1) = 4 > 0$, e $f_{xx}(\pm 1, 1) = \pm 2$, então $(1, 1)$ é um minimizador e $(-1, 1)$ é um maximizador.