Cálculo Diferencial e Integral I - Turma C

26 de Junho de 2015

Questão 1 70

Calcule as integrais abaixo:

(a) (10 points) $\displaystyle\int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x$

Solution: Por partes $u = x$, $\mathrm{d}v = \cos(\frac{\pi x}{2})\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x &= x\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\frac{2}{\pi}\Big|_0^1 - \frac{2}{\pi}\int_0^1 \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi^2}(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0))\\ &= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}.\end{aligned}$$

(b) (10 points) $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x$

Solution: Substituição $u = 1 + x^2$, temos $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$.

$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{x^3}{1+x^2}\mathrm{d}x = \int_2^5 \frac{x^2}{u}\frac{\mathrm{d}u}{2} = \frac{1}{2}\int_2^5 \frac{u-1}{u}\mathrm{d}u &= \frac{1}{2}\int_2^5 (1 - \frac{1}{u})\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}(3 - \ln 5 + \ln 2)\end{aligned}$$

(c) (10 points) $\displaystyle\int_0^\infty xe^{-x^2}\mathrm{d}x$

Solution: Considere o limite $\displaystyle\int_0^t xe^{-x^2}\mathrm{d}x$, com a substituição $u = -x^2$, $\mathrm{d}u = -2x\mathrm{d}x$. Temos

$$\int_0^t xe^{-x^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int_0^{-t^2} e^u\mathrm{d}u = -\frac{e^u}{2}\Big|_0^{-t^2} = \frac{1 - e^{-t^2}}{2}.$$

Daí, o limite disso com $t \to \infty$ existe e pode ser calculado, de modo que a integral original é

$$\int_0^\infty xe^{-x^2}\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\frac{1 - e^{-t^2}}{2} = \frac{1}{2}.$$

(d) (10 points) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\mathrm{d}x$

Solution: A função $x \ln x$ é descontínua em $x = 0$, então devemos examinar $\int_t^1 x \ln x \mathrm{d}x$ com $t \to 0^+$. Por partes com $u = \ln x$ e $\mathrm{d}v = x\mathrm{d}x$.

$$\int_t^1 x \ln x \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} \ln x \Big|_t^1 - \int_t^1 \frac{x}{2} \mathrm{d}x = -\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1 - t^2}{4}.$$

Temos

$$\lim_{t \to 0^+} t^2 \ln t = \lim_{t \to 0^+} \frac{\ln t}{1/t^2} = \lim_{t \to 0^+} \frac{1/t}{-2/t^3} = \lim_{t \to 0^+} -\frac{1}{2} t^2 = 0.$$

Daí,

$$\int_0^1 x \ln x \mathrm{d}x = \lim_{t \to 0^+} -\frac{t^2}{2} \ln t - \frac{1 - t^2}{4} = -\frac{1}{4}.$$

(e) (15 points) $\displaystyle\int \frac{2x}{(1 + x^2)[\ln(1 + x^2)]^2} \mathrm{d}x$

Solution: Substituição $u = 1 + x^2$, $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$, daí, fazendo $v = \ln u$, $\mathrm{d}v = \frac{1}{u}\mathrm{d}u$.

$$\begin{aligned} \int \frac{2x}{(1 + x^2)[\ln(1 + x^2)]^2} \mathrm{d}x &= \int \frac{1}{u[\ln u]^2} \mathrm{d}u = \int \frac{1}{v^2} \mathrm{d}v = -\frac{1}{v} + C \\ &= -\frac{1}{\ln u} + C = -\frac{1}{\ln(1 + x^2)} + C \end{aligned}$$

Também pode fazer direto $v = \ln(1 + x^2)$, $\mathrm{d}v = \dfrac{2x}{1 + x^2} \mathrm{d}x$.

(f) (15 points) $\displaystyle\int \frac{2x^3 + 4x - 4}{x^4 + x^2} \mathrm{d}x$

Solution: Temos que fazer por frações parciais. O denominador é $x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$, então

$$\frac{2x^3 + 4x - 4}{x^4 + x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1}$$

que dá

$$\begin{aligned} 2x^3 + 4x - 4 &= A(x^3 + x) + B(x^2 + 1) + Cx^3 + Dx^2 \\ &= x^3(A + C) + x^2(B + D) + Ax + B \end{aligned}$$

$B = -4$ e $A = 4$ saem imediatamente. $C = 2 - A = -2$ e $D = -B = 4$. Então

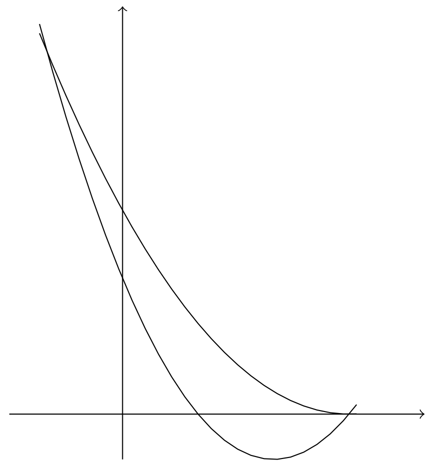
$$\begin{aligned} \int \frac{2x^3 + 4x - 4}{x^4 + x^2} \mathrm{d}x &= \int \frac{4}{x} \mathrm{d}x - \int \frac{4}{x^2} \mathrm{d}x + \int \frac{-2x + 4}{x^2 + 1} \mathrm{d}x \\ &= 4 \ln x + \frac{4}{x} - \int \frac{2x}{x^2 + 1} \mathrm{d}x + 4 \int \frac{1}{x^2 + 1} \mathrm{d}x \\ &= 4 \ln x + \frac{4}{x} - \ln(x^2 + 1) + 4 \arctan(x) + C \end{aligned}$$

Questão 2 .... $\boxed{20}$

Considere a região limitada entre as curvas $y = 2x^2 - 8x + 6$ e $y = x^2 - 6x + 9$.

(a) (10 points) Calcule a área dessa região.

Solution: As curvas se interceptam quando $2x^2 - 8x + 6 = x^2 - 6x + 9$, isto é $x^2 - 2x - 3 = 0$, ou seja $x = (2 \pm 4)/2 = 1 \pm 2$. Como existem duas intersecções, os limites da integral são de -1 a 3. Basta saber quem está por cima. Podemos desenhar, ou calcular num valor, tipo em $x = 0$.

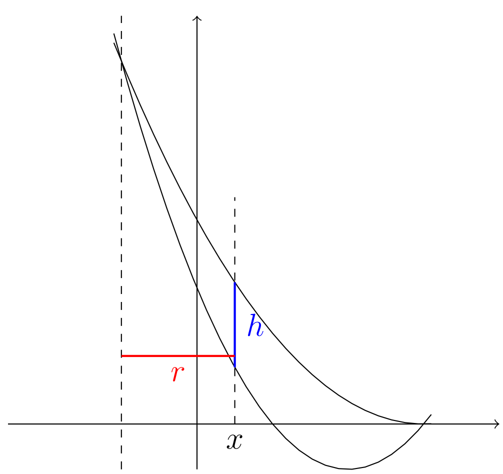


$$A = \int_{-1}^{3} [x^2 - 6x + 9 - 2x^2 + 8x - 6]\mathrm{d}x = \int_{-1}^{3} -x^2 + 2x + 3\mathrm{d}x = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x \right]_{-1}^{3}$$

$$= -\frac{27}{3} + 9 + 9 - \left(-\frac{-1}{3} + 1 - 3 \right) = 9 - \frac{1}{3} + 2 = \frac{32}{3}$$

(b) (10 points) Calcule o volume do sólido obtido rotacionando essa região em torno da reta $x = -1$.

Solution:

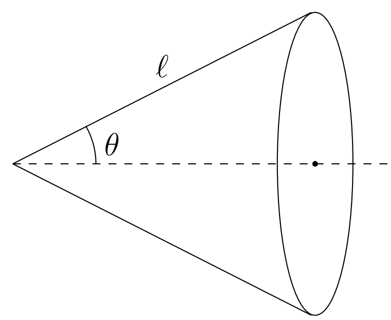


O raio é $r = x + 1$, e a altura é $h = -x^2 + 2x + 3$. Então o volume é

$$\begin{aligned}
V &= \int_{-1}^{3} 2\pi(x+1)(-x^2+2x+3)\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \int_{-1}^{3} -x^3 + x^2 + 5x + 3\mathrm{d}x \\
&= 2\pi \Big[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + 5\frac{x^2}{2} + 3x \Big]_{-1}^{3} \\
&= 2\pi \Big[-\frac{81}{4} + 9 + \frac{45}{2} + 9 - \Big(-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{5}{2} - 3 \Big) \Big] \\
&= 2\pi \Big(\frac{-81+1}{4} + \frac{45-5}{2} + 21 + \frac{1}{3} \Big) \\
&= 2\pi \Big(-20 + 20 + 21 + \frac{1}{3} \Big) = 2\pi \frac{64}{3} = \frac{128\pi}{3}
\end{aligned}$$

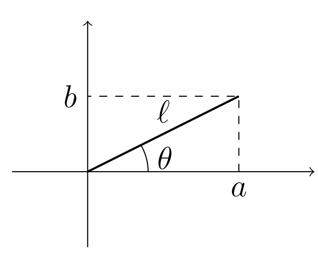
Questão 3 .... $\boxed{15}$

Considere o cone de geratriz ℓ e ângulo θ entre a geratriz e o eixo de simetria. A figura abaixo ilustra o cone:



Encontre seu volume em função de ℓ e θ, usando integral de sólido de revolução por seções circulares.

Solution: Colocando o bico do cone na origem e o eixo de simetria sobre o eixo x, vemos que o cone é a revolução de uma função afim da forma $y = mx$.



Em função do ângulo θ e de ℓ, temos $a = \ell\cos\theta$ e $b = \ell\sin\theta$. A inclinição da reta é $\tan\theta$. Então $f(x) = x\tan\theta$.

Para calcular o volume por seções circulares, o raio da seção na posição x é $f(x)$, e x vai de 0 a $a = \ell \cos\theta$. Então o volume é

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\ell\cos\theta} \pi f(x)^2 \mathrm{d}x = \int_0^{\ell\cos\theta} \pi(x\tan\theta)^2 \mathrm{d}x = \pi \tan^2\theta \int_0^{\ell\cos\theta} x^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi\tan^2\theta \frac{\ell^3\cos^3\theta}{3} = \frac{\pi\ell^3}{3}\sin^2\theta\cos\theta = \frac{\pi(\ell\sin\theta)^2}{3}\ell\cos\theta. \end{aligned}$$

Questão 4 10

Calcule a derivada de $g(t) = \displaystyle\int_{e^2}^{\sqrt{1+t^2}} \arctan(\ln(2+\pi x^8))\mathrm{d}x$

Solution: O Teorema Fundamental do Cálculo nos diz que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^u f(x)\mathrm{d}x = f(u)$$

Daí, fazendo $u = \sqrt{1+t^2}$, temos

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ &= \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_{e^2}^u \arctan(\ln(2+\pi x^8))\mathrm{d}x\right)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\sqrt{1+t^2}] \\ &= \arctan(\ln(2+\pi u^8))\frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \\ &= \frac{t\arctan(\ln(2+\pi(1+t^2)^4))}{\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

Derivadas

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

Integrais

- $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln|x| + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C$

Regras de derivação

- Regra do produto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Regra do quociente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

- Regra da cadeia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))g'(x)$$

Regras e técnicas de integração

- Regra da substituição

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u$$

- Integral por partes

$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{ou} \qquad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$