TopAL - Tópicos de Álgebra Linear
Lista 5

1. Seja V um espaço vetorial com produto interno. Mostre que

   (i) $\langle 0, u\rangle = 0$ para todo $u \in V$;

   (ii) se $\langle v, u\rangle = 0$ para todo $u \in V$, então $v = 0$.

2. Mostre que se $\langle \cdot, \cdot \rangle_i$, $i = 1, \ldots, n$ são produtos internos, então

$$\langle v, u\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v, u\rangle_i ,$$

   onde $\alpha_i \geq 0$, $i = 1, \ldots, n$, ao menos um deles não-nulo.

3. Mostrar a regra do paralelogramo, que diz que a norma é induzida pelo produto interno se, e se somente se,

$$\|v + u\|^2 + \|v - u\|^2 = 2\|v\|^2 + 2\|u\|^2 .$$

4. Considere o espaço das funções contínus em $[a, b]$, com norma

$$\|f\| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| .$$

   Prove ou dê um contra-exemplo para a afirmação de que essa norma provém de um produto interno.

5. Seja V o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2, definidos no intervalo $[-1, 1]$, com produto interno

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

   Considere as bases $\alpha = \{1, x, x^2\}$ e $\beta = \{1, x, \frac{1}{2}(3x^2 - 1)\}$. Encontre a matriz do produto interno nas bases α e β.

6. Seja V o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a 2, definidos no intervalo $[-1, 1]$, com produto interno

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} \frac{p(x)q(x)}{\sqrt{1 - x^2}}\mathrm{d}x.$$

   Considere as bases $\alpha = \{1, x, x^2\}$ e $\beta = \{1, x, 2x^2 - 1\}$. Encontre a matriz do produto interno nas bases α e β.

7. Considere a base $\{(1, 0, 1), (2, 1, -1), (-1, 1, 0)\}$ do $\mathbb{R}^3$. Encontre uma base ortogonal a partir dessa base, usando o processo de Gram-Schmidt.

8. Considere o espaço das funções contínuas definidas no intervalo $[-\pi, \pi]$, com produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

   Verifique que o conjunto $\{1, s_1, c_1, s_2, c_2, \ldots\}$ é ortogonal, onde

$$s_n(t) = \sin(nt) \qquad \text{e} \qquad c_n(t) = \cos(nt).$$

9. Considere o espaço das matrizes 2×2 com produto interno

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^t A).$$

Encontre uma base ortogonal a partir da base

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

10. Seja V espaço de dimensão finita com produto interno e seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ base ortonormal de V. Mostre que

$$\langle v, u\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle v, v_k\rangle \, \overline{\langle u, v_k\rangle}.$$

11. Verifique as identidades de polarização:

$$\operatorname{Re}\langle v, u\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+u\|^2 - \|v-u\|^2\right)$$
$$\operatorname{Im}\langle v, u\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+iu\|^2 - \|v-iu\|^2\right)$$

12. Seja $S \subset V$. Mostre que $[S] \subset (S^{\perp})^{\perp}$, e que se V tem dimensão finita, então $[S] = (S^{\perp})^{\perp}$.

13. Seja V o espaço real com produto interno das funções contínuas, definidas no intervalo $[-1, 1]$, com o produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Seja W o subespaço das funções ímpares. Encontre $W^{\perp}$.

14. Seja V espaço vetorial de dimensão finita e T operador linear sobre V. Mostre que, se T é inversível, então T^* é inversível e $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

15. Seja V um espaço com produto interno e ξ e η vetores fixos em V. Mostre que $Tv = \langle v, \xi\rangle\, \eta$ define um operador linear sobre V. Mostre que T possui um adjunto e encontre o adjunto explicitamente.

16. Seja V o espaço das funções infinitamente continuamente diferenciáveis no intervalo $[a, b]$ tais que $f(a) = f(b)$, com produto interno

$$\langle f, g\rangle = \int_{a}^{b} f(t)g(t)\mathrm{d}t.$$

Seja T o operador linear $Tf = f'$. Encontre o operador adjunto de T.