

TopAL - Tópicos de Álgebra Linear

Lista 4

1. Considere o teorema:

Teorema 1 *Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$ injetora e sobrejetora. Seja $S \subset V$. Então,*

(i) $[S] = V \Leftrightarrow [T(S)] = W$.

(ii) $S \text{ é L.I.} \Leftrightarrow T(S) \text{ é L.I.}$

Para cada item, e cada direção da afirmação, reduza a hipótese ao mínimo necessário, e verifique que o que sobrou é essencial com contra-exemplos.

2. Seja W subespaço de V , ambos de dimensão infinita. V/W deve ter dimensão finita?
3. Seja V o espaço vetorial das funções polinomiais p de \mathbb{R} em \mathbb{R} que tem grau menor ou igual a 2. Definamos três funcionais sobre V por

$$L_1(p) = \int_0^1 p(x)dx \quad L_2(p) = \int_0^2 p(x)dx \quad L_3(p) = \int_0^{-1} p(x)dx$$

4. Se A e B são matrizes complexas, mostre que é impossível ter

$$AB - BA = I.$$

5. Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V de dimensão finita. Demonstrar que

(i) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.

(ii) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

6. Seja V espaço vetorial de dimensão finita, W subespaço de V e $f \in W^*$. Mostre que existe $g \in V^*$ tal que

$$g(v) = f(v), \quad \forall v \in W.$$

7. Seja $f \in \mathbb{K}^2$ definido $f(\alpha_1, \alpha_2) = a\alpha_1 + b\alpha_2$. Para cada um dos operadores lineares T seguintes, sendo $g = T^t f$, determine $g(\alpha_1, \alpha_2)$.

(i) $T(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, 0)$;

(ii) $T(\alpha_1, \alpha_2) = (-\alpha_2, \alpha_1)$;

(iii) $T(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$.

8. Seja V o espaço das funções polinomiais sobre o corpo dos números reais. Sejam a e b números reais fixos e seja f o funcional linear sobre V definido por

$$f(p) = \int_a^b p(x)dx.$$

Se D é o operador derivação sobre V , o que é $D^t f$?

9. Seja V o espaço das matrizes n por n , e seja B uma matriz desse espaço fixa. Se T é o operador linear sobre V definido por $T(A) = AB - BA$, e se f é a função traço, o que é $T^t f$?