CM202 - Lista de Exercício 1

1. Considere as funções $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ abaixo. Para cada uma, encontre e represente seu domínio, e encontre a imagem de cada uma quando possível.

   (i) $f(x, y) = x - y$.

   (ii) $f(x, y) = xy + 1$.

   (iii) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1}$.

   (iv) $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}$.

   (v) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.

   (vi) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

   (vii) $f(x, y) = \ln(x + y)$.

   (viii) $f(x, y) = \ln(xy)$.

   (ix) $f(x, y) = \ln x + \ln y$.

   (x) $f(x, y) = e^{x+y}$.

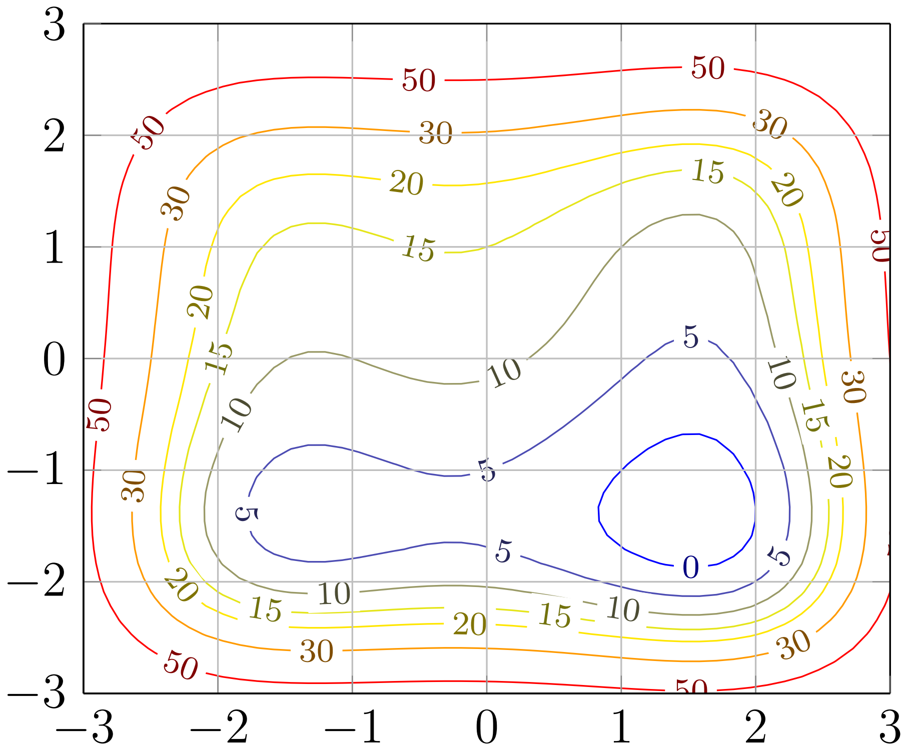
   (xi) $f(x, y) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$.

   (xii) $f(x, y) = \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$.

   (xiii) $f(x, y) = \dfrac{x^3}{x^2 + y^2}$.

   (xiv) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2 - 1}$.

2. Considere as curvas de nível de uma certa função f abaixo.



Preencha a tabela com estimativas para o valor de $f(x, y)$.

		y				
		-2	-1	0	1	2
x	-2					
	-1					
	0					
	1					
	2					

3. Desenhe as curvas de nível das funções abaixo.

   (i) $f(x, y) = -2x + 5y + 3.$

   (ii) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 1.$

   (iii) $f(x, y) = 4x^2 + 9^2 + 1.$

   (iv) $f(x, y) = x^2 - y^2.$

   (v) $f(x, y) = y + 4x^2 + 1.$

   (vi) $f(x, y) = \dfrac{y}{x^2 + 1}.$

   (vii) $f(x, y) = \ln(x^2 + 1) - y.$

   (viii) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}.$

   (ix) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}.$

4. Calcule os limites abaixo pela definição.

   (i) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x + 3y$

   (ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} 5x - 2y$

   (iii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2$

   (iv) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$

5. Verifique que os limites abaixo não existem (Dica: para alguns limites, você precisará usar a regra de L'Hospital).

   (i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$

   (ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y + y^4}{x^4 + y^4}.$

   (iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(y - x^2)^2}{x^4 + y^2}.$

   (iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

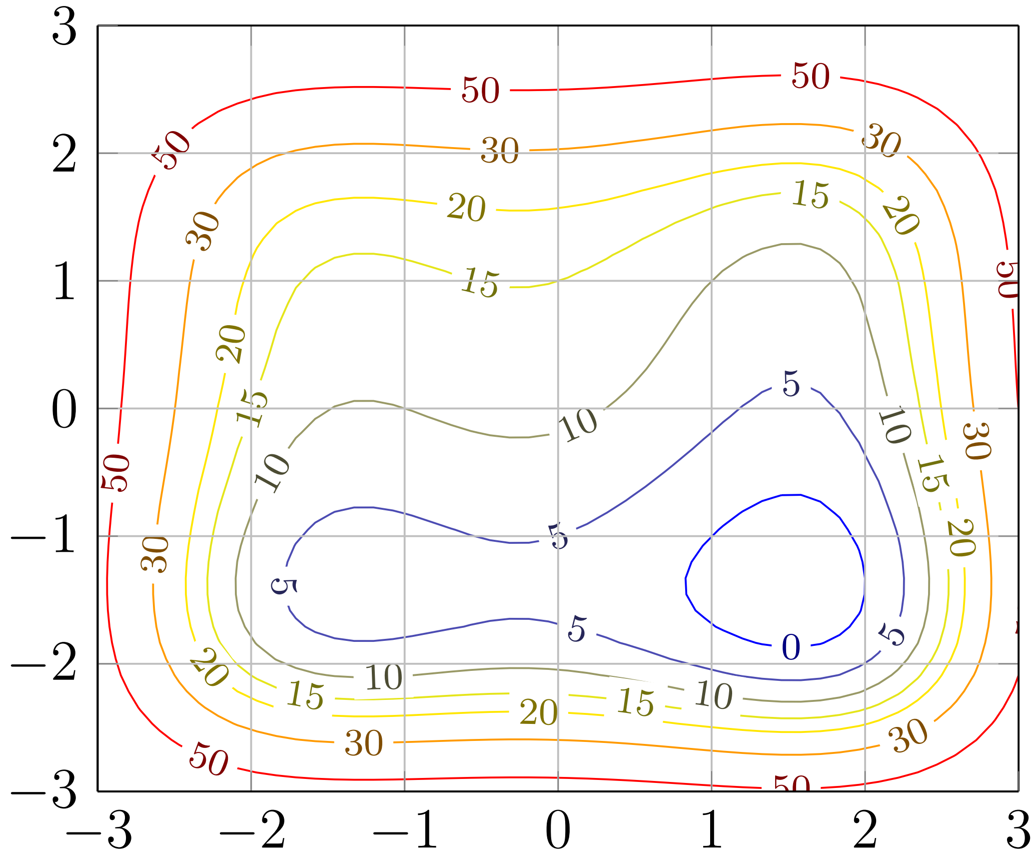
   (v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\ln(x^2 + y^2 + 1)}.$

   (vi) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{x^2} - 1}{x^2 + y^2}.$

   (vii) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + z^2}.$

   (viii) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{x^2yz}{x^8 + y^4 + z^2}.$

6. Considere as curvas de nível de uma certa função f abaixo.



Estime os valores abaixo (use uma régua)

(i) $D_{\vec{d}}f(-1,0)$ na direção $\vec{d} = \langle 1, 1\rangle$,

(ii) $D_{\vec{d}}f(1,-1)$ na direção $\vec{d} = \langle 1, 1\rangle$,

(iii) $D_{\vec{d}}f(2,-2)$ na direção $\vec{d} = \langle 1, -1\rangle$,

(iv) $D_{\vec{d}}f(0,0)$ na direção $\vec{d} = \langle -1, -2\rangle$,

(v) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(-2,0)$,

(vi) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(-2,0)$,

(vii) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,-1)$,

(viii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,-1)$.

7. Para cada função abaixo, (a) calcule as derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, as segundas derivadas (b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$, (c) a derivada direcional em $(2,1)$ na direção $\langle 1, 1\rangle$, e (d) a aproximação linear nesse mesmo ponto.

(i) $f(x,y) = x^3 - 2y^2$,

(ii) $f(x,y) = (x-y)^2$,

(iii) $f(x,y) = x^2y + x^3y^2$,

(iv) $f(x,y) = e^{x+y}$,

(v) $f(x,y) = e^{x^2+y^2}$,

(vi) $f(x,y) = xe^y - ye^x$,

(vii) $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$,

(viii) $f(x,y) = \ln(x^2+y^2+1)$,

(ix) $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$,

(x) $f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2$.

8. Para cada função f, cada ponto (x, y) e cada direção $\vec{d}$, encontre a derivada direcional de f no ponto (x, y) na direção $\vec{d}$.

   (i) $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

   (ii) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$.

   (iii) $f(x, y) = \cos(\pi x) y^2$.

   (i) $(x, y) = (0, 0)$

   (ii) $(x, y) = (1, 1)$

   (iii) $(x, y) = (-1, 1/2)$

   (i) $\vec{d} = \langle 1, 1 \rangle$

   (ii) $\vec{d} = \langle 2, 1 \rangle$

   (iii) $\vec{d} = \langle -1, 3 \rangle$

9. A equação $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \alpha \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ descreve a temperatura numa barra de ferro de comprimento L, onde $u(t, x)$ é a temperatura na posição $x \in [0, L]$ e instante $t > 0$, e $\alpha > 0$ é o coeficiente de difusão.

   (i) Verifique que a função
   $$u(t, x) = T_f + Ae^{-\lambda t} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$
   satisfaz essa equação e relacione $\lambda > 0$ e α.

   (ii) Desenhe essa função num gráfico $u \times x$ nos instantes $t = 0$ e $t = 1/\lambda$.

10. A equação $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ é dita a equação da onda em 1 (uma) dimensão, com velocidade de propagação c.

    (i) Verifique que $u(t, x) = e^{x+3t} + (x - 3t)^3$ satisfaz essa equação e determine sua velocidade de propagação.

    (ii) Verifique que $u(t, x) = \cos(x + \pi t) + \sin(x - \pi t)$ satisfaz essa equação e determine sua velocidade de propagação.

    (iii) Verifique que se f e g são funções diferenciáveis, então $u(t, x) = f(x + ct) + g(x - ct)$ satisfaz essa equação.

11. Para cada função f abaixo à esquerda, e cada expressão para x e y em função de t à direita, encontre a derivada $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ em função de t usando a regra da cadeia.

    (i) $f(x, y) = x^2 + y^2$.

    (ii) $f(x, y) = x^2 - y^2$.

    (iii) $f(x, y) = xy$.

    (iv) $f(x, y) = e^x y + x \ln y$.

    (v) $f(x, y) = x/y$.

    (vi) $f(x, y) = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$.

    (i) $x = t$, $y = t$.

    (ii) $x = t^2$, $y = -t^2$.

    (iii) $x = t^2 + 1$, $y = t$.

    (iv) $x = -t$, $y = t$.

    (v) $x = e^t$, $y = t$.

    (vi) $x = \cos t$, $y = \sin t$.

12. Para cada função f abaixo à esquerda, e cada expressão para x e y em função de t e s à direita, encontre as derivadas $\dfrac{\partial f}{\partial s}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial t}$ em função de t e s usando a regra da cadeia.

(i) $f(x,y) = x^2 + y^2$.

(ii) $f(x,y) = xy$.

(iii) $f(x,y) = e^x y - x^2 y^3$.

(i) $x = s + t$, $y = s - t$.

(ii) $x = s^2 + t^2$, $y = 2st$.

(iii) $x = s\cos t$, $y = s\sin t$.

13. Frequentemente temos uma certa equação diferencial e queremos fazer alguma mudança de variável. Isso pode acontecer para facilitar a busca por solução ou para considerar um domínio diferente. Por exemplo, a equação

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

descreve a difusão térmica numa placa, onde (x, y) mede a distância x horizontalmente e y verticalmente a partir de um certo referencial (i.e. como um plano cartesiano), t é o tempo a partir de um instante inicial e $u(t, x, y)$ é a temperatura no ponto (x, y) no instante t. No entanto, se essa placa é circular, faz sentido trabalhar com coordenadas polares

$$x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta.$$

Daí podemos definir a função $\bar{u}(t, \rho, \theta) = u(t, x, y)$ em função de t, ρ e θ, e reescrever a equação acima em função das derivadas parciais em ρ e θ usando a regra da cadeia. As perguntas a seguir serão a respeito dessas equações diferenciais e de transformações de variável.

(i) Considere a transformação $x = \xi + \eta$ e $y = \xi - \eta$. Calcule as derivadas parciais de u com respeito à ξ e η, em função das variáveis x e y.

(ii) Considere a transformação do item anterior. Calcule as derivadas parciais de u com respeito à x e y, em função das variáveis ξ e η.

(iii) Faça os itens acima para as derivadas de segunda ordem.

(iv) Escreva a equação do calor em ξ e η.

(v) Faça os itens acima para a mudança de variáveis polar.