Gabarito do exercício do dia 6 de Janeiro de 2015

Abel Soares Siqueira

Teorema 1. *Sejam V e W espaços vetoriais e $T \in \mathcal{L}(V, W)$ um isomorfismo. Seja $S \subset V$. Então,*

(i) Se S gera V, então $T(S)$ gera W.

(ii) Se S é linearmente independente em V, então, $T(S)$ é linearmente independente em W.

(iii) Se S é base de V, então $T(S)$ é base de W.

Demonstração. Note que T isomorfismo quer dizer que T é injetora e sobrejetora. Note também que S não necessariamente é finito, nem que V necessariamente tem dimensão finita.

(i) ($\Rightarrow$) Tome $w \in W$. Como T é sobrejetora, existe $v \in V$ tal que $Tv = w$. Daí, como S gera V, existem $v_1, \dots, v_n \in S$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

Daí

$$\begin{aligned} w &= Tv \\ &= T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \\ &= \alpha_1 T v_1 + \cdots + \alpha_n T v_n. \end{aligned}$$

Como $Tv_j \in T(S), j = 1, \dots, n$, então $w \in T(S)$. Como $w \in W$ foi arbitrário, temos $W \subset T(S)$.

($\Leftarrow$) Tome $v \in V$. Seja $w = Tv$. Como $Tv \in W = [T(S)]$, existem $w_1, \dots, w_n \in T(S)$ e $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$Tv = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

Como $w_j \in T(S)$, existem $v_j \in S$ tais que $Tv_j = w_j$, daí

$$\begin{aligned} Tv &= \alpha_1 T v_1 + \cdots + \alpha_n T v_n \\ &= T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n). \end{aligned}$$

Como T é injetora, temos

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n,$$

isto é, $v \in [S]$. Como $v \in V$ foi arbitrário, temos $V \subset [S]$.

(ii) ($\Rightarrow$) Tome $w_1, \dots, w_n \in T(S)$, e sejam $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n = 0.$$

Para cada w_j existe $v_j \in S$ tal que $w_j = Tv_j$. Então,

$$\alpha_1 T v_1 + \cdots + \alpha_n T v_n = 0.$$

Logo,

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0.$$

Como T é injetora e $T(0) = 0$, temos

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Mas $v_j \in S$, e por hipótese, S é linearmente independente, de modo que toda combinação linear nula deve ter os coeficientes nulos, ou seja, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Portanto, os vetores $w_1, \dots, w_n$ são linearmente independentes. Como a escolha desses vetores foi arbitrária, toda escolha finita de vetores de $T(S)$ é linearmente independente, de modo que $T(S)$ é linearmente independente.

($\Leftarrow$) Tome $v_1, \ldots, v_n \in S$, e sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$

Daí,

$$T(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = T(0) = 0,$$

isto é,

$$\alpha_1 T v_1 + \cdots + \alpha_n T v_n = 0.$$

Mas $Tv_j \in T(S), j = 1, \ldots, n$, e por hipótese, $T(S)$ é linearmente independente, de modo que toda combinação linear nula deve ter os coeficientes nulos, ou seja, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$. Portanto, os vetores $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. Como a escolha desses vetores foi arbitrária, toda escolha finita de vetores de S é linearmente independente, de modo que S é linearmente independente.

(iii) Um conjunto é base se gera o espaço e é linearmente independente, então o resultado segue diretamente de (i) e (ii).

$\square$