

# Teoria, Método e Aplicação de Otimização Multiobjetivo

Alisson Segatto de Souza

4 de Outubro de 2015

Problemas com multiobjetivos são muito frequentes nas áreas de otimização, economia, finanças, transportes, engenharia e várias outras. Como os objetivos são, geralmente, conflitantes, faz-se necessário o uso de técnicas apropriadas para obter boas soluções. A área que trata de problemas deste tipo é chamada de otimização multiobjetivo. Nosso estudo será baseado no trabalho de SAMPAIO [1], que trata de problemas desta área e alguns métodos para resolvê-los.

Na área da otimização multiobjetivo as soluções não são explicitamente conhecidas, e sim representadas por funções de restrição. A forma do problema de otimização multiobjetivo, adotada por Sampaio, é da seguinte forma:

$$\min f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \quad (1)$$

$$s.a : g_1(x) \leq 0, \dots, g_m(x) \leq 0$$

onde  $p$  é o número de funções objetivo, cada  $g_i : R^n \rightarrow R$  é uma função de restrição e  $f : R^n \rightarrow R^p$  é a função multiobjetivo. Cada  $f_k : R^n \rightarrow R$  define uma função objetivo. Note que se  $p = 1$ , torna-se um problema comum de um único objetivo. Logo, estamos interessados em  $p > 1$ .

Neste trabalho, nosso objetivo será encontrar os pontos  $x \in X$  tal que  $f(x) \in \min_C f(X)$ , onde  $C = R_+^p$ . Estes pontos são chamados de eficientes. Eficiência é um conceito equivalente ao da não-dominância, sendo que essa lida com a avaliação da função multiobjetivo numa solução viável em vez da própria solução em si. Dizer que uma solução é eficiente quer dizer que não existe outro ponto viável tal que os valores das funções objetivo avaliadas sejam menores ou iguais, sendo estritamente menor em pelo menos uma das funções. O conjunto de soluções eficientes de um problema multiobjetivo é chamado de fronteira eficiente, também conhecida como fronteira de Pareto.

Em um processo de tomada de decisões existem dois papéis a serem assumidos. O primeiro papel é do analista que gera soluções eficientes do problema com base a informações fornecidas a ele, e o segundo é a do tomador de decisão que irá receber as soluções fornecidas pelo analista e escolherá aquela que melhor represente seus objetivos, decisão essa chamada de solução de melhor compromisso. No caso dos problemas multiobjetivo é possível que haja vários tomadores de decisões, cada um com seu próprio objetivo específico.

Há diversos métodos para resolver problemas multiobjetivos. Cada um com suas próprias características e aplicações, o que faz com que o método que era eficiente para um problema seja ineficiente para outro. Neste trabalho vamos falar de dois métodos para resolver problemas de otimização multiobjetivo, o Método dos Pesos e o Método do Gradiente.

**Método dos Pesos:** O método dos pesos é um dos métodos mais comuns encontrados na literatura para resolver problemas multiobjetivos. Nele, todas as funções objetivo são combinadas em uma única função, chamada de escalarização, usando um vetor de pesos  $w \geq 0$ , com  $\|w\|_1 = 1$ . Este método serve para ter uma aproximação da fronteira eficiente, e sua vantagem é sua simplicidade. Cada solução deste problema escalarizado é uma solução eficiente do problema (1). Também seria a solução de melhor compromisso se o vetor  $w$  tivesse sido escolhido, a priori, pelo tomador de decisões.

**Método do Gradiente:** Este método é uma extensão do método do gradiente para programação não-linear irrestrita. Assim como no método padrão, precisamos encontrar uma direção  $d \in R^n$  tal que

$$J_f(x)d < 0$$

logo  $d$  é uma direção de descida para a função objetivo  $f$ . Esta condição estende a noção de criticidade do caso de otimização escalar irrestrita (gradiente igual a zero). A ideia do método é escolher um  $x$  e verificar se a condição acima é satisfeita, se não, tenta-se encontrar uma direção de descida  $d$  para  $x$  e escolher quanto se deve andar nesta direção, partindo de  $x$ . As vantagens deste método é que ele não precisa de parâmetros de entrada e nem é necessário fazer escalarização do problema. A desvantagem é que diferente do método dos pesos este não nos retorna uma fronteira eficiente, e sim apenas um ponto, sendo necessário rodar o método mais de uma vez para encontrar o problema ou usar o método com *multistart*, mas mesmo assim nada garante que as soluções encontradas serão diferentes entre si.

Para a comparação dos métodos será usado o problema de otimização de portfólios, introduzida por Markowitz (1952), onde o investidor precisa escolher, entre as variáveis de risco e retorno, aquela que melhor se adequa aos seus objetivos. Portanto é

necessário que se maximize os retornos e se minimize os riscos. Para isso serão usados os dados anuais de três conjuntos de ações: IBM, Sony e o mercado de ações norte americano SP500, no período entre 1991 até 2002.

SAMPAIO concluiu em seu trabalho que o método dos pesos é ineficaz para problemas não convexos, porém, ele busca encontrar uma aproximação de toda a fronteira eficiente, enquanto o método do gradiente retorna apenas uma solução ótima, dando poucas informações sobre a solução eficiente obtida na fronteira. Para o problema de portfolios o método dos pesos se mostrou mais eficaz.

## Referências

- [1] Phillipe Rodrigues Sampaio. *Teoria, Método e Aplicação de Otimização Multiobjectivo*. Dissertação Apresentada ao Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.