Cálculo Diferencial e Integral II - Turma B

23 de Junho de 2015

Questão 1 .... $\boxed{60}$

Resolva as seguintes integrais:

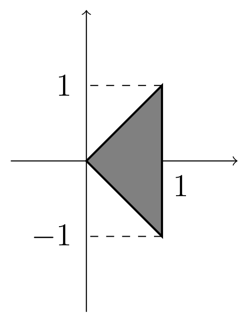
(a) (10 points) $\int_0^2\int_0^1 (xy^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Solution: Diretamente temos

$$\int_0^2\int_0^1 xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x\mathrm{d}x\int_0^2 y^2\mathrm{d}y = \frac{1^2}{2}\frac{2^3}{3} = \frac{4}{3}$$

(b) (10 points) $\iint_D xy\mathrm{d}A$, onde D é o triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,-1)$ e $(1,1)$.

Solution:

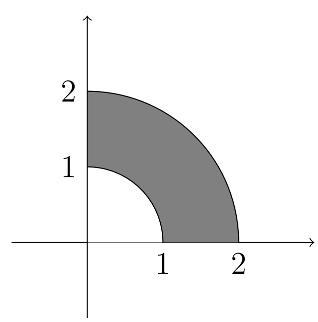


$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, -x \leq y \leq x\}$.

$$\iint_D xy\mathrm{d}A = \int_0^1\int_{-x}^{x} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x\frac{y^2}{2}\bigg|_{-x}^{x}\mathrm{d}x = \int_0^1 x\frac{x^2-(-x)^2}{2}\mathrm{d}x = \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0.$$

(c) (10 points) $\iint_R \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}A$, onde R é a faixa circular de raio 1 ao raio 2 com centro na origem e no primeiro quadrante.

Solution:



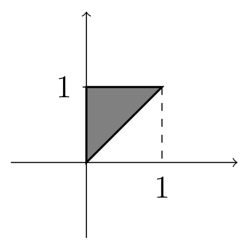
$R = \{(r,\theta) \mid 1 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Lembre-se que em coordenadas polares temos

$x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, e daí $r^2 = x^2 + y^2$ e $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

$$\begin{aligned}
\iint_R \frac{xy}{x^2+y^2}\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 \frac{r\cos\theta r\sin\theta}{r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 r\cos\theta\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 r\frac{\sin(2\theta)}{2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2\theta)}{2}\mathrm{d}\theta \int_1^2 r\mathrm{d}r \\
&= -\frac{\cos(2\theta)}{4}\bigg|_0^{\pi/2} \frac{r^2}{2}\bigg|_1^2 \\
&= \frac{1}{2}\times\frac{3}{2} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

(d) (10 points) $\displaystyle\int_0^1\int_x^1 \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

Solution: Resolver direto é muito difícil. É mais fácil inverter a ordem da integral.



A equação da reta é $y = x$, ou $x = y$. Daí, y está entre 0 e 1, e x está acima do zero e abaixo da reta $x = y$.

$$\begin{aligned}
\int_0^1\int_x^1 \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}x &= \int_0^1\int_0^y \frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{1}{1+y^2}x\bigg|_0^y \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Fazemos a substituição $u = 1 + y^2$, $\mathrm{d}u = 2y\mathrm{d}y$, então

$$\int_0^1 \frac{y}{1+y^2}\mathrm{d}y = \int_1^2 \frac{1}{2u}\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\ln 2.$$

(e) (10 points) $\displaystyle\iiint_R x^2y^2z^2\mathrm{d}V$, onde R é o cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

Solution:

$$\iiint_R x^2y^2z^2 \mathrm{d}V = \int_0^1\int_0^1\int_0^1 x^2y^2z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}.$$

(f) (10 points) $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V$, onde D é a esfera de raio 1.

Solution: A região em coordenadas esferéficas é $D = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, 0 \le \varphi \le \pi\}$, pois existe apenas a limitação do raio da esfera. Lembre-se também que, $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$ e que $\mathrm{d}V = \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$. Daí,

$$\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}V = \int_0^\pi\int_0^{2\pi}\int_0^1 \rho^2\rho^2 \sin\varphi \ \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$
$$= \int_0^\pi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^4 \mathrm{d}\rho$$
$$= (-cos\theta)\Big|_0^\pi \theta\Big|_0^{2\pi} \frac{\rho^5}{5}\Big|_0^1$$
$$= 2 \times 2\pi \times \frac{1}{5} = \frac{4\pi}{5}.$$

Questão 2 .... $\boxed{15}$

Calcule a área da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a, b > 0$.

Solution: A área da região D é dada por

$$\iint_D \mathrm{d}A.$$

Vamos fazer uma mudança de variável e encontrar a área pela integral. Pela fórmula podemos ver que

$$\frac{x}{a} = r\cos\theta \qquad \frac{y}{b} = r\sin\theta$$

parece uma mudança adequada. Nessa mudança, a equação vira $r^2 = 1$, o que implica $r = 1$. As limitações então são $0 \le r \le 1$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. $\mathrm{d}A = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = abr.$$

Então,

$$\iint_D \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = ab\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \times \int_0^1 r\mathrm{d}r = ab \times 2\pi \times \frac{1}{2} = ab\pi.$$

<++>

Questão 3 .... $\boxed{20}$

Calcule o volume do sólido limitado pelos dois parabolóides elípticos $z = x^2 + y^2$ e $z = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + 2$.

Solution: Usando $x = r\cos\theta$ e $y = r\sin\theta$, as equações viram $z = r^2$ e $z = \frac{1}{2}r^2 + 2$. Facilmente vemos quem está por cima e quem está por baixo. Daí, o volume é a integral dupla da diferença. A região tem que ser a sombra da região. Fazendo a igualdade das curvas temos $r^2 = \frac{1}{2}r^2 + 2$, o que implica $r = 2$. Como essa é a única restrição, temos $0 \le r \le 2$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. Daí

$$\begin{aligned}
\iint_D \left[\frac{x^2+y^2}{2} + 2 - (x^2+y^2)\right]\mathrm{d}A &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[\frac{r^2}{2} + 2 - r^2\right] r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^2 \left[-\frac{r^3}{2} + 2r\right]\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \int_0^2 \left[-\frac{r^3}{2} + 2r\right]\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left[-\frac{r^4}{8} + r^2\right]_0^2 \\
&= 2\pi(-2+4) = 4\pi.
\end{aligned}$$

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Considere o paralelogramo D definido pelos pontos $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$ e $(2,0)$, no plano x-y.

(a) (10 points) Defina a mudança de variável que leva esse paralelogramo no quadrado com um vértice na origem, e com duas arestas sobre os eixos do plano u-v, e também a mudança inversa, de (u,v) para (x,y).

Solution: Para levar o paralelogramo no quadrado em questão, devemos ter

x	y	u	v
0	0	0	0
1	1	0	*
2	0	*	*
1	-1	*	0.

Para obter os zeros em u e v, é fácil ver que u é múltiplo de $x - y$ e que v é múltiplo de $x + y$. Como o valor de * não é importante para a transformação, podemos deixar $u = x - y$ e $v = x + y$. Facilmente resolvemos essas igualdades para achar $x = \dfrac{u+v}{2}$ e $y = \dfrac{v-u}{2}$.

(b) (10 points) Calcule a integral $\displaystyle\iint_D (x^2 - y^2)\mathrm{d}A$ usando essa mudança de variáveis.

Solution: Nessa transformação, temos $0 \le u \le 2$ e $0 \le v \le 2$. Também temos

$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = uv$. O Jacobiano é $\frac{1}{2}$, e portanto

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2 - y^2)\mathrm{d}A &= \int_0^2 \int_0^2 uv\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2} \times \int_0^2 u\mathrm{d}u \times \int_0^2 v\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{4}{2} \times \frac{4}{2} = 2.\end{aligned}$$

Derivadas

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(x)) = -\sin(x)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(x)) = \cos(x)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x)) = \dfrac{1}{x}$

Integrais

- $\displaystyle\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln(x) + C$
- $\displaystyle\int \sin(x) \mathrm{d}x = -\cos(x) + C$
- $\displaystyle\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\displaystyle\int \cos(x) \mathrm{d}x = \sin(x) + C$

Regras

- Jacobiana de duas variáveis

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- Coordenadas polares

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

- Coordenadas esféricas

$$x = r\cos\theta\sin\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\varphi$$

Trigonometria

- $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$
- $\sin(2\theta) = 2\sin\theta\cos\theta$
- $\cos(2\theta) = \cos^2 x - \sin^2 x$