12.1 Exercícios

1. Suponha que, a partir da origem, você tenha percorrido uma distância de quatro unidades ao longo do eixo x no sentido positivo e então uma distância de três unidades para baixo. Quais as coordenadas de sua posição atual?

2. Esboce os pontos $(0, 5, 2)$, $(4, 0, -1)$, $(2, 4, 6)$ e $(1, -1, 2)$ em um mesmo conjunto de eixos coordenados.

3. Qual dos pontos está mais próximo do plano xz: $P(6, 2, 3)$, $Q(-5, -1, 4)$ ou $R(0, 3, 8)$? Qual ponto pertence ao plano yz?

4. Quais são as projeções do ponto $(2, 3, 5)$ nos planos xy, yz e xz? Desenhe uma caixa retangular que tenha vértices opostos na origem e em $(2, 3, 5)$ e com faces paralelas aos planos coordenados. Nomeie todos os vértices da caixa. Determine o comprimento da diagonal dessa caixa.

5. Descreva e esboce no $\mathbb{R}^3$ a superfície representada pela equação $x + y = 2$.

6. (a) Qual a representação da equação $x = 4$ em $\mathbb{R}^2$? Em $\mathbb{R}^3$? Faça um esboço delas.
   (b) Qual a representação da equação $y = 3$ em $\mathbb{R}^3$? O que $z = 5$ representa? Qual a representação do par de equações $y = 3$ e $z = 5$? Em outras palavras, descreva o conjunto de pontos (x, y, z) tal que $y = 3$ e $z = 5$. Ilustre com um esboço.

7. Mostre que o triângulo com vértices em $P(-2, 4, 0)$, $Q(1, 2, -1)$ e $R(-1, 1, 2)$ é um triângulo eqüilátero.

8. Encontre o comprimento dos lados do triângulo com vértices $A(1, 2, -3)$, $B(3, 4, -2)$ e $C(3, -2, 1)$. O triângulo ABC é retângulo? É isósceles?

9. Determine se os pontos estão alinhados.
   (a) $A(5, 1, 3)$, $B(7, 9, -1)$, $C(1, -15, 11)$
   (b) $K(0, 3, -4)$, $L(1, 2, -2)$, $M(3, 0, 1)$

10. Determine a distância entre $(3, 7, -5)$ e cada um dos seguintes.
    (a) Plano xy (b) Plano yz
    (c) Plano xz (d) Eixo x
    (e) Eixo y (f) Eixo z

11. Determine a equação da esfera com centro em $(1, -4, 3)$ e raio 5. Qual é a interseção dessa esfera com o plano xz?

12. Determine a equação da esfera com centro em $(6, 5, -2)$ e raio $\sqrt{7}$. Descreva sua interseção com os planos coordenados.

13. Determine a equação da esfera que passa pelo ponto $(4, 3, -1)$ e tem centro em $(3, 8, 1)$.

14. Determine a equação da esfera que passa pela origem e tem centro em $(1, 2, 3)$.

15–18 □ Mostre que a equação representa uma esfera e determine seu centro e raio.

15. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$

16. $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$

17. $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$

18. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$

19. (a) Prove que o ponto médio do segmento de reta que liga $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$
    (b) Determine o comprimento da mediana do triângulo com vértices em $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 0, 5)$ e $C(4, 1, 5)$.

20. Estabeleça a equação de uma esfera que tenha um diâmetro com pontos terminais dados por $(2, 1, 4)$ e $(4, 3, 10)$.

21. Estipule as equações das esferas com centro em $(2, -3, 6)$ e tangência (a) no plano xy, (b) no plano yz e (c) no plano xz.

22. Determine a equação da maior esfera com centro em $(5, 4, 9)$ contida no primeiro octante.

23–34 □ Descreva em palavras a região de $\mathbb{R}^3$ representada pela equação ou inequação.

23. $y = -4$
24. $x = 10$
25. $x > 3$
26. $y \geq 0$
27. $0 \leq z \leq 6$
28. $y = z$
29. $x^2 + y^2 + z^2 > 1$
30. $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25$
31. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z < 3$
32. $x^2 + y^2 = 1$
33. $x^2 + z^2 \leqslant 9$
34. $xyz = 0$

35–38 □ Escreva inequações para descrever a região dada.

35. Semi-espaço de todos os pontos que estão à esquerda do plano xz.

36. Caixa retangular sólida no primeiro octante limitada pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$.

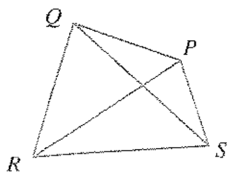
37. A região constituída por todos os pontos entre (mas não sobre) as esferas de raio r e R centradas na origem, onde $r < R$.

38. O hemisfério superior sólido da esfera de raio 2 centrada na origem.

4. Escreva cada combinação de vetores como um único vetor.

(a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (b) $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$

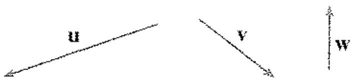
(c) $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PS}$ (d) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$



5. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

(c) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (d) $\mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$

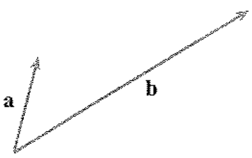


6. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

(c) $2\mathbf{a}$ (d) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$

(e) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (f) $\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$



7–12 □ Determine o vetor **a** com representação dada pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$. Desenhe $\overrightarrow{AB}$ e o equivalente com início na origem.

7. $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$ **8.** $A(-2, -2)$, $B(5, 3)$

9. $A(-1, -1)$, $B(-3, 4)$ **10.** $A(-2, 2)$, $B(3, 0)$

11. $A(0, 3, 1)$, $B(2, 3, -1)$ **12.** $A(4, 0, -2)$, $B(4, 2, 1)$

13–16 □ Determine a soma dos vetores dados e ilustre geometricamente.

13. $\langle 3, -1 \rangle$, $\langle -2, 4 \rangle$ **14.** $\langle -2, -1 \rangle$, $\langle 5, 7 \rangle$

15. $\langle 0, 1, 2 \rangle$, $\langle 0, 0, -3 \rangle$ **16.** $\langle -1, 0, 2 \rangle$, $\langle 0, 4, 0 \rangle$

17–22 □ Determine $|\mathbf{a}|$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$ e $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$.

17. $\mathbf{a} = \langle -4, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 2 \rangle$

18. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

19. $\mathbf{a} = \langle 6, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 5, -2 \rangle$

20. $\mathbf{a} = \langle -3, -4, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 2, -3 \rangle$

21. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

22. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

23–25 □ Determine o vetor unitário com mesma direção e sentido que o vetor dado.

23. $\langle 9, -5 \rangle$ **24.** $12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

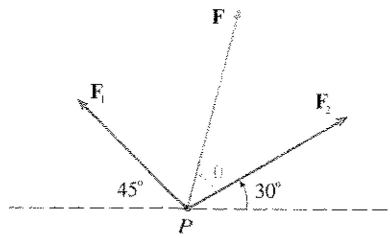
25. $8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

26. Ache um vetor que possui a mesma direção que $\langle -2, 4, 2 \rangle$, mas tem comprimento 6.

27. Se $\mathbf{v}$ está no primeiro quadrante e faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo x-positivo e $|\mathbf{v}| = 4$, ache as componentes de $\mathbf{v}$.

28. Se uma criança puxa um trenó na neve com força de 50 N a um ângulo de 38° com relação à horizontal, ache as componentes horizontal e vertical da força.

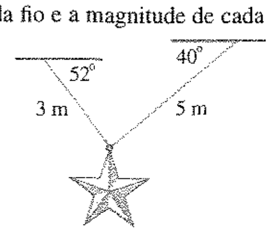
29. Duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ com grandezas 10 lb e 12 lb agem sobre um objeto em um ponto P como mostrado na figura. Determine a força resultante $\mathbf{F}$ agindo em P assim como sua magnitude, direção e sentido. (Indique a direção determinando o ângulo θ exposto na figura.)



30. Velocidades têm módulo, direção e sentido, sendo portanto vetores. O módulo de uma velocidade é chamado *rapidez*. Suponha que esteja ventando na direção N45°W a uma velocidade de 50 km/h. (Isso significa que a direção da qual está ventando está 45° a oeste da direção com sentido para o norte.) Um piloto está virando seu avião na direção N60°E a uma velocidade relativa (velocidade em ar parado) de 250 km/h. O *curso verdadeiro* ou *trajetória* do avião é a direção da resultante dos vetores velocidades do avião e do vento. A *rapidez em relação ao solo* do avião é o módulo da resultante. Determine a trajetória real e a rapidez em relação ao solo do avião.

31. Uma mulher anda em direção ao oeste no tombadilho de um navio a 3 mi/h. O navio está se movendo em direção ao norte com rapidez de 22 mi/h. Determine a rapidez e a direção da mulher em relação à superfície da água.

32. Cordas de 3 m e 5 m de comprimento são atadas na decoração natalina que está suspensa sobre uma praça. A decoração tem uma massa de 5 kg. As cordas, atadas em diferentes alturas, fazem ângulos de 52° e 40° com a horizontal. Determine a tensão em cada fio e a magnitude de cada tensão.



12.3 Exercícios

1. Quais das seguintes expressões têm significado? Quais não fazem sentido? Explique.
   (a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ (b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
   (c) $|\mathbf{a}|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
   (e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (f) $|\mathbf{a}| \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

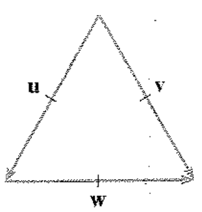
2. Determine o produto escalar de dois vetores cujas normas são respectivamente 6 e $\frac{1}{3}$ e o ângulo entre eles é $\pi/4$.

3–10 □ Determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

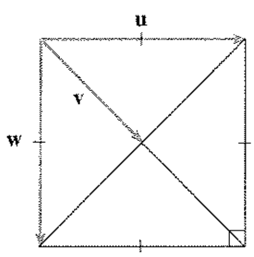
3. $\mathbf{a} = \langle 4, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 6 \rangle$
4. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -8, -3 \rangle$
5. $\mathbf{a} = \langle 5, 0, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -1, 10 \rangle$
6. $\mathbf{a} = \langle s, 2s, 3s \rangle$, $\mathbf{b} = \langle t, -t, 5t \rangle$
7. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$
8. $\mathbf{a} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
9. $|\mathbf{a}| = 12$, $|\mathbf{b}| = 15$, o ângulo entre **a** e **b** é $\pi/6$
10. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 10$, o ângulo entre **a** e **b** é $120°$

11–12 □ Se **u** é um vetor unitário, determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

11.



12.



13. (a) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$.
    (b) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$.

14. Um vendedor vende a hambúrgueres, b cachorros-quentes e c refrigerantes em um determinado dia. Ele cobra \$ 2 o hambúrguer, \$ 1,50 o cachorro-quente e \$ 1 o refrigerante. Se $\mathbf{A} = \langle a, b, c \rangle$ e $\mathbf{P} = \langle 2; 1{,}5; 1 \rangle$, qual o significado do produto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$?

15–20 □ Determine o ângulo entre os vetores. (Estabeleça inicialmente uma expressão exata e depois aproxime o valor até o grau mais próximo.)

15. $\mathbf{a} = \langle 3, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 12 \rangle$
16. $\mathbf{a} = \langle \sqrt{3}, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 5 \rangle$
17. $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 0, -1 \rangle$
18. $\mathbf{a} = \langle 6, -3, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 1, -2 \rangle$
19. $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
20. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

21–22 □ Determine, aproximando o valor até o grau mais próximo, os três ângulos do triângulo cujos vértices são dados.

21. $A(1, 0)$, $B(3, 6)$, $C(-1, 4)$
22. $D(0, 1, 1)$, $E(-2, 4, 3)$, $F(1, 2, -1)$

23–28 □ Determine se os vetores dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois.

23. (a) $\mathbf{a} = \langle -5, 3, 7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -8, 2 \rangle$
    (b) $\mathbf{a} = \langle 4, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 2 \rangle$
    (c) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
    (d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$
24. (a) $\mathbf{u} = \langle -3, 9, 6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, -12, -8 \rangle$
    (b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
    (c) $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -b, a, 0 \rangle$

25. Use os valores para decidir se o triângulo com vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$, e $R(6, -2, -5)$ é retângulo.
26. Para que valores de b são os vetores $\langle -6, b, 2 \rangle$ e $\langle b, b^2, b \rangle$ ortogonais?
27. Determine um vetor unitário ortogonal $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.
28. Ache dois valores unitários que façam um ângulo de 60º com $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.

29–33 □ Determine os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor. (Forneça o ângulo diretor aproximado até o grau mais próximo.)

29. $\langle 3, 4, 5 \rangle$
30. $\langle 1, -2, -1 \rangle$
31. $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$
32. $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
33. $\langle c, c, c \rangle$, onde $c > 0$

34. Se um vetor tem ângulos diretores $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/3$, determine o terceiro ângulo diretor γ.

35–40 □ Determine o vetor projeção e a projeção escalar de **b** sobre **a**.

35. $\mathbf{a} = \langle 3, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 0 \rangle$
36. $\mathbf{a} = \langle 1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, 1 \rangle$
37. $\mathbf{a} = \langle 4, 2, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 1 \rangle$
38. $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 3, 4 \rangle$
39. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$
40. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

41. Mostre que o vetor $\text{orth}_\mathbf{a}\,\mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proj}_\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ é ortogonal a **a**. (Esse vetor é chamado **projeção ortogonal** de **b**.)
42. Para os vetores do Exercício 36, determine $\text{orth}_\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ e ilustre esboçando os vetores **a**, **b**, $\text{proj}_\mathbf{a}\,\mathbf{b}$ e $\text{orth}_\mathbf{a}\,\mathbf{b}$.
43. Se $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$, determine um vetor **b** tal que $\text{comp}_\mathbf{a}\,\mathbf{b} = 2$.

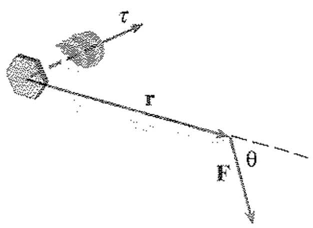


FIGURA 4

A idéia de produto vetorial aparece muito freqüentemente em física. Em particular, considere uma força **F** agindo em um corpo rígido em um ponto fixado dado pelo vetor de posição **r**. (Por exemplo: se apertarmos um parafuso utilizando uma chave de boca como na Figura 4, conseguiremos o efeito de girá-lo.) O **torque** $\boldsymbol{\tau}$ (em relação à origem) é definido pelo produto vetorial dos vetores de posição e força

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

e mede a tendência de um corpo rodar em torno da origem. A direção do vetor torque indica o eixo de rotação. De acordo com o Teorema 6, o módulo do torque é

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen}\theta$$

onde θ é o ângulo entre o vetor de posição e o vetor força. Observe que o único componente da força **F** que pode causar a rotação do objeto é o perpendicular a **r**, ou seja, $|\mathbf{F}| \operatorname{sen}\theta$. O módulo do torque é igual à área do paralelogramo determinado por **r** e **F**.

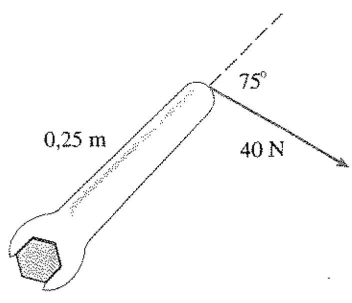


FIGURA 5

EXEMPLO 6 □ Um parafuso é apertado por uma chave de boca que aplica uma força de 40 N em uma chave de 0,25 m, como mostrado na Figura 5. Determine o módulo do torque em torno do centro do parafuso.

SOLUÇÃO O módulo do vetor torque é

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} 75^\circ = (0{,}25)(40) \operatorname{sen} 75^\circ$$
$$= 10 \operatorname{sen} 75^\circ \approx 9{,}66 \text{ N·m} = 9{,}66 \text{ J}$$

Se o parafuso tem a rosca direita, o vetor torque é

$$\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|\,\mathbf{n} \approx 9{,}66\mathbf{n}$$

onde **n** é um vetor unitário com direção perpendicular à página e sentido de entrar no papel. □

12.4 Exercícios

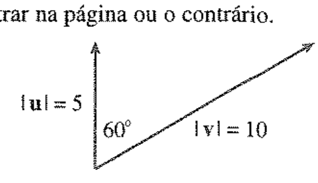
1–7 □ Determine o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e verifique que ele é ortogonal **a** e **b**.

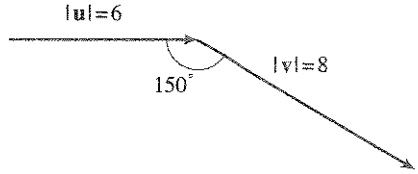
1. $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 3, 1 \rangle$
2. $\mathbf{a} = \langle 5, 1, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 0, 2 \rangle$
3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
4. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$
5. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$
6. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$
7. $\mathbf{a} = \langle t, t^2, t^3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$

8. Se $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Esboce **a**, **b** e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vetores com início na origem.

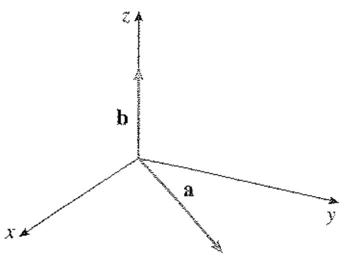
9. Diga se as afirmações a seguir fazem sentido. Se não fizerem, explique por quê. Se fizerem, diga se correspondem a um vetor ou a um escalar.
   (a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
   (c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (d) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$
   (e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ (f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

10–11 □ Calcule $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ e determine se $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tem o sentido de entrar na página ou o contrário.

10.


11.


12. A figura mostra um vetor **a** pertencente ao plano xy e um vetor **b** na direção de **k**. Seus módulos são $|\mathbf{a}| = 3$ e $|\mathbf{b}| = 2$.
(a) Calcule $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.
(b) Utilize a regra da mão direita para decidir se os componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ são positivos, negativos ou nulos.



13. Se $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 3 \rangle$, calcule $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

14. Se $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 0 \rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 0, 0, -4 \rangle$, mostre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

15. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a $\langle 1, -1, 1 \rangle$ quanto a $\langle 0, 4, 4 \rangle$.

16. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ quanto a $2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

17. Mostre que $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{a} \times \mathbf{0}$ para qualquer vetor **a** em V_3.

18. Mostre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ para todos os vetores **a** e **b** em V_3.

19. Prove a Propriedade 1 do Teorema 8.

20. Prove a Propriedade 2 do Teorema 8.

21. Prove a Propriedade 3 do Teorema 8.

22. Prove a Propriedade 4 do Teorema 8.

23. Determine a área do paralelogramo com vértices em $A(-2, 1)$, $B(0, 4)$, $C(4, 2)$, e $D(2, -1)$.

24. Determine a área do paralelogramo com vértices em $K(1, 2, 3)$, $L(1, 3, 6)$, $M(3, 8, 6)$, e $N(3, 7, 3)$.

25–28 □ (a) Ache um vetor ortogonal ao plano que passa pelos pontos P, Q e R e (b) calcule a área do triângulo PQR.

25. $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$, $R(0, 0, 3)$

26. $P(2, 1, 5)$, $Q(-1, 3, 4)$, $R(3, 0, 6)$

27. $P(0, -2, 0)$, $Q(4, 1, -2)$, $R(5, 3, 1)$

28. $P(2, 0, -3)$, $Q(3, 1, 0)$, $R(5, 2, 2)$

29–30 □ Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c**.

29. $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 4, -2, 5 \rangle$

30. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

31–32 □ Calcule o volume do paralelepípedo com lados adjacentes PQ, PR e PS.

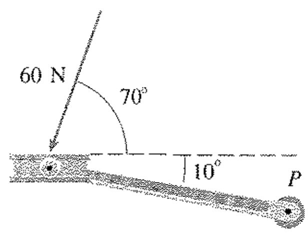
31. $P(2, 0, -1)$, $Q(4, 1, 0)$, $R(3, -1, 1)$, $S(2, -2, 2)$

32. $P(0, 1, 2)$, $Q(2, 4, 5)$, $R(-1, 0, 1)$, $S(6, -1, 4)$

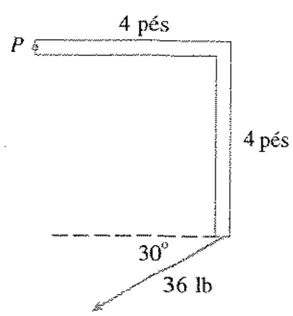
33. Utilize o produto misto para verificar se os vetores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ são coplanares.

34. Use o produto misto para determinar se os pontos $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 4, 6)$, $R(3, -1, 2)$ e $S(6, 2, 8)$ pertencem ao mesmo plano.

35. O pedal de uma bicicleta é empurrado por um pé com uma força de 60 N, como mostrado. A haste do pedal tem 18 cm de comprimento. Determine o módulo do torque em P.



36. Determine a intensidade do torque em P se for aplicada uma força de 36 lb, como mostrado.



37. Uma chave de boca com 30 cm de comprimento posicionada ao longo do eixo y aperta um parafuso colocado na origem. Considere uma força aplicada no final do cabo da chave com direção dada por $\langle 0, 3, -4 \rangle$. Determine o módulo da força necessária para que o torque resultante no parafuso seja de 100 J.

38. Seja $\mathbf{v} = 5\mathbf{j}$ e seja **u** um vetor com norma 3 com início na origem e que gira no plano xy. Determine o máximo e o mínimo valor possível para $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Qual a direção e o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

39. (a) Seja P um ponto não pertencente à reta L que passa pelos pontos Q e R. Mostre que a distância d do ponto P até a reta L é

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

onde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$.
(b) Utilize a fórmula da parte (a) do exercício para determinar a distância do ponto $P(1, 1, 1)$ à reta que passa por $Q(0, 6, 8)$ e $R(-1, 4, 7)$.

4. A reta que passa pela origem e é paralela à reta $x = 2t$, $y = 1 - t$, $z = 4 + 3t$

5. A reta que passa pelo ponto (1, 0, 6) e é perpendicular ao plano $x + 3y + z = 5$

6–12 □ Determine as equações paramétricas e na forma simétrica para a reta.

6. Reta que passa pela origem e pelo ponto (1, 2, 3)

7. Reta que passa pelos pontos (1, 3, 2) e (−4, 3, 0)

8. Reta que passa pelos pontos (6, 1, −3) e (2, 4, 5)

9. Reta que passa pelos pontos $\left(0, \frac{1}{2}, 1\right)$ e (2, 1, −3)

10. Reta que passa por (2, 1, 0) e é perpendicular à reta $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{j} + \mathbf{k}$

11. Reta que passa por (1, −1, 1) e é paralela à reta $x + 2 = \frac{1}{2}y = z - 3$

12 Reta que é a interseção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$

13. A reta que passa pelos pontos (−4, −6, 1) e (−2, 0 −3) é paralela à reta que passa pelos pontos (10, 18, 4) e (5, 3, 14).

14. A reta que passa pelos pontos (4, 1, −1) e (2, 5, 3) é perpendicular à reta que passa pelos pontos (−3, 2, 0) e (5, 1, 4)?

15. (a) Determine as equações na forma simétrica da reta que passa pelo ponto (0, 2, −1) e é paralela à reta com equações paramétricas $x = 1 + 2t$, $y = 3t$, $z = 5 - 7t$.
(b) Determine os pontos nos quais a reta da parte (a) intercepta os planos coordenados.

16. (a) Determine as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto (5, 1, 0) e que é perpendicular ao plano $2x - y + z = 1$.
(b) Em que pontos essa reta intercepta os planos coordenados?

17. Ache a equação normal para o segmento de reta de (2, −1, 4) a (4, 6, 1).

18. Ache as equações paramétricas para o segmento de reta de (10, 3, 1) a (5, 6, −3).

19–22 □ Determine se as retas L_1 e L_2 são paralelas, reversas ou concorrentes. Se forem concorrentes, determine seu ponto de interseção.

19. L_1: $x = -6t$, $y = 1 + 9t$, $z = -3t$
L_2: $x = 1 + 2s$, $y = 4 - 3s$, $z = s$

20. L_1: $x = 1 + 2t$, $y = 3t$, $z = 2 - t$
L_2: $x = -1 + s$, $y = 4 + s$, $z = 1 + 3s$

21. L_1: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-2}{3}$, L_2: $\dfrac{x-3}{-4} = \dfrac{y-2}{-3} = \dfrac{z-1}{2}$,

22. L_1: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z-2}{-1}$
L_2: $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z+2}{3}$

23–38 □ Determine a equação do plano.

23. O plano que passa pelo ponto (6, 3, 2) e é perpendicular ao vetor $\langle -2, 1, 5 \rangle$

24. O plano que passa pelo ponto (4, 0, −3) e cujo vetor normal é $\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

25. O plano que passa pelo ponto (1, −1, 1) e cujo vetor normal é $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

26. O plano que passa pelo ponto (−2, 8, 10) e é perpendicular à reta $x = 1 + t$, $y = 2t$, $z = 4 - 3t$

27. O plano que passa pela origem e é paralelo ao plano $2x - y + 3z = 1$

28. O plano que passa pelo ponto (−1, 6, −5) e é paralelo ao plano $x + y + z + 2 = 0$

29. O plano que passa pelo ponto (4, −2, 3) e é paralelo ao plano $3x - 7z = 12$

30. O plano que contém a reta $x = 3 + 2t$, $y = t$, $z = 8 - t$ e é paralelo ao plano $2x + 4y + 8z = 17$

31. O plano que passa pelos pontos (0, 1, 1), (1, 0, 1) e (1, 1, 0)

32. O plano que passa pela origem e pelos pontos (2, −4, 6) e (5, 1, 3)

33. O plano que passa pelos pontos (3, −1, 2), (8, 2, 4) e (−1, −2, −3)

34. O plano que passa pelo ponto (1, 2, 3) e contém a reta $x = 3t$, $y = 1 + t$, $z = 2 - t$

35. O plano que passa pelo ponto (6, 0, −2) e contém a reta $x = 4 - 2t$, $y = 3 + 5t$, $z = 7 + 4t$

36. O plano que passa pelo ponto (1, −1, 1) e contém a reta com equação na forma simétrica $x = 2y = 3z$

37. O plano que passa pelo ponto (−1, 2, 1) e contém a reta obtida pela interseção dos planos $x + y - z = 2$ e $2x - y + 3z = 1$

38. Plano que passa pela reta obtida pela interseção dos planos $x - z = 1$ e $y + 2z = 3$ e é perpendicular ao plano $x + y - 2z = 1$

39–41 □ Determine o ponto dado pela interseção da reta e do plano especificados.

39. $x = 3 - t$, $y = 2 + t$, $z = 5t$; $x - y + 2z = 9$

40. $x = 1 + 2t$, $y = 4t$, $z = 2 - 3t$; $x + 2y - z + 1 = 0$

41. $x = y - 1 = 2z$; $4x - y + 3z = 8$

42. Onde a reta que passa pelos pontos (1, 0, 1) e (4, −2, 2) intercepta o plano $x + y + z = 6$?

43. Determine as coordenadas do vetor diretor da reta obtida pela interseção dos planos $x + y + z = 1$ e $x + z = 0$.

44. Determine o cosseno do ângulo entre os planos $x + y + z = 0$ e $x + 2y + 3z = 1$.

45–50 □ Determine se os planos são paralelos, perpendiculares ou nenhum dos dois. No caso de nenhum dos dois, calcule o ângulo entre eles.

45. $x + 4y - 3z = 1, \quad -3x + 6y + 7z = 0$

46. $2z = 4y - x, 3x - 12y + 6z = 1$

47. $x + y + z = 1, \quad x - y + z = 1$

48. $2x - 3y + 4z = 5, \quad x + 6y + 4z = 3$

49. $x = 4y - 2z, \quad 8y = 1 + 2x + 4z$

50. $x + 2y + 2z = 1, \quad 2x - y + 2z = 1$

51–52 □ (a) Determine a equação na forma simétrica da reta de interseção dos planos e (b) determine o ângulo entre os planos.

51. $x + y - z = 2, \quad 3x - 4y + 5z = 6$

52. $x - 2y + z = 1, \quad 2x + y + z = 1$

53–54 □ Determine as equações na forma paramétrica da reta obtida pela interseção dos planos.

53. $z = x + y, \quad 2x - 5y - z = 1$

54. $2x + 5z + 3 = 0, \quad x - 3y + z + 2 = 0$

55. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são eqüidistantes dos pontos $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 1)$.

56. Determine a equação do plano constituído de todos os pontos que são eqüidistantes dos pontos $(-4, 2, 1)$ e $(2, -4, 3)$.

57. Determine a equação do plano x que intercepta a, o plano que intercepta b e o plano z que intercepta c.

58. (a) Determine o ponto dado pela interseção das retas:

$$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 2 \rangle$$

e
$$\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2 \rangle + s\langle -1, 1, 0 \rangle$$

(b) Determine a equação do plano que contém essas retas.

59. Determine se as equações paramétricas da reta, que passam pelo ponto $(0, 1, 2)$, são paralelas ao plano $x + y + z = 2$ e perpendiculares à reta $x = 1 + t, y = 1 - t, z = 2t$.

60. Determine se as equações paramétricas da reta, que passam pelo ponto $(0, 1, 2)$, são perpendiculares à reta $x = 1 + t$, $y = 1 - t, z = 2t$, e interceptam essa reta.

61. Quais dos quatro planos seguintes são paralelos? Existem dois coincidentes?

P_1: $4x - 2y + 6z = 3$ $\qquad$ P_2: $4x - 2y - 2z = 6$

P_3: $-6x + 3y - 9z = 5$ $\qquad$ P_4: $z = 2x - y - 3$

62. Quais das quatro retas seguintes são paralelas? Existem duas coincidentes?

$$L_1\colon x = 1 + t, \quad y = t, \quad z = 2 - 5t$$

$$L_2\colon x + 1 = y - 2 = 1 - z$$

$$L_3\colon x = 1 + t, \quad y = 4 + t, \quad z = 1 - t$$

$$L_4\colon \mathbf{r} = \langle 2, 1, -3 \rangle + t\langle 2, 2, -10 \rangle$$

63–64 □ Utilize a fórmula que aparece no Exercício 39 da Seção 12.4 para determinar a distância do ponto à reta dada.

63. $(1, 2, 3); \quad x = 2 + t, \ y = 2 - 3t, \ z = 5t$

64. $(1, 0, -1); \quad x = 5 - t, \ y = 3t, \ z = 1 + 2t$

65–66 □ Determine a distância do ponto ao plano dado.

65. $(2, 8, 5), \quad x - 2y - 2z = 1$

66. $(3, -2, 7), \quad 4x - 6y + z = 5$

67–68 □ Determine a distância entre os planos paralelos dados

67. $z = x + 2y + 1, \quad 3x + 6y - 3z = 4$

68. $3x + 6y - 9z = 4, \quad x + 2y - 3z = 1$

69. Mostre que a distância entre os planos paralelos $ax + by + cz + d_1 = 0$ e $ax + by + cz + d_2 = 0$ é

$$D = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

70. Determine as equações dos planos que são paralelos ao plano $x + 2y - 2z = 1$ e distantes duas unidades um do outro.

71. Mostre que as retas com equações simétricas $x = y = z$ e $x + 1 = y/2 = z/3$ são reversas e determine a distância entre elas.

72. Determine a distância entre as retas reversas com equações paramétricas $x = 1 + t, y = 1 + 6t, z = 2t$ e $x = 1 + 2s, y = 5 + 15s, z = -2 + 6s$

73. Se a, b e c não são todos nulos, mostre que a equação $ax + by + cz + d = 0$ representa um plano e $\langle a, b, c \rangle$ é o vetor normal ao plano.

Dica: Suponha $a \neq 0$ e reescreva a equação na forma

$$a\left(x + \frac{d}{a}\right) + b(y - 0) + c(z - 0) = 0$$

74. Dê a interpretação geométrica de cada família de planos.

(a) $x + y + z = c$

(b) $x + y + cz = 1$

(c) $y \cos \theta + z \operatorname{sen} \theta = 1$

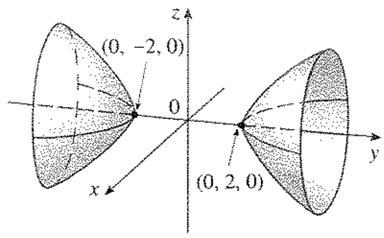


FIGURA 10

$4x^2 - y^2 + 2z^2 + 4 = 0$

A superfície não tem traço no plano xz, mas os traços nos planos verticais $y = k$ para $|k| > 2$ são as elipses

$$x^2 + \frac{z^2}{2} = \frac{k^2}{4} - 1 \qquad y = k$$

que podem ser escritas como

$$\frac{x^2}{\dfrac{k^2}{4} - 1} + \frac{z^2}{2\left(\dfrac{k^2}{4} - 1\right)} = 1 \qquad y = k$$

Esses traços são usados para fazer o esboço na Figura 10.

EXEMPLO 8 □ Classifique a quádrica $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.

SOLUÇÃO Completando os quadrados, reescrevemos a equação como

$$y - 1 = (x - 3)^2 + 2z^2$$

Comparando essa equação com a Tabela 1, vemos que se trata de um parabolóide elíptico. Aqui, entretanto, o eixo de rotação do parabolóide é paralelo ao eixo y, e foi transladado de forma que o vértice é o ponto $(3, 1, 0)$. Os traços nos planos $y = k$ $(k > 1)$ são elipses

$$(x - 3)^2 + 2z^2 = k - 1 \qquad y = k$$

O traço no plano xy é uma parábola com equação $y = 1 + (x - 3)^2$, $z = 0$. O desenho do parabolóide está esboçado na Figura 11.

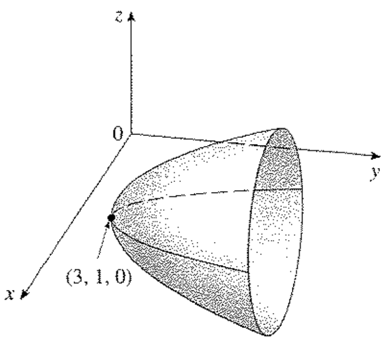


FIGURA 11

$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

12.6 Exercícios

1. (a) O que a equação $y = x^2$ representa como uma curva em $\mathbb{R}^2$?
   (b) O que ela representa como uma superfície em $\mathbb{R}^3$?
   (c) O que a equação $z = y^2$ representa?

2. (a) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma curva em $\mathbb{R}^2$.
   (b) Esboce o gráfico de $y = e^x$ como uma superfície em $\mathbb{R}^3$.
   (c) Descreva e esboce a superfície $z = e^y$.

3–8 □ Descreva e esboce o gráfico da superfície.

3. $y^2 + 4z^2 = 4$
4. $z = 4 - x^2$
5. $x - y^2 = 0$
6. $yz = 4$
7. $z = \cos x$
8. $x^2 - y^2 = 1$

9. (a) Ache e identifique os traços da superfície quádrica $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperbolóide de uma folha da Tabela 1.
   (b) Se trocarmos a equação em (a) para $x^2 - y^2 + z^2 = 1$, como isso afeta o gráfico?
   (c) E se trocarmos a equação em (a) para $x^2 + y^2 + 2y - z^2 = 0$?

10. (a) Ache e identifique os traços da superfície quádrica $-x^2 - y^2 + z^2 = 1$ e explique por que o gráfico parece com o gráfico do hiperbolóide de duas folhas da Tabela 1.
    (b) Se a equação na parte (a) for trocada para $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, o que acontece com o gráfico? Esboce o novo gráfico.

11–20 □ Determine o traço da superfície dada nos planos $x = k$, $y = k$, $z = k$. Identifique a superfície e faça um esboço dela.

11. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$
12. $4y = x^2 + z^2$
13. $y^2 = x^2 + z^2$
14. $z = x^2 - y^2$
15. $-x^2 + 4y^2 - z^2 = 4$
16. $25y^2 + z^2 = 100 + 4x^2$
17. $x^2 + 4z^2 - y = 0$
18. $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$
19. $y = z^2 - x^2$
20. $16x^2 = y^2 + 4z^2$

21–28 □ Case a equação com seu gráfico (identificado por I–VIII). Dê razões para sua escolha.

21. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$

22. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$

23. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$

24. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

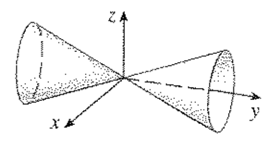
25. $y = 2x^2 + z^2$

26. $y^2 = x^2 + 2z^2$

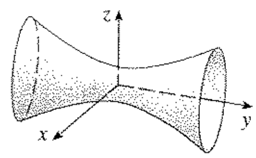
27. $x^2 + 2z^2 = 1$

28. $y = x^2 - z^2$

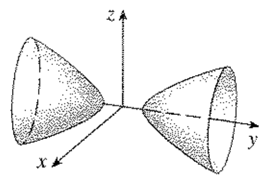
I



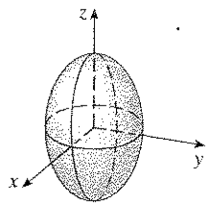
II



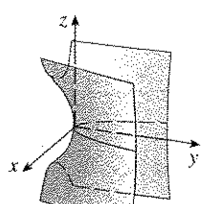
III



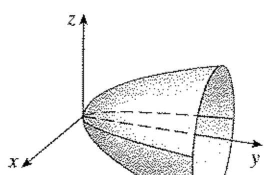
IV



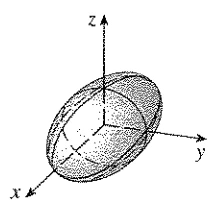
V



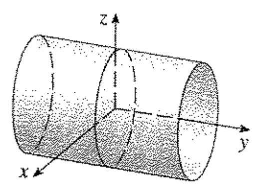
VI



VII



VIII



29–36 □ Coloque a equação na forma padrão, classifique a superfície e faça o esboço.

29. $z^2 = 4x^2 + 9y^2 + 36$

30. $x^2 = 2y^2 + 3z^2$

31. $x = 2y^2 + 3z^2$

32. $4x - y^2 + 4z^2 = 0$

33. $4x^2 + y^2 + 4z^2 - 4y - 24z + 36 = 0$

34. $4y^2 + z^2 - x - 16y - 4z + 20 = 0$

35. $x^2 - y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + 4 = 0$

36. $x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z + 2 = 0$

37–40 □ Use o computador com um programa que trace superfícies tridimensionais. Experimente diversos pontos de vista e diversos tamanhos de janela de inspeção até conseguir uma boa visão da superfície.

37. $z = 3x^2 - 5y^2$

38. $8x^2 + 15y^2 + 5z^2 = 100$

39. $z^2 = x^2 + 4y^2$

40. $z = y^2 + xy$

41. Desenhe a região delimitada pela superfície $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \leqslant z \leqslant 2$.

42. Desenhe a região delimitada pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 2 - x^2 - y^2$.

43. Determine a equação da superfície obtida pela rotação da parábola $y = x^2$ em torno do eixo y.

44. Determine a equação da superfície obtida pela rotação da reta $x = 3y$ em torno do eixo x.

45. Determine a equação da superfície constituída de todos os pontos que são eqüidistantes do ponto $(-1, 0, 0)$ e do plano $x = 1$. Identifique essa superfície.

46. Determine a equação da superfície constituída de todos os pontos P para os quais a distância de P ao eixo x é o dobro da distância de P ao plano yz. Identifique a superfície.

47. Mostre que, se o ponto (a, b, c) pertence ao parabolóide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, então as retas com equação paramétrica $x = a + t$, $y = b + t$, $z = c + 2(b - a)t$ e $x = a + t$, $y = b - t$, $z = c - 2(b + a)t$ estão contidas inteiramente no parabolóide. (Isso mostra que o parabolóide hiperbólico é o que é chamado **superfície regrada**; ele pode ser gerado pelo movimento de uma reta. De fato, esse exercício mostra que passando emr cada ponto do parabolóide hiperbólico existem duas retas geradoras. As únicas outras quádricas que têm superfície regrada são cilindros, cones e hiperbolóides de uma folha.)

48. Mostre que a curva obtida pela interseção das superfícies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ e $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ pertence a um plano.

49. Desenhe as superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 1 - y^2$ em uma mesma tela usando uma janela de tamanho $|x| \leqslant 1.2$, $|y| \leqslant 1.2$, e observe a curva da interseção. Mostre que a projeção dessa curva no plano xy é uma elipse.

12.7 Exercícios

1. O que são as coordenadas cilíndricas? Para que tipo de superfícies elas fornecem uma descrição conveniente?
2. O que são as coordenadas esféricas? Para que tipo de superfícies elas fornecem uma descrição conveniente?

3–8 □ Plote o ponto cujas coordenadas cilíndricas são dadas. Depois, determine as coordenadas retangulares do ponto.

3. $(2, \pi/4, 1)$
4. $(1, 3\pi/2, 2)$
5. $(3, 0, -6)$
6. $(1, \pi, e)$
7. $(4, -\pi/3, 5)$
8. $(5, \pi/6, 6)$

9–12 □ Converta de coordenadas retangulares para coordenadas cilíndricas.

9. $(1, -1, 4)$
10. $(3, 3, -2)$
11. $(-1, -\sqrt{3}, 2)$
12. $(3, 4, 5)$

13–18 □ Plote o ponto cujas coordenadas esféricas são dadas. Depois, determine as coordenadas retangulares do ponto.

13. $(1, 0, 0)$
14. $(3, 0, \pi)$
15. $(1, \pi/6, \pi/6)$
16. $(5, \pi, \pi/2)$
17. $(2, \pi/3, \pi/4)$
18. $(2, \pi/4, \pi/3)$

19–22 □ Converta de coordenadas retangulares para coordenadas esféricas.

19. $(1, \sqrt{3}, 2\sqrt{3})$
20. $(0, \sqrt{3}, 1)$
21. $(0, -1, -1)$
22. $(-1, 1, \sqrt{6})$

23–26 □ Converta de coordenadas cilíndricas para coordenadas esféricas.

23. $(1, \pi/6, \sqrt{3})$
24. $(\sqrt{6}, \pi/4, \sqrt{2})$
25. $(\sqrt{3}, \pi/2, -1)$
26. $(4, \pi/8, 3)$

27–30 □ Converta de coordenadas esféricas para coordenadas cilíndricas.

27. $(2, 0, 0)$
28. $(2\sqrt{2}, 3\pi/2, \pi/2)$
29. $(8, \pi/6, \pi/2)$
30. $(4, \pi/4, \pi/3)$

31–36 □ Descreva em palavras a superfície cuja equação é dada a seguir.

31. $r = 3$
32. $\rho = 3$
33. $\phi = 0$
34. $\phi = \pi/2$
35. $\phi = \pi/3$
36. $\theta = \pi/3$

37–48 □ Identifique a superfície cuja equação é dada.

37. $z = r^2$
38. $r = 4 \operatorname{sen} \theta$
39. $\rho \cos \phi = 2$
40. $\rho \operatorname{sen} \phi = 2$
41. $r = 2 \cos \theta$
42. $\rho = 2 \cos \phi$
43. $r^2 + z^2 = 25$
44. $r^2 - 2z^2 = 4$
45. $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi \cos^2\theta + \cos^2\phi) = 4$
46. $\rho^2(\operatorname{sen}^2\phi - 4\cos^2\phi) = 1$
47. $r^2 = r$
48. $\rho^2 - 6\rho + 8 = 0$

49–56 □ Escreva a equação (a) em coordenadas cilíndricas e (b) em coordenadas esféricas.

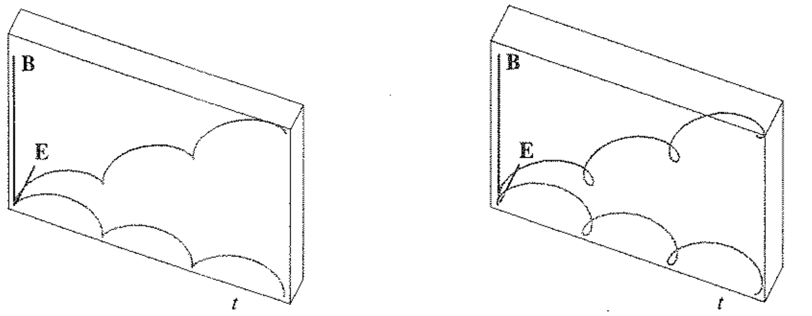
49. $z = x^2 + y^2$
50. $x^2 + y^2 + z^2 = 2$
51. $x = 3$
52. $x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 0$
53. $x^2 - y^2 - 2z^2 = 4$
54. $y^2 + z^2 = 1$
55. $x^2 + y^2 = 2y$
56. $z = x^2 - y^2$

57–62 □ Esboce o desenho do sólido descrito pelas desigualdades.

57. $r^2 \leqslant z \leqslant 2 - r^2$
58. $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad r \leqslant z \leqslant 2$
59. $\rho \leqslant 2, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$
60. $2 \leqslant \rho \leqslant 3, \quad \pi/2 \leqslant \phi \leqslant \pi$
61. $-\pi/2 \leqslant \theta \leqslant \pi/2, \quad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi/6, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant \sec \phi$
62. $0 \leqslant \phi \leqslant \pi/3, \quad \rho \leqslant 2$

63. Uma concha cilíndrica tem 20 cm de comprimento, com raio interno de 6 cm, e raio externo de 7 cm. Escreva as inequações que descrevem a concha em um sistema de coordenadas apropriado. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas com respeito à concha.
64. (a) Ache as inequações que descrevem uma bola oca com diâmetro de 30 cm e espessura de 0,5 cm. Explique como você posicionou o sistema de coordenadas que escolheu.
(b) Suponha que a bola seja cortada pela metade. Escreva as inequações que descrevem uma das metades.
65. Um sólido é constituído do conjunto de pontos que está acima do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e abaixo da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = z$. Descreva o sólido utilizando inequações envolvendo coordenadas esféricas.
66. Utilize um dispositivo gráfico para desenhar o sólido envolvido pelos parabolóides $z = x^2 + y^2$ e $z = 5 - x^2 - y^2$.
67. Utilize um dispositivo gráfico para desenhar um silo constituído de um cilindro com raio 3 e altura 10 sobreposto por um hemisfério.
68. A latitude e a longitude de um ponto P no hemisfério norte estão relacionadas às coordenadas esféricas ρ, θ, ϕ como se segue. Tomamos a origem como o centro da Terra e a orientação positiva do eixo z passa pelo pólo norte. A orientação positiva do eixo x passa pelo ponto onde o primeiro meridiano (o meridiano de Greenwich, na Inglaterra) intercepta o equador. Assim a latitude de P é $\alpha = 90° - \phi°$ e a longitude é $\beta = 360° - \theta°$. Determine a distância no grande círculo entre Los Angeles (lat. 34,06° N, long. 118,25° W) e Montreal (lat. 45,50° N, long. 73,60° W). Tome o raio da Terra como sendo 3.960 mi. (Um grande círculo é a circunferência obtida pela interseção da esfera que representa o globo terrestre com um plano que passa pelo centro da Terra.)

estudada na Seção 10.1 [Figura 12(a)] ou é uma curva cuja projeção é a tricóide investigada no Exercício 38 da Seção 10.1 [Figura 12 (b)].



(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \text{sen}\, t, 1 - \cos t, t\rangle$ (b) $\mathbf{r}(t) = \langle t - \frac{3}{2}\text{sen}\, t, 1 - \frac{3}{2}\cos t, t\rangle$

FIGURA 12
Movimento de partícula carregada em campos elétrico e magnético orientados ortogonalmente

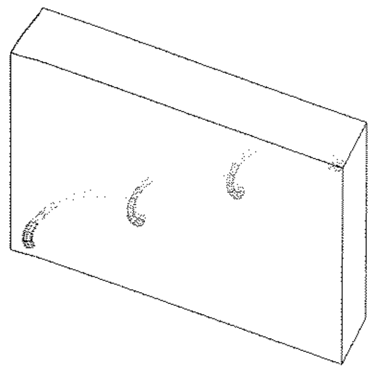


FIGURA 13

Para mais detalhes relativos à física envolvida e animações das trajetórias das partículas, veja os seguintes endereços na web:

- lompado.uah.edu/Links/CrossedFields.html
- www.phy.ntnu.edu.tw/java/emField/emField.html
- www.physics.ucla.edu/plasma-exp/Beam/

13.1 Exercícios

1–2 □ Determine o domínio das funções vetoriais.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t}\rangle$

2. $\mathbf{r}(t) = \dfrac{t-2}{t+2}\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} + \ln(9 - t^2)\,\mathbf{k}$

3–6 □ Calcule os limites.

3. $\lim\limits_{t\to 0} \langle \cos t, \text{sen}\, t, t\ln t\rangle$

4. $\lim\limits_{t\to 0} \left\langle \dfrac{e^t - 1}{t}, \dfrac{\sqrt{1+t} - 1}{t}, \dfrac{3}{1+t}\right\rangle$

5. $\lim\limits_{t\to 1} \left(\sqrt{t+3}\,\mathbf{i} + \dfrac{t-1}{t^2-1}\mathbf{j} + \dfrac{\text{tg}\, t}{t}\mathbf{k}\right)$

6. $\lim\limits_{t\to\infty} \left\langle \text{arctg}\, t, e^{-2t}, \dfrac{\ln t}{t}\right\rangle$

7–14 □ Esboce o gráfico da curva cuja equação vetorial é dada. Indique com seta a direção na qual o parâmetro cresce.

7. $\mathbf{r}(t) = \langle t^4 + 1, t\rangle$

8. $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^2\rangle$

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t, \cos 2t, \text{sen}\, 2t\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, 3t, -t\rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \langle \text{sen}\, t, 3, \cos t\rangle$

12. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{i} + t\,\mathbf{j} + \cos t\,\mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^4\mathbf{j} + t^6\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = \text{sen}\, t\,\mathbf{i} + \text{sen}\, t\,\mathbf{j} + \sqrt{2}\cos t\,\mathbf{k}$

15–18 □ Encontre uma equação vetorial e equações paramétricas para o segmento de reta que liga P e Q.

15. $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 2, 3)$

16. $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 3, 1)$

17. $P(1, -1, 2)$, $Q(4, 1, 7)$

18. $P(-2, 4, 0)$, $Q(6, -1, 2)$

19–24 □ Case as equações paramétricas com os gráficos (identificados com números de I–VI). Explique a razão de sua escolha.

19. $x = \cos 4t$, $y = t$, $z = \text{sen}\, 4t$

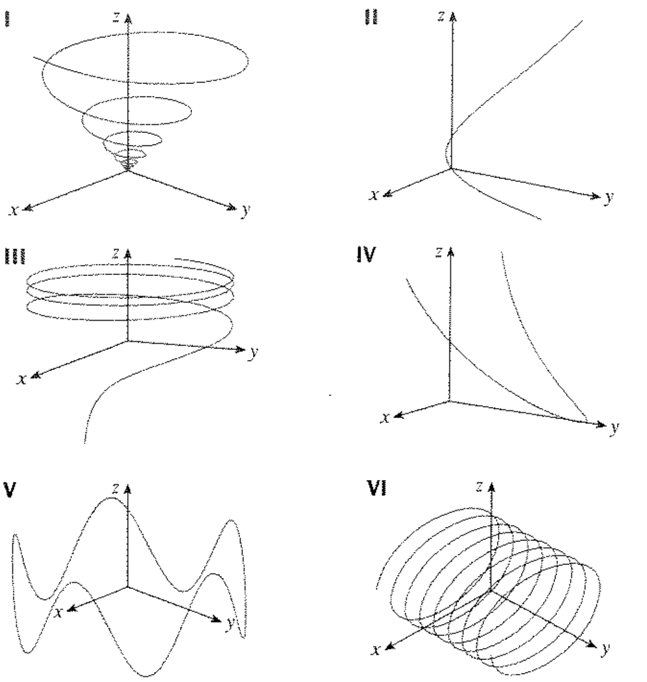
20. $x = t$, $y = t^2$, $z = e^{-t}$

21. $x = t$, $y = 1/(1 + t^2)$, $z = t^2$

22. $x = e^{-t}\cos 10t$, $y = e^{-t}\,\text{sen}\, 10t$, $z = e^{-t}$

23. $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t$, $z = \text{sen}\, 5t$

24. $x = \cos t$, $y = \text{sen}\, t$, $z = \ln t$



25. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t \cos t$, $y = t \operatorname{sen} t$, $z = t$ está no $z^2 = x^2 + y^2$, e use esse fato para esboçar a curva.

26. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = \operatorname{sen} t$, $y = \cos t$, $z = \operatorname{sen}^2 t$ é a curva de interseção das superfícies $z = x^2$ e $x^2 + y^2 = 1$. Use esse fato para esboçar a curva.

27–30 □ Utilize computador para traçar a curva da equação vetorial dada. Escolha o domínio do parâmetro e ponto de vista de forma a garantir que a visualização é a verdadeira.

27. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \cos t, t^2 \rangle$

28. $\mathbf{r}(t) = \langle t^4 - t^2 + 1, t, t^2 \rangle$

29. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \sqrt{t-1}, \sqrt{5-t} \rangle$

30. $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, \operatorname{sen} 3t \rangle$

31. Trace a curva com equações paramétricas $x = (1 + \cos 16t) \cos t$, $y = (1 + \cos 16t) \operatorname{sen} t$, $z = 1 + \cos 16t$. Explique sua aparência mostrando que a curva se desenvolve em um cone.

32. Trace a curva com equações paramétricas

$$x = \sqrt{1 - 0{,}25 \cos^2 10t} \cos t$$
$$y = \sqrt{1 - 0{,}25 \cos^2 10t} \operatorname{sen} t$$
$$z = 0{,}5 \cos 10t$$

Explique a aparência da curva mostrando que ela se desenvolve em uma esfera.

33. Mostre que a curva com equações paramétricas $x = t^2$, $y = 1 - 3t$, $z = 1 + t^3$ passa pelos pontos $(1, 4, 0)$ e $(9, -8, 28)$ e não passa pelo ponto $(4, 7, -6)$.

34–36 □ Determine a função vetorial que representa a curva obtida pela interseção de duas superfícies.

34. O cilindro $x^2 + y^2 = 4$ e a superfície $z = xy$

35. O cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e o plano $z = 1 + y$

36. O parabolóide $z = 4x^2 + y^2$ e o cilindro parabólico $y = x^2$

37. Tente esboçar à mão a curva obtida pela interseção do cilindro circular $x^2 + y^2 = 4$ com o cilindro parabólico $z = x^2$. Determine então as equações paramétricas dessa curva e utilize um computador para desenhá-la.

38. Tente esboçar à mão a interseção do cilindro parabólico $y = x^2$ com a metade superior do elipsóide $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 16$. Escreva então as equações paramétricas para a curva e utilize o computador para traçá-la.

39. Se dois objetos viajam pelo espaço ao longo de duas curvas diferentes, é sempre importante saber se eles vão se colidir. (Um míssil vai atingir seu alvo móvel? Duas aeronaves vão se colidir?) As curvas podem se interceptar, mas precisamos saber se os objetos estarão na mesma posição *no mesmo instante*. Suponha que as trajetórias das duas sejam dadas pelas seguintes funções vetoriais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t^2, 7t - 12, t^2 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 4t - 3, t^2, 5t - 6 \rangle$$

para $t \geqslant 0$. As partículas colidem?

40. Duas partículas viajam ao longo das curvas espaciais

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3 \rangle \qquad \mathbf{r}_2(t) = \langle 1 + 2t, 1 + 6t, 1 + 14t \rangle$$

As partículas colidem? Suas trajetórias se interceptam?

41. Suponha que $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sejam funções vetoriais que possuem limites quando $t \to a$ e seja c uma constante. Prove as seguintes propriedades de limites.

(a) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) + \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(b) $\lim_{t \to a} c\mathbf{u}(t) = c \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t)$

(c) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \cdot \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

(d) $\lim_{t \to a} [\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \lim_{t \to a} \mathbf{u}(t) \times \lim_{t \to a} \mathbf{v}(t)$

42. A visão do nó trevo apresentada na Figura 8 é correta, mas não muito reveladora. Use as equações paramétricas

$$x = (2 + \cos 1{,}5t) \cos t \qquad y = (2 + \cos 1{,}5t) \operatorname{sen} t$$
$$z = \operatorname{sen} 1{,}5t$$

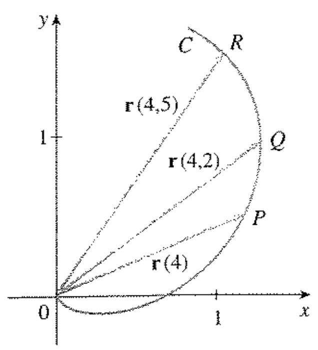
para esboçar a curva à mão vista de cima deixando em branco os pontos onde a curva se sobrepõe. Comece mostrando que

13.2 Exercícios

1. A figura mostra uma curva C dada pela função vetorial $\mathbf{r}(t)$.
(a) Desenhe os vetores $\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)$ e $\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)$.
(b) Esboce os vetores

$$\frac{\mathbf{r}(4{,}5) - \mathbf{r}(4)}{0{,}5} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{r}(4{,}2) - \mathbf{r}(4)}{0{,}2}$$

(c) Escreva a expressão para $\mathbf{r}'(4)$ e para seu versor da tangente $\mathbf{T}(4)$.
(d) Desenhe o vetor $\mathbf{T}(4)$.



2. (a) Faça um esboço grande da curva descrita pela função vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, t\rangle$, $0 \leq t \leq 2$, e desenhe os vetores $\mathbf{r}(1)$, $\mathbf{r}(1{,}1)$ e $\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)$.
(b) Desenhe o vetor $\mathbf{r}'(1)$ começando em $(1, 1)$ e o compare com o vetor

$$\frac{\mathbf{r}(1{,}1) - \mathbf{r}(1)}{0{,}1}$$

Explique por que esses vetores estão tão próximos um do outro tanto em módulo quanto em direção.

3–8 □
(a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.
(b) Determine $\mathbf{r}'(t)$.
(c) Desenhe o vetor de posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ para o valor dado de t.

3. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos t, \operatorname{sen} t\rangle, \quad t = \pi/4$

4. $\mathbf{r}(t) = \langle 1 + t, \sqrt{t}\rangle, \quad t = 1$

5. $\mathbf{r}(t) = (1 + t)\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, \quad t = 1$

6. $\mathbf{r}(t) = e^t\,\mathbf{i} + e^{-t}\,\mathbf{j}, \quad t = 0$

7. $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{3t}\mathbf{j}, \quad t = 0$

8. $\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 3 \cos t\,\mathbf{j}, \quad t = \pi/3$

9–16 □ Determine a derivada da função vetorial.

9. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, 1 - t, \sqrt{t}\rangle$

10. $\mathbf{r}(t) = \langle \cos 3t, t, \operatorname{sen} 3t\rangle$

11. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j} + e^{4t}\,\mathbf{k}$

12. $\mathbf{r}(t) = \operatorname{sen}^{-1} t\,\mathbf{i} + \sqrt{1 - t^2}\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$

13. $\mathbf{r}(t) = e^{t^2}\mathbf{i} - \mathbf{j} + \ln(1 + 3t)\,\mathbf{k}$

14. $\mathbf{r}(t) = at \cos 3t\,\mathbf{i} + b \operatorname{sen}^3 t\,\mathbf{j} + c \cos^3 t\,\mathbf{k}$

15. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{a} + t\,\mathbf{b} + t^2\mathbf{c}$

16. $\mathbf{r}(t) = t\,\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + t\,\mathbf{c})$

17–20 □ Determine o versor tangente $\mathbf{T}(t)$ no ponto com valor de parâmetro t dado.

17. $\mathbf{r}(t) = \langle 6t^5, 4t^3, 2t\rangle, \quad t = 1$

18. $\mathbf{r}(t) = 4\sqrt{t}\,\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, \quad t = 1$

19. $\mathbf{r}(t) = \cos t\,\mathbf{i} + 3t\,\mathbf{j} + 2 \operatorname{sen} 2t\,\mathbf{k}, \quad t = 0$

20. $\mathbf{r}(t) = 2 \operatorname{sen} t\,\mathbf{i} + 2 \cos t\,\mathbf{j} + \operatorname{tg} t\,\mathbf{k}, \quad t = \pi/4$

21. Se $\mathbf{r}(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$, encontre $\mathbf{r}'(t)$, $\mathbf{T}(1)$, $\mathbf{r}''(t)$ e $\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)$.

22. Se $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t}\rangle$, determine $\mathbf{T}(0)$, $\mathbf{r}''(0)$ e $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

23–26 □ Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado.

23. $x = t^5, \quad y = t^4, \quad z = t^3; \quad (1, 1, 1)$

24. $x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 1, \quad z = t + 1; \quad (-1, 1, 1)$

25. $x = e^{-t} \cos t, \quad y = e^{-t} \operatorname{sen} t, \quad z = e^{-t}; \quad (1, 0, 1)$

26. $x = \ln t, \quad y = 2\sqrt{t}, \quad z = t^2; \quad (0, 2, 1)$

27–28 □ Estabeleça as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. Ilustre traçando o gráfico da curva e da reta tangente em uma mesma tela.

27. $x = t, \; y = \sqrt{2} \cos t, \; z = \sqrt{2} \operatorname{sen} t; \quad (\pi/4, 1, 1)$

28. $x = \cos t, \; y = 3e^{2t}, \; z = 3e^{-2t}; \quad (1, 3, 3)$

29. Determine se as curvas são lisas.
(a) $\mathbf{r}(t) = \langle t^3, t^4, t^5\rangle$
(b) $\mathbf{r}(t) = \langle t^3 + t, t^4, t^5\rangle$
(c) $\mathbf{r}(t) = \langle \cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t\rangle$

30. (a) Determine o ponto de interseção das retas tangentes à curva $\mathbf{r}(t) = \langle \operatorname{sen} \pi t, 2 \operatorname{sen} \pi t, \cos \pi t\rangle$ nos pontos $t = 0$ e $t = 0{,}5$.
(b) Ilustre traçando o gráfico da curva e ambas as tangentes.

31. As curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle$ e $\mathbf{r}_2(t) = \langle \operatorname{sen} t, \operatorname{sen} 2t, t\rangle$ se encontram na origem. Determine o ângulo de interseção destas com precisão de graus.

32. Em que ponto as curvas $\mathbf{r}_1(t) = \langle t, 1 - t, 3 + t^2\rangle$ e $\mathbf{r}_2(s) = \langle 3 - s, s - 2, s^2\rangle$ se encontram? Encontre o ângulo entre elas no ponto de encontro, com precisão de graus.

33–38 □ Calcule a integral.

33. $\int_0^1 (16t^3\,\mathbf{i} - 9t^2\,\mathbf{j} + 25t^4\,\mathbf{k})\,dt$

34. $\int_0^1 \left(\frac{4}{1+t^2}\,\mathbf{j} + \frac{2t}{1+t^2}\,\mathbf{k}\right)dt$

35. $\int_0^{\pi/2} (3\,\mathrm{sen}^2 t\cos t\,\mathbf{i} + 3\,\mathrm{sen}\,t\cos^2 t\,\mathbf{j} + 2\,\mathrm{sen}\,t\cos t\,\mathbf{k})\,dt$

36. $\int_1^4 \left(\sqrt{t}\,\mathbf{i} + te^{-t}\,\mathbf{j} + \frac{1}{t^2}\,\mathbf{k}\right)dt$

37. $\int (e^t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k})\,dt$

38. $\int (\cos \pi t\,\mathbf{i} + \mathrm{sen}\,\pi t\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{k})\,dt$

39. Determine $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = t^2\,\mathbf{i} + 4t^3\,\mathbf{j} - t^2\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{j}$.

40. Determine $\mathbf{r}(t)$ se $\mathbf{r}'(t) = \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j} + 2t\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

41. Prove a Fórmula 1 do Teorema 3.

42. Prove a Fórmula 3 do Teorema 3.

43. Prove a Fórmula 5 do Teorema 3.

44. Prove a Fórmula 6 do Teorema 3.

45. Se $\mathbf{u}(t) = \mathbf{i} - 2t^2\,\mathbf{j} + 3t^3\,\mathbf{k}$ e $\mathbf{v}(t) = t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathrm{sen}\,t\,\mathbf{k}$ determine $(d/dt)\,[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)]$.

46. Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são funções vetoriais no Exercício 45, encontre $(d/dt)\,[\mathbf{u}(t)\times\mathbf{v}(t)]$.

47. Mostre que se $\mathbf{r}$ é uma função vetorial tal que exista $\mathbf{r}''$, então

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}'(t)] = \mathbf{r}(t)\times\mathbf{r}''(t)$$

48. Determine uma expressão para $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t)\cdot(\mathbf{v}(t)\times\mathbf{w}(t))]$.

49. Se $\mathbf{r}(t)\neq\mathbf{0}$, mostre que $\frac{d}{dt}|\mathbf{r}(t)| = \frac{1}{|\mathbf{r}(t)|}\,\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t)$.

[*Dica*: $|\mathbf{r}(t)|^2 = \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)$]

50. Se uma curva tem a propriedade de o vetor de posição $\mathbf{r}(t)$ estar sempre perpendicular ao vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$, mostre que essa curva se desenvolve em uma esfera com o centro na origem.

51. Se $\mathbf{u}(t) = \mathbf{r}(t)\cdot[\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)]$, mostre que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{r}(t)\cdot[\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}'''(t)]$$

13.3 Comprimento de Arco e Curvatura

Na Seção 10.2 definimos o comprimento de uma curva plana com equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $a \leq t \leq b$, como o limite do comprimento da poligonal inscrita, e, para o caso quando f' e g' são contínuas, chegamos à seguinte fórmula:

$$\boxed{1}\qquad L = \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt$$

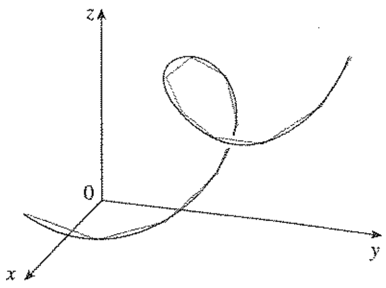


FIGURA 1
O comprimento de uma curva espacial é o limite do comprimento das poligonais inscritas.

O comprimento de uma curva espacial é definido exatamente da mesma forma (veja a Figura 1). Suponha que a curva tenha equação vetorial $\mathbf{r}(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle$, $a \leq t \leq b$, ou, o que é equivalente, equações paramétricas $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, onde f', g' e h' são funções contínuas. Se a curva não se intercepta quando o parâmetro t cresce, podemos mostrar que

$$\boxed{2}\qquad \boxed{\begin{aligned} L &= \int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2 + [h'(t)]^2}\,dt \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \end{aligned}}$$

Note que os comprimentos dos arcos de curva dados pelas Fórmulas (1) e (2) podem ser escritos de forma mais compacta:

$$\boxed{3}\qquad \boxed{L = \int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt}$$

□ A Figura 8 mostra a hélice e o plano osculador do Exemplo 7.

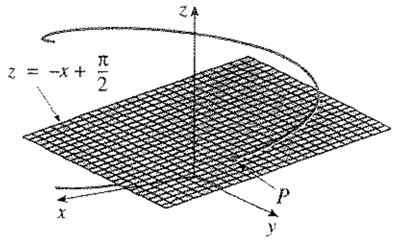


FIGURA 8

SOLUÇÃO O plano normal em P tem vetor normal $\mathbf{r}'(\pi/2) = \langle -1, 0, 1\rangle$, portanto sua equação é

$$-1(x-0) + 0(y-1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = x + \frac{\pi}{2}$$

O plano osculador em P contém os vetores $\mathbf{T}$ e $\mathbf{N}$, e assim seu vetor normal é $\mathbf{T} \times \mathbf{N} = \mathbf{B}$. Do Exemplo 6, temos

$$\mathbf{B}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle \operatorname{sen} t, -\cos t, 1\rangle \qquad \mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right\rangle$$

Um vetor normal mais simples é $\langle 1, 0, 1\rangle$, então uma equação do plano osculador é

$$1(x-0) + 0(y-1) + 1\left(z - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \text{ou} \qquad z = -x + \frac{\pi}{2}$$

EXEMPLO 8 □ Determine e desenhe o círculo osculador da parábola $y = x^2$ na origem.

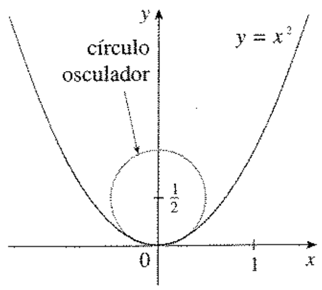


FIGURA 9

SOLUÇÃO Do Exemplo 5, a curvatura da parábola na origem é $\kappa(0) = 2$. Dessa forma, o raio do círculo osculador é $1/\kappa = \frac{1}{2}$ e seu centro é $\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Sua equação é, portanto,

$$x^2 + \left(y - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{4}$$

Para o gráfico da Figura 9 usamos as equações paramétricas do círculo:

$$x = \tfrac{1}{2}\cos t \qquad y = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t$$

Resumimos aqui as fórmulas para o vetor da tangente, os vetores normal e binormal e a curvatura.

$$\boxed{\begin{gathered} \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \qquad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} \qquad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t) \\ \kappa = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} \end{gathered}}$$

13.3 Exercícios

1–6 □ Determine o comprimento da curva dada.

1. $\mathbf{r}(t) = \langle 2\operatorname{sen} t, 5t, 2\cos t\rangle, \quad -10 \leqslant t \leqslant 10$
2. $\mathbf{r}(t) = \langle t^2, \operatorname{sen} t - t\cos t, \cos t + t\operatorname{sen} t\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$
3. $\mathbf{r}(t) = \sqrt{2}t\,\mathbf{i} + e^t\,\mathbf{j} + e^{-t}\,\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$
4. $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + \ln t\,\mathbf{k}, \quad 1 \leqslant t \leqslant e$
5. $\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$
6. $\mathbf{r}(t) = 12t\,\mathbf{i} + 8t^{3/2}\,\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1$

7. Use a regra de Simpson com $n = 10$ para estimar o comprimento do arco da cúbica retorcida $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ da origem até o ponto (2, 4, 8).
8. Utilize o computador para traçar o gráfico da curva com equações paramétricas $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} 3t$, $z = \operatorname{sen} t$. Determine o comprimento total da curva com precisão de quatro casas decimais.

9–11 □ Reparametrize a curva em relação ao comprimento do arco do ponto onde $t = 0$ na direção crescente de t.

9. $\mathbf{r}(t) = 2t\,\mathbf{i} + (1 - 3t)\,\mathbf{j} + (5 + 4t)\,\mathbf{k}$

2. *O índice I de temperatura-umidade* (ou simplesmente Umidex) em função da umidade I é a temperatura aparente do ar quando a temperatura real é T e a umidade relativa é h, de modo que possamos escrever $I = f(T, h)$. A tabela seguinte com os valores de I foi extraída de uma tabela do Serviço de Administração Nacional de Oceanos e Atmosfera dos Estados Unidos.

TABELA 3 Temperatura aparente como função da temperatura e da umidade

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°F): T \ h	20	30	40	50	60	70
80	77	78	79	81	82	83
85	82	84	86	88	90	93
90	87	90	93	96	100	106
95	93	96	101	107	114	124
100	99	104	110	120	132	144

(a) Qual é o valor de $f(95, 70)$? Qual seu significado?
(b) Para que valor de h temos $f(90, h) = 100$?
(c) Para que valor de T temos $f(T, 50) = 88$?
(d) Qual o significado de $I = f(80, h)$ e $I = f(100, h)$? Compare o comportamento dessas duas funções de h.

3. Verifique que, para a função de produção de Cobb-Douglas

$$P(L, K) = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$$

discutida no Exemplo 3, a produção dobrará se a quantidade de trabalho e a de capital investido forem dobradas. É verdade também para uma função de produção genérica $P(L, K) = bL^{\alpha}K^{1-\alpha}$?

4. O índice sensação térmica W discutido no Exemplo 2 foi modelado pela seguinte equação:

$$W(T, v) = 13{,}12 + 0{,}6215T - 11{,}37v^{0{,}16} + 0{,}3965Tv^{0{,}16}$$

Verifique quão próximo este modelo está dos valores da Tabela 1 para alguns valores de T e v.

5. A altura das ondas h em um mar aberto depende da rapidez do vento v e do intervalo de tempo t no qual está ventando com a mesma intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ dados em pés, são apresentados na tabela que se segue.
(a) Qual é o valor de $f(40, 15)$? Qual seu significado?
(b) Qual o significado da função $h = f(30, t)$? Descreva seu comportamento.
(c) Qual o significado da função $h = f(v, 30)$? Descreva seu comportamento.

Duração (horas)

Velocidade do vento (nós): v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

6. Seja $f(x, y) = \ln(x + y - 1)$.
(a) Estime $f(1, 1)$.
(b) Estime $f(e, 1)$.
(c) Determine o domínio de f.
(d) Estabeleça a imagem de f.

7. Seja $f(x, y) = x^2e^{3xy}$.
(a) Calcule $f(2, 0)$.
(b) Determine o domínio de f.
(c) Estipule a imagem de f.

8. Determine e esboce o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{1 + x - y^2}$. Qual é a imagem da f?

9. Seja $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z-x^2-y^2}}$.
(a) Calcule $f(2, -1, 6)$.
(b) Estabeleça o domínio de f.
(c) Determine a imagem f.

10. Seja $g(x, y, z) = \ln(25 - x^2 - y^2 - z^2)$.
(a) Calcule $g(2, -2, 4)$.
(b) Determine o domínio de g.
(c) Estipule a imagem de g.

11–20 □ Determine e faça o esboço do domínio da função.

11. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$

12. $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$

13. $f(x, y) = \ln(9 - x^2 - 9y^2)$

14. $f(x, y) = \dfrac{x - 3y}{x + 3y}$

15. $f(x, y) = \dfrac{3x + 5y}{x^2 + y^2 - 4}$

16. $f(x, y) = \sqrt{y - x}\ln(y + x)$

17. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{y - x^2}}{1 - x^2}$

18. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} + \ln(4 - x^2 - y^2)$

19. $f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}$

20. $f(x, y, z) = \ln(16 - 4x^2 - 4y^2 - z^2)$

21–29 □ Esboce o gráfico da função.

21. $f(x, y) = 3$ **22.** $f(x, y) = y$

23. $f(x, y) = 1 - x - y$ **24.** $f(x, y) = \cos x$

25. $f(x, y) = 1 - x^2$ **26.** $f(x, y) = 3 - x^2 - y^2$

27. $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$

28. $f(x, y) = \sqrt{16 - x^2 - 16y^2}$

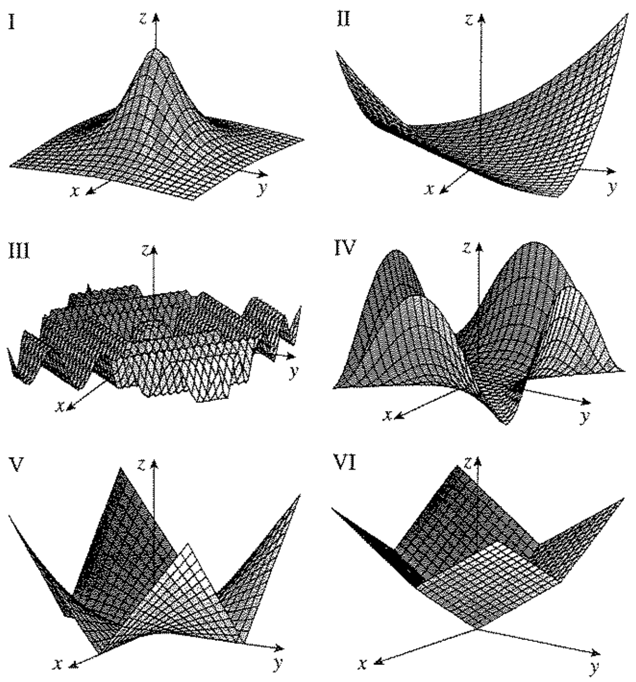
29. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

30. Case a função com o gráfico (indicado por I–VI). Dê razões para sua escolha.

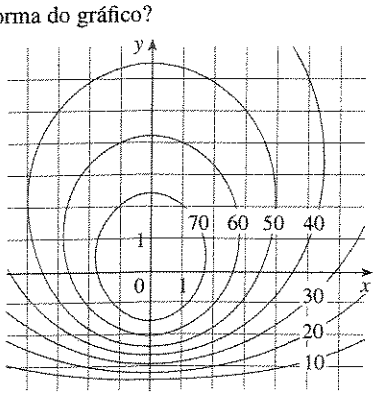
(a) $f(x, y) = |x| + |y|$ (b) $f(x, y) = |xy|$

(c) $f(x, y) = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$ (d) $f(x, y) = (x^2 - y^2)^2$

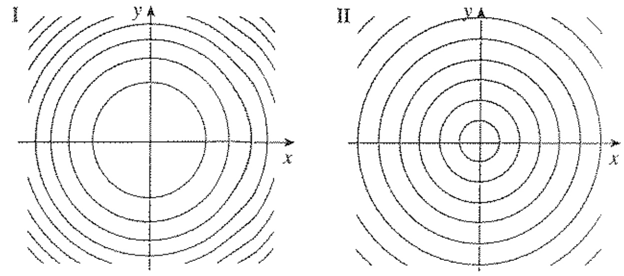
(e) $f(x, y) = (x - y)^2$ (f) $f(x, y) = \text{sen}(|x| + |y|)$



31. É mostrado o mapa de contorno para a função f. Use-o para estimar o valor de $f(-3, 3)$ e $f(3, -2)$. O que você pode dizer sobre a forma do gráfico?

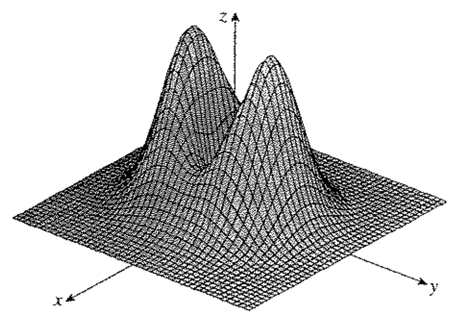


32. Dois mapas de contorno são mostrados na figura. Um é da função f cujo gráfico é um cone. O outro é para uma função g cujo gráfico é um parabolóide. Qual é qual? Por quê?



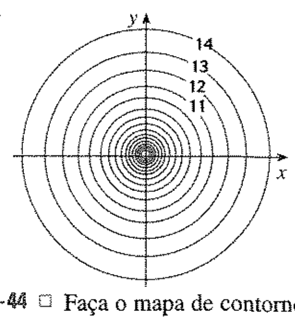
33. Localize os pontos A e B no mapa das Montanhas de Lonesome (Figura 12). Qual a descrição do terreno perto de A? E perto de B?

34. Faça um esboço do diagrama de contorno da função cujo gráfico é mostrado.

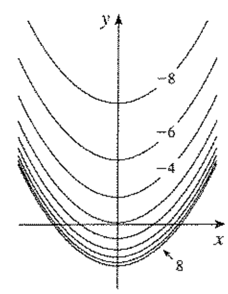


35–36 □ Um mapa de contorno de uma função é mostrado. Use-o para fazer um esboço do gráfico da f.

35.



36.



37–44 □ Faça o mapa de contornos da função mostrando várias curvas de nível.

37. $f(x, y) = xy$ **38.** $f(x, y) = x^2 - y^2$

39. $f(x, y) = y - \ln x$ **40.** $f(x, y) = e^{y/x}$

41. $f(x, y) = \sqrt{x + y}$ **42.** $f(x, y) = y \sec x$

43. $f(x, y) = x - y^2$ **44.** $f(x, y) = y/(x^2 + y^2)$

45–46 □ Faça o esboço do diagrama de contornos e do gráfico da função e compare-os.

45. $f(x, y) = x^2 + 9y^2$

46. $f(x, y) = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}$

47. Uma camada fina de metal, localizada no plano xy, tem temperatura $T(x, y)$ no ponto (x, y). As curvas de nível de T são chamadas *isotérmicas* porque todos os pontos em uma isotérmica têm a mesma temperatura. Faça o esboço de algumas isotérmicas se a função temperatura for dada por

$$T(x, y) = 100/(1 + x^2 + 2y^2)$$

48. Se $V(x, y)$ é o potencial elétrico de um ponto (x, y) do plano xy, as curvas de nível de V são chamadas *curvas equipotenciais*, porque nelas todos os pontos têm o mesmo potencial elétrico. Esboce algumas curvas equipotenciais de $V(x, y) = c/\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, onde c é uma constante positiva.

49–52 □ Use um computador para traçar o gráfico da função utilizando vários pontos de vista. Imprima a que, em sua opinião, saiu melhor. Se seu programa também produz curvas de nível, trace o diagrama de contornos da mesma função e compare.

49. $f(x, y) = x^3 + y^3$

50. $f(x, y) = \text{sen}(ye^{-x})$

51. $f(x, y) = xy^2 - x^3$ (sela do macaco)

52. $f(x, y) = xy^3 - yx^3$ (sela do cachorro)

53–58 □ Case a função (a) com seu gráfico (indicado por A-F na página 899) e (b) com seus mapas de contorno (indicado por I–VI). Dê razões para sua escolha.

53. $z = \text{sen}\sqrt{x^2 + y^2}$

54. $z = x^2y^2e^{-x^2-y^2}$

55. $z = \dfrac{1}{x^2 + 4y^2}$

56. $z = x^3 - 3xy^2$

57. $z = \text{sen}\, x\, \text{sen}\, y$

58. $z = \text{sen}^2 x + \frac{1}{4}y^2$

59–62 □ Descreva as superfícies de nível da função.

59. $f(x, y, z) = x + 3y + 5z$

60. $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$

61. $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + z^2$

62. $f(x, y, z) = x^2 - y^2$

63–64 □ Descreva como o gráfico de g é obtido a partir do gráfico de f.

63. (a) $g(x, y) = f(x, y) + 2$ (b) $g(x, y) = 2f(x, y)$
(c) $g(x, y) = -f(x, y)$ (d) $g(x, y) = 2 - f(x, y)$

64. (a) $g(x, y) = f(x - 2, y)$ (b) $g(x, y) = f(x, y + 2)$
(c) $g(x, y) = f(x + 3, y - 4)$

65–66 □ Faça uso do computador para traçar o gráfico da função, utilizando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Imprima aquela que apresente melhor os "picos e vales". Você acha que essa função tem um valor máximo? Você poderia identificar os pontos do gráfico correspondentes aos "máximos locais"? E os "mínimos locais"?

65. $f(x, y) = 3x - x^4 - 4y^2 - 10xy$

66. $f(x, y) = xye^{-x^2-y^2}$

67–68 □ Utilize o computador para traçar o gráfico da função, usando vários pontos de vista e tamanhos de janela. Comente o comportamento da função no limite. O que acontece quando x e y se tornam muito grandes? O que acontece quando (x, y) se aproxima da origem?

67. $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x^2 + y^2}$

68. $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$

69. Utilize o computador para estudar o comportamento da família de funções $f(x, y) = e^{cx^2+y^2}$. Como a forma da função é afetada por uma mudança do valor de c?

70. Esboce o gráfico das funções

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = e^{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$f(x, y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2} \qquad f(x, y) = \text{sen}\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

e $$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Em geral, se g é uma função de uma variável, como obter o gráfico de $f(x, y) = g\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ a partir do gráfico de g?

71. (a) Mostre que, tomando logaritmos, uma função generalizada de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^{1-\alpha}$ pode ser expressa como

$$\ln\frac{P}{K} = \ln b + \alpha \ln\frac{L}{K}$$

(b) Se tomarmos $x = \ln(L/K)$ e $y = \ln(P/K)$, a equação da parte (a) se tornará uma equação linear $y = \alpha x + \ln b$. Utilize a Tabela 2 (do Exemplo 3) para fazer uma tabela de valores de $\ln(L/K)$ e $\ln(P/K)$ para os anos de 1899-1922. Use então um computador ou calculadora gráfica para achar, pelo método dos mínimos quadrados, a reta de regressão através dos pontos $(\ln(L/K)$ e $\ln(P/K))$.

(c) Deduza que a função de produção de Cobb-Douglas é $P = 1{,}01L^{0{,}75}K^{0{,}25}$.

14.2 Limites e Continuidade

Vamos comparar o comportamento das funções

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

quando x e y se aproximam de 0 [e portanto o ponto (x, y) se aproxima da origem].

Se usarmos a notação vetorial introduzida no final da Seção 14.1, poderemos escrever as definições de limite para as funções de duas ou três variáveis de uma forma compacta, como se segue.

> **5** Se f é definida em um subconjunto D de $\mathbb{R}^n$, então $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L$ significa que para todo número $\varepsilon > 0$ existe um número correspondente $\delta > 0$ tal que
>
> $$|f(\mathbf{x}) - L| < \varepsilon \text{ sempre que } \mathbf{x} \in D \text{ e } 0 < |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta$$

Note que se $n = 1$, então $\mathbf{x} = x$ e $\mathbf{a} = a$, e (5) é exatamente a definição do limite para as funções de uma única variável simples. Para o caso $n = 2$, temos $\mathbf{x} = \langle x, y\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b\rangle$ e $|\mathbf{x} - \mathbf{a}| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$, de modo que (5) se torna a Definição 1. Se $n = 3$, então $\mathbf{x} = \langle x, y, z\rangle$, $\mathbf{a} = \langle a, b, c\rangle$, e (5) é a definição de limite de uma função de três variáveis. Em cada caso a definição de continuidade pode ser escrita como

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

14.2 Exercícios

1. Suponha que $\lim_{(x,y)\to(3,1)} f(x, y) = 6$. O que podemos dizer do valor de $f(3, 1)$? E se a função f for contínua?

2. Explique por que cada função é contínua ou descontínua.
   (a) A temperatura externa como função da latitude, longitude e tempo.
   (b) Elevação (altura acima do nível do mar) como função da longitude, latitude e tempo.
   (c) Custo da tarifa do táxi como função da distância percorrida e tempo gasto.

3–4 □ Utilize a tabela de valores numéricos de $f(x, y)$ para (x, y) perto da origem para conjecturar sobre o limite de $f(x, y)$ quando $(x, y) \to (0, 0)$. Em seguida explique por que sua afirmação está correta.

3. $f(x, y) = \dfrac{x^2y^3 + x^3y^2 - 5}{2 - xy}$
4. $f(x, y) = \dfrac{2xy}{x^2 + 2y^2}$

5–20 □ Determine o limite, se existir, ou mostre que o limite não existe.

5. $\lim_{(x,y)\to(5,-2)} (x^5 + 4x^3y - 5xy^2)$
6. $\lim_{(x,y)\to(6,3)} xy\cos(x - 2y)$
7. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2 + y^2}$
8. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + \operatorname{sen}^2 y}{2x^2 + y^2}$
9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy\cos y}{3x^2 + y^2}$
10. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{6x^3y}{2x^4 + y^4}$
11. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$
12. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$
13. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2y}{x^4 + y^2}$
14. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2\operatorname{sen}^2 y}{x^2 + 2y^2}$
15. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$
16. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^4}{x^2 + y^8}$
17. $\lim_{(x,y,z)\to(3,0,1)} e^{-xy}\operatorname{sen}(\pi z/2)$
18. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$
19. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz^2 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^4}$
20. $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xy + yz + zx}{x^2 + y^2 + z^2}$

21–22 □ Utilize um gráfico feito por computador para explicar por que o limite não existe.

21. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{2x^2 + 3xy + 4y^2}{3x^2 + 5y^2}$
22. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^6}$

23–24 □ Determine $h(x, y) = g(f(x, y))$ e o conjunto no qual h é contínua.

23. $g(t) = t^2 + \sqrt{t}$, $f(x, y) = 2x + 3y - 6$
24. $g(t) = \dfrac{\sqrt{t} - 1}{\sqrt{t} + 1}$, $f(x, y) = x^2 - y$

25–26 □ Trace o gráfico da função e observe onde ela é descontínua. Em seguida utilize fórmulas para explicar o que você observou.

25. $f(x, y) = e^{1/(x-y)}$

26. $f(x, y) = \dfrac{1}{1 - x^2 - y^2}$

27–36 □ Determine o maior conjunto no qual a função é contínua.

27. $F(x, y) = \dfrac{\operatorname{sen}(xy)}{e^x - y^2}$

28. $F(x, y) = \dfrac{x - y}{1 + x^2 + y^2}$

29. $F(x, y) = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{y})$

30. $F(x, y) = e^{x^2 y} + \sqrt{x + y^2}$

31. $G(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 4)$

32. $G(x, y) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 + y^2)$

33. $f(x, y, z) = \dfrac{\sqrt{y}}{x^2 - y^2 + z^2}$

34. $f(x, y, z) = \sqrt{x + y + z}$

35. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

36. $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + xy + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

37–38 □ Utilize as coordenadas polares para determinar o limite. [Se (r, θ) são as coordenadas polares, o ponto (x, y) com $r \geqslant 0$, note que $r \to 0^+$ quando $(x, y) \to (0, 0)$.]

37. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$

38. $\displaystyle\lim_{(x, y) \to (0, 0)} (x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2)$

39. Utilize as coordenadas esféricas para achar

$$\lim_{(x, y, z) \to (0, 0, 0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2}$$

40. No início desta seção consideramos a função

$$f(x, y) = \frac{\operatorname{sen}(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

e adivinhamos que $f(x, y) \to 1$ quando $(x, y) \to (0, 0)$ com base em evidências numéricas. Utilize as coordenadas polares para comprovar o valor do limite. Em seguida, faça o gráfico da função.

41. Mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}|$ é contínua em $\mathbb{R}^n$. [*Dica*: Considere $|\mathbf{x} - \mathbf{a}|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a})$.]

42. Se $\mathbf{c} \in V_n$, mostre que a função f dada por $f(\mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$ é contínua em $\mathbb{R}^n$.

14.3 Derivadas Parciais

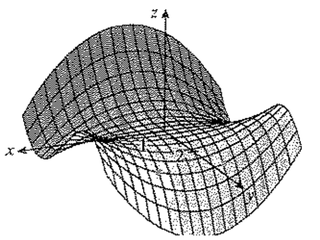
Em um dia quente, a umidade muito alta aumenta a sensação de calor, ao passo que, se o ar está muito seco, temos a sensação de temperatura mais baixa do que a que o termômetro indica. O Serviço Nacional de Meteorologia norte-americano criou um *índice de calor* (também chamado índice de temperatura-umidade, ou Umidex, em alguns países) para descrever os efeitos combinados de temperatura e umidade. O índice de calor I é a temperatura que corresponde à sensação de calor quando a temperatura real é T e a umidade relativa do ar, H. Assim I é uma função de T e de H, e podemos escrever $I = f(T, H)$. A tabela de valores de I a seguir é extraída de uma tabela compilada pelo Serviço Nacional de Meteorologia.

TABELA 1 Índice de calor I como função da temperatura e umidade

Umidade relativa (%)

Temperatura real (°F)	T \ H	50	55	60	65	70	75	80	85	90
	90	96	98	100	103	106	109	112	115	119
	92	100	103	105	108	112	115	119	123	128
	94	104	107	111	114	118	122	127	132	137
	96	109	113	116	121	125	130	135	141	146
	98	114	118	123	127	133	138	144	150	157
	100	119	124	129	135	141	147	154	161	168

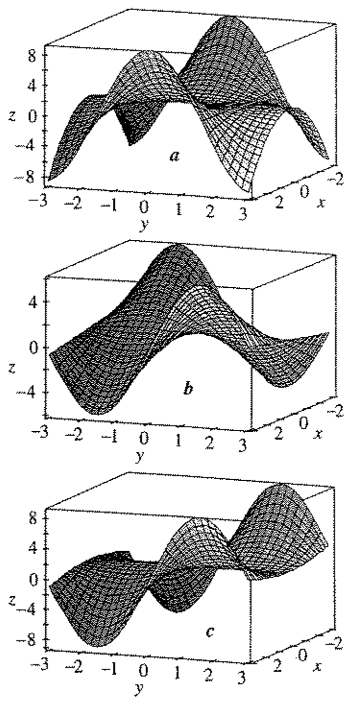
5–6 □ Determine os sinais das derivadas parciais da função f cujo gráfico está mostrado.



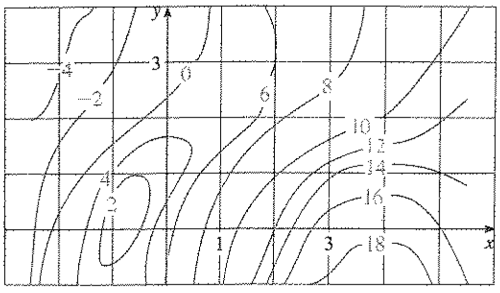
5. (a) $f_x(1, 2)$ (b) $f_y(1, 2)$

6. (a) $f_x(-1, 2)$ (b) $f_y(-1, 2)$
(c) $f_{xx}(-1, 2)$ (d) $f_{yy}(-1, 2)$

7. As seguintes superfícies, rotuladas a, b e c, são gráficos de uma função f e de suas derivadas parciais f_x e f_y. Identifique cada superfície e dê razões para sua escolha.



8. É dado o mapa de contorno de uma função f. Use-o para estimar $f_x(2, 1)$ e $f_y(2, 1)$.



9. Se $f(x, y) = 16 - 4x^2 - y^2$, determine $f_x(1, 2)$ e $f_y(1, 2)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

10. Se $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - 4y^2}$, determine $f_x(1, 0)$ e $f_y(1, 0)$ e interprete esses números como inclinações. Ilustre ou com um esboço à mão ou utilizando o computador.

11–12 □ Determine f_x e f_y e faça o gráfico de f, f_x e f_y com domínios e pontos de vista que permitam ver a relação entre eles.

11. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^2y$ **12.** $f(x, y) = xe^{-x^2-y^2}$

13–34 □ Determine as derivadas parciais de primeira ordem da função.

13. $f(x, y) = 3x - 2y^4$

14. $f(x, y) = x^5 + 3x^3y^2 + 3xy^4$

15. $z = xe^{3y}$ **16.** $z = y \ln x$

17. $f(x, y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ **18.** $f(x, y) = x^y$

19. $w = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$ **20.** $f(s, t) = st^2/(s^2 + t^2)$

21. $f(r, s) = r \ln(r^2 + s^2)$ **22.** $f(x, t) = \operatorname{arctg}(x\sqrt{t})$

23. $u = te^{w/t}$ **24.** $f(x, y) = \int_y^x \cos(t^2)\, dt$

25. $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3yz$ **26.** $f(x, y, z) = x^2e^{yz}$

27. $w = \ln(x + 2y + 3z)$ **28.** $w = \sqrt{r^2 + s^2 + t^2}$

29. $u = xe^{-t} \operatorname{sen} \theta$ **30.** $u = x^{y/z}$

31. $f(x, y, z, t) = xyz^2 \operatorname{tg}(yt)$ **32.** $f(x, y, z, t) = \dfrac{xy^2}{t + 2z}$

33. $u = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$

34. $u = \operatorname{sen}(x_1 + 2x_2 + \cdots + nx_n)$

35–38 □ Determine as derivadas parciais indicadas.

35. $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; $f_x(3, 4)$

36. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$; $f_y(-6, 4)$

37. $f(x, y, z) = x/(y + z)$; $f_z(3, 2, 1)$

38. $f(u, v, w) = w \operatorname{tg}(uv)$; $f_v(2, 0, 3)$

39–40 □ Use a definição de derivadas parciais como limites (4) para achar $f_x(x, y)$ e $f_y(x, y)$.

39. $f(x, y) = x^2 - xy + 2y^2$ **40.** $f(x, y) = \sqrt{3x - y}$

41–44 □ Use a diferenciação implícita para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

41. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$ **42.** $yz = \ln(x + z)$

43. $x - z = \operatorname{arctg}(yz)$ **44.** $\operatorname{sen}(xyz) = x + 2y + 3z$

45–46 □ Determine $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

45. (a) $z = f(x) + g(y)$ (b) $z = f(x + y)$

46. (a) $z = f(x)g(y)$ (b) $z = f(xy)$
(c) $z = f(x/y)$

47–52 ▫ Determine as derivadas parciais de segunda ordem.

47. $f(x, y) = x^4 - 3x^2y^3$

48. $f(x, y) = \ln(3x + 5y)$

49. $z = x/(x + y)$

50. $z = y \operatorname{tg} 2x$

51. $u = e^{-s} \operatorname{sen} t$

52. $v = \sqrt{x + y^2}$

53–56 ▫ Verifique se as conclusões do Teorema de Clairaut são verdadeiras, isto é, se $u_{xy} = u_{yx}$.

53. $u = x \operatorname{sen}(x + 2y)$

54 $u = x^4y^2 - 2xy^5$

55. $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$

56 $u = xye^y$

57–64 ▫ Determine as derivadas parciais indicadas.

57. $f(x, y) = 3xy^4 + x^3y^2$; f_{xxy}, f_{yyy}

58. $f(x, t) = x^2e^{-ct}$; f_{ttt}, f_{txx}

59. $f(x, y, z) = \cos(4x + 3y + 2z)$; f_{xyz}, f_{yzz}

60. $f(r, s, t) = r \ln(rs^2t^3)$; f_{rss}, f_{rst}

61. $u = e^{r\theta} \operatorname{sen}\theta$; $\dfrac{\partial^3 u}{\partial r^2 \partial\theta}$

62. $z = u\sqrt{v - w}$; $\dfrac{\partial^3 z}{\partial u\, \partial v\, \partial w}$

63. $w = \dfrac{x}{y + 2z}$; $\dfrac{\partial^3 w}{\partial z\, \partial y\, \partial x}$, $\dfrac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}$

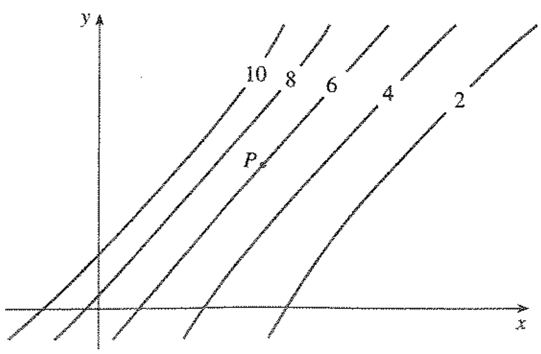
64. $u = x^a y^b z^c$; $\dfrac{\partial^6 u}{\partial x\, \partial y^2\, \partial z^3}$

65. Use a tabela de valores de $f(x, y)$ para estimar os valores de $f_x(3, 2)$, $f_x(3, 2.2)$ e $f_{xy}(3, 2)$.

x \ y	1,8	2,0	2,2
2,5	12,5	10,2	9,3
3,0	18,1	17,5	15,9
3,5	20,0	22,4	26,1

66. São mostradas as curvas de nível de uma função f. Determine se as seguintes derivadas parciais são positivas ou negativas no ponto P.

(a) f_x (b) f_y (c) f_{xx}
(d) f_{xy} (e) f_{yy}



67. Verifique se a função $u = e^{-\alpha^2 k^2 t} \operatorname{sen} kx$ é solução da *equação de condução do calor* $u_t = \alpha^2 u_{xx}$.

68. Determine se cada uma das seguintes funções é solução da equação de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$.
(a) $u = x^2 + y^2$
(b) $u = x^2 - y^2$
(c) $u = x^3 + 3xy^2$
(d) $u = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$
(e) $u = \operatorname{sen} x \cosh y + \cos x \operatorname{senh} y$
(f) $u = e^{-x} \cos y - e^{-y} \cos x$

69. Verifique se a função $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ é a solução da equação de Laplace tridimensional $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$.

70. Mostre que cada uma das seguintes funções é a solução da equação da onda $u_{tt} = a^2 u_{xx}$.
(a) $u = \operatorname{sen}(kx)\operatorname{sen}(akt)$
(b) $u = t/(a^2t^2 - x^2)$
(c) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
(d) $u = \operatorname{sen}(x - at) + \ln(x + at)$

71. Se f e g são funções duas vezes diferenciáveis de uma única variável, mostre que a função

$$u(x, t) = f(x + at) + g(x - at)$$

é solução da equação de onda dada no Exercício 70.

72. Se $u = e^{a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n}$, onde $a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = 1$, mostre que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = u$$

73. Mostre que a função $z = xe^y + ye^x$ é uma solução da equação

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x\frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} + y\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$$

74. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas $P = bL^\alpha K^\beta$ satisfaz a equação

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha + \beta)P$$

75. Mostre que a função produção de Cobb-Douglas satisfaz $P(L, K_0) = C_1(K_0)L^\alpha$ resolvendo a equação diferencial

$$\frac{dP}{dL} = \alpha\frac{P}{L}$$

(Veja a Equação 5.)

76. A temperatura em um ponto (x, y) de uma placa plana de metal é dada por $T(x, y) = 60/(1 + x^2 + y^2)$, onde T é medido em °C e x, y em metros. Determine a taxa de variação da temperatura com relação à distância no ponto (2, 1) em (a) a direção do eixo x e (b) a direção do eixo y.

77. A resistência total R produzida por três condutores com resistência R_1, R_2 e R_3 conectados em paralelo em um circuito elétrico é dada pela fórmula

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

Determine $\partial R/\partial R_1$.

14.4 Exercícios

1–6 □ Determine uma equação do plano tangente à superfície no ponto especificado.

1. $z = 4x^2 - y^2 + 2y$, $(-1, 2, 4)$
2. $z = 9x^2 + y^2 + 6x - 3y + 5$, $(1, 2, 18)$
3. $z = \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$, $(1, -1, 1)$
4. $z = y \ln x$, $(1, 4, 0)$
5. $z = y \cos(x - y)$, $(2, 2, 2)$
6. $z = e^{x^2-y^2}$, $(1, -1, 1)$

7–8 □ Desenhe a superfície e o plano tangente no ponto dado. (Escolha o tamanho da janela de inspeção e o ponto de vista de modo a ver tanto a superfície quanto o plano tangente.) Em seguida amplie até que a superfície e o plano tangente perto do ponto se tornem indistinguíveis.

7. $z = x^2 + xy + 3y^2$, $(1, 1, 5)$
8. $z = \operatorname{arctg}(xy^2)$, $(1, 1, \pi/4)$

9–10 □ Desenhe o gráfico de f e de seu plano tangente no ponto dado. (Utilize um sistema algébrico computacional tanto para computar as derivadas parciais quanto para traçar os gráficos da função e de seu plano tangente.) Em seguida faça uma ampliação até que a superfície e o plano tangente se tornem indistinguíveis.

9. $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)/15}(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 y)$, $(2, 3, f(2, 3))$
10. $f(x, y) = \dfrac{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}{1 + x^4 + y^4}$, $(1, 1, 1)$

11–16 □ Explique por que a função é diferenciável no ponto dado. Faça então a linearização $L(x, y)$ da função no ponto.

11. $f(x, y) = x\sqrt{y}$, $(1, 4)$
12. $f(x, y) = x/y$, $(6, 3)$
13. $f(x, y) = e^x \cos xy$, $(0, 0)$
14. $f(x, y) = \sqrt{x + e^{4y}}$, $(3, 0)$
15. $f(x, y) = \operatorname{tg}^{-1}(x + 2y)$, $(1, 0)$
16. $f(x, y) = \operatorname{sen}(2x + 3y)$, $(-3, 2)$

17. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2, 1)$ e use-a para aproximar $f(1{,}95, 1{,}08)$.

18. Determine a aproximação linear da função $f(x, y) = \ln(x - 3y)$ em $(7, 2)$ e use-a para aproximar $f(6{,}9, 2{,}06)$. Ilustre traçando o gráfico da função e do plano tangente.

19. Determine a aproximação linear da função $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ em $(3, 2, 6)$ e use-a para aproximar $\sqrt{(3{,}02)^2 + (1{,}97)^2 + (5{,}99)^2}$.

20. A altura h de ondas em mar aberto depende da rapidez do vento v e do tempo t durante o qual o vento se manteve naquela intensidade. Os valores da função $h = f(v, t)$ são apresentados na seguinte tabela.

Duração (horas)

Velocidade do vento (nós) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

Use a tabela para determinar uma aproximação linear da função altura da onda quando v está próximo de 40 nós e t está próximo de 20 horas. Em seguida, estime a altura das ondas quando está ventando por 24 horas a 43 nós.

21. Utilize a tabela do Exemplo 3 e determine a aproximação linear do índice de calor quando a temperatura se aproxima de 94 °F e a umidade relativa do ar é de aproximadamente 80%. Estime também o índice quando a temperatura é de 95 °F e a umidade relativa, 78%.

22. O índice sensação térmica W é a temperatura que se sente quando a temperatura real for T e a rapidez do vento, v; portanto podemos escrever $W = f(T, v)$. A tabela de valores a seguir foi extraída da Tabela 1 da Seção 14.1.

Velocidade do vento (km/h)

Temperatura real (°C) T \ v	20	30	40	50	60	70
−10	−18	−20	−21	−22	−23	−23
−15	−24	−26	−27	−29	−30	−30
−20	−30	−33	−34	−35	−36	−37
−25	−37	−39	−41	−42	−43	−44

Use essa tabela para determinar a aproximação linear da função sensação térmica quando T estiver a -15°C e v estiver próximo de 50 km/h. Estime também quando a temperatura estiver a -17°C e a rapidez do vento for de 55 km/h.

14.5 Exercícios

1–6 □ Use a Regra da Cadeia para determinar dz/dt ou dw/dt.

1. $z = x^2y + xy^2, \quad x = 2 + t^4, \quad y = 1 - t^3$
2. $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = e^{2t}, \quad y = e^{-2t}$
3. $z = \operatorname{sen} x \cos y, \quad x = \pi t, \quad y = \sqrt{t}$
4. $z = x \ln(x + 2y), \quad x = \operatorname{sen} t, \quad y = \cos t$
5. $w = xe^{y/z}, \quad x = t^2, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + 2t$
6. $w = xy + yz^2, \quad x = e^t, \quad y = e^t \operatorname{sen} t, \quad z = e^t \cos t$

7–12 □ Utilize a Regra da Cadeia para determinar $\partial z/\partial s$ e $\partial z/\partial t$.

7. $z = x^2 + xy + y^2, \quad x = s + t, \quad y = st$
8. $z = x/y, \quad x = se^t, \quad y = 1 + se^{-t}$
9. $z = \operatorname{arctg}(2x + y), \quad x = s^2t, \quad y = s \ln t$
10. $z = e^{xy} \operatorname{tg} y, \quad x = s + 2t, \quad y = s/t$
11. $z = e^r \cos \theta, \quad r = st, \quad \theta = \sqrt{s^2 + t^2}$
12. $z = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{tg} \beta, \quad \alpha = 3s + t, \quad \beta = s - t$

13. Se $z = f(x, y)$, onde f é diferenciável $x = g(t)$, $y = h(t)$, $g(3) = 2$, $g'(3) = 5$, $h(3) = 7$, $h'(3) = -4$, $f_x(2, 7) = 6$, e $f_y(2, 7) = -8$, determine dz/dt quando $t = 3$.

14. Seja $W(s, t) = F(u(s, t), v(s, t))$, onde F, u, e v são diferenciáveis, $u(1, 0) = 2$, $u_s(1, 0) = -2$, $u_t(1, 0) = 6$, $v(1, 0) = 3$, $v_s(1, 0) = 5$, $v_t(1, 0) = 4$, $F_u(2, 3) = -1$ e $F_v(2, 3) = 10$. Determine $W_s(1, 0)$ e $W_t(1, 0)$.

15. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(u, v) = f(e^u + \operatorname{sen} v, e^u + \cos v)$. Use a tabela de valores para calcular $g_u(0, 0)$ e $g_v(0, 0)$.

	f	g	f_x	f_y
(0, 0)	3	6	4	8
(1, 2)	6	3	2	5

16. Suponha que f seja uma função diferenciável de x e y, e $g(r, s) = f(2r - s, s^2 - 4r)$. Use a tabela de valores do Exercício 15 para calcular $g_r(1, 2)$ e $g_s(1, 2)$.

17–20 □ Utilize o grafo da árvore para escrever a Regra da Cadeia para o caso dado. Assuma que todas as funções sejam diferenciáveis.

17. $u = f(x, y)$, onde $x = x(r, s, t)$, $y = y(r, s, t)$
18. $w = f(x, y, z)$, onde $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$, $z = z(t, u)$
19. $v = f(p, q, r)$, onde $p = p(x, y, z)$, $q = q(x, y, z)$, $r = r(x, y, z)$
20. $u = f(s, t)$, onde $s = s(w, x, y, z)$, $t = t(w, x, y, z)$

21–26 □ Utilize a Regra da Cadeia para determinar as derivadas parciais indicadas.

21. $z = x^2 + xy^3, \quad x = uv^2 + w^3, \quad y = u + ve^w$;
$\dfrac{\partial z}{\partial u}, \dfrac{\partial z}{\partial v}, \dfrac{\partial z}{\partial w}$ quando $u = 2$, $v = 1$, $w = 0$
22. $u = \sqrt{r^2 + s^2}, \quad r = y + x\cos t, \quad s = x + y \operatorname{sen} t$;
$\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial t}$ quando $x = 1$, $y = 2$, $t = 0$
23. $R = \ln(u^2 + v^2 + w^2), \quad u = x + 2y, \quad v = 2x - y, \quad w = 2xy$;
$\dfrac{\partial R}{\partial x}, \dfrac{\partial R}{\partial y}$ quando $x = y = 1$
24. $M = xe^{y - z^2}, \quad x = 2uv, \quad y = u - v, \quad z = u + v$;
$\dfrac{\partial M}{\partial u}, \dfrac{\partial M}{\partial v}$ quando $u = 3$, $v = -1$
25. $u = x^2 + yz, \quad x = pr\cos\theta, \quad y = pr\operatorname{sen}\theta, \quad z = p + r$;
$\dfrac{\partial u}{\partial p}, \dfrac{\partial u}{\partial r}, \dfrac{\partial u}{\partial \theta}$ quando $p = 2$, $r = 3$, $\theta = 0$
26. $Y = w \operatorname{tg}^{-1}(uv), \quad u = r + s, \quad v = s + t, \quad w = t + r$;
$\dfrac{\partial Y}{\partial r}, \dfrac{\partial Y}{\partial s}, \dfrac{\partial Y}{\partial t}$ quando $r = 1$, $s = 0$, $t = 1$

27–30 □ Utilize a Equação 6 para determinar dy/dx.

27. $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$
28. $y^5 + x^2y^3 = 1 + ye^{x^2}$
29. $\cos(x - y) = xe^y$
30. $\operatorname{sen} x + \cos y = \operatorname{sen} x \cos y$

31–34 □ Utilize as Equações 7 para determinar $\partial z/\partial x$ e $\partial z/\partial y$.

31. $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$
32. $xyz = \cos(x + y + z)$
33. $x - z = \operatorname{arctg}(yz)$
34. $yz = \ln(x + z)$

35. A temperatura em um ponto (x, y) é $T(x, y)$, medida em graus Celsius. Um inseto rasteja de modo que sua posição depois de t segundos seja dada por $x = \sqrt{1 + t}$, $y = 2 + \frac{1}{3}t$, onde x e y são medidas em centímetros. A função temperatura satisfaz $T_x(2, 3) = 4$ e $T_y(2, 3) = 3$. Quão rápido a temperatura aumenta no caminho do inseto depois de três segundos?

36. A produção de trigo em um determinado ano W depende da temperatura média T e da quantidade anual de chuva R. Cientistas estimam que a temperatura média anual está crescendo à taxa de 0,15 °C/ano, e a quantidade anual de chuva está decrescendo à taxa de 0,1 cm/ano. Eles também estimam que, no corrente nível de produção, $\partial W/\partial T = -2$ e $\partial W/\partial R = 8$.
(a) Qual é o significado do sinal dessas derivadas parciais?
(b) Estime a taxa de variação corrente da produção de trigo dW/dt.

37. A rapidez da propagação do som através do oceano com salinidade de 35 partes por milhar foi modelada pela equação

$$C = 1449{,}2 + 4{,}6T - 0{,}055T^2 + 0{,}00029T^3 + 0{,}016D$$

onde C é a rapidez do som (em metros por segundo), T é a temperatura (em graus Celsius) e D é a profundidade abaixo