Cálculo Diferencial e Integral I - Turma C

07 de Junho de 2015

Questão 1 .... $\boxed{60}$

Calcule

(a) (10 points) O limite $\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$.

Solution:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\
&= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}+2} \\
&= \frac{2}{\sqrt{4}+2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(b) (10 points) A derivada de $3x^2\sin(x)$.

Solution: Regra do produto

$$[3x^2\sin x]' = [3x^2]'\sin x + 3x^2[\sin x]' = 6x\sin x + 3x^2\cos x$$

(c) (10 points) A derivada de $\frac{x^2-3}{3x^2+1}$.

Solution: Regra do quociente

$$\begin{aligned}
\left[\frac{x^2-3}{3x^2+1}\right]' &= \frac{[x^2-3]'(3x^2+1)-(x^2-3)[3x^2+1]'}{(3x^2+1)^2} \\
&= \frac{2x(3x^2+1)-6x(x^2-3)}{(3x^2+1)^2} \\
&= \frac{6x^3+2x-6x^3+18x}{(3x^2+1)^2} \\
&= \frac{20x}{(3x^2+1)^2}
\end{aligned}$$

(d) (10 points) A derivada de $\sqrt{3x^2-2x+4}$.

Solution: Regra da cadeia. $f(g(x)) = \sqrt{3x^2-2x+4}$ com $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) =$

$3x^2 - 2x + 4$. Temos $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $g'(x) = 6x - 2$.

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 - 2x + 4}}(6x - 2).$$

(e) (10 points) A integral $\displaystyle\int_1^e \ln x \mathrm{d}x$.

Solution: Por partes, com $u = \ln x$ e $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$.

$$\int_1^e \ln x \mathrm{d}x = x \ln x \Big|_1^e - \int_1^e \mathrm{d}x = (x \ln x - x)\Big|_1^e = (e \ln e - e) - (1 \ln 1 - 1) = (e - e) + 1 = 1.$$

(f) (10 points) A integral $\displaystyle\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$.

Solution: Substituição $u = 1 + x^2$. $\mathrm{d}u = 2x\mathrm{d}x$.

$$\int \frac{2x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{u^2}\mathrm{d}u = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{1+x^2} + C.$$

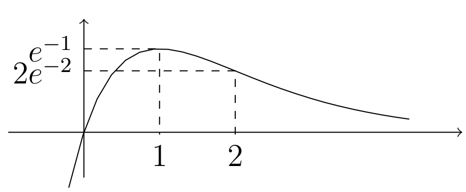
Questão 2 .... $\boxed{20}$

Faça o gráfico de $f(x) = xe^{-x}$, mostrando os pontos importantes.

Solution: $f(x) = 0 \Rightarrow x = 0$, pois $e^{-x} \neq 0$.

$$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = e^{-x}(1 - x)$$
$$f''(x) = -e^{-x}(1 - x) - e^{-x} = e^{-x}(x - 2).$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$. $f''(x) = 0 \Rightarrow x = 2$. No ponto $x = 1$, $f''(x) = -e^{-2} < 0$, então $x = 1$ é mínimo.



Questão 3 .... $\boxed{20}$

Considere a função f

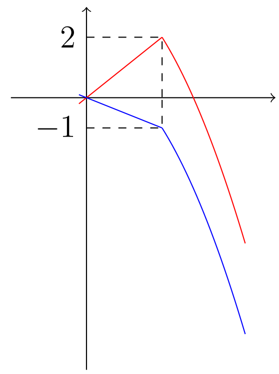
$$f(x) = \begin{cases} ax, & x < 1 \\ a^2 - 2x^2, & x \geq 1 \end{cases}$$

(a) (10 points) Indique todos os valores de a para que f seja contínua.

Solution: $\lim_{x\to 1^-} f(x) = a$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = -2 + a^2$. Para que f seja contínua, $a = -2 + a^2 \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$. Então $a = 2$ ou $a = -1$.

(b) (10 points) Faça um desenho de cada f para cada a encontrado.

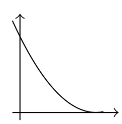
Solution:



Questão 4 .... $\boxed{10}$

Considere a região limitada pela função $f(x) = x^2 - 2x + 1$ no primeiro quadrante. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação dessa região em torno do eixo y.

Solution: f é uma função quadrática com apenas uma raiz em $x = 1$ e que cruza o eixo y no ponto $y = 1$. A região é



Vamos fazer por cascas cilíndricas.

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^1 2\pi x f(x)\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 x(x^2 - 2x + 1)\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x)\mathrm{d}x \\
&= 2\pi\left(\frac{1}{4} - 2\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 2\pi\frac{3 - 8 + 6}{12} = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

Derivadas

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$

Integrais

- $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln |x| + C$

Regras de derivação

- Regra do produto
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
- Regra do quociente
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
- Regra da cadeia
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(g(x))] = f'(g(x))g'(x)$$

Regras e técnicas de integração

- Regra da substituição
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u$$
- Integral por partes
$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{ou} \qquad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$