A.10 Dê os elementos dos seguintes conjuntos:

$A = \{x \mid x$ é letra da palavra "matemática"$\}$
$B = \{x \mid x$ é cor da bandeira brasileira$\}$
$C = \{x \mid x$ é nome de estado que começa com "a"$\}$

Solução

$A = \{m, a, t, e, i, c\}$
$B = \{$branco, azul, amarelo, verde$\}$
$C = \{$amazonas, amapá, acre, alagoas$\}$

A.11 Descreva através de uma propriedade característica dos elementos cada um dos conjuntos seguintes:

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, ...\}$
$B = \{0, 1, 2, ..., 9\}$
$C = \{$brasília, rio de janeiro, salvador$\}$

Solução

$A = \{x \mid x$ é inteiro, par e não negativo$\}$
$B = \{x \mid x$ é algarismo arábico$\}$
$C = \{x \mid x$ é nome de cidade que já foi capital do Brasil$\}$

A.12 Escreva com símbolos:

a) conjunto dos múltiplos inteiros de 3, entre -10 e $+10$
b) conjunto dos divisores inteiros de 42
c) conjunto dos múltiplos inteiros de 0
d) conjunto das frações com numerador e denominador compreendidos entre 0 e 3
e) conjunto dos nomes das capitais da região centro-oeste do Brasil

A.13 Descreva por meio de uma propriedade dos elementos

$A = \{+1, -1, +2, -2, +3, -3, +6, -6\}$ $\quad$ $B = \{0, -10, -20, -30, -40, ...\}$
$C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, ...\}$ $\quad$ $D = \{$Lua$\}$

A.14 Quais dos conjuntos abaixo são unitários?

$A = \{x \mid x < \frac{9}{4}$ e $x > \frac{6}{5}\}$ $\quad$ $B = \{x \mid 0 \cdot x = 2\}$
$C = \{x \mid x$ é inteiro e $x^2 = 3\}$ $\quad$ $D = \{x \mid 2x + 1 = 7\}$

A.15 Quais dos conjuntos abaixo são vazios?

$A = \{x \mid 0 \cdot x = 0\}$
$B = \{x \mid x > \frac{9}{4}$ e $x < \frac{6}{5}\}$
$C = \{x \mid x$ é divisor de zero$\}$
$D = \{x \mid x$ é divisível por zero$\}$

V. CONJUNTOS IGUAIS

40. Definição

Dois conjuntos A e B são iguais quando todo elemento de A pertence a B e, reciprocamente, todo elemento de B pertence a A. Em símbolos:

$$\boxed{A = B \iff (\forall x)(x \in A \iff x \in B)}$$

Exemplos

1) $\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\}$

2) $\{1, 3, 5, 7, 9, ...\} = \{x \mid x$ é inteiro, positivo e ímpar$\}$

3) $\{x \mid 2x + 1 = 5\} = \{2\}$

Observemos que na definição de igualdade entre conjuntos não intervém a noção de ordem entre os elementos, portanto:

$$\{a, b, c, d\} = \{d, c, b, a\} = \{b, a, c, d\}$$

Observemos ainda que a repetição de um elemento na descrição de um conjunto é algo absolutamente inútil pois, por exemplo:

$$\{a, b, c, d\} = \{a, a, b, b, b, c, d, d, d, d\}$$

(para conferir basta usar a definição). Assim, preferimos sempre a notação mais simples.

41. Se A não é igual a B, escrevemos $A \neq B$. É evidente que A é diferente de B se existe um elemento de A não pertencente a B ou existe em B um elemento não pertencente a A.

Exemplo

$\{a, b, d\} \neq \{a, b, c, d\}$

EXERCÍCIOS

A.16 Dados $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{2, 4\}$, pede-se:

a) escrever com os símbolos da teoria dos conjuntos as seguintes sentenças:

1ª)	3 é elemento de A	2ª)	1 não está em B
3ª)	B é parte de A	4ª)	B é igual a A
5ª)	4 pertence a B		

b) classificar as sentenças anteriores em falsa ou verdadeira.

Solução

1ª) $3 \in A$ (V)
2ª) $1 \notin B$ (V)
3ª) $B \subset A$ (V)
4ª) $B = A$ (F)
5ª) $4 \in B$ (V)

A.17 Sendo $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3\}$, $C = \{1, 3, 4\}$ e $D = \{1, 2, 3, 4\}$, classificar em V ou F cada sentença abaixo e justificar:

a) $A \subset D$ b) $A \subset B$ c) $B \subset C$
d) $D \supset B$ e) $C = D$ f) $A \not\subset C$

Solução

a) V pois $1 \in A$, $1 \in D$, $2 \in A$ e $2 \in D$
b) F pois $1 \in A$ e $1 \notin B$
c) F pois $2 \in B$ e $2 \notin C$
d) V pois $2 \in B$, $2 \in D$, $3 \in B$ e $3 \in D$
e) F pois $2 \in D$ e $2 \notin C$
f) V pois $2 \in A$ e $2 \notin C$

A.18 Quais das igualdades abaixo são verdadeiras?

a) $\{a, a, a, b, b\} = \{a, b\}$
b) $\{x \mid x^2 = 4\} = \{x \mid x \neq 0 \text{ e } x^3 - 4x = 0\}$
c) $\{x \mid 2x + 7 = 11\} = \{2\}$
d) $\{x \mid x < 0 \text{ e } x \geqslant 0\} = \varnothing$

A.19 Dizer se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das sentenças abaixo.

a) $0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ f) $a \in \{a, \{a\}\}$
b) $\{a\} \in \{a, b\}$ g) $\{a\} \subset \{a, \{a\}\}$
c) $\varnothing \in \{0\}$ h) $\varnothing \subset \{\varnothing, \{a\}\}$
d) $0 \in \varnothing$ i) $\varnothing \in \{\varnothing, \{a\}\}$
e) $\{a\} \subset \varnothing$ j) $\{a, b\} \in \{a, b, c, d\}$

A.20 Fazer um diagrama de Venn que simbolize a situação seguinte: A, B, C, D são conjuntos não vazios, $D \subset C \subset B \subset A$.

A.21 Construir o conjunto das partes do conjunto $A = \{a, b, c, d\}$.

VII. REUNIÃO DE CONJUNTOS

47. Definição

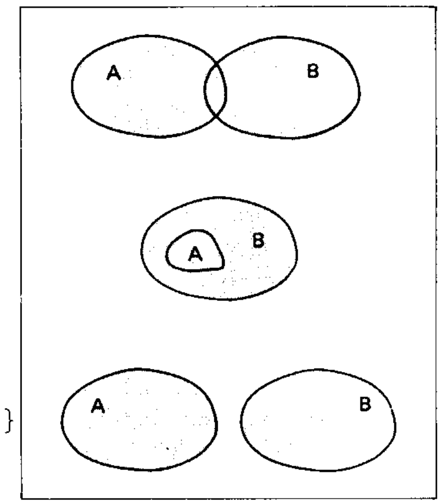
Dados dois conjuntos A e B, chama-se *reunião* de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A ou a B.

$$\boxed{A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}}$$

O conjunto $A \cup B$ (lê-se "A reunião B" ou "A u B") é formado pelos elementos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos A e B.

Notemos que x é elemento de $A \cup B$ se ocorrer ao menos uma das condições seguintes:

$$x \in A \text{ ou } x \in B.$$



Exemplos

1) $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
2) $\{a, b\} \cup \{a, b, c, d\} = \{a, b, c, d\}$
3) $\{a, b, c\} \cup \{c, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$
4) $\{a, b, c\} \cup \varnothing = \{a, b, c\}$
5) $\varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

48. Propriedades da reunião

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) $A \cup A = A$ (idempotente)
2ª) $A \cup \varnothing = A$ (elemento neutro)
3ª) $A \cup B = B \cup A$ (comutativa)
4ª) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativa)

Demonstração

Fazendo $A = \{x \mid x \text{ tem a propriedade } p\}$ ou, simplesmente $A = \{x \mid p(x)\}$ e, ainda: $B = \{x \mid q(x)\}$, $C = \{x \mid r(x)\}$ e $\varnothing = \{x \mid f(x)\}$ onde f é proposição logicamente falsa, temos:

$$A \cup A = \{x \mid p(x) \text{ ou } p(x)\} = \{x \mid p(x)\} = A$$

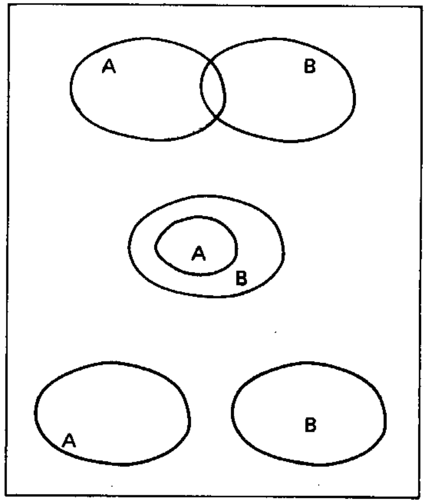
Analogamente, as demais decorrem das propriedades das proposições vistas no exercício A.6.

VIII. INTERSECÇÃO DE CONJUNTOS

49. Definição

Dados dois conjuntos A e B, chama-se *intersecção* de A e B o conjunto formado pelos elementos que pertencem a A e a B.

$$\boxed{A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}}$$



O conjunto $A \cap B$ (lê-se "A inter B") é formado pelos elementos que pertencem aos dois conjuntos (A e B) *simultaneamente.*

Se $x \in A \cap B$, isto significa que *x* pertence a A e *também* *x* pertence a B. O *conectivo e* colocado entre duas condições significa que elas devem ser obedecidas *ao mesmo tempo.*

Exemplos

1) $\{a, b, c\} \cap \{b, c, d, e\} = \{b, c\}$
2) $\{a, b\} \cap \{a, b, c, d\} = \{a, b\}$
3) $\{a, b, c\} \cap \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
4) $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
5) $\{a, b\} \cap \emptyset = \emptyset$

50. Propriedades da intersecção

Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades:

1ª) $A \cap A = A$ (idempotente)
2ª) $A \cap \mathbf{U} = A$ (elemento neutro)
3ª) $A \cap B = B \cap A$ (comutativa)
4ª) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativa)

Como mostramos para a operação de reunião, estas propriedades são também demonstráveis com auxílio do exercício A.6.

51. Conjuntos disjuntos

Quando $A \cap B = \emptyset$, isto é, quando os conjuntos A e B não têm elemento comum, A e B são denominados *conjuntos disjuntos.*

IX. PROPRIEDADES

52. Sendo A, B e C conjuntos quaisquer, valem as seguintes propriedades, que inter-relacionam a reunião e a intersecção de conjuntos:

1ª) $A \cup (A \cap B) = A$
2ª) $A \cap (A \cup B) = A$
3ª) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
(distributiva da reunião em relação à intersecção)
4ª) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
(distributiva da intersecção em relação à reunião).

Demonstremos, por exemplo, a 1ª e a 3ª:

$$A \cup (A \cap B) = \{x \mid p(x) \vee (p(x) \wedge q(x))\} = \{x \mid (p(x))\} = A$$

$$A \cup (B \cap C) = \{x \mid p(x) \vee (q(x) \wedge r(x))\} = \{x \mid (p(x) \vee q(x)) \wedge (p(x) \vee r(x))\} = \\ = \{x \mid p(x) \vee q(x)\} \cap \{x \mid p(x) \vee r(x)\} = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

EXERCÍCIOS

A.22 Dados os conjuntos $A = \{a, b, c\}$, $B = \{c, d\}$ e $C = \{c, e\}$, determinar $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$ e $A \cup B \cup C$.

A.23 Provar que $A \subset (A \cup B)$, $\forall A$.

Solução

$x \in A \Longrightarrow x \in A$ ou $x \in B$

é uma implicação verdadeira, $\forall x$, portanto: $A \subset (A \cup B)$

A.24 Classificar em V ou F:

a) $\emptyset \subset (A \cup B)$
b) $(A \cup B) \subset A$
c) $A \in (A \cup B)$
d) $(A \cup B) \subset (A \cup B)$
e) $B \subset (A \cup B)$
f) $(A \cup B) \subset (A \cup B \cup C)$

admitindo que A, B e C são conjuntos quaisquer.

A.25 Determinar a reunião dos círculos de raio r, contidos num plano α e que têm um ponto comum $0 \in \alpha$.

A.26 Determinar a reunião das retas de um plano α que são paralelas a uma dada reta r de α.

A.27 Dados os conjuntos $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{b, c, d, e\}$ e $C = \{c, e, f\}$, pede-se descrever $A \cap B$, $A \cap C$, $B \cap C$ e $A \cap B \cap C$.

A.28 Provar que $(A \cap B) \subset A, \forall A$.

Solução

$x \in (A \cap B) \Longrightarrow (x \in A \text{ e } x \in B) \Longrightarrow x \in A$

é uma implicação verdadeira, $\forall x$, portanto $(A \cap B) \subset A$.

A.29 Classificar em V ou F

a) $\emptyset \subset (A \cap B)$ b) $A \subset (A \cap B)$

c) $A \in (A \cap B)$ d) $(A \cap B) \subset (A \cap B)$

e) $(A \cap B) \subset B$ f) $(A \cap B) \supset (A \cap B \cap C)$

admitindo que A, B e C são conjuntos quaisquer.

A.30 Consideremos os conjuntos:

K = conjunto dos quadriláteros planos

$P = \{x \in K \mid x$ tem lados 2 a 2 paralelos$\}$
$L = \{x \in K \mid x$ tem 4 lados congruentes$\}$
$R = \{x \in K \mid x$ tem 4 ângulos retos$\}$
$Q = \{x \in K \mid x$ tem 2 lados paralelos e 2 ângulos retos$\}$

Pede-se determinar os conjuntos:

a) $L \cap P$ c) $L \cap R$ e) $L \cap Q$
b) $R \cap P$ d) $Q \cap R$ f) $P \cup Q$

A.31 Dados os conjuntos $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{3, 4\}$ e $C = \{1, 2, 4\}$, determinar o conjunto X tal que $X \cup B = A \cup C$ e $X \cap B = \emptyset$.

Solução

a) $X \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ então os possíveis elementos de X são: 1, 2, 3 e 4.

b) $X \cap B = \emptyset \Rightarrow 3 \notin X$ e $4 \notin X$

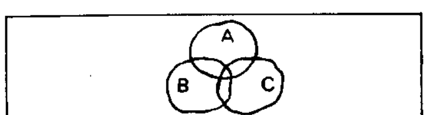
Conclusão $X = \{1, 2\}$

A.32 Determinar o conjunto X tal que

$\{a, b, c, d\} \cup X = \{a, b, c, d, e\}$, $\{c, d\} \cup X = \{a, c, d, e\}$ e $\{b, c, d\} \cap X = \{c\}$.

A.33 Assinalar no diagrama ao lado, um de cada vez, os seguintes conjuntos:

a) $A \cap B \cap C$ c) $A \cup (B \cap C)$
b) $A \cap (B \cup C)$ d) $A \cup B \cup C$

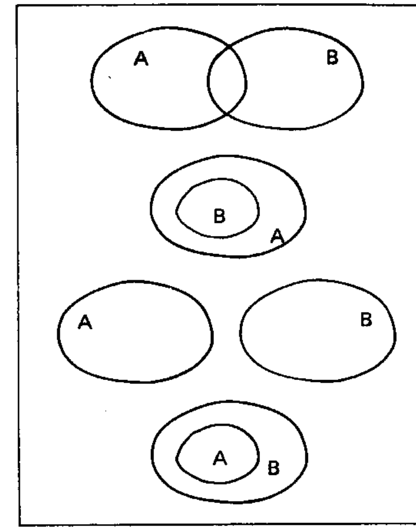


X. DIFERENÇA DE CONJUNTOS

53. Definição

Dados dois conjuntos A e B, chama-se *diferença* entre A e B o conjunto formado pelos elementos de A que não pertencem a B.

$$\boxed{A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}}$$



Exemplos

1) $\{a, b, c\} - \{b, c, d, e\} = \{a\}$

2) $\{a, b, c\} - \{b, c\} = \{a\}$

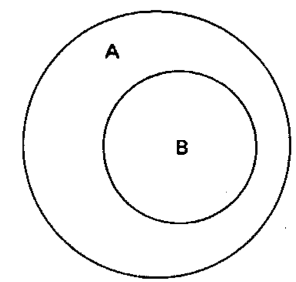
3) $\{a, b\} - \{c, d, e, f\} = \{a, b\}$

4) $\{a, b\} - \{a, b, c, d, e\} = \emptyset$

XI. COMPLEMENTAR DE B EM A

54. Definição

Dados dois conjuntos A e B, tais que $B \subset A$, chama-se *complementar de B em relação a A* o conjunto $A - B$, isto é, o conjunto dos elementos de A que não pertencem a B.



Com o símbolo

$$\complement_A^B \text{ ou } \bar{A}$$

indicamos o complementar de B em relação a A.

Notemos que $\complement_A^B$ só é definido para $B \subset A$ e aí temos:

$$\boxed{\complement_A^B = A - B}$$

64. Quando a é divisor de b dizemos que "b é divisível por a" ou "b é múltiplo de a".

Para um inteiro a qualquer, indicamos com $D(a)$ o conjunto de seus divisores e com $M(a)$ o conjunto de seus múltiplos.

Exemplos

1) $D(2) = \{1, -1, 2, -2\}$ $M(2) = \{0, \pm 2, \pm 4, \pm 6, \ldots\}$

2) $D(-3) = \{1, -1, 3, -3\}$ $M(-3) = \{0, \pm 3, \pm 6, \pm 9, \ldots\}$

3) $D(0) = \mathbb{Z}$ $M(0) = \{0\}$

65. Dizemos que um número inteiro p é primo quando $p \neq 0, 1$ e -1 e $D(p) = \{1, -1, p, -p\}$.

Exemplos

2, -2, 3, -3, 5, -5, 7 e -7 são primos.

EXERCÍCIOS

A.51 Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

a) $0 \in \mathbb{N}$ b) $(2-3) \in \mathbb{N}$ c) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$
d) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_- = \mathbb{Z}$ e) $\mathbb{Z}_+ \cap \mathbb{Z}_- = \emptyset$ f) $(-3)^2 \in \mathbb{Z}_-$
g) $(-4)(-5) \in \mathbb{Z}_+$ h) $0 \in \mathbb{Z}_-$ i) $(5-11) \in \mathbb{Z}$

A.52 Descrever os seguintes conjuntos: $D(6)$, $D(-18)$, $D(-24) \cap D(16)$, $M(4)$, $M(10)$ e $M(-9) \cap M(6)$.

A.53 Quais dos seguintes elementos de $\mathbb{Z}$ não são primos: 12, -13, 0, 5, 31, -1, 2, -4, 1, 49 e 53?

A.54 Sendo **a** e **b** dois números inteiros, pergunta-se:

a) $D(a)$ e $D(b)$ podem ser disjuntos?
b) Que nome se dá a um inteiro m tal que $D(a) \cap D(b) = D(m)$?
c) Quando $D(a) \cap D(b) = \{1, -1\}$, qual é a relação existente entre **a** e **b**?
d) Em que caso ocorre $M(a) \subset M(b)$?
e) Em que caso ocorre $M(a) \cap M(b) = M(ab)$?
f) Que nome se dá a um inteiro n tal que $M(a) \cap M(b) = M(n)$?

A.55 Determinar os seguintes números inteiros:

a) mdc(2, 3) b) mdc(-4, 6)
c) mdc(-6, -14) d) mmc(2, 3)
e) mmc(-4, 6) f) mmc(-6, -14)

III. CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

66. Dado um número inteiro $q \neq 1$ e -1, o inverso de q não existe em $\mathbb{Z}$: $\frac{1}{q} \notin \mathbb{Z}$. Porisso não podemos definir em $\mathbb{Z}$ a operação de divisão, dando significado ao símbolo $\frac{p}{q}$. Vamos superar esta dificuldade introduzindo os números racionais.

67. Chama-se conjunto dos números racionais — símbolo $\mathbb{Q}$ — o conjunto dos pares ordenados (ou frações) $\frac{a}{b}$, onde $a \in \mathbb{Z}$ e $b \in \mathbb{Z}^*$, para os quais adotam-se as seguintes definições:

(i) igualdade: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$

(ii) adição: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$

(iii) multiplicação: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

68. No conjunto dos racionais destacamos os subconjuntos:

$\mathbb{Q}_+$ = conjunto dos racionais não negativos

$\mathbb{Q}_-$ = conjunto dos racionais não positivos

$\mathbb{Q}^*$ = conjunto dos racionais não nulos

69. Na fração $\frac{a}{b}$, a é o numerador e b o denominador. Se a e b são primos entre si, isto é, se $mdc(a, b) = 1$, dizemos $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível. Assim, as frações $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{7}$ e $\frac{7}{15}$ são irredutíveis mas $\frac{6}{10}$ não é:

70. Consideremos o conjunto $\mathbb{Q}'$ formado pelos números racionais com denominador unitário: $\mathbb{Q}' = \{\frac{x}{1} \mid x \in \mathbb{Z}\}$. Temos:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{1} \iff a = b$$

$$\frac{a}{1} + \frac{b}{1} = \frac{a+b}{1} \iff a + b = a + b$$

$$\frac{a}{1} \cdot \frac{b}{1} = \frac{a \cdot b}{1} \iff a \cdot b = a \cdot b$$

portanto, os racionais com denominador igual a 1 comportam-se para a igualdade, a adição e a multiplicação como se fossem números inteiros. Assim, fazendo o racional $\frac{x}{1}$ coincidir com o inteiro x, decorre que:

$$\mathbb{Q}' = \mathbb{Z}, \quad \text{logo,} \quad \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

71. Pode-se verificar que a adição e a multiplicação de racionais apresentam as seguintes propriedades:

[A.1] $(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + (\frac{c}{d} + \frac{e}{f})$

[A.2] $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$

[A.3] $\frac{a}{b} + 0 = \frac{a}{b}$

[A.4] $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = 0$

[M.1] $(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b}(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f})$

[M.2] $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}$

[M.3] $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b}$

[D] $\frac{a}{b} \cdot (\frac{c}{d} + \frac{e}{f}) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}$

onde $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ e $\frac{e}{f}$ são racionais quaisquer, portanto, são válidas as mesmas propriedades formais vistas para os números inteiros. Além dessas, temos mais a seguinte:

[M.4] *simétrico ou inverso para a multiplicação*

para todo $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ e $\frac{a}{b} \neq 0$, existe

$\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ tal que $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$.

Devido à propriedade [M.4], podemos definir em $\mathbb{Q}^*$, a operação de divisão, estabelecendo que $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$ para $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ racionais quaisquer não nulos.

72. Notemos finalmente que todo número racional $\frac{a}{b}$ pode ser representado por um número decimal. Na passagem de uma notação para outra podem ocorrer dois casos:

1º) o número decimal tem uma quantidade finita de algarismos, isto é, é uma decimal exata.

Exemplos

$$\frac{3}{1} = 3; \quad \frac{1}{2} = 0{,}5; \quad \frac{1}{20} = 0{,}05; \quad \frac{27}{1000} = 0{,}027$$

2º) o número decimal tem uma quantidade infinita de algarismos que se repetem periodicamente, isto é, é uma dízima periódica.

Exemplos

$$\frac{1}{3} = 0{,}333\ldots; \quad \frac{2}{7} = 0{,}285714285714\ldots$$

EXERCÍCIOS

A.56 Quais das seguintes proposições são verdadeiras?

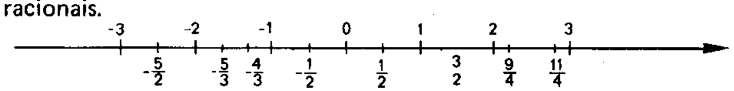
a) $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ b) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ c) $0 \in \mathbb{Q}$

d) $517 \in \mathbb{Q}$ e) $0{,}474747\ldots \in \mathbb{Q}$ f) $\{\frac{4}{7}, \frac{11}{3}\} \not\subset \mathbb{Q}$

g) $1 \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ h) $\frac{2}{7} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ i) $\frac{14}{2} \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$

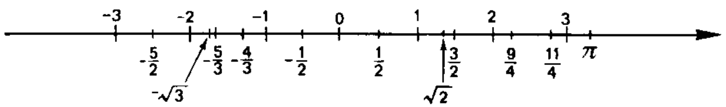
j) $\frac{21}{14}$ é irredutível k) $\frac{121}{147} < \frac{131}{150}$ l) $r \in \mathbb{Q} \Rightarrow -r \in \mathbb{Q}$

segmento representa $\frac{1}{2}$. Na figura abaixo representamos sobre a reta vários números racionais.



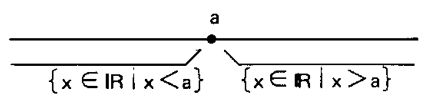
Os números racionais, entretanto, não preenchem completamente a reta, isto é, há pontos da reta que não representam racional algum. Por exemplo, entre os pontos 1,41 e 1,42 fica um ponto que representa $\sqrt{2} = 1{,}414215\ldots$ (irracional).

Quando representamos também sobre a reta os números irracionais, cada ponto da reta passa a representar necessariamente um número racional ou irracional (portanto, real), isto é, os reais preenchem completamente a reta.



Esta reta, que representa IR, é chamada *reta real* ou *reta numérica*.

78. Na reta real os números estão *ordenados*. Um número a é menor que qualquer número x colocado à sua direita e maior que qualquer número x à sua esquerda.



EXERCÍCIOS

A.61 Quais das proposições abaixo são verdadeiras?

a) $3 \in \mathbb{R}$ b) $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ c) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$

d) $\frac{1}{2} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ e) $\sqrt{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ f) $\sqrt[3]{4} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$

g) $(\sqrt{2} - 3\sqrt{3}) \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ h) $\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ i) $\frac{3\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} \in \mathbb{Q}$

A.62 Provar que se a, b, c, d são racionais, p é primo positivo e $a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p}$, então $a = c$ e $b = d$.

Solução

$a + b\sqrt{p} = c + d\sqrt{p} \iff (b - d)\sqrt{p} = c - a$

Como $c - a$ é racional, a última igualdade só subsiste quando $(b - d)\sqrt{p} \in \mathbb{Q}$, isto é, se $b - d = 0$. Neste caso, $c - a = 0$, provando a tese.

A.63 Mostrar que $\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} = 1 + \sqrt{3}$.

A.64 Mostrar que existem **a** e **b** racionais tais que $\sqrt{18 - 8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

A.65 Dados dois números **x** e y reais e positivos, chama-se média aritmética de **x** com y o real $a = \frac{x + y}{2}$ e chama-se média geométrica o real $g = \sqrt{xy}$. Mostrar que $a \geqslant g$ para todos $x, y \in \mathbb{R}_+$.

A.66 Representar sobre a reta real, cada um dos seguintes conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$
$B = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 3\}$
$C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0 \text{ ou } x > 2\}$
$D = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 0 \text{ ou } x \geqslant 3\}$

V. INTERVALOS

79. Dados dois números reais a e b, com $a < b$, definimos:

a) *intervalo aberto* de extremos a e b é o conjunto

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

que também pode ser indicado por a —— b.

b) *intervalo fechado* de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

que também pode ser indicado por a ⊢—⊣ b.

c) *intervalo fechado à esquerda* (ou aberto à direita) de extremos a e b é o conjunto

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$$

que também pode ser indicado por a ⊢—— b.

d) *intervalo fechado à direita* (ou aberto à esquerda) de extremos a e b é o conjunto

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leqslant b\}$$

que também pode ser indicado por a ——⊣ b.

112. Exemplos

1º) $f: A \longrightarrow B$
$\quad x \longmapsto 2x$

é uma função que associa a cada x de A um y de B tal que $y = 2x$.

2º) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto x^2$

é uma função que leva a cada x de $\mathbb{R}$ um y de $\mathbb{R}$ tal que $y = x^2$.

3º) $f: \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto \sqrt{x}$

é uma função que faz corresponder a cada $x \in \mathbb{R}_+$ um $y \in \mathbb{R}$ tal que $y = \sqrt{x}$.

113. Se $(a, b) \in f$, como já dissemos anteriormente, o elemento b é chamado *imagem* de a pela aplicação f ou *valor* de f no elemento a e indicamos:

$$f(a) = b$$

que se lê "f de a é igual a b".

114. Exemplo

Seja a função

$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\quad x \longmapsto 2x + 1$ então

a) a imagem de 0 pela aplicação f é 1, isto é:

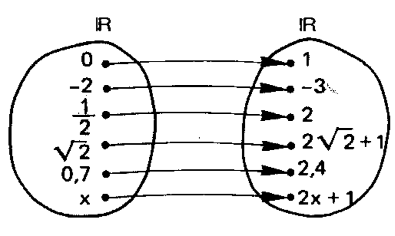
$f(0) = 2 \cdot 0 + 1 = 1$

b) a imagem de -2 pela aplicação f é -3, isto é:

$f(-2) = 2 \cdot (-2) + 1 = -3$

c) analogamente

$f(\frac{1}{2}) = 2 \cdot \frac{1}{2} + 1 = 2$
$f(\sqrt{2}) = 2 \cdot \sqrt{2} + 1$
$f(0,7) = 2 \cdot 0,7 + 1 = 2,4$



EXERCÍCIOS

A.115 Qual é a notação das seguintes funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$?

a) f associa cada número real ao seu oposto
b) g associa cada número real ao seu cubo
c) h associa cada número real ao seu quadrado menos 1
d) k associa cada número real ao número 2

A.116 Qual é a notação das seguintes funções?

a) f é função de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{Q}$ que associa cada número racional ao seu oposto adicionado com 1.
b) g é a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Q}$ que associa cada número inteiro à potência de base 2 desse número.
c) h é a função de $\mathbb{R}^*$ em $\mathbb{R}$ que associa cada número real ao seu inverso.

A.117 Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 3x + 4$. Calcular:

a) $f(2)$ b) $f(-1)$ c) $f(\frac{1}{2})$
d) $f(-\frac{1}{3})$ e) $f(\sqrt{3})$ f) $f(1 - \sqrt{2})$

A.118 Seja f a função de $\mathbb{Z}$ em $\mathbb{Z}$ definida por $f(x) = 3x - 2$. Calcular:

a) $f(2)$ c) $f(0)$
b) $f(-3)$ d) $f(\frac{3}{2})$

A.119 Seja f a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ assim definida

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ x + 1 & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) $f(3)$ b) $f(-\frac{3}{7})$ c) $f(\sqrt{2})$
d) $f(\sqrt{4})$ e) $f(\sqrt{3} - 1)$ f) $f(0,75)$

A.120 Seja a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{2x - 3}{5}$. Qual é o elemento do do domínio que tem $-\frac{3}{4}$ como imagem?

Solução

Queremos determinar o valor de x tal que $f(x) = -\frac{3}{4}$;

basta, portanto, resolver a equação $\frac{2x - 3}{5} = -\frac{3}{4}$.

Resolvendo a equação:

$$\frac{2x - 3}{5} = -\frac{3}{4} \iff 4(2x - 3) = -3 \cdot 5 \iff 8x - 12 = -15 \iff x = -\frac{3}{8}$$

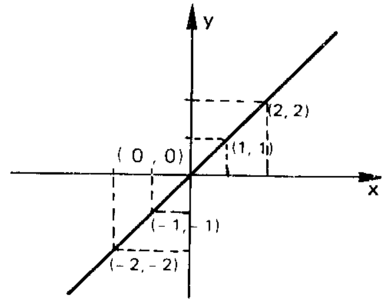
Resposta: o elemento é $x = -\frac{3}{8}$.

II. FUNÇÃO IDENTIDADE

129. Definição

Uma aplicação f de IR em IR recebe o nome de *função identidade* quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o próprio x, isto é:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x$$



O gráfico da função identidade é uma reta que contém as bissetrizes do 1º e 3º quadrantes.

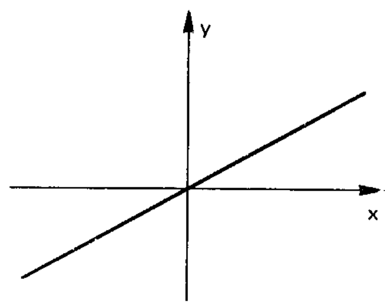
A imagem é $Im = \mathbb{R}$.

III. FUNÇÃO LINEAR

130. Definição

Uma aplicação de IR em IR recebe o nome de *função linear* quando a cada elemento $x \in \mathbb{R}$ associa o elemento $ax \in \mathbb{R}$ onde $a \neq 0$ é um número real dado, isto é:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto ax, \quad a \neq 0 \; (*)$$



Demonstra-se que o gráfico da função linear é uma reta que passa pela origem.(**)

A imagem é $Im = \mathbb{R}$.

De fato, qualquer que seja o $y \in \mathbb{R}$, existe $x = \dfrac{y}{a} \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tal que

$$\boxed{f(x) = f\left(\frac{y}{a}\right) = a \cdot \frac{y}{a} = y.}$$

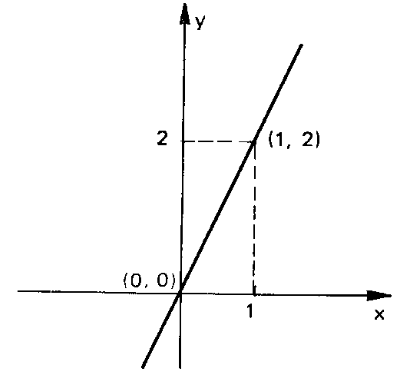
(*) Observe que se $a = 0$, teremos a função constante $y = 0$.

(**) Essa demonstração será feita para um caso mais geral e se encontra na **página 96**.

131. Exemplos

1º) Construir o gráfico da função $y = 2x$. Considerando que dois pontos distintos determinam uma reta e no caso da função linear um dos pontos é a origem, basta atribuir a **x** um valor não nulo e calcular o correspondente $y = 2x$.

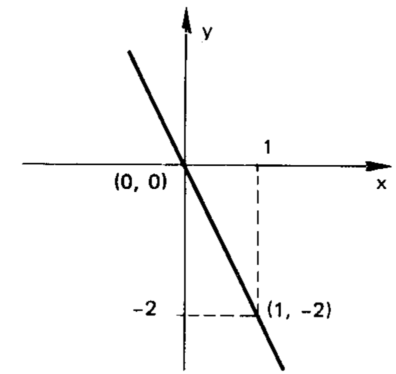
x	y = 2x
1	2



Pelos pontos P(0, 0) e Q(1, 2) traçamos a reta PQ que é precisamente o gráfico da função dada.

2º) Construir o gráfico da função $y = -2x$. Analogamente, temos:

x	y = -2x
1	-2



EXERCÍCIOS

A.137 Construir o gráfico das funções de IR em IR:

a) $y = 2$ b) $y = -3$
c) $y = \sqrt{2}$ d) $y = 0$

A.138 Construir, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de IR em IR:

a) $y = x$ b) $y = 2x$ c) $y = 3x$ d) $y = \dfrac{x}{2}$

A.139 Construir, num mesmo sistema cartesiano, os gráficos das funções de IR em IR:

a) $y = -x$ b) $y = -2x$ c) $y = -3x$ d) $y = -\dfrac{x}{2}$

EXERCÍCIOS

A.140 Construir o gráfico cartesiano das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2x - 1$ b) $y = x + 2$

c) $y = 3x + 2$ d) $y = \dfrac{2x - 3}{2}$

e) $y = -3x - 4$ f) $y = -x + 1$

g) $y = -2x + 3$ h) $y = \dfrac{4 - 3x}{2}$

A.141 Resolver analítica e graficamente o sistema de equações:

$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Solução Analítica

Existem diversos processos analíticos pelos quais podemos resolver um sistema de equações. Vamos apresentar dois deles.

1º) processo: Substituição

Este processo, consiste em substituir o valor de uma das incógnitas, obtido a partir de uma das equações, na outra.

Resolvendo, por exemplo, a primeira equação na incógnita x, temos:

$$x - y = -3 \iff x = y - 3$$

e substituimos x por este valor na segunda equação:

$$2(y - 3) + 3y = 4 \iff 2y - 6 + 3y = 4 \iff y = 2$$

que levamos à primeira equação, encontrando:

$$x - 2 = -3 \iff x = -1.$$

A solução do sistema é o par ordenado $(-1, 2)$.

2º) processo: Adição

Este processo baseia-se nas seguintes propriedades:

I. "Num sistema de equações, se multiplicarmos todos os coeficientes de uma equação por um número não nulo, o sistema que obtemos é equivalente ao anterior (*)"

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} ka_1x + kb_1y = kc_1 \quad (k \neq 0) \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

II. "Num sistema de equações, se substituirmos uma das equações, pela sua soma com uma outra equação do sistema, o novo sistema é equivalente ao anterior".

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} (a_1 + a_2)x + (b_1 + b_2)y = c_1 + c_2 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

(*) Sistemas de equações são equivalentes quando apresentam as mesmas soluções.

O fundamento do processo da adição, consiste no seguinte: aplicando a primeira propriedade, multiplicamos cada equação por números convenientes, de modo que, os coeficientes de determinada incógnita sejam opostos e pela segunda propriedade, substituimos uma das equações pela soma das duas equações.

Assim, no sistema $\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$

multiplicamos a primeira equação por 3

$$\begin{cases} 3x - 3y = -9 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

Substituindo a primeira equação pela soma das duas equações, temos:

$$\begin{cases} 5x = -5 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

que é equivalente a:

$$\begin{cases} x = -1 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

substituindo $x = -1$ em $2x + 3y = 4$, encontramos

$$2 \cdot (-1) + 3y = 4 \Rightarrow y = 2$$

A solução do sistema é o par ordenado $(-1, 2)$.

Solução Gráfica

O sistema proposto

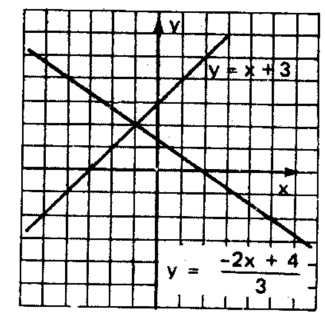
$$\begin{cases} x - y = -3 \\ 2x + 3y = 4 \end{cases}$$

é equivalente a

$$\begin{cases} y = x + 3 \\ y = \dfrac{-2x + 4}{3} \end{cases}$$

Construímos os gráficos de

$$y = x + 3 \quad e \quad y = \frac{-2x + 4}{3}$$



A solução do sistema são as coordenadas do ponto de intersecção das retas, portanto $(-1, 2)$.

A.142 Resolver analítica e graficamente os sistemas de equações.

a) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x - 2y = -14 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 2x - 5y = 9 \\ 7x + 4y = 10 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x + 5y = 2 \\ 6x + 7y = 4 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 3 \end{cases}$ f) $\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

A.143 Resolver os sistemas de equações:

a) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y} + \dfrac{1}{x+y} = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{1}{x-y} - \dfrac{1}{x+y} = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

Sugestão: faça $\dfrac{1}{x-y} = a$ e $\dfrac{1}{x+y} = b$

b) $\begin{cases} \dfrac{3}{x+y+1} - \dfrac{2}{2x-y+3} = \dfrac{5}{12} \\ \dfrac{2}{x+y+1} + \dfrac{3}{2x-y+3} = 1 \end{cases}$

A.144 Obter a equação da reta que passa pelos pontos $(1, 2)$ e $(3, -2)$.

Solução

Seja $y = ax + b$ a equação procurada. O problema estará resolvido se determinarmos o valores de **a** e **b**.

Considerando que o ponto $(1, 2)$, pertence a reta de equação $y = ax + b$, ao substituirmos $x = 1$ e $y = 2$ em $y = ax + b$, temos a sentença verdadeira

$$2 = a \cdot 1 + b \quad \text{isto é:} \quad a + b = 2$$

Analogamente, para o ponto $(3, -2)$, obtemos:

$$-2 = a \cdot 3 + b \quad \text{isto é:} \quad 3a + b = -2$$

Resolvendo o sistema

$$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = -2 \end{cases}$$

encontramos $a = -2$ e $b = 4$.

Assim, a equação da reta é $y = -2x + 4$.

A.145 Obter a equação da reta que passa pelos pontos:

a) $(2, 3)$ e $(3, 5)$ b) $(1, -1)$ e $(-1, 2)$
c) $(3, -2)$ e $(2, -3)$ d) $(1, 2)$ e $(2, 2)$

VI. IMAGEM

136. O conjunto imagem da função afim $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax + b$ com $a \neq 0$ é $\mathbb{R}$.

De fato, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$ existe $x = \dfrac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a \cdot \frac{y-b}{a} + b = y.$$

VII. COEFICIENTES DA FUNÇÃO AFIM

137. O coeficiente **a** da função $f(x) = ax + b$ é denominado *coeficiente angular* ou *declividade* da reta representada no plano cartesiano.

O coeficiente **b** da função $y = ax + b$ é denominado *coeficiente linear.*

138. Exemplo

Na função $y = 2x + 1$ o coeficiente angular é 2 e o coeficiente linear é 1. Observe que se $x = 0$ temos $y = 1$. Portanto, o coeficiente linear é a ordenada do ponto em que a reta corta o eixo y.

EXERCÍCIOS

A.146 Obter a equação da reta que passa pelo ponto: $(1, 3)$ e tem coeficiente angular igual a 2.

Solução

A equação procurada é da forma $y = ax + b$.

Se o coeficiente angular é 2, então $a = 2$.

Substituindo $x = 1$, $y = 3$ e $a = 2$ em $y = ax + b$, vem:

$$3 = 2 \cdot 1 + b \Rightarrow b = 1.$$

A equação procurada é $y = 2x + 1$.

A.147 Obter a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 4)$ e tem coeficiente angular igual a -3.

A.148 Obter a equação da reta com coeficiente angular igual a $-\dfrac{1}{2}$ e passando pelo ponto $(-3, 1)$.

A.149 Obter a equação da reta que passa pelo ponto $(-2, 1)$ e tem coeficiente linear igual a 4.

A.150 Obter a equação da reta com coeficiente linear igual a -3 e passa pelo ponto $(-3, -2)$.

142. Exemplo

A função $f(x) = 2x$ é crescente em $\mathbb{R}$, pois:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{2x_1}_{f(x_1)} < \underbrace{2x_2}_{f(x_2)} \quad \text{para todo } x_1 \in \mathbb{R} \text{ e todo } x_2 \in \mathbb{R}.$$

143. Definição

A função $f: A \longrightarrow B$ definida por $y = f(x)$ é *decrescente* no conjunto $A_1 \subset A$ se, para dois valores quaisquer x_1 e x_2 pertencentes a A_1, com $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) > f(x_2)$.

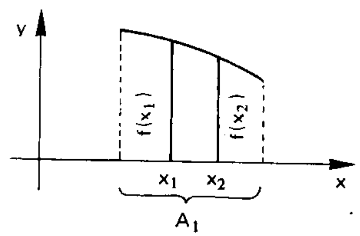
Em símbolos: f é decrescente quando

$$(\forall x_1, x_2)(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2))$$

e isto também pode ser posto assim:

$$(\forall x_1, x_2)\left(x_1 \neq x_2 \Rightarrow \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0\right)$$

Na linguagem prática, (não matemática) isto significa que a função é decrescente no conjunto A_1 se, ao aumentarmos o valor atribuído a x, o valor de y diminui.



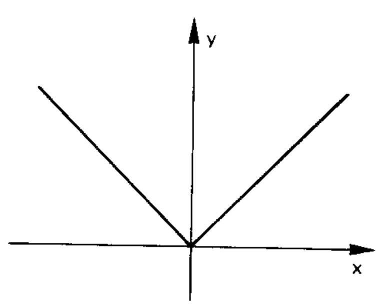
144. Exemplo

A função $f(x) = -2x$ é decrescente em $\mathbb{R}$, pois

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \underbrace{-2x_1}_{f(x_1)} > \underbrace{-2x_2}_{f(x_2)} \quad \text{para todo } x_1 \in \mathbb{R} \text{ e todo } x_2 \in \mathbb{R}.$$

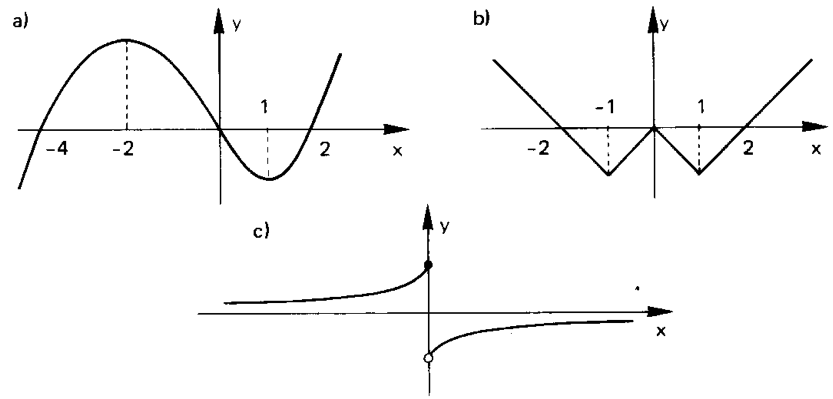
Notemos que uma mesma função $y = f(x)$, pode não ter o mesmo comportamento (crescente ou decrescente) em todo o seu domínio.

É bastante comum que uma função seja crescente em certos subconjuntos de D e decrescente em outros. O gráfico ao lado representa uma função crescente em $\mathbb{R}_+$ e decrescente em $\mathbb{R}_-$.



EXERCÍCIO

A.152 Com base nos gráficos abaixo, de funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, especificar os intervalos onde a função é crescente ou decrescente.



X. TEOREMA

145. "A função afim é *crescente (decrescente)* se, e somente se, o coeficiente angular for *positivo (negativo)*".

Demonstração

$$f(x) = ax + b \text{ é crescente} \iff \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \ (x_1 \neq x_2) \iff$$

$$\iff \frac{(ax_1 + b) - (ax_2 + b)}{x_1 - x_2} > 0 \ (x_1 \neq x_2) \iff \frac{a(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \ (x_1 \neq x_2) \iff$$

$$\iff a > 0.$$

Fica como exercício provar que $f(x) = ax + b$ decrescente equivale a $a < 0$.

EXERCÍCIOS

A.153 Especificar para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrescente em $\mathbb{R}$:

a) $y = 3x - 2$ b) $y = -4x + 3$

Solução

a) É crescente, pois o coeficiente angular é positivo $(a = 3)$

b) É decrescente, pois o coeficiente angular é negativo $(a = -4)$.

A.154 Especificar para cada uma das funções abaixo, se é crescente ou decrescente em $\mathbb{R}$.

a) $y = 1 + 5x$ b) $y = -3 - 2x$
c) $y = x + 2$ d) $y = 3 - x$
e) $y = -2x$ f) $y = 3x$

A.155 Estudar segundo os valores do parâmetro **m**, a variação (crescente, decrescente ou constante) da função $y = (m - 1)x + 2$.

Solução

Se $m - 1 > 0$, isto é, $m > 1$, então a função terá coeficiente angular positivo e, portanto, crescente em $\mathbb{R}$.

Se $m - 1 < 0$, isto é, $m < 1$, então a função terá coeficiente angular negativo e, portanto, decrescente em $\mathbb{R}$.

Se $m - 1 = 0$, isto é, $m = 1$, então será função $y = (1 - 1)x + 2$, ou seja, $y = 2$ que é constante em $\mathbb{R}$.

A.156 Estudar segundo os valores do parâmetro **m**, a variação (crescente, decrescente ou constante) das funções abaixo

a) $y = (m + 2)x - 3$ b) $y = (4 - m)x + 2$
c) $y = 4 - (m + 3)x$ d) $y = m(x - 1) + 3 - x$

XI. SINAL DE UMA FUNÇÃO

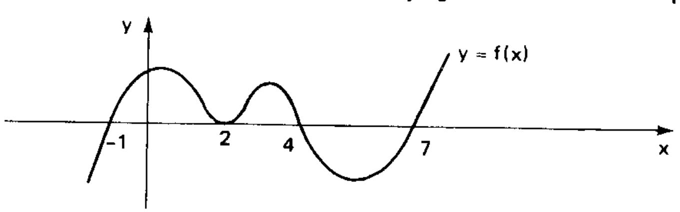
146. Seja a função $f: A \to B$ definida por $y = f(x)$. Vamos resolver o problema "para que valores de **x** temos $f(x) > 0$, $f(x) = 0$ ou $f(x) < 0$?"

Resolver este problema significa estudar o sinal da função $y = f(x)$ para cada **x** pertencente ao seu domínio.

Para se estudar o sinal de uma função, quando a função está representada no plano cartesiano, basta examinar se é positiva, nula ou negativa a ordenada de cada ponto da curva.

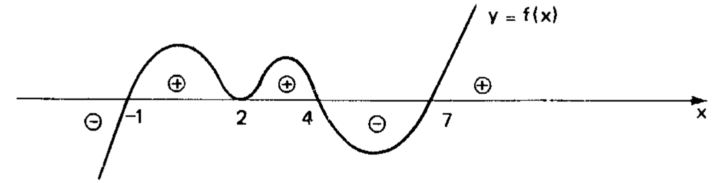
147 Exemplo

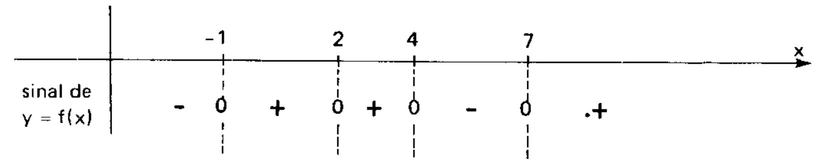
Estudar o sinal da função $y = f(x)$ cujo gráfico está abaixo representado.



Observemos, inicialmente, que interessa o comportamento da curva $y = f(x)$ em relação ao eixo dos **x**, não importando a posição do eixo dos **y**.

Preparando o gráfico com aspecto prático, temos:





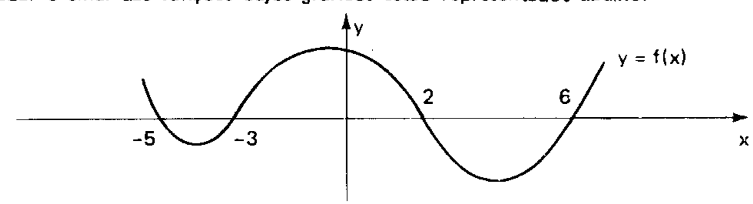
Conclusão:

$f(x) = 0 \iff x = -1$ ou $x = 2$ ou $x = 4$ ou $x = 7$
$f(x) > 0 \iff -1 < x < 2$ ou $2 < x < 4$ ou $x > 7$
$f(x) < 0 \iff x < -1$ ou $4 < x < 7$.

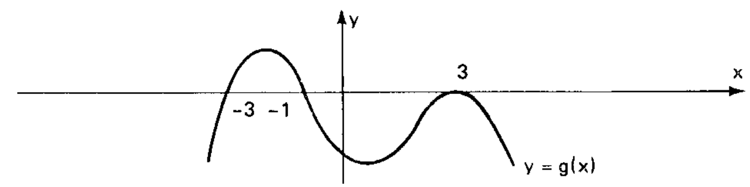
EXERCÍCIO

A.157 Estudar o sinal das funções cujos gráficos estão representados abaixo.

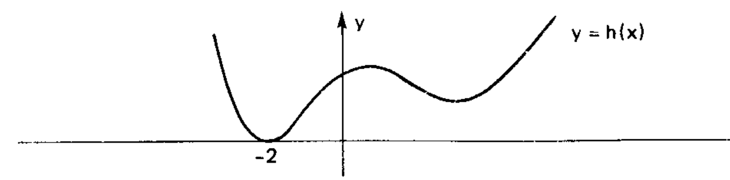
a)

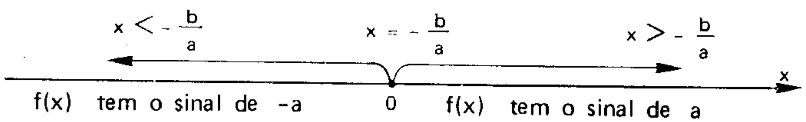


b)

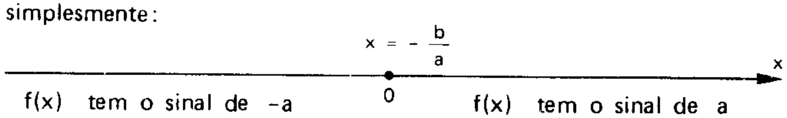


c)





ou, simplesmente:



151. Exemplos

1º) Estudar os sinais da função $f(x) = 2x - 1$.

Temos:

$f(x) = 0 \Longrightarrow 2x - 1 = 0 \Longrightarrow x = \frac{1}{2}$

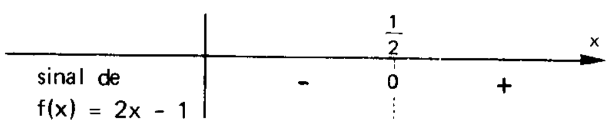
$a = 2 \Longrightarrow a > 0$ e $-a < 0$

Logo:

para $x > \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) > 0$ (sinal de $a = 2 > 0$)

para $x < \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) < 0$ (sinal de $-a = -2 < 0$)

Fazendo o esquema gráfico, temos



2º) Estudar os sinais de $f(x) = -2x + 4$.

Temos

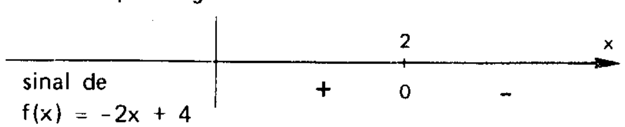
$f(x) = 0 \Longrightarrow -2x + 4 = 0 \Longrightarrow x = 2$

$a = -2 \Longrightarrow a < 0$ e $-a > 0$

para $x > 2 \Longrightarrow f(x) < 0$ (sinal de $a = -2 < 0$)

para $x < 2 \Longrightarrow f(x) > 0$ (sinal de $-a = 2 > 0$)

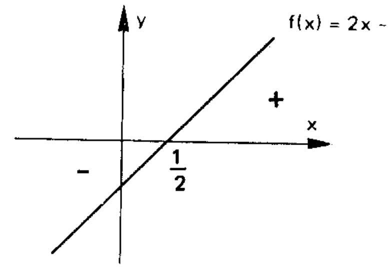
Fazendo o esquema gráfico

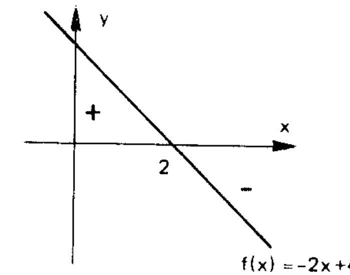


152. Um outro processo para analisarmos a variação do sinal da função afim é construir o gráfico cartesiano.

Lembremos que na função afim $f(x) = ax + b$ o gráfico cartesiano é uma reta e a função é crescente (decrescente) se o coeficiente angular *a* é positivo (negativo).

Assim nos dois últimos exemplos, temos:





EXERCÍCIOS

A.158 Estudar os sinais das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = 2x + 3$
b) $y = -3x + 2$
c) $y = 4 - x$
d) $y = 5 + x$
e) $y = 3 - \frac{x}{2}$
f) $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{2}$
g) $y = 2x - \frac{4}{3}$
h) $y = -x$

A.159 Seja a função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = 4x - 5$. Determine os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2.

Solução

Os valores do domínio da função que produzem imagens maiores que 2, são os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que

$$4x - 5 > 2$$

e, portanto,

$$x > \frac{7}{4}$$

A.160 Para que valores do domínio da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{3x - 1}{2}$ a imagem é menor que 4?

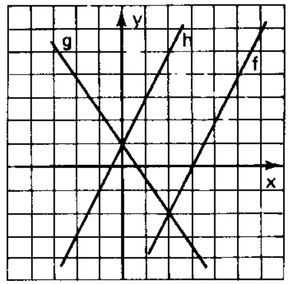
A.161 Para que valores de $x \in \mathbb{R}$ a função $f(x) = \frac{2}{3} - \frac{x}{2}$ é negativa?

A.162 Sejam as funções $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 2 - 3x$ e $h(x) = \frac{4x - 1}{2}$ definidas em $\mathbb{R}$. Para que valores de $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

a) $f(x) \geqslant g(x)$? b) $g(x) < h(x)$? c) $f(x) \geqslant h(x)$?

A.163 Dados os gráficos das funções f, g e h definidas em $\mathbb{R}$. Determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que:

a) $f(x) > g(x)$
b) $g(x) \leqslant h(x)$
c) $f(x) \geqslant h(x)$
d) $g(x) > 4$
e) $f(x) \leqslant 0$



XIII. INEQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

153. A dupla desigualdade $f(x) < g(x) < h(x)$ se decompõe em duas inequações simultâneas, isto é, equivale a um sistema de duas equações em x, separadas pelo conectivo *e*:

$$f(x) < g(x) < h(x) \iff \begin{cases} f(x) < g(x) & \text{(I)} \\ \quad e & \\ g(x) < h(x) & \text{(II)} \end{cases}$$

Indicando com S_1 o conjunto-solução de (I) e S_2 o conjunto-solução de (II), o conjunto-solução da dupla desigualdade é $S = S_1 \cap S_2$.

154. Exemplo

Resolver $\underbrace{3x + 2 < -x + 3}_{\text{(I)}} \overbrace{\leqslant x + 4}^{\text{(II)}}$

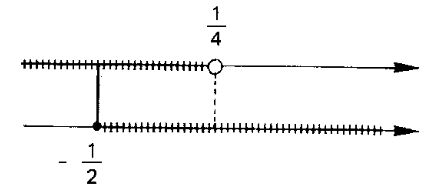
Temos que resolver duas inequações:

(I) $3x + 2 < -x + 3 \implies 4x < 1 \implies x < \frac{1}{4}$

(II) $-x + 3 \leqslant x + 4 \implies -2x \leqslant 1 \implies x \geqslant -\frac{1}{2}$

A intersecção desses dois conjuntos é

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{1}{4}\}$$



EXERCÍCIOS

A.164 Resolver as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $-2 < 3x - 1 < 4$
b) $-4 < 4 - 2x \leqslant 3$
c) $-3 < 3x - 2 < x$
d) $x + 1 \leqslant 7 - 3x < \frac{x}{2} - 1$
e) $3x + 4 < 5 < 6 - 2x$
f) $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$

A.165 Resolver os sistemas de inequações em $\mathbb{R}$:

a) $\begin{cases} 3x - 2 > 4x + 1 \\ 5x + 1 \leqslant 2x - 5 \end{cases}$

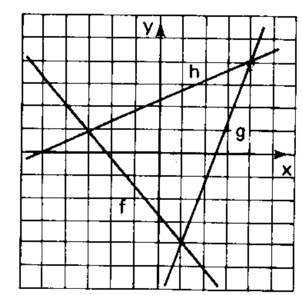
b) $\begin{cases} 5 - 2x < 0 \\ 3x + 1 \geqslant 4x - 5 \\ x - 3 \geqslant 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 3x + 2 \geqslant 5x - 2 \\ 4x - 1 > 3x - 4 \\ 3 - 2x < x - 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \dfrac{2x - 5}{1 - x} \leqslant -2 \\ \dfrac{x^2 + x + 3}{x + 1} > x \end{cases}$

A.166 Com base nos gráficos das funções f, g e h definidas em $\mathbb{R}$, determinar os valores de $x \in \mathbb{R}$, tais que

a) $f(x) < g(x) \leqslant h(x)$
b) $g(x) \leqslant f(x) < h(x)$
c) $h(x) \leqslant f(x) < g(x)$



XIV. INEQUAÇÕES-PRODUTO

155. Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações $f(x) \cdot g(x) > 0$, $f(x) \cdot g(x) < 0$, $f(x) \cdot g(x) \geqslant 0$ e $f(x) \cdot g(x) \leqslant 0$ são denominadas *inequações-produto*.

2º) "toda potência de base real e expoente par é um número real não negativo", isto é

$$\boxed{a^{2n} \geqslant 0, \forall a \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}}$$

Assim sendo, temos as seguintes equivalências:

$$[f(x)]^n > 0 \iff \begin{cases} f(x) > 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) \neq 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n < 0 \iff \begin{cases} f(x) < 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \nexists x \in \mathbb{R} & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \geqslant 0 \iff \begin{cases} f(x) \geqslant 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ \forall x \in D(f) & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

$$[f(x)]^n \leqslant 0 \iff \begin{cases} f(x) \leqslant 0 & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ f(x) = 0 & \text{se } n \text{ é par} \end{cases}$$

Exemplos

1º) $(3x - 2)^3 > 0 \implies 3x - 2 > 0 \implies S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > \frac{2}{3}\}$

2º) $(4x - 3)^6 > 0 \implies 4x - 3 \neq 0 \implies S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3}{4}\}$

3º) $(2x + 1)^5 < 0 \implies 2x + 1 < 0 \implies S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\frac{1}{2}\}$

4º) $(x - 2)^4 < 0 \implies S = \varnothing$

5º) $(3 - 5x)^7 \geqslant 0 \implies 3 - 5x \geqslant 0 \implies S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant \frac{3}{5}\}$

6º) $(4x - 5)^2 \geqslant 0 \implies S = \mathbb{R}$

7º) $(8 - 2x)^4 \leqslant 0 \implies 8 - 2x = 0 \implies S = \{4\}$

EXERCÍCIOS

A.167 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $(3x + 3)(5x - 3) > 0$
b) $(4 - 2x)(5 + 2x) < 0$
c) $(5x + 2)(2 - x)(4x + 3) > 0$
d) $(3x + 2)(-3x + 4)(x - 6) < 0$
e) $(6x - 1)(2x + 7) \geqslant 0$
f) $(5 - 2x)(-7x - 2) \leqslant 0$
g) $(3 - 2x)(4x + 1)(5x + 3) \geqslant 0$
h) $(5 - 3x)(7 - 2x)(1 - 4x) \leqslant 0$

A.168 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $(x - 3)^4 > 0$
b) $(3x + 8)^3 < 0$
c) $(4 - 5x)^6 < 0$
d) $(1 - 7x)^5 > 0$
e) $(3x + 5)^2 \geqslant 0$
f) $(5x + 1)^3 \leqslant 0$
g) $(4 + 3x)^4 \leqslant 0$
h) $(3x - 8)^5 \geqslant 0$

A.169 Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $(x - 3)^5 \cdot (2x + 3)^6 < 0$.

Solução

Estudemos separadamente os sinais das funções $f(x) = (x - 3)^5$ e $g(x) = (2x + 3)^6$. Lembrando que a potência de expoente ímpar e base real tem o sinal da base, então, o *sinal* de $(x - 3)^5$ é igual ao *sinal* de $x - 3$, isto é:

		3		x
f(x)	−	0	+	

A potência de expoente par e base real não nula é sempre positiva, então $(2x + 3)^6$ é *positivo* se $x \neq -\frac{3}{2}$ e $(2x + 3)^6$ é *nulo* se $x = -\frac{3}{2}$, isto é:

		$-\frac{3}{2}$	
g(x)	+	0	+

Fazendo o quadro-produto, temos:

		$-\frac{3}{2}$		3	x
f(x)	−		−	0	+
g(x)	+	0	+		+
f(x) · g(x)	−	0	−	0	+
		$-\frac{3}{2}$		3	

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 3 \text{ e } x \neq -\frac{3}{2}\}$$

A.170 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $(5x + 4)^4 \cdot (7x - 2)^3 \geqslant 0$
b) $(3x + 1)^3 \cdot (2 - 5x)^5 \cdot (x + 4)^8 > 0$
c) $(x + 6)^7 \cdot (6x - 2)^4 \cdot (4x + 5)^{10} \leqslant 0$
d) $(5x - 1) \cdot (2x + 6)^8 \cdot (4 - 6x)^6 \geqslant 0$

XV. INEQUAÇÕES-QUOCIENTE

162. Sendo $f(x)$ e $g(x)$ duas funções na variável x, as inequações

$$\frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leqslant 0$$

são denominadas *inequações-quociente.*

Considerando que as regras de sinais do produto e do quociente de números reais são análogas, podemos, então, construir o quadro-quociente de modo análogo ao quadro-produto, observando o fato de que o denominador de uma fração não pode ser nulo.

163. Exemplo

Resolver em $\mathbb{R}$ a inequação $\dfrac{3x+4}{1-x} \leqslant 2$. Temos:

$$\frac{3x+4}{1-x} \leqslant 2 \Longrightarrow \frac{3x+4}{1-x} - 2 \leqslant 0 \Longrightarrow \frac{3x+4-2(1-x)}{1-x} \leqslant 0 \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5x+2}{1-x} \leqslant 0$$

Fazendo o quadro-quociente, temos

		$-\frac{2}{5}$		1		x
$f(x) = 5x + 2$	$-$	0	$+$		$+$	
$g(x) = 1 - x$	$+$		$+$	0	$-$	
$\dfrac{f(x)}{g(x)}$	$-$	0	$+$		$-$	
		$-\frac{2}{5}$		1		

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5} \ \text{ou} \ x > 1\}$$

Podemos resolver a inequação $\dfrac{3x+4}{1-x} \leqslant 2$, multiplicando por $h(x) = 1 - x$ e examinando dois casos:

a) $h(x) = 1 - x > 0$, isto é, $x < 1$

$$\frac{3x+4}{1-x} \leqslant 2 \Rightarrow 3x + 4 \leqslant 2(1-x) \Rightarrow x \leqslant -\frac{2}{5}$$

$$S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5}\}$$

b) $h(x) = 1 - x < 0$, isto é, $x > 1$

$$\frac{3x+4}{1-x} \leqslant 2 \Rightarrow 3x + 4 \geqslant 2(1-x) \Rightarrow x \geqslant -\frac{2}{5}$$

$$S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid x > -\frac{2}{5}\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$$

O conjunto solução é:

$$S = S_1 \cup S_2 = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -\frac{2}{5} \ \text{ou} \ x > 1\}$$

Daremos sempre preferência ao método do quadro-quociente, por sua maior simplicidade.

EXERCÍCIOS

A.171 Resolver as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{2x+1}{x+2} > 0$ b) $\dfrac{3x-2}{3-2x} < 0$

c) $\dfrac{3-4x}{5x+1} \geqslant 0$ d) $\dfrac{-3-2x}{3x+1} \leqslant 0$

A.172 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\dfrac{5x-3}{3x-4} > -1$ b) $\dfrac{5x-2}{3x+4} < 2$

c) $\dfrac{x-1}{x+1} \geqslant 3$ d) $\dfrac{3x-5}{2x-4} \leqslant 1$

A.173 Resolver as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $\dfrac{(1-2x)(3+4x)}{(4-x)} > 0$ b) $\dfrac{(3x+1)}{(2x+5)(5x+3)} < 0$

c) $\dfrac{(5x+4)(4x+1)}{(5-4x)} \geqslant 0$ d) $\dfrac{(1-2x)}{(5-x)(3-x)} \leqslant 0$

A.174 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\dfrac{1}{x-4} < \dfrac{2}{x+3}$ b) $\dfrac{1}{x-1} < \dfrac{2}{x-2}$

c) $\dfrac{x+1}{x+2} > \dfrac{x+3}{x+4}$ d) $\dfrac{x+5}{3x+2} \leqslant \dfrac{x-2}{3x+5}$

e) $\dfrac{5x+2}{4x-1} > \dfrac{5x-1}{4x+5}$ f) $\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{2}{x-2} - \dfrac{3}{x-3} < 0$

g) $\dfrac{2}{3x-1} \geqslant \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x+1}$

V. ZEROS

168. Definição

Os *zeros ou raízes* da função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ são os valores de x reais tais que $f(x) = 0$ e, portanto, as soluções da equação do segundo grau

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Utilizando a forma canônica, temos:

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = 0 \iff$$

$$\iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \iff$$

$$\iff x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

169. Discussão

Observe que a existência de raízes reais para a equação do segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ fica condicionada ao fato de $\sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$. Assim, temos três casos a considerar:

1º) $\Delta > 0$, a equação apresentará duas raízes distintas que são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad e \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

2º) $\Delta = 0$, a equação apresentará duas raízes iguais que são

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}.$$

3º) $\Delta < 0$, considerando que nesse caso $\sqrt{\Delta} \notin \mathbb{R}$, diremos que a equação não apresenta raízes reais.

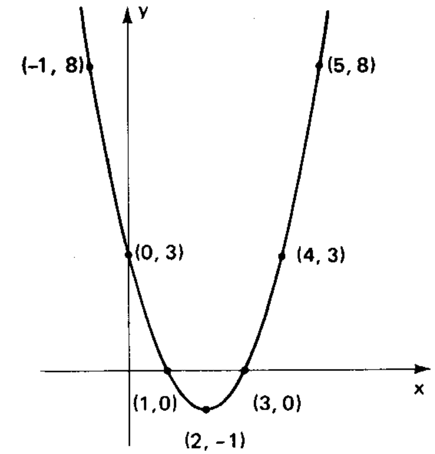
170. Resumo

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff \begin{cases} \Delta > 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ ou } x = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \\ \Delta = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b}{2a} \\ \Delta < 0 \Rightarrow \text{não existem raízes reais.} \end{cases}$$

171. Interpretando geometricamente, dizemos que os zeros da função quadrática são as abscissas dos pontos onde a parábola corta o eixo dos x.

Exemplo

Construindo o gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$ podemos notar que a parábola corta o eixo dos x nos pontos de abscissas 1 e 3, que são as raízes da equação $x^2 - 4x + 3 = 0$.



EXERCÍCIOS

A.177 Determinar os zeros reais das funções:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

b) $f(x) = -x^2 + 7x - 12$

c) $f(x) = 3x^2 - 7x + 2$

d) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

e) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

f) $f(x) = -x^2 + \frac{3}{2}x + 1$

g) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

h) $f(x) = -x^2 + 3x - 4$

i) $f(x) = x^2 - \sqrt{2}x + \frac{1}{2}$

j) $f(x) = x^2 + (1 - \sqrt{3})x - \sqrt{3}$

k) $f(x) = 2x^2 - 4x$

l) $f(x) = -3x^2 + 6$

m) $f(x) = 4x^2 + 3$

n) $f(x) = -5x^2$

A.178 (MAPOFEI-76) Resolver o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{7}{12} \\ x \cdot y = 12 \end{cases}$$

VI. MÁXIMO E MÍNIMO

172. Definição

Dizemos que o número $y_M \in Im(f)$ $(y_m \in Im(f))$ é o *valor de máximo* (*mínimo*) da função $y = f(x)$ se, e somente se, $y_M \geqslant y$ $(y_m \leqslant y)$ para qualquer $y \in Im(f)$ e o valor de $x_M \in D(f)$ $(x_m \in D(f))$ tal que $y_M = f(x_M)$ $(y_m = f(x_m))$ é chamado *ponto de máximo* (*mínimo*) da função.

173. Teorema

"A função quadrática $y = ax^2 + bx + c$ admite um valor máximo (mínimo) $y = \dfrac{-\Delta}{4a}$ em $x = \dfrac{-b}{2a}$ se, e somente se, $a < 0$ $(a > 0)$".

Demonstração

Consideremos a função quadrática na forma canônica

$$y = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] \qquad (1)$$

Considerando que $(x + \dfrac{b}{2a})^2 \geqslant 0$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$ e $\dfrac{-\Delta}{4a^2}$ para uma dada função tem valor constante, então y assumirá valor máximo (mínimo) quando $a < 0$ $(a > 0)$ e a diferença

$$(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}$$

for a menor possível, isto é

$$(x + \frac{b}{2a})^2 = 0 \Longrightarrow x = \frac{-b}{2a}.$$

Substituindo $x = \dfrac{-b}{2a}$ em (1) temos

$$y = a[(-\frac{b}{2a} + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = a[0^2 - \frac{\Delta}{4a^2}] = \frac{-\Delta}{4a}$$

174. Exemplos

1º) Na função real $f(x) = 4x^2 - 4x - 8$ temos: $a = 4$, $b = -4$, $c = -8$ e $\Delta = 144$.

Como $a = 4 > 0$, a função admite um valor mínimo:

$$y_M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-144}{4 \cdot 4}, \text{ isto é: } y_m = -9$$

em

$$x_m = \frac{-b}{2a} = \frac{4}{2 \cdot 4}, \text{ isto é: } x_m = \frac{1}{2}.$$

2º) Na função real $f(x) = -x^2 + x + \dfrac{3}{4}$, temos: $a = -1$, $b = 1$, $c = \dfrac{3}{4}$ e $\Delta = 4$.

Como $a = -1 < 0$, a função admite um valor máximo:

$$y_M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-4}{4(-1)}, \text{ isto é: } y_M = 1$$

em

$$x_M = \frac{-b}{2a} = \frac{-1}{2(-1)}, \text{ isto é: } x_M = \frac{1}{2}$$

VII. VÉRTICE DA PARÁBOLA

175. Definição

O ponto $V(\dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-\Delta}{4a})$ é chamado vértice da parábola representativa da função quadrática.

EXERCÍCIOS

A.194 Determinar o valor máximo ou o valor mínimo, e o ponto de máximo ou o ponto de mínimo das funções abaixo, definidas em $\mathbb{R}$.

a) $y = 2x^2 + 5x$

b) $y = -3x^2 + 12x$

c) $y = 4x^2 - 8x + 4$

d) $y = x^2 - \dfrac{7}{2}x + \dfrac{5}{2}$

e) $y = -x^2 + 5x - 7$

f) $y = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{4}{3}x - \dfrac{1}{2}$

EXERCÍCIOS

A.211 Fazer o esboço do gráfico da função $y = x^2 - 4x + 3$.

Solução

Concavidade

Como $a = 1 > 0$ a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$x^2 - 4x + 3 = 0 \implies x = 1$ ou $x = 3$

Os pontos no eixo x são $P_1(1, 0)$ e $P_2(3, 0)$

Vértice

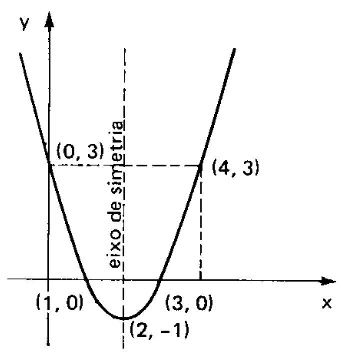
Em $y = x^2 - 4x + 3$, temos

$a = 1$, $b = -4$, $c = 3$ e $\Delta = 4$

como $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{4}{2 \cdot 1} = 2$ e $\dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{-4}{4 \cdot 1} = -1$,

o vértice é $V(2, -1)$.

Gráfico



Observe que a parábola sempre intercepta o eixo y. Para determinarmos onde o faz, basta lembrar que o ponto situado no eixo y tem abscissa nula, logo $y(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3$, isto é, o ponto no eixo y é $(0, 3)$.

Determinado o ponto onde a parábola corta o eixo y, podemos determinar um outro ponto $(4, 3)$ da parábola, simétrico a $(0, 3)$ em relação a reta $x = 2$ (eixo de simetria da parábola).

A.212 Fazer o esboço do gráfico da função $y = -x^2 + 4x - 4$.

Solução

Concavidade

Como $a = -1 < 0$ a parábola tem a concavidade voltada para baixo.

Zeros da função

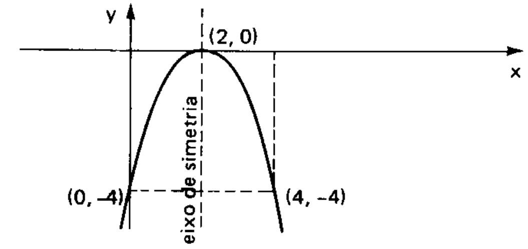
$-x^2 + 4x - 4 = 0 \implies x = 2$

A parábola admite um único ponto no eixo x que é $P = (2, 0)$.

Vértice

Considerando que a parábola admite um único ponto no eixo x, então esse ponto é o vértice da parábola.

Gráfico



A.213 Fazer o esboço do gráfico da função $y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$.

Solução

Concavidade

Como $a = \dfrac{1}{2} > 0$, a parábola tem a concavidade voltada para cima.

Zeros da função

$\dfrac{1}{2}x^2 + x + 1 = 0 \implies \Delta = -1 < 0 \implies \nexists$ raízes reais.

A parábola não tem pontos no eixo dos x.

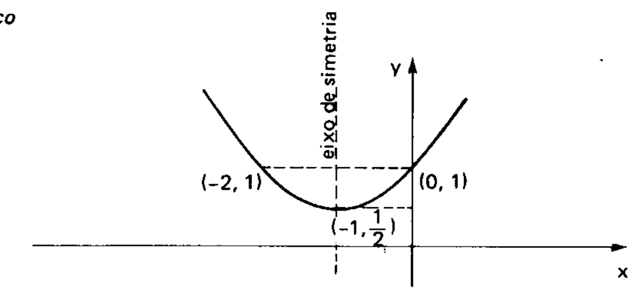
Vértice

Em $y = \dfrac{1}{2}x^2 + x + 1$; temos:

$a = \dfrac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 1$ e $\Delta = -1$.

Como $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1$ e $\dfrac{-\Delta}{4a} = \dfrac{1}{4 \cdot \frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$, o vértice é $V(-1, \frac{1}{2})$.

Gráfico



A.214 Construir o gráfico cartesiano das funções definidas em $\mathbb{R}$:

a) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = 4x^2 - 10x + 4$

c) $y = -x^2 + \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$

d) $y = -3x^2 + 6x - 3$

e) $y = x^2 - 3x + \dfrac{9}{4}$

f) $y = 3x^2 - 4x + 2$

g) $y = -x^2 + x - 1$

h) $y = -\dfrac{1}{2}x^2 - x - \dfrac{3}{2}$

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{para} \quad x < -2 \quad \text{ou} \quad x > 3 \\ f(x) = 0 & \text{para} \quad x = -2 \quad \text{ou} \quad x = 3 \\ f(x) < 0 & \text{para} \quad -2 < x < 3. \end{cases}$$

2º) $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$ apresenta $\Delta = 3^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 2 = 25$, logo $f(x)$ tem dois zeros reais e distintos:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + 5}{-4} = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 5}{-4} = 2$$

e, como $a = -2 < 0$, concluímos que

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para} \quad x < -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x > 2 \\ f(x) = 0 & \text{para} \quad x = -\frac{1}{2} \quad \text{ou} \quad x = 2 \\ f(x) > 0 & \text{para} \quad -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$

EXERCÍCIO

A.215 Estudar os sinais de cada uma das funções do exercício *A.214*.

XII. INEQUAÇÃO DO 2º GRAU

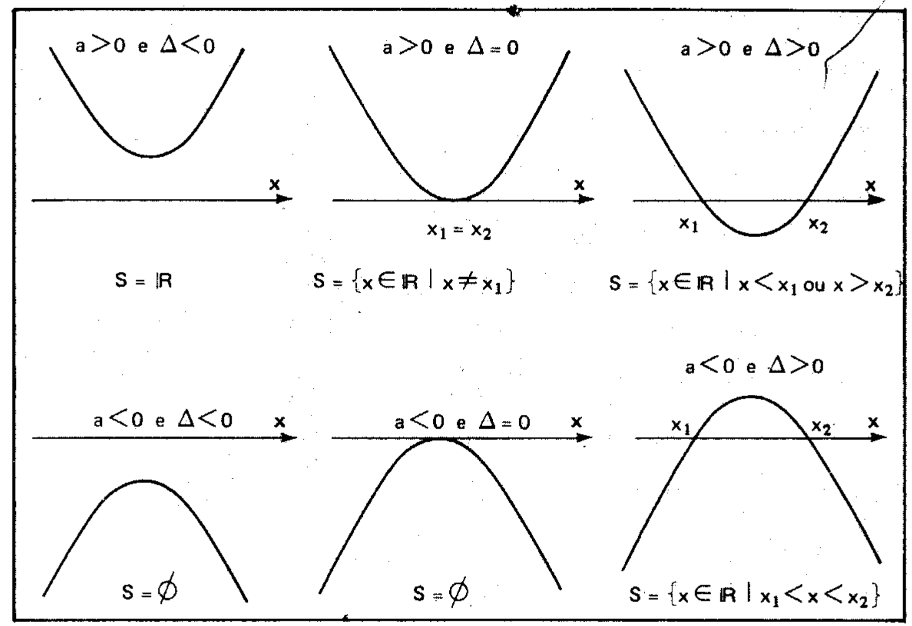
185. Se $a \neq 0$ as inequações $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geqslant 0$ e $ax^2 + bx + c \leqslant 0$ são denominadas *inequações do 2º grau.*

Resolver, por exemplo, a inequação

$$ax^2 + bx + c > 0$$

é responder à pergunta: "existe x real tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ seja positiva?"

A resposta a esta pergunta se encontra no estudo do sinal de $f(x)$, que pode, inclusive, ser feito através do gráfico da função. Assim, no nosso exemplo, dependendo de a e de Δ podemos ter uma das seis respostas seguintes:



EXERCÍCIOS

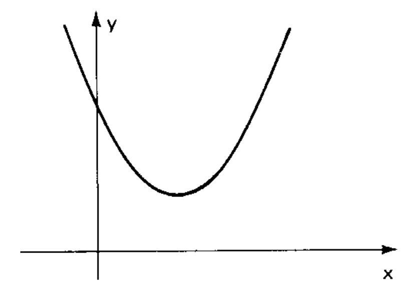
A.216 Resolver a inequação $x^2 - 2x + 2 > 0$.

Solução

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 2$, temos $a = 1 > 0$ e $\Delta = -4 < 0$ então $f(x) > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Como a inequação é $f(x) > 0$, vem:

$$S = \mathbb{R}.$$



A.217 Resolver a inequação $x^2 - 2x + 1 \leqslant 0$.

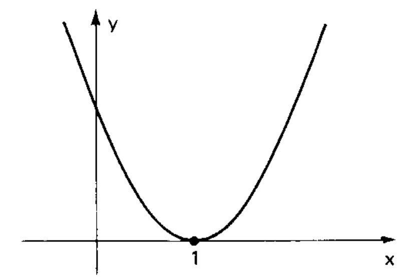
Solução

Considerando $f(x) = x^2 - 2x + 1$, temos $a = 1 > 0$, $\Delta = 0$ e o zero duplo $x = \frac{-b}{2a} = 1$, então

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \forall x \in \mathbb{R} - \{1\} \\ f(x) = 0 & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Como a inequação é $f(x) \leqslant 0$, vem:

$$S = \{1\}.$$

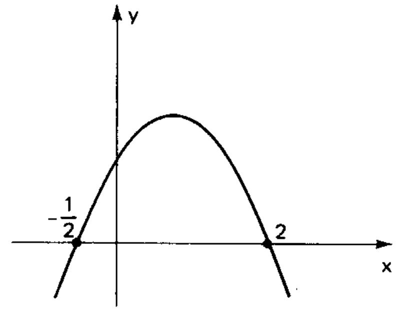


A.218 Resolver a inequação $-2x^2 + 3x + 2 \geqslant 0$.

Solução

Considerando $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$, temos $a = -2 < 0$, $\Delta = 25 > 0$ e os zeros $x_1 = -\frac{1}{2}$ e $x_2 = 2$, então

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{para } x < -\frac{1}{2} \text{ ou } x > 2 \\ f(x) = 0 & \text{para } x = -\frac{1}{2} \text{ ou } x = 2 \\ f(x) > 0 & \text{para } -\frac{1}{2} < x < 2 \end{cases}$$



Como a inequação é $f(x) \geqslant 0$, vem:

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -\frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 2\}$

A.219 Resolver as inequações em $\mathbb{R}$:

a) $x^2 - 3x + 2 > 0$

b) $-x^2 + x + 6 > 0$

c) $-3x^2 - 8x + 3 \leqslant 0$

d) $-x^2 + \frac{3}{2}x + 10 \geqslant 0$

e) $8x^2 - 14x + 3 \leqslant 0$

f) $4x^2 - 4x + 1 > 0$

g) $x^2 - 6x + 9 \geqslant 0$

h) $-4x^2 + 12x - 9 \geqslant 0$

i) $x^2 + 3x + 7 > 0$

j) $-3x^2 + 3x - 3 < 0$

k) $2x^2 - 4x + 5 < 0$

l) $-\frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} > 0$

A.220 Resolver a inequação $(x^2 - x - 2)(-x^2 + 4x - 3) > 0$ em $\mathbb{R}$.

Solução

Analisando os sinais dos fatores, temos:

		-1		2	
$f(x) = x^2 - x - 2$	+	0	−	0	+

		1		3	
$g(x) = -x^2 + 4x - 3$	−	0	+	0	−

Fazendo o quadro-produto, vem

		-1		1		2		3	
$f(x) = x^2 - x - 2$	+	0	−		−	0	+		+
$g(x) = -x^2 + 4x - 3$	−		−	0	+		+	0	−
$f(x) \cdot g(x)$	−	0	+	0	−	0	+	0	−

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1 \text{ ou } 2 < x < 3\}$

A.221 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $(1 - 4x^2) \cdot (2x^2 + 3x) > 0$

b) $(2x^2 - 7x + 6) \cdot (2x^2 - 7x + 5) \leqslant 0$

c) $(x^2 - x - 6) \cdot (-x^2 + 2x - 1) > 0$

d) $(x^2 + x - 6) \cdot (-x^2 - 2x + 3) \geqslant 0$

e) $x^3 - 2x^2 - x + 2 > 0$

f) $2x^3 - 6x^2 + x - 3 \leqslant 0$

A.222 (MAPOFEI-71) É dada a função $y = (2x^2 - 9x - 5)(x^2 - 2x + 2)$.

Determinar:

a) os pontos de intersecção do gráfico da função com o eixo das abscissas.

b) o conjunto dos valores de x para os quais $y \leqslant 0$.

A.223 Resolver a inequação $\frac{2x^2 + x - 1}{2x - x^2} \leqslant 0$ em $\mathbb{R}$.

Solução

Analisando os sinais do numerador e do denominador, temos:

		-1		$\frac{1}{2}$	
$f(x) = 2x^2 + x - 1$	+	0	−	0	+

		0		2	
$g(x) = 2x - x^2$	−	0	+	0	−

Fazendo o quadro-quociente, vem

		-1		0		$\frac{1}{2}$		2	
$f(x) = 2x^2 + x - 1$	+	0	−		−	0	+		+
$g(x) = 2x - x^2$	−		−	0	+		+	0	−
$\frac{f(x)}{g(x)}$	−	0	+		−	0	+		−

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } 0 < x \leqslant \frac{1}{2} \text{ ou } x > 2\}$

A.224 Resolver em $\mathbb{R}$ as inequações:

a) $\frac{4x^2 + x - 5}{2x^2 - 3x - 2} > 0$

b) $\frac{-9x^2 + 9x - 2}{3x^2 + 7x + 2} \leqslant 0$

c) $\frac{x^2 + 2x}{x^2 + 5x + 6} \geqslant 0$

d) $\frac{2 - 3x}{2x^2 + 3x - 2} < 0$

e) $\frac{x^2 + 3x - 16}{-x^2 + 7x - 10} \geqslant 1$

f) $\frac{2x^2 + 4x + 5}{3x^2 + 7x + 2} < -2$

g) $\frac{6x^2 + 12x + 17}{-2x^2 + 7x - 5} \geqslant -1$

h) $\frac{(x + 1)^3 - 1}{(x - 1)^3 + 1} > 1$