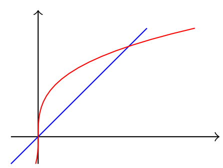
CM202 - Cálculo Diferencial e Integral II

22 de Dezembro de 2015 - Exame

Gabarito

1. $\boxed{20}$ Calcule a integral $\displaystyle\iint_R \cos\left(\frac{x}{y}\right) \mathrm{d}A$, onde R é a região no primeiro quadrante limitada pelas curvas $y = x$ e $x = y^3$.

Solution: As curvas são



A intersecção é quando $x = x^3$, isto é $x = 0$, e $x = 1$ no primeiro quadrante. Daí, $y = 0$ e $y = 1$, respectivamente. A região pode ser descrita como $0 \leq x \leq 1$ e $y \leq x \leq \sqrt[3]{y}$, mas isso não vai ajudar na integral. No entanto, podemos descrevê-la como $0 \leq y \leq 1$ e $x^3 \leq y \leq x$.

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_{x^3}^x \cos\left(\frac{y}{x}\right) \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 x \sin\left(\frac{y}{x}\right)\Bigg|_{x^3}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^1 x[\sin(1) - \sin(x^2)]\mathrm{d}x \\
&= \sin(1) \int_0^1 x \ \mathrm{d}x - \int_0^1 x \sin(x^2) \ \mathrm{d}x = \frac{\sin(1)}{2} - \int_0^1 \frac{\sin(u)}{2} \mathrm{d}u \\
&= \frac{\sin(1)}{2} + \frac{\cos(1) - \cos(0)}{2} = \frac{\sin(1) + \cos(1) - 1}{2}
\end{aligned}$$

2. $\boxed{20}$ Encontre os três pontos críticos de $f(x, y) = (xy - 1)^2 + (y - x)^2$ e classifique-os.

Solution: Buscamos (x, y) tal que

$$\nabla f(x, y) = \langle 2y(xy - 1) - 2(y - x), 2x(xy - 1) + 2(y - x)\rangle = 0$$

Somandos as duas equações obtemos

$$2(y + x)(xy - 1) = 0.$$

Daí $y = -x$ ou $xy = 1$. Se $y = -x$, na primeira equação temos

$$2x(x^2 + 1) = 0.$$

Então $x = 0$, e portanto $y = 0$. Se $xy = 1$, na primeira equação temos

$$-2(y - x) = 0,$$

ou seja $y = x$. Como $xy \neq 0$, então $x, y \neq 0$, logo $y = \frac{1}{x}$. Daí

$$\frac{1}{x} = x \qquad \Rightarrow \qquad x^2 = 1.$$

Logo $x = \pm 1$, e então $y = \pm 1$. Então os pontos críticos são $(0,0)$, $(1,1)$ e $(-1,-1)$.

As segundas derivadas de f são

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) &= 2y^2 + 2 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) &= 4xy - 4 \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) &= 2x^2 + 2,
\end{aligned}$$

e $D(x,y) = 4(x^2+1)(y^2+1) - 4(2xy-2)^2$ Daí,

$$\begin{aligned}
D(0,0) &= -12 < 0 \qquad \text{Ponto de sela} \\
D(1,1) &= 12 < 0, \qquad f_{xx}(1,1) = 4 > 0, \qquad \text{Ponto de sela} \\
D(-1,-1) &= 12 < 0, \qquad f_{xx}(-1,-1) = 4 > 0, \qquad \text{Ponto de sela}
\end{aligned}$$

3. $\boxed{20}$ Calcule $I = \iiint_E \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}+1} \, \mathrm{d}V$, onde E é a região limitada pela esfera de raio 1.

Solution: Em coordenadas esféricas, temos $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$, e a esfera de raio 1 nos dá $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $0 \leq \varphi \leq \pi$. Daí,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \frac{1}{\rho^3+1} \rho^2 \sin\varphi \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi} \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \frac{\rho^2}{\rho^3+1} \mathrm{d}\rho \\
&= -\cos\varphi \Big|_0^{\pi} \theta \Big|_0^{2\pi} \int_1^2 \frac{1}{3u} \mathrm{d}u = \frac{4\pi}{3} \ln u \Big|_1^2 = \frac{4\pi}{3} \ln 2
\end{aligned}$$

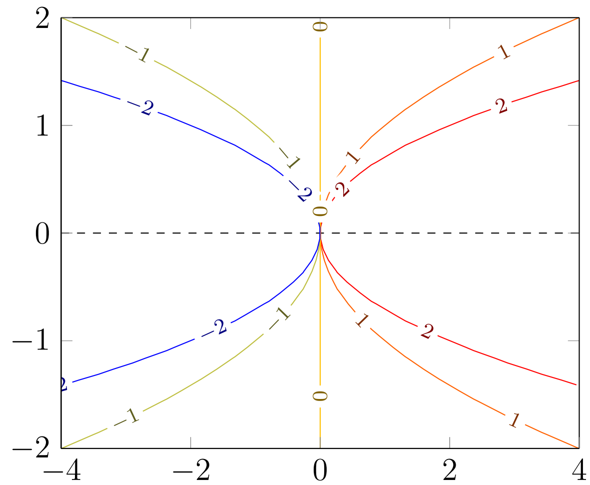
4. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2}$

(a) $\boxed{10}$ Desenhe as curvas de nível dessa função.

Solution: O domínio dessa função é $y \neq 0$. Considerando isso, as curvas de nível do nível k são tais que

$$f(x,y) = \frac{x}{y^2} = k \qquad \Rightarrow \qquad x = ky^2.$$

isto é, parábola de vértice na origem, com concavidade k, a não ser quando $k = 0$, que resulta na reta $x = 0$.



(b) $\boxed{10}$ Calcule $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}$ onde $x(t) = t^2 + 1$ e $y(t) = -t^2$.

Solution: Temos $\nabla f(x, y) = \left\langle \dfrac{1}{y^2}, -\dfrac{2x}{y^3} \right\rangle$, $x'(t) = 2t$ e $y'(t) = -2t$, e $x(1) = 2$ e $y(1) = -1$. Agora temos

$$\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]_{t=1} = \left[\frac{1}{y^2}(2t) - \frac{2x}{y^3}(-2t)\right]_{t=1} = \frac{2}{(-1)^2} + \frac{2 \times 2}{(-1)^3}2 = -6$$

5. $\boxed{20}$ Calcule $\displaystyle\iint_R (x - y)^2 \sin\left(\frac{x + y}{2}\right) \mathrm{d}A$ onde R é o paralelogramo de vértices $(0, 0)$, (π, π), $(0, 2\pi)$ e $(-\pi, \pi)$.

Solution: Vamos fazer a mudança de variável $x = u - v$ e $y = u + v$, obtendo

$$u = \frac{x + y}{2} \qquad v = \frac{y - x}{2}.$$

Daí,

(x, y)	$(0, 0)$	(π, π)	$(0, 2\pi)$	$(-\pi, \pi)$
(u, v)	$(0, 0)$	$(\pi, 0)$	(π, π)	$(0, \pi)$

obtendo $R = \{(u, v) \mid 0 \leq u \leq \pi, 0 \leq v \leq \pi\}$. O Jacobiano é 2, e a integral vira

$$I = \int_0^\pi \int_0^\pi (2v)^2 \sin u \; 2\mathrm{d}u\mathrm{d}v = 8 \int_0^\pi v^2 \mathrm{d}v \int_0^\pi \sin u \; \mathrm{d}u = 8 \left.\frac{v^3}{3}\right|_0^\pi \left.(-\cos u)\right|_0^\pi$$
$$= 8\frac{\pi^3}{3}(1 + 1) = \frac{16\pi^3}{3}$$

Também podemos fazer com a mudança direta $x = \pi u - \pi v$ e $y = \pi u + \pi v$ chegando direto no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$, como feito em sala.

6. $\boxed{20}$ Dê um contra-exemplo para a seguinte afirmação:

"Se $\lim_{t \to 0} f(\alpha t, \beta t) = 0$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, então $\lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x, y) = 0$".

Solution: Uma função é a clássica $f(x, y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2}$. Temos

$$\lim_{t \to 0} f(\alpha t, \beta t) = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha^2 \beta t^3}{\alpha^4 t^4 + \beta^2 t^2} = \lim_{t \to 0} \frac{\alpha^2 \beta t}{\alpha^4 t^2 + \beta^2}.$$

No caso específico de $\beta = 0$, a fração já se anula. Caso contrário, o limite dá $\dfrac{0}{\beta^2} = 0$. No entanto,

$$\lim_{t \to 0} f(t, t^2) = \lim_{t \to 0} \frac{t^2 t^2}{t^4 + t^4} = \lim_{t \to 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

então o limite não existe.