TopAL - Tópicos de Álgebra Linear
Lista 2

1. Se $\dim(V) = n$, então todo subconjunto de V com mais de n vetores é L.D. e nenhum subconjunto de V com menos de n vetores pode ser base.

2. Seja $S \subset V$ um conjunto L.I. e $v \in V - [S]$. Então $S \cup \{v\}$ é L.I..

3. Seja W subespaço de V. Se V tem dimensão finita, então W tem dimensão finita e $\dim(W) \leq \dim(V)$.

4. Se o conjunto $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ é L.I. em V então $R = \{v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_3 + v_1\}$ também é L.I. sobre V.

5. Seja $T : V \to W$ uma aplicação linear. Mostre que
   (a) Mostre que $\mathrm{Nu}(T)$ é subespaço de V.
   (b) Mostre que $\mathrm{Im}(T)$ é subespaço de W.
   (c) Mostre que T é injetiva se, e somente se, $\mathrm{Nu}(T) = \{0\}$.
   (d) Seja $T : X \to Y$ uma aplicação linear bijetora (isomorfismo). Mosre que a inversa $T^{-1} : Y \to X$ é linear.

6. Mostre que todo espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$ é isomorfo a $\mathbb{K}^n$ e conclua que dois espaços quaisquer sobre um mesmo corpo são sempre isomorfos.

7. Mostre que S é uma base de V se, e somente se, todo elemento de V pode ser escrito de maneira única como combinação linear de elementos de S.

8. Se $\dim(V) = n$ e $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$ for L.I., então S é base de V.

9. Se $\dim(V) = n$ e $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \subset V$ gera V, então S é base de V.

10. Seja $\mathbb{K}^\infty$ o conjunto de todas as sequências $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots)$, com $\xi_j \in \mathbb{K}$ e operações de adição e multiplicação por escalar usuais.
    (a) Mostre que $\mathbb{K}^\infty$ é um espaço vetorial.
    (b) Considere o conjunto $\mathbb{K}_0^\infty \subset \mathbb{K}^\infty$, constituido por todas as sequências $\xi = (\xi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ tais que $\xi_j = 0$, para todo $j \in \mathbb{N}$, exceto para um número finito de índices. Mostre que $\mathbb{K}_0^\infty$ é subespaço de $\mathbb{K}^\infty$.
    (c) Mostre que $\mathbb{K}_0^\infty$ é isomorfo a $\mathbb{K}[t]$ (espaço vetorial dos polinômios com coeficiente em $\mathbb{K}$).

11. Sejam $T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $S \in \mathcal{L}(W, U)$. Mostre que $S \circ T \in \mathcal{L}(V, U)$.

12. Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$ um isomorfismo. Mostre que a inversa $T^{-1} \in \mathcal{L}(W, V)$.

13. Mostre que todo espaço vetorial de dimensão n é isomorfo aa $\mathbb{K}^n$. Conclua que dois espaços de dimensão n sobre o mesmo corpo são sempre isomorfos.

14. $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{C}^n$ são isomorfos?

15. Seja $S = \{A \in M_{m \times m}(\mathbb{K}); A^t = A\}$ o conjunto das matrizes simétricas e $A = \{A \in M_{m \times m}(\mathbb{K}); A^t = -A\}$ o conjunto das matrizes antissimétricas.
    (a) Mostre que A e S são subespaços de $M_{m \times m}(\mathbb{K})$.

(b) Prove que $M_{m\times m}(\mathbb{K}) = S \oplus A$.

16. Considere os polinômios $p_1(t) = 2t^3 + 1$ e $p_2(t) = t^3 - t$ em $\mathbb{K}_3[t]$.
    (a) Descreva $[p_1, p_2]$.
    (b) Mostre que $S = \{p_1, p_2\}$ é L.I..
    (c) Obtenha uma base de $\mathbb{K}_3[t]$ completando o conjunto S.
    (d) Encontre a representação de cada um dos vetores de S nessa base,
    (e) Seja $q(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$ um polinômio de $\mathbb{K}_3[t]$. Encontre a representação de $q(t)$ na base encontrada.

17. Defina $T : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}_3[t]$ como

$$T\left(a_0 + \sum_{j=1}^{m} a_j t^j\right) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3.$$

    (a) Mostre que T é linear.
    (b) Determine $\mathrm{Nu}(T)$ e $\mathrm{Im}(T)$.
    (c) Encontre uma base para o núcleo e imagem de T.
    (d) O Teorema do núcleo e da imagem pode ser aplicado nesse exemplo? Justifique.

18. Uma projeção é uma aplicação linear $\Pi : V \to V$ tal que $\Pi \circ \Pi = \Pi$. Seja $\Pi : V \to V$ uma projeção:
    (a) Prove que $V = \mathrm{Nu}(\Pi) \oplus \mathrm{Im}(\Pi)$.
    (b) Sejam $W_1, W_2 \subset V$ subespaços tais que $V = W_1 \oplus W_2$. Se $x = w_1 + w_2 \in W_1 \oplus W_2$, mostre que a aplicação $\Pi_1 : V \to W_1$ definida por $\Pi_1(x) = w_1$ é uma projeção.

19. Prove que as seguintes afirmações a respeito de $\Pi_1, \Pi_2 : V \to V$ são equivalentes:
    (a) $\Pi_1 + \Pi_2$ é projeção;
    (b) $\Pi_1\Pi_2 + \Pi_2\Pi_1 = 0$;
    (c) $\Pi_1\Pi_2 = \Pi_2\Pi_1 = 0$.

20. Sejam $S, T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $R \in \mathcal{L}(W, U)$. Mostre que
    (a) $\mathrm{posto}(S + T) \leq \mathrm{posto}(S) + \mathrm{posto}(T)$.
    (b) $\mathrm{posto}(RS) \leq \min\{\mathrm{posto}(S), \mathrm{posto}(T)\}$.