Cálculo Diferencial e Integral I - Turma J

07 de Julho de 2015

Questão 1 80

Calcule:

(a) (10 points) A derivada de $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x + 1$

Solution: $f'(x) = 3x^2 + 8x - 3$.

(b) (10 points) A integral $\int_0^1 (x^3 + 4x^2 - 3x + 1)\mathrm{d}x$

Solution:

$$\int_0^1 (x^3 + 4x^2 - 3x + 1)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{4x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x\right]_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{4}{3} - \frac{3}{2} + 1$$
$$= \frac{3 + 16 - 18 + 12}{12} = \frac{13}{12}.$$

(c) (10 points) O limite $\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$

Solution: $\lim_{x\to 1} x^2 - 3x + 2 = 0$ e $\lim_{x\to 1} x^2 - 1 = 0$. Como são polinômios, então $x^2 - 3x + 2 = (x-2)(x-1)$ e $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$. Daí,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-2}{x+1} = \frac{-1}{2}.$$

(d) (10 points) $\int xe^x \mathrm{d}x$

Solution: Por partes, $u = x$ e $\mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x$, então

$$\int xe^x\mathrm{d}x = xe^x - \int e^x\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C.$$

(e) (10 points) A derivada de $x^3 \sin x$

Solution: Regra do produto:

$$[x^3 \sin x]' = [x^3]' \sin x + x^3[\sin x]' = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$$

(f) (15 points) $\int 3x^2(x^3 - 1)^4\mathrm{d}x$

Solution: Substituição $u = x^3 - 1$, daí $\mathrm{d}u = 3x^2\mathrm{d}x$. Então

$$\int 3x^2(x^3-1)^4\mathrm{d}x = \int u^4\mathrm{d}u = \frac{u^5}{5} + C = \frac{(x^3-1)^5}{5} + C.$$

(g) (15 points) A derivada de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

Solution: Regra da cadeia. $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Questão 2 .... $\boxed{15}$

Encontre os pontos críticos (máximos, mínimos e pontos de sela) da função

$$f(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + 3x^2 + 1,$$

e classifique-os.

Solution: Pontos críticos: $f'(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 5x^2 + 6x = 0$. Isto é $x^3 - 5x^2 + 6x = x(x-3)(x-2) = 0$. Então $x = 0$, $x = 2$ ou $x = 3$ são os pontos críticos. $f''(x) = 3x^2 - 10x + 6$. Daí, $f''(0) = 6 > 0$ implica que $x = 0$ é minimizador local. $f''(2) = 3\times 4 - 20 + 6 = -2 < 0$ implica que $x = 2$ é maximizador local. $f''(3) = 3\times 9 - 30 + 6 = 3 > 0$ implica que $x = 3$ é minimizador local.

Questão 3 .... $\boxed{15}$

Uma população cresce numa taxa de $\frac{1}{3}e^t$ por dia. Sabendo que a população inicial é de 10 indivíduos, qual a população 5 dias depois? (Dica: Use $e^5 \approx 148$).

Solution: Para encontrar a variação do dia inicial ao sexto dia vamos calcular a integral da taxa de variação:

$$\text{Variação} = \int_0^5 \frac{1}{3}e^t = \frac{1}{3}e^t\Big|_0^5 = \frac{1}{3}(e^5 - e^0) \approx \frac{148-1}{3} = \frac{147}{3} = 49.$$

Sendo que a população inicial é 10, então o número de indivíduos é $10 + 49 = 59$.

Derivadas

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$

Integrais

- $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln |x| + C$

Regras de derivação

- Regra do produto
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
- Regra do quociente
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
- Regra da cadeia
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))g'(x)$$

Regras e técnicas de integração

- Regra da substituição
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u$$
- Integral por partes
$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{ou} \qquad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$