CM 005 Álgebra Linear: Prova 1

22 de Setembro de 2016

Orientações gerais

1) As soluções devem conter o desenvolvimento e ou justificativa.
   Questões sem justificativa ou sem raciocínio lógico coerente não pontuam.
2) A interpretação das questões é parte importante do processo de avaliação.
   Organização e capricho também serão avaliados.
3) Não é permitido a consulta nem a comunicação entre alunos.

Questão 1 .... $\boxed{20}$

Para o sistema linear dado, encontre o conjunto solução em função do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & \alpha x_3 & = & \alpha^2+1. \end{array}$$

Solution: Usamos o método de eliminação de Gauss, para a matriz aumentada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & 3 & 2 & | & 5 \\ 2 & 3 & \alpha & | & \alpha^2+1. \end{pmatrix}$$

Assim, depois de uma série de operações elementares sobre as linhas obtemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-2 & | & \alpha^2-4. \end{pmatrix}$$

O sistema associado à dita matriz é

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & & & = & 1 \\ & & & & (\alpha-2)x_3 & = & \alpha^2-4. \end{array}$$

Da última linha temos que o valor de x_3 vai depender do valor de α. Temos os seguintes casos:

1. Se $\alpha \neq 2$. Nesse caso $x_3 = (\alpha^2-4)/(\alpha-2) = \alpha+2$. Logo, substituindo temos que $x_2 = 1$ e $x_1 = -1-\alpha$. Por tanto o conjunto solução é $\{\bar{x} := (-1-\alpha \;\; 1 \;\; \alpha+2)^T\}$, se $\alpha \neq 2$.

2. Se $\alpha = 2$. Nesse caso, como $\alpha^2 - 4 = 0$, qualquer valor para x_3 serve (x_3 é variável livre). Por exemplo para $x_3 = \beta \in \mathbb{R}$, temos que $x_2 = 1$ e $x_1 = 1-\beta$ (com a escolha de $x_3 = \beta$). Assim, temos que o conjunto solução é dado por $\{\bar{x} := (1-\beta \;\; 1 \;\; \beta)^T : \beta \in \mathbb{R}\}$, para $\alpha = 2$.

Questão 2 .... $\boxed{25}$

(a) (20 points) Utilize o método de Gauss-Jordan para calcular a inversa de A.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Solution: Primeiro montamos o matriz aumentada. Assim temos

$$(A|I) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & | & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O método de Gauss Jordan é usar operações elementares sobre linhas para a matriz anterior até chegar a uma matriz em *forma escada reduzida*. Calculando temos que

$$(I|B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Logo a inversa de A é a matriz do lado direito de $(I|B)$, i.e.,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) (5 points) Sendo A a matriz do item anterior, ache $\bar{x} \in \mathbb{R}^3$ tal que $A\bar{x} = \bar{b}$ onde $\bar{b} = (0\ \ 2\ \ 1)^T$.

Solution: Como $A\bar{x} = \bar{b}$, temos que $\bar{x} = A^{-1}\bar{b}$. Fazendo a multiplicação, obtemos que

$$\bar{x} = A^{-1}\bar{b} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Outra alternativa é usar o método de Gauss, aplicado à matriz $(A|\bar{b})$. Ambos métodos fornecem o mesmo resultado.

Questão 3 .... $\boxed{25}$

Sejam A e B duas matrizes em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$.

(a) (20 points) Verifique que o seguinte conjunto é um *subespaço vetorial* de $M_{n\times n}(\mathbb{R})$,

$$W_1 := \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : AX + XB = \bar{0}\}$$

onde $\bar{0}$ é a matriz em $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ com todos os seus componentes iguais a zero.

Solution: Para que o conjunto $W_1 \neq \emptyset$ seja um subespaço vetorial devemos verificar que

1. *$X + Y \in W_1$ para todo $X \in W_1$ e $Y \in W_1$.*

   Considere X e Y em W_1. Vejamos que $X + Y \in W_1$, para isso é suficiente mostrar que $A(X + Y) + (X + Y)B = \bar{0}$.

   Assim, calculando

$$\begin{aligned} A(X+Y) + (X+Y)B &= (AX + AY) + (XB + YB) = AX + XB + AY + YB \\ &= (AX + XB) + (AY + YB) = \bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \end{aligned}$$

   Na última linha temos usado que $AX + XB = \bar{0}$ e $AY + YB = \bar{0}$, já que X e Y pertencem a W_1. Portanto, $A(X + Y) + (X + Y)B = \bar{0}$. Logo, $X + Y \in W_1$.

2. $\lambda X \in W_1$ *para todo* $X \in W_1$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Tome $X \in W_1$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Vejamos que $\lambda X \in W_1$. Nessa caso é suficiente verificar que $A(\lambda X) + (\lambda X)B = \bar{0}$.

   Calculando temos que $A(\lambda X) + (\lambda X)B = \lambda(AX + XB) = \bar{0}$ onde na última linha usamos que $AX + XB = \bar{0}$. Logo concluímos que $A(\lambda X) + (\lambda X)B = \bar{0}$ e $\lambda X \in W_1$.

(b) (5 points) Constate que $W_2 := \left\{X \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : (A + X)^2 = X^2 + A^2\right\}$ é um subespaço vetorial. *Dica:* Use o item anterior.

Solution: Primeiro perceba que $(A+X)^2 = (A+X)(A+X) = A^2+AX+XA+X^2$. Assim, $(A + X)^2 = X^2 + A^2$ vale se e somente se $AX + XA = \bar{0}$. Então, W_2 pode ser escrito como

$$W_2 = \{X \in M_{n\times n}(\mathbb{R}) : AX + XA = \bar{0}\}$$

Usando o item anterior, concluímos que W_2 é um subespaço vetorial.

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Encontre o núcleo da matriz A em função dos parâmetros α e β.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & \alpha & \beta \\ 1 & 0 & \alpha & 0 \\ 1 & 1 & \alpha & \beta \\ 1 & 1 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$$

Dica: Analise cada caso possível, dependendo do valor de α e β.

Solution: Primeiro perceba que o núcleo da A é igual ao conjunto solução do sistema linear $A\bar{x} = \bar{0}$, i.e. $Nuc(A) := \{x \in \mathbb{R}^4 : A\bar{x} = \bar{0}\}$. Assim, usaremos o método de Gauss para resolver $A\bar{x} = \bar{0}$. Fazendo operações elementares temos

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha/2 & \beta/2 & |0 \\ 0 & 1 & -\alpha/2 & \beta/2 & |0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & |0 \\ 0 & 0 & 0 & -\beta & |0 \end{pmatrix}$$

Logo, o sistema associado é

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & (\alpha/2)x_3 & + & (\beta/2)x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & - & (\alpha/2)x_3 & + & (\beta/2)x_4 & = & 0 \\ & & & & \alpha x_3 & + & \beta x_4 & = & 0 \\ & & & & & - & \beta x_4 & = & 0. \end{array}$$

Dependendo dos valores de α e β, o sistema terá diferentes conjuntos solução. Temos o seguintes casos:

1. Se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$. O sistema associado é

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & + & x_2 & = & 0 \\ & & x_2 & = & 0 \end{array}$$

   Assim, $x_1 = x_2 = 0$ com x_3, x_4 variáveis livres. Então, para qualquer escolha de x_3 e x_4, por exemplo, $x_3 = t \in \mathbb{R}$, $x_4 = s \in \mathbb{R}$, o vetor com componentes $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$ e $x_4 = s$

é solução. Assim, o conjunto solução (que é o conjunto formado por todas as soluções) é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ s \end{pmatrix} : \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R} \right\}$$

2. Se $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$. O sistema associado é

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & (\beta/2)x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & (\beta/2)x_4 & = & 0 \\ & & & & \beta x_4 & = & 0 \end{array}$$

Assim, como $\beta \neq 0$ temos que $x_4 = 0$. Substituindo obtemos que $x_1 = x_2 = 0$ com x_3 variável livre. Nesse caso, o conjunto solução é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \\ 0 \end{pmatrix} : \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

3. Se $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$. O sistema associado é

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & x_2 & + & (\alpha/2)x_3 & = & 0 \\ & & x_2 & + & -(\alpha/2)x_3 & = & 0 \\ & & & & \alpha x_3 & = & 0. \end{array}$$

Assim, como $\alpha \neq 0$ temos que $x_3 = 0$. Substituindo obtemos que $x_1 = x_2 = 0$ com x_4 variável livre. Nesse caso, o conjunto solução é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} : \quad t \in \mathbb{R} \right\}.$$

4. Se $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$. O sistema associado é

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & x_2 & + & (\alpha/2)x_3 & + & (\beta/2)x_4 & = & 0 \\ & & x_2 & + & -(\alpha/2)x_3 & + & (\beta/2)x_4 & = & 0 \\ & & & & \alpha x_3 & + & \beta x_4 & = & 0 \\ & & & & & - & \beta x_4 & = & 0. \end{array}$$

Como $\beta \neq 0$ temos que $x_4 = 0$. Substituindo obtemos $\alpha x_3 = 0$ que implica que $x_3 = 0$ (já que $\alpha \neq 0$). Finalmente, $x_1 = 0$ e $x_2 = 0$. Nesse caso, o conjunto solução é

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Questão 5 .... $\boxed{20}$

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz invertível tal que $A^{-1} = -A$. Mostre que a matriz $I + A$ é invertível.

Solution: Temos duas formas

1. Para mostrar que $I+A$ é invertível, será suficiente mostra que a única solução de $(I+A)\bar{x} = \bar{0}$ é o vetor nulo $\bar{x} = \bar{0}$. Seja $\bar{x}$ uma solução de $I + A$. Assim,

$$\bar{x} + A\bar{x} = (I + A)\bar{x} = \bar{0} \tag{1}$$

Multiplicando a equação (1) por A^{-1} temos que $A^{-1}(\bar{x} + A\bar{x}) = \bar{0}$

$$\begin{aligned} A^{-1}(\bar{x} + A\bar{x}) &= \bar{0} \\ A^{-1}\bar{x} + A^{-1}A\bar{x} &= \bar{0} \\ A^{-1}\bar{x} + \bar{x} &= \bar{0} \text{ (aqui usamos } A^{-1}A = I) \\ -A\bar{x} + \bar{x} &= \bar{0} \text{ (aqui usamos } A^{-1} = -A) \end{aligned}$$

Assim, temos que $\bar{x} + A\bar{x} = \bar{0}$ e $\bar{x} - A\bar{x} = \bar{0}$. Somando ambas equações, temos que $\bar{x} = \bar{0}$. Portanto, a matriz $I + A$ é invertível.

2. Para mostrar que $I + A$ é invertível, é suficiente achar uma matriz $B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $(I + A)B = I$. Observe que

$$I + A = A^{-1}A + A = -A^2 + A = A(I - A) \text{ (temos usamos } A^{-1}A = I \text{ e } A^{-1} = -A \text{)}$$

Logo, $(I + A)B = A(I - A)B = I$. Multiplicando por a última equação por A^{-1} concluímos que $(I - A)B = A^{-1} = -A$. Somando as equações $(I + A)B = I$ e $(I - A)B = -A$ vemos que $2B = (I - A)$. Assim, $B = 1/2(I - A)$. Como consequência $(I + A)$ é invertível cuja inversa é dada por $1/2(I - A)$.