CM202 - Lista de Exercício 3

1. Calcule as integrais abaixo

   (i) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2\int_0^{x+z} 6xz \, \mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$

   (ii) $\displaystyle\int_0^1\int_x^{2x}\int_0^{y} 2xyz \, \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x$

   (iii) $\displaystyle\int_0^3\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-z^2}} ze^y \, \mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y$

   (iv) $\displaystyle\int_0^1\int_0^z\int_0^{y} ze^{-y^2} \, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

   (v) $\displaystyle\iiint_E 2x \, \mathrm{d}V$, onde $E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq y \leq 2, 0 \leq x \leq \sqrt{4-y^2}, 0 \leq z \leq y\}$.

   (vi) $\displaystyle\iiint_E yz\cos(x^5) \, \mathrm{d}V$, onde $E = \{(x,y,z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, x \leq z \leq 2x\}$.

   (vii) $\displaystyle\iiint_E 6xy \, \mathrm{d}V$, onde E é a região abaixo do plano $z = 1 + x + y$ e acima da região do plano xy limitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$, e $x = 1$.

   (viii) $\displaystyle\iiint_E y \, \mathrm{d}V$, onde E é limitado pelos planos $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ e $2x+2y+z = 4$.

   (ix) $\displaystyle\iiint_E x^2e^y \, \mathrm{d}V$, onde E é limitado pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.

2. Calcule as integras triplas abaixo à esquerda para cada região à direita.

   (i) $\displaystyle\iiint_R 1 \, \mathrm{d}V$

   (ii) $\displaystyle\iiint_R (x+y+z) \, \mathrm{d}V$

   (iii) $\displaystyle\iiint_R xyz \, \mathrm{d}V$

   (iv) $\displaystyle\iiint_R (x^2+y^2+z^2) \, \mathrm{d}V$

   (i) O retângulo $[0,1] \times [1,2] \times [0,2]$.

   (ii) O tetraedro de vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,0)$ e $(1,1,1)$.

   (iii) A região no primeiro octante limitada pelo plano $x + 2y + 3z = 6$.

   (iv) A região entre os parabolóides $z = 1 + x^2 + y^2$ e $z = -2x^2 - y^2$, limitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = x + 1$.

3. Use a integral tripla para determinar o volume do sólido dado.

   (i) O tetraedro limitado pelos planos coordenados e o plano $2x + y + z = 4$.

   (ii) O sólido limitado pelo cilindro $y = x^2$ e pelos planos $z = 0$, $z = 4$, e $y = 9$.

   (iii) O sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$ e pelos planos $y + z = 5$ e $z = 1$.

   (iv) O sólido limitado pelo parabolóide $x = y^2 + z^2$ e pelo plano $x = 16$.

4. Faça o esboço do sólido cujo volume é dado pela integral e calcule essa integral.

(i) $\displaystyle\int_0^4 \int_0^{2\pi} \int_r^4 r \, \mathrm{d}z\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \int_0^2 \int_0^{9-r^2} r \, \mathrm{d}z\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

(iii) $\displaystyle\int_0^{\pi/6} \int_0^{\pi/2} \int_0^3 \rho^2 \sin\phi \, \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$

(iv) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_1^2 \rho^2 \sin\phi \, \mathrm{d}\phi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta$

5. Calcule as integrais abaixo

   (i) $\displaystyle\iiint_E \sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}V$, onde E é a região contida dentro do cilindro $x^2+y^2=16$ e entre os planos $z=-5$ e $z=4$.

   (ii) $\displaystyle\iiint_E (x^2+y^2+z^2) \, \mathrm{d}V$, onde E é a esfera de raio 1.

   (iii) $\displaystyle\iiint_E (x^3+xy^2) \, \mathrm{d}V$, onde E é o sólido do primeiro octante que está abaixo do parabolóide $z=1-x^2-y^2$.

   (iv) $\displaystyle\iiint_E (x^2+y^2) \, \mathrm{d}V$, onde E é a esfera de raio 1 limitada ao primeiro octante.

   (v) $\displaystyle\iiint_E \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}V$, onde E é a região dentro da esfera de raio 1, com $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

   (vi) $\displaystyle\iiint_E \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \, \mathrm{d}V$, onde E é a região da casca esférica de raios 1 a 2, fora do cone $z^2=x^2+y^2$.

   (vii) $\displaystyle\iiint_E z \, \mathrm{d}V$, onde E é a região da região entre as esferas $x^2+y^2+z^2=1$ e $x^2+y^2+z^2=4$ acima do plano xy.

6. Usando uma mudança de variável em três dimensões, calcule o volume do elipsóide $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

7. Seja R a região no plano xy entre duas funções $f(x)$ e $g(x)$, no intervalo $[a,b]$, onde $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

   (i) Obtenha o volume do sólido obtido pela revolução dessa região em torno do eixo x.

   (ii) Obtenha o volume do sólido obtido pela revolução dessa região em torno do eixo y.