Estudo da Convergência do Método de Newton para duas funções simples

Abel Soares Siqueira

1 de Julho de 2015

Introdução

O método de Newton é definido por

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}.$$

Então, vamos definir a função $\varphi(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

Convergência do Método de Newton para $f(x) = x^2 - 1$

Considere a função $f(x) = x^2 - 1$. Temos

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{x^2 + 1}{2x}.$$

Por outro lado,

$$\varphi(x) - 1 = \frac{(x-1)^2}{2x}.$$

Desse modo, se $x > 0$, então $\varphi(x) = \dfrac{(x-1)^2}{2x} + 1 \geq 1$. Ou seja, se $x_0 > 0$, $x_{k+1} \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$. Além disso, se $x > 1$, então $x^2 - 1 > 0$, e portanto

$$\varphi(x) = x - \frac{x^2 - 1}{2x} < x.$$

Em outras palavras, se uma iteração e positiva, a próxima é maior que 1, e se uma iteração é maior que 1, então a próxima diminui de valor. Então, se uma sequência está diminuindo de valor mas é limitada inferiormente, ela tem que convergir. Daí, ela vai convergir para a solução de $\phi(x) = x$, que é a mesma que a solução de $f(x) = 0$. Como $-1 < 0$ não pode ser solução, então a sequência converge para 1.

Alternativamente, veja que

$$\begin{aligned} \varphi(x) - 1 &= \frac{(x-1)^2}{2x} = \frac{1}{2}\frac{x-1}{x}(x-1) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)(x-1). \end{aligned}$$

Para $x > 0$, $1 - \frac{1}{x} < 1$, e então existe $C = \frac{1}{2}$ tal que

$$\varphi(x) - 1 < C(x-1), \qquad x > 1.$$

Quando $x > 1$, então $|\varphi(x) - 1| < C\,|x-1|$. Desse modo, temos

$$|x_{k+1} - 1| \leq C\,|x_k - 1|\,, \qquad k > 0.$$

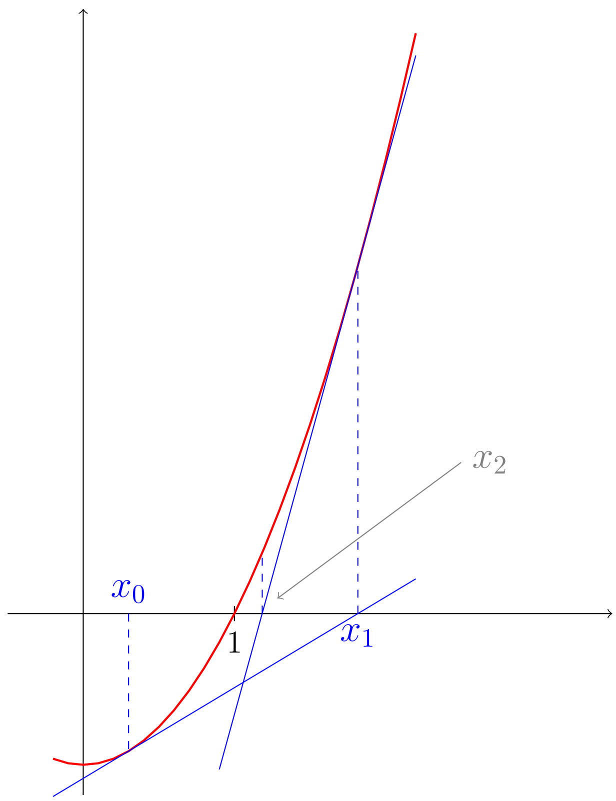
Portanto, a sequência converge para 1.

Note ainda que, se $x > 1$, então $\frac{1}{x} < 1$, e portanto

$$|\varphi(x) - 1| = \frac{(x-1)^2}{2x} < \frac{1}{2}(x-1)^2.$$

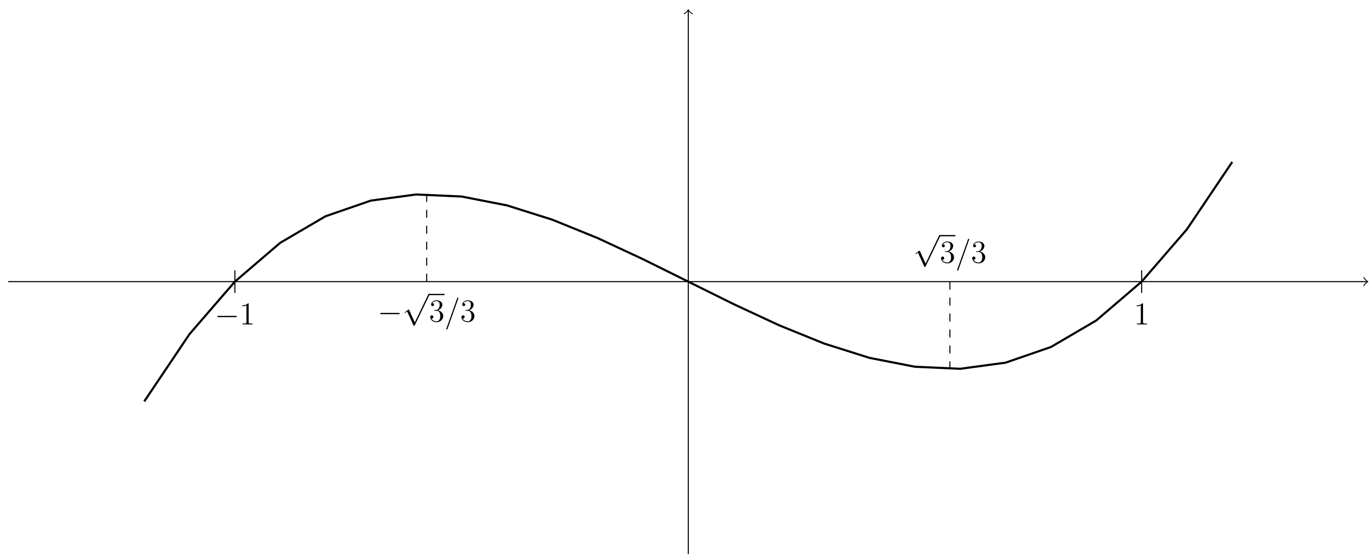
Isso mostra que a convergência é quadrática.

Podemos mostrar, analogamente, a convergência para -1 se $x_0 < 0$.



Convergência do Método de Newton para $f(x) = x^3 - x$

Para a função $f(x) = x^3 - x$ existe uma análise semelhante que à do método de Newton. Veja o gráfico de f abaixo.



Note que a derivada de f se anula em $x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Visualmente, se $x_k > \sqrt{3}/3$, então a sequência deve convergir para 1, e se $x_k < -\sqrt{3}/3$, então a sequência deve convergir para -1.

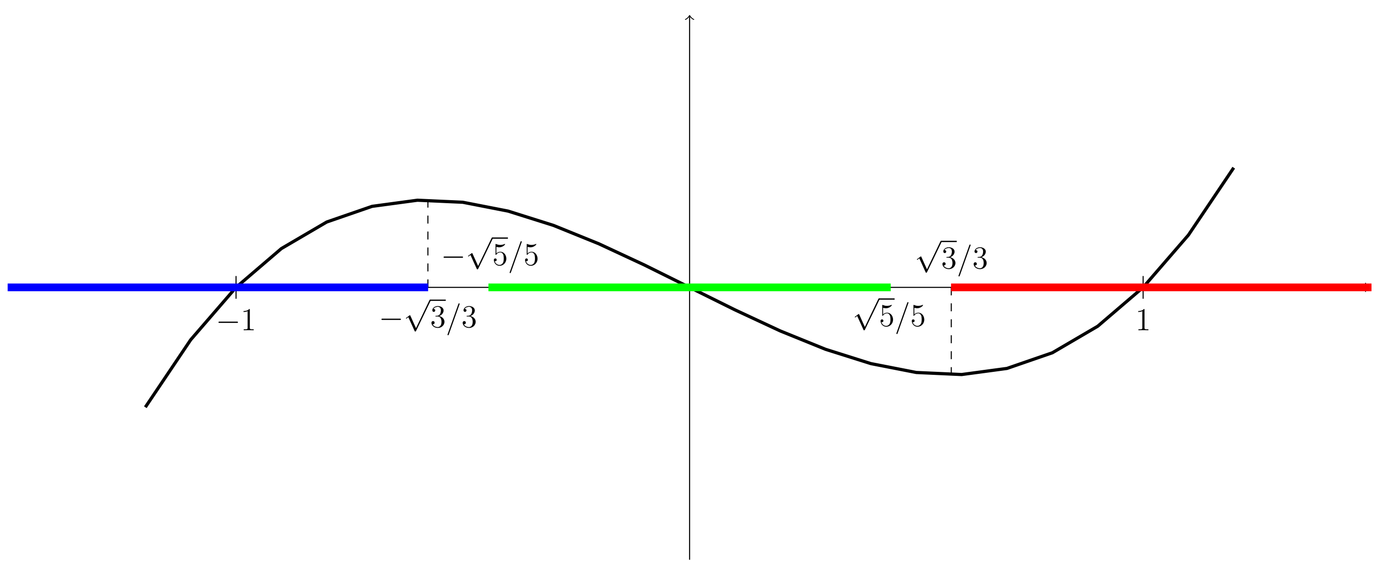
Adicionalmente, perto da origem, o método vai convergir para 0. Veja que

$$\varphi(x) = x - \frac{x^3 - x}{3x^2 - 1} = \frac{2x^3}{3x^2 - 1}.$$

Daí,

$$|\varphi(x)| = \frac{2x^2}{|3x^2 - 1|}|x|.$$

Se $|x| < \sqrt{5}/5$, então $|\varphi(x)| < |x|$, e então se $|x_k| < \sqrt{5}/5$, então o método converge para 0. Vamos marcar isso no nosso gráfico.



Agora fica a pergunta da convergência do método de Newton quando o método começa num ponto não marcado. Por acaso, isso não é tão simples de marcar. Veja a tabela a seguir.

x_0	Raiz
$\sqrt{5}/5 + 10^{-1}$	-1
$\sqrt{5}/5 + 10^{-2}$	1
$\sqrt{5}/5 + 10^{-3}$	-1
$\sqrt{5}/5 + 10^{-4}$	1
$\sqrt{5}/5 + 10^{-5}$	1
$\sqrt{5}/5 + 10^{-6}$	-1
$\sqrt{5}/5 + 10^{-7}$	1
$\sqrt{5}/5 + 10^{-8}$	1
$\sqrt{5}/5 + 10^{-9}$	-1
$\sqrt{5}/5 + 10^{-10}$	1

É possível encontrar valores para x_0 onde o método irá convergir para 1 ou para -1, não importa o quão perto de $\sqrt{5}/5$.