CM202 - Cálculo Diferencial e Integral II

15 de Dezembro de 2015 - Prova 3

Gabarito

1. $\boxed{20}$ Calcule a integral

$$\int_1^2 \int_0^2 \int_0^1 (xy - zx)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

Solution:

$$\int_1^2 \int_0^2 \int_0^1 (xy - zx)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 x\mathrm{d}x \int_1^2 \int_0^2 (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{1}{2}\int_1^2 \left(\frac{y^2}{2} - yz\right)\Big|_0^2 \mathrm{d}z$$
$$= \frac{1}{2}\int_1^2 (2-2z)\mathrm{d}z = \int_1^2 (1-z)\mathrm{d}z = \left(z - \frac{z^2}{2}\right)\Big|_1^2$$
$$= 1 - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}.$$

2. $\boxed{25}$ Calcule o volume da região E, limitada pelos planos $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$, $y = x$, $z = x$ e $2x + y - z = 0$.

Solution: Podemos escrever essa região limitando x por $0 \le x \le 1$, depois y com $0 \le y \le x$ e então z por $x \le z \le 2x + y$.

$$V = \iiint_E \mathrm{d}V = \int_0^1 \int_0^x \int_x^{2x+y} \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^x z\Big|_x^{2x+y} \mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_0^x (x+y)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 (xy + \frac{y^2}{2})\Big|_0^x \mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{3x^2}{2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{2}$$

3. $\boxed{25}$ Calcule a integral

$$\iiint_E x^2\ \mathrm{d}V,$$

onde E é a região limitada pelo cilindro parabólico $z = 1 - y^2$ e pelos planos $z = 0$, $x = 1$ e $x = -1$.

Solution: Quando $z = 0$, temos $1 - y^2 = 0 \Rightarrow y = \pm 1$. Então a região fica entre $z = 0$ e $z = 1 - y^2$, e $y = -1$ e $y = 1$. As limitações em x são dadas por $x = -1$ e $x = 1$. Então a integral é

$$I = \iiint_E x^2\ \mathrm{d}V = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_0^{1-y^2} x^2\ \mathrm{d}z\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 x^2(1-y^2)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$= \int_{-1}^1 x^2\mathrm{d}x \int_{-1}^1 (1-y^2)\mathrm{d}y = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^1 \left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_{-1}^1 = \frac{2}{3}\left(2 - \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\frac{4}{3} = \frac{8}{9}.$$

4. $\boxed{25}$ Calcule a integral

$$\iiint_E \frac{x}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}V,$$

onde E é a região entre $x^2+y^2+z^2=4$ e $z^2=x^2+y^2$ no primeiro quadrante, contendo o ponto $(0,0,1)$.

Solution: Vamos usar coordenadas esféricas. A primeira superfície é $\rho^2=4$, isto é $\rho=2$. Para a segunda temos $z^2=\rho^2\cos^2\varphi$ e $x^2+y^2=\rho^2\sin^2\varphi$, daí

$$z^2=x^2+y^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}=1,$$

isto é

$$\tan^2\varphi=1 \qquad \Rightarrow \qquad \tan\varphi=\pm 1 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi=\frac{\pi}{4} \text{ ou } \varphi=\frac{3\pi}{4}.$$

E o primeiro quadrante limita as variáveis à $\rho\geq 0$, $0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ e $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$. O ponto $(0,0,1)$ acontece com $\varphi=0$, então a região limitada é

$$0\leq\rho\leq 2 \qquad 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2} \qquad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4}.$$

A integral vira

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_E \frac{x}{x^2+y^2}\ \mathrm{d}V = \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \frac{\rho\cos\theta\sin\varphi}{\rho^2\sin^2\varphi}\rho^2\sin\varphi \mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/4}\int_0^{\pi/2}\int_0^2 \rho\cos\theta\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\phi\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/4}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho\mathrm{d}\rho \\
&= \frac{\pi}{4}\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)-\sin(0)\right]\frac{4}{2}=\frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

5. Dados $R>0$ e $h>0$, considere a transformação

$$\begin{cases} x &= Ru(1-v) \\ y &= Ruv \\ z &= hw\sqrt{1-u^2} \end{cases}$$

(a) $\boxed{15}$ Calcule o Volume da região

$$E=\{(u,v,w)\mid 0\leq u\leq 1, 0\leq v\leq 1, 0\leq w\leq 1\}.$$

Solution: Vamos calcular a Jacobiana

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix} R(1-v) & -Ru & 0 \\ Rv & Ru & 0 \\ \frac{-hwu}{\sqrt{1-u^2}} & 0 & h\sqrt{1-u^2} \end{vmatrix}=R^2hu\sqrt{1-u^2}.$$

Daí,

$$V = \iiint_E \mathrm{d}V = R^2 h \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 u\sqrt{1-u^2}\ \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = -R^2 h \frac{(1-u^2)^{3/2}}{3}\bigg|_0^1 v\bigg|_0^1 w\bigg|_0^1 = \frac{R^2 h}{3}$$

(b) $\boxed{10}$ Para $w = 1$, encontre uma equação que relaciona x, y e z sem as variáveis u, v e w.

Solution: Somando x e y obtemos

$$x + y = Ru - Ruv + Ruv = Ru.$$

Daí, $u = \frac{x+y}{R}$, então

$$z = h\sqrt{1 - \frac{(x+y)^2}{R^2}} = h\frac{\sqrt{R^2 - (x+y)^2}}{R} = \frac{h}{R}\sqrt{R^2 - (x+y)^2}$$

de modo que

$$\frac{R^2}{h^2}z^2 = R^2 - (x+y)^2.$$

Ou seja

$$(x+y)^2 + \frac{R^2}{h^2}z^2 = R^2,$$

ou ainda

$$\frac{(x+y)^2}{R^2} + \frac{z^2}{h^2} = 1,$$

(c) $\boxed{5}$ Descreva a região E nas coordenadas x, y e z.

Solution: O cilindro da questão anterior limita a região. Além disso, Pela definições de x, y e z, temos $x, y, z \geq 0$. Então, a região pode ser descrita como a região limitada pelo cilindro elíptico $\dfrac{(x+y)^2}{R^2} + \dfrac{z^2}{h^2} = 1$ no primeiro quadrante.