Lista 2: Cálculo II

A. Ramos *

September 6, 2018

Abstract

Lista em constante atualização.

1. Funções reias de várias variáveis;
2. Limites, continuidade, derivadas parcias, derivadas. Regras de cálculo.

1 Exercícios

Faça do livro texto [1], os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidos em aula.

2 Exercícios adicionais

2.1 Funções reais de várias variaveis

1. Escreva o volume de um cone circular reto como função da altura e a generatriz.

   Rpta: $Volume(x, y) = \frac{\pi}{3}(x^2y - y^3)$, onde $x = generatriz$ e $y = altura$. Descreva o dominio.

2. Encontre o dominio, imagem e as curvas de nível da função $f(x, y) = \sin(y - x)$ *Rpta:* Domínio $\mathbb{R}^2$, imagem $\mathbb{R}$ curva de nível *: retas paralelas.*

3. Descreva o dominio das seguintes funções

   (a) $f(x, y) = \sqrt{\sin \pi(x^2 + y^2)}$ *Rpta* União de $\{(x, y) : 2n \leq x^2 + y^2 \leq 2n + 1\}$ para $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $f(x, y) = \sqrt{x - \sqrt{y})}$ *Rpta* $\{(x, y) : x \geq 0, y \geq 0, x^2 \geq y\}$.

   (c) $f(x, y, z) = \arcsin x + \arcsin y + \arctan z$. *Rpta* $\{(x, y, z) : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$.

   (d) $f(x, y, z) = \arcsin \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *Rpta* $B(0, 1) \setminus \{(0, 0, 0)\}$.

4. Construia as curvas de nivel de $z = \arctan \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}$, com $a > 0$ fixo. *Rpta:* Familia de circunferências.

2.2 Limites e continuidade

1. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{|x|+|y|} & , \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   Mostre que f é contínua em $(0, 0)$.

2. Prove, usando a definição de limite, que $\lim_{(x,y)\to(3,-1)} x^2 + y^2 - 4x + 2y = -4$.

3. Considere a função

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + \frac{yx^3}{x^4+y^2} & , \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

   A função f é contínua em $(0, 0)$? *Rpta:* Sim. Use $2|a||b| \leq a^2 + b^2$.

*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: `albertoramos@ufpr.br`.

[1] Livro texto: Cálculo. Volume II. *J. Stewart*, 5 edição.

4. Considere a função

$$f(x,y,u,v) = \begin{cases} \frac{yx}{x^2+y^2+w^2+z^2} & , \text{ se } (x,y,w,z) \neq (0,0,0,0) \\ 0 & , \text{ se } (x,y,w,z) = (0,0,0,0) \end{cases}$$

A função f é contínua em $(0,0,0,0)$?

5. Calcule, se existe, os seguintes limites

   (a) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$. *Rpta:* 2.
   (b) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (1+x^2y^2)e^{-1/(x^2+y^2)}$. *Rpta:* 1.
   (c) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^3+y^3}$. *Rpta:* Não existe.
   (d) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2-3xy+x^2}{x^2+y^2}$. *Rpta:* Não existe.
   (e) $\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{x+\ln(1+xy)}{1+x+y}$. *Rpta:* 2/3.
   (f) $\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{\sin xy}{y}$. *Rpta:* 2.
   (g) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^{-\frac{xy^2+3}{y^2+x^2}}$. *Rpta:* 0.

6. Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\tan(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & , \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estude a continuidade de f em $\mathbb{R}^2$.

2.3 Derivadas parciais, derivadas direcionas e derivadas e regras da cadeia

1. Encontre as derivadas parciais f_x e f_y de $f(x,y) = xe^{x^2y}$ no ponto $(1, \ln 2)$. *Rpta:* $f_x(1,\ln 2) = 2 + 4\ln 2$ e $f_y(1,\ln 2) = 2$.

2. Encontrar $D_1f(0,y)$ e $D_2f(x,0)$, se

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & , \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Rpta: $D_1f(0,y) = -y$, $\forall y$ e $D_2f(x,0) = x$, $\forall x$.

3. Quais pontos da superficie $z = xy(1-x-y)$, ao plano tangente é paralelo ao plano xy. *Rpta:* Pontos $(0,0)$, $1/3(1,1)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

4. Calcule os planos tangentes da superficies

   (a) $z = x^2 + y^2$ no ponto $(1,1,2)$; *Rpta:* $z = 2x + 2y - 2$;
   (b) $z^2 - 3x^2 - y^2 = 0$ no ponto $(1,0,1)$; *Rpta:* $y = z$;

5. Encontre os valores de a e b para que o plano $ax+by+2z+2 = 0$ seja tangente ao paraboloide $z = y^2+3x^2+1$ no ponto $(1,1,5)$. *Rpta:* $a = -12$, $b = -4$.

6. Mostre que se f é diferenciável no ponto (x,y) e $\overrightarrow{u}$ é um vetor unitário. Então

$$|\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{u}} f(x,y)| \leq \|\nabla f(x,y)\|.$$

7. Verifique que a função $f(x,y) = x^3y - xy^3$ é harmônica. Isto é, $\partial^2_{xx} f(x,y) + \partial^2_{yy} f(x,y) = 0$.

8. Calcule as derivadas parciais de $f(x,y) = \int_x^y \sin(t)dt$. *Rpta:* $\partial_x f = -e^{\sin x}$ e $\partial_y f = e^{\sin y}$.

9. Verifique que $x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = 2$, se $f(x,y) = \ln(x^2+xy+y^2)$.

10. Para qual valor de θ a derivada direcional de $f(x,y) - \sqrt{25-x^2-y^2}$ no ponto $P_0 = (1,2)$ e na direção $\overrightarrow{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ é a menor possível? Qual é esse valor? *Rpta:* $\theta = \arccos(1/5)$, $\frac{\partial}{\partial \overrightarrow{u}} f(1,2) = -1/2$.

11. Suponha que a temperatura de uma placa é dada por $T(x,y) = xe^{2y} + y^3e^x$.

    (a) Qual direção a temperatura cresce mais rapidamente no ponto $(2,0)$? Qual é dita variação? Direção= $(1,4)$, variação= $\sqrt{17}$.

    (b) Qual direção a temperatura descresce mais rapidamente ? *Rpta* Direção= $(-1,-4)$.

12. Um ciclista está descendo uma ladeira da forma de um paraboloide $z = f(x,y) = 10 - 2x^2 - 4y^2$. Qual é a direção que deve seguir para descer com a maior rapidez possível quando ele encontra-se no ponto $(1,1,6)$? *Rpta:* Direção paralela a $(-1,-2)$.

13. Encontre a equação do plano tangente à superficie $z = e^y \sin(x+z)$ no ponto em que dito plano é paralelo ao $2x + z = 5$. *Rpta:* $z = -2x$ e o ponto é $(0, \ln 2, 0)$

14. Encontrar $D_1 f(0,y)$ e $D_2 f(x,0)$, se

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & , \text{se } xy \geq 0 \\ 0 & , \text{se } xy < 0 \end{cases}$$

    A função é diferenciável em $(0,0)$? *Rpta:* $D_1 f(0,0) = 0$ e $D_2 f(x,0) = x$. A função não é diferenciável em $(0,0)$.

15. Seja

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{xy} & , \text{se } xy \geq 0 \\ 0 & , \text{se } xy < 0 \end{cases}$$

    Mostre que não é diferenciável em $(0,0)$, mas tem derivadas parciais em $(0,0)$ *Rpta:* Para ver que f não é diferenciável é suficiente verificar que f não é contínua.

16. Capítulo 14, 14. 6 Exercícios 10, 11, 27, 29, 30, 33, 56.

2.4 Regras da cadeia e miscelaneas

1. Seja $f(u,v,w) = u^2 + v^2 + w^2$, onde $u = 2x - 3y + 5z$, $v = x^2 - y^2 + z^2$ e $w = xyz$. Calcule as derivadas parciais $\partial_x f$, $\partial_y f$ e $\partial_z f$ *Rpta:* $\partial_y f = -6u - 4vy + 2xyz$.

2. Considere $f(t)$ uma função real de classe C^2 em todo $\mathbb{R}$. Se $g(x,y) = x + y + f(x^2+y^2)$. Verifique que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4(x^2 - y^2)\frac{d^2 f(t)}{dt^2}$.

3. Se $z = xy + xe^{y/x}$. Verifique que $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

4. Se $g(r,t) = t^n e^{-r^2/4t}$. Calcule $\frac{\partial g}{\partial t}$ e $\frac{\partial g}{\partial r}$. Para qual valor de n a seguinte equação vale?

$$\frac{\partial g}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\{r^2 \frac{\partial g}{\partial r}\}.$$

5. Capitulo 14, 14.5 Exercícios 35, 36, 37, 39, 40, 42, 44, 51, 56.