TopAL - Tópicos de Álgebra Linear
Lista X

1. Considere o teorema:

   Teorema 1 *Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$ injetora e sobrejetora. Seja $S \subset V$. Então,*

   (i) $[S] = V \Leftrightarrow [T(S)] = W$.

   (ii) S *é L.I.* $\Leftrightarrow T(S)$ *é L.I..*

   Para cada item, e cada direção da afirmação, reduza a hipótese ao mínimo necessário, e verifique que o que sobrou é essencial com contra-exemplos.

2. Seja W subespaço de V, ambos de dimensão infinita. V/W deve ter dimensão finita?

3. Seja V o espaço vetorial das funções polinomiais p de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que tem grau menor ou igual a 2. Definamos três funcionais sobre V por

$$L_1(p) = \int_0^1 p(x)\mathrm{d}x \qquad L_2(p) = \int_0^2 p(x)\mathrm{d}x \qquad L_3(p) = \int_0^{-1} p(x)\mathrm{d}x$$

4. Se A e B são matrizes complexas, mostre que é impossível ter

$$AB - BA = I.$$

5. Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V de dimensão finita. Demonstrar que

   (i) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.

   (ii) $(W_1 \cap W_2)^0 = W_1^0 + W_2^0$.

6. Seja V espaço vetorial de dimensão finita, W subespaço de V e $f \in W^*$. Mostre que existe $g \in V^*$ tal que

$$g(v) = f(v), \qquad \forall v \in W.$$

7. Seja $f \in \mathbb{K}^2$ definido $f(\alpha_1, \alpha_2) = a\alpha_1 + b\alpha_2$. Para cada um dos operadores lineares T seguintes, sendo $g = T^t f$, determine $g(\alpha_1, \alpha_2)$.

   (i) $T(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1, 0)$;

   (ii) $T(\alpha_1, \alpha_2) = (-\alpha_2, \alpha_1)$;

   (iii) $T(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_1 - \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$.

8. Seja V o espaço das funções polinomiais sobre o corpo dos números reais. Sejam a e b números reais fixos e seja f o funcional linear sobre V definido por

$$f(p) = \int_a^b p(x)\mathrm{d}x.$$

   Se D é o operador derivação sobre V, o que é $D^t f$?

9. Seja V o espaço das matrizes n por n, e seja B uma matriz desse espaço fixa. Se T é o operador linear sobre V definido por $T(A) = AB - BA$, e se f é a função traço, o que é $T^t f$?