TopAL - Tópicos de Álgebra Linear
Lista 3

1. Verifique que as seguintes são transformações lineares:

   (i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x - y + z, 2x + 3y - 7z)$.

   (ii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y, a_3x + b_3y)$ com $a_j, b_j \in \mathbb{R}$.

   (iii) $T : C^2(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$, $T(f) = f''$.

   (iv) $T : C([a, b]) \to C^1([a, b])$, $(Tf)(x) = \int_a^x f(s)\mathrm{d}s$, $x \in [a, b]$.

   (v) $T : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}$, $T(p) = p(1)$.

   (vi) $T : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$, $(Tp)(t) = p(t + 1)$.

   (vii) $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$,
   $$T(x, y) = \begin{bmatrix} x + y & x - 2y \\ 2x - 3y & 3x - 4y \end{bmatrix}.$$

2. Dê exemplos, quando possível, de transformações lineares que satisfazem:

   (i) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ é sobrejetora.

   (ii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $\mathrm{Nu}(T) = \{(0, 0, 0)\}$.

   (iii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ com $\mathrm{Im}(T) = \{(0, 0)\}$.

   (iv) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com $\mathrm{Nu}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x = -y\}$.

   (v) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ com $\mathrm{Nu}(T) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 | y = -z\}$.

   (vi) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ com $\mathrm{Nu}(T) = \mathrm{Im}(T)$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a reflexão através da reta $y = ax$, com $a \neq 0$. Calcule $T(x, y)$ e $[T]_\beta^\beta$, sendo β a base canônica do $\mathbb{R}^2$.

4. Seja $T : V \to V$ linear, tal que $T^2 = T$. Mostre que $V = \mathrm{Nu}(T) \oplus \mathrm{Im}(T)$.

5. Determine dois operadores lineares $S, T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tais que $ST = 0$, mas $TS \neq 0$.

6. Seja V um espaço vetorial em $\mathbb{K}$, com dimensão $n > 1$ e base $\beta = \{v_1, \ldots, v_n\}$. Seja $T : V \to V$ definida por
   $$T(v_j) = v_{j+1}, \qquad j = 1, \ldots, n - 1 \qquad \text{e} \qquad T(v_n) = 0.$$

   (i) Calcule $[T]_\beta^\beta$.

   (ii) Mostre que $T^n = 0$, mas $T^k \neq 0, k < n$.

7. Sejam U e W subespaços do espaço vetorial V tais que $V = U \oplus W$. Sendo P_1 e P_2 as projeções dadas por $P_1(v) = u$ e $P_2(v) = w$, onde $v = u + w$, $u \in U$ e $w \in W$, mostre que

   (i) $P_1^2 = P_1$ e $P_2^2 = P_2$.

   (ii) $P_1 + P_2 = I$.

   (iii) $P_1P_2 = P_2P_1 = 0$.

8. Sejam $T, S : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$ definidas por

$$T(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (0, \xi_1, \xi_2, \dots),$$

e

$$S(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots) = (\xi_2, \xi_3, \xi_4, \dots).$$

Para cada uma, prove ou dê um contra-exemplo de injetividade e sobrejetivada.

9. (i) Encontre $T : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ linear tal que

$$T(1,1) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad T(1,2) = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(ii) Seja $T : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ a transformação linear cuja matriz em relação às bases

$$\beta = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

e

$$\beta' = \{(0,1), (1,1)\}$$

é dada por

$$[T]_{\beta'}^{\beta} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Calcule

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right),$$

e determine uma base para $\text{Nu}(T)$ e $\text{Im}(T)$.

10. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$, $\dim(V) < \infty$. Suponha que $\alpha_0 \neq 0$ e $\alpha_0 I + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2 + \cdots + \alpha_m T^m = 0$, onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$. Prove que T é inversível.

11. Seja $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida por $A(x,y,z) = (x,y)$ e $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definida por $B(x,y) = (x, y, \alpha x + \beta y)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Mostre que $B \circ A = I$. Isto é, B é uma inversa à esquerda de A. O que se pode ser dito sobre as inversas à esquerda de A?

12. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $T(x,y,z) = (3x + z, -2x + y, -x + 2y + 4z)$. T é inversível? Justifique. Em caso afirmativo, calcule $T^{-1}(x,y,z)$.

13. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^3 + T + 3I = 0$, $(\dim(V) = n)$. Mostre que T é inversível e calcule T^{-1}.

14. Sejam V e W espaços vetoriais com dimensões n e m, respectivamente. Mostre que

    (i) Se $m < n$, então nenhuma $T \in \mathcal{L}(V, W)$ é injetora.

    (ii) Se $m > n$, então nenhuma $T \in \mathcal{L}(V, W)$ é sobrejetora.

15. Para cada número real θ, seja $T_\theta \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ a transformação linear representada (em relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$) pela matriz

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Mostre que $T_\theta \circ T_{\theta'} = T_{\theta + \theta'}$ e $T_\theta^{-1} = T_{-\theta}$.

16. Seja $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[t], \mathbb{R}_2[t])$ definida por $T(f) = f + f' + f''$. Mostre que T é um isomorfismo e calcule $T^{-1}(f)$.

17. Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T^2 = 0$. Mostre que $\mathrm{Im}(t) \subset \mathrm{Nu}(T)$. A recíproca é verdadeira?

18. Seja V um espaço de vetorial e W e U subespaços não trivias. Dê exemplos onde

    (i) W e V/W não tem dimensão finita.

    (ii) V/W tem dimensão finita, mas V/U não tem dimensão finita.

19. Seja V um espaço de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Dados $v, w \in V$ dizemos que $v \equiv w \Leftrightarrow$ existe $T : V \to V$ linear e inversível tal que $Tx = y$.

    (i) Mostre que essa relação é de equivalência.

    (ii) Se $v \neq 0$ é um elemento de V, então $[x] \neq [0]$.

    (iii) Existem apenas duas classes de equivalência, a saber: a classe $[0] = \{0\}$ e uma classe contendo todos os elementos não nulos.