TopAL - Tópicos de Álgebra Linear
Lista 6

1. Seja $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Mostre que se $Q \in \mathbb{C}^{m\times m}$ e $Z \in \mathbb{C}^{n\times n}$ são matrizes unitárias, então

$$\|QAZ\|_2 = \|A\|_2 \,,$$

e

$$\|QAZ\|_F = \|A\|_F \,.$$

2. Encontre os autovalores e autovetores dos seguintes operadores:

   (i) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^3)$, $T(x,y,z) = (2x+2y+3z, 3x+2y+2z, 3x+3y+z)$.

   (ii) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, $T(x,y) = (ax+by, bx+cy)$.

   (iii) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$, $T(x,y) = (ax+by, -bx+cy)$.

   (iv) $T \in \mathcal{L}(C(\mathbb{R}))$, $(Tf)(t) = tf(t)$.

   (v) $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^\infty)$, $T(\xi_1, \xi_2, \dots) = (\xi_2, \xi_3, \dots)$.

   (vi) $T \in \mathcal{L}(C(\mathbb{R}))$, $(Tf)(t) = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s$.

3. Mostre que uma matriz unitária triangular é diagonal.

4. Encontre o polinômio característico das transformações identidade e nula de dimensão n.

5. Mostre que se λ é autovalor da matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, então existe $y \in \mathbb{R}^m$ tal que $y^*A = \lambda y^*$.

6. Mostre que $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ são autovalores distintos de um operador, e $v_1, \dots, v_k$ são autovetores associados, então $\{v_1, \dots, v_k\}$ é linearmente independente. Mostre ainda que, se o operador é auto-adjunto, então $\{v_1, \dots, v_k\}$ é um conjunto ortonormal.

7. Sejam A e B matriz n por n. Mostre que se $(I - AB)$ é inversível, então $(I - BA)$ também é, e

$$(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A.$$

8. Mostre que se $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$ é triangular e normal, então T é diagonal.

9. Mostre que se $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ e $B \in \mathbb{C}^{n\times m}$ com $m \geq n$, então

$$\lambda(AB) = \lambda(BA) \cup \{\underbrace{0, \dots, 0}_{m-n}\}.$$

10. Mostre que se a matriz R decomposta em blocos,

$$R = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix},$$

é normal e $\lambda(R_{11}) \cap \lambda(R_{22}) = \emptyset$, então $R_{12} = 0$.

11. Mostre que os autovalores de um operador auto-adjunto são reais. Como são os autovalores de um operador T tal que $T^* = -T$?

12. Seja $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ e $A = U\Sigma V^*$ sua decomposição SVD, com U e V unitárias de dimensão apropriada, e $\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_r, 0, \ldots, 0)$, $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$. Mostre que,

    (i) $\text{posto}(A) = r$.

    (ii) $\text{Nu}(A) = [v_{r+1}, \ldots, v_n]$.

    (iii) $\text{Im}(A) = [u_1, \ldots, u_r]$.

    (iv) $\text{Nu}(A^*) = [u_{r+1}, \ldots, u_m]$.

    (v) $\text{Im}(A^*) = [v_1, \ldots, v_r]$.

    (vi) $A = \displaystyle\sum_{i=1}^{r} \sigma_i u_i v_i^*$.

    (vii) $\|A\|_2 = \sigma_1$.

    (viii) $\displaystyle\min_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \sigma_n \qquad (m \geq n)$.

    (ix) Se A é real, $\sigma_1 = \displaystyle\max_{y\in\mathbb{R}^m, x\in\mathbb{R}^n} \frac{y^TAx}{\|x\|_2\,\|y\|_2}$.

13. Mostre que se $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ tem posto n, então $\left\|A(A^TA)^{-1}A^T\right\|_2 = 1$.

14. Seja V um espaço vetorial com produto interno, e T um operador linear auto-adjunto definido positivo, isto é,

$$\langle Tv, v\rangle > 0, \qquad \forall v \in V, v \neq 0.$$

    Mostre que, se T tem autovalores, eles são positivos.

15. Encontre uma decomposição em valores singulares para uma matriz ortogonal.