Cálculo Diferencial e Integral I - Turma J

19 de Maio de 2015

Questão 1 40

Calcule a derivada de cada função abaixo:

(a) (10 points) $2x^2 + 2x - 4$

Solution: $4x + 2$

(b) (10 points) $x^2 e^x$

Solution: Regra do produto

$$[x^2]' e^x + x^2 [e^x]' = 2xe^x + x^2 e^x$$

(c) (10 points) $\dfrac{x^2 - 4x}{2x + 3}$

Solution: Regra do quociente

$$\begin{aligned} \frac{[x^2 - 4x]'(2x+3) - (x^2 - 4x)[2x+3]'}{(2x+3)^2} &= \frac{(2x-4)(2x+3) - 2(x^2 - 4x)}{(2x+3)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 6x - 12}{(2x+3)^2} \end{aligned}$$

(d) (10 points) e^{3x+2}

Solution: Regra da cadeia com a função de fora $f(x) = e^x$ e a de dentro $g(x) = 3x+2$.

$$f'(g(x))g'(x) = e^{g(x)}[3x+2]' = 3e^{3x+2}.$$

Questão 2 20

Para cada função composta abaixo, identifique com $f(g(x))$, onde f e g são fáceis de derivar, e calcule a derivada pela regra da cadeia.

(a) (10 points) $\sqrt{x^2 + 1}$

Solution: $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 + 1$. $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ e $g'(x) = 2x$.

$$f'(g(x))g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

(b) (10 points) $\sin(\ln(x))$

Solution: $f(x) = \sin x$ e $g(x) = \ln x$. $f'(x) = \cos x$ e $g'(x)\frac{1}{x}$.

$$f'(g(x))g'(x) = \cos(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{\cos(\ln x)}{x}.$$

Questão 3 35

Considere a função $f(x) = x^3 - 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

(a) (5 points) Encontre suas raízes.

Solution: $x^3 - 3x^2 = x^2(x-3)$. Raízes 0 e 3.

(b) (5 points) Indique os intervalos de crescimento e decrescimento.

Solution: $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. Muda de sinal em 0 e 2. Antes de 0 e depois de 2 o sinal é positivo, logo f é crescente nesses dois intervalos, e entre 0 e 2 o sinal é negativo, logo f é decrescente nesse intervalo.

(c) (5 points) Encontre seus pontos críticos, e classifique-os.

Solution: Os pontos críticos são o 0 e 2, encontrados acima. Como f é crescente antes de 0 e decresce logo depois, então 0 é maximizador local. Analogamente para 2, que será um minimizador local.

(d) (5 points) Indique os intervalos de concavidade para cima e para baixo da função, e os pontos de inflexão.

Solution: $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$.

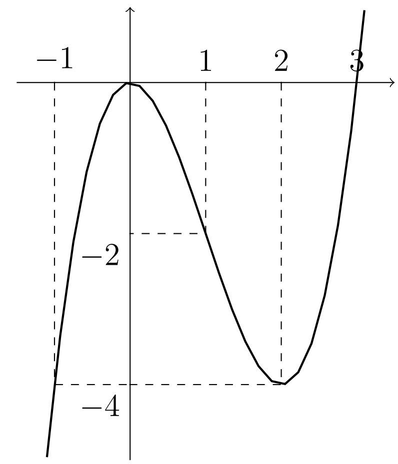
(e) (5 points) Complete a tabela:

Solution:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-4	0	-2	-4	0

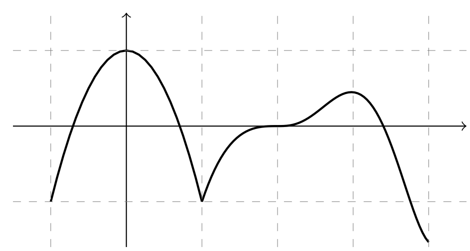
(f) (10 points) Faça um esboço do gráfico da função usando as informações acima, e marcando todos os pontos importantes.

Solution:



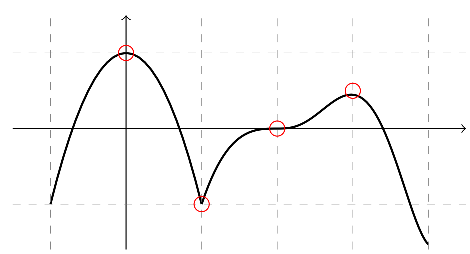
Questão 4 .... $\boxed{15}$

Considere a função representada abaixo num intervalo $[-1, 4]$.



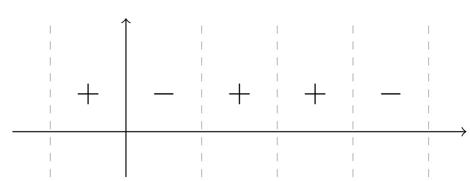
(a) (5 points) Identifique os **pontos críticos** da função acima.

Solution:



(b) (5 points) Indique o sinal da derivada nos intervalos delimitados pelos pontos críticos e pelos extremos do intervalo.

Solution:



(c) (5 points) Indique os maximizadores e minimizadores locais e globais, e os pontos de sela.

Solution: $x = -1$, $x = 1$ e $x = 4$ são min. locais. $x = 0$ e $x = 3$ é max. local $x = 2$ é ponto de sela. $x = 4$ é min. global no intervalo. $x = 0$ é max. global no intervalo.

Derivadas

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$

Regras de derivação

- Regra do produto

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

- Regra do quociente

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

- Regra da cadeia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))g'(x)$$