Tópicos de Álgebra Linear - Prova 1

22 de Janeiro de 2015

Nome: ____

Questão 1 .... $\boxed{2.0}$

Seja $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(x, 0, x) \mid x \in \mathbb{R}\} \subset V$ e $U = \{(x - y, x, x + y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

(a) $\boxed{1.0}$ Verifique que $V = W \oplus U$.

Solution: Note que $W = [(1, 0, 1)]$ e $U = [(1, 1, 1), (-1, 0, 1)]$. Seja $v \in W \cap U$. Então, existem $x, y, z \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha(1, 0, 1) = \beta(1, 1, 1) + \gamma(-1, 0, 1).$$

Daí,

$$\begin{cases} \alpha & - & \beta & + & \gamma & = 0 \\ & - & \beta & & & = 0 \\ \alpha & - & \beta & - & \gamma & = 0. \end{cases}$$

É fácil ver que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, então $v = (0, 0, 0)$. Como $\dim(W) = 1$ e $\dim(U) = 2$, temos

$$\dim(W + U) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(W \cap U) = 2 + 1 - 0 = 3 = \dim(V).$$

Então $W + U$ gera V, de modo que $V = W \oplus U$.

(b) $\boxed{1.0}$ Determine $T \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\text{Nu}(T) = W$ e $\text{Im}(T) = U$.

Solution: Como $\text{Nu}(T) = W$, devemos ter $T(1, 0, 1) = 0$. Para que $\text{Im}(T) = U$, escolhemos dois vetores de V, linearmente independentes com $(1, 0, 1)$ para definir uma base, e fazemos com que a imagem desses dois vetores sejam os elementos $(1, 1, 1)$ e $(-1, 0, 1)$. É fácil ver que os elementos $\beta = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ é base de $\mathbb{R}^3$. Então determinaremos T que satisfaz

$$\begin{aligned} T(1, 0, 1) &= (0, 0, 0), \\ T(0, 1, 0) &= (1, 1, 1), \\ T(0, 0, 1) &= (-1, 0, 1). \end{aligned}$$

Precisamos escrever (x, y, z) como combinação dos elementos de β. Então, sejam a, b, c tais que

$$(x, y, z) = a(1, 0, 1) + b(0, 1, 0) + c(0, 0, 1).$$

Daí, $a = x$, $b = y$ e $c = z - x$. Daí,

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= T(x(1, 0, 1) + y(0, 1, 0) + (z - x)(0, 0, 1)) \\ &= xT(1, 0, 1) + yT(0, 1, 0) + (z - x)T(0, 0, 1) \\ &= x(0, 0, 0) + y(1, 1, 1) + (z - x)(-1, 0, 1) \\ &= (x + y - z, y, -x + y + z). \end{aligned}$$

Questão 2 .... $\boxed{2.0}$

Considere o espaço vetorial V no corpo $\mathbb{K}$, com base $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Seja $\gamma = \{v_1 + v_n, v_2 + v_n, \ldots, v_{n-1} + v_n, v_n\}$.

(a) $\boxed{1.0}$ Mostre que γ é base de V.

> **Solution:** Sejam $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tais que
>
> $$\alpha_1(v_1 + v_n) + \alpha_2(v_2 + v_n) + \cdots + \alpha_n v_n = 0.$$
>
> Daí,
>
> $$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v2 + \cdots + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)v_n = 0.$$
>
> Logo, $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 0$, pois $v_1, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. Isso se reduz a $v_i = 0, i = 1, \ldots, n$. Como γ tem n elementos, então γ é base de V.

(b) $\boxed{1.0}$ Encontre a matriz de mudança de base de β para γ, $[I]^{\beta}_{\gamma}$.

> **Solution:** Considere a matriz de mudança de base de γ para β como B. Devemos ter
>
> $$w_j = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} v_i,$$
>
> onde w_i é o i-ésimo elemento da base γ. Note que $w_i = v_i + v_n$, se $i = 1, \ldots, n-1$ e $w_n = v_n$. Daí, para $j = 1, \ldots, n-1$,
>
> $$v_j + v_n = \sum_{i=1}^{n} B_{ij} v_i,$$
>
> de modo que $B_{jj} = B_{nj} = 1$ e $B_{ij} = 0$, para $i \neq j$ ou $i \neq n$. Também vemos facilmente que $B_{nn} = 1$ e $B_{in} = 0$, para $i \neq n$. Daí, a matriz de mudança de base de γ para β é
>
> $$[I]^{\gamma}_{\beta} = B = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$
>
> A matriz $[I]^{\beta}_{\gamma}$ é a inversa dessa matriz, que podemos ver que é
>
> $$[I]^{\beta}_{\gamma} = B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

Questão 3 .... $\boxed{2.0}$

Seja V o espaço dos polinômios reais de grau menor ou igual a 2. Seja $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ uma aplicação dada por

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

(a) $\boxed{1.0}$ Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno.

Solution: Temos $\langle p, p\rangle = p(-1)^2 + p(0)^2 + p(1)^2 \geq 0$. $\langle p, p\rangle = 0$ quer dizer que p se anula em 3 pontos. Mas p é não nulo, então p é constante, ou uma função afim, ou uma função quadrática. Nenhuma das três pode se anular em 3 pontos distintos, portanto p é nulo. Que $\langle q, p\rangle = \langle p, q\rangle$, $\langle \alpha p, q\rangle = \alpha \langle p, q\rangle$ e $\langle p + q, r\rangle = \langle p, r\rangle + \langle q, r\rangle$ é trivial.

(b) $\boxed{1.0}$ Encontre uma base ortogonal para V a partir da base $\{1, x, x^2\}$.

Solution: Chamaremos de $p_1(x) = 1$, $p_2(x) = x$ e $p_3(x) = x^2$. O primeiro vetor é $q_1 = p_1$. O segundo vetor é $q_2 = p_2 - \alpha_{12}q_1$, onde

$$\alpha_{12} = \frac{\langle p_2, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} = \frac{0}{3} = 0.$$

Então $q_2 = p_2$. O terceiro vetor é $q_3 = p_3 - \alpha_{13}q_1 - \alpha_{23}q_2$, onde

$$\alpha_{13} = \frac{\langle p_3, q_1\rangle}{\langle q_1, q_1\rangle} = \frac{2}{3} = 0.$$

$$\alpha_{23} = \frac{\langle p_3, q_2\rangle}{\langle q_2, q_2\rangle} = \frac{0}{2} = 0.$$

Então $q_3 = p_3 - 2q_1/3$, ou seja $\{1, x, x^2 - 2/3\}$ é base ortogonal.

Questão 4 .... $\boxed{2.0}$

Seja V espaço vetorial. Mostre ou dê um contra-exemplo para as seguintes afirmações:

(a) $\boxed{0.5}$ Sejam $S, R \subset V$, $S \cap R \neq \emptyset$. Então $[S \cap R] = [S] \cap [R]$.

Solution: Seja $S = \{(1, 0), (1, 1)\}$ e $R = \{(0, 1), (1, 1)\}$. Então $[S \cap R] = [(1, 1)]$. Mas $[S] = [R] = \mathbb{R}^2$.

(b) $\boxed{0.5}$ Se $T \in \mathcal{L}(V)$ é tal que $T^k = 0$, então $\mathrm{Im}(T^{k-1}) \subset \mathrm{Nu}(T)$.

Solution: Seja $v \in \mathrm{Im}(T^{k-1})$. Daí, existe $w \in V$ tal que $v = T^{k-1}w$. Logo, $Tv = T^k w = 0w = 0$. Logo, $v \in \mathrm{Nu}(T)$.

(c) $\boxed{0.5}$ Um conjunto linearmente independente deve ser finito.

Solution: Seja V o espaço vetorial dos polinômios. O conjunto $\{1, t, t^2, \ldots, t^n, \ldots\}$ é infinito, e linearmente independente.

(d) $\boxed{0.5}$ A norma-1 do $\mathbb{R}^n$, definida por $\|x\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n|$ é induzida por algum produto interno.

Solution: Para ser norma induzida, deve valer a Lei do Paralelograma:

$$\|v+w\| + \|v-w\| = 2(\|v\| + \|w\|).$$

Mas para quaisquer dois vetores canônicos distintos $v = e_i$ e $w = e_j$, temos

$$\begin{aligned} \|v+w\|^2 + \|v-w\|^2 - 2(\|v\|^2 + \|v\|^2) &= (|1| + |1|)^2 + (|1| + |-1|)^2 - 2(|1|^2 + |1|^2) \\ &= 4 + 4 - 2(1+1) = 4 \neq 0. \end{aligned}$$

Portanto, essa norma não é induzida por um produto interno.

Questão 5 .... $\boxed{2.0}$

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno.

(a) $\boxed{1.0}$ Mostre que existe um isomorfismo $T : V \to V^*$, definido por $Tv = f_v$, tal que $f_v(v) = \langle v, v\rangle$.

Solution: Seja $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal de V, e $\beta' = \{f_1, \dots, f_n\}$ base dual de V. Para todo $v \in V$, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ unicamente determinados tais que $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$. Defina $Tv = f_v = \overline{\alpha_1} f_1 + \dots + \overline{\alpha_n} f_n$. Como os α_i são únicos, T está bem definido. Segue que

$$\begin{aligned} f_v(v) &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} f_i(v) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_i(v_j) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha_i} \alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2 . \end{aligned}$$

Note que se $v \in \mathrm{Nu}(T)$, $Tv = f_v = 0$. Daí, $f_v(v) = \langle v, v\rangle = 0$, de modo que $v = 0$. Logo, T é injetora, e como $\dim(V) = \dim(V^*) < \infty$, então T é isomorfismo.

(b) $\boxed{1.0}$ Dado $v \in V$ não-nulo, defina $S : V \to V$ por

$$Sw = \frac{f_v(w)}{\langle v, v\rangle} v,$$

onde $f_v = Tv$, com T definida na questão anterior. Mostre que S é uma projeção ortogonal, calcule $\mathrm{Nu}(S)$ e $\mathrm{Im}(S)$, e interprete a transformação $I - 2S$.

Solution: Calculando o núcleo e a imagem antes, fica mais fácil de visualizar onde T projeta. A imagem é trivialmente $[v]$, pois $Tw = \alpha v$. O núcleo é todo w tal que $Tw = 0$. Mas $Tw = 0 \iff f_v(w) = 0$. Como $f_v = \overline{\alpha_1} f_1 + \dots + \overline{\alpha_n} f_n$, se

$w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$, temos

$$f_v(w) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{\alpha_i} = \langle w, v \rangle .$$

Então, $f_v(w) = 0$ implica que w é ortogonal a v. Logo, $\mathrm{Nu}(T) = [v]^{\perp}$.
Se T é projeção ortogonal, $w - Tw$ deve ser ortogonal a imagem de T. Veja que

$$\begin{aligned}\langle w - Tw, v \rangle &= \langle w, v \rangle - \left\langle \frac{f_v(w) v}{\langle v, v \rangle}, v \right\rangle \\ &= \langle w, v \rangle - f_v(w) \\ &= \langle w, v \rangle - \langle w, v \rangle = 0.\end{aligned}$$

Se $w = \alpha v + u$, com $\alpha \in \mathbb{K}$ e $u \perp v$, então

$$(I - 2T)w = w - 2\alpha T v - 2Tu = w - 2\alpha v = u - \alpha v.$$

Então $I - 2T$ é a reflexão através do hiperplano $[v]^{\perp}$.