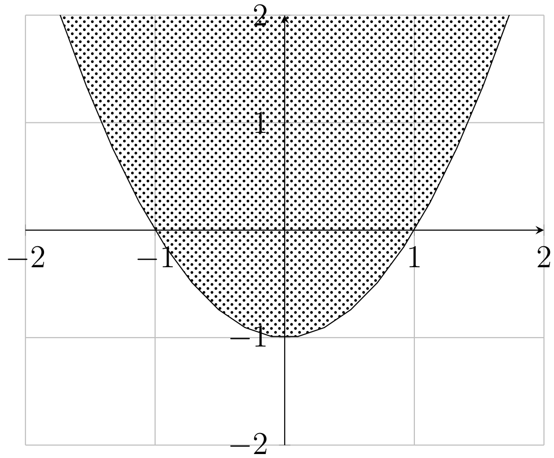
CM202 - Cálculo Diferencial e Integral II

15 de Outubro de 2015 - Prova 1

Gabarito

1. $\boxed{15}$ Encontre e ilustre graficamente o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{y - x^2 + 1}$.

Solution: Devemos ter $y - x^2 + 1 \geq 0$, então, $y \geq x^2 - 1$.



2. Mostre que o limite abaixo não existe.

   (a) $\boxed{15}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy(x^2 - y^2)}{x^4 + y^4}$

Solution: Sobre as retas $x = 0$, $y = 0$, $y = x$ e $y = -x$, teremos o limite igual a 0. Agora considere a curva $x = t$ e $y = 2t$. Temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{t(2t)(t^2 - 4t^2)}{t^4 + 16t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2(-3t^2)}{17t^4} = \lim_{t\to 0} -\frac{6t^4}{17t^4} = \lim_{t\to 0} -\frac{6}{17} = -\frac{6}{17}.$$

Como esse limite é diferente de zero nessa curva, então o limite dado não existe.

3. Calcule as primeiras derivadas das funções abaixo.

   (a) $\boxed{10}$ $f(x, y) = x^2y + 3xy - y^2 + 1$

Solution: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2xy + 3y$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^2 + 3x - 2y$.

   (b) $\boxed{10}$ $f(x, y) = \ln(1 + yx^2)$

Solution: $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{2xy}{1 + yx^2}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{x^2}{1 + yx^2}$.

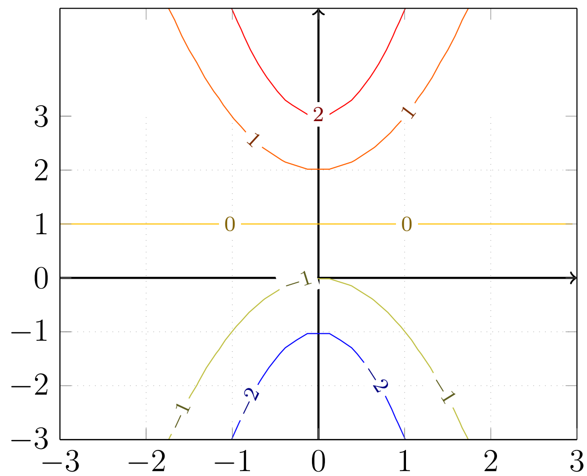
4. Considere a função $f(x,y) = \dfrac{y-1}{x^2+1}$.

(a) $\boxed{15}$ Desenhe suas curvas de nível.

Solution: As curvas de nível do nível k são aquelas que satisfazem a equação $f(x,y) = k$, isto é,

$$\frac{y-1}{x^2+1} = k \qquad \Rightarrow \qquad y = kx^2 + k + 1.$$

Daí, as curvas de nível são simples parábolas.



5. Considere a função $f(x,y) = e^x y + x^2 y + 1$

(a) $\boxed{10}$ Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1,1)$ na direção $\langle -2, 1\rangle$.

Solution: O gradiente é $\nabla f(x,y) = \langle e^x y + 2xy, e^x + x^2\rangle$. Daí, $\nabla f(1,1) = \langle e+2, e+1\rangle$. Logo, a derivada direcional é

$$D_{\langle -2,1\rangle} f(1,1) = \nabla f(1,1) \cdot \frac{\langle -2,1\rangle}{|\langle -2,1\rangle|} = \frac{\langle e+2, e+1\rangle \cdot \langle -2,1\rangle}{\sqrt{5}}$$
$$= \frac{-2e-4+e+1}{\sqrt{5}} = \frac{-3-e}{\sqrt{5}}.$$

(b) $\boxed{10}$ Qual a aproximação linear de f no ponto $(0,1)$?

Solution: $\nabla f(0,1) = \langle 1, 1\rangle$ e $f(0,1) = 2$, daí a aproximação linear é a função

$$L(x,y) = f(0,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)(y-1)$$
$$= 2 + x + (y-1) = x + y + 1.$$

(c) $\boxed{10}$ Usando a regra da cadeia, qual a derivada de f com relação à t, onde $x = t^2 + t$ e $y = e^t$, no instante $t = 0$.

Solution: Temos $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) = 2t + 1$ e $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = e^t$. A regra da cadeia é

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(x(t), y(t)) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) \\ &= (e^x y + 2xy)(2t+1) + (e^x + x^2)e^t.\end{aligned}$$

Daí, para $t = 1$, temos $x = 0$, $y = 1$ e

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} &= (e^0 + 2 \times 0 \times 1)(2 \times 0 + 1) + (e^0 + 0^2)e^0 \\ &= 1 \times 1 + 1 \times 1 \\ &= 2.\end{aligned}$$

6. $\boxed{15}$ Verifique que a função $u(t, x) = 3\cos(2x - \pi t)$ satisfaz a equação

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \nu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

para algum $\nu > 0$ (mostre o ν).

Solution: Derivando

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) &= -3\sin(2x - \pi t)2 \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t, x) &= -3\cos(2x - \pi t)2^2 = -12\cos(2x - \pi t). \\ \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) &= 3\sin(2x - \pi t)\pi \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(t, x) &= -3\cos(2x - \pi t)\pi^2.\end{aligned}$$

Substituindo na equação, temos

$$-12\nu^2\cos(2x - \pi t) = -3\pi^2\cos(2x - \pi t), \forall x, t.$$

Como vale para todo x e t, temos $-12\nu^2 = -3\pi^2$, ou seja, $\nu^2 = \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow \nu = \frac{\pi}{2}$, pois $\nu > 0$.