Cálculo Diferencial e Integral I - Turma C

31 de Março de 2015

Nome: ____

Questão 1 .... $\boxed{50}$

Calcule

(a) $\boxed{10}$ o domínio de $g(t) = \dfrac{\sqrt{e^{2-t}-1}}{\sqrt{\ln(t)}}$;

Solution: Devemos ter $e^{2-t}-1 \geq 0$, isto é, $e^{2-t} \geq 1$. Logo, devemos ter $2-t \geq 0$. Assim, temos $t \leq 2$. Além disso, precisamos de $\ln(t) > 0$. Como ln é crescente, e $\ln(1) = 0$, então devemos ter $t > 1$. Logo, a solução é $1 < t \leq 2$.

(b) $\boxed{10}$ $\lim_{x\to 1} e^x \dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1}$;

Solution:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1} e^x \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} &= \lim_{x\to 1} e^x \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1} e^x \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1} \\
&= \lim_{x\to 1} e^x(\sqrt{x}+1) = e^1(\sqrt{1}+1) = 2e.
\end{aligned}$$

(c) $\boxed{10}$ $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^4+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}$;

Solution: Neste limite precisamos racionalizar o denominador e o numerador.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^4+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x^4+1}-1}{\sqrt{x^2+1}-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x^4+1}+1}{\sqrt{x^4+1}+1}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^2+1}+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \left(\frac{x^4+1-1}{x^2+1-1}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^4+1}+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} x^2 \left(\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{\sqrt{x^4+1}+1}\right) = 0
\end{aligned}$$

(d) $\boxed{10}$ a reta tangente à curva $\dfrac{1}{2x+5}$ em $x = 2$;

Solution: A inclinação da reta tangente em $x = 2$ é

$$\begin{aligned}
m = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{2x+5} - \frac{1}{9}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{9-2x-5}{9(2x+5)}}{x-2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{4-2x}{9(2x+5)(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-2}{9(2x+5)} = \frac{-2}{9\times 9} = \frac{-2}{81}
\end{aligned}$$

A reta segue a fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde $x_0 = 2$ e $y_0 = \frac{1}{2x_0+5} = \frac{1}{9}$. Então

$$y = \frac{1}{9} - \frac{2}{81}(x-2).$$

(e) $\boxed{10}$ a derivada de $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ pela definição.

Solution:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{(x+h)^2+1}-\sqrt{x^2+1}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2+1-(x^2+1)}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h(\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1})} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2x+h}{\sqrt{(x+h)^2+1}+\sqrt{x^2+1}} \\
&= \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}
\end{aligned}$$

Questão 2 .... $\boxed{20}$

Seja $f(x) = \dfrac{2x^2+3}{3x\,|x|}$. Calcule

(a) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$,

Solution:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2+3}{3x\,|x|} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2+3}{3x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2+3}{3}\frac{1}{x^2}$$

Como $(2x^2+3)/3$ tende a $2/3$ quando x tende a 0, e $1/x^2$ tende a $+\infty$, então

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2x^2+3}{3x\,|x|} = +\infty.$$

(b) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$,

Solution:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+3}{3x\,|x|} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+3}{-3x^2} = \lim_{x\to 0^-} -\frac{2x^2+3}{3}\frac{1}{x^2}$$

Como $-(2x^2+3)/3$ tende a $-2/3$ quando x tende a 0, e $1/x^2$ tende a $+\infty$, então

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2+3}{3x\,|x|} = -\infty.$$

(c) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$,

Solution:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{3x\,|x|} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2+3}{3x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{3} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{3}$$

(d) $\boxed{5}$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Solution:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3}{3x\,|x|} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+3}{-3x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2}{3} - \frac{1}{x^2} = -\frac{2}{3}$$

Questão 3 .... $\boxed{20}$

Classifique cada afirmação como verdadeiro ou falso, e justifique.

(a) $\boxed{5}$ A derivada de $3x^8 - 3x/\sqrt[5]{x^3} - e^x$ é $20x^7 - 5x\sqrt{x} - e^x$.

Solution: Falso.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^8 - 3x/\sqrt[5]{x^3} - e^x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^8 - 3x^{1-\frac{3}{5}} - e^x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(3x^8 - 3x^{\frac{2}{5}} - e^x) = 24x^7 - \frac{6}{5}x^{-\frac{3}{5}} - e^x$$

(b) $\boxed{5}$ Se os limites laterais de uma função f existem no ponto a e são iguais, então a função f é contínua no ponto a.

Solution: Falso. Por exemplo, $f(x) = 0$ se $x \neq 0$ e $f(0) = 1$. Os limites lateraies em 0 existem, e portanto o limite existe, mas a função não é contínua.

(c) $\boxed{5}$ Se uma função é contínua num ponto ela é diferenciável nesse ponto.

Solution: Falso. Por exemplo, $f(x) = |x|$ é contínua em todos os pontos, mas não é diferenciável em 0.

(d) $\boxed{5}$ A função com definição $f(x) = x^2$ só tem inversa se o domínio for igual ao contra-domínio.

Solution: Falso. Se o domínio de f for $[1, 2]$ e o contra-domínio for $[1, 4]$ então f é bijetora, e portanto tem inversa: $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$.

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Seja f a função real definida em todos os reais por

$$f(x) = \begin{cases} a(x-1), & x \leq b, \\ x^2, & x > b \end{cases}$$

(a) $\boxed{10}$ Encontre a em função de b tal que a função f é contínua para todo x.

Solution: Para $x < b$ ou $x > b$ a função f é contínua. Para $x = b$, devemos ter os limites laterais iguais e iguais a $f(b)$.

$$\lim_{x \to b^+} f(x) = \lim_{x \to b^+} x^2 = b^2.$$

$$\lim_{x \to b^-} f(x) = \lim_{x \to b^-} a(x-1) = a(b-1).$$

A igualdade dos limites laterais resulta em $a(b-1) = b^2$. Daí, se $b = 1$, então $b^2 = 0$, de modo que $b = 0$. Portanto b não pode ser 1. Logo $b - 1 \neq 0$, então $a = \dfrac{b^2}{b-1}$. Como $f(b) = a(b-1)$ a igualdade já está incluída.

(b) $\boxed{10}$ Encontre quais valores de b tal que a função f é diferenciável para todo x.

Solution: Para $x < b$ ou $x > b$ a função é um polinômio, então ela é diferenciável. Para $x = b$, a função é contínua se o limite $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}$ existe. Os limites laterais são

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{(b+h)^2 - b^2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2bh + h^2}{h} = 2b.$$

e

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\dfrac{b^2(b+h-1)}{b-1} - b^2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{b^2(b+h-1) - b^2(b-1)}{h(b-1)} = \lim_{h \to 0^-} \frac{b^2 h}{h(b-1)} = \frac{b^2}{b-1}.$$

Então devemos ter $2b = b^2/(b-1)$, isto é $b^2 = 2b(b-1) = 2b^2 - 2b$. Logo, $b^2 - 2b = 0$, ou seja, $b(b-2) = 0$. Portanto as soluções são $b = 0$ ou $b = 2$.