Cálculo Diferencial e Integral II - Turma B

09 de Julho de 2015

Questão 1 .... $\boxed{75}$

Calcule

(a) (15 points) As derivadas parciais de primeira ordem de $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2 - 2x + 1$

Solution:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x + 2y - 2$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x + 8y$$

(b) (15 points) A integral $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} xy^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

Solution:

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2} xy^2 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-1}^{1} y^2 \mathrm{d}y \int_{0}^{2} x\mathrm{d}x = \left.\frac{y^3}{3}\right|_{-1}^{1} \left.\frac{x^2}{2}\right|_{0}^{2} = \frac{2}{3}2 = \frac{4}{3}.$$

(c) (15 points) A derivada direcional no ponto $(1,1)$ da função $f(x,y) = x^2 - y^2$ na direção $\vec{u} = \hat{\imath} + 2\hat{\jmath}$.

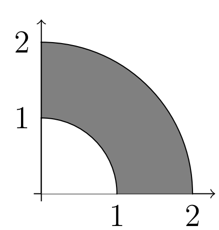
Solution: $\nabla f(x,y) = 2x\hat{\imath} - 2y\hat{\jmath}$. $|\vec{u}| = \sqrt{5}$.

$$\nabla f(1,1) \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{5}}{5}(2\hat{\imath} - 2\hat{\jmath})(\hat{\imath} + 2\hat{\jmath}) = \frac{\sqrt{5}}{5}(2-4) = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

(d) (15 points) A integral $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \mathrm{d}A$, onde D é a faixa circular $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ restrita ao primeiro quadrante.

Solution: Sendo uma faixa circular, vamos fazer por mudança para coordenadas polares:

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta \qquad r^2 = x^2 + y^2.$$



Em coordenadas polares, essa região é descrita por $1 \leq r \leq 2$ e $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Lembre-se também que $\mathrm{d}A = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}A &= \int_0^{\pi/2}\int_1^2 \frac{r\cos\theta}{r} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2}\int_1^2 r\cos\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\mathrm{d}r = \sin\theta\Big|_0^{\pi/2}\frac{r^2}{2}\Big|_1^2 \\
&= \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin 0\right]\frac{3}{2} = \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

(e) (15 points) A derivada $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ no ponto $t = 1$ da função $f(x,y) = x^2 - y^2$, onde $x = t^2 - 2$ e $y = t + 1$.

Solution:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -2y$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2t \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 1.$$

Quando $t = 1$, temos $x = -1$, $y = 2$. Daí,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=1} &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\Big|_{t=1} = \Big((2x)(2t) + (-2y)(1)\Big)\Big|_{t=1} \\
&= (-2)(2) + (-2)(1) = -4 - 2 = -6.
\end{aligned}$$

Questão 2 15

Mostre que não existe o limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

Solution: Temos

$$\lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{t^2} = 1,$$

e

$$\lim_{t\to 0} f(0,t) = \lim_{t\to 0}\frac{-t^2}{t^2} = -1.$$

Como são diferentes, então o limite não existe.

Questão 3 15

Encontre e classifique os pontos críticos da função $f(x,y) = x^3 - 12x + y^2$.

Solution: Primeiro calculamos $\nabla f(x,y) = 0$.

$$\nabla f(x,y) = (3x^2 - 12)\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath}.$$

Dai, $x^2 = 4$ e $y = 0$. Temos dois pontos críticos: $(2,0)$ e $(-2,0)$. Então,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 0.$$

O discriminante é $D(x,y) = 12x$. Para $(2,0)$ temos $D(2,0) = 24 > 0$, e $f_{xx}(2,0) = 12 > 0$. Então $(2,0)$ é um minimizador. $D(-2,0) = -24 < 0$. Então $(-2,0)$ é um ponto de sela.

Questão 4 .... $\boxed{15}$

Calcule a área da elipse descrita pela equação $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, com $a, b > 0$.

Solution: A área da região D é dada por

$$\iint_D \mathrm{d}A.$$

Vamos fazer uma mudança de variável e encontrar a área pela integral. Pela fórmula podemos ver que

$$\frac{x}{a} = r\cos\theta \qquad \frac{y}{b} = r\sin\theta$$

parece uma mudança adequada. Nessa mudança, a equação vira $r^2 = 1$, o que implica $r = 1$. As limitações então são $0 \le r \le 1$ e $0 \le \theta \le 2\pi$. $\mathrm{d}A = \left|\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$.

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix} = abr(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = abr.$$

Então,

$$\iint_D \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^1 abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta = ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta \times \int_0^1 r\mathrm{d}r = ab \times 2\pi \times \frac{1}{2} = ab\pi.$$

Derivadas

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(x)) = -\sin(x)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(x)) = \cos(x)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x)) = \dfrac{1}{x}$

Integrais

- $\displaystyle\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln(x) + C$
- $\displaystyle\int \sin(x)\mathrm{d}x = -\cos(x) + C$
- $\displaystyle\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\displaystyle\int \cos(x)\mathrm{d}x = \sin(x) + C$

Regras

- Jacobiana de duas variáveis

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

- Coordenadas polares

$$x = r\cos\theta \qquad y = r\sin\theta$$

- Coordenadas esféricas

$$x = r\cos\theta\sin\varphi \qquad y = r\sin\theta\sin\varphi \qquad z = r\cos\varphi$$

- Regra da cadeia para $f(x,y)$ onde x e y dependem de t.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$$