

# Lista 1: Cálculo I

A. Ramos \*

March 8, 2018

## Abstract

Lista em constante atualização.

1. Funções

## 1 Exercícios

Faça do livro texto, os exercícios correspondentes aos temas desenvolvidas em aula.

## 2 Exercícios adicionais

### 2.1 Domínio, imagem e gráfico de funções

1. Seja  $f : [-2, 4) \rightarrow \mathbb{R}$  definida como  $f(x) = \frac{|x+1|-3}{1+|x-3|}$ . Encontre a imagem de  $f$ . *Rpta*  $im(f) = [-3/5, 1]$ .
2. Considere  $f(x) = \frac{2\sqrt{x}}{|1-x|}$ . Ache o domínio, imagem e gráfico de  $f$ .
3. Seja  $f(x) = (x - \lfloor x \rfloor)^2$ . Encontre o domínio e a imagem de  $f$ . Faça o gráfico de  $f$ . *Rpta*:  $dom(f) = \mathbb{R}$ ,  $im(f) = [0, 1]$ .
4. Encontre o domínio, a imagem e o gráfico de

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x + 1}{|x + 1|}.$$

*Rpta*:  $dom(f) = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,  $im(f) = (-\infty, -2) \cup [1, \infty)$

5. Seja  $f(x)$  uma função lineal tal que  $f(-1) = 2$  e  $f(2) = -3$ . *Rpta*:  $f(x) = (-5x + 1)/3$ .

### 2.2 Operações básicas para funções

1. Encontre o produto de  $f$  e  $g$  se

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & , \text{ se } x \geq 1 \\ x^2 - 2 & , \text{ se } x < 0 \end{cases} \quad \text{e } g(x) = \begin{cases} 3x + 1 & , \text{ se } x \leq 8 \\ x^3 & , \text{ se } x > 10 \end{cases}$$

*Rpta*:

$$(f \cdot g)(x) = \begin{cases} 3x^3 + x^2 - 6x - 2 & , \text{ se } x < 0 \\ 6x^2 + 5x + 1 & , \text{ se } 1 \leq x \leq 8 \\ 4x^4 + 2x^3 & , \text{ se } 10 < x \end{cases}$$

2. Encontre a divisão de  $f$  e  $g$  se

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x} & , \text{ se } x \geq 1 \\ \sqrt{x} & , \text{ se } x \geq 4 \end{cases} \quad \text{e } g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \text{ se } x < 0 \\ x & , \text{ se } 0 \leq x \leq 2 \\ x + 5 & , \text{ se } x > 2 \end{cases}$$

*Rpta*:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x}}{x^2-1} & , \text{ se } x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 0) \\ \frac{\sqrt{1-x}}{x} & , \text{ se } x \in (0, 1] \\ \frac{\sqrt{x}}{x+5} & , \text{ se } x \in [4, \infty] \end{cases}$$

---

\*Department of Mathematics, Federal University of Paraná, PR, Brazil. Email: [albertoramos@ufpr.br](mailto:albertoramos@ufpr.br).

3. Encontre a composição de  $f \circ g$  se

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & , \text{ se } x \geq 1 \\ x-1 & , \text{ se } x < 1 \end{cases} \quad \text{e } g(x) = \begin{cases} x^2 & , \text{ se } x < 0 \\ 1-x & , \text{ se } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

*Rpta:*

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \text{ se } x \in (-\infty, -1) \\ x^2 + 2 & , \text{ se } x \in [-1, 0) \\ 3 - x & , \text{ se } x \in [0, \infty] \end{cases}$$

4. (a) Se  $f(x-1) = x-2$  e  $(g \circ f)(x+2) = 2x^2 - x$ . Encontre  $g(x)$ . *Rpta:*  $g(x) = 2x^2 - 5x + 3$ .  
 (b) Se  $F(x) = \cos(2x)$  e  $f(x) = \sin(x)$ . Encontre  $g(x)$  tal que  $F(x) = (g \circ f)(x)$ . *Rpta:*  $g(x) = 1 - 2x^2$ .
5. Considere as funções  $f$  e  $g$  definidas como

$$f(x) = \frac{\sqrt{2x-1}}{|1-x|} \quad \text{e} \quad g(x) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{3} \left(\frac{|x|}{x^2+1}\right)\right).$$

Analise a existência da composição de  $f \circ g$ .

### 2.3 Funções injetoras, sobrejetoras e inversas

*Lembre:* Uma função  $f$  é injetora se para todo  $a, b \in \text{dom}(f)$  tal que  $f(a) = f(b)$  então temos que  $a = b$ .

*Observação:* Sejam  $f$  e  $g$  duas funções injetoras tal que  $f \circ g$  existe. Então  $f \circ g$  é injetora e a inversa satisfaz

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

*Mostre essa observação.*

- Mostre que toda função crescente (ou decrescente) é injetora.
- Considere  $f : X \rightarrow (-4, 1]$  com  $f(x) = \frac{10+3x}{10-2x}$ .
  - Determine  $X$  para que  $f$  seja sobrejetora. *Rpta:*  $X = (-\infty, 0] \cup (10, \infty)$ .
  - Mostre que  $f$  é injetora.
- Considere a função

$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & , \text{ se } x \in (-\infty, -1) \\ 4x^2 & , \text{ se } x \in [-1, 0] \\ x+4 & , \text{ se } x \in (0, \infty] \end{cases}$$

Calcule a inversa de  $f$  e faça o gráfico de  $f^{-1}$ . *Rpta:*

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{2} & , \text{ se } x \in (-\infty, -3) \\ -\frac{\sqrt{2x}}{2} & , \text{ se } x \in [0, 4] \\ x-4 & , \text{ se } x \in (4, \infty] \end{cases}$$

4. Considere as funções

$$g(x) = \frac{x}{x+2}, \text{ se } x < -2 \text{ e } f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 12x + 2 & , \text{ se } x \in (-2, 3] \\ \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}} & , \text{ se } x \in (3, \infty) \end{cases}$$

Calcule  $g^{-1} \circ f$ . *Rpta:*

$$(g^{-1} \circ f)(x) = \begin{cases} -\frac{4(x^2-6x+1)}{2x^2-12x+1} & , \text{ se } x \in (-2, 3 - \sqrt{17}) \\ \frac{2\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-3}-\sqrt{x+2}} & , \text{ se } x > 3 \end{cases}$$

5. Considere

$$f(x) = \frac{4x + |x-5| + \sqrt{x-5} + 5 - x\lfloor x \rfloor}{\sqrt{6-x}}.$$

Ache a inversa, se ela existe. *Rpta:* Se existe e  $f^{-1}(x) = \frac{6x^2+5}{x^2+1}$ .