Cálculo Diferencial e Integral I - Turma J

25 de Junho de 2015

Questão 1 .... $\boxed{40}$

Calcule as integrais abaixo:

(a) (10 points) $\displaystyle\int_0^1 (x^3 - 2x^2 + x - 2)\mathrm{d}x$

> **Solution:**
>
> $$\left[\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 2 = \frac{3-8+6-24}{12} = \frac{-23}{12}$$

(b) (10 points) $\displaystyle\int xe^x\mathrm{d}x$

> **Solution:** Tem que fazer por partes com $u = x$ e $\mathrm{d}v = e^x\mathrm{d}x$. Daí, $\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$ e $v = e^x$, e então
>
> $$\int xe^x\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u = xe^x - \int e^x\mathrm{d}x = xe^x - e^x + C$$

(c) (10 points) $\displaystyle\int x^2(2x^3-3)^7\mathrm{d}x$

> **Solution:** Tem que fazer por substituição, com $u = 2x^3 - 3$, de modo que $\mathrm{d}u = 6x^2\mathrm{d}x$. Então
>
> $$\int x^2(2x^3-3)^7\mathrm{d}x = \int x^2u^7\frac{\mathrm{d}u}{6x^2} = \frac{1}{6}\int u^7\mathrm{d}u = \frac{1}{6}\frac{u^8}{8} + C = \frac{(2x^3-3)^8}{48} + C.$$

(d) (10 points) $\displaystyle\int \ln x\mathrm{d}x$

> **Solution:** Por partes, com $u = \ln x$ e $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$. Daí, $\mathrm{d}u = \frac{1}{x}\mathrm{d}x$ e $v = x$. Então
>
> $$\int \ln x\mathrm{d}x = \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u = x\ln x - \int x\frac{1}{x}\mathrm{d}x = x\ln x - \int 1\mathrm{d}x = x\ln x - x + C.$$

Questão 2 .... $\boxed{30}$

Calcule as integrais abaixo, usando a substituição indicada. **Não esqueça de mudar os intervalos.**

(a) (15 points) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\sec^3 x}\mathrm{d}x$, com $u = \cos(x)$.

Solution: Com $u = \cos x$, temos $\mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x$. Quando $x = 0$, $u = \cos 0 = 1$. Quando $x = \frac{\pi}{3}$, $u = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x}{\sec^3 x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{\frac{1}{\cos^3 x}}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x}\frac{\cos^3 x}{1}\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 x \sin x \mathrm{d}x \\ &= \int_1^{\frac{1}{2}} u^2(-\mathrm{d}u) = -\frac{u^3}{3}\bigg|_1^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 1^3\right] = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8} - 1\right) = \frac{7}{24}\end{aligned}$$

(b) (15 points) $\displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\ln x)}{x}\mathrm{d}x$, com $u = \frac{\pi}{2}\ln x$.

Solution: Com $u = \frac{\pi}{2}\ln x$, temos $\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2x}\mathrm{d}x$, de modo que $\mathrm{d}x = \frac{2x}{\pi}\mathrm{d}u$. Quando $x = 1$, $u = \frac{\pi}{2}\ln 1 = 0$. Quando $x = e$, $u = \frac{\pi}{2}\ln e = \frac{\pi}{2}$. Daí,

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{\cos(\frac{\pi}{2}\ln x)}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos u}{x}\frac{2x}{\pi}\mathrm{d}u = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos u \mathrm{d}u \\ &= \frac{2}{\pi}\sin u\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{\pi}(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{2}{\pi}.\end{aligned}$$

Questão 3 .... $\boxed{15}$

Encontre a área limitada pelas curvas $y = x^2 - 2x$ e $y = x^2 - 4x + 6$, e pelo eixo y.

Solution: Primeiro vamos calcular a intersecção das curvas.

$$x^2 - 2x = x^2 - 4x + 6 \qquad \Rightarrow \qquad x = 3.$$

Como também somos limitados pelo eixo y, então devemos integrar de 0 a 3.

Para saber quem está em cima, podemos desenhar as curvas, ou calcular em algum valor, tipo no $x = 0$. Assim, descobrimos que a segunda curva está por cima.

A área é

$$A = \int_0^3 [x^2 - 4x + 6 - (x^2 - 2x)]\mathrm{d}x = \int_0^3 (6 - 2x)\mathrm{d}x = (6x - x^2)\bigg|_0^3 = 18 - 9 = 9.$$

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Um lago evapora $12t - t^2$ litros por mês, onde t está em meses. Supondo essa evaporação contínua, responda:

(a) (10 points) Qual a quantidade total de água evaporada num ano?

Solution: A quantidade é a integral

$$\int_0^{12} (12t - t^2)\mathrm{d}t = \left(6t^2 - \frac{t^3}{3}\right)\bigg|_0^{12} = 12^2(6 - 4) = 144 \times 2 = 288$$

A quantidade evaporada é 288 litros.

(b) (10 points) Supondo que o lago enche 5 litros por mês devido à chuva, qual o volume do lago 6 meses depois do instante inicial, sabendo que o volume inicial é de 1000 litros, e que a única coisa mudando o volume do lago é a chuva e a evaporação.

Solution: A variação agora é $5 - 12t + t^2$, que é o acrescido pela chuva por mês e o evaporado por mês. Então,

$$\begin{aligned} V_f &= V_0 + \int_0^6 (5 - 12t + t^2)\mathrm{d}x = 1000 + \left(5t - 6t^2 + \frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^6 \\ &= 1000 + 30 - 6^2(6-2) = 1030 - 36 \times 4 = 1030 - 144 = 886. \end{aligned}$$

Questão 5 .... $\boxed{15}$

Uma planta é transplantada e cresce numa taxa de $\dfrac{15}{(x+1)^2}$ centímetros por dia. Sabendo que sua altura depois de 2 dias é 1 metro, determine sua altura **4 dias depois, 14 dias depois, e no dia que foi transplantada**.

Solution: A variação de altura do dia 2 ao dia d é

$$\int_2^d \frac{15}{(x+1)^2}\mathrm{d}x = -\frac{15}{(x+1)}\Bigg|_2^d = -\frac{15}{d+1} + \frac{15}{3} = 5 - \frac{15}{d+1}\text{cm}$$

Note que se d for menor que 2 então a variação é negativa, mas isso não é um problema, pois faz sentido físico. A equação de altura é $h(d) = h(2) + 5 - \frac{15}{d+1} = 105 - \frac{15}{d+1}$cm, então $h(4) = 105 - 3 = 102$cm, $h(14) = 105 - 1 = 104$cm, $h(0) = 105 - 15 = 90$cm.

Derivadas

- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln x) = \frac{1}{x}$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$

Integrais

- $\int x^n \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
- $\int e^x \mathrm{d}x = e^x + C$
- $\int \sin x \mathrm{d}x = -\cos x + C$
- $\int \cos x \mathrm{d}x = \sin x + C$
- $\int \frac{1}{x} \mathrm{d}x = \ln |x| + C$
- $\int \frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x = \arctan x + C$

Regras de derivação

- Regra do produto
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
- Regra do quociente
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$
- Regra da cadeia
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(g(x))\right] = f'(g(x))g'(x)$$

Regras e técnicas de integração

- Regra da substituição
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\mathrm{d}x = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\mathrm{d}u$$
- Integral por partes
$$\int f(x)g'(x)\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\mathrm{d}x \qquad \text{ou} \qquad \int u\mathrm{d}v = uv - \int v\mathrm{d}u$$