Tópicos de Álgebra Linear - Prova 2

06 de Fevereiro de 2015

Nome: ____

Questão 1 .... $\boxed{30}$

Calcule os autovalores e autovetores das seguintes transformações:

(a) $\boxed{10}$ $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$T(x, y, z) = (x + z, 2x - y, -x + 3z).$$

Solution: A matriz de T é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{aligned} det(A - xI) &= (1 - x)(-1 - x)(3 - x) - (1 + x) \\ &= -(1 + x)[(1 - x)(3 - x) + 1] \\ &= -(1 + x)(x - 2)^2. \end{aligned}$$

As raízes do polinômio são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.

Para $\lambda_1 = 2$,

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

O núcleo dessa matriz é dada por $z = x$ e $y = 2x/3$, então os autovetores são do tipo $(x, 2x/3, x), x \neq 0$.

Para $\lambda_1 = -1$,

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

O núcleo dessa matriz é dada por $x = z = 0$, então os autovetores são do tipo $(0, y, 0), y \neq 0$.

(b) $\boxed{10}$ $T : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$ dado por

$$T(z, w) = (z + iw, iz + w).$$

Solution: A matriz desse operador é

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico é

$$det(A - xI) = (1-x)^2 + 1.$$

A solução é $x = 1 \pm i$.
Para $\lambda_1 = 1 + i$, temos

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -i & i \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

O núcleo dessa matriz é dado por $y = x$, então os auvetores são do tipo $(x, x), x \neq 0$.
Para $\lambda_2 = 1 - i$, temos

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} i & i \\ i & i \end{bmatrix}.$$

O núcleo dessa matriz é dado por $y = -x$, então os auvetores são do tipo $(x, -x), x \neq 0$.

(c) $\boxed{10}$ $T : V \to V$, onde V é o espaço das seqûencias limitadas nos reais, T dada por

$$T(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots) = (\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \frac{\xi_3}{3}, \dots, \frac{\xi_n}{n}, \dots).$$

Solution: Nesse caso, V não tem dimensão finita, então não tem matriz, nem polinômio característico. Sejam λ e $v \neq 0$ um autovalor e um autovetor associado, respectivamente. Daí, $Tv = \lambda v$, ou seja

$$(\xi_1, \frac{\xi_2}{2}, \dots) = \lambda(\xi_1, \xi_2, \dots),$$

isso quer dizer que $\xi_i / i = \lambda \xi_i, \forall i \in \mathbb{N}$. Para que $v \neq 0$, existe um índice j tal que $\xi_j \neq 0$, daí $\xi_j / j = \lambda \xi_j$ implica em $\lambda = 1/j$. Então, existem infinitos autovalores $\lambda_j = 1/j$. Para $i \neq j$, $\xi_i / i = \lambda_j \xi_i = \xi_i / j$, implica em $\xi_i = 0$. Portanto, os autovetores associados a λ_j são os múltiplos do vetor canônico e_j.

Questão 2 .... $\boxed{30}$

Mostre ou dê um contra-exemplo:

(a) $\boxed{10}$ Seja V de dimensão n, e T operador linear. Se T tem n autovalores distintos, então T é diagonalizável.

Solution: Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independente, de modo que se T tem n autovalores distintos, então T tem n auvalores linearmente independente. Daí, existe uma base para V formada por autovetores de T.

(b) $\boxed{10}$ Se A é uma matriz real simétrica λ_1 é seu maior autovalor, então

$$\|A\|_2 = \lambda_1.$$

Solution: Falso, basta considerar $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Seus autovalores são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Para $x = (a, b)$ com $\|x\|_2 = 1$, temos

$$\begin{aligned} \|Ax\|_2^2 &= 4a^2 + b^2 \\ &= 3b^2 + (a^2 + b^2) = 3a^2 + 1. \end{aligned}$$

Então,

$$\|A\|_2 = \max_{\|x\|_2=1} \|Ax\|_2 = \max_{a^2+b^2=1} \sqrt{3a^2+1} = 2.$$

Alternativamente, pode-se escolher as matrizes

$$U = I \qquad \text{e} \qquad V = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de modo que

$$U^T AV = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

é uma decomposição em valores singulares de A, com $\sigma_1 = 2$ e $\sigma_2 = 1$. Logo $\|A\|_2 = \sigma_1 = 2$.

(c) $\boxed{10}$ Se todos os autovalores de um operador são iguais, então o operador é diagonalizável.

Solution: Falso, seja $T(x, y) = (y, 0)$. O único autovalor é 0, mas $\mathrm{Nu}(T) = [(1, 0)]$.

Questão 3 .... $\boxed{20}$

Seja V espaço vetorial com produto interno de dimensão finita, e $T, S : V \to V$ dados por

$$Tw = \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v, \qquad\qquad S = I - 2T,$$

onde $v \neq 0$ é um vetor fixo de V.

(a) $\boxed{10}$ Encontre T^*, o operador adjunto de T, e S^*, o operador adjunto de S.

Solution: Para todo $w, u \in V$, temos

$$\begin{aligned} \langle Tw, u\rangle &= \left\langle \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v, u \right\rangle \\ &= \frac{\langle w, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \langle v, u\rangle \\ &= \left\langle w, \frac{\overline{\langle v, u\rangle}}{\langle v, v\rangle} v \right\rangle \\ &= \left\langle w, \frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v \right\rangle \\ &= \langle w, Tu\rangle . \end{aligned}$$

Pela definição de operador adjunto, $T^* = T$. Daí, $S^* = (I - 2T)^* = I - 2T^* = I - 2T = S$.

(b) $\boxed{10}$ Encontre os autovalores de autovetores de T, e de S.

Solution: Note que $\mathrm{Nu}(T) = \{w | \langle w, v\rangle = 0\}$. Dessa maneira, 0 é um autovalor, e os autovetores associados são os vetores ortogonais a v. Isso implica em uma multiplicidade $\dim(V) - 1$ para $\lambda = 0$ (pois T é auto-adjunta). Como $\mathrm{Im}(T) = [v]$, então devemos ter v como autovetor. Daí, seja λ autovalor, com v autovetor. Daí,

$$Tv = \lambda \Rightarrow \frac{\langle v, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v = \lambda v.$$

Logo, $\lambda = 1$.

Para S, vamos usar os autovalores e autovetores de T. Para $w \neq 0$ ortogonal a v, temos $Tw = 0$, e daí,

$$Sw = w - 2Tw = w,$$

Logo $\lambda = 1$ é autovalor com multiplicidade $\dim(V) - 1$ e os autovetores são os vetores ortogonais a v. Para v, temos $Tv = v$, e daí,

$$Sv = v - 2Tv = v - 2v = -v.$$

Logo $\lambda = -1$ é autovalor e os autovetores são múltiplos de v.

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Dados os pontos

x	-1	1	2
y	3	5	8

Encontre a função quadrática que passa na origem, que melhor aproxima esses pontos, no sentido de quadrados mínimos.

Solution: Se buscamos uma função quadrática que passa na origem, então devemos escolher $f(x) = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2$. Logo, $\varphi_1(x) = x$ e $\varphi_2(x) = x^2$. Daí, calculamos

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad A = F^T F = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 18 \end{bmatrix}, \qquad b = F^T y = \begin{bmatrix} 18 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

A solução é

$$
\begin{aligned}
\alpha &= \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 8 & 18 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 18 \\ 40 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 9 & -4 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 20 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{11} \begin{bmatrix} 1 \\ 24 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1/11 \\ 24/11 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$