Cálculo Diferencial e Integral II - Turma B

09 de Abril de 2015

1. Determine:

   (a) $\boxed{10}$ A equação do plano que passo nos pontos $P = (2, -1, 0)$, $Q = (3, 1, 2)$ e $R = (0, 1, 1)$.

   Solution: Temos $\overrightarrow{PQ} = Q - P = (1, 2, 2)$ e $\overrightarrow{PR} = R - P = (-2, 2, 1)$. A normal é $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}$.

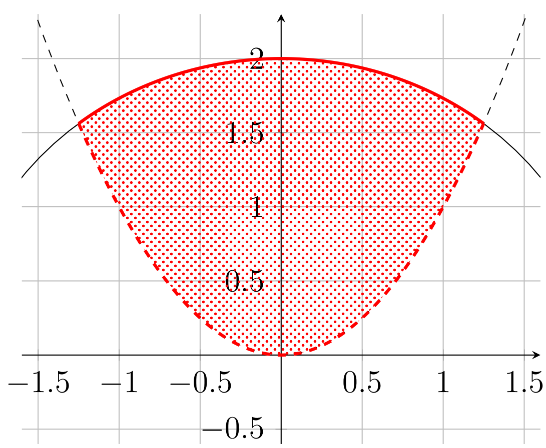
$$\overrightarrow{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -2\hat{i} - 5\hat{j} + 6\hat{k}.$$

   Daí, a equação do plano é $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, onde (A, B, C) é a normal, e (x_0, y_0, z_0) é algum dos pontos. Logo,

$$-2(x - 2) - 5(y + 1) + 6z = 0.$$

   (b) $\boxed{10}$ O domínio e um esboço do domínio de $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} + \ln(y - x^2)$

   Solution: A raiz só existe para argumentos não-negativos, daí $4 - x^2 - y^2 \geq 0$. Logo, $x^2 + y^2 \leq 4$. O logaritmo só existe para argumentos positivos, daí $y - x^2 > 0$, isto é $y > x^2$. Esboçando:



   (c) $\boxed{10}$ As derivadas de primeira ordem de $f(x, y) = \ln(2x - 3y) + \sqrt{1 - xy}$.

   Solution:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2}{2x - 3y} + \frac{-y}{2\sqrt{1 - xy}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{-3}{2x - 3y} + \frac{-x}{2\sqrt{1 - xy}}$$

   (d) $\boxed{10}$ As derivadas de primeira ordem de $f(x, y, z) = yze^{-x^2} + xz\ln(y)$.

Solution:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = -2xyze^{-x^2} + z\ln(y)$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = ze^{-x^2} + \frac{xz}{y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = ye^{-x^2} + x\ln(y).$$

2. Mostre que os limites abaixo não existem:

(a) $\boxed{10}$ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$

Solution: No caminho $x = t$ e $y = 0$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2 0}{t^4+0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t^4} = 0.$$

No caminho $x = t$ e $y = t^2$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^2t^2}{t^4+t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{t^4}{2t^4} = \frac{1}{2}.$$

(b) $\boxed{10}$ $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{(x-y)^2+(y-z)^2}{x^2+y^2+z^2}$

Solution: No caminho $x = t$, $y = 0$ e $z = 0$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{(t-0)^2+(0-0)^2}{t^2+0^2+0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1.$$

No caminho $x = 0$, $y = t$ e $z = 0$, temos

$$\lim_{t\to 0} \frac{(0-t)^2+(t-0)^2}{0^2+t^2+0^2} = \lim_{t\to 0} \frac{2t^2}{t^2} = 2.$$

3. Considere a função $f(x,y) = (x+1)^2 + 4(y-1)^2$.

(a) $\boxed{5}$ Calcule a **aproximação linear** dessa função em torno do ponto $(x,y) = (0,0)$.

Solution: As derivadas de f são

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(x+1),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 8(y-1).$$

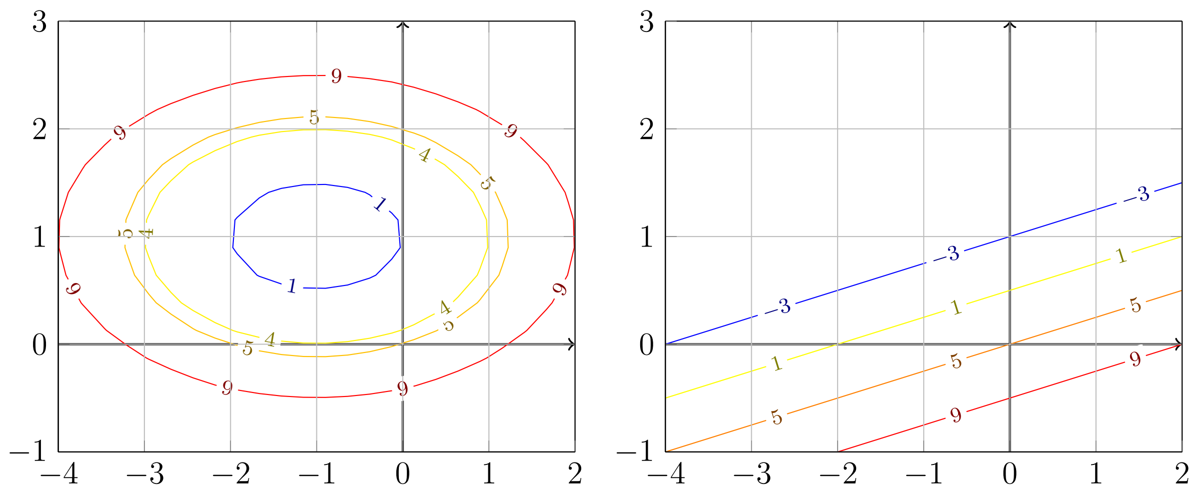
A aproximação linear é

$$\begin{aligned} L(x,y) &= f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)(y-0) \\ &= 5 + 2x - 8y. \end{aligned}$$

(b) $\boxed{5}$ Mostre que o **plano tangente** à função f no ponto $(0,0,f(0,0))$ só se intercepta com a superfície $z = f(x,y)$ em um ponto.

Solution: O plano tangente tem equação $z = L(x,y)$, então já está calculado. Basta fazer a igualdade $L(x,y) = f(x,y)$ e procurar a solução. Como $f(x,y) = (x+1)^2 + 4(y-1)^2 = x^2 + 2x + 1 + 4y^2 - 8y + 4 = x^2 + 2x + 4y^2 - 8y + 5$, a igualdade $f(x,y) = L(x,y)$ resulta em $x^2 + 4y^2 = 0$, que só tem solução $x = 0$ e $y = 0$.

(c) $\boxed{10}$ Faça as **curvas de nível** da função e da aproximação linear obtida no item anterior. **Indique os valores nas curvas**, e faça ao menos 4 curvas para cada caso, **incluindo uma que passe em** $(0,0)$.



(d) $\boxed{5}$ A equação $z = f(x,y)$ representa qual quádrica?

Solution: $z = (x+1)^2 + 4(y-1)^2$ é uma parabolóide elíptico saindo do ponto $(-1,1,0)$.

(e) $\boxed{5}$ A equação $z^2 = f(x,y)$ representa qual quádrica?

Solution: $z^2 = (x+1)^2 + 4(y-1)^2$ é um cone saindo do ponto $(-1,1,0)$.

4. Uma função $u(t,x)$ satisfaz a **equação da onda** com velocidade de propagação $c > 0$ se

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(a) $\boxed{10}$ Verifique que a função $u(t,x) = A[\sin(x+\pi t) + \sin(x-\pi t)]$ **satisfaz a equação da onda**, e determine sua **velocidade de propagação**, onde A é uma constante diferente de zero.

Solution: Sem usar as propriedades trigonométricas,

$$\begin{aligned} u_t(t,x) &= A[\pi\cos(x+\pi t) + (-\pi)\cos(x-\pi t)] \\ u_{tt}(t,x) &= A[\pi^2(-\sin(x+\pi t)) - (-\pi)^2\sin(x-\pi t)] \\ &= -A\pi^2[\sin(x+\pi t) + \sin(x-\pi t)] u_x(t,x) \quad &= A[\cos(x+\pi t) + \cos(x-\pi t)] \\ u_{xx}(t,x) &= A[-\sin(x+\pi t) - \sin(x-\pi t)] \\ &= -A[\sin(x+\pi t) + \sin(x-\pi t)] \end{aligned}$$

Multiplicando $u_{xx}(t,x)$ por π^2, obtemos $u_{tt}(t,x)$ de modo que a equação é satisfeito com $c = \pi$.

Usando as propriedades trigonométricas,

$$\begin{aligned} u(t,x) &= A[\sin(x)\cos(\pi t) + \sin(\pi t)\cos(x) + \sin(x)\cos(\pi t) - \sin(\pi t)\cos(x)] \\ &= 2A\sin(x)\cos(\pi t) \\ u_t(t,x) &= -2A\pi\sin(x)\sin(\pi t) \\ u_{tt}(t,x) &= -2A\pi^2\sin(x)\cos(\pi t) \\ u_x(t,x) &= 2A\cos(x)\cos(\pi t) \\ u_{xx}(t,x) &= -2A\sin(x)\cos(\pi t). \end{aligned}$$

Mesma conclusão.

(b) $\boxed{10}$ Encontre os **menores valores** $T > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $u(t+T,x) = u(t,x)$, e $u(t,x+\lambda) = u(t,x)$, para todo (t,x).

Solution: Usando as propriedades trigonométricas, temos $u(t,x) = 2A\sin(x)\cos(\pi t)$. Daí,

$$u(t+T,x) = u(t,x) \Longrightarrow 2A\sin(x)\cos(\pi t + \pi T) = 2A\sin(x)\cos(\pi t). \tag{1}$$

Como vale para todo x, podemos escolher x tal que $\sin(x) \neq 0$, e portanto $\cos(\pi t + \pi T) = \cos(\pi t)$ para todo t. Isto é, πT é suficiente para dar uma volta completa no círculo trigonométrico. Logo, $\pi T = 2\pi$, isto é, $T = 2$. Analogamente, podemos encontra $\lambda = 2\pi$.

Derivadas

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^n) = nx^{n-1}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\cos(x)) = -\sin(x)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^x) = e^x$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sin(x)) = \cos(x)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln(x)) = \dfrac{1}{x}$

Identidades Trigonométricas

- $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$.
- $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$.
- $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.
- $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$.