12.1 Exercícios

1. Suponha que, a partir da origem, você tenha percorrido uma distância de quatro unidades ao longo do eixo x no sentido positivo e então uma distância de três unidades para baixo. Quais as coordenadas de sua posição atual?

2. Esboce os pontos $(0, 5, 2)$, $(4, 0, -1)$, $(2, 4, 6)$ e $(1, -1, 2)$ em um mesmo conjunto de eixos coordenados.

3. Qual dos pontos está mais próximo do plano xz: $P(6, 2, 3)$, $Q(-5, -1, 4)$ ou $R(0, 3, 8)$? Qual ponto pertence ao plano yz?

4. Quais são as projeções do ponto $(2, 3, 5)$ nos planos xy, yz e xz? Desenhe uma caixa retangular que tenha vértices opostos na origem e em $(2, 3, 5)$ e com faces paralelas aos planos coordenados. Nomeie todos os vértices da caixa. Determine o comprimento da diagonal dessa caixa.

5. Descreva e esboce no $\mathbb{R}^3$ a superfície representada pela equação $x + y = 2$.

6. (a) Qual a representação da equação $x = 4$ em $\mathbb{R}^2$? Em $\mathbb{R}^3$? Faça um esboço delas.
   (b) Qual a representação da equação $y = 3$ em $\mathbb{R}^3$? O que $z = 5$ representa? Qual a representação do par de equações $y = 3$ e $z = 5$? Em outras palavras, descreva o conjunto de pontos (x, y, z) tal que $y = 3$ e $z = 5$. Ilustre com um esboço.

7. Mostre que o triângulo com vértices em $P(-2, 4, 0)$, $Q(1, 2, -1)$ e $R(-1, 1, 2)$ é um triângulo eqüilátero.

8. Encontre o comprimento dos lados do triângulo com vértices $A(1, 2, -3)$, $B(3, 4, -2)$ e $C(3, -2, 1)$. O triângulo ABC é retângulo? É isósceles?

9. Determine se os pontos estão alinhados.
   (a) $A(5, 1, 3)$, $B(7, 9, -1)$, $C(1, -15, 11)$
   (b) $K(0, 3, -4)$, $L(1, 2, -2)$, $M(3, 0, 1)$

10. Determine a distância entre $(3, 7, -5)$ e cada um dos seguintes.
    (a) Plano xy (b) Plano yz
    (c) Plano xz (d) Eixo x
    (e) Eixo y (f) Eixo z

11. Determine a equação da esfera com centro em $(1, -4, 3)$ e raio 5. Qual é a interseção dessa esfera com o plano xz?

12. Determine a equação da esfera com centro em $(6, 5, -2)$ e raio $\sqrt{7}$. Descreva sua interseção com os planos coordenados.

13. Determine a equação da esfera que passa pelo ponto $(4, 3, -1)$ e tem centro em $(3, 8, 1)$.

14. Determine a equação da esfera que passa pela origem e tem centro em $(1, 2, 3)$.

15–18 □ Mostre que a equação representa uma esfera e determine seu centro e raio.

15. $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 2z = 11$

16. $x^2 + y^2 + z^2 = 4x - 2y$

17. $x^2 + y^2 + z^2 = x + y + z$

18. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 16y = 1$

19. (a) Prove que o ponto médio do segmento de reta que liga $P_1(x_1, y_1, z_1)$ a $P_2(x_2, y_2, z_2)$ é
$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2}\right)$$
    (b) Determine o comprimento da mediana do triângulo com vértices em $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 0, 5)$ e $C(4, 1, 5)$.

20. Estabeleça a equação de uma esfera que tenha um diâmetro com pontos terminais dados por $(2, 1, 4)$ e $(4, 3, 10)$.

21. Estipule as equações das esferas com centro em $(2, -3, 6)$ e tangência (a) no plano xy, (b) no plano yz e (c) no plano xz.

22. Determine a equação da maior esfera com centro em $(5, 4, 9)$ contida no primeiro octante.

23–34 □ Descreva em palavras a região de $\mathbb{R}^3$ representada pela equação ou inequação.

23. $y = -4$
24. $x = 10$
25. $x > 3$
26. $y \geq 0$
27. $0 \leq z \leq 6$
28. $y = z$
29. $x^2 + y^2 + z^2 > 1$
30. $1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 25$
31. $x^2 + y^2 + z^2 - 2z < 3$
32. $x^2 + y^2 = 1$
33. $x^2 + z^2 \leqslant 9$
34. $xyz = 0$

35–38 □ Escreva inequações para descrever a região dada.

35. Semi-espaço de todos os pontos que estão à esquerda do plano xz.

36. Caixa retangular sólida no primeiro octante limitada pelos planos $x = 1$, $y = 2$ e $z = 3$.

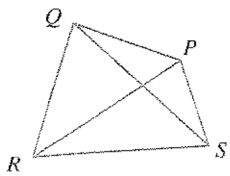
37. A região constituída por todos os pontos entre (mas não sobre) as esferas de raio r e R centradas na origem, onde $r < R$.

38. O hemisfério superior sólido da esfera de raio 2 centrada na origem.

4. Escreva cada combinação de vetores como um único vetor.

(a) $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR}$ (b) $\overrightarrow{RP} + \overrightarrow{PS}$

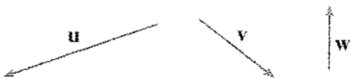
(c) $\overrightarrow{QS} - \overrightarrow{PS}$ (d) $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} + \overrightarrow{PQ}$



5. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.

(a) $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ (b) $\mathbf{u} - \mathbf{v}$

(c) $\mathbf{v} + \mathbf{w}$ (d) $\mathbf{w} + \mathbf{v} + \mathbf{u}$

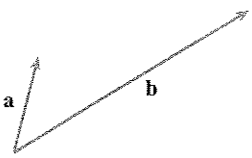


6. Copie os vetores na figura e use-os para desenhar os seguintes vetores.

(a) $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (b) $\mathbf{a} - \mathbf{b}$

(c) $2\mathbf{a}$ (d) $-\frac{1}{2}\mathbf{b}$

(e) $2\mathbf{a} + \mathbf{b}$ (f) $\mathbf{b} - 3\mathbf{a}$



7–12 □ Determine o vetor $\mathbf{a}$ com representação dada pelo segmento de reta orientado $\overrightarrow{AB}$. Desenhe $\overrightarrow{AB}$ e o equivalente com início na origem.

7. $A(2, 3)$, $B(-2, 1)$ **8.** $A(-2, -2)$, $B(5, 3)$

9. $A(-1, -1)$, $B(-3, 4)$ **10.** $A(-2, 2)$, $B(3, 0)$

11. $A(0, 3, 1)$, $B(2, 3, -1)$ **12.** $A(4, 0, -2)$, $B(4, 2, 1)$

13–16 □ Determine a soma dos vetores dados e ilustre geometricamente.

13. $\langle 3, -1 \rangle$, $\langle -2, 4 \rangle$ **14.** $\langle -2, -1 \rangle$, $\langle 5, 7 \rangle$

15. $\langle 0, 1, 2 \rangle$, $\langle 0, 0, -3 \rangle$ **16.** $\langle -1, 0, 2 \rangle$, $\langle 0, 4, 0 \rangle$

17–22 □ Determine $|\mathbf{a}|$, $\mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{a} - \mathbf{b}$, $2\mathbf{a}$ e $3\mathbf{a} + 4\mathbf{b}$.

17. $\mathbf{a} = \langle -4, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 2 \rangle$

18. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 5\mathbf{j}$

19. $\mathbf{a} = \langle 6, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 5, -2 \rangle$

20. $\mathbf{a} = \langle -3, -4, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, 2, -3 \rangle$

21. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

22. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

23–25 □ Determine o vetor unitário com mesma direção e sentido que o vetor dado.

23. $\langle 9, -5 \rangle$ **24.** $12\mathbf{i} - 5\mathbf{j}$

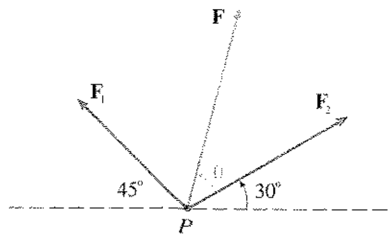
25. $8\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

26. Ache um vetor que possui a mesma direção que $\langle -2, 4, 2 \rangle$, mas tem comprimento 6.

27. Se $\mathbf{v}$ está no primeiro quadrante e faz um ângulo de $\pi/3$ com o eixo x-positivo e $|\mathbf{v}| = 4$, ache as componentes de $\mathbf{v}$.

28. Se uma criança puxa um trenó na neve com força de 50 N a um ângulo de 38° com relação à horizontal, ache as componentes horizontal e vertical da força.

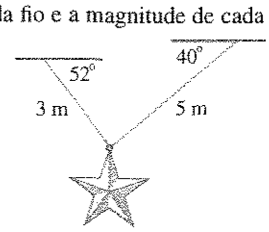
29. Duas forças $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ com grandezas 10 lb e 12 lb agem sobre um objeto em um ponto P como mostrado na figura. Determine a força resultante $\mathbf{F}$ agindo em P assim como sua magnitude, direção e sentido. (Indique a direção determinando o ângulo θ exposto na figura.)



30. Velocidades têm módulo, direção e sentido, sendo portanto vetores. O módulo de uma velocidade é chamado *rapidez*. Suponha que esteja ventando na direção N45°W a uma velocidade de 50 km/h. (Isso significa que a direção da qual está ventando está 45° a oeste da direção com sentido para o norte.) Um piloto está virando seu avião na direção N60°E a uma velocidade relativa (velocidade em ar parado) de 250 km/h. O *curso verdadeiro* ou *trajetória* do avião é a direção da resultante dos vetores velocidades do avião e do vento. A *rapidez em relação ao solo* do avião é o módulo da resultante. Determine a trajetória real e a rapidez em relação ao solo do avião.

31. Uma mulher anda em direção ao oeste no tombadilho de um navio a 3 mi/h. O navio está se movendo em direção ao norte com rapidez de 22 mi/h. Determine a rapidez e a direção da mulher em relação à superfície da água.

32. Cordas de 3 m e 5 m de comprimento são atadas na decoração natalina que está suspensa sobre uma praça. A decoração tem uma massa de 5 kg. As cordas, atadas em diferentes alturas, fazem ângulos de 52° e 40° com a horizontal. Determine a tensão em cada fio e a magnitude de cada tensão.



12.3 Exercícios

1. Quais das seguintes expressões têm significado? Quais não fazem sentido? Explique.
(a) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ (b) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$
(c) $|\mathbf{a}|(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ (d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$
(e) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{c}$ (f) $|\mathbf{a}| \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

2. Determine o produto escalar de dois vetores cujas normas são respectivamente 6 e $\frac{1}{3}$ e o ângulo entre eles é $\pi/4$.

3–10 ▫ Determine $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

3. $\mathbf{a} = \langle 4, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 6 \rangle$

4. $\mathbf{a} = \langle \frac{1}{2}, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -8, -3 \rangle$

5. $\mathbf{a} = \langle 5, 0, -2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, -1, 10 \rangle$

6. $\mathbf{a} = \langle s, 2s, 3s \rangle$, $\mathbf{b} = \langle t, -t, 5t \rangle$

7. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 5\mathbf{i} + 9\mathbf{k}$

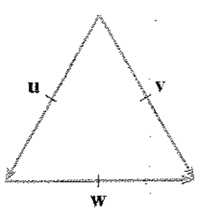
8. $\mathbf{a} = 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

9. $|\mathbf{a}| = 12$, $|\mathbf{b}| = 15$, o ângulo entre **a** e **b** é $\pi/6$

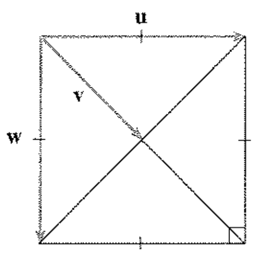
10. $|\mathbf{a}| = 4$, $|\mathbf{b}| = 10$, o ângulo entre **a** e **b** é 120°

11–12 ▫ Se **u** é um vetor unitário, determine $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w}$.

11.



12.



13. (a) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$.
(b) Mostre que $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$.

14. Um vendedor vende a hambúrgueres, b cachorros-quentes e c refrigerantes em um determinado dia. Ele cobra \$ 2 o hambúrguer, \$ 1,50 o cachorro-quente e \$ 1 o refrigerante. Se $\mathbf{A} = \langle a, b, c \rangle$ e $\mathbf{P} = \langle 2, 1{,}5, 1 \rangle$, qual o significado do produto escalar $\mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$?

15–20 ▫ Determine o ângulo entre os vetores. (Estabeleça inicialmente uma expressão exata e depois aproxime o valor até o grau mais próximo.)

15. $\mathbf{a} = \langle 3, 4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 12 \rangle$

16. $\mathbf{a} = \langle \sqrt{3}, 1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 5 \rangle$

17. $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 3 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 4, 0, -1 \rangle$

18. $\mathbf{a} = \langle 6, -3, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 2, 1, -2 \rangle$

19. $\mathbf{a} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

20. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$

21–22 ▫ Determine, aproximando o valor até o grau mais próximo, os três ângulos do triângulo cujos vértices são dados.

21. $A(1, 0)$, $B(3, 6)$, $C(-1, 4)$

22. $D(0, 1, 1)$, $E(-2, 4, 3)$, $F(1, 2, -1)$

23–28 ▫ Determine se os vetores dados são ortogonais, paralelos ou nenhum dos dois.

23. (a) $\mathbf{a} = \langle -5, 3, 7 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 6, -8, 2 \rangle$
(b) $\mathbf{a} = \langle 4, 6 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -3, 2 \rangle$
(c) $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$
(d) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = -3\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$

24. (a) $\mathbf{u} = \langle -3, 9, 6 \rangle$, $\mathbf{v} = \langle 4, -12, -8 \rangle$
(b) $\mathbf{u} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$
(c) $\mathbf{u} = \langle a, b, c \rangle$, $\mathbf{v} = \langle -b, a, 0 \rangle$

25. Use os valores para decidir se o triângulo com vértices $P(1, -3, -2)$, $Q(2, 0, -4)$, e $R(6, -2, -5)$ é retângulo.

26. Para que valores de b são os vetores $\langle -6, b, 2 \rangle$ e $\langle b, b^2, b \rangle$ ortogonais?

27. Determine um vetor unitário ortogonal $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ e $\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

28. Ache dois valores unitários que façam um ângulo de 60º com $\mathbf{v} = \langle 3, 4 \rangle$.

29–33 ▫ Determine os cossenos diretores e os ângulos diretores do vetor. (Forneça o ângulo diretor aproximado até o grau mais próximo.)

29. $\langle 3, 4, 5 \rangle$

30. $\langle 1, -2, -1 \rangle$

31. $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

32. $2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

33. $\langle c, c, c \rangle$, onde $c > 0$

34. Se um vetor tem ângulos diretores $\alpha = \pi/4$ e $\beta = \pi/3$, determine o terceiro ângulo diretor γ.

35–40 ▫ Determine o vetor projeção e a projeção escalar de **b** sobre **a**.

35. $\mathbf{a} = \langle 3, -4 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 5, 0 \rangle$

36. $\mathbf{a} = \langle 1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -4, 1 \rangle$

37. $\mathbf{a} = \langle 4, 2, 0 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 1, 1, 1 \rangle$

38. $\mathbf{a} = \langle -1, -2, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 3, 3, 4 \rangle$

39. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

40. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

41. Mostre que o vetor $\text{orth}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = \mathbf{b} - \text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ é ortogonal a **a**. (Esse vetor é chamado **projeção ortogonal** de **b**.)

42. Para os vetores do Exercício 36, determine $\text{orth}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ e ilustre esboçando os vetores **a**, **b**, $\text{proj}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$ e $\text{orth}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b}$.

43. Se $\mathbf{a} = \langle 3, 0, -1 \rangle$, determine um vetor **b** tal que $\text{comp}_{\mathbf{a}}\,\mathbf{b} = 2$.

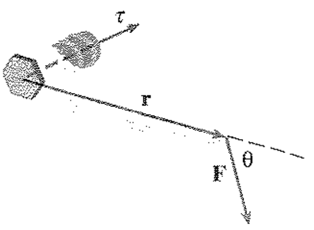


FIGURA 4

A idéia de produto vetorial aparece muito freqüentemente em física. Em particular, considere uma força **F** agindo em um corpo rígido em um ponto fixado dado pelo vetor de posição **r**. (Por exemplo: se apertarmos um parafuso utilizando uma chave de boca como na Figura 4, conseguiremos o efeito de girá-lo.) O **torque** $\boldsymbol{\tau}$ (em relação à origem) é definido pelo produto vetorial dos vetores de posição e força

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

e mede a tendência de um corpo rodar em torno da origem. A direção do vetor torque indica o eixo de rotação. De acordo com o Teorema 6, o módulo do torque é

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta$$

onde θ é o ângulo entre o vetor de posição e o vetor força. Observe que o único componente da força **F** que pode causar a rotação do objeto é o perpendicular a **r**, ou seja, $|\mathbf{F}| \operatorname{sen} \theta$. O módulo do torque é igual à área do paralelogramo determinado por **r** e **F**.

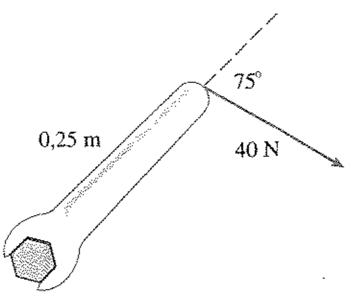


FIGURA 5

EXEMPLO 6 □ Um parafuso é apertado por uma chave de boca que aplica uma força de 40 N em uma chave de 0,25 m, como mostrado na Figura 5. Determine o módulo do torque em torno do centro do parafuso.

SOLUÇÃO O módulo do vetor torque é

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\tau}| &= |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\mathbf{r}||\mathbf{F}| \operatorname{sen} 75^\circ = (0{,}25)(40) \operatorname{sen} 75^\circ \\ &= 10 \operatorname{sen} 75^\circ \approx 9{,}66 \text{ N}\cdot\text{m} = 9{,}66 \text{ J} \end{aligned}$$

Se o parafuso tem a rosca direita, o vetor torque é

$$\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|\, \mathbf{n} \approx 9{,}66\mathbf{n}$$

onde **n** é um vetor unitário com direção perpendicular à página e sentido de entrar no papel. □

12.4 Exercícios

1–7 □ Determine o produto vetorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e verifique que ele é ortogonal **a** e **b**.

1. $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 0 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 0, 3, 1 \rangle$

2. $\mathbf{a} = \langle 5, 1, 4 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle -1, 0, 2 \rangle$

3. $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

4. $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

5. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

6. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + e^t\mathbf{j} + e^{-t}\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + e^t\mathbf{j} - e^{-t}\mathbf{k}$

7. $\mathbf{a} = \langle t, t^2, t^3 \rangle, \quad \mathbf{b} = \langle 1, 2t, 3t^2 \rangle$

8. Se $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{k}$ e $\mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$, determine $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Esboce **a**, **b** e $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ como vetores com início na origem.

9. Diga se as afirmações a seguir fazem sentido. Se não fizerem, explique por quê. Se fizerem, diga se correspondem a um vetor ou a um escalar.

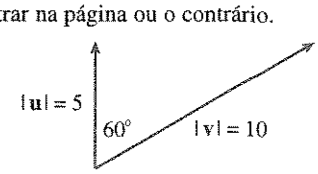
(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (b) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$

(c) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ (d) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$

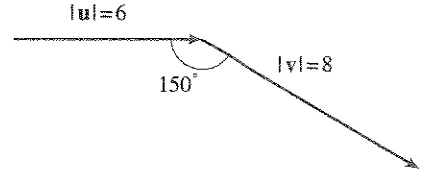
(e) $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$ (f) $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$

10–11 □ Calcule $|\mathbf{u} \times \mathbf{v}|$ e determine se $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ tem o sentido de entrar na página ou o contrário.

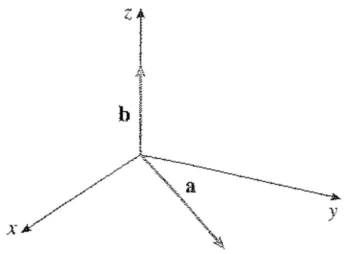
10.



11.



12. A figura mostra um vetor **a** pertencente ao plano xy e um vetor **b** na direção de **k**. Seus módulos são $|\mathbf{a}| = 3$ e $|\mathbf{b}| = 2$.
(a) Calcule $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$.
(b) Utilize a regra da mão direita para decidir se os componentes de $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ são positivos, negativos ou nulos.



13. Se $\mathbf{a} = \langle 1, 2, 1 \rangle$ e $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 3 \rangle$, calcule $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ e $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$.

14. Se $\mathbf{a} = \langle 3, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle -1, 1, 0 \rangle$ e $\mathbf{c} = \langle 0, 0, -4 \rangle$, mostre que $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$.

15. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a $\langle 1, -1, 1 \rangle$ quanto a $\langle 0, 4, 4 \rangle$.

16. Determine dois vetores unitários que sejam ortogonais tanto a $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ quanto a $2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

17. Mostre que $\mathbf{0} \times \mathbf{a} = \mathbf{0} = \mathbf{a} \times \mathbf{0}$ para qualquer vetor **a** em V_3.

18. Mostre que $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} = 0$ para todos os vetores **a** e **b** em V_3.

19. Prove a Propriedade 1 do Teorema 8.

20. Prove a Propriedade 2 do Teorema 8.

21. Prove a Propriedade 3 do Teorema 8.

22. Prove a Propriedade 4 do Teorema 8.

23. Determine a área do paralelogramo com vértices em $A(-2, 1)$, $B(0, 4)$, $C(4, 2)$, e $D(2, -1)$.

24. Determine a área do paralelogramo com vértices em $K(1, 2, 3)$, $L(1, 3, 6)$, $M(3, 8, 6)$, e $N(3, 7, 3)$.

25–28 □ (a) Ache um vetor ortogonal ao plano que passa pelos pontos P, Q e R e (b) calcule a área do triângulo PQR.

25. $P(1, 0, 0)$, $Q(0, 2, 0)$, $R(0, 0, 3)$

26. $P(2, 1, 5)$, $Q(-1, 3, 4)$, $R(3, 0, 6)$

27. $P(0, -2, 0)$, $Q(4, 1, -2)$, $R(5, 3, 1)$

28. $P(2, 0, -3)$, $Q(3, 1, 0)$, $R(5, 2, 2)$

29–30 □ Calcule o volume do paralelepípedo determinado pelos vetores **a**, **b** e **c**.

29. $\mathbf{a} = \langle 6, 3, -1 \rangle$, $\mathbf{b} = \langle 0, 1, 2 \rangle$, $\mathbf{c} = \langle 4, -2, 5 \rangle$

30. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{c} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$

31–32 □ Calcule o volume do paralelepípedo com lados adjacentes PQ, PR e PS.

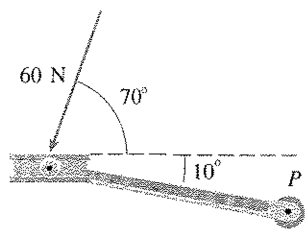
31. $P(2, 0, -1)$, $Q(4, 1, 0)$, $R(3, -1, 1)$, $S(2, -2, 2)$

32. $P(0, 1, 2)$, $Q(2, 4, 5)$, $R(-1, 0, 1)$, $S(6, -1, 4)$

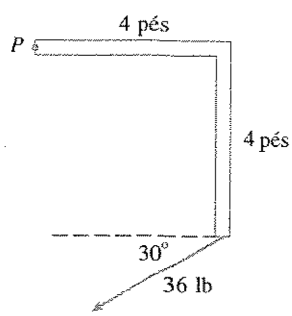
33. Utilize o produto misto para verificar se os vetores $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ e $\mathbf{c} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ são coplanares.

34. Use o produto misto para determinar se os pontos $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 4, 6)$, $R(3, -1, 2)$ e $S(6, 2, 8)$ pertencem ao mesmo plano.

35. O pedal de uma bicicleta é empurrado por um pé com uma força de 60 N, como mostrado. A haste do pedal tem 18 cm de comprimento. Determine o módulo do torque em P.



36. Determine a intensidade do torque em P se for aplicada uma força de 36 lb, como mostrado.



37. Uma chave de boca com 30 cm de comprimento posicionada ao longo do eixo y aperta um parafuso colocado na origem. Considere uma força aplicada no final do cabo da chave com direção dada por $\langle 0, 3, -4 \rangle$. Determine o módulo da força necessária para que o torque resultante no parafuso seja de 100 J.

38. Seja $\mathbf{v} = 5\mathbf{j}$ e seja **u** um vetor com norma 3 com início na origem e que gira no plano xy. Determine o máximo e o mínimo valor possível para $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$. Qual a direção e o sentido de $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$?

39. (a) Seja P um ponto não pertencente à reta L que passa pelos pontos Q e R. Mostre que a distância d do ponto P até a reta L é

$$d = \frac{|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|}{|\mathbf{a}|}$$

onde $\mathbf{a} = \overrightarrow{QR}$ e $\mathbf{b} = \overrightarrow{QP}$.
(b) Utilize a fórmula da parte (a) do exercício para determinar a distância do ponto $P(1, 1, 1)$ à reta que passa por $Q(0, 6, 8)$ e $R(-1, 4, 7)$.