Cálculo Diferencial e Integral I - Turma J

07 de Abril de 2015

Questão 1 . . . . [60]

Calcule

(a) (10 points) $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6}$;

Solution:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-3)} \lim_{x\to 2} \frac{(x+1)}{(x-3)} = \frac{3}{-1} = -3$$

(b) (10 points) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2x}$;

Solution:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{2x} &= \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sqrt{x+1}-1}{2x}\right)\left(\frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}\right) \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{x+1-1}{2x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x(\sqrt{x+1}+1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1}{2(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2(\sqrt{1+1}+1)} = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(c) (10 points) A **reta tangente** à curva $y = -3x^2+1$ no ponto da reta com $x = 1$;

Solution: A inclinação da reta tangente é a derivada da função $f(x) = -3x^2+1$ em $x = 1$. Daí, a derivada é $f'(x) = -6x$, e portanto a inclinação é $m = f'(1) = -6$. A reta tangente segue a equação $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde $x_0 = 1$ e $y_0 = f(x_0) = f(1) = -2$. Daí, $y = -2 - 6(x-1) = 4 - 6x$.

(d) (10 points) A derivada de $f(x) = x^2 - x + 2$ **pela definição**;

Solution: Pela definição,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-(x+h)+2-x^2+x-2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x-h+2-x^2+x-2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2-h}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} 2x+h-1 = 2x-1.
\end{aligned}$$

(e) (10 points) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1-2x-x^3+7x^2}{3x^2+5+12x^3}$.

Solution:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-2x-x^3+7x^2}{3x^2+5+12x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x^3}-\frac{2}{x^2}-1+\frac{7}{x}}{\frac{3}{x}+\frac{5}{x^3}+12} = -\frac{1}{12}.$$

(f) (10 points) $\lim_{x\to 1^-} \frac{2x-1}{x^2-1}$.

Solution:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1^-} \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)\frac{1}{x-1}.$$

Como $(2x-1)/(x+1)$ tende à $(2-1)/(1+1) = 1/2$ e $1/(x-1)$ tende à $-\infty$, então

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x-1}{x^2-1} = -\infty.$$

Questão 2 .... $\boxed{20}$

Classifique cada afirmação como verdadeira ou falsa, e **justifique**.

(a) (5 points) $\sqrt{x^2} = x$, para todo x.

Solution: Falso. Para $x=-1$ temos $\sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1 \neq x$.

(b) (5 points) $\frac{3x+5}{4x} = \frac{3+5}{4}$, para qualquer x diferente de zero.

Solution: Falso. Para $x=2$ temos $\frac{3x+5}{4x} = \frac{6+5}{8} = \frac{11}{8}$, mas $\frac{3+5}{4} = \frac{8}{4} = 2$.

(c) (5 points) Se $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to a^-} f(x)$ existem, então $\lim_{x\to a} f(x)$ existe.

Solution: Falso. A função $f(x)=1$, se $x>0$ e $f(x)=-1$, se $x<0$, os limites laterais existem, mas o limite não existe pois os limites laterais são diferentes.

(d) (5 points) A derivada de $(2x)^3$ é $3(2x)^2$.

Solution: Falso. $(2x)^3 = 2^3x^3 = 8x^3$, cuja derivada é $24x^2$, mas $3(2x)^2 = 3\times 2^2x^2 = 12x^2$.

Questão 3 .... $\boxed{10}$

Calcule a derivada das funções abaixo pela **regra do tombo**.

(a) (5 points) $f(x) = 4x^7 - \sqrt{3x} + \frac{3}{x^2}$.

Solution:

$$\begin{aligned} f(x) &= 4x^7 - \sqrt{3}\sqrt{x} + 3x^{-2} \\ f'(x) &= 28x^6 - \sqrt{3}\frac{1}{2}x^{-1/2} - 6x^{-3} \\ &= 28x^6 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}} - \frac{6}{x^3}. \end{aligned}$$

(b) (5 points) $f(x) = \dfrac{x^3 + \sqrt{x}}{x^{2/3}}$.

Solution:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^3}{x^{2/3}} + \frac{\sqrt{x}}{x^{2/3}} \\ &= x^{3-2/3} + x^{1/2-2/3} \\ &= x^{7/3} + x^{-1/6}, \\ f'(x) &= \frac{7}{3}x^{7/3-1} - \frac{1}{6}x^{-1/6-1} \\ &= \frac{7}{3}x^{4/3} - \frac{1}{6}x^{-7/6}. \end{aligned}$$

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Considere a função $f(x)$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 1. \\ \dfrac{3-x}{a+1}, & x > 1. \end{cases}$$

(a) (10 points) Encontre para quais valores de a a função acima é contínua.

Solution: Para $x \neq 1$ a função é contínua pois é polinomial por partes. Para $x = 1$ devemos fazer os limites laterais e fazê-los iguais. Daí,

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3-x}{a+1} = \frac{2}{a+1},$$

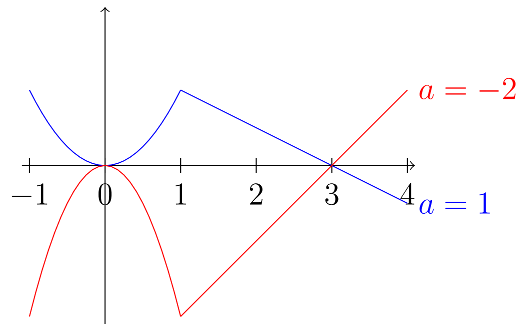
e

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} ax^2 = a.$$

Para serem iguais, devemos ter $a = 2/(a+1)$, isto é $a^2 + a - 2 = 0$. As soluções são $a = -2$ e $a = 1$. Como f está definida em 1 e é igual ao limite lateral, isto é suficiente.

(b) (10 points) Para cada valor de a obtido, faça um gráfico no intervalo $[-1, 4]$.

Solution: Para $a = 1$ temos


$a = -2$
$a = 1$
-1
0
1
2
3
4