

# Cônicas e suas relações com autovalores

Bruno Cezar Steinmetz \*  
Licenciatura em Matemática - UFPR  
*brste@live.com*

Prof. Dr. Abel Soares Siqueira  
Departamento de Matemática - UFPR  
*abelsiqueira@ufpr.br*

Dezembro, 2015

## Resumo

No presente trabalho, serão introduzidos conceitos fundamentais para o estudo de funções quadráticas. Inicialmente, será estudado o Polinômio de Taylor, ferramenta essencial em otimização, pois aparece em condições de otimalidade de segunda ordem de funções reais. Além disso, será apresentado um estudo da relação entre as cônicas e os autovalores de uma matriz, ou seja, a caracterização das cônicas em função dos autovalores da matriz que define a parte quadrática de sua expressão algébrica formal. Para auxiliar esse processo, usaremos mudança de coordenadas por meio de rotação e translação, para gerar uma forma simplificada da expressão algébrica. Além de facilitar os cálculos, essa forma simplificada deixa clara a relação com os autovalores. Dessa maneira, a partir de conclusões acerca do objeto central desse estudo dirigido, será enunciado, portanto, um teorema que auxilia no processo de identificação das cônicas e, então, aplicações por meio de exemplos. Esse estudo serve de prelúdio para o estudo de funções quadráticas, que em duas dimensões têm curvas de nível que são cônicas. O teorema pode ser usado para identificação do comportamento da função, e para estabelecer a existência de um minimizador.

**Palavras-chave:** Otimização. Cônicas. Autovalores. Autovetores.

---

\*Bolsista do Programa de Educação Tutorial - Universidade Federal do Paraná

# 1 Polinômio de Taylor

Muitas vezes no estudo de funções, se torna cômodo a utilização do Polinômio de Taylor em aproximações sucintas. Nesse sentido, faremos aqui uma breve introdução dessa importante ferramenta.

Inicialmente, iremos considerar funções de uma variável real.

Seja  $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável em  $\bar{x} \in X$ . O Polinômio de Taylor de primeira ordem de  $f$  em torno de  $\bar{x}$  é a aproximação linear

$$p_1(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x}),$$

e podemos escrever

$$f(x) = p_1(x) + r(x),$$

onde  $r(x)$  é tal que  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{r(x)}{x - \bar{x}} = 0$ .

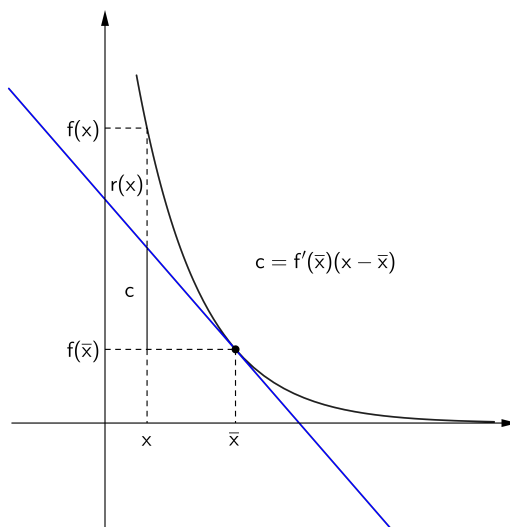


Figura 1: Resto de Taylor de ordem 1 de  $f$  em torno de  $\bar{x}$ .

Agora, considere  $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável até ordem  $n$  em  $\bar{x} \in X$ . O Polinômio de Taylor de ordem  $n$  de  $f$  em torno de  $\bar{x}$  é

$$p_n(x) = f(\bar{x}) + \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(\bar{x})}{k!} (x - \bar{x})^k,$$

e podemos escrever

$$f(x) = p_n(x) + r(x),$$

onde  $r(x)$  é tal que  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{r(x)}{(x - \bar{x})^n} = 0$ .

Para funções de  $n$  variáveis, estaremos interessados em estudar apenas os polinômios de Taylor de primeira e segunda ordem.

Considere  $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável em  $\bar{x} \in B$ . Então, o polinômio de Taylor de ordem 1 de  $f$  em torno de  $\bar{x}$  é

$$p_1(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}),$$

em que  $\nabla f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x}) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$ , e podemos escrever

$$f(x) = p_1(x) + r(x),$$

onde  $r(x)$  é tal que  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|} = 0$ .

Considere agora,  $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  duas vezes diferenciável em  $\bar{x} \in B$ . Então, o polinômio de Taylor de ordem 2 de  $f$  em torno de  $\bar{x}$  é

$$p_2(x) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T (x - \bar{x}) + \frac{1}{2} (x - \bar{x})^T \nabla^2 f(\bar{x}) (x - \bar{x}),$$

em que  $\nabla^2 f(\bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\bar{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\bar{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(\bar{x}) \end{bmatrix}$ , e podemos escrever

$$f(x) = p_2(x) + r(x),$$

onde  $r(x)$  é tal que  $\lim_{x \rightarrow \bar{x}} \frac{r(x)}{\|x - \bar{x}\|^2} = 0$ .

## 1.1 Taylor com resto de Lagrange

Ao aproximarmos uma função real por um polinômio de Taylor de ordem  $n$  cometemos certo erro. Foi Joseph Louis Lagrange quem deu uma função para o erro cometido por essa aproximação, que é o que conhecemos hoje por resto Lagrange.

Considere  $f : X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivável até ordem  $n + 1$  em  $\bar{x} \in X$ . Então, podemos escrever

$$f(x) = p_n(x) + r(x),$$

em que  $r(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - \bar{x})^{n+1}$  para algum  $\xi$  entre  $x$  e  $\bar{x}$ . Nesse caso,  $r(x)$  é denominado Resto de Lagrange.

Consideraremos agora  $f : B \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  e  $\bar{x}, d \in B$ . Se  $f$  for derivável até segunda ordem no segmento  $(\bar{x}, \bar{x} + d)$  então existe  $t \in (0, 1)$  tal que

$$f(\bar{x} + d) = f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^T d + \frac{1}{2} d^T \nabla^2 f(\bar{x} + td) d.$$

## 2 Autovalores e Autovetores

Considere um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo  $\mathbb{K}$  e  $T : V \rightarrow V$  um operador linear. Um autovetor de  $T$  é um vetor de  $V$ , com  $v \neq 0$ , tal que

$$T(v) = \lambda v,$$

para algum  $\lambda \in \mathbb{K}$ . Nesse caso,  $\lambda$  será chamado de autovalor associado ao autovetor  $v$ . Ou seja,

$$Aut_T(\lambda) = \{v\}.$$

A partir dos autovalores é possível obter um resumo completo das propriedades da representação matricial de  $T$ , que denotaremos por  $A$ . Assim, se  $\lambda_j$ , com  $j = 1, \dots, n$ , são os autovalores de  $A$ , então:

- $\det A = \lambda_1 \dots \lambda_n$ .
- $Tr(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$ .

## 3 Matrizes definidas positivas

**Teorema 1.** *Cada uma das afirmações abaixo são equivalentes para que a matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  seja definida positiva:*

- (I)  $x^T A x > 0$  para todos os vetores reais  $x$  não nulos.
- (II) Todos os autovalores de  $A$  são positivos.
- (III) Todas as submatrizes superiores  $A_k = A[1 : k, 1 : k]$  à esquerda têm determinantes positivos.

*Demonstração de  $(I) \Rightarrow (II)$ .* A condição (I) define uma matriz definida positiva. Vamos demonstrar que cada autovalor é positivo ( $\lambda_i > 0$ ).

Se  $Ax = \lambda x$ ,  $x \neq 0$ , então

$$x^T Ax = x^T \lambda x = \lambda \|x\|^2 > 0 \Leftrightarrow \lambda > 0.$$

□

*Demonstração de (II)  $\Rightarrow$  (I).* Pelo Teorema Espectral, todas as matrizes simétricas possuem um conjunto completo de autovetores ortonormais, todo  $x$  é uma combinação de  $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ . Então:

$$Ax = c_1 Ax_1 + \dots + c_n Ax_n = c_1 \lambda_1 x_1 + \dots + c_n \lambda_n x_n$$

Pela ortogonalidade de  $x_i^T x_j = 0$  e a normalização  $x_i^T x_i = 1$ , temos:

$$x^T Ax = c_1^2 \lambda_1 + \dots + c_n^2 \lambda_n > 0.$$

□

*Demonstração de (I)  $\Rightarrow$  (III).* Considere a matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , da forma

$$A = \begin{bmatrix} A_k & B \\ B^T & C \end{bmatrix},$$

onde  $A_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ .

Seja  $x \in \mathbb{R}^k$  não nulo, então

$$x^T A_k x = \begin{bmatrix} x^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k & B \\ B^T & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = y^T A y > 0.$$

Assim  $A_k$  é definida positiva e, pela condição (II), seus autovalores são positivos.

Logo,  $\det(A_k) > 0$ .

□

*Demonstração de (III)  $\Rightarrow$  (I).* Vamos provar por indução matemática sobre  $n$ :

Para  $n = 1$ : é trivial.

Para  $n = k$ : suponha válido para  $n = k$ , vamos provar para  $n = k + 1$ .

Considere  $A \in \mathbb{R}^{(k+1) \times (k+1)}$ ,  $A$  simétrica, tal que:  $A = \begin{bmatrix} A_k & b \\ b^T & c \end{bmatrix}$ , onde:

$A_k \in \mathbb{R}^{k \times k}$ ,  $b \in \mathbb{R}^k$  e  $c \in \mathbb{R}$ .

Tomando o vetor  $y$ , analisaremos dois casos:

- Caso  $y_n = 0$
- Caso  $y_n \neq 0$

Se  $y_n = 0$ , então

$$y = \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ com } x \in \mathbb{R}^k \text{ não nulo. Daí,}$$

$$y^T A y = \begin{bmatrix} x^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k & b \\ b^T & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} = x^T A_k x > 0,$$

pela hipótese de indução.

Se  $y_n \neq 0$ , então

$$y = y_n \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y^T A y = y_n^2 \begin{bmatrix} x^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k & b \\ b^T & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = y_n^2 (x^T A_k x + 2b^T x + c).$$

Para concluir, só resta que a função  $f(x) = x^T A_k x + 2b^T x + c$  seja positiva.

Mostraremos que  $f(x) \geq f(x^*)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^k$  onde  $x^* = -A_k^{-1}b$ .

Considere  $v = x - x^*$ . Então

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^* + v)^T A_k (x^* + v) + 2b^T (x^* + v) + c \\ &= f(x^*) + v^T A_k v. \end{aligned}$$

Como, pela hipótese de indução,  $v^T A_k v > 0$ , temos:  $f(x) \geq f(x^*)$ . Para concluir a prova, só resta provar, então, que  $f(x^*) > 0$ .

Note que  $f(x^*) = x^{*T} A_k x^* + 2b^T x^* + c = c + b^T x^* = c - b^T A_k^{-1} b$ . Analisemos agora a matriz inicial  $A$ :

$$A = \begin{bmatrix} A_k & b \\ b^T & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ b^T A_k^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_k & b \\ 0 & c - b^T A_k^{-1} b \end{bmatrix}.$$

Calculando então o determinante, temos

$$\det A = (c - b^T A_k^{-1} b) \det A_k.$$

Portanto,

$$f(x^*) = c - b^T A_k^{-1} b > 0.$$

□

## 4 Mudança de coordenadas

Considere  $P$  um ponto do plano com coordenadas  $(x_1, x_2)$ . Então as componentes de  $\overrightarrow{OP}$  também são  $(x_1, x_2)$  quando  $O$  é a origem do sistema, ou seja,

$$\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2) = (x_1, 0) + (0, x_2) = x_1 E_1 + x_2 E_2$$

onde  $E_1$  e  $E_2$  são os vetores canônicos do  $\mathbb{R}^2$ .

Assim, o ponto  $O = (0, 0)$  e os vetores  $E_1$  e  $E_2$  determinam um sistema de coordenadas ortogonal  $\{O, E_1, E_2\}$ .

Para resolvermos alguns problemas geométricos precisamos de um segundo sistema de coordenadas ortogonal determinado por uma origem  $O'$  e por vetores  $E'_1$  e  $E'_2$ .

As coordenadas de um ponto  $P$  no sistema de coordenadas  $\{O', E'_1, E'_2\}$  são definidas como os coeficientes da combinação linear que fizemos ao escrevermos  $\overrightarrow{O'P}$  em relação a  $E'_1$  e  $E'_2$ , ou seja, se

$$\overrightarrow{O'P} = x'_1 E'_1 + x'_2 E'_2,$$

então as coordenadas de  $P$  em  $\{O', E'_1, E'_2\}$  são  $P' = (x'_1, x'_2)$ .

### 4.1 Rotação

Considere um novo sistema de coordenadas que foi obtido a partir de uma rotação de um ângulo  $\theta$  no sistema original. Observe a imagem abaixo:

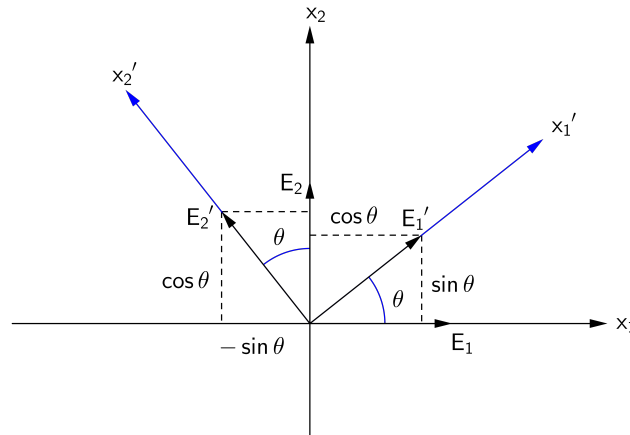


Figura 2: Rotação de um ângulo  $\theta$  no sistema original

Assim, temos que

$$\begin{cases} E'_1 = (\cos \theta, \operatorname{sen} \theta) \\ E'_2 = (-\operatorname{sen} \theta, \cos \theta) \end{cases}$$

Seja  $P \in \mathbb{R}^2$ . Vamos determinar as coordenadas de  $P$  em relação ao novo sistema de coordenadas obtido a partir da rotação  $\theta$ . Para tanto, devemos encontrar  $x'_1$  e  $x'_2$  tais que

$$\overrightarrow{O'P} = x'_1 E'_1 + x'_2 E'_2.$$

Substituindo  $E'_1$  e  $E'_2$ , temos que a equação acima é equivalente ao sistema linear abaixo:

$$\begin{cases} x'_1 \cos \theta - x'_2 \operatorname{sen} \theta = x_1 \\ x'_1 \operatorname{sen} \theta + x'_2 \cos \theta = x_2 \end{cases}$$

ou

$$R_\theta X = P,$$

onde  $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$  é chamada matriz de rotação e  $P = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ .

A solução é dada por

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = R_\theta^{-1} P = R_\theta^T P = \begin{bmatrix} \cos \theta & \operatorname{sen} \theta \\ -\operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

## 4.2 Translação

Consideremos o caso em que o novo sistema de coordenadas não coincida com o original, ou seja,  $O' \neq O$ . Nesse caso, dizemos que ocorreu uma translação no sistema.

Observe a Figura 3 abaixo:

Assim,

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}.$$

Portanto, se  $\overrightarrow{OO'} = (o_1, o_2)$ , então

$$\overrightarrow{O'P} = (x'_1, x'_2) = (x_1, x_2) - (o_1, o_2).$$

Logo, as coordenadas de  $P$  no novo sistema são dadas por

$$P = (x_1, x_2) - (o_1, o_2) = (x_1 - o_1, x_2 - o_2).$$



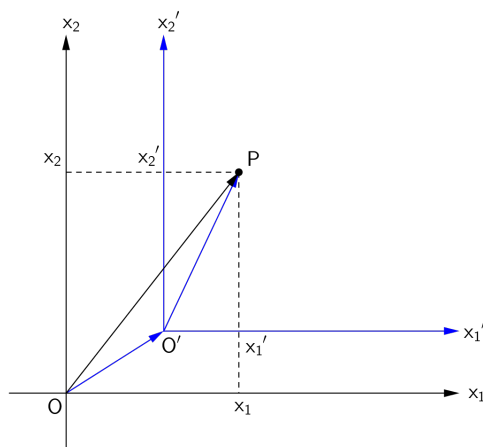


Figura 3: Coordenadas de um ponto  $P$  em dois sistemas (translação).

## 5 Cônicas

Do grego ***Konikós*** (que tem forma de cone) essas curvas são obtidas pela interseção de um plano secante com um cone de duas folhas. Essas figuras tiveram grande destaque já no século IV a.C – I a.C com Apolônio.

Apolônio de Perga (262 a.C – 190 a.C), matemático grego, mostrou que as seções cônicas eram obtidas a partir de um único cone. E é a partir disso que temos então as conhecidas curvas cônicas, utilizadas em diversos campos da ciência e tecnologia atual.

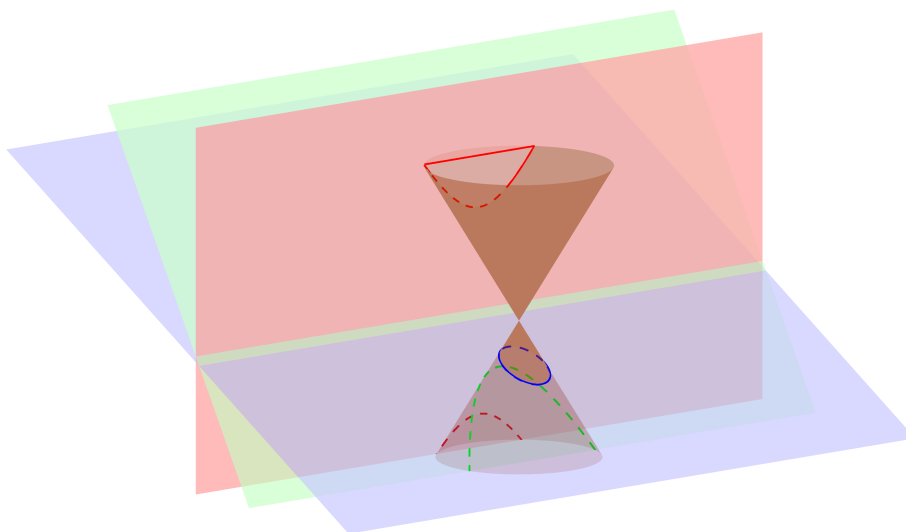


Figura 4: Representação das curvas cônicas.

Na Figura 4 acima, temos as representações de parábola, circunferência (caso particular de elipse), elipse e hipérbole, respectivamente.

No plano, uma cônica é o conjunto de pontos do  $\mathbb{R}^2$  que satisfazem uma expressão da forma

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0,$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ ,  $e$  e  $f$  são números reais ( $a$ ,  $b$  e  $c$  não simultaneamente nulos).

## 5.1 Elipse

A Elipse é a curva resultante da interseção de um cone com um plano secante e esse, por sua vez, secciona o cone em apenas uma de suas folhas.

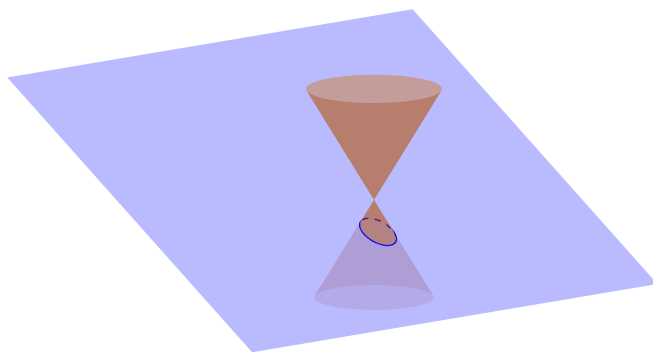


Figura 5: Interseção do plano secante com o cone formando a elipse.

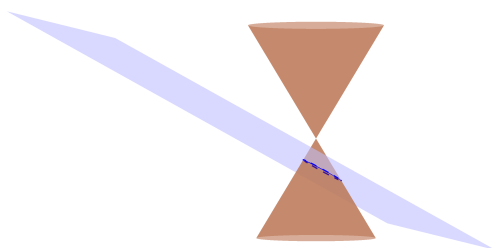


Figura 6: Interseção do plano secante com o cone formando a elipse.

### 5.1.1 Algebricidade da Elipse

**Definição 1.** *A elipse é o conjunto de pontos  $P$  do plano tais que a soma das distâncias de  $P$  a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  é constante, ou seja, se  $d(F_1, F_2) = 2c$ , então a elipse é o conjunto de pontos  $P$  tais que*

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a,$$

onde  $c < a$ .

**Proposição 1.** *i. A equação da elipse cujos focos são  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  é*

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

*ii. A equação da elipse cujos focos são  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$  é*

$$\frac{x_1^2}{b^2} + \frac{x_2^2}{a^2} = 1.$$

Em ambos os casos  $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ .

### 5.1.2 Geometria da Elipse

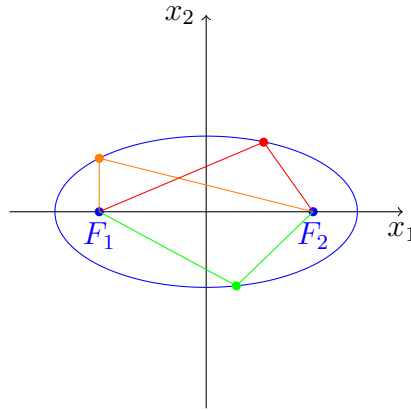


Figura 7: Representação de uma elipse no plano.

## 5.2 Hipérbole

A Hipérbole é a curva resultante da interseção de um cone com um plano secante e esse, por sua vez, secciona as duas folhas do cone e é perpendicular à base do mesmo.

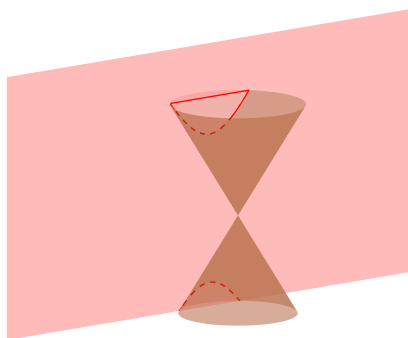


Figura 8: Interseção do plano secante com o cone formando a hipérbole.

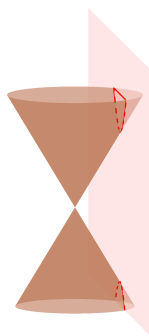


Figura 9: Interseção do plano secante com o cone formando a hipérbole.

### 5.2.1 Algebricidade da Hipérbole

**Definição 2.** A hipérbole é o conjunto de pontos  $P$  do plano tais que o módulo da diferença das distâncias de  $P$  a dois pontos fixos  $F_1$  e  $F_2$  é constante, ou seja, se  $d(F_1, F_2) = 2c$ , então a hipérbole é o conjunto de pontos  $P$  tais que

$$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a,$$

onde  $a < c$ .

**Proposição 2.** *i. A equação da hipérbole cujos focos são  $F_1 = (-c, 0)$  e  $F_2 = (c, 0)$  é*

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

*ii. A equação da hipérbole cujos focos são  $F_1 = (0, -c)$  e  $F_2 = (0, c)$  é*

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_1^2}{a^2} = 1.$$

*Em ambos os casos  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ .*

### 5.2.2 Geometria da Hipérbole

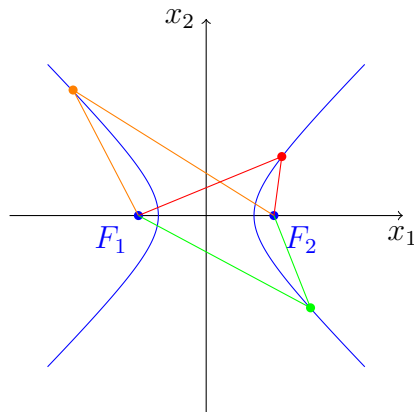


Figura 10: Representação de uma hipérbole no plano.

## 5.3 Parábola

A Parábola é a curva resultante da interseção de um cone com um plano secante e esse, por sua vez, é paralelo a uma reta geratriz do cone.

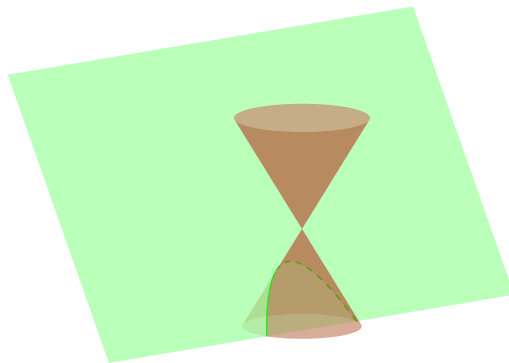


Figura 11: Interseção do plano secante com o cone formando a parábola.

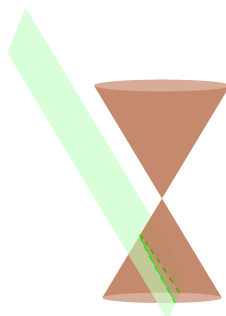


Figura 12: Interseção do plano secante com o cone formando a parábola.

### 5.3.1 Algebricidade da Parábola

**Definição 3.** A Parábola é o conjunto de pontos  $P$  do plano equidistantes de uma reta  $r$  e de um ponto  $F$ ,  $F \notin r$ , ou seja, a parábola é o conjunto de pontos  $P$  tais que

$$d(P, F) = d(P, r).$$

**Proposição 3.** *i. A equação da parábola cujo foco é  $F = (p, 0)$  e a reta diretriz  $r : x_1 = -p$  é*

$$x_2^2 = 4px_1.$$

- ii. A equação da parábola cujo foco é  $F = (0, p)$  e a reta diretriz  $r : x_2 = -p$  é

$$x_1^2 = 4px_2.$$

### 5.3.2 Geometria da Parábola

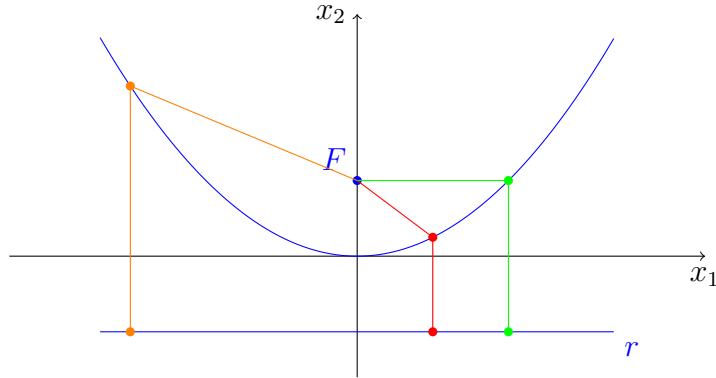


Figura 13: Representação de uma parábola no plano.

## 6 Caracterização das cônicas

A partir de agora estaremos interessados em estudar uma forma mais simples para identificar uma cônica em sua degeneração.

Dada a equação algébrica de uma cônica, iremos procurar fazer uma mudança de coordenadas para facilitar a identificação. Considere a equação abaixo no plano:

$$x^t Ax + Kx + f = 0,$$

onde  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$  e  $K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$ .

Iremos fazer uma rotação de um ângulo  $\theta$  que elimina o termo  $x_1x_2$  na equação acima transformando-a em

$$x'^t Bx' + K'x' + f' = 0,$$

ou seja, fazendo a mudança de coordenadas por rotação, temos

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

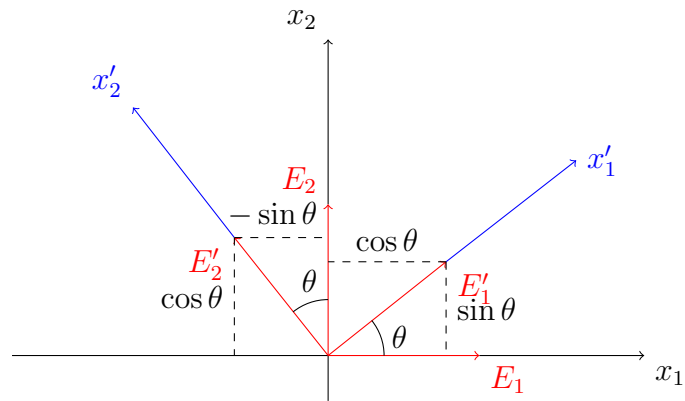


Figura 14: Rotação de um ângulo  $\theta$  no sistema original.

e, portanto, para um ângulo  $\theta$  adequado, obtemos

$$a'x_1'^2 + c'x_2'^2 + d'x_1' + e'x_2' + f' = 0.$$



Fazendo a mudança de coordenadas  $x = R_\theta x'$ , onde  $x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$  e  $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$ , obtemos

$$x'^T B x' + K' x' + f = 0,$$

onde  $B = R_\theta^T A R_\theta$  e  $K' = K R_\theta$ . Como  $I_2 = R_\theta^T R_\theta$ , concluímos que

$$\det(B - \lambda I_2) = \det(R_\theta^T) \det(A - \lambda I_2) \det(R_\theta) = \det(A - \lambda I_2).$$

Assim, escolhido  $\theta$  tal que  $b' = 0$  temos que

$$\det(A - \lambda I_2) = \det(B - \lambda I_2) = (\lambda - a')(\lambda - c').$$

Logo, os coeficientes  $a'$  e  $c'$  são os autovalores da matriz  $A$ , ou seja, as raízes do polinômio característico  $p(\lambda)$  de  $A$ .

Vamos, então, determinar qual o ângulo  $\theta$  que faz esse trabalho. Note que a matriz  $R_\theta$  é tal que

$$B = R_\theta^T A R_\theta \implies R_\theta B = A R_\theta.$$

Por um lado,

$$A R_\theta = A \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \left[ A \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen} \theta \end{bmatrix} \right] A \begin{bmatrix} -\text{sen} \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \Bigg],$$

por outro lado,

$$R_\theta B = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\text{sen} \theta \\ \text{sen} \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' & 0 \\ 0 & c' \end{bmatrix} = \left[ a' \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen} \theta \end{bmatrix} \right] c' \begin{bmatrix} -\text{sen} \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix} \Bigg].$$

Como  $R_\theta B = A R_\theta$  segue que  $E'_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \text{sen} \theta \end{bmatrix}$  é tal que

$$A E'_1 = a' E'_1 \implies A E'_1 = a' Id_2 E'_1$$

ou

$$(A - a' Id_2) E'_1 = \bar{0}.$$

Analogamente,

$$(A - c' Id_2) E'_2 = \bar{0}.$$

Logo,  $E'_1$  e  $E'_2$  são soluções de norma igual a 1 do sistema linear

$$(A - \lambda Id_2) X = \bar{0},$$

em que  $\lambda = a'$  para  $E'_1$  e  $\lambda = c'$  para  $E'_2$ , isto é, são os autovetores de norma 1 associados a estes autovalores.

Portanto, a mudança de coordenadas dada por  $X = R_\theta X'$ , em que  $R_\theta = \begin{bmatrix} E'_1 & E'_2 \end{bmatrix}$ , a equação

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2 + dx_1 + ex_2 + f = 0$$

se transforma em

$$a'x_1'^2 + c'x_2'^2 + d'x_1' + e'x_2' + f' = 0.$$

Concluimos, portanto, que os vetores  $E'_1$  e  $E'_2$  dão a direção e o sentido dos novos eixos  $x'_1$  e  $x'_2$ .

## 6.1 Centro da Cônica

**Definição 4.** *Definimos como o **centro**  $C$  de uma cônica, o ponto de simetria dessa cônica, caso exista.*

Considere a expressão abaixo obtida por uma rotação

$$a'x_1'^2 + c'x_2'^2 + d'x_1' + e'x_2' + f = 0.$$

O centro da cônica rotacionada será o ponto

$$C' = \left( -\frac{d'}{2a'}, -\frac{e'}{2c'} \right),$$

com  $a'$  e  $c'$  não nulos. De fato,

$$a'x_1'^2 + c'x_2'^2 + d'x_1' + e'x_2' + f \Rightarrow a' \left( x_1' + \frac{d'}{2a'} \right)^2 + c' \left( x_2' + \frac{e'}{2c'} \right)^2 = F,$$

onde  $F = \frac{d'^2}{4a'} + \frac{e'^2}{4c'} - f$ . Portanto, o centro  $C$  original da cônica é

$$C = R_\theta C',$$

$$\text{onde } R_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ e } C' = \begin{bmatrix} -\frac{d'}{2a'} \\ -\frac{e'}{2c'} \end{bmatrix}.$$

## 7 Teorema dos Autovalores

**Teorema 2.** *Seja  $\Omega$ , não vazio, o conjunto de pontos do plano que satisfazem a equação*

$$x^T A x + K x + f = 0,$$

*onde  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ ,  $A = \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{bmatrix}$  e  $K = \begin{bmatrix} d & e \end{bmatrix}$ . Sejam  $a'$  e  $c'$  as raízes de  $p(\lambda)$  de  $A$ . Então,*

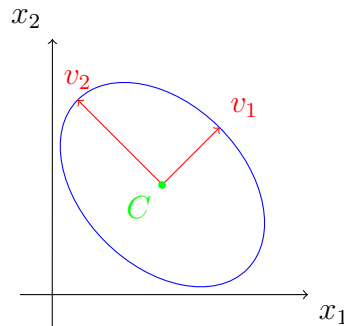
- i. Se  $a'c' > 0$ , então  $\Omega$  é uma elipse e supondo, sem perda de generalidade,  $|c'| < |a'|$ , então a medida dos eixos maior e menor da elipse é, respectivamente,  $\sqrt{\frac{F}{c'}}$  e  $\sqrt{\frac{F}{a'}}$ .*
- ii. Se  $a'c' < 0$ , então  $\Omega$  é uma hipérbole e supondo, sem perda de generalidade,  $c'F < 0$ , então a medida do eixo real é  $2\sqrt{\frac{F}{a'}}$ .*
- iii. Se  $a'c' = 0$ , então  $\Omega$  é uma parábola e supondo, sem perda de generalidade,  $c' = 0$ , então a distância focal é  $\frac{K}{4a'} \frac{v_{c'}}{\|v_{c'}\|}$ .*

Vejamos alguns exemplos de quadráticas e classifiquemos em elipse, hipérbole ou parábola:

**Exemplo 1.** *Considere a seguinte expressão*

$$4x_1^2 + 3x_1x_2 + 4x_2^2 - 16x_1 - 16x_2 + 17 = 0.$$

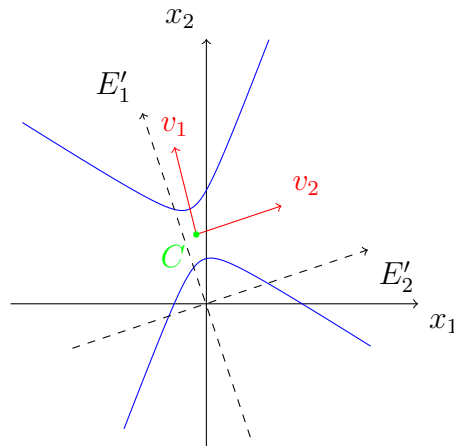
- *Autovalores da matriz que gera:  $\lambda_1 = \frac{11}{2}$  e  $\lambda_2 = \frac{5}{2}$ ;*
- *Autovetores relativos:  $E'_1 = (1, 1)$  e  $E'_2 = (-1, 1)$ ;*
- *Elipse de centro  $C = (\frac{16}{11}, \frac{16}{11})$ ;*



**Exemplo 2.** Considere a seguinte expressão

$$5x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2 - 6x_1 + 9x_2 - \frac{11}{2} = 0.$$

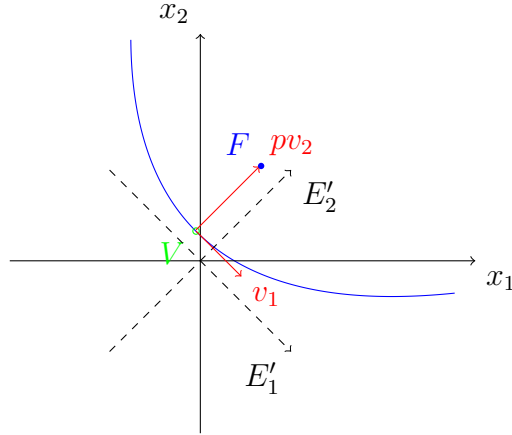
- Autovalores da matriz que gera:  $\lambda_1 = 6$  e  $\lambda_2 = -4$ ;
- Autovetores relativos:  $v_1 = (3, 1)$  e  $v_2 = (-1, 3)$ ;
- Hipérbole de centro  $C = \left(-\frac{3}{16}, \frac{21}{16}\right)$ ;



**Exemplo 3.** Considere a seguinte expressão

$$x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 10x_1 - 13x_2 + 7 = 0.$$

- Autovalores da matriz que gera:  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 0$ ;
- Autovetores relativos:  $v_1 = (-1, 1)$  e  $v_2 = (1, 1)$ ;
- Parábola com foco  $F = \left(\frac{247}{184}, \frac{385}{184}\right)$ ;
- Parábola com vértice  $V = \left(-\frac{365}{368}, \frac{241}{368}\right)$ ;



## 8 Considerações Finais

Com o estudo dirigido acima, pudemos estabelecer diversas conexões entre as áreas em que a Matemática se formaliza. Em Otimização, estamos interessados em estudar métodos para se obter o melhor rendimento possível de um problema, afim de melhor alcançar um objetivo.

Nesse sentido, fazendo uso de ferramentas bem utilizadas em teorias de Análise como, por exemplo, condições de existência de maximizadores e/ou minimizadores de uma função, aproximações sucessivas de funções por polinômios, etc, buscamos trabalhar com processos de otimização de funções quadráticas reais, analisando as curvas de níveis que são as cônicas.

Para esse desenvolvimento, fez-se necessário a utilização de construções obtidas na Álgebra Linear e na Geometria Analítica. O teorema dos autovalores descrito analisa características presentes na matriz que define a expressão algébrica formal de uma quadrática.

Desse modo, podemos concluir, então, que as investigações feitas acerca do trabalho torna clara a relação entre construções geométricas e algébricas feitas sob uma função quadrática. É possível estudar o comportamento desse tipo de função a partir de relações com autovalores, sendo possível determinar a existência de maximizadores e/ou minimizadores.

## Referências

- [1] Ivan de Camargo and Paulo Boulos. *Geometria Analítica: um tratamento vetorial*. 2005.

- [2] Ademir Ribeiro e Elizabeth Karas. *Otimização Contínua: Aspectos Teóricos e Computacionais*. Cengage: São Paulo, 2013.
- [3] F. Coelho e M. Lourenço. *Um curso de Álgebra Linear*. USP, 2002.
- [4] Jorge Nocedal and Stephen Wright. *Numerical optimization*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [5] Reginaldo J Santos. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica*. Imprensa Universitária da UFMG: Belo Horizonte, 2012.
- [6] Gilbert Strang. *Álgebra Linear e suas aplicações*. Cengage, 2011.