JEOBARA ZAK ZACHESKI

ANÁLISE SOBRE COMO A DISTRIBUIÇÃO DOS AUTOVALORES DA MATRIZ HESSIANA DE UMA FUNÇÃO QUADRÁTICA INTERFERE NA PERFORMANCE DO MÉTODO GRADIENTE (com Busca Exata e Busca Espectral)

Sumário

1 OBJETIVO DO PROJETO

A proposta inicial deste trabalho é testar as seguintes distribuições:

1) Distribuição Uniforme;
2) Distribuição Normal;
3) Distribuição Gama;
4) Distribuição em Faixas Constantes;
5) Distribuição em Faixas Crescentes.

Estas distribuições serão usadas para definir os autovalores de uma Matriz Hessiana diagonal, que será usada para construir uma Função Quadrática, dada por:

$$f(x) = \frac{1}{2}x^T Ax \tag{1}$$

Esta função será a Função Objetivo para o problema de minimização, que dará origem aos testes. Sendo ele:

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar} & f(x) \\ \text{sujeita a} & x \in I\!R^n, \end{array} \tag{2}$$

Como podemos observar trata-se de um caso de Minimização de Problema Irrestrito, ou seja não será abordado neste trabalho nenhuma restrição sobre o conjunto viável para a solução do problema acima.

Logo para esta minimização será utilizado o Método do Gradiente, que também é chamado de Método de Cauchy, ou Método de Máxima Descida [2], é um processo iterativo que para cada iteração faz a busca na direção $d = -\nabla f(x)$, pois entre as direções possíveis de f esta é a que possui o decréscimo mais acentuado $(f(x_k + t_k d_k) < f(x_k))$.

Logo, o Algoritmo modificado usando o Método Gradiente, escreve-se:

Algoritmo 1 Algoritmo do Método Gradiente

Dado $x_0 \in I\!R^n$
Faça $k = 0$
REPITA ENQUANTO $\nabla f(x_k) \neq 0$
  Passo 1: Calcule a direção de descida $d_k = -\nabla f(x_k)$
  Passo 2: Determine o tamanho do passo $t_k > 0$ tal que (**??**)
  Passo 3: Faça $x_{k+1} = x_k + t_k d_k$
  Faça $k = k + 1$
FIM.

Para o tamanho de passo utilizado no *Passo 2* neste trabalho serão utilizados:
1º Passo: $\overline{t_k}$ - Ótimo

$$\overline{t_k} = -\frac{\nabla f(x_k)^T \nabla f(x_k)}{\nabla f(x_k)^T A \nabla f(x_k)}$$

2º Passo: O tamanho do passo Barzilai-Borwein:

$$t^*{}_k = \frac{\nabla f(x_{k-1})^T \nabla f(x_{k-1})}{\nabla f(x_{k-1})^T A_k \nabla f(x_{k-1})}.$$

O que podemos observar é que este passo trata-se do tamanho do passo exato na iteração $k-1$, ou seja:

$$t^*{}_{k-1} = t^*{}_k.$$

Logo, o objetivo principal será testar como essas distribuições interferem no desempenho do Método do Gradiente utilizando Busca Exata e também Busca Espectral (também conhecida como Busca de Barzilai-Borwein). Para tanto, primeiramente será necessário apresentação de contéudos que serão utilizados durante o desenvolvimento deste trabalho. E por fim, dados os estudos, será apresentado resultados númericos com base em testes computacionais e gráficos de perfil de desempenho, que servirá como ferramenta robusta de análise e ajudará a concluir:

- Qual foi a melhor distribuição para o Método Gradiente com Busca Exata;
- Qual foi a melhor distribuição para o Método Gradiente com Busca Espectral;
- E qual método performa melhor utilizando a distribuição que apresentou o melhor desempenho;

Referências

[1] E.D. Dolan e J.J. Moré. *Benchmarking optimization software with performance profiles.* Mathematical Programming. Vol. 91, pp. 201-213, 2002.

[2] A.A. Ribeiro e E.W. Karas. *Otimização contínua: Aspectos teóricos e computacionais.* Cengage Learning. São Paulo, 2013.

[3] J.Barzilai e J. M. Borwein. *Two-point step size gradient methods.* IMA Journal of Numerical Analysis, 8, 1988, 141-148.