CM 005 Álgebra Linear: Prova 3

1 de Dezembro de 2016

Orientações gerais
1) As soluções devem conter o desenvolvimento e ou justificativa. Questões sem justificativa ou sem raciocínio lógico coerente não pontuam.
2) A interpretação das questões é parte importante do processo de avaliação. Organização e capricho também serão avaliados.
3) Não é permitido a consulta nem a comunicação entre alunos.

Questão 1 40

Em $\mathbb{R}^4$, considere o subespaço vetorial

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{cccccc} a & -b & -c & +d & = & 0 \\ 2a & -b & -c & & = & 0 \end{array} \right\}.$$

(a) (15 points) Encontre uma base para X;

Solution: Vamos escrever o subespaço X de um jeito mais fácil de trabalhar. Então, perceba que

$$X = Nuc(A) \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Agora, calculando o $Nuc(A)$, usando o método de Gauss, obtemos que

$$Nuc(A) = \text{span}\{(1,2,0,1)^T, (0,1,-1,0)^T\}.$$

Como $\{(1,0,2,1)^T, (0,1,-1,0)^T\}$ é linearmente independente e ele trivialmente gera o $Nuc(A)$, concluímos que $\{(1,0,2,1)^T, (0,1,-1,0)^T\}$ é uma base para o $Nuc(A) = X$.

(b) (15 points) Ache uma base para $X^{\perp}$;

Solution: Primeiro calculemos $X^{\perp}$. Como $X = Nuc(A)$, temos que

$$X^{\perp} = col(A^T) = \text{span}\{(2,-1,-1,0)^T, (1,-1,-1,1)^T\}.$$

Observe que $\{(2,-1,-1,0)^T, (1,-1,-1,1)^T\}$ é linearmente independente e ele trivialmente gera o $col(A)$, portanto concluímos que $\{(2,-1,-1,0)^T, (1,-1,-1,1)^T\}$ é uma base para o $col(A^T) = X^{\perp}$.

(c) (10 points) Seja $\bar{y} \in \mathbb{R}^4$ um vetor definido como $\bar{y} = (1,0,0,0)^T$.
Encontre a projeção ortogonal de $\bar{y}$ sobre o subespaço X (isto é, $\text{proj}_X(\bar{y})$) e a projeção ortogonal de $\bar{y}$ sobre $X^{\perp}$ (ou seja, $\text{proj}_{X^{\perp}}(\bar{y})$).

Solution: Existem muitas formas de calcular $\text{proj}_X(\bar{y})$:

1. Calcule uma base ortogonal de X, $\{v_1, \dots, v_r\}$ e logo use a fórmula da projeção ortogonal para calcular $\text{proj}_X(\bar{y})$

$$\text{proj}_X(\bar{y}) = \frac{\langle v, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle v, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \cdots + \frac{\langle v, v_r \rangle}{\|v_r\|^2} v_r.$$

Essa fórmula só vale se $\{v_1, \dots, v_r\}$ é um conjunto ortogonal.

2. Se $X = \text{span}\{v_1, \dots, v_r\}$ com $\{v_1, \dots, v_r\}$ *não necessariamente ortogonal.* Defina $\text{proj}_X(\bar{y}) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$ onde os α_i são desconhecidos. Para encontrar os α_i, usamos que $\bar{y} - \text{proj}_X(\bar{y}) \perp X$. Assim, $\langle \bar{y} - \text{proj}_X(\bar{y}), v_i \rangle = \langle \bar{y} - \sum_{j=1}^{r} \alpha_j v_j, v_i \rangle = 0, \forall i$ forma um sistema linear onde as incognitas são os α_i. Uma vez achado os α_i obtemos a projeção ortogonal $\text{proj}_X(\bar{y})$.

3. Se $X = col(A)$. Use mínimos quadrados para achar o $\bar{x}$ tal que $A\bar{x}$ seja igual à projeção ortogonal $\text{proj}_X(\bar{y})$.

Nosotros usaremos o item (2), porque $X = \text{span}\{(1, 0, 2, 1)^T, (0, 1, -1, 0)^T\}$. Assim, obtemos o sistema

$$\begin{array}{rcccc} \langle \bar{y}, v_1 \rangle & = & \alpha_1 \langle v_1, v_1 \rangle & + & \alpha_2 \langle v_2, v_1 \rangle \\ \langle \bar{y}, v_1 \rangle & = & \alpha_1 \langle v_1, v_2 \rangle & + & \alpha_2 \langle v_2, v_2 \rangle \end{array}$$

onde $v_1 = (1, 0, 2, 1)^T$, $v_2 = (0, 1, -1, 0)^T$. Como $\bar{y} = (1, 0, 0, 0)^T$, o sistema se reduz a $1 = 6\alpha_1 - 2\alpha_2$, $0 = -2\alpha_1 + 2\alpha_2$. Assim, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1/4$ e

$$\text{proj}_X(\bar{y}) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^T.$$

Para calcular $\text{proj}_{X^\perp}(\bar{y})$, perceba que $\text{proj}_{X^\perp}(\bar{y}) = \bar{y} - \text{proj}_X(\bar{y})$ sempre vale. Assim,

$$\text{proj}_{X^\perp}(\bar{y}) = \bar{y} - \text{proj}_X(\bar{y}) = (1, 0, 0, 0)^T - (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)^T = (3/4, -1/4, -1/4, -1/4)^T.$$

Questão 2 .... $\boxed{10}$

Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear tal que $v_1 = (1, 1)^T$ e $v_2 = (3, 4)^T$ são os autovetores associados a $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ (isto é, $T(v_1) = \lambda_1 v_1$ e $T(v_2) = \lambda_2 v_2$). Com essa informação:

(a) (5 points) Verifique que $\{v_1, v_2\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$

Solution: Um critério para verificar se $\{v_1, v_2\}$ são l.i, é calcular o determinante da matriz cujas columas são v_1 e v_2. Como essa matriz tem determinante diferente de zero, temos que $\{v_1, v_2\}$ são l.i. em um espaço vetorial de dimensão 2. Logo, $\{v_1, v_2\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^2$.

(b) (5 points) Calcule $T(v)$ onde $v = (5, 6)^T$.

Solution: Como só sabemos como T age em v_1 e em v_2, para calcular $T((5, 6)^T)$ devemos escrever $(5, 6)^T$ como combinação linear de $v_1 = (1, 1)^T$ e de $v_2 = (3, 4)^T$. É fácil, ver que $(5, 6)^T = 2(1, 1)^T + 1(3, 4)^T$. Assim temos que

$$T\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = T\left(2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right) = 2T\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = 2\lambda_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Questão 3 .... $\boxed{30}$

Dados a, b e $c \in \mathbb{R}$ com $c > 0$, considere a matriz quadrada

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & c & b \end{pmatrix}$$

(a) (10 points) Mostre que os autovalores de A são $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b + c$ e $\lambda_3 = b - c$

> **Solution:** Procedemos a calcular o polinômio característico $p(\lambda)$.
>
> $$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (a - \lambda)[(b - \lambda)^2 - c^2] = (a - \lambda)(b - \lambda + c)(b - \lambda - c) = 0.$$
>
> Assim, obtemos que $\lambda_1 = a$, $\lambda_2 = b + c$ e $\lambda_3 = b - c$ são os autovalores de A.

(b) (20 points) Se $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$, então mostre que A é diagonalizável, encontrando uma matriz D diagonal e uma matrix S invertível tal que $S^{-1}AS = D$. (*Não é necessário verificar* $S^{-1}AS = D$)

> **Solution:** Se $a = 1$, $b = 2$ e $c = 3$, temos que $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$ e $\lambda_3 = -1$. Como os autovalores são todos diferentes, a matriz A é diagonalizável (vc tbm pode usar o teorema espectral para matrizes simétricas para concluir que A é diagonalizável). Procedemos a construir a matrix S tal que $S^{-1}AS$ é uma matriz diagonal.
> Para $\lambda_1 = 1$, temos que
>
> $$Nuc(A - \lambda_1 I) = Nuc \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \text{span}\{(1, 0, 0)^T\}.$$
>
> Para $\lambda_2 = 5$, temos que
>
> $$Nuc(A - \lambda_2 I) = Nuc \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} = \text{span}\{(0, 1, 1)^T\}.$$
>
> Para $\lambda_3 = -1$, temos que
>
> $$Nuc(A - \lambda_3 I) = Nuc \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \text{span}\{(0, 1, -1)^T\}.$$
>
> Portanto, uma matrix S tal que $S^{-1}AS = D$ é uma matriz diagonal é dado por
>
> $$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Dada a base $\{(1, 2, -2)^T, (4, 3, 2)^T, (1, 2, 1)^T\}$ em $\mathbb{R}^3$. Use o processo de Gram-Schmidt para encontrar uma base ortonormal.

> **Solution:** Usaremos o processo de Gram-Schmidt. Para simplificar as contas primeiro usamos o processo de Gram-Schmidt para ortogonalizar e logo dividimos cada uns dos vetores encontrados pelas suas respectivas normas.
>
> Assim, se $v_1 = (1, 2, -2)^T$, $v_2 = (4, 3, 2)^T$ e $v_3 = (1, 2, 1)^T$. Então, por Gram-Schmidt temos que $u_1 = (1/3, 2/3, -2/3)^T$, $u_2 = (2/3, 1/3, 2/3)^T$ e $u_3 = (-2/3, 2/3, 1/3)^T$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$.

Questão 5 .... $\boxed{10}$

Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ tal que $A = U\Sigma V^T$, onde U, V e $\Sigma \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, $U^TU = I$, $V^TV = I$ e Σ é uma matrix diagonal cujos elementos são não-negativos.

Mostre que os elementos na diagonal de Σ são as raízes quadradas dos autovalores de A^TA. Esse tipo de decomposição é chamada de decomposição SVD.

Solution: Devido a que Σ é uma matriz diagonal temos que $\Sigma^T = \Sigma$ e que Σ^2 é também uma matriz diagonal. Além disso, já que $U^TU = I$ e $V^TV = I$, concluímos que $U^{-1} = U^T$ e $V^{-1} = V^T$.

O problema pede para mostrar que os elementos na diagonal de Σ são as raízes quadradas dos autovalores de A^TA. Assim, primeiro calculamos A^TA.

$$A^TA = (U\Sigma V^T)^TU\Sigma V^T = V\Sigma^TU^TU\Sigma V^T = V\Sigma^2V^T(\text{ temos usado que } U^TU = I, \Sigma^T = \Sigma).$$

Da expressão obtemos que $V^{-1}(A^TA)V = \Sigma^2$. Em otras palavras, A^TA é uma matriz diagonalizável, cuja matriz diagonalizante é V e com Σ^2 como matriz diagonal associada. Portanto os elementos da diagonal de Σ^2 são os autovalores de A^TA e como consequência os elementos da diagonal de Σ são as raízes quadradas dos autovalores da matriz A^TA (aqui temos usado que os elementos de Σ são não-negativos).