Cálculo Diferencial e Integral I

28 de Maio de 2016

Questão 1 .... $\boxed{30}$

Calcule as derivadas das funções abaixo:

(a) (5 points) $f(x) = 3x^4 - x^7 + 22x^5 - 3$.

Solution:

$$f'(x) = 12x^3 - 7x^6 + 110x^4.$$

(b) (5 points) $g(x) = 4(x^3 - 2x)^{30}$.

Solution:

$$g'(x) = 120(x^3 - 2x)(3x^2 - 2).$$

(c) (5 points) $h(t) = e^{2t}\sin(\pi t)$.

Solution:

$$h'(t) = (e^{2t})'\sin(\pi t) + e^{2t}[\sin(\pi t)]' = 2e^{2t}\sin(\pi t) + \pi e^{2t}\cos(\pi t).$$

(d) (5 points) $p(t) = \dfrac{\cos(x) + 1}{\cos(x) + 2}$

Solution:

$$p'(t) = \frac{[\cos(x)+1]'[\cos(x)+2] - [\cos(x)+1][\cos(x)+2]'}{[\cos(x)+2]^2} = \frac{-\sin x}{(\cos x + 2)^2}$$

(e) (10 points) $q(z) = z^{\sin z}$.

Solution: Fazemos $\ln q(z) = \sin z \ln z$, daí

$$\frac{q'(z)}{q(z)} = \cos z \ln z + \frac{\sin z}{z}.$$

Então

$$q'(z) = z^{\sin z}\left(\cos z \ln z + \frac{\sin z}{z}\right).$$

Questão 2 .... $\boxed{30}$

Seja $f(x) = x(x+2)^3$.

(a) (10 points) Encontre os intervalos de crescimento e decrescimento, os pontos críticos, e classifique-os.

Solution:

$$f'(x) = (x+2)^3 + 3x(x+2)^2 = (x+2)^2(4x+2).$$

$$\ominus \quad -2 \quad \ominus \quad -\tfrac{1}{2} \quad \oplus$$

$$\searrow \qquad \searrow \qquad \nearrow$$

Fazendo o "varal", temos

-2 é ponto de sela e-1/2 é minimizador local.

(b) (10 points) Encontre os intervalos de concavidade para cima e para baixo, e os pontos de inflexão.

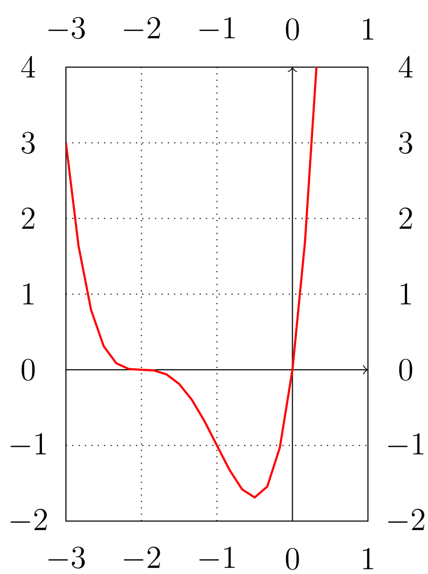
Solution:

$$f''(x) = 2(x+2)(4x+2) + 4(x+2)^2 = (x+2)(8x+4+4x+8) = 12(x+2)(x+1)$$

Varal: $\oplus \, -2 \quad \ominus \quad -1 \, \oplus$

(c) (10 points) Esboce o gráfico dessa função no espaço abaixo, marcando todos os pontos importantes.

Solution:



Questão 3 . . . . $\boxed{20}$

$$\text{Calcule as assíntotas de } f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x^2-9x+6}{(x-1)^2}, & x > 0, x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \\ \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \leq 0. \end{cases}$$

Solution: Para $x \to +\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-9x+6}{(x-1)^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x-9}{2(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6}{2} = 3.$$

$y = 3$ é assíntota horizontal. Para $x \to -\infty$, note que $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} = x + 2$. Daí, fica fácil fazer as contas e mostrar que $y = x + 2$ é assíntota oblíqua.

O caso que pode dar problema é $x = 1$. Note que $x = 2$ não dá problema pois $2 > 0$, e cai na outra fração.

$$\lim_{x\to1^+} \frac{3x^2-9x+6}{(x-1)^2} = \lim_{x\to1^+} \frac{6x-9}{2(x-1)} = -\infty.$$

Então $x = 1$ é assíntota vertical.

Questão 4 .... $\boxed{20}$

Seja $f(x) = \dfrac{1}{x^2-2x+2}$. Encontre todos os pontos críticos de f e classifique-os. Encontre também o máximo e o mínimo global no intervalo $[-\frac{1}{2}, 2]$.

Solution:

$$f'(x) = \frac{2-2x}{(x^2-2x+2)^2}.$$

Como $x^2 - 2x + 2$ não tem raízes e tem concavidade para cima, então $x^2 - 2x + 2 > 0$. Daí, o sinal é ditado por $2 - 2x$.

$\oplus \quad 1 \quad \ominus$

$\nearrow \qquad \searrow$

O único ponto crítico é 1, e é um maximizador local.

Como $f(-\frac{1}{2}) = \dfrac{1}{\frac{1}{4}+1+2} = \dfrac{4}{13}$, $f(2) = \dfrac{1}{4-4+2} = \dfrac{1}{2}$ e $f(1) = 1$, então 1 é maximizador global em $[-\frac{1}{2}, 2]$ e $-\frac{1}{2}$ é minimizador global em $[-\frac{1}{2}, 2]$.

Questão 5 .... $\boxed{10}$

Calcule $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\frac{\pi}{2}-x)}{\tan x}$

Solution: Como $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \ln(\frac{\pi}{2} - x) = -\infty$ e $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = -\infty$, então

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\ln(\frac{\pi}{2} - x)}{\tan x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{(x - \frac{\pi}{2})\sec^2 x} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{\cos^2 x}{(x - \frac{\pi}{2})} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \frac{-2\sin x \cos x}{1} = 0.$$

Questão 6 .... $\boxed{10}$

Seja f uma função diferenciável até segunda ordem com $f''(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f tem no máximo um minimizador.

Solution: Seja a um minimizador de f. Suponha que existe um outro minimizador de b. Como f' é diferenciável, então ela é contínua, e portanto vale o Teorema do Valor Médio para f', $x = a$ e $x = b$, isto é, existe c entre a e b tal que

$$f''(c) = \frac{f'(a) - f'(b)}{a - b}.$$

Mas como a e b são minimizadores e f é diferenciável, então $f'(a) = f'(b) = 0$. Daí, $f''(c) = 0$. Absurdo. Portanto b não pode existir, isto é, existe no máximo um minimizador.