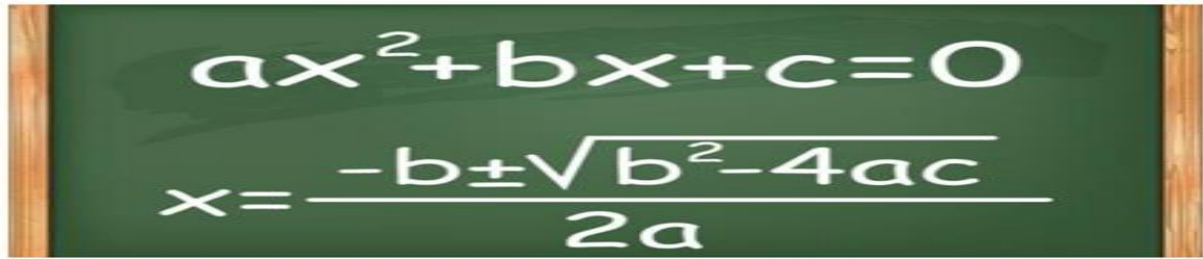


# Equação do Segundo Grau


$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Denomina-se **equação do 2º grau**, qualquer sentença matemática que possa ser reduzida à forma  $ax^2 + bx + c = 0$ , onde  $x$  é a incógnita e  $a$ ,  $b$  e  $c$  são números reais, com  $a \neq 0$ .  $a$ ,  $b$  e  $c$  são coeficientes da equação. Observe que o maior índice da incógnita na equação é igual a dois e é isto que a define como sendo uma equação do segundo grau.

## Equação do 2º grau completa e equação do 2º grau incompleta

Da definição acima temos obrigatoriamente que  $a \neq 0$ , no entanto podemos ter  $b = 0$  e/ou  $c = 0$ .

Caso  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ , temos uma equação do 2º grau completa. A sentença matemática  $-2x^2 + 3x - 5 = 0$  é um exemplo de equação do 2º grau completa, pois temos  $b = 3$  e  $c = -5$ , que são diferentes de zero.

$-x^2 + 7 = 0$  é um exemplo de equação do 2º grau incompleta, pois  $b = 0$ .

Neste outro exemplo,  $3x^2 - 4x = 0$  a equação é incompleta, pois  $c = 0$ .

Veja este último exemplo de equação do 2º grau incompleta,  $8x^2 = 0$ , onde tanto  $b$ , quanto  $c$  são iguais a zero.

### Resolução de equações do 2º grau

A resolução de uma equação do segundo grau consiste em obtermos os possíveis valores reais para a incógnita, que torne a sentença matemática uma equação verdadeira. Tais valores são a **raiz** da equação.

### Fórmula Geral de Resolução

Para a resolução de uma equação do segundo grau completa ou incompleta, podemos recorrer à **fórmula geral de resolução**:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula também é conhecida como **fórmula de Bhaskara**.

O valor  $b^2 - 4ac$  é conhecido como **discriminante da equação** e é representado pela letra grega  $\Delta$ . Temos então que  $\Delta = b^2 - 4ac$ , o que nos permitir escrever a fórmula geral de resolução como:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

### Resolução de equações do 2º grau incompletas

Para a resolução de equações incompletas podemos recorrer a certos artifícios. Vejamos:

Para o caso de apenas  $\mathbf{b = 0}$  temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \Rightarrow ax^2 + 0x + c = 0 \Rightarrow ax^2 + c = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow ax^2 &= -c \Rightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}} \end{aligned}$$

Portanto para equações do tipo  $\mathbf{ax^2 + c = 0}$ , onde  $\mathbf{b = 0}$ , podemos utilizar a fórmula simplificada  $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$  para calcularmos as suas raízes. Observe no entanto que a equação só possuirá raízes no conjunto dos números reais se  $-\frac{c}{a} \geq 0$ .

Para o caso de apenas  $\mathbf{c = 0}$  temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \Rightarrow ax^2 + bx + 0 = 0 \Rightarrow ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x(ax + b) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{0}{ax + b} \Rightarrow x = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \\ ax + b = \frac{0}{x} \Rightarrow ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = -\frac{b}{a} \Rightarrow x_2 = -\frac{b}{a} \end{cases} \end{aligned}$$

Portanto para equações do tipo  $\mathbf{ax^2 + bx = 0}$ , onde  $\mathbf{c = 0}$ , uma das raízes sempre será igual a zero e a outra será dada pela fórmula  $x = -\frac{b}{a}$ .

Para o caso de  $\mathbf{b = 0}$  e  $\mathbf{c = 0}$  temos:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \Rightarrow ax^2 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow ax^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{a} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 &= 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{0} \Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

Podemos notar que ao contrário dos dois casos anteriores, neste caso temos apenas uma única raiz real, que será sempre igual a zero.

### Discriminante da equação do 2º grau

O cálculo do valor do discriminante é muito importante, pois através deste valor podemos determinar o número de raízes de uma equação do segundo grau.

Como visto acima, o discriminante é representado pela letra grega  $\Delta$  e equivale à expressão  $\mathbf{b^2 - 4ac}$ , isto é:  $\Delta = \mathbf{b^2 - 4ac}$ .

### Discriminante menor que zero

Caso  $\Delta < 0$ , a equação não tem raízes reais, pois  $\nexists \sqrt{\Delta} \in \mathbb{R}$ .

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R}$$

### Discriminante igual a zero

Caso  $\Delta = 0$ , a equação tem duas raízes reais e iguais, pois  $+\sqrt{\Delta} = -\sqrt{\Delta}$ :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-b \pm 0}{2a} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + 0}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - 0}{2a} \Rightarrow x_2 = \frac{-b}{2a} \end{cases}$$

### Discriminante maior que zero

Caso  $\Delta > 0$ , a equação tem duas raízes reais e diferentes, pois  $+\sqrt{\Delta} \neq -\sqrt{\Delta}$ :

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

### Conjunto Verdade de equações do 2º grau

A partir do estudado acima, podemos esquematizar o conjunto verdade das equações do segundo grau completas e incompletas como a seguir:

Para o caso das equações completas temos:

$$\begin{cases} V = \left\{ \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right\} \mid \Delta > 0 \\ V = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\} \mid \Delta = 0 \\ V = \{ \} \mid \Delta < 0 \end{cases}$$

Para o caso das equações incompletas onde somente  $b = 0$  temos:

$$\begin{cases} V = \left\{ -\sqrt{-\frac{c}{a}}, \sqrt{-\frac{c}{a}} \right\} \mid -\frac{c}{a} \geq 0 \\ V = \{ \} \mid -\frac{c}{a} < 0 \end{cases}$$

Para o caso das equações incompletas onde somente  $c = 0$  temos:

$$V = \left\{ 0, -\frac{b}{a} \right\}$$

E no caso das equações incompletas onde tanto  $b = 0$ , quanto  $c = 0$  temos:

$$V = \{ 0 \}$$

### Exemplo de resolução de uma equação do segundo grau

► Encontre as raízes da equação:  $2x^2 - 6x - 56 = 0$

Aplicando a fórmula geral de resolução à equação temos:

$$\begin{aligned} 2x^2 - 6x - 56 &= 0 \Rightarrow x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-56)}}{2 \cdot 2} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6 + \sqrt{484}}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{6 + 22}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{28}{4} \Rightarrow x_1 = 7 \\ x_2 = \frac{6 - \sqrt{484}}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{6 - 22}{4} \Rightarrow x_2 = \frac{-16}{4} \Rightarrow x_2 = -4 \end{cases} \end{aligned}$$

Observe que temos duas raízes reais distintas, o que já era de se esperar, pois apuramos para  $\Delta$  o valor **484**, que é maior que **zero**.

Logo:

● As raízes da equação  $2x^2 - 6x - 56 = 0$  são: -4 e 7.

### Exercícios resolvidos

$$1) x^2 - 4x - 5 = 0$$

Os coeficientes dessa equação são:  $a = 1$ ,  $b = -4$ ,  $c = -5$ . Agora basta aplicar esses valores na fórmula de Bhaskara:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}, \Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = (-4)^2 - 4.1.(-5)$$

$$\Delta = 16 + 20$$

$$\Delta = 36$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{36}}{2.1}$$

$$x = \frac{4 \pm 6}{2}$$

$$x' = \frac{10}{2} = 5$$

$$x'' = \frac{-2}{2} = -1$$

Nesse caso, a equação tem duas raízes reais:  $-1$  e  $5$ .

$$2) 4x^2 + 8x + 6 = 0$$

Os coeficientes da equação são:  $a = 4$ ,  $b = 8$ ,  $c = 6$ . Substituindo esses valores na fórmula de Bhaskara, temos:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2.a}, \Delta = b^2 - 4.a.c$$

$$\Delta = 8^2 - 4.4.6$$

$$\Delta = 64 - 96$$

$$\Delta = -32$$

Como  $\Delta < 0$ , a equação não possui raiz real.

### RESOLVA AS EQUAÇÕES DE 2º GRAU

- |                                 |                      |
|---------------------------------|----------------------|
| 1) $x^2 - 5x + 6 = 0$           | (R: 2, 3)            |
| 2) $x^2 - 8x + 12 = 0$          | (R: 2, 6)            |
| 3) $x^2 + 2x - 8 = 0$           | (R: 2, -4)           |
| 4) $x^2 - 5x + 8 = 0$           | (R: vazio)           |
| 5) $2x^2 - 8x + 8 = 0$          | (R: 2,)              |
| 6) $x^2 - 4x - 5 = 0$           | (R: -1, 5)           |
| 7) $-x^2 + x + 12 = 0$          | (R: -3, 4)           |
| 8) $-x^2 + 6x - 5 = 0$          | (R: 1, 5)            |
| 9) $6x^2 + x - 1 = 0$           | (R: $1/3$ , $-1/2$ ) |
| 10) $3x^2 - 7x + 2 = 0$         | (R: 2, $1/3$ )       |
| 11) $2x^2 - 7x = 15$            | (R: 5, $-3/2$ )      |
| 12) $4x^2 + 9 = 12x$            | (R: $3/2$ )          |
| 13) $x^2 = x + 12$              | (R: -3, 4)           |
| 14) $2x^2 = -12x - 18$          | (R: -3)              |
| 15) $x^2 - x - 20 = 0$          | {R: -4 e 5}          |
| 16) $x^2 - 3x + 4$              | {R: -1 e 4}          |
| 17) $x^2 - 14x + 48 = 0$        | {R: 6 e 8}           |
| 18) $x^2 + 3x - 28 = 0$         | {R: -7 e 4}          |
| 19) $x^2 + 9 = 4x$              | (R: vazio)           |
| 20) $25x^2 = 20x - 4$           | (R: $2/5$ )          |
| 21) $2x = 15 - x^2$             | (R: 3, -5)           |
| 22) $x^2 + 3x - 6 = -8$         | (R: -1, -2)          |
| 23) $x^2 + x - 7 = 5$           | (R: -4, 3)           |
| 24) $4x^2 - x + 1 = x + 3x^2$   | (R: 1)               |
| 25) $3x^2 + 5x = -x - 9 + 2x^2$ | (R: -3)              |
| 26) $4 + x(x - 4) = x$          | (R: 1, 4)            |
| 27) $x(x + 3) - 40 = 0$         | (R: 5, -8)           |
| 28) $x^2 + 5x + 6 = 0$          | (R: -2, -3)          |
| 29) $x^2 - 7x + 12 = 0$         | (R: 3, 4)            |
| 31) $x^2 + 5x + 4 = 0$          | (R: -1, -4)          |
| 32) $7x^2 + x + 2 = 0$          | (vazio)              |
| 33) $x^2 - 18x + 45 = 0$        | (R: 3, 15)           |
| 34) $-x^2 - x + 30 = 0$         | (R: -6, 5)           |

- 35)  $x^2 - 6x + 9 = 0$  (R:3)  
36)  $(x + 3)^2 = 1$  (R:-2,-4)  
37)  $(x - 5)^2 = 1$  (R:3,7)  
38)  $(2x - 4)^2 = 0$  (R:2)  
39)  $(x - 3)^2 = -2x^2$  (R:vazio)  
40)  $x^2 - 3 = 4x + 2$  (R: -1,5)

## PROBLEMAS COM EQUAÇÃO DO 2º GRAU

- 1) A soma de um numero com o seu quadrado é 90. Calcule esse numero. (R: 9 e -10)
- 2) A soma do quadrado de um número com o próprio número é 12. Calcule esse numero. (R: 3 e -4)
- 3) O quadrado menos o dobro de um número é igual a -1. Calcule esse número. (R: 1)
- 4) A diferença entre o quadrado e o dobro de um mesmo número é 80. Calcule esse número (R: 10 e -8)
- 5) O quadrado de um número aumentado de 25 é igual a dez vezes esse número. Calcule esse número (R: 5)
- 6) A soma do quadrado de um número com o seu triplo é igual a 7 vezes esse número. Calcule esse número. (R: 0 e 4)
- 7) O quadrado menos o quádruplo de um numero é igual a 5. Calcule esse número (R: 5 e -1)
- 8) O quadrado de um número é igual ao produto desse número por 3, mais 18. Qual é esse numero? (R: 6 e -3)
- 9) O dobro do quadrado de um número é igual ao produto desse numero por 7 menos 3. Qual é esse numero? (R: 3 e  $\frac{1}{2}$ )
- 10) O quadrado de um número menos o triplo do seu sucessivo é igual a 15. Qual é esse numero?(R: 6 e -3)
- 11) Qual o número que somado com seu quadrado resulta em 56? (R: -8 e 7)
- 12) Um numero ao quadrado mais o dobro desse número é igual a 35. Qual é esse número ? (R: -7 e 5)
- 13) O quadrado de um número menos o seu triplo é igual a 40. Qual é esse número? (R: 8 e -5)
- 14) Calcule um número inteiro tal que três vezes o quadrado desse número menos o dobro desse número seja igual a 40. (R: 4)
- 15) Calcule um número inteiro e positivo tal que seu quadrado menos o dobro desse número seja igual a 48. (R: 8)
- 16) O triplo de um número menos o quadrado desse número é igual a 2. Qual é esse número? (R: 1 e 2)

- 17) Qual é o número , cujo quadrado mais seu triplo é igual a 40? (R: 5 , -8)
- 18) O quadrado de um número diminuído de 15 é igual ao seu dobro. Calcule esse número. (R: 5 e -3)
- 19) Determine um número tal que seu quadrado diminuído do seu triplo é igual a 26. (R: 7 e -4)
- 20) Se do quadrado de um número, negativo subtraímos 7, o resto será 42. Qual é esse número? (R: -7)
- 21) A diferença entre o dobro do quadrado de um número positivo e o triplo desse número é 77. Calcule o número. (R: 7)
- 22) Determine dois números ímpares consecutivos cujo produto seja 143. (R: 11 e 13 ou -11, -13)
- 23) Um azulejista usou 2000 azulejos quadrados e iguais para revestir 45m<sup>2</sup> de parede. Qual é a medida do lado de cada azulejo? (R:15 cm)

## RESOLUÇÃO DE EQUAÇÕES INCOMPLETAS

Resolver uma equação é determinar todas as suas soluções. Vejamos, através de exemplos, como se resolvem as equações incompletas do 2º grau

1º CASO – equações da forma  $ax^2 + c = 0$ , ( $b = 0$ )

Exemplos:

1)  $x^2 - 25 = 0$

$$x^2 = 25$$

$$x = \sqrt{25}$$

$$x = 5$$

$$\text{logo } V = (+5 \text{ e } -5)$$

2)  $2x^2 - 18 = 0$

$$2x^2 = 18$$

$$x^2 = 18/2$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \sqrt{9}$$

$$x = 3$$

$$\text{logo } V = (-3 \text{ e } +3)$$

3)  $7x^2 - 14 = 0$

$$7x^2 = 14$$

$$x^2 = 14/7$$

$$x^2 = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

$$\text{logo } V = (-\sqrt{2} \text{ e } +\sqrt{2})$$

4)  $x^2 + 25 = 0$

$$x^2 = -25$$

$$x = \sqrt{-25}$$

obs: não existe nenhum número real que elevado ao quadrado seja igual a -25

## EXERCÍCIOS

1) Resolva as seguintes equações do 2º grau

- a)  $x^2 - 49 = 0$  (R: -7 e +7)
- b)  $x^2 = 1$  (R: +1 e -1)
- c)  $2x^2 - 50 = 0$  (R: 5 e -5)
- d)  $7x^2 - 7 = 0$  (R: 1 e -1)
- e)  $5x^2 - 15 = 0$  (R:  $\sqrt{3}$  e  $-\sqrt{3}$ )
- f)  $21 = 7x^2$  (R:  $\sqrt{3}$  e  $-\sqrt{3}$ )
- g)  $5x^2 + 20 = 0$  (R: vazio)
- h)  $7x^2 + 2 = 30$  (R: 2 e -2)
- i)  $2x^2 - 90 = 8$  (R: 7 e -7)
- j)  $4x^2 - 27 = x^2$  (R: 3 e -3)
- k)  $8x^2 = 60 - 7x^2$  (R: 2 e -2)
- l)  $3(x^2 - 1) = 24$  (R: 3 e -3)
- m)  $2(x^2 - 1) = x^2 + 7$  (R: 3 e -3)
- n)  $5(x^2 - 1) = 4(x^2 + 1)$  (R: 3 e -3)
- o)  $(x - 3)(x + 4) + 8 = x$  (R: 2 e -2)

2º CASO: Equações da forma  $ax^2 + bx = 0$  ( $c = 0$ )

Propriedade: Para que um produto seja nulo é preciso que um dos fatores seja zero .

Exemplos

1) resolver  $x^2 - 5x = 0$

fatorando  $x(x - 5) = 0$

deixando um dos fatores nulo temos  $x = 0$

e o outro  $x - 5 = 0$  , passando o 5 para o outro lado do igual temos  $x = 5$

logo,  $V = (0 \text{ e } 5)$

2) resolver:  $3x^2 - 10x = 0$

fatorando:  $x(3x - 10) = 0$

deixando um dos fatores nulo temos  $x = 0$

Tendo também  $3x - 10 = 0$

$3x = 10$

$x = 10/3$

logo  $V = (0 \text{ e } 10/3)$

Observe que, nesse caso, uma das raízes é sempre zero.

## EXERCÍCIOS

1) Resolva as seguintes equações do 2º grau.

- a)  $x^2 - 7x = 0$  (R: 0 e 7)
- b)  $x^2 + 5x = 0$  (R: 0 e -5)
- c)  $4x^2 - 9x = 0$  (R: 0 e 9/4)
- d)  $3x^2 + 5x = 0$  (R: 0 e -5/3)
- e)  $4x^2 - 12x = 0$  (R: 0 e 3)
- f)  $5x^2 + x = 0$  (R: 0 e -1/5)
- g)  $x^2 + x = 0$  (R: 0 e -1)



- h)  $7x^2 - x = 0$  (R: 0 e  $1/7$ )  
 i)  $2x^2 = 7x$  (R: 0 e  $7/2$ )  
 j)  $2x^2 = 8x$  (R: 0 e 4)  
 k)  $7x^2 = -14x$  (R: 0 e -2)  
 l)  $-2x^2 + 10x = 0$  (R: 0 e 5)

2) Resolva as seguintes equações do 2º grau

- a)  $x^2 + x(x - 6) = 0$  (R: 0 e 3)  
 b)  $x(x + 3) = 5x$  (R: 0 e 2)  
 c)  $x(x - 3) - 2(x - 3) = 6$  (R: 0 e 5)  
 d)  $(x + 5)^2 = 25$  (R: 0 e -10)  
 e)  $(x - 2)^2 = 4 - 9x$  (R: 0 e -5)  
 f)  $(x + 1)(x - 3) = -3$  (R: 0 e 2)

Efetue

- a)  $3x^2 - 7x + 4 = 0$   
 b)  $9y^2 - 12y + 4 = 0$   
 c)  $5x^2 + 3x + 5 = 0$

Resolva a seguinte equação do 2º grau.

$$x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

Resolução

<p><b>a)</b></p> <p><b><math>3x^2 - 7x + 4 = 0</math></b></p> <p><math>\Delta = (-7)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 4</math></p> <p><math>\Delta = 49 - 48</math></p> <p><math>\Delta = 1</math></p> <p><math>x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3}</math></p> <p><math>x = \frac{7 \pm 1}{6}</math></p> <p><math>x' = \frac{7+1}{6} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}</math></p> <p><math>x'' = \frac{7-1}{6} = \frac{6}{6} = 1</math></p>	<p><b>b)</b></p> <p><b><math>9y^2 - 12y + 4 = 0</math></b></p> <p><math>\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4</math></p> <p><math>\Delta = 144 - 144</math></p> <p><math>\Delta = 0</math></p> <p><math>y = \frac{-(-12) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 9}</math></p> <p><math>y = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}</math></p> <p><math>y' = y'' = \frac{2}{3}</math></p>	<p><b>c)</b></p> <p><b><math>5x^2 + 3x + 5 = 0</math></b></p> <p><math>\Delta = 3^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5</math></p> <p><math>\Delta = 9 - 100</math></p> <p><math>\Delta = -91</math></p> <p>Não possui raízes reais.</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

$$x^2 + \frac{5x}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = \left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4 * 1 * \left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$\Delta = \frac{25}{4} + \frac{12}{2}$$

$$\Delta = \frac{25 + 24}{4}$$

$$\Delta = \frac{49}{4}$$

$$x = \frac{-\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{49}{4}}}{2 * 1}$$

$$x = \frac{-\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}}{2}$$

$$x' = \frac{-\frac{5}{2} + \frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{2}{2}}{2} = \frac{1}{2}$$

$$x'' = \frac{-\frac{5}{2} - \frac{7}{2}}{2} = \frac{\frac{-12}{2}}{2} = -\frac{6}{2} = -3$$