UNIVERSIDAD CARLOS III DE MADRID

GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA

HEURÍSTICA Y OPTIMIZACIÓN

Práctica: Programación Lineal

Autores
ALBERTO VILLANUEVA NIETO
CRISTIAN CABRERA PINTO

3 de noviembre de 2018

Índice

1. Intorducción **1**

2. Descripción de los modelos **1**

2.1. Modelo para la compra 1

2.1.1. Conjuntos 1

2.1.2. Variables de decisión 1

2.1.3. Parametros 2

2.1.4. Funcion objetivo 2

2.1.5. Restricciones 2

2.2. Modelo para el transporte 3

2.2.1. Conjuntos 3

2.2.2. Variables de decisión 4

2.2.3. Parametros 5

2.2.4. Funcion objetivo 6

2.2.5. Restricciones 6

2.3. Programacion Dinamica 7

3. Analisis de los resultados **7**

3.1. Describir la solucion y analizar que restricciones limitan el problema 7

3.1.1. Solucion 7

3.1.2. Cumplimiento de restricciones 9

3.1.3. Restricciones que limitan el problema 9

3.2. Analisis de complejidad 10

3.3. Cuestiones 10

3.3.1. Composicion final 10

3.3.2. Mejor tipo de Vagon 10

3.4. Ventajas y desventajas de calc 10

4. Conclusiones acerca de la práctica **10**

1. Intorducción

En este documento se explican los modelos de los ejercicios de programación lineal y dinamica, en los de lineal explicando que representa cada conjunto, variable, y restriccion. A continuación se analizan los resultados de los modelos, su complejudad y las ventajas y desventajas de usar calc repecto a math prog y finalmente se procede a la conclusion de la práctica.

2. Descripción de los modelos

2.1. Modelo para la compra

En esta parte se pide minimizar el coste de la compra de unos elementos entre 2 fábricas en función de sus limites de inventario donde el precio del elemento y del transporte desde la fábrica hasta donde se quieren tener varia en función de la fábrica.

2.1.1. Conjuntos

Para poder expresar las variables, los parametros y las ecuaciones de una forma más descriptiva se va a hacer uso de un conjunto que describe los distintos tipos de productos que hay:

$$productos := \{loc, vag1, vag2, cont20, cont40\}$$

2.1.2. Variables de decisión

Aunque a primera vista puede parecer que se necesitan 10 variables de decision (por cada tipo de elemento en cada fábrica) sin embargo, si se sabe los elementos totales que se quieren obtener y los que se van a comprar en una de las dos fábricas, los elementos que se compran en la fábrica restante es la diferencia entre los elementos que se quieren obtener y los que se compran en la primera fábrica, de este modo nuestras variables de decisión serían:

$$\begin{aligned}
x_{loc} &: Locomotoras\ compradas\ en\ la\ primera\ fbrica \\
x_{vag1} &: Vagones\ de\ tipo\ 1\ comprados\ en\ la\ primera\ fábrica \\
x_{vag2} &: Vagones\ de\ tipo\ 2\ comprados\ en\ la\ primera\ fábrica \\
x_{cont20} &: Contenedroes\ de\ 20'\ comprados\ en\ la\ primera\ fábrica \\
x_{cont40} &: Contenedroes\ de\ 40'\ comprados\ en\ la\ primera\ fábrica
\end{aligned}$$

2.1.3. Parametros

Para el calculo de la función objetivo y de las restricciones se han hecho con respecto a varios parametro que se nos proporcionaban en el enunciado:

$$\begin{aligned}
Necesidad_p &: Cantidad\ de\ productos\ tipo\ p\ que\ se\ necesitan.\\
Stock\ Primera_p &: Cantidad\ de\ productos\ tipo\ p\ que\ la\ primera\ fabrica\ puedeproveer.\\
Stock\ Segunda_p &: Cantidad\ de\ productos\ tipo\ p\ que\ la\ segunda\ fabrica\ puedeproveer.\\
Coste\ Primera_p &: Coste\ de\ comprar\ y\ transportar\ un\ elemento\ p\ de\ la\ primerafabrica\ al\ destino.\\
Coste\ Segunda_p &: Coste\ de\ comprar\ y\ transportar\ un\ elemento\ p\ de\ la\ segundafabrica\ al\ destino.\\
& \forall p \in productos
\end{aligned}$$

Cuadro 1: Parametros de compra

Parametro	Locomotoras	Vagones		Contenedores	
		Tipo 1	Tipo 2	20′	40′
Necesidad	3	3	2	4	4
Stock Primera	2	3	2	4	4
Stock Segunda	3	3	2	2	3
Coste Primera	100200	10500	20040	20080	30040
Coste Segunda	200220	3440	5660	25220	40220

2.1.4. Funcion objetivo

Para la función objetivo se pretende minimizar el coste de comprar los productos en ambas fabricas:

$$minimizar\ coste = \sum_{p}^{productos} (x_p * CostePrimera_p + (Necesidad_p - x_p) * CosteSegunda_p)$$

2.1.5. Restricciones

El problema de optimizacion esta restringido con que las variables sean no negativas (1) enteras (2), que se compren mas productos en la primera fabrica que en la segunda (3), que el precio gastado en cada fabrica no supere en un 10 % al gastado en al otra (4)(5) y que los productos que se compren en cada una de las fabricas esten dentro del limite que tenga esa fabrica (6)(7).

$$x_p \geq 0, \forall p \in productos \tag{1}$$

$$x_p \in \mathbb{Z}, \forall p \in productos \tag{2}$$

$$-1 + \sum_{p}^{productos} x_p > \sum_{p}^{p} roductos(Necesidad_p - x_p) \tag{3}$$

$$1{,}1 * \sum_{p}^{productos} x_p * CostePrimera_p \geq \sum_{p}^{productos} (Necesidad_p - x_p) * CosteSegunda_p \tag{4}$$

$$\sum_{p}^{productos} x_p * CostePrimera_p \leq 1{,}1 * \sum_{p}^{productos} (Necesidad_p - x_p) * CosteSegunda_p \tag{5}$$

$$x_p \leq StockPrimera_p, \forall p \in productos \tag{6}$$

$$Necesidad - x_p \leq StockSegunda_p, \forall p \in productos \tag{7}$$

2.2. Modelo para el transporte

En esta parte se pide minimizar el coste del transporte de una cantidad de toneladas en 2 rutas, para ello se dispone de los elementos que se han comprado en la parte anterior donde los contenedores y vagones tienen un limite dado por su tipo.

2.2.1. Conjuntos

Para expresar las variables de decision y los parametros con respecto a los elementos en especifico creamos varios conjuntos para asi poder tener bien controlado a que parametro se hace referencia:

$$
\begin{aligned}
contenedores\ tipos :=& \{Cont20, Cont40\} \\
contenedores_{Cont20} :=& \{C1, C2, C3, C4\} \\
contenedores_{Cont40} :=& \{C5, C6, C7, C8\} \\
contenedorestodos :=& \bigcup_{ct}^{contenedores\ tipos} contenedores_{ct} \\
vagones\ tipos :=& \{Vag1, Vag2\} \\
vagones_{Vag1} :=& \{V1, V2, V3\} \\
vagones_{Vag2} :=& \{V4, V5\} \\
vagonestodos :=& \bigcup_{vt}^{vagones\ tipos} vagones_{vt} \\
locomotoras :=& \{L1, L2, L3\} \\
rutas :=& \{Madrid - Valencia, Madric - Cádiz\}
\end{aligned}
$$

2.2.2. Variables de decisión

Al tratarse de un ejercicio de programacin lineal de transporte, las variables son matrices binarias que representa la distribucion de los elementos de las filas entre los elementos de las columnas. Por los requisitos que pide el enunciado las matrices que se necesitan son las siguientes:

$$
\begin{aligned}
CV_{contenedores\ todos\ x\ vagones\ todos} :& Indica\ en\ que\ vagon\ va\ cada\ contenedor.^{1} \\
CR_{contenedores\ todos\ x\ rutas} :& Indica\ en\ que\ ruta\ va\ cada\ contenedor. \\
VR_{vagones\ todos\ x\ rutas} :& Indica\ en\ que\ ruta\ va\ cada\ vagon. \\
LR_{locomotoras\ x\ rutas} :& Indica\ en\ que\ ruta\ va\ cada\ locomotora.^{1}
\end{aligned}
$$

[1]Estas variables solo son necesarias porque el enunciado dice que se tienen que tener bien controladas donde va cada elemento, pero realmente si conoces que contenedores y que vagones van en una ruta, asignar los contenedores a los vagones es una tarea elemental, y con respecto a las locomotoras es aun más elemental ya que no hay restricciones en el enunciado luego se puede asumir que con una locomotora por ruta es suficiente.

2.2.3. Parametros

Para el calculo de la funcion objetivo y las restricciones, se han sintetizado los datos del enunciado en los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}
Distancia_r \;&:Distancia\ que\ tiene\ que\ recorrer\ un\ elemento\ en\ la\ ruta\ r.\\
&\forall r \in rutas\\
Mercancias_r \;&:Cantidad\ de\ mercancias\ que\ tiene\ que\ se\ tienen\ que\ trasladar\ en\ la\ ruta\ r.\\
&\forall r \in rutas\\
Traslado_{ct,r} \;&:Lo\ que\ cuesta\ trasladar\ un\ contenedor\ de\ tipo\ ct\ en\ la\ ruta\ r.\\
&\forall ct \in contenedores\ tipos, \forall r \in rutas\\
Limite\ Contenedor_{ct} \;&:La\ cantidad\ de\ mercancia\ que\ puede\ trasladar\ un\ contenedor\ de\ tipo\ ct.\\
&\forall ct \in contenedores\ tipos\\
Limite\ Vagon_{vt,ct} \;&:La\ cantidad\ de\ contenedores\ tipo\ ct\ que\ puede\ trasladar\ un\ vagon\ tipo\ vt.\\
&\forall vt \in vagones\ todos, \forall ct \in contenedores\ tipos
\end{aligned}$$

Cuadro 2: Parametros de asignacion. Rutas

		Madrid-Valencia	Madrid-Cadiz
Distancia		360	650
Mercancias		90	150
Traslado	Cont20	10	15
	Cont40	20	30

Cuadro 3: Parametros de asignacion. Contenedores

		Cont20	Cont40
Limite Contenedor		32	67
Limite Vagon	Vag1	2	0
	Vag2	2	1

2.2.4. Funcion objetivo

Para la funcion objetivo se pretende minimizar el coste de trasladar los contenedores en las rutas.

$$minimizar\ coste = \sum_{r}^{rutas} \left(\sum_{ct}^{contenedores\ tipos} \left(\sum_{c}^{contenedores_{ct}} CR_{c,r} \right) * Traslado_{ct,r} \right) * Distancia_r$$

2.2.5. Restricciones

El problema, por como esta presentado, presenta 3 restricciones muy claras; que se tienen que transportar cierta cantidad de mercancias en cada ruta (9), que las rutas cumplan los limites de contenedores que los vagones asignados a esa ruta le permitan(10) y que se tiene que evitar el uso innecesario de vagones(11). También, al tratarse de un problemade asignación, en nuestras variables, un elemento solo puede ser asignado a una cosa (16-19) y además se asume tiene que haber al menos una locomotora en cada ruta (15).

Para asegurarse de que la coherencia entre las variables CV, VR, y VR se restringe que los vagones cumplan los limites de contenedores que pueden trasladar (12), que se asignen a vagones los mismos contenedores que se asignan a rutas (13) y que, teniendo en cuenta esas otras dos restricciones, si un contenedor esta asignado a una vagon y un vagon esta asignado a una ruta, que el contenedor este asignado a esa ruta (14).[2]

$$CV_{c,v}, CR_{c,r}, VR_{v,r}, LR_{l,r} \in \mathbb{Z}_2$$

$$\forall c \in contenedores\ todos, \forall v \in vagones\ todos, \forall l \in locomotoras, \forall r \in rutas \tag{8}$$

$$\sum_{ct}^{contenedores\ tipos} \left(\left(\sum_{c}^{contenedoresct} CR_{c,r} \right) * Limite\ Contenedor_{ct} \right) \geq Mercancias_r;$$

$$\forall r \in rutas \tag{9}$$

$$\sum_{c}^{contenedores_{ct}} CR_{c,r} \leq \sum_{vt}^{vagones\ tipos} \left(\left(\sum_{v}^{vagones_{vt}} VR_{v,r} \right) * Limite\ Vagon_{vt,ct} \right);$$

[2]La forma mas directa de hacer esto es usar un and, sin embargo trasladar un and del mundo binario al entero lo convierte en una multiplicacion de variables por lo que deja de ser lineal, para solucionarlo se ha hecho una restriccion (14) que te garantiza: a=1 and b = 1 –>c = 1, pero si a o b es 0 no te garantiza que c sea 0, para completar esto y que así tenga la funcionalidad de una and se han usado otras 2 restricciones(12)(13).

$$\forall r \in rutas, \forall ct \in contenedores\ tipos \tag{10}$$

$$-1 + \sum_{c}^{contenedores\ todos} CR_{c,r} \geq \sum_{v}^{vagones\ todos} VR_{v,r};\ \forall r \in rutas \tag{11}$$

$$\sum_{c}^{contenedores_{ct}} CV_{c,v} \leq Limite\ Vagon_{vt,ct};$$

$$\forall vt \in vagones\ tipos, \forall v \in vagones_{vt}, \forall ct \in contenedores\ tipos \tag{12}$$

$$\sum_{r}^{rutas} CR_{c,r} = \sum_{v}^{vagones\ todos} CV_{c,v};\ \forall c \in contenedores\ todos \tag{13}$$

$$CR_{c,r} + CV_{c,v} - 1 <= VR_{v,r};\ \forall r \in rutas, \forall c \in contenedores\ todos, \forall v \in vagones\ todos \tag{14}$$

$$\sum_{l}^{locomotoras} LR_{l,r} \geq 1;\ \forall r \in rutas \tag{15}$$

$$\sum_{r}^{rutas} CR_{c,r} \leq 1;\ \forall c \in contenedores\ todos \tag{16}$$

$$\sum_{r}^{rutas} VR_{v,r} \leq 1;\ \forall v \in vagones\ todos \tag{17}$$

$$\sum_{r}^{rutas} LR_{l,r} \leq 1;\ \forall l \in locomotoras \tag{18}$$

$$\sum_{v}^{vagones\ todos} CV_{c,v} \leq 1;\ \forall c \in contenedores\ todos \tag{19}$$

2.3. Programacion Dinamica

3. Analisis de los resultados

3.1. Describir la solucion y analizar que restricciones limitan el problema

3.1.1. Solucion

Productos comprados en la Fabrica 1:
locomotoras: 2

- vagones1: 2
- vagones2: 0
- contenedores20: 3
- contenedores40: 2

Productos comprados en la Fabrica 2:

- locomotoras: 1
- vagones1: 1
- vagones2: 2
- contenedores20: 1
- contenedores40: 2

Disposición de contenedores en vagones:

- C1 –>V1
- C2 –>V2
- C3 –>V1
- C4 –>V4
- C5 –>V4
- C6 –>V5
- C7 –>No Asignado
- C8 –>No Asignado

Disposición de contenedores en rutas:

- C1 –>Madrid-Valencia
- C2 –>Madrid-Valencia
- C3 –>Madrid-Valencia
- C4 –>Madrid-Cadiz
- C5 –>Madrid-Cadiz
- C6 –>Madrid-Cadiz
- C7 –>No Asignado
- C8 –>No Asignado

Disposición de vagones en rutas:

- V1 –>Madrid-Valencia
- V2 –>Madrid-Valencia
- V3 –>No Asignado
- V4 –>Madrid-Cadiz
- V5 –>Madrid-Cadiz

Disposición de locomotoras en rutas:

- L1 –>Madrid-Valencia
- L2 –>Madrid-Cadiz
- L3 –>No Asignado

Coste Minimizado de la compra: 662360

Coste Minimizado del traslado: 62800

Coste Minimizado total : 725160

3.1.2. Cumplimiento de restricciones

En la primera fabrica se compran 9 productos y en la fabrica 2 se compran 7 luego se compran más en la fabrica que esta mas cerca.
En la primera fabrica, el precio total de las compras es de 341720 y en la segunda de 320640 luego evita que alguna fabrica tenga monopolio.
Mirando el cuadro 1 se puede comprobar que no se supera el limite permitido por ninguna fabrica.
Segun los contenedores asignados a rutas, se pueden llevar 96 y 166 toneladas respectivamente a la ruta de Madrid-Valencia y Madrid-Cadiz luego se satisfacen la cantidad de mercancias que se tienen que transportar.
Mirando el cuadro 3 y la asignacion de contenedores a vagones se ve que no se supera el limite que cada tipo de vagon permite.
En ambas rutas se usan 2 vagones y 3 contenedores luego se evita el uso innecesario.

3.1.3. Restricciones que limitan el problema

En el problema de la compra, el limite de stock no cambia en nada a no ser que el stock de la fabrica que tiene el producto mas barato no tenga suficiente como para suministrar la necesidad, la prioridad de tiempo tiene un ligero impacto pero no muy grande y el que mas impacto tiene es evitar el monopolio (quitando esa restriccion el coste de la compra pasa de 662360 a 622740) ya que se obliga a comprar productos mas caros para que el balance se mantenga. En el problema de la asignacion, la restriccion de los limites que tienen los vagones afecta un poco (ya que usar contenedores de 40′ es mas eficiente que los de 20′ segun lo que cuesta trasladarlos) y la restriccion de usar mas contenedores que vagones no afecta en nada pero la que realmente afecta, claramente, es la carga que se tiene que trasladar, ya que si no se tiene que trasladar nada hay que usar menos contenedores (se siguie teniendo que usar algunos por la restriccion de usar mas contenedores que vagones y 0 no es mayor que 0 luego se tienen que usar contenedores y suficientes vagones para llevarlos)

3.2. Analisis de complejidad

Teniendo en cuenta los datos y conjuntos, el problema esta modelizado con 5 variables y 13 restricciones (sin tener en cuenta las restricciones para que las variables sean numeros enteros no negativos). Las ultimas 10 restricciones estan hechas para juntar el limite de stock y el maximo de elementos que se pueden comprar y que de esta forma el modelo permita incluir otro tipo de productos para comprar y otras restricciones de forma más fácil, para este caso en concreto se podria modelizar con solo 7 restricciones (como esta puesto en el archivo de calc).
Teniendo en cuenta las restricciones de stock, el problema puede tomar $3^3 + 4^2$, es decir, 43 posibles valores. Teniendo en cuenta los datos y conjuntos, el problema esta modelizado con 72 variables binarias, es decir, que hay 2^{72}, es decir $4{,}7 * 10^{21}$ posibles valores que pueden tomar nuestro resultado, y con 96 restricciones (sin tener en cuenta las que limitan a que las variables sean binarias).

3.3. Cuestiones

3.3.1. Composicion final

Madrid-Valencia: C1-C3->V1-C2->V2_L1
Contenedores: 3
Vagones: 2
Madrid-Cadiz: C4-C5->V4-C6->V5_L2
Contenedores: 3
Vagones: 2

3.3.2. Mejor tipo de Vagon

3.4. Ventajas y desventajas de calc

4. Conclusiones acerca de la práctica