Universidad de Granada

Geometría III

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Contents

Introducción

En esta asignatura trataremos de estudiar la geometría afín. Nos centraremos en el plano, el espacio y las figuras que se forman en él.

1 El espacio afín

Definición (Espacio afín). Sea E un conjunto no vacío. Entonces diremos que E es un espacio afín asociado a un espacio vectorial V si existe la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\to V \\ (a,b) &\mapsto \varphi(a,b) \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

- Si fijamos un punto a, la aplicación φ_a es biyectiva, o lo que es lo mismo:

$$\forall a \in E, \quad v \in V, \quad \exists! b \in E : \varphi(a,b) = v$$

- Se tiene la relación de Charles, es decir:

$$\forall a,b,c \in E \quad \varphi(a,b) + \varphi(b,c) = \varphi(a,c)$$

1.1 El plano afín

Desde ahora en adelante, en el desarollo de estos apuntes consideraremos $\mathbb{R}^2$ como el plano afín. En este plano podemos representar tanto *puntos* como *vectores* (realmente lo haríamos en el plano vectorial). No vamos a entrar a detallar todas las propiedades de los vectores, que vamos a suponer que el lector conoce.

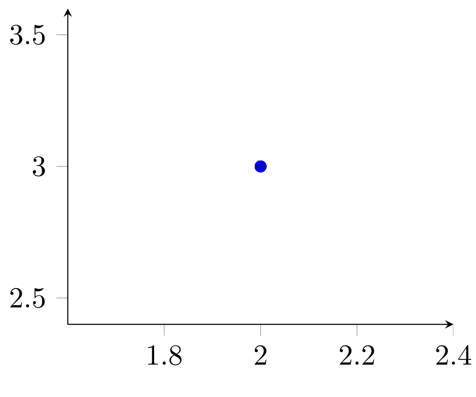

Figure 1: El punto (2,3) en el plano

Lo que vamos a tratar de hacer en este tema es *transformar* las propiedades de los vectores en propiedades de puntos e intentar relacionar estos dos conceptos.

Dados dos puntos P y Q del plano, podemos transformarlos en un vector llamando a $\vec{u}$ al vector que une P y Q. Así, $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$. De forma analítica podemos observar también que si tenemos un punto P podemos sumarle un vector $\vec{u}$, obteniendo otro punto Q. Hemos visto entonces que podemos sumar tanto vectores como puntos con vectores.

Definición (Combinación lineal de vectores). Si tenemos una familia $u_1, \ldots, u_n$ de vectores vectores y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una familia de escalares, entonces a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

lo llamamos *combinación lineal de vectores.*

Definición (Razón de vectores proporcionales). Dados u y v dos vectores proporcionales ($u = \lambda v$), entonces llamamos *razón* de esos dos vectores al escalar λ.

A continuación vamos a estudiar distintas *combinaciones lineales* de puntos del plano afín.

Definición (Combinación baricéntrica de un conjunto de puntos). Dados $P_1, ..., P_n$ un conjunto de puntos del plano afín y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ un conjunto de escalares (llamados *pesos* de los puntos) que cumplen que $\sum \alpha_i = 1$, llamamos *combinación baricéntrica de puntos* a:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$$

Proposición. *Una combinación baricéntrica de puntos es un punto.*

Proof. Para simplificar la demostración vamos a comenzar transformando los puntos en vectores.

Restamos primero $P - P_1 = \sum \alpha_i (P_i - P_1)$, obteniendo así el vector determinado por P y P_1 y una identidad entre vectores de la forma:

$$P - P_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_1 P_i}$$

Y llegamos así a que

$$P = P_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_1 P_i}$$

Hemos demostrado que P es el resultado de sumar un vector a un punto (en este caso P_1), que es otro punto como queríamos. $\square$

Definición (Combinación convexa). Si en una combinación baricéntrica los pesos α_i asignados a los puntos son todos positivos entonces llamaremos a esta combinación *convexa*.

Definición (Centro de gravedad de un conjunto de puntos). Si $P_1, ..., P_n$ es un conjunto de puntos del plano afín y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ los *pesos* asociados a estos puntos, llamamos a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$$

el *centro de gravedad del conjunto de puntos.*

Definición (Punto medio). Sean P y Q dos puntos en el espacio afín. Entonces decimos que m es el punto medio entre P y Q si está definido como:

$$m = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}(P + Q)$$

Alternativamente, si $u = \overrightarrow{PQ}$, entonces:

$$m = \frac{1}{2}u + P$$

1.2 Rectas afines

En este apartado vamos a describir las *rectas afines.* De ahora en adelante, si se hace mención a una recta sin más, daremos por hecho que se trata de una recta afín.

Definición (Recta vectorial). Una recta vectorial es un subespacio vectorial de dimensión 1. Para generarlas solo es necesario un único vector. Podemos escribir la *recta vectorial generada por un vector* v como $L(v)$.

Proposición. *Si P es un punto y v un vector, entonces la recta afín r viene dada por*

$$r = P + L(v) = \{P + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Para distinguir las rectas vectoriales de las rectas afines, notaremos a $L(v)$ como $\vec{r}$.

Definición (Variedad de dirección). Si v es un *vector director*, llamaremos *variedad de dirección* a la recta generada por este vector, $L(v) = \vec{r}$.

Propiedades de las rectas afines:

- Si Q es un punto y r una recta tales que que $Q \in r \implies r = Q + L(v)$ donde v es el vector director de la recta r.
- Si P, Q son dos puntos, entonces por ellos pasa una única recta $r = P + L(\overrightarrow{PQ})$.

  Proof. (Unicidad) Si la recta r pasa por P y Q y sea s otra recta que pasa por ellos, entonces por definición:

  $$s = P + L(\overrightarrow{PQ}) = r$$

  □

1.2.1 Posición relativa entre rectas

Podemos clasificar un par de rectas r y s por su posición en el plano afín. Así, decimos que dos rectas son

- Paralelas, notado $r \parallel s$, si y solo si $\vec{r} = \vec{s}$
- No paralelas, notado $r \nparallel s$, si y solo si sus vectores directores son linealmente independientes o lo que es lo mismo, u y v forman una base.

Teorema. *Si r y s son dos rectas del plano afín, entonces si:*

(i) $r \nparallel s \implies r \cap s = A$*, un punto*

(ii) $r \parallel s \implies r = s$ *o bien* $r \cap s = \emptyset$

Proof. *(i)* Si u, v son los vectores directores de r y s y P y Q puntos de r y s respectivamente, entonces con los pares $\{u, v\}$ tenemos que $P + \lambda u = Q + \mu v$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y si $r = P + L(u)$ y $s = Q + L(v)$, y $\overrightarrow{PQ} = \lambda u - \mu v$ y, por ello, existen únicos λ, μ.

(ii) Sean u, v son los vectores directores de r y s. Supongamos que además tienen al menos un punto A en común. Escribimos estas rectas como $r = A + L(u)$ y $s = A + L(v)$. Como $r \parallel s \implies L(r) = L(s)$ descubrimos que $r = A + L(u) = A + L(v) = s$.

□

1.3 Triángulos

Los *triángulos* son polígonos que vienen dados por tres puntos no alineados A, B, C llamados *vértices* y las tres rectas que los unen.

Definición. Dos o más puntos $A_1, A_2, ..., A_n$ estan alineados $\iff$ existe una recta $r \subset \mathbb{R}^2$ *tal que* $A_i \in r \ \forall i \in 1, ..., n$

Proposición. *A, B, C son puntos no alineados $\iff$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes.*

Proof. $\boxed{\Rightarrow}$ Si los puntos A, B, y C no están alineados entonces $\nexists r \subset \mathbb{R}^2$ tal que A, B, y $C \in r$, luego $\nexists \vec{v}$ *tal que* $A, B, C \in r = A + L(\vec{v})$. Por tanto, $\overrightarrow{AB} \neq \alpha \cdot \overrightarrow{AC}, \alpha \in \mathbb{R}$ porque si no, sería cierto lo anterior. Así, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si A, B, C están en la misma recta, entonces la única recta que une puntos A y B y los puntos A y C es la misma, luego $r = A + L(\overrightarrow{AB}) = A + L(\overrightarrow{AC})$, por lo que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

serían linealmente dependientes. Como sabemos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no lo son, por lo tanto A, B y C no están alineados. $\square$

Teorema. *Si consideramos los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ con dos de los lados homólogos paralelos y las razones de los vectores de esos lados son iguales. Si las rectas paralelas son: $A \vee C \parallel A_1C_1$ y $A \vee B \parallel A_1B_1$, por lo que las razones son:*

$$\frac{\vec{A_1C_1}}{\vec{AC}} = \frac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}}$$

Entonces, la pareja restante $C \vee B \parallel C_1B_1$ y $\frac{\vec{B_1C_1}}{\vec{BC}} = \frac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}} = \frac{\vec{A_1C_1}}{\vec{AC}}$

Proof. Si los lados son paralelos, entonces los vectores directores son proporcionales.

Si w (el lado no mencionado del primer triangulo) es $w = -u+v$ y w_1(el lado no mencionado del segundo triángulo) es $w_1 = -\lambda u + \lambda v = \lambda(-u+v) = \lambda w$ por lo que tenemos lo que queríamos. $\square$

Definición (Triángulo medio). Si ABC es un triángulo y A',B',C' los puntos medios de sus lados, entonces:

(*i*) $A'B'C'$ es un triángulo

(*ii*) Los lados homólogos son paralelos y que el factor de proporcionalidad es: $-\dfrac{1}{2}$

Proof. (*i*) Se hace viendo que si ABC no están alineados, estos 3 tampoco

(*ii*) Tenemos que: $A' = B/2 + C/2$, $B' = A/2 + C/2$, $C' = A/2 + B/2$. Tenemos por tanto que: $\vec{A'B'} = B' - A' = \frac{1}{2}(A - B) = -\frac{1}{2}\vec{AB}$ y por tanto los lados homólogos son paralelos.

Además, el factor es el número obtenido en la conversión, es decir $\dfrac{-1}{2}$.

$\square$

1.3.1 Centros y ejes de un triángulo

Definición (Medianas de un triángulo). Las medianas de un triángulo ABC son las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto

Definición (Baricentro de un triángulo). El baricentro G de un triángulo que viene dado por:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

Teorema. *Si ABC es un triángulo en el plano afín, entonces las medianas son concurrentes. Su punto de corte es el Baricentro. El baricentro triseca el segmento que une un vértice con el punto medio homólogo.*

Teorema. *Sea A' el punto medio del lado opuesto a A en un triángulo ABC. Sea AvA' una de las medianas. Esta es:*

$$\{\lambda A + \mu A' : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ , \ \lambda + \mu = 1\}$$

Entonces, sabemos que $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ y veamos que este está en la mediana: Tenemos que ver la ecuación:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \lambda A + \mu A' \implies \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C) = ... = G$$

Si ABC es un triángulo en $\mathbb{R}^2$, y $A'B'C'$ su triángulo medio. Sabemos que existen las medianas $m_A = L(\vec{AA'})$. Sabemos que las 3 medianas concurren en el baricentro. Este baricentro triseca a las medianas y tenemos que $G = \frac{2}{3}A' + \frac{1}{3}A$

Definición (Mediatriz de un segmento). Si $\bar{AB}$ es un segmento, entonces llamamos m_{AB} al lugar geométrico $\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}^2 : AP = BP\}$ (los puntos del plano que distan lo mismo que A que de B).

Propiedades:

(*i*) El punto medio $M \in \mathcal{L}$

(*ii*) La mediatriz es una recta que viene dada por $< \vec{AB}, P >= \frac{1}{2}(|B|^2 - |A|^2)$ y que es perpendicular al segmento AB y pasa por M el punto medio del segmento.

Definición (Rectas perpendiculares.). Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son ortogonales.

Definición (Mediatrices de un triángulo). Si ABC es un triángulo, cada lado de este triángulo tendrá su mediatriz. Por tanto, tendremos 3 mediatrices para cada triángulo.

Teorema. *Las tres mediatrices de un triángulo son concurrentes. Además, concurren en el punto O llamado el circuncentro, el centro de la circunferencia que pasa por A,B y C.*

Proof. Lo primero es ver que es trivial que dos mediatrices nunca son paralelas. Así:

$$O = m_{AB} \cap m_{AC} \implies \begin{cases} AO = BO \\ AO = CO \end{cases} \implies BO = CO \implies O \in M_{BC}$$

$\square$

Definición (Alturas de un triángulo). Son las rectas que pasan por un vértice y son perpendiculares al lado opuesto del triángulo. Estas alturas se cortan en el ortocentro H.

Nota. Las mediatrices de un triángulo ABC son las alturas de $A'B'C'$. Por lo que las alturas de $A'B'C'$ son concurrentes.

Proposición. *Todo triángulo ABC es el triángulo medio de otro triángulo $A''B''C''$*

Proof. Para ello, tenemos que considerar $A'' = C + \vec{AB}$. Íden con B'' y C''. □

Definición. Todo triángulo ABC tiene un triángulo doble asociado, el cual es el hallado en la proposicion

Proposición. *Si ABC es un triángulo y $A'B'C'$ su triángulo medio, entonces las alturas de $A'B'C'$ son las mediatrices de ABC y $O = H'$*

Ejercicio: Si 2 de los centros del triángulo ABC coinciden, entonces el triángulo es equilátero.

Ejercicio:Si h es una homotecia de razón $\lambda \neq 0$, entonces

- h multiplica la distancia por $|\lambda|$.
- h lleva rectas perpendiculares en rectas perpendiculares.
- h lleva mediatrices en mediatrices.
- h lleva alturas en alturas.

Ejercicio: Para toda homotecia, el centro un punto y su imagen están alineados.

Teorema (Recta de Euler). *Dado un triángulo ABC no equilátero, entonces sus tres centros G, O, H están alineados(están en la recta de Euler).*

Proof. Tomamos el triángulo y su triángulo medio $A'B'C'$. Entonces, hay una homotecia de centro G y razón $\frac{-1}{2}$ que lleva ABC en $A'B'C'$.(Probarlo, aplicando la fórmula de la homotecia con su cent y su razón). Ahora, si G', O', H' son los centros de $A'B'C'$ y G, O, H los centros de ABC, tenemos que $G' = G$ y $O = H'$. Sabemos que la homotecia h lleva $G \to G$, $O \to O'$ y $H \to H' = O$.

Entonces, si aplicamos h al centro G, a un punto H y a su imagen O, por el ejercicio anterior, estan alineados.

□

1.4 Ecuaciones de una recta

Hemos visto una recta como un punto A y un vector $\vec{v}$. Es decir, $r \equiv (x_0, y_0) + (x, y) : (x, y) \in L(v) \equiv (x_0 + x, y_0 + y)$.

También por tanto podemos hacer una recta mediante dos puntos, tomando el vector que forman esos dos puntos y uno de ellos y teniendo la situación anterior.

Las rectas vectoriales en el plano vectorial son siempre de la forma:

$$\vec{r} \equiv (x, y) \in L : \alpha x + \beta y = 0 \text{ con } \alpha \text{ o } \beta \text{ distinto de } 0$$

Si r es una recta afín, entonces:

$$r \equiv \alpha x + \beta y = \gamma$$

con α o β distintos de 0 y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Ahora, si tenemos $r' \equiv \alpha' x + \beta' x = \gamma'$ podemos ver que:

- $r \parallel r' \iff (\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ son linealmente dependientes. Es decir, si el determinante que forman es 0
- $r \nparallel r' \iff (\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ no son linealmente dependientes. Es decir, si el determinante que forman no es 0

1.5 Cuadriláteros

Definición. $ABCD$ es un cuadrilátero que está formado por 4 puntos consecutivos no alineados 3 a 3. Se llaman lados a los segmentos que unen los vertices consecutivos, y diagonales a los segmentos que unen $A \vee C$ y $B \vee D$.

Definición (Lado). Un lado es una recta que une dos vértices consecutivos. En concreto, los cuadriláteros tienen 4 lados: $A \vee B$, $B \vee C$, $C \vee D$ y $D \vee A$.

Definición (Diagonal). Una diagonal es una recta que une dos vertices no consecutivos. En concreto, los cuadriláteros tienen 2 diagonales: $A \vee C$ y $B \vee D$.

Definición (Paralelogramo). Un paralelogramo es un cuadrilátero que cumple que todos sus lados opuestos son paralelos. Es decir, sea $ABCD$ un paralelogramo entonces AvB es paralelo a $C \vee D$ y $B \vee C$ es paralelo a $D \vee A$. Además los paralelogramos cumplen que siendo $V_1 = A \vee B$, $V_2 = B \vee C$, $V_3 = C \vee D$, $V_4 = D \vee A$ entonces:

(i) $V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = 0$

(ii) $V_3 = \lambda V_1 \; con \; \lambda \neq 0$

(iii) $V_4 = \mu V_2$ *con* $\mu \neq 0$

Proposición. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Entonces, son equivalentes:*

*(*i) *$ABCD$ es un paralelogramo*

*(*ii) $\vec{AB} = \vec{DC}$

*(*iii) *Las diagonales del cuadrilátero se cortan en su punto medio.*

Proof. $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Solo tenemos que fijarnos en lo que implica ser paralelogramo (ver propiedad arriba): $V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = 0 \Leftrightarrow V_1 - V_2 = V_3 - V_4$ Sustituimos $V_3 = \lambda V_1$ y $V_4 = \mu V_2$: $V_1 - V_2 = \lambda V_1 - \mu V_2$ Como sabemos que V_1 *y* V_2 unen 3 puntos que no están alineados, entonces sabemos que son linealmente independientes y por tanto forman base, por esta razon, cualquier vector se forma como combinación lineal de ellos, con coeficientes únicos. Concluyendo por tanto que entonces $\lambda = 1 y \mu = 1$

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Tenemos que $B - A = C - D$, pasando los términos: $B + D = C + A$ Y ahora dividiendo todo entre 2: $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A$ Con lo cual obtenemos los puntos medios de las diagonales que son iguales.

$\boxed{3) \Rightarrow 2)}$ Del mismo modo, si se cortan en la diagonal $\implies \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A \implies \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}D \implies B - A = C - D \implies \vec{AB} = \vec{DC}$

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ Para que sea un paralelogramo, además de $\vec{AB} = \vec{DC}$, ha de cumplir $\vec{AD} = \vec{BC}$, pero por hipotesis $A - B = D - C \implies A - D = B - C$

□

1.6 Transformaciones

Definición (Traslaciones). Se define la traslacion de vector v como $t_v : R^2 \to R^2$ con $t_v(P) = P + v$

Proposición. *Se dan las siguientes propiedades:*

*(*i) $t_v \circ t_w = t_{v+w}$

*(*ii) $t_v^{-1} = t_{-v}$

*(*iii) $t_0 = I$

Definición (Afinidades(aplicaciones lineales biyectivas)). Se define una afinidad f como una aplicacion $f : R^2 \to R^2$ con $f(x) = Ax + b$, con $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $b =$

$$\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$$

Proposición. *Se dan las siguientes propiedades:*

(i) *Las traslaciones son un caso particular de afinidades, en las que $A = I$ y $b = v$*

(ii) *Sean f y g afinidades, entonces $g \circ f(x)$ es afinidad*

1.7 Circunferencias

Definición (Circunferencia). Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ que distan exactamente una distancia r de un punto fijo. Las notaremos como $C = C(centro, radio)$

Proposición. *Dadas dos circunferencias, existen exactamente dos dilataciones que llevan una en la otra.*

1. $C_1 = C(A_1, p_1)$
2. $C_2 = C(A_2, p_2)$

Si h es una dilatación de razón λ, entonces $h(p) = \lambda p + b$. En nuestro caso, cumplirán que $h(C_1) = C_2$ y $p_2 = \lambda p_1$

Definición. Dos puntos A, B de $C = C(O, p)$ se dicen diametralmente opuestos si y solamente si $O \in \bar{AB} \equiv O = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$

Proposición. *Un par de puntos diametralmente opuestos de C determinan la circunferencia de forma única.*

Definición (Ángulo recto). Dos vectores forman un ángulo recto si $< \vec{PA}, \vec{PB} >= 0$, siendo P el punto donde se cortan.

Proposición. *El lugar geométrico desde el que dos puntos dados del plano se ven bajo un ángulo recto es una circunferencia.*

Teorema (La circunferencia de los 9 puntos de un triángulo). *Sea ABC un triángulo en el plano $\mathbb{R}^2$. Entonces existe una circunferencia que pasa por los siguientes puntos:*

- *A', B', C' los puntos medios de los lados*
- *A_2, B_2, C_2 los puntos medios de los segmentos $\bar{HA}$, $\bar{HB}$, $\bar{HC}$*
- *A_3, B_3, C_3 los tres pies de las alturas.*

Proof. Tenemos que $B'A'B_2A_2$ es un rectángulo □

Definición (Movimientos). Un movimiento es una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $n = 2$ ó 3que es una afinidad que conserva distancias.

$$|f(P) - f(Q)| = P - Q \qquad |\vec{f}(\vec{QP}| = |\vec{QP}|$$

Proposición. *f es un movimiento $\iff$ A es ortogonal ($A^{-1} = A^t$). Es de la forma:*

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Ejemplo: *(i)* Traslaciones $p \mapsto p + v$

(ii) Reflexión central $p \mapsto -p + b = -p + 2A$ de centro A

(iii) Giro de ángulo θ y centro A (en $\mathbb{R}^2$).

$$f = \begin{cases} f(A) = A \\ \vec{f} \equiv A_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

Proposición. *Si realizamos un giro A_θ y sobre ese giro aplicamos otro giro $A_{\theta'}$, tenemos que:*

$$A_\theta o A_{\theta'} 0 A_{\theta+\theta'}$$

Siendo A la matriz del giro.

Definición (Matrices ortogonales). Son de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{o} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 = 1$

Definición (Movimiento directo). Es un movimiento que tiene como matriz una matriz ortogonal.

Proposición. *En $\mathbb{R}^n$, si $\lambda = 1$ no es un valor propio de A, entonces f tiene un punto fijo y solo 1.*

1.8 Rectángulos

Definición. Un rectángulo es un paralelogramo tal que los lados contiguos son perpendiculares.

Proposición. *Un paralelogramo es rectángulo* $\iff$ *las dos diagonales miden lo mismo.*

Proposición. *Todo rectángulo se inscribe en una circunferencia. Además,cada par de vértices opuestos son diametralmente opuestos.*

Proposición. *Un paralelogramo se puede inscribir en una circunferencia* $\iff$ *es un rectángulo*

1.9 Ángulos

Definición (Ángulo entre vectores). Dos vectores $\vec{w}$ y $\vec{v}$ en $\mathbb{R}^2$ forman un ángulo:

$$cos\theta = \frac{< v, w >}{|v||w|} \implies \theta = cos^{-1}\frac{< v, w >}{|v||w|}$$

Nota. Un ángulo entre rectas sería el ángulo que forman sus vectores directores

Proposición. *Si tenemos cuatro rectas* $r \parallel r'$ *y* $s \parallel s'$*, entonces los ángulos entre* r *y* s*, y entre* r' *y* s' *son iguales.*

Proposición. *Los ángulos opuestos por el vértice formados por dos rectas son iguales.*

Proposición. *Si* r *y* s *son perpendiculares, entonces* $\theta = \pi/2$

Teorema. *Los tres ángulos de un triángulo suman* π

Proof. La prueba se hace realizando el triángulo medio y trasladando los ángulos a uno de los vértices de este por rectas paralelas. □

Proposición. *Si* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *es una dilatación:*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \quad \lambda \neq 0$$

Las distancias se multiplican por $|\lambda|$*, los ángulos se mantienen.*