Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Ejercicios resueltos

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

1. Sucesiones y series de funciones

Ejercicio 1. Probar que el espacio $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$ es un espacio de Banach, esto es, un espacio normado y completo.

Demostración. Empezamos probando que $(\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado:

- Positividad. En primer lugar puesto que la norma se ha definido como supremo de un conjunto de numeros positivos, tendremos que $\|f\|_\infty \geq 0$ para toda $f \in (\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$. Además, $|f\|_\infty = 0 \iff sup_{x\in A}|f(x)| = 0 \iff f(x) = 0,\ \forall x \in A \iff f$ es la función 0.
- Homogeneidad. Si $k \in \mathbb{R}$ entonces $\|kf\|_\infty = |k|\|f\|_\infty \iff sup_{x\in A}|kf(x)| = sup_{x\in A}|k||f(x)| = |k|sup_{x\in A}|f(x)| = |k|\|f\|_\infty$.
- Desigualdad triangular. $|f + g|_\infty \leq |f|_\infty + |g|_\infty \iff sup_{x\in A}|f(x) + g(x)| \leq sup_{x\in A}|f(x)| + sup_{x\in A}|g(x)|$. para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$.

Para demostrar que $f_n \to f$ c.u. en A $\iff$ $f_n \to f\ en\ \mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$, solo tenemos que observar que $f_n \to f$ c.u. en A significa que:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A,$$

lo cual equivale a decir

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = sup_{x\in A}|f_n - f| \leq \varepsilon,\ \forall x \in A,$$

es decir, $f_n \to f\ en\ \mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$.

Por último, $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$ es de Banach si es completo, es decir si toda sucesión $\{f_n\}$ (de funciones en $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$) de Cauchy converge. La prueba es análoga a la que se hizo para ver que $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, era completo. La única diferencia será que tras probar la convergencia uniforme de f_n a una función f, deberemos probar que $f \in \mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$, es decir que el límite uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas y acotadas es una función continua y acotada. Veámoslo.

Recordemos que ya sabemos por teoría que f es continua. Para la acotación, tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de convergencia uniforme, obtenemos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < 1\ \forall x \in A$. Por otro lado, como f_{n_0} es acotada, existe un $M > 0$ tal que $|f_{n_0}(x)| \leq M\ \forall x \in A$. Entonces, se tiene que:

$$|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| < 1 + M, \quad \forall x \in A$$

Por tanto, f está acotada. $\square$

Ejercicio 2. Probar que en el espacio $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, cualquier bola cerrada y centrada en el origen es homeomorfa a una bola cerrada y centrada en un punto arbitrario.

Solución. Sea $\varepsilon > 0$, y $\tilde{f} \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Consideremos la aplicación $\varphi : \overline{B}_\infty(0, \varepsilon) \to \overline{B}_\infty(\tilde{f}, \varepsilon)$ dada por $\varphi(f) = f + \tilde{f}$. Por un lado, φ está bien definida, pues:

$$\|\tilde{f} - \varphi(f)\|_\infty = \|\tilde{f} - f - \tilde{f}\|_\infty = \|f\|_\infty \leq \varepsilon \Rightarrow \varphi(f) \in \overline{B}_\infty(\tilde{f}, \varepsilon)$$

Tenemos que φ es continua, pues la preimagen de un entorno básico (bolas abiertas) es un entorno básico. Para verlo, en lugar de φ vamos a tomar su extensión a todo el espacio (la llamaremos φ'), definiéndola de la misma forma ($f \mapsto f + \tilde{f}$). Entonces, se tiene que:

$$\begin{aligned}
&\varphi'^{-1}(B_\infty(f, \varepsilon)) = \{g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M) : \varphi'(g) = g + \tilde{f} \in B(f, \varepsilon)\} = \\
&= \{g \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M) : \|f - \tilde{f} - g\|_\infty < \varepsilon\} = B(f - \tilde{f}, \varepsilon)
\end{aligned}$$

Además, la inversa de φ existe: $\varphi^{-}1(g) = g - \tilde{f} \quad \forall g \in \overline{B}_\infty(\tilde{f}, \varepsilon)$. Es continua por el mismo motivo que φ.

Por tanto, φ es un homeomorfismo.

Ejercicio 3. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales uniformemente continuas en todo $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función real f. ¿Puede concluirse que la función f es necesariamente uniformemente continua?.

Solución. La respuesta es afirmativa. Veamos la prueba.

Dado $\varepsilon > 0$, como $f_n \to f$ converge uniformemente, $\exists k > 0$ tal que

$$n > k \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3, \quad \forall x \in A.$$

De otro lado, por ser f_k uniformemente continua en A, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \; con \; |x - y| < \delta, \; se \; tiene \; |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3$$

Juntando ambas informaciones:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Es decir, hemos probado que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \; con \; |x - y| < \delta \; se \; verifica \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Por tanto, f es uniformemente continua.

Ejercicio 4. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones f_n definidas en $[0, 1]$ mediante $f_n(x) = x - x^n$ para todo $x \in [0, 1]$.

Solución. Sabemos que para $0 \leq x < 1$, $f_n(x) = x - x^n \to x$, y para $x = 1$, tenemos que $f_n(x) = 1 - 1^n = 0 \to 0$. Por tanto, el límite puntual es:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \\ 0 & si \quad\quad x = 1 \end{cases}$$

Como cada f_n es continua y f no es continua, no hay convergencia uniforme.

Ejercicio 5. Estudiad la convergencia uniforme de la sucesión de funciones f_n definidas en $[0, 99999]$ mediante $f_n(x) = x^n$ para todo $x \in [0, 99999]$.

Solución. En efecto, la sucesión de funciones converge uniformemente. En primer lugar, $\{f_n\} \xrightarrow{c.p} f = 0$ por ser potencia de base menor que 1. Además, por ser una función potencial, el valor máximo que toma es $0{,}99999^n$. Por tanto: $|x^n| \leq 0{,}99999^n \to 0$, luego $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f = 0$.

Ejercicio 6. Estudiad la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones f_n definidas en $[0, 1]$ mediante $f_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2$ para todo $x \in [0, 1]$.

Solución. Sabemos que $\{\frac{1}{n}\} \to 0$, por lo que podemos afirmar que $\{f_n(x)\} \to x^2$ puntualmente en $[0, 1]$. Veamos que también hay convergencia uniforme:

$$|f_n(x) - x^2| = \left| -\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0, \ \forall x \in [0, 1].$$

Ejercicio 7. Estudiar el carácter de la siguientes series de funciones.

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{sen^k(nx)}{n^2}, \quad k > 0$

Solución. Notemos lo siguiente: $|sen(nx)| \leq 1 \implies \left| \dfrac{sen^k(nx)}{n^2} \right| \leq \dfrac{1}{n^2}$. Además, ya sabemos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ es convergente. Por tanto, aplicando el *Criterio de Weierstrass*, tenemos que:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{sen^k(nx)}{n^2} \text{ converge uniformemente (y absolutamente).}$$

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{x^n}{n!} \right)^2$

Solución (1). Podemos reescribir la serie tal que así: $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$. Entonces, dado $M > 0$, se tiene que, si $|x| \leq M$:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{x^{2n}}{(n!)^2} \leq \dfrac{M^{2n}}{(n!)^2} \\ \displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{M^{2n}}{(n!)^2} \; converge \end{array}\right\} \overset{\text{Criterio Weierstrass}}{\Longrightarrow} \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 \text{ es c.u en } [-M, M]$$

Donde la convergencia de $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{M^{2n}}{(n!)^2}$ viene dada por el *Criterio del cociente:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{M^{2(n+1)}}{((n+1)!)^2}}{\dfrac{M^{2n}}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{M^2}{(n+1)^2} = 0 < 1.$$

Como M era una constante arbitraria, concluímos que la serie converge uniformemente en cualquier intervalo acotado de $\mathbb{R}$.

Solución (2). Podemos ver la serie como una serie de potencias $\displaystyle\sum_{k\geq 1} a_k x^k$, donde:

$$a_k = \begin{cases} 0 & si\ k\ impar \\ \dfrac{1}{(n!)^2} & si\ k\ par \end{cases}$$

Podemos aplicar el criterio del cociente, de forma muy similar al caso anterior, para ver que el radio de convergencia de la serie es $R = \infty$. Por tanto, $D(0, R) = \mathbb{R}$, y se tiene que $\forall M \in \mathbb{R}^+$ la serie converge uniformemente en $[-M, M]$.

c) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2 + n^2}$

Solución. Nos basta la simple observación de que podemos acotar el término general de la serie (es siempre positivo) por una constante M_n, de tal suerte que $\sum_{n\geq 1} M_n$ es convergente, y aplicar el *Criterio de comparación.* Así:

$$0 \leq \frac{1}{x^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2} \ \forall x \in \mathbb{R} \implies \sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2 + n^2} \text{ converge uniformemente en } \mathbb{R}.$$

d) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k^2}$

Solución. Como es una serie de potencias, calculamos su radio de convergencia:

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{1}{(k+1)^2}}{\dfrac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^2 = 1 \implies R = 1$$

Por tanto, ya sabemos que la serie converge uniformemente cuando $|x| < 1$, y no converge cuando $|x| > 1$. Solo nos falta por estudiar el caso $|x| = 1$:

$$|x| = 1 \implies \left|\frac{x^k}{k^2}\right| = \frac{|x|^k}{k^2} = \frac{1}{k^2}$$

Sabemos que $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2}$ es convergente, por lo que, en virtud del *Criterio de Weierstrass*, la serie $\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k^2}$ converge uniformemente cuando $|x| = 1$.

e) $\displaystyle\sum_{k\geq 1} k!x^k$

Solución. Se trata de una serie de potencias, donde $a_k = k!$. Calculamos su radio de convergencia:

$$R^{-1} = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{k!} = \lim_{k\to\infty} k+1 = \infty \implies R = 0$$

Por tanto, la serie no converge si $|x| > R = 0$ (es decir, si $x \neq 0$). Si $|x| = 0$, tenemos que:

$$\sum_{k\geq 1} k! \cdot 0^k = \sum_{k\geq 1} 0 = 0 \text{ (convergente)}$$

En general, **una serie de potencias siempre es convergente en su centro**.

Ejercicio 8. Probar que $\displaystyle\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \quad \forall x \in (-1, 1)$

Solución. Para probarlo, se podría estudiar la convergencia de la serie de potencias, o también desarrollar el término de la izquierda como su suma de Taylor, y ver que coinciden. Sin embargo, procederemos de otro modo.

En primer lugar, notemos que $kx^{k-1} = \dfrac{d}{dx}(x^k)$. Por tanto, estudiemos el carácter de la serie $\displaystyle\sum_{k\geq 0} x^k$. Como es una serie de potencias, calculamos su radio de convergencia, y tenemos que $R = 1$, pues $a_k = 1\ \forall k \geq 0$.

Por otro lado, consideramos la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$. Sin mucho esfuerzo, podemos probar por inducción que $f^{k)}(0) = k!\ \forall k \geq 0$. Por tanto, tenemos que la serie de Taylor en $a = 0$ de $f(x)$ es:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad \forall x \in (-1, 1),$$

pues la serie converge dentro del disco de convergencia. Sabemos también que la serie es derivable, y dentro del disco de convergencia, se da la siguiente igualdad, derivando en ambos miembros:

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} \quad \forall x \in (-1,1)$$

Ejercicio 9. Encontrar un ejemplo de una sucesión de funciones $f_k : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que cumpla:

(i) $\{f_k\} \to 0$ c.u.

(ii) $\displaystyle\int_A f_k \not\to \int_A 0 = 0$

Solución. Sea $A = [0, +\infty)$, y tomo f_k tales que $0 \leq f_k(x) \leq \frac{1}{k}$, y que además su integral se mantenga constante y distinta de 0. Un ejemplo de una tal función es:

$$f_k(x) = \begin{cases} 1/k & si \ \ 0 \leq x \leq k \\ 0 & si \ \ x \geq k \end{cases}$$

Entonces, tenemos que $\displaystyle\int_0^\infty f_k(x)\ dx = \int_0^k \frac{1}{k}\ dx = 1 \to 1 \neq 0$.