

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Análisis Matemático I

Teoremas, proposiciones y definiciones

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

1. Topología de un espacio métrico.

1.1. Concepto de espacio métrico. El espacio métrico \mathbb{R}^N .

Definición (Espacio métrico). Consideremos un conjunto X cualquiera, y una aplicación $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

- (i) $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$.
- (ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$.
- (iii) $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$.
- (iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$. (*desigualdad triangular*)

Entonces, se dice que el par (X, d) es un *espacio métrico*.

Nota. En adelante, entenderemos \mathbb{R}^N como el espacio métrico (\mathbb{R}^N, d) , siendo d la distancia usual (**distancia euclídea**) dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Existen otras distancias en \mathbb{R}^N . Las más destacadas son las siguientes:

- (i) $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.
- (ii) $d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, N\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.
- (iii) $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

Definición. Sean (X, d) y (X, d') dos espacios métricos sobre un mismo conjunto X . Se dice que las distancias d y d' son *equivalentes* si, y solo si,

$$\exists k_1, k_2 > 0 : k_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq k_2 d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

Proposición. En \mathbb{R}^N , todas las distancias mencionadas anteriormente son equivalentes entre sí. En particular, la distancia euclídea es equivalente a todas ellas.

1.2. Conceptos topológicos.

Definición (Bola abierta). Sea (X, d) un espacio métrico, y fijemos un $x \in X$ y un $\varepsilon > 0$. Se llama *bola abierta de centro x y radio ε* al conjunto $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Definición (Bola cerrada). De forma análoga, se define la *bola cerrada de centro x y radio ε* como el conjunto $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$.

Definición (Conjunto abierto). Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $A \subseteq X$. Decimos que A es abierto $\iff \forall a \in A \exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \subseteq A$.

Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0$ se tiene que $B(x, \varepsilon)$ es un conjunto abierto.

Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) Si $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X , entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es abierto.
- (ii) Si $\{A_1, \dots, A_n\}$ es una familia finita de abiertos de X , entonces $\bigcap_{i=1}^n A_i$ es abierto.
- (iii) X, \emptyset son abiertos.

Definición (Punto interior). Sea (X, d) un espacio métrico, y consideremos $A \subseteq X$, $a \in A$. Se dice que a es un punto interior de A si, y solo si, $\exists \varepsilon_0 > 0 : B(a, \varepsilon_0) \subseteq A$. Definimos $\text{int}(A) = \overset{\circ}{A} = \{a \in A \mid a \text{ es punto interior de } A\}$.

Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.
- (ii) $\overset{\circ}{A}$ es abierto.
- (iii) Si $B \subseteq A$ es un subconjunto abierto de A , entonces $B \subseteq \overset{\circ}{A}$. Es decir, $\overset{\circ}{A}$ es el abierto más grande contenido en A .
- (iv) $\overset{\circ}{A} = \bigcup \{B \subseteq A \mid B \text{ es abierto}\}$.
- (v) A es abierto $\iff \overset{\circ}{A} = A$.
- (vi) $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$.
- (vii) Si $A \subseteq B$, entonces $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.

Definición (Conjunto cerrado). Sea (X, d) un espacio métrico, y $F \subseteq X$. Se dice que el conjunto F es cerrado $\iff X - F$ es abierto.

Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0$ se tiene que $\bar{B}(x, \varepsilon)$ es un conjunto cerrado.

Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) Si $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de cerrados de X , entonces $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ es cerrado.
- (ii) Si $\{F_1, \dots, F_n\}$ es una familia finita de cerrados de X , entonces $\bigcup_{i=1}^n F_i$ es cerrado.

(iii) X, \emptyset son cerrados.

Definición (Clausura). Sea (X, d) un espacio métrico. Se llama *clausura o cierre* de A al conjunto $\bar{A} = X - \text{int}(X - A)$.

Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) $A \subseteq \bar{A}$.
- (ii) \bar{A} es cerrado.
- (iii) Si $B \subseteq X$ es un subconjunto cerrado de X tal que $A \subseteq B$, entonces $\bar{A} \subseteq B$. Es decir, \bar{A} es el cerrado más pequeño que contiene a A .
- (iv) $\bar{A} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}$.
- (v) A es cerrado $\iff \bar{A} = A$.
- (vi) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.
- (vii) Si $A \subseteq B$, entonces $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

Definición (Frontera). Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Llamamos *frontera* de A al conjunto $\partial A = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$.

Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifica lo siguiente: $x \in \partial A \iff \forall \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ y $B(x, \varepsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset$.

Definición (Punto de acumulación). Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Dado $x \in X$, decimos que x es *punto de acumulación* de $A \iff \forall \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. Definimos $A' = \{x \in X \mid x \text{ es punto de acumulación de } A\}$.

Proposición. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:

- (i) $\overset{\circ}{A} = X - \overline{X - A}$
- (ii) $\bar{A} = A \cup \partial A$.
- (iii) $\bar{A} = A \cup A'$
- (iv) $\partial A \subseteq A'$
- (v) $X = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{int}(X - A)$. Además, la unión es disjunta dos a dos.

2. Sucesiones en \mathbb{R}^N .

Definición (Sucesión en \mathbb{R}^N). Una sucesión en \mathbb{R}^N es una aplicación $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$ que a cada $n \in \mathbb{N}$ le hace corresponder un $x(n) \in \mathbb{R}^N$. Por simplicidad, al elemento imagen de n se le denomina x_n , y la aplicación x se denota $\{x_n\}$.

Definición (Convergencia de sucesiones). Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A converge a x si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \in \mathbb{N} : n \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Nota. Este concepto no depende de la distancia equivalente elegida.

Proposición. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$, y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A . Adoptemos la notación $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$, y $x = (x^1, x^2, \dots, x^N)$. Entonces, se verifica que:

$$\{x_n\} \rightarrow x \iff \{x_n^j\} \rightarrow x^j.$$

Definición. Sea (X, d) un espacio métrico, y $x \in X$. Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, un punto $a_n \in X$. Entonces, decimos que $d(a_n, x) \rightarrow 0 \iff \{a_n\} \rightarrow x$.

Definición (Conjunto acotado). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Decimos que A está acotado si, y solo si, $\exists R > 0 : A \subseteq B(0, R)$.

Definición (Sucesión acotada). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de \mathbb{R}^N . Entonces, decimos que $\{x_n\}$ está acotada si, y solo si, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

Proposición. Si una sucesión $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotada, entonces $\forall i = 1, \dots, N$ la sucesión $\{x_n^i\}$ es acotada (en \mathbb{R}).

Nota. Si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotado, entonces cualquier sucesión de puntos de A es acotada.

Teorema (Bolzano-Weierstrass). Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ acotada. Entonces, existe una sucesión parcial suya $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente.

Definición (Sucesión de Cauchy). Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Decimos que $\{x_n\}$ es una sucesión de Cauchy $\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \in \mathbb{N} : n, m \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Teorema (\mathbb{R}^N es completo). Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Entonces:

$$\{x_n\} \text{ es de Cauchy} \iff \{x_n\} \text{ es convergente.}$$

Proposición. Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\{x_n\} \rightarrow x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ es convergente a x .

3. Funciones continuas en \mathbb{R}^N .

Definición (Función continua). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ y $a \in A$. Decimos que f es continua en a si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in A, d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Además, se dice que f es continua si lo es en todos sus puntos.

Proposición (Caracterización de continuidad). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$. Entonces:

$$f \text{ es continua en } a \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \text{ con } \{x_n\} \rightarrow a \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow f(a).$$

Definición (Continuidad uniforme). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$. Se dice que f es uniformemente continua si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x, y \in A, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Definición (Conjunto compacto). Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\emptyset \neq A \subseteq X$.

$$A \text{ es compacto} \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \quad \exists \{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x \in A.$$

Proposición (Caracterización de cerrados). Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, son equivalentes:

- (i) A es cerrado.
- (ii) $\forall \{x_n\} \subseteq A$ convergente a un $x \in X$, se verifica que $x \in A$.

Proposición (Caracterización de compactos). Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $A \subseteq X$. Entonces:

$$A \text{ es compacto} \iff A \text{ es cerrado y acotado.}$$

Proposición. Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ convergente a un $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Entonces, el conjunto $A = \{x_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$ es compacto.

3.1. Clasificación de conjuntos en \mathbb{R}^N

Definición (Conjunto convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *convexo* si $\forall x, y \in A$ se tiene que el segmento de extremos x e y está incluido en A . En otras palabras:

$$A \text{ convexo} \iff [x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\} \subseteq A.$$

Definición (Poligonalmente convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *poligonalmente convexo* si $\forall x, y \in A$ existe una poligonal que los une y no se sale de A . En otras palabras: A poligonalmente convexo $\iff \exists \{x = a_0, a_1, \dots, a_k = y\} \subseteq A$ tal que:

$$\bigcup_{i=1}^k [a_{i-1}, a_i] \subseteq A.$$

Definición (Conjunto arco-conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *arco-conexo* (*conexo por arcos*) si $\forall x, y \in A$ existe un camino incluido en A que los une. En otras palabras, A es *conexo por arcos* $\iff \exists \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a, b]) \subseteq A.$$

Definición (Conjunto no conexo). Decimos que un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ es *NO conexo* si existen U, V abiertos en \mathbb{R}^N tales que:

$$U \cap A \neq \emptyset; \quad V \cap A \neq \emptyset; \quad A \subseteq U \cup V; \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Nota. La misma definición se aplica para un espacio topológico (X, τ) .

Definición (Conjunto conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *conexo* si no es no conexo. Equivalentemente, $\forall U, V$ abiertos en \mathbb{R}^N tales que $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset, A \subseteq U \cup V$, se tiene que forzosamente $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

Proposición. Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Entonces, se verifica lo siguiente:

- (i) A es abierto y conexo por arcos $\Rightarrow A$ es poligonalmente conexo.
- (ii) A es conexo $\Rightarrow A$ es arco-conexo.
- (iii) A es arco-conexo $\Rightarrow A$ es conexo.

Proposición. Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto arco-conexo. Entonces, A es conexo.

3.2. Continuidad en espacios topológicos. Topología inducida.

Definición (Continuidad en espacios topológicos). Sean $(X, \tau_x), (Y, \tau_y)$ dos espacios topológicos, y sea $f : X \rightarrow Y$. Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f^{-1}(B) \in \tau_x \quad \forall B \in \tau_y.$$

Definición (Topología inducida). Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Entonces, $\tau_A = \{B \cap A : B \in \tau\}$ es la *topología inducida en A*.

Proposición (Caracterización de abiertos en topología inducida). Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Si (A, τ_A) es el espacio topológico inducido en A , entonces:

$$B' \in \tau_A \iff \exists B \in \tau : B' = B \cap A.$$

Proposición. Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Entonces, A es no conexo si, y solo si, existen U, V **abiertos en (A, τ_A)** tales que:

$$U \neq \emptyset \neq V; \quad A \subseteq U \cup V; \quad U \cap V = \emptyset.$$

Definición (Continuidad en topología inducida). Sean $(X, \tau_x), (Y, \tau_y)$ dos espacios topológicos, $A \subseteq X$, y $f : A \rightarrow Y$. Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f \text{ es continua en } (A, \tau_A).$$

3.3. Teoremas sobre funciones continuas en \mathbb{R}^N

Teorema (Weierstrass). Sea (X, d) un espacio métrico, $\emptyset \neq A \subseteq X$ compacto, y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua en A . Entonces, $\exists x_1, x_2 \in A : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in A$. En otras palabras, la función f alcanza su mínimo y su máximo.

Teorema (Weierstrass generalizado). Sean (X, d) , (Y, d) espacios métricos, $\emptyset \neq A \subseteq X$ compacto, y $f : A \rightarrow Y$ continua. Entonces, $f(A)$ es compacto.

Teorema (Valor Intermedio). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ arco conexo, y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ continua. Entonces, $f(A)$ es arco-conexo en \mathbb{R}^M .

Teorema (Valor Intermedio revisitado). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ conexo, y $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ continua. Entonces, $f(A)$ es conexo en \mathbb{R}^M .