Universidad de Granada

Modelos Matemáticos I

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

1. Relación 1

1.1. Ejercicio 2

Sea la ecuación:

$$x_{n+1} = 1/3x_n + 2^n$$

Hallar una solución del tipo $x_n = c2^n$.

Llo primero es ver que esta ecuación es una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea. Vamos a hallar el c que nos piden. Entonces:

$$c2^{n+1} = \frac{1}{3}c2^n + 2^n \implies 2^n[2c - c\frac{1}{3} - 1] = 0$$

$$2c - \frac{1}{3}c - 1 = 0 \implies c = \frac{3}{5}$$

Por tanto, la solución es: $x'_n = \frac{3}{5}2^n$, pero esta es una solución particular.

Ahora, probaremos que x_n es solución de la ecuación inicial $\iff$ $z_n = x_n - x'_n$ donde x'_n es una solución particular, es solución de: $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n$.

Lo probamos: Que x_n es solución de la inicial implica que $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 2^n$. Que x'_n es solución de la inicial implica que $x'_{n+1} = \frac{1}{3}x'_n 2^n$.

Si restamos estas dos obtenemos que:

$$x_{n+1} - x'_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n - x'_n)$$

Lo que implica que $z_{n+1} = x_{n+1} - x'_{n+1}$ y $z_n = (x_n - x'_n)$

Ahora, continuamos la resolución del ejercicio:

1. Encontrar una solución particular de la ecuación inicial, $x'_n = \frac{3}{5}2^n$
2. Resolvemos la ecuación homogénea asociada

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n \implies z_n = K(\frac{1}{3})^n$$

3. Usando el resultado:

$$x_n = x'_n + z_n = \frac{3}{5}2^n + K(\frac{1}{3})^n$$

4. Aplicamos la condición inicial $x_0 = 1$.

Así, la solución es $x_n = \frac{3}{5}2^n + \frac{2}{5}(\frac{1}{3})^n$ con $n \geq 0$

1.2. Ejercicio 3

Primero calculamos $KerL$.

$$x \in KerL \Leftrightarrow L(x) = 0$$

$$x_n^* = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} - (2+i)x_n = 0 \Leftrightarrow x_{n+1} = (2+i)x_n$$

Solución general:

$$x_n = K(2+i)^n \ , \ K \in C$$

Por lo tanto los elementos de X que pertenecen al $KerL$ son de la forma que acabamos de indicar. Veamos ahora los elementos de X tales que $L(x) = b$ siendo b = { 1,1,1,1.. }.

$$x_{n+1} - (2+i)x_n = 1 \Leftrightarrow x_{n+1} = (2+i)x_n + 1$$

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= (2+i)x_n + 1 \\ x_{n+1}^* &= (2+i)x_n^* + 1 \end{aligned}\right\}$$

Restamos y tenemos que:

$$x_{n+1} - x_{n+1}^* = (2+i)(x_n - x_n^*)$$

LLamamos $y_n = x_n^* - x_n$, y tenemos que $y_{n+1} = (2+i)y_n$. Por lo tanto la solucion general de y_n es: $y_n = K(2+i)^n \ , \ k \in C$. Ahora calculamos la solucion constante x^*.

$$x^* = (2+i)x^*+1 \Leftrightarrow x^*(1-2-i) = 1 \Leftrightarrow x^* = \frac{1}{-1-i} \Leftrightarrow x^* = \frac{1(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} \Leftrightarrow x^* = \frac{-1+i}{2}$$

Y ya podemos calcular la solución general de x_n que es:

$$x_n = y_n + x^* = K(2+i)^n + \frac{-1+i}{2}$$

Es decir los elementos de X que cumplen que $L(x) = b$ son de esa forma.

1.3. Ejercicio 4

Llamaremos primero x_n el número de clientes de $Paga^+$ en el año n. Llamaremos y_n el número de clientes de $Paga^-$ en el año n. Ahora, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 0{,}5x_n + 0{,}25y_n \\ y_{n+1} &= 0{,}75y_n + 0{,}5x_n \end{aligned}\right\}$$

Sabemos que $x_n + y_n = 1$, que es el 100 % de los clientes. Podemos despejar así una en función de la otra y nos queda:

$$x_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}25(1 - x_n)$$

Esta es una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea. Despejando, tenemos:

$$x_{n+1} = 0{,}25x_n + 0{,}25 \implies x_n = x^* + z_n \implies x_n = \frac{0{,}25}{1-0{,}25} + K(0{,}25)^n$$

Ahora, tenemos que tomar el límite pues nos piden el mercado a largo plazo. Esto es:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}$$

Podemos afirmar ahora que, asintóticamente , $\frac{1}{3}$ de los clientes estarán en $Paga^+$ y $\frac{2}{3}$ en $Paga^-$

1.4. Ejercicio 6

Vamos a llamar A_n al número de empleados en el departamento A en el año n. Del mismo modo, llamaremos B_n a los del departamento B en el año n. Si $0 \leq p \leq 1$ y $0 \leq q \leq 1$, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} A_{n+1} &= (1-p)A_n + qB_n \\ B_{n+1} &= pA_n + (1-q)B_n \end{aligned}\right\}$$

Y tenemos ahora que $A_n + B_n = M$, (aunque se podría tomar como 1) por lo que el sistema lo reducimos a una ecuación teniendo:

$$A_{n+1} = (1-p)A_n + q(M - A_n) \implies A_{n+1} = (1-p-1)A_n + qM$$

Teniendo de nuevo una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea. Así, su solución es:

$$A_n = \frac{qM}{1-(1-p-q)} + K(1-p-q)^n$$

Estudiamos primero la solución constante.

$$A_* = \frac{qM}{1-(1-p-q)} = \frac{qM}{p+q}$$

Impondremos que $p+q \neq 0$, al menos 1 trabajador cambiará de departamento. Nuestro término general es:

$$A_n = \frac{qM}{p+q} + K(1-p-q)^n$$

Estudiaremos esto a largo plazo. Tenemos que $-1 \leq 1-p-q < 1$. Tenemos que $|1-p-q| < 1$, por lo que:

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} A_n = \dfrac{qM}{p+q} = M\dfrac{q}{p+q} \\ \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty}(M - A_n) = M - M\dfrac{q}{p+q} = \dfrac{p}{p+q}M \end{cases}$$

1.5. Ejercicio 8

1. X_n es el número de árboles en el año n.

$$x_{n+1} = 0{,}9x_n + K$$

Esto tiende a la solución constante $x_* = \dfrac{K}{0{,}1}$

1.6. Ejercicio 12

La ecuación logística de Pielou es una ecuación en diferencias no lineal de la forma:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1 + \beta x_n} \qquad \alpha > 1 \quad \beta > 0$$

1. Demuestre que posee un punto de equilibrio positivo. Tenemos que buscar un $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{\alpha} = f(\bar{\alpha})$ donde $f(x) = \frac{ax}{1+bx}$. Por tanto, buscamos la solución de:

$$\alpha = \frac{ax}{1+bx} \implies b\alpha^2 - a\alpha + \alpha = 0 \implies \alpha[b\alpha + (1-a)] = 0 \implies \alpha = 0$$

Es un punto de equilibrio, así que tenemos que:

$$b\alpha + (1-a) = 0 \implies \alpha = \frac{a-1}{b} > 0$$

2. Tomando $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, probar que el punto de equilibrio es Asintóticamente Estable. Para ello , trabajaremos ahora en $\mathbb{R}^+$. Tenemos que $f(x) = \dfrac{2x}{1+x} \in \mathcal{C}^\infty$ y que su derivada es:

$$f'(x) = \frac{2(1+x) - 2x}{(1+x)^2} = \frac{2}{(1+x)^2} \implies |f'(1)| = \frac{1}{2} < 1$$

Por lo que sí es A.E.

3. Demostrar que el cambio de variable $x_n = \dfrac{1}{z_n}$ trasnforma esa ecuación en una ecuación lineal del primer orden. Tenemos ahora por tanto:

$$\frac{1}{z_{n+1}} = \frac{a\dfrac{1}{z_n}}{1 + b\dfrac{1}{z_n}} \implies z_{n+1} = \frac{1}{a}z_n + \frac{b}{a} \quad (2)$$

Que es una ecuación lineal de primer orden

4. A partir del resultado anterior, determinar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación logística.

Esta es una ecuación en diferencias lineal no homogénea, por tanto tendremos una solución $z_n = z_* + y_n$ donde z_* es la solución constante y y_n es la solución de la homogénea asociada.

Tenemos que $z_* = \frac{b/a}{1-(1/a)} = \frac{b}{a-1} > 0$. Ahora, calculamos la ecuación homogénea asociada a (2), calculado en el apartado anterior:

$$y_n = \mathcal{C} + (\frac{1}{a})^n$$

Ya tenemos la solución, por tanto la solucion de z_n es:

$$z_n = \frac{b}{a-1} + \mathcal{C}(\frac{1}{a})^n \quad n \geq 0$$

El comportamiento asintótico de esta es convergente a $\dfrac{b}{a-1}$ pues , como $a > 1$, entonces $(\frac{1}{a})^n \to 0$

Ahora, volviendo al cambio de variable, como z_n tiene límite distinto de cero, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} z_n} = \frac{1}{b/(a-1)} = \frac{a-1}{b}$$

Que es el punto de equilibrio de x_n, luego $\alpha = \frac{a-1}{b}$ es Asintóticamente Estable.

1.7. Ejercicio 15

1. Hecho en clase
2. Para conseguir un equilibrio poblacional asintóticamente estable (a.e.), se propone vender una fracción $\alpha(0 < \alpha < 1)$ de la población en cada periodo de tiempo dando lugar al modelo:

$$p_{n+1} = 10(1-\alpha)p_n e^{(1-\alpha)p_n}$$

i) Encuentre el intervalo abierto (de amplitud máxima) donde elegir α para que esté asegurada la estabilidad asintótica del equilibrio positivo.

Si :

$$\mu = \frac{ln(10(1-\alpha)}{(1-\alpha)}$$

Vamos a comprobar que es L.A.E.

$$f'(x) = 10(1-\alpha)e^{-(1-\alpha)x}(1 + x(-(1-\alpha))$$

$$f'(\mu)01 - ln(10(1-\alpha)) \quad y \quad 0 < ln(10(1-\alpha)) < 2$$

Y ahora, si:

- $\alpha < 9/10$
- $\alpha > \frac{10-e^2}{10}$

Por tanto μ es L.A.E si $\frac{10-e^2}{10} < \alpha < 9/10$

ii) Calcule el valor de α para el que la población de equilibrio alcanza su valor máximo y es a.e.

Ahora, si $g(x) = \frac{ln(10(1-x))}{1-x} \implies g'(x) = \frac{-1+ln(10(1-x))}{(1-x)^2}$.

Ahora, $g'(x) = 0 \implies 1 - ln(10(1-x)) = 0 \implies x = \frac{10-e}{10}$ es donde la poblaciñon alcanza su máximo.

Ahora, si comprobamos: $x_0 > \mu \implies x_1 = 10(1-\alpha)x_0e^{-(1-\alpha)x_0} = x_0\frac{10(1-\alpha)}{e^{(1-\alpha)x_0}} < x_0 \implies x_{n+1} < x_n$. Y Si miramos ahora si $x_0 < \mu$, veremos que $x_{n+1} > x_n$

1.8. Ejercicio 17

En cierto mercado, los precios de determinado producto siguen una dinámica basada en los postulados del modelo de la telaraña pero se ha observado que las funciones de oferta y demanda vienen dadas por:

$$O(p) = 1 + p^2, \ D(p) = c - dp$$

donde c >1 y d >0. Suponemos, además, que el equilibrio del mercado se da si la Oferta iguala a la Demanda y que la oferta en el periodo (n+1)-ésimo depende del precio del periodo n-ésimo.

a) Deduzca la ED, $p_{n+1} = F(p_n)$, que describe la dinámica planteada y calcule el precio de mercado p^* (punto de equilibrio económicamente factible).

b) Deduzca las condiciones sobre c y d que aseguran la estabilidad asitótica de p^*. ¿Qué ocurre si d = 2 y c = 4 ?

c) Para c = 3 y d = 2, use el diagrama de Cobweb para trazar los valores p_1 y p_2 a partir de $p_0 = 1$. A largo plazo, ¿cómo se comportarán los precios en el caso contemplado?

a)

Deducimos la ED, sabemos que el equilibrio del mercado se da si la oferta es igual a la demanda por lo que :

$$O(p_{n-1}) = D(p_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 + p_{n-1}^2 = c - dp_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_n = \frac{c-1}{d} - \frac{p_{n-1}^2}{d} \Rightarrow$$

puesto que $d > 0$

$$\Rightarrow p_{n+1} = \frac{c-1}{d} - \frac{p_n^2}{d} = F(p_n)$$

Para calcular el punto de equilibrio (α) tenemos que resolver la ecuación

$$\alpha = F(\alpha) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(\alpha) = \frac{c-1}{d} - \frac{\alpha^2}{d} = \alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + d\alpha - c + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 - 4(-c+1)}}{2} = \frac{-d \pm \sqrt{d^2 + 4c - 4}}{2}$$

Dado que α es el precio de equilibrio y éste es un número real entonces se tiene que dar que el discriminante sea mayor que 0 lo cual es cierto ya que c>1 y d>0. Además se tiene que el precio de equilibrio es un número positivo así que debemos escoger aquellos αs que sean positivos. Así se verifica que :

$$d^2 + 4c - 4 > d^2 \Rightarrow$$

$$-d + \sqrt{d^2 + 4(c-1)} > -d + \sqrt{d^2} = 0$$

Se puede ver que el precio de equilibrio que buscamos es:

$$\alpha = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4c - 4}}{2}$$

b) Recordemos que para que un punto de equilibrio sea localmente asintóticamente estable (L.A.E.) se tienen que dar dos condiciones: la primera es que la función sea de clase 1 y segundo que el valor absoluto de la derivada evaluada en el punto de equilibrio sea menor que 1. Como podemos ver $F \in C^{\infty}$ luego, en particular, $F \in C^1$, basta con ver para que valores de c y d se tiene que la mencionada derivada sea menor que 1.

$$F(x) = \frac{c-1}{d} - \frac{1}{d}x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F'(x)| = |\frac{-2}{d}x|$$

$$\alpha = \frac{-d + \sqrt{d^2 + 4c - 4}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |F'(\alpha)| = |\frac{d - \sqrt{d^2 + 4c - 4}}{d}| = |1 - \frac{\sqrt{d^2 + 4c - 4}}{d}| < 1$$

$$\Rightarrow -1 < 1 - \frac{\sqrt{d^2 + 4c - 4}}{d} < 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2 < -\frac{\sqrt{d^2 + 4c - 4}}{d} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2 > \frac{\sqrt{d^2 + 4c - 4}}{d} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2d > \sqrt{d^2 + 4c - 4} > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4d^2 > d^2 + 4c - 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3d^2 - 4c + 4 > 0$$

Si d = 2 y c = 4

$$\Rightarrow 3 * 4 - 4 * 4 + 4 = 0$$

Luego la condición anterior no nos garantiza que ese punto sea L.A.E.

Sustituyendo en $F(x)$:

$$F(x) = \frac{4-1}{2} - \frac{1}{2}x^2 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow$$

$$|F(x)|' = |-x| = x$$

Sustituyendo α por x:

$$x = \alpha = \frac{-2 + \sqrt{2^2 + 4 * 4 - 4}}{2} = 1$$

El resultado como podemos ver es 1, lo cual no nos dice que sea L.A.E. ni inestable. Por tanto tendremos que comprobar que ocurre con la segunda derivada (si es distinta o mayor que 0 entonces es inestable y si es menor que 0 es L.A.E.) :

$$F(x)' = -x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x)'' = -1 \neq 0$$

$$\Rightarrow F(\alpha)'' = -1$$

Por tanto, es inestable.

c) Si c = 3 , d = 2 y $p_0 = 1$, entonces usando que :

$$p_{n+1} = \frac{c-1}{d} - \frac{p_n^2}{d} = F(p_n) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_{n+1} = 1 - \frac{1}{2}p_n^2 = F(p_n)$$

$$\Rightarrow p_1 = 1 - \frac{p_0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow p_2 = 1 - \frac{p_1^2}{2} = \frac{7}{8}$$

Podemos ver que el punto de equilibrio es un atractor y que la función converge a dicho punto:

$$\alpha = \frac{-d+\sqrt{d^2+4c-4}}{2} = \frac{-2+\sqrt{4+12-4}}{2} = \frac{-2+2\sqrt{3}}{2} = -1+\sqrt{3}$$

Para realizar este gráfico he usado wxmaxima, en concreto, la orden

$$staircase(1-(1/2)*x^2, 1, 100, [x, 0, 1{,}5], [y, 0, 1{,}5]);$$

donde el primer parámetro es la función obtenida antes (F_n) representada por al curva roja, el segundo parámetro es el punto inicial, el tercero es el número de iteraciones o valores que calculamos (n=100) y los últimos parámetros son opciones para representar el gráfico.

1.9. Ejercicio 19

Determine razonadamente la veracidad o falsedad de las siguientes afirmaciones. a) Sea la ecuación en diferencias de primer orden, $x_{n+1} = f(x_n)$, donde $f(x)$ es suficientemente derivable en un entorno del punto de equilibrio, s. Si $f'(s) = 1$y $f''(s) = 0$, entonces el punto de equilibrio siempre será inestable.

El punto de equilibrio es siempre inestable

b) Toda ecuación en diferencias $x_{n+1} = f(x_n)$, con un punto de equilibrio inestable en $x = s$ admite, al menos, un 2-ciclo o solución 2-periódica.

Falso. Basta tomar la función $f(x) = ax + b$ tal que si $a > 1$, entonces la derivada es mayor que 1 y la función no tiene ningún ciclo.

c) Todas las soluciones no constantes de la ecuación en diferencias lineal $x_{n+2} + x_{n-1} = 0$, son 3-periódicas.

Si despejamos la ecuación, vemos que:

$$x_{n+3} = -x_n$$

Dados 3 datos iniciales, x_0, x_1, x_2, podemos escribir algunos términos de la recurrencia en función de los anteriores y escribimos su órbita, quedando:

$$\{x_0, x_1, x_2, -x_0, -x_1, -x_2, x_0, \cdots\}$$

Por lo que el periodo es 6, no 3 y por tanto es FALSO.

d) La dinámica de cierta población ovina se rige mediante un modelo logístico discreto. Si la tasa de crecimiento para una población de 10 cientos es de 1,5 y para una de población de 20 cientos es de 1; entonces, a largo plazo, la población tiende a un valor constante.

Tenemos que $P_n = 10$ y la tasa de P_n es 1.5 . También que si $P_m = 20$, entonces su tasa es de 1.

Ajustando por un modelo conveniente, tenemos que:

$$tasa(P_n) = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = a - bP_n$$

y si despejamos, obtenemos:

$$P_{n+1} = P_n + P_n - bP_n^2 \implies P_{n+1} = (1+a)P_n(1 - \frac{b}{1+a}P_n)$$

ASí que si tomamos $\mu = (1+a)$, $x_n = \frac{b}{1+a}P_n$, entonces:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

Ahora, debemos hallar a y b. planteamos el sistema:

$$\left.\begin{aligned} 1{,}5 = a - 10b \\ 1 = a - 20b \end{aligned}\right\} \begin{cases} a = 2 \\ b = 0{,}05 \end{cases}$$

y planteamos la ecuación:

$$P_{n+1} = 3P_n - 0,05P_n^2$$

entonces:

$$P_* = 3P_* - 0,05P_*^2$$

Si igualamos $0,05P_*^2 - 2P_* = 0 \implies P_* = 0$, pero también tenemos que tener en cuenta el caso $0,05P_* - 2 = 0 \implies P_* = 40$

Ahora, si $f(x) = 3x - 0,05x^2$, entonces $f'(0) = 3$, por lo que es inestable y $f'(40) = 3 - 4 = -1$ y $f''(40) = -0,05$ pero como la derivada vale -1, no podemos determinar con claridad lo que ocurre en este caso. Sin embargo, si realizamos el dibujo en *wxmaxima*, veríamos que se realiza la tela de araña y así converge.

2. Relación 2

2.1. Ejercicicio 2

Calcule una solución de la ecuación $x_{n+3} - x_n = 0$ con condiciones iniciales $x_0 = 1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$.

Lo primero es ver que su polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 1$$

y las raíces de este son:

$$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}i}{2}$$

y por tanto tenemos: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = cos(\frac{2\pi}{3}) + isen(\frac{2\pi}{3})$ y $\lambda_3 = cos(\frac{2\pi}{3}) - isen(\frac{2\pi}{3})$ Así, la solución general es:

$$x_n = c_1 * 1^n + c_2 cos(n(\frac{2\pi}{3})) + c_3 sen(n(\frac{2\pi}{3}))$$

Solo faltaría resolver el sistema con las condiciones iniciales para obtener la solución particular del sistema.

2.2. Ejercicio 4

Dado un número real α, determine una expresión para la sucesión $\{x_n\}$ que verifica:

$$\begin{cases} x_{k+2} = x_{k+1} + x_k \quad k \in \mathbb{N} x_1 = 1, \quad x_2 = \alpha \end{cases}$$

Su polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1$, cuyas soluciones son $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Con las condiciones iniciales, podemos obtener la expresión de la sucesión hallando c_1 y c_2.

Apartado b): estudiar el comportamiento de la sucesión $\{y_n\}$ definida por:

$$y_{k+1} = \frac{1}{1 + y_k} \quad k \geq 2 \quad y \quad y_2 = 1$$

Hallando su polinomio característico, sus raíces son $y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$

2.3. Ejercicio 9

La sucesión $\{\overline{x_n}\}_{n \geq 0} = \{1, 2, 5, 12, 29, \dots\}$ es solución de cierta ecuación en diferencias lineal homogénea de orden 2 con coeficientes constantes.

a) Deduzca dicha ecuación en diferencias.

Sabemos que la ecuación en diferencias será de la forma

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = 0, \quad n \geq 0 \tag{1}$$

Si sustuimos en (1) los valores $n = 0$ y $n = 1$ para la solución particular $\{\overline{x_n}\}_{n\geq 0}$, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5 + 2a_1 + a_0 = 0 \\ 12 + 5a_1 + 2a_0 = 0 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $a_1 = -2$, $a_0 = -1$. Por tanto, la ecuación en diferencias es:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} - x_n = 0, \quad n \geq 0 \tag{2}$$

b) Dé una expresión de la solución general de la ecuación en diferencias.

Resolvemos la ecuación (2) como ya sabemos. Comenzamos hallando las raíces del polinomio característico:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0 \iff \lambda = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 + \sqrt{2} \\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{2} \end{cases}$$

Como λ_1 y λ_2 son dos raíces distintas de $p(\lambda)$, sabemos que $\{X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}\}$ es una base del espacio de soluciones Σ, donde

$$X_{\lambda_1} = \{\lambda_1^n\}_{n\geq 0} \quad ; \quad X_{\lambda_2} = \{\lambda_2^n\}_{n\geq 0}$$

Por tanto, la solución general $\{x_n\}_{n\geq 0}$ será una combinación lineal de la base $\{X_{\lambda_1}, X_{\lambda_2}\}$, es decir:

$$x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}, \quad n \geq 0 \tag{3}$$

Para determinar las constantes c_1 y c_2, sustituimos los valores $n = 0$, y $n = 1$ en (3) para la solución particular $\{\overline{x_n}\}_{n\geq 0}$, obteniendo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \overline{x_0} = c_1 + c_2 = 1 \\ \overline{x_1} = c_1(1 + \sqrt{2}) + c_2(1 - \sqrt{2}) = 2 \end{cases}$$

cuyas soluciones son $c_1 = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$, $c_2 = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$. Por tanto, la expresión de la solución general es:

$$x_n = \frac{2 + \sqrt{2}}{4}\left(1 + \sqrt{2}\right)^n + \frac{2 - \sqrt{2}}{4}\left(1 - \sqrt{2}\right)^n, \quad n \geq 0 \tag{4}$$

c) Deduzca de forma razonada el valor, si existe, de $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$.

Como $\sqrt{2} < 2$, se tiene que $\left|1 - \sqrt{2}\right| < 1$, y por tanto $(1 - \sqrt{2})^n \to 0$ cuando $n \to \infty$. Utilizando esa información, y atendiendo a (4), podemos expresar el límite de la siguiente forma:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n+1}}{\frac{2+\sqrt{2}}{4}\left(1+\sqrt{2}\right)^{n} + \frac{2-\sqrt{2}}{4}\left(1-\sqrt{2}\right)^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n+1}}{\left(1+\sqrt{2}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\sqrt{2}\right) = 1+\sqrt{2}$$

Por tanto, $\exists \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{x_n} = 1+\sqrt{2}$.

2.4. Ejercicio 13

Presentamos el modelo de Samuelson modificado:

$$Y_n = C_n + I_n$$

$$C_n = b \cdot I_{n-1}$$

$$I_n = C_n - kC_{n-1} + G$$

Donde Y_n es la renta nacional, C_n es el consumo e I_n es la inversión. G es el gasto público que suponemos constante.

Debemos escribir en primer lugar la ley de recurrencia para las inversiones anuales I_n y posteriormente calcular las condiciones sobre los parámetros k y b para que haya convergencia.

Para comenzar tomamos la expresión de I_n e intentamos expresarla exclusivamente con términos de I_n. Para ello sustituimos en la tercera ecuación los C_n por la expresión correspondiente que observamos en la segunda ecuación.

$$I_n = b \cdot I_{n-1} - k \cdot (b \cdot I_{n-2}) + G \qquad n \geq 2$$

Como nos interesa tener la ecuación en recurrencia para valores mayores o iguales que 0 hacemos una pequeña transformación en los índices (le sumamos 2 a todos)

$$I_{n+2} = b \cdot I_{n+1} - k \cdot (b \cdot I_n) + G \qquad n \geq 0$$

Y reordenamos para obtener la **ley de recurrencia:**

$$I_{n+2} - b \cdot I_{n+1} + k \cdot b \cdot I_n = G$$

Ahora procederemos a calcular las condiciones sobre k y b para que haya convergencia.

Sabemos que la $I_n = I_n^h + I_n^{(1)}$, es decir, que podemos expresar I_n como suma de la homogénea asociada más una solución particular. Y para que se produzca esta situación de convergencia la homogénea asociada debe converger a cero ($\lim_{n\to+\infty} X_n = 0$).

$$I_n^h : \; I_{n+2} - b \cdot I_{n+1} + k \cdot b \cdot I_n = 0$$

Cuyo polinomio característico es:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - b\lambda + kb$$

Al estar ante una ecuación en diferencias lineal homogénea de orden dos, para que converja a 0 tiene que cumplirse lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{lr} (1) & p(1) = 1 - b + kb > 0 \\ (2) & p(-1) = 1 + b + kb > 0 \\ (3) & p(0) = kb < 1 \end{array}\right\}$$

Y a partir de esto obtenemos las condiciones: Partimos de $1>b>0$ y de $k>0$.

Probamos que la condición (1) se cumple siempre. Restamos b en la primera expresión:

$$1 - b > b - b$$

$$1 - b > 0$$

Y de la segunda multiplicamos por b, un número positivo y la expresión se mantiene:

$$k \cdot b > 0$$

Si sumamos estas dos expresiones obtenemos:

$$1 - b + k \cdot b > 0$$

La condición (2) es trivial. Suma de números positivos es positiva.

Y de la condición (3) obtenemos:

$$k < \frac{1}{b}$$

Con esto deducimos finalmente que converge si:

$$\left.\begin{array}{r} 0 < k < \dfrac{1}{b} \\ 0 < b < 1 \end{array}\right\}$$