

UNIVERSIDAD DE GRANADA

---

# Análisis Matemático I

---

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

## Contents

## 1 Teorema de Bolzano-Weierstrass.

Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de  $\mathbb{R}^N$  acotada. Entonces existe una sucesión parcial suya  $\{x_{\sigma(n)}\}$  convergente.

### 1.1 Demostración.

Notaremos  $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^N)$ . Como  $\{x_n^1\}$  es acotada en  $\mathbb{R}$ , existe  $\sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente creciente tal que  $\{x_{\sigma_1(n)}^1\}$  es convergente.

Ahora, como  $\{x_n^2\}$  es acotada,  $\{x_{\sigma_1(n)}^2\}$  también es acotada, y existe  $\sigma_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente creciente tal que  $\{x_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}^1\}$  es convergente.

Procediendo de esta forma con cada componente de  $x_n$ , obtenemos  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ , y  $\{x_{\sigma_1(n)}^1\}, \{x_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}^2\}, \dots, \{x_{(\sigma_N \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}^N\}$  sucesiones convergentes en  $\mathbb{R}$ . Al ser  $\sigma_i$  estrictamente creciente  $\forall i = 1, \dots, N$ ,  $\{x_{(\sigma_N(n) \circ \dots \circ \sigma_{i+1} \sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1)(n)}^i\}$  también es convergente (toda sucesión parcial de una sucesión convergente es convergente).

Así, tomando  $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_N$ ,  $\{x_{\sigma(n)}\}$  es convergente.

## 2 $\mathbb{R}^N$ es completo.

Sea  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ . Entonces:

$$\{x_n\} \text{ es de Cauchy} \iff \{x_n\} \rightarrow x \text{ es convergente}$$

### 2.1 Demostración.



Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq m$  entonces  $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ , y si  $p, q \geq m$  entonces  $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) < \varepsilon$



Como  $\{x_n\}$  es de Cauchy,  $\{x_n^i\}$  es de Cauchy  $\forall i = 1, \dots, N$  (porque  $|x_n^i - x_m^i| \leq |x_n - x_m|$ ).  $\implies \{x_n^i\} \rightarrow x^i$  es convergente, por ser  $\mathbb{R}$  completo. Luego  $\{x_n\}$  es convergente.

## 3 Teorema de Weierstrass generalizado.

Sean  $(X, d)$ ,  $(Y, d)$  espacios métricos,  $\emptyset \neq A \subseteq X$  compacto, y  $f : A \rightarrow Y$  continua. Entonces,  $f(A)$  es compacto.

### 3.1 Demostración.

Sea  $\{x_n\} \subseteq A$  cualquiera. Entonces  $\{f(x_n)\} \subseteq f(A)$ . Como  $A$  es compacto, existe  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente creciente tal que  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow a \in A$ . Luego,  $\{f(x_{\sigma(n)})\} \rightarrow f(a) \in A$  y queda probado que  $f(A)$  es compacto.

## 4 Teorema del valor intermedio.

Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$  arco conexo, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$  continua. Entonces,  $f(A)$  es arco-conexo en  $\mathbb{R}^M$ .

### 4.1 Demostración.

Sean  $X, Y \in f(A)$ . Entonces,  $\exists x, y \in A : X = f(x), Y = f(y)$ . Como  $A$  es arco-conexo,  $\exists \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua tal que  $\varphi(a) = x, \varphi(b) = y, \varphi([a, b]) \subseteq A$ .

Ahora, definimos  $\psi := f \circ \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^M$ , que es continua por ser composición de funciones continuas. Entonces, se verifica que:

$$\psi(a) = f(\varphi(a)) = f(x) = X; \quad \psi(b) = f(\varphi(b)) = f(y) = Y; \quad \psi([a, b]) = f(\varphi([a, b])) \subseteq f(A).$$

Por tanto, queda probado que  $f(A)$  es arco-conexo en  $\mathbb{R}^M$ .

## 5 Teorema de Heine-Cantor.

Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$  compacto, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua. Entonces  $f$  es uniformemente continua en  $A$ .

### 5.1 Demostración.

$f$  es continua en  $A \implies f$  es continua en  $a \ \forall a \in A$ . Ahora, sea  $\varepsilon > 0$  fijo.

$$\forall a \in A \quad \exists \delta = \delta_a > 0 \quad \forall x \in A \quad d(x, a) < \delta_a \implies d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Tomamos un recubrimiento abierto de  $A$ , y como  $A$  es compacto, encontramos un subrecubrimiento finito.

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{\delta_a}{2}) \implies \exists a_1, \dots, a_n \in A : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B\left(a_i, \frac{\delta_{a_i}}{2}\right)$$

Por esta última inclusión:

$$\forall x \in A \quad \exists i \in \{1, \dots, n\} : x \in B\left(a_i, \frac{\delta_{a_i}}{2}\right) \cap A \implies f(x) \in B(f(a_i), \varepsilon)$$

Sean  $\delta = \min \left\{ \frac{\delta_{a_i}}{2} : i \in \{1, \dots, n\} \right\} > 0$  y  $y \in A : d(x, y) < \delta < \delta_{a_i}$  para un  $x \in A$  fijo. Tomamos el  $a_i$  proporcionado por la proposición anterior para  $x$ .

$$d(y, a_i) \leq d(y, x) + d(x, a_i) < \delta_{a_i} \implies y \in B(a_i, \delta_{a_i}) \implies f(y) \in B(f(a_i), \varepsilon)$$

Finalmente,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), f(y)) < \varepsilon$$

Para cualquier  $\varepsilon$  para el que se desee que se verifique la condición de la continuidad uniforme, basta tomar  $\frac{\varepsilon}{2}$  en la continuidad.

## 5.2 Demostración alternativa.

La condición para la continuidad uniforme es la siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in A : d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Vamos a proceder por reducción al absurdo, para lo cual negamos esta condición:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x, y \in A : d(x, y) < \delta \wedge d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$$

Tomamos este  $\varepsilon_0$ , lo que nos da, para cada  $\delta > 0$ , un par de puntos  $x$  e  $y$  que cumplen la propiedad expresada arriba. Tomamos  $\delta = \frac{1}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Esto nos da dos sucesiones  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  tales que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \wedge d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$$

Por ser  $A$  compacto, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos da dos sucesiones parciales  $\{x_{n_k}\}$  a  $x_0$  e  $\{y_{n_k}\}$  a  $y_0$ . Por tanto:

$$d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \wedge d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon_0$$

Sin embargo,  $\{x_{n_k}\}$  e  $\{y_{n_k}\}$  convergen al mismo punto (por converger su distancia a cero), y como  $f$  es continua, esta proposición no puede ser verdadera. Hemos llegado por tanto a una contradicción, luego  $f$  debe ser uniformemente continua.