Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

Introducción

1. Convergencia uniforme y puntual

De igual manera que tratamos con sucesiones de puntos de $\mathbb{R}^N$, podemos hacerlo con sucesiones de funciones. Dado $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, podemos tomar para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : A \to \mathbb{R}^M$, y formar así una sucesión de funciones que notaremos $\{f_n\}$. El conjunto de funciones de A en $\mathbb{R}^M$ lo denotaremos por $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$. Durante este apartado, la referencia básica es [1, Capítulo 5].

Definición 1.1 (Convergencia punto a punto). Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$ si $\forall x \in A \;\; \{f_n(x)\} \to f(x)$. Esto es, si se verifica lo siguiente:

$$\forall x \in A \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

En ocasiones denotaremos la convergencia puntual como $\{f_n\} \xrightarrow{c.p} f$.

Definición 1.2 (Convergencia uniforme). Diremos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$ si se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \;\; : n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

En ocasiones denotaremos la convergencia uniforme como $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$.

Nota. Aunque ambas definiciones son muy parecidas, hay una diferencia clave. En la convergencia puntual, el valor de n_0 puede depender tanto de ε como de x. Sin embargo, en la convergencia uniforme, exigimos que n_0 sea válido para cualquier x.

Proposición 1.1. *Si* $\{f_n\} \to f$ *uniformemente* $\implies$ $\{f_n\} \to f$ *puntualmente.*

Nota. El recíproco no es cierto en general. Sin embargo, ambos conceptos son equivalentes si el conjunto de definición de las f_n es un conjunto finito. En efecto, si A es finito, y $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x) \; \forall x \in A$, entonces tomamos n_0 como el máximo de los $n_0(x)$ que nos da la convergencia puntual en cada $x \in A$, y $\{f_n\}$ converge uniformemente en A.

El siguiente resultado, conocido como *Teorema de Dini*, muestra que bajo ciertas condiciones, el recíproco de la proposición anterior sí es cierto.

Teorema 1.1. *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *compacto, y funciones* $f_k : A \to \mathbb{R}$ *continuas, verificando:*

(i) $f_k \geq 0$

(ii) $f_k(x) \geq f_{k+1}(x) \;\; \forall x \in A$ *(la sucesión* $\{f_k\}$ *es monótona decreciente).*

(iii) $f_k(x) \to 0$ *c.p.* $\;\forall x \in A$

Entonces, $\{f_k\} \to 0$ *uniformemente en* A.

Demostración. Se puede consultar en *[Ejercicios, p.4]*. $\square$

La necesidad del concepto de convergencia uniforme se aprecia bien en el siguiente teorema, junto con los ejemplos que aparecen a continuación. Normalmente, las funciones con las que trabajemos serán continuas.

Teorema 1.2. *Sean* $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f_n \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Entonces, se tiene que*

$$\{f_n\} \to f \text{ uniformemente } \implies f \text{ es continua}$$

Demostración. Fijamos $a \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\{f_n\} \to f$ uniformemente,

$$\exists K > 0 : \ n \geq K \implies |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall y \in A \implies \begin{cases} |f_n(a) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{3} \\ |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

Como además, f_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{r} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces,

$$\exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{r} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies |f(x)-f(a)| \leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(a)|+|f_n(a)-f(a)| < \varepsilon$$

Hemos probado que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{r} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, por tanto, f es continua. $\square$

Veamos algunoss ejemplos de sucesiones de funciones:

Ejemplo 1.1:

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \dfrac{1}{n} \\ -nx + 1 & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Ejemplo 1.2:

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = x^n$$

Ejemplo 1.3:

$$f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n}$$

Vamos a estudiar la convergencia puntual de la sucesión del ejemplo (1.1):

Primero, fijamos $x \in (0,1]$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \geq \dfrac{1}{n}$, luego $f_n(x) = 0$. Por otra parte, $f_n(0) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. Concluimos que

$$\{f_n\} \to f = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observamos que la convergencia puntual no preserva la continuidad de las funciones. Esto implicaría que, con esta definición de convergencia, el espacio de funciones continuas en un conjunto no sería cerrado. Además, podemos comprobar que $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f, pues en caso de hacerlo f debería ser continua, por el *Teorema 1.2*.

Ahora estudiemos la convergencia uniforme del ejemplo (1.3):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > \frac{1}{\varepsilon} : \quad n \geq K \implies \frac{|sen(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$$

Vemos que converge uniformemente a cero. Lo importante para esta demostración, y lo que lo será en la mayoría de los casos de convergencia uniforme, es que podemos encontrar un ε_n (en este caso $\frac{1}{n}$), que no dependa de x, tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$.

Proposición 1.2 (Criterio de Cauchy). *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$, y sean $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}^M\ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in A$. Entonces, dados $m, n \geq n_0$ se tiene que:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x) + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $x \in A$ fijo. Entonces, es claro que $\{f_n(x)\} \subseteq \mathbb{R}^M$ es una sucesión de Cauchy. Como $\mathbb{R}^M$ es completo, tenemos que $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x)\ \forall x \in A$. Ahora, tomando límite cuando $m \to \infty$ en la expresión de la hipótesis, y teniendo en cuenta que el último $<$ se transforma en $\leq$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} :\ n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Es decir, $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$. $\square$

1.1. El espacio de funciones continuas

Ya sabemos que dado $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, el espacio $(\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M), || \cdot ||_\infty)$ es un espacio normado, donde la norma del máximo o *norma uniforme* se define así:

$$||f||_\infty := máx\{|f(x)| : x \in A\} = \underset{x \in A}{máx}\ |f(x)|$$

Proposición 1.3. *En el espacio $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$, con A compacto, la convergencia de sucesiones equivale a la convergencia uniforme, esto es:*

$$\{f_n\} \to f \text{ en } \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M) \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$$

Demostración.
$||f_n - f||_\infty \to 0 \iff \underset{x \in A}{máx}\ |f_n(x) - f(x)| \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \underset{x \in A}{máx}\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in A \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f.$ □

Teorema 1.3 ($\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ es completo). *En el espacio $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$, con A compacto, también ser sucesión de Cauchy equivale a la convergencia uniforme, esto es:*

$$\{f_n\} \text{ es de Cauchy en } \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M) \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$$

Demostración. El razonamiento es análogo al anterior, utilizando esta vez el criterio de Cauchy visto anteriormente. □

Es importante recalcar que estamos suponiendo que el subconjunto A es compacto. Podemos extender el resultado anterior, considerando el espacio $(\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M), \| \cdot \|_\infty)$, donde:

$\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M) := \{f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M : f \text{ es continua y acotada}\}$

$\|f\|_\infty := \underset{x \in A}{sup}\ |f(x)|$

Proposición 1.4. *El espacio $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$ es un espacio de Banach, es decir, es un espacio normado y completo.*

Demostración. Puede consultarse en *[Ejercicios, p.3]*. □

Nota. Si A es compacto, entonces $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M) = \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$.

Veamos ahora dos teoremas que relacionan el concepto de convergencia uniforme con los conceptos de derivación e integración.

Teorema 1.4. *Sean $f, f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ tales que $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$. Entonces,*

$$\left\{\int_a^b f_n\right\} \xrightarrow{c.u} \int_a^b f$$

Equivalentemente, podemos intercambiar la integral con el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x \in [a,b]$. Entonces,

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

□

Teorema 1.5. *Sea* $f_n \in \mathcal{C}^1((a,b))$ $\forall n \in \mathbb{N}$, *y sean* $f, g \in \mathcal{C}((a,b)$. *Supongamos que* $\{f_n(x)\} \to f(x)$ *c.p.* $\forall x \in (a,b)$, *y supongamos también que* $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g$ *en (a,b). Entonces,* $f \in \mathcal{C}^1((a,b))$, *y* $f' = g$.

Demostración. Elegimos primero un $x_0 \in (a,b)$ fijo. Entonces, $\{f_n(x_0)\} \to f(x_0)$ por hipótesis. Como f_n' es continua, entonces, por el teorema fundamental del cálculo:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt$$

Ahora, como $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g$ en el intervalo cerrado de extremos x_0 y x, por el *Teorema 1.4* tenemos que $\{f_n(x)\} \to G(x)$ $\forall x \in (a,b)$, donde:

$$G(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Es decir, $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente en (a,b) a $G(x)$. Ahora, G es de clase 1 por ser $g(t)$ continua, y además, tenemos que $G(x_0) = f(x_0)$. Por otro lado, es claro que $G' = g$.

Pero también $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x)$ por hipótesis, por lo que necesariamente $\forall x \in (a,b)$ $G(x) = f(x)$, esto es, $f \in \mathcal{C}^1((a,b))$ y $f' = G' = g$. □

Corolario 1.1. *Sea* $f_n \in \mathcal{C}^1((a,b))$ $\forall n \in \mathbb{N}$. *Supongamos que* $\exists \alpha \in (a,b)$ *tal que* $\{f_n(\alpha)\}$ *es convergente, y supongamos también que* $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g \in \mathcal{C}((a,b))$ *en (a,b). Entonces,* $\exists f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *tal que* $\{f_n\} \to f$ *uniformemente. Además,* $f \in \mathcal{C}^1(a,b)$, *y* $f' = g$.

Demostración. Probaremos únicamente que $\{f_n\} \to f$ uniformemente. El resto de la tesis se sigue de aplicar el *Teorema 1.5.*

Sea $\varepsilon > 0$. Por un lado, como $\{f_n'\}$ converge uniformemente, aplicamos el *Criterio de Cauchy* para obtener un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$p, q \geq k_1 \implies |f_p'(y) - f_q'(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Del mismo modo, como $\{f_n(\alpha)\}$ es una sucesión de números reales convergente, es de Cauchy, y obtenemos un $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$p, q \geq k_2 \implies |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora, defino $K := k_1 + k_2$, y teniendo en cuenta el *Teorema del Valor Medio*, se tiene que, dado $x \in (a, b)$ y $p, q \geq K$:

$$|f_p(x) - f_q(x)| = |f_p(x) - f_p(\alpha) + f_p(\alpha) - f_q(\alpha) + f_q(\alpha) - f_q(x)|$$

$$\leq |f_p(x) - f_q(x) - (f_p(\alpha) - f_q(\alpha))| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)|$$

$$= |f_{pq}(x) - f_{pq}(\alpha)| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| \overset{T.V.M}{=} |x - \alpha||f'_{pq}(z_x)| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)|$$

$$= |x - \alpha| \left|f'_p(z_x) - f'_q(z_x)\right| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| < (b - a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b - a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donde z_x está en el intervalo abierto de extremos α y x, y $f_{pq}(x) := f_p(x) - f_q(x)$. Observemos que en este razonamiento, el valor de K **no depende de** x, sino exclusivamente de quién sea ε. Por tanto, por el *Criterio de Cauchy*, se tiene que $\{f_n\}$ converge uniformemente en (a, b). $\square$

1.2. Conjuntos compactos de $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$

En este apartado, nuestro objetivo será caracterizar los conjuntos compactos de $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Para ello, necesitamos primero definir ciertos conceptos el espacio de funciones continuas. Salvo que se especifique lo contrario, A será un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$ en todo el apartado.

Definición 1.3 (Conjunto acotado). Sea $A \in \mathbb{R}^N$ compacto, $B \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Se dice que B es acotado (o equiacotado) si $\exists M > 0 : \ \|f\|_\infty \leq M \ \ \forall f \in B$.

Nota. Teniendo en cuenta la definición de la norma $\|\cdot\|_\infty$, el que B sea acotado es equivalente a decir que $|f(x)| \leq M, \ \forall x \in A, \ \forall f \in B$.

Definición 1.4 (Conjunto equicontinuo). Sea $A \in \mathbb{R}^N$ compacto, $B \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Se dice que B es equicontinuo si

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{r} |x - y| < \delta \\ x, y \in A \end{array}\right\} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in B$$

Nota. Este concepto es muy parecido al de función uniformemente continua. De hecho, como A es compacto y todas las f son continuas, sabemos por el *Teorema de Heine-Cantor* que todas ellas son uniformemente continuas. Sin embargo, para poder afirmar que B es equicontinuo, es necesario que el número δ sea válido sea quien sea f.

Proposición 1.5. *Sea $B \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Si B es finito, entonces es equicontinuo.*

Demostración. Sabemos que $\forall f \in B,\ f$ es uniformemente continua. Como B es finito, tenemos un conjunto finito $\{\delta_i > 0 : f_i$ es uniformemente continua con $\delta_i\}$. Concluimos tomando $\delta := \min\limits_i \delta_i$. □

El interés en ver cuáles son los conjuntos compactos de $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ proviene, entre otras cosas, del hecho de que hay conjuntos cerrados y acotados que no son compactos. El siguiente ejemplo lo pone de manifiesto.

Ejemplo 1.4: En $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$, ninguna bola cerrada es compacta.

Para verlo, sea $r > 0$, y consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas como $f_n(x) = rx^n \quad \forall x \in [0, 1]$. Ya sabemos que la sucesión converge puntualmente a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < 1 \\ r & si\ x = 1 \end{cases}$$

Pero f no es continua, por lo que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, 1]$. De hecho, $\{f_n\}$ no puede tener ninguna sucesión parcial que converja uniformemente, pues en otro caso, el límite uniforme de la sucesión parcial sería f, que no es continua.

Por otro lado, $\|f_n\|_\infty = \max\ \{|f_n(x)| :\ x \in [0, 1]\} = r$, y entonces $f_n \in \overline{B}_\infty(0, r)$.

Recordemos que en este espacio, ser convergente era equivalente a la convergencia uniforme. Por tanto, combinando ambas informaciones, hemos encontrado una sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq \overline{B}_\infty(0, r)$ tal que no es posible extraer una subsucesión convergente a un punto de $\overline{B}_\infty(0, r)$. Esto prueba que $\overline{B}_\infty(0, r)$ no es compacta.

Además, sabemos que existe un homeomorfismo entre las bolas cerradas y centradas en el origen, y las bolas cerradas centradas en un punto arbitrario de $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Como la compacidad es una propiedad topológica, concluímos que ninguna bola cerrada es compacta. Para una demostración más detallada de esta última afirmación, consultar *[Ejercicios, p.4]*.

Definición 1.5 (Sucesión acotada). Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ es acotada si el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

Definición 1.6 (Sucesión equicontinua). Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ es equicontinua si el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo.

Si recordamos la prueba en $\mathbb{R}^N$ de que los conjuntos compactos son los cerrados y acotados, el *Teorema de Bolzano-Weierstrass* era una herramienta clave. Veamos ahora un resultado equivalente en $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$.

Teorema 1.6 (Arzelà-Ascoli). *Toda sucesión de funciones en $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ que sea equicontinua y acotada admite una sucesión parcial convergente.*

Demostración. Dividiremos la demostración en varios pasos.

<u>Paso 1.</u> Vamos a probar que $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\{f_{\sigma(n)}\} \to f$ puntualmente en $\mathbb{Q}^N \cap A$. Recordemos que, puesto que $\mathbb{Q}$ es numerable:

$$A \cap \mathbb{Q}^N \text{ es numerable } \implies \exists N \subseteq \mathbb{N} : \quad \exists \phi : N \longrightarrow A \cap \mathbb{Q}^N \text{ biyectiva}$$

Denotamos $r_k = \phi(k) \in A \cap \mathbb{Q}^N$ (enumeración de $A \cap \mathbb{Q}^N$). Por otra parte, observemos lo siguiente:

$$\{f_n\} \text{ equiacotada } \implies \exists M > 0 \, : \, |f_n(x)| \leq M, \, \forall x \in A, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particular, $\{f_n(r_1)\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^M$, y por tanto podemos aplicar el *Teorema de Bolzano-Weierstrass* para ver que $\exists \sigma_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que la subsucesión $\{f_{\sigma_1(n)}(r_1)\}$ de $\{f_n(r_1)\}$ es convergente hacia un vector de $\mathbb{R}^M$ que denotaremos como $f(r_1)$:

$$\{f_{\sigma_1(n)}(r_1)\} \longrightarrow f(r_1).$$

Como también tenemos la acotación de $\{f_{\sigma_1(n)}(r_2)\}$, deducimos de nuevo aplicando el *Teorema de Bolzano-Weierstrass* que $\exists \sigma_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que la subsucesión $\{f_{\sigma_2 \circ \sigma_1(n)}(r_2)\}$ de $\{f_{\sigma_1(n)}(r_2)\}$ es convergente hacía un vector que denotaremos como $f(r_2)$:

$$\{f_{\sigma_2 \circ \sigma_1(n)}(r_2)\} \longrightarrow f(r_2).$$

Por inducción, concluimos que $\forall k \in N \ \exists \sigma_k : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ tal que

$$\{f_{\sigma_k \circ \ldots \sigma_2 \circ \sigma_1(n)}(r_k)\}_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow f(r_k).$$

Si definimos $\varphi_k := \sigma_k \circ \ldots \sigma_2 \circ \sigma_1$, podemos visualizar las sucesiones anteriores, cada una en una fila:

$$\begin{array}{ccccccc}
f_{\varphi_1(1)} & f_{\varphi_1(2)} & f_{\varphi_1(3)} & \cdots & f_{\varphi_1(k)} & \cdots & \text{c.p. en } r = r_1 \\
f_{\varphi_2(1)} & f_{\varphi_2(2)} & f_{\varphi_2(3)} & \cdots & f_{\varphi_2(k)} & \cdots & \text{c.p. en } r = r_2 \\
f_{\varphi_3(1)} & f_{\varphi_3(2)} & f_{\varphi_3(3)} & \cdots & f_{\varphi_3(k)} & \cdots & \text{c.p. en } r = r_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
f_{\varphi_k(1)} & f_{\varphi_k(2)} & f_{\varphi_k(3)} & \cdots & f_{\varphi_k(k)} & \cdots & \text{c.p. en } r = r_k \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

Defino $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mediante

$$\sigma(n) := \varphi_n(n) = \sigma_n \circ \ldots \sigma_2 \circ \sigma_1(n)$$

Puesto que $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ son estrictamente crecientes,

$$\begin{aligned} \sigma(n) = \sigma_n(\sigma_{n-1} \circ \ldots \sigma_2 \circ \sigma_1(n)) \geq \sigma_{n-1} \circ \ldots \sigma_2 \circ \sigma_1(n) \\ > \sigma_{n-1} \circ \ldots \sigma_2 \circ \sigma_1(n-1) = \sigma(n-1), \ \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\sigma_n(k) \geq k \ \forall k \in \mathbb{N}$, y también que la composición de funciones estrictamente crecientes es estrictamente creciente. Por tanto, σ es estrictamente creciente; es decir, $\{f_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f_n\}$. Aún más, es inmediato comprobar que

$$\{f_{\sigma(n)}\}_{n\geq k} \text{ es una subsucesión de } \{f_{\sigma_k \circ \ldots \sigma_2 \circ \sigma_1(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Así, como la sucesión $\{f_{\sigma_k \circ \ldots \sigma_2 \circ \sigma_1(n)}(r_k)\} \to f(r_k)$, tenemos que $\{f_{\sigma(n)}(r_k)\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f(r_k)$ $\forall k \in N$, puesto que el comportamiento de un número finito de términos no afecta a la convergencia. Por último, como $\{r_k : k \in N\}$ era una enumeración de $A \cap \mathbb{Q}^N$, concluimos que:

$$\{f_{\sigma(n)}(r)\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f(r), \ \forall r \in A \cap \mathbb{Q}^N.$$

Notemos que en este paso no ha sido necesario utilizar la equicontinuidad.

<u>Paso 2.</u> Probaremos el siguiente resultado técnico: Dado $\delta > 0$, $\exists r_1, ..., r_k \in A \cap \mathbb{Q}^N$ tales que $\exists \ i = 1, ..., k : |x - r_i| < \delta \ \ \forall x \in A$.

Por ser A compacto, todo recubrimiento de abiertos del conjunto A admite un subrecubrimiento finito del mismo. Definimos el conjunto de bolas abiertas $B = \{B(r, \delta) : r \in A \cap \mathbb{Q}^N\}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, el conjunto B recubre a A. Por tanto, como A es compacto, existe un subrecubrimiento finito del mismo que también lo recubre. Es decir,

$$\exists r_1, \ldots, r_k \in A \cap \mathbb{Q}^N \text{ tales que } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(r_i, \delta)$$

Dado $x \in A$, por ser el anterior un subrecubrimiento finito de A, se tiene que
$\exists i \in \{1, \ldots, k\}$ tal que $x \in B(r_i, \delta)$. Por tanto, $|x - r_i| < \delta$.

<u>Paso 3</u>. Concluímos probando que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en A, donde $g_n := f_{\sigma(n)}$.

Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Por la equicontinuidad de f_n, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} |x - y| < \delta \\ x, y \in A \end{array}\right\} \implies |g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, si para todo $x \in A$ consideramos el punto $r_i \in A \cap \mathbb{Q}^N$ ($i \in \{1, \dots, k\}$) dado por el paso 2, tendremos:

$$\begin{aligned}|g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(r_i)| + |g_n(r_i) - g_m(r_i)| + |g_m(r_i) - g_m(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + |g_n(r_i) - g_m(r_i)| + \frac{\varepsilon}{3}.\end{aligned}$$

Ya que cada sucesión $\{g_n(r_i)\}$ es convergente a $f(r_i)$ para cualquier $i \in \{1, \dots, k\}$, cada una de estas k sucesiones es de Cauchy. En consecuencia, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ (dependiente solo de los puntos r_i e independiente de x) tal que

$$n, m \geq n_0 \implies |g_n(r_i) - g_m(r_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall i \in \{1, \dots, k\}$$

y así

$$n, m \geq n_0 \implies |g_n(x) - g_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + |g_n(r_i) - g_m(r_i)| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \quad \forall x \in A$$

Puesto que en $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ la convergencia equivale a la convergencia uniforme, se concluye aplicando el *Criterio de Cauchy* a la sucesión $\{g_n\} = \{f_{\sigma(n)}\}$. □

Como conclusión de este capítulo, presentamos el siguiente corolario, que nos sirve para caracterizar los conjuntos compactos.

Corolario 1.2 (Caracterización de compactos). *Sea $B \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Entonces:*

$$B \text{ es compacto} \iff B \text{ es cerrado, acotado y equicontinuo}$$

Demostración.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ya sabemos que un conjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado. Veamos que además es equicontinuo.

Sea ε > 0 fijo. La familia $\{B(f, \varepsilon/3) : f \in B\}$ ($B(f, \varepsilon/3)$ son bolas abiertas en $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$) es un recubrimiento abierto de B puesto que

$$B \subseteq \bigcup_{f \in B} B(f, \varepsilon/3).$$

Luego, por la compacidad de B, $\exists f_1, \dots, f_n \in$ B tales que

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon/3).$$

Observemos que para cualquier $f \in B(f_i, \varepsilon/3)$ se verifica que $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon/3, \ \ \forall x \in A$. Además, como A es compacto, cada una de las funciones continuas f_i ($i = 1, \dots, n$) será uniformemente continua. Por tanto, existirá para cada una de ellas un número $\delta_i > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} |x - y| < \delta_i \\ x, y \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3$$

Por consiguiente, si tomamos $\delta = \text{mín}\{\delta_i : i = 1, \ldots, n\} > 0$, tendremos que cualquier $f \in B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon/3)$ debe pertenecer a una bola $B(f_i, \varepsilon/3)$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, y así si se tiene

$$\left.\begin{array}{c} |x-y| < \delta \leq \delta_i \\ x, y \in A \end{array}\right\}$$

Entonces, es claro que $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$.

En resumen, hemos probado que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} |x-y| < \delta \\ x, y \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall f \in B$$

Es decir, B es equicontinuo y la prueba está terminada.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\{f_n\} \subseteq B$. Es claro que $\{f_n\}$ es acotada y equicontinua, y aplicando el *Teorema de Arzelà-Ascoli*, tenemos que $\exists \{f_{\sigma(n)}\} \to f \in \overline{B}$. Pero B es cerrado, por lo que $\overline{B} = B$. Obtenemos así que de cualquier sucesión de puntos de B es posible obtener una sucesión parcial convergente a un punto de B, por lo que B es compacto. $\square$

2. Series de funciones

De forma análoga a como se hizo en el espacio euclídeo $\mathbb{R}^N$, pasamos ahora a estudiar series de funciones. La referencia básica sigue siendo [1, Capítulo 5].

Definición 2.1 (Sumas parciales). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto. Dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciones $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$, se llama sumas parciales S_k a la función definida en Ω mediante

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x), \quad x \in \Omega.$$

Definición 2.2 (Serie de funciones). Llamamos serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ al par formado por la sucesiones $\{f_n\}$ y $\{S_n\}$. Llamaremos a f_n el término general de la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$.

El carácter de la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones se basa en la correspondiente convergencia de la sucesión de funciones $\{S_n\}$ formada por las sumas parciales S_n. Por tanto, tenemos de nuevo dos tipos de convergencia.

Definición 2.3 (Convergencia de series de funciones). Si $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$ es una función y $A \subset \Omega$, diremos

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ es convergente puntualmente en } A \Leftrightarrow \{S_n\} \longrightarrow S \textit{ c.p. en } A.$$

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ es convergente uniformente en } A \Leftrightarrow \{S_n(x)\} \longrightarrow S(x) \text{ c.u. en } A.$$

Diremos que S es la suma de la serie de funciones:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ puntualmente (resp. uniformemente) en } A.$$

Proposición 2.1. *Sea $\sum_{n\geq 0} f_n$ una serie de funciones definida en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dicha serie converge uniformemente en un subconjunto $B \subseteq A$, entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge a 0 uniformemente en B.*

Demostración. Es claro que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = S_{n+1} - S_n$. Aplicando límites en la igualdad anterior, y sabiendo que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformemente en B, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\} = \lim_{n\to\infty} \{S_n(x)\} - \lim_{n\to\infty} \{S_{n+1}(x)\} = S(x) - S(x) = 0 \quad \forall x \in B$$

$\square$

Puesto que la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones se basa en la correspondiente convergencia de la sucesión de funciones $\{S_n\}$ formada por las sumas parciales, tenemos una relación directa de la convergencia de series con la continuidad, derivación e integración.

Teorema 2.1. *Si una serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones continuas f_n es uniformemente convergente, entonces la función suma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una función continua.*

Demostración. Como la serie es uniformemente convergente, tenemos que $\{S_n\} \to S$ uniformemente. Como las f_n eran continuas, las funciones S_n son continuas, por ser suma finita de funciones continuas. Por tanto, aplicando el teorema *Teorema 1.2* a la sucesión de funciones $\{S_n\}$, tenemos que $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua. □

Teorema 2.2. *Si la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones continuas $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente convergente, entonces $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.*

Demostración. Siguiendo la idea del teorema anterior, aplicamos el *Teorema 1.4* a la sucesión de funciones $\{S_n\}$, y obtenemos que:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n \Rightarrow \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_a^b f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

□

Teorema 2.3. *Si para $f_n \in \mathcal{C}^1(a,b)$ la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ es c.p. en (a,b) y la serie $\sum_{n\geq 1} f_n'$ es c.u. en (a,b), entonces la suma $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una función de $\mathcal{C}^1(a,b)$ con $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.*

Demostración. Claramente $S_n \in \mathcal{C}^1(a,b)\ \forall n \in \mathbb{N}$, y además tenemos que $\{S_n\}$ *c.p.* en (a,b), y $\{S_n'\}$ *c.u.* en (a,b), pues la derivada de una suma finita es la suma de las derivadas. Bajo estas hipótesis, podemos aplicar a $\{S_n\}$ el *Teorema 1.5*, obteniendo que $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{C}^1(a,b)$, y además:

$$S' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} \{S_n'\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

□

2.1. Criterios de convergencia para series de funciones

Teorema 2.4 (Criterio de Weierstrass). *Si existen constantes M_n positivas tales que $|f_n(x)| \leq M_n \ \ \forall x \in A$ y la serie de números reales $\sum_{n\geq 1} M_n$ es convergente, entonces la* *serie de funciones* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *es convergente uniformemente (y absolutamente) en* A.

Demostración. Por el criterio de Cauchy para la convergencia de una serie de números positivos (las sumas parciales son de Cauchy), se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_o \in \mathbb{N} : \ |S_{n+k} - S_{n-1}| = M_n + ... + M_{n+k} < \varepsilon \ \ \forall n \geq n_o \ \forall k \in \mathbb{N}$$

Usando que $|f_n(x)| \leq M_n \ \forall x \in A$ y la desigualdad triangular obtenemos:

$$|f_n(x) + ... + f_{n+k}(x)| \leq |f_n(x)| + ... + |f_{n+k}(x)| \leq M_n + ... + M_{n+k} < \varepsilon \ \ \forall x \in A$$

Y por tanto:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_o \in \mathbb{N} : \ |f_n(x) + ... + f_{n+k}(x)| < \varepsilon \ \ \forall n \geq n_o \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall x \in A$$

Como la sucesión de sumas parciales de la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente, queda probado que dicha serie converge uniformemente en A. □

Teorema 2.5 (Criterio de Abel). *Sean* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ *tales que* $\{\phi_n\}$ *es una sucesión decreciente de funciones, es decir,* $\phi_{n+1}(x) \leq \phi_n(x) \ \forall x \in A$. *Supóngase que* $\exists M$ *tal que* $|\phi_n(x)| \leq M \ \forall x \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$. *Entonces, se tiene que*

$$\sum_{n\geq 1} f_n(x) \text{ c.u. en } A \implies \sum_{n\geq 1} \phi_n(x) f_n(x) \text{ c.u. en } A.$$

Teorema 2.6 (Criterio de Dirichlet). *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *y* $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ *tales que* $\{\phi_n\}$ *es una sucesión decreciente de funciones, que converge a 0 uniformemente, con* $\phi_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. *Sea* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *una serie de funciones, y supóngase que* $\exists M$ *tal que las sumas parciales de dicha serie están uniformemente acotadas, esto es,*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq M \ \ \forall x \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, la serie $\sum_{n\geq 1} \phi_n(x) f_n(x)$ *converge uniformemente en* A.

Veamos un ejemplo de aplicación de estos criterios.

Ejemplo 2.1: Probar que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$ converge uniformemente en $[0, \infty)$.

Sea $\phi_n(x) = e^{-nx}$. Para $x \geq 0$, ϕ_n es decreciente, y además $|\phi_n(x)| = |e^{-nx}| = |\frac{1}{e^{nx}}| \leq 1$. Por otro lado, sabemos que la serie alternada $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, por el *Criterio de Leibnitz* para series de números reales. Por tanto, aplicando el *Criterio de Abel*, la serie de partida converge uniformemente para $x \geq 0$.

2.2. Series de potencias

Un caso interesante de series de funciones lo constituyen las series de potencias, esto es, aquellas series en las que las funciones son potenciales:

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n, \quad a_n, a \in \mathbb{R} \;\; \forall n \in \mathbb{N}$$

Veamos una característica importante de las series de potencias, que nos ayuda a determinar su carácter de convergencia.

Definición 2.4 (Radio de convergencia). Dada una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, definimos su radio de convergencia $R \in [0, \infty]$ como:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

Nota. En la definición anterior, permitimos que $R = \infty$, tomando como convenio que $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$.

Definición 2.5 (Disco de convergencia). Dada una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, definimos el disco de convergencia $D(a, R) := \{x : |x-a| < R\}$.

Nota. Si $R = \infty$, entonces $D(a, R) = \mathbb{R}$.

El siguiente teorema da sentido a la nomeclatura seguida en las dos definiciones anteriores.

Teorema 2.7. *La serie de potencias* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$

(i) *converge uniformemente en $D(a, R')$ para cualquier $R' < R$ (en particular, converge absolutamente para todo $x \in D(a, R)$.*

(ii) *no converge si $x \notin \overline{D(a, R)}$.*

Demostración.
(i) Sea $R' < R$. Como $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1/R'$, si elegimos $R'' \in (R', R)$, deducimos que $\exists n_0 \geq 0$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1/R''$, $\forall n \geq n_0$.

Esto implica que

$$|a_n(x-a)^n| = |a_n| \cdot |x-a|^n \leq \left(\frac{R'}{R''}\right)^n, \quad \forall x \in D(a, R'), \; \forall n \geq n_0,$$

y el primer apartado se concluye aplicando el criterio de Weierstrass.

Para ver que la serie converge absolutamente en todo el disco, sea $x \in D(a, R)$. Entonces, siempre podemos encontrar un radio R' tal que $|x-a| < R' < R$. En consecuencia,

$x \in D(a, R')$, y por lo que acabamos de probar, tenemos garantizada la convergencia (en valor absoluto) de la serie en el punto x.

(ii) Basta observar que si la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ es convergente en un punto $x \neq a$, entonces $\{a_n(x-a)^n\} \to 0$, y tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de convergencia tenemos que:

$$\exists n_0 > 0 : \, |a_n||x-a|^n \leq 1, \, \forall n \geq n_0$$

Y por tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \cdot |x-a| = |a_n| \cdot |x-a|^n = \frac{|x-a|}{R} \leq 1 \implies |x-a| \leq R$$

Es decir, si la serie converge, necesariamente $x \in \overline{D(a,R)}$. $\square$

Por último, veamos un teorema sobre derivación e integración de series de potencias. Para ello, notemos que si R es el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, podemos definir la función S en $D(a,R)$ mediante:

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad \forall x \in D(a,R)$$

Teorema 2.8. *Sea $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) *La suma $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ es una función $\mathcal{C}^\infty$ en el disco de convergencia $D(a,R)$.*

(ii) $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-a)^{n-1}$, *esto es,*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n(x-a)^n\right).$$

(iii) $\displaystyle\int_a^x S(y)\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$, *esto es,*

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n(x-a)^n\,dx.$$

2.3. Funciones analíticas

Nos preguntamos ahora si cualquier función $\mathcal{C}^\infty$ se puede escribir como suma de una serie de potencias, es decir, si dada $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ *y* $a \in I$, $\exists \{a_n\}$ *tal que* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

Haciendo uso del teorema de Taylor, podemos ver la siguiente condición suficiente para que una función $f \in \mathcal{C}^\infty$ coincida con la suma de su serie de Taylor.

Teorema 2.9. *Si una función de clase $\mathcal{C}^\infty$ en un intervalo I verifica*

$$\exists M > 0 \ : \ |f^{n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I$$

entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!} \ (x-a)^n, \quad \forall x \in I.$$

Demostración. Fijamos $x \in I$, y observamos que las sumas parciales $S_k(x)$ de la serie son el polinomio de Taylor de orden k:

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{n)}(a)}{n!} \ (x-a)^n,$$

Usando el teorema del resto, tendremos que $\exists c$ entre x y a tal que:

$$|f(x) - S_k(x)| = \left| \frac{f^{k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} \right| \leq M \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \to 0$$

Es decir, la distancia entre f y S_n se hace tan pequeña como se quiera. Por tanto, hemos probado que $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \{S_n(x)\} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!} \ (x-a)^n, \quad \forall x \in I.$ □

Como consecuencia de este teorema, podemos escribir algunas funciones elementales como la suma de su serie de Taylor, en el punto $a = 0$.

Ejemplo 2.2: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Ejemplo 2.3: $\operatorname{sen} x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$.

Ejemplo 2.4: $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Sin embargo, no todas las funciones $\mathcal{C}^\infty$ admiten una descomposición en sumas de funciones potenciales. Dada una serie de potencias, y usando el *Teorema 2.8*, notemos lo siguiente:

$$S'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (a-a)^{n-1} = a_1 \quad ; \quad S''(a) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (a-a)^{n-2} = 2a_2 \quad ; \quad \ldots$$

En general, se demuestra por inducción que $S^{k)}(a) = k! \cdot a_k$. Es decir, fijado un a y conocida la función S, se tiene que necesariamente $a_k = \frac{S^{k)}(a)}{k!}$.

Recordemos que si una función $f \in \mathcal{C}^\infty$ cumple que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n \ \forall x \in A$, dicha función es justamente lo que nos hemos referido como la suma de la serie, S. Pero acabamos de ver que, en ese caso, los a_n están perfectamente determinados, y resulta que f se escribiría como su suma de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Por tanto, la pregunta que nos hacíamos equivale a preguntarse si toda función $\mathcal{C}^\infty$ se puede escribir como su suma de Taylor. La respuesta es que, en general, esto no es posible (ya vimos en el *Teorema 2.9* que sí se cumple si todas las derivadas de f están acotadas).

Un contraejemplo sería la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es claro que $f \in \mathcal{C}^\infty$ y que $f \neq 0$. Además, se tiene que $f(0) = 0$, y $f^{k)}(0) = 0 \ \forall k \geq 1$.

Si f se escribiese como su suma de Taylor, tendríamos que, en el punto $a = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} \cdot x^n = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Lo cual es una contradicción, pues $f \neq 0$. Por tanto, f no se puede escribir como suma de una serie de potencias.

Las funciones que *sí* se pueden escribir como suma de una serie de potencias tienen propiedades muy interesantes. Tanto es así, que dichas funciones tienen un nombre propio.

Definición 2.6 (Función analítica). Decimos que una función $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$ es analítica si se puede escribir como su suma de Taylor, es decir, si se cumple que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n \ \ \forall x \in A$$

3. Integral asociada a una medida

Recordemos por un momento la definición de integral de Riemann-Darboux. Si tenemos una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} \in \mathcal{P}[a, b]$, definimos la integral superior e inferior de una función f en $[a, b]$ como:

$$\underline{\int_a^b} f := \sup_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \inf_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

$$\overline{\int_a^b} f := \inf_{P \in \mathcal{P}[a,b]} \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \sup_{[x_i, x_{i+1}]} f$$

Entonces, el conjunto de funciones que son Riemann-integrables es:

$$\mathcal{R} = \left\{ f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ acotada} : \overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f \right\}$$

Si $f \in \mathcal{R}$, definimos su integral de Riemann como la correspondiente integral superior (o inferior). Sin embargo, hay ciertas funciones, principalmente aquellas que presentan muchas oscilaciones en el intervalo de integración, que no son integrables según Riemann. Un ejemplo es la **función de Dirichlet**,

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 0 & si\ x \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1] \end{cases}$$

donde es evidente (por la densidad de $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) que $\overline{\int_a^b} f = 1 \neq 0 = \underline{\int_a^b} f$, y por tanto $f \notin \mathcal{R}$.

En este apartado, nuestro objetivo será construir una integral que abarque un conjunto más amplio de funciones que las funciones Riemann-integrables. Esta será la **integral de Lebesgue**, que intenta establecer una relación entre el intervalo de integración y la función a integrar, principalmente al considerar una manera de *medir* conjuntos.

Necesitaremos primero algunas nociones sobre teoría de la medida para comenzar a presentar la integral de Lebesgue. La referencia principal es esta vez [2, Chapter 1].

3.1. Nociones generales

Definición 3.1 (σ-álgebra). Una familia $\mathcal{A}$ no vacía de subconjuntos de Ω es una σ-álgebra si verifica:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $\Omega \backslash A \in \mathcal{A}, \quad \forall A \in \mathcal{A}$

(iii) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \quad \forall \{A_n\} \subset \mathcal{A}$

Proposición 3.1. *Si $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre un conjunto Ω, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$

(ii) $\{A_i : i = 1, \dots, n\} \subseteq \mathcal{A} \implies \displaystyle\bigcup_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

(iii) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \quad \forall \{A_n\} \subset \mathcal{A}$

(iv) $\{A_i : i = 1, \dots, n\} \subseteq \mathcal{A} \implies \displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \mathcal{A}$

(v) $A, B \in \mathcal{A} \implies A \backslash B \in \mathcal{A}$

Demostración. La propiedad (i) es trivial, notando que $\emptyset = \Omega^c$. Para comprobar (ii), formamos la sucesión $\{A_1, \dots, A_n, \emptyset, \emptyset, \emptyset, \dots\} \subseteq \mathcal{A}$, y aplicamos la definición de σ-álgebra.

(iii) se demuestra usando las leyes de De Morgan:

$$\Omega - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\Omega - A_n)$$

y usando el mismo argumento que en (ii), vemos fácilmente que se verifica (iv).

Por último, (v) se deriva del hecho de que $A - B = (\Omega - B) \cap A$. $\square$

Definición 3.2 (Espacio medible). Diremos que la pareja $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible si $\Omega \neq \emptyset$ es un conjunto, y $\mathcal{A}$ es una σ-álgebra sobre Ω. A los elementos A de $\mathcal{A}$ los llamaremos conjuntos medibles.

Nota. Un ejemplo sencillo de $\sigma-$álgebra es la familia formada por todos los subconjuntos de Ω. La denotamos como $P(\Omega) \equiv 2^{\Omega}$.

Definición 3.3 (Función medible). Si $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(X, \mathcal{B})$ son espacios medibles y $f : \Omega \to X$ es una función, diremos que f es medible si:

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{A}, \ \forall B \in \mathcal{B}$$

Es decir, si la imagen inversa de un conjunto medible es otro conjunto medible.

Definición 3.4 (σ-álgebra de Borel). Si Ω es un espacio topológico, se llama σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(\Omega)$ a la $\sigma-$álgebra engendrada por la topología τ de Ω. Además, $\mathcal{B}(\Omega)$ es la σ-álgebra más pequeña que contiene a τ.

Formalmente, si $\Lambda = \{\mathcal{A} : \mathcal{A}$ es σ-álgebra y $\tau \subseteq \mathcal{A}\}$, definimos

$$\mathcal{B}(\Omega) := \bigcap_{\mathcal{A}\in\Lambda} \mathcal{A}$$

Para ver que $\mathcal{B}(\Omega)$ es una σ-álgebra, basta observar que, dada una sucesión $\{A_n\} \subseteq \mathcal{B}(\Omega)$, tenemos que $A_n \in \mathcal{A} \ \ \forall \mathcal{A} \in \Lambda$. Como cada $\mathcal{A} \in \Lambda$ es una σ-álgebra, se tiene que:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \quad \forall \mathcal{A} \in \Lambda \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(\Omega)$$

El resto de propiedades se comprueban de forma análoga.

Proposición 3.2. *Si $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible, X un espacio topológico con $\mathcal{B}$ su $\sigma-$álgebra de Borel, entonces:*

$$f : \Omega \to X \ \textit{es medible} \iff f^{-1}(G) \in \mathcal{A}, \quad \forall G \in \tau$$

En general, cuando consideremos un espacio X sin decir explícitamente quién es la $\sigma-$álgebra asociada, daremos por hecho que se trata de la σ-álgebra de Borel $\mathcal{B}(X)$ asociada a la topología usual de X.

Aritmética de $[0, \infty]$

Antes de continuar con el estudio de las funciones medibles, presentamos un espacio topológico en el que trabajaremos frecuentemente: la **recta real extendida**, que notaremos como $[-\infty, +\infty]$ ó $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. La topología asociada a este espacio viene dada por la base $\{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\} \cup \{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\} \cup \{(a, \infty] : a \in \mathbb{R}\}$.

Puesto que de ahora en adelante trabajaremos habitualmente en el espacio topológico $[0, \infty] \subseteq [-\infty, \infty]$, necesitamos definir ciertas operaciones y relaciones:

(i) $a < \infty, \quad \forall a \in [0, \infty)$

(ii) $\infty + a = \infty, \quad \forall a \in [0, \infty]$

(iii) $\infty \cdot a = \infty, \quad \forall a \in (0, \infty]$

(iv) $\infty \cdot 0 = 0$

El hecho de trabajar en este espacio nos proporciona ciertas ventajas, principalmente en cuanto a notación y distinción de casos. Por ejemplo, en $[0, \infty]$, *toda sucesión monótona creciente es convergente*, si bien el límite puede ser ∞. También podemos decir que existe siempre la suma de una serie, o que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son dos sucesiones convergentes a x e y respectivamente, entonces $x_n y_n \to xy$.

3.2. Funciones medibles positivas. Funciones simples

Una familia muy importante de funciones medibles son aquellas que toman únicamente valores positivos (en la recta real extendida). Tanto es así, que si conocemos el comportamiento de estas funciones, las definiciones y propiedades que derivemos sobre ellas se extenderán fácilmente a funciones medibles cualesquiera en $[-\infty, +\infty]$.

Definición 3.5 (Funciones medibles positivas). Una función $f : \Omega \to X = [0, \infty]$ medible se llama función medible positiva.

Proposición 3.3 (Caracterización de funciones medibles positivas). *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio de medida y* $f : \Omega \to [0, \infty]$*. Entonces:*

$$f \textit{ es medible } \iff \{w \in \Omega : f(w) < \gamma\} \textit{ es medible } \forall \gamma \geq 0$$

$$\iff \{w \in \Omega : f(w) \leq \gamma\} \textit{ es medible } \forall \gamma \geq 0$$

$$\iff \{w \in \Omega : f(w) > \gamma\} \textit{ es medible } \forall \gamma \geq 0$$

$$\iff \{w \in \Omega : f(w) \geq \gamma\} \textit{ es medible } \forall \gamma \geq 0$$

Proposición 3.4. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio medible. Si* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones medibles positivas en* Ω*, entonces también son medibles las funciones definidas por:*

$$g_1(w) = sup\{f_n(w) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

$$g_2(w) = inf\{f_n(w) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

$$g_3(w) = \limsup_{n \to \infty} \ f_n(w)$$

$$g_4(w) = \liminf_{n \to \infty} \ f_n(w)$$

En particular, si $\{f_n\} \xrightarrow{c.p.} f$ *en* Ω*, entonces* f *es medible.*

Funciones simples

Centraremos ahora nuestra atención en estudiar funciones sencillas o *simples*, que nos servirán más adelante como base para construir una integral.

Definición 3.6 (Funciones simples positivas). Diremos que una función medible $s : \Omega \to [0, \infty)$ es simple positiva si $s(\Omega)$ es un conjunto finito.

Una característica importante de las funciones simples es que siempre se pueden escribir como una suma finita de funciones. Antes de verlo, necesitamos definir la función característica de un conjunto A, que denotaremos χ_A y viene dada por:

$$\chi_A(\omega) = \begin{cases} 1 & si\ \omega \in A \\ 0 & si\ \omega \notin A \end{cases}$$

Proposición 3.5 (Descomposición canónica). *Si $s : \Omega \to [0, \infty)$ es simple con $s(\Omega) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, entonces los conjuntos medibles $A_k := \{w \in \Omega : s(\omega) = \alpha_k\}$ son una partición de Ω, y además:*

$$s = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{A_k}$$

Siendo esta la descomposición canónica de s, que es única si $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$.

Demostración. La demostración es casi instantánea. En primer lugar, los conjuntos A_k son medibles, pues se pueden escribir como diferencia de medibles: $A_k = s^{-1}([0, \alpha_k]) \backslash s^{-1}([0, \alpha_k))$. Además, como $s(\Omega)$ es finito, trivialmente se verifica que

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{m} A_k \quad ; \quad A_j \cap A_k = \emptyset \ \text{ para } j \neq k$$

Por tanto, dado $\omega \in \Omega$, $\exists!\ k_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tal que $\omega \in A_{k_0}$, de donde se deduce la descomposición canónica de s. $\square$

Proposición 3.6 (Propiedades de funciones simples). *Si s y t son funciones simples positivas y $\alpha \in [0, \infty)$, entonces $s + t$, αs, st son también simples positivas.*

Demostración. Como $s, t : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ son simples positivas $\implies$ $s(\Omega)$, $t(\Omega)$ son conjuntos finitos. Supongamos que $s(\Omega) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $t(\Omega) = \{b_1, \ldots, b_m\}$.

La imagen por $s + t$ sería

$$(s + t)(\Omega) \subseteq \{a_i + b_j \ : \ i = 1, \ldots, n \ ; \ j = 1, \ldots, m\}$$

que es un conjunto finito, probando que la función suma $s + t$ es simple.

Similarmente,

$$(st)(\Omega) \subseteq \{a_i \cdot b_j \ : \ i = 1, \ldots, n \ ; \ j = 1, \ldots, m\}$$

que también es un conjunto finito, probando que la función producto st es simple.

Finalmente, como $\alpha < \infty$, la función $\alpha s : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$. Además,

$$(\alpha s)(\Omega) = \{\alpha a_i \ : \ i = 1, \ldots, n\},$$

que es un conjunto finito, probando que αs es simple. $\square$

Teorema 3.1 (Teorema de Lebesgue). *Si Ω es un espacio medible y $f : \Omega \to [0, \infty]$ es una función, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) *f es medible*

(ii) *$\exists s_n : \Omega \to [0, \infty)$ simples positivas tales que $\{s_n\}$ es monótona creciente y convergente a f puntualmente en Ω.*

Además, si f es medible y

$$f(\omega) \leq M < \infty, \quad \forall \omega \in \Omega$$

Entonces puede conseguirse que $\{s_n\} \xrightarrow{c.u.} f$ en Ω.

Demostración.

$\boxed{ii) \implies i)}$ Es consecuencia directa de la *Proposición 3.4*, al ser f el límite de funciones medibles.

$\boxed{i) \implies ii)}$ La idea principal se basa en dividir el dominio de f. Fijado un $n \in \mathbb{N}$, consideramos los conjuntos:

$$\begin{cases} F_n := \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq n\} \\ E_{n,k} := \left\{\omega \in \Omega : \dfrac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \dfrac{k}{2^n}\right\}, \text{ para } 1 \leq k \leq n2^n \end{cases}$$

Así, tenemos que:

$$\Omega = F_n \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n2^n} E_{n,k} \right)$$

y que:

$$s_n = n\chi_{F_n} + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \cdot \chi_{E_{n,k}}$$

Además, como f es medible, entonces F_n y $E_{n,k}$ son conjuntos medibles, al ser preimagen de medibles. También tenemos que s_n es medible (por serlo f y la función característica de un conjunto), y $s(\Omega)$ es finito, por lo que s es simple.

COMPLETAR LA PRUEBA CON DIAPOSITIVAS $\square$

Corolario 3.1 (Propiedades funciones medibles). *Sea Ω un espacio medible, $\alpha \in [0, \infty]$, y $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles. Entonces, $f + g$, fg, αf son funciones medibles.*

Demostración. Por el *Teorema de Lebesgue* sabemos que existe una sucesión $\{s_n\}$ y otra $\{t_n\}$ de funciones simples positivas que convergen de forma creciente a f y g, respectivamente. Además, por la *Proposición 3.6* sabemos que podemos generar una sucesión $\{s_n + t_n\} \to f + g$ de funciones simples positivas, manteniendo la monotonía creciente. Entonces, aplicamos de nuevo el *Teorema de Lebesgue* para concluir que la función $f + g$ es medible.

La demostración para αf y fg es análoga. □

3.3. Integral de funciones medibles positivas

Abordamos ahora el problema de definir una integral asociada a funciones medibles positivas. Para ello, formalizaremos el concepto de *medida*, que nos permitirá asignar a cada conjunto medible un número $m \in [0, \infty]$, que entenderemos como la *medida* de ese conjunto.

Definición 3.7 (Medida). Si $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible, una medida (positiva) es una función $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ verificando:

(i) $\mu(\emptyset) = 0$

(ii) $\forall \{A_k\} \subseteq \mathcal{A}$ con $A_k \cap A_j = \emptyset,\ k \neq j$, se tiene que:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

La terna $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ se llama **espacio de medida**.

Proposición 3.7 (Propiedades de una medida). *Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ es un espacio de medida, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *(Monotonía). Si $A, B \in \mathcal{A},\ A \subseteq B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$*

(ii) *(Subaditividad). $\forall \{A_k\} \subseteq \mathcal{A}$, se tiene:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

(iii) *$\forall \{A_k\} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_k \subseteq \cdots$, se tiene:*

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

(iv) *$\forall \{A_k\} \subseteq \mathcal{A}$ tal que $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_k \supseteq \cdots$, se tiene:*

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \lim_{k\to\infty} \mu(A_k)$$

FALTAN EJEMPLOS DE MEDIDAS (DIAPOSITIVAS)

Estamos ya en disposición de definir lo que entenderemos por integral de una función medible positiva, en el marco de un espacio de medida. Como ya dijimos, el problema se reducirá a estudiar integrales asociadas a funciones simples, las cuales definimos a continuación.

Definición 3.8 (Integral de función simple positiva). Si $E \in \mathcal{A}$ y $s : \Omega \to [0, \infty]$ es simple, i.e, $s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \chi_{A_k}$, entonces definimos la integral de s en E como:

$$\int_E s\, d\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E \cap A_k)$$

Definición 3.9 (Integral de función medible positiva). Si $E \in \mathcal{A}$ y $f : \Omega \to [0, \infty]$ es medible, entonces definimos la integral de f en E como:

$$\int_E f\, d\mu := \sup \left\{ \int_E s\, d\mu : \text{ s es simple positiva, } s \le f \right\}$$

Teorema 3.2 (Teorema de la convergencia monótona). *Sea $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $E \in \mathcal{A}$ y $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ medibles. Supongamos que $f_n(\omega) \le f_{n+1}(\omega) \ \forall \omega \in \Omega$. Entonces:*

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n \ d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n\, d\mu$$

Nota. $f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ es medible por la *Proposición 3.4*, teniendo en cuenta que $\{f_n(\omega)\}$ es monótona creciente, y por tanto convergente.

Demostración. Veamos las dos desigualdades.

$\boxed{\le}$ Como $f_n \le f_{n+1} \le f$ por hipótesis, tenemos que:

$$\left\{s : \left.\begin{array}{r} \text{s simple positiva} \\ s \le f_n \end{array}\right\} \right\} \subset \left\{s : \left\{\begin{array}{l} \text{s es simple positiva} \\ s \le f_{n+1} \end{array}\right. \right\} \subset \left\{s : \left\{\begin{array}{l} \text{s es simple positiva} \\ s \le f \end{array}\right. \right\}$$

Esto implica que:

$$\xrightarrow{sup} \int_E f_n d\mu \le \int_E f_{n+1} d\mu \le \int_e f d\mu \implies \exists \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \le \int_E f d\mu$$

$\boxed{\ge}$

Para probar esta desigualdad, usaremos el siguiente lema:

Ahora, como

$$\int_E f d\mu := sup\{\int_E s d\mu : \left\{\begin{array}{l} \text{s es simple positiva} \\ s \le f \end{array}\right. \}$$

basta ver que:

$$\left.\begin{array}{r} \text{s es simple positiva} \\ s \le f \end{array}\right\} \implies \int_E s d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Vamos a probar este hecho.

Sea $s : \Omega \to [0, \infty)$ simple positiva tal que $s \leq f$. Fijamos $p \in (0, 1)$ y $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E_n = \{\omega \in E : ps(\omega) \leq f_n(\omega)\} \implies \begin{cases} E_n \quad medibles \\ E_n \subset E_{n+1}, \quad \cup_{n=1}^{\infty} E_n = E \end{cases}$$

$$\implies p\varphi(E_n) = p \int_{E_n} s d\mu = \int_{E_n} ps d\mu \leq^{\text{def. } E_n} \int_{E_n} f_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu$$

Donde en el último paso hemos usado que $\forall s : \Omega \to [0, \infty)$ simple que verifique $s \leq f_n$, se tiene que $\int_{E_n} s d\mu \leq \int_E s d\mu$. Recordemos que esta integral se definía: Si $s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}$, entonces $\int s d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(E_n \cap A_i)$.

Ahora, como φ es una medida, si $n \to \infty$, entonces:

$$p\varphi(E) = p \int_E s d\mu \implies p \int_E s d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu$$

Y si ahora $(p \to 1)$, entonces:

$$1 \int_E s d\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu$$

Probando lo que queríamos. □

Propiedades de las funciones medibles positivas Si $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ medibles positivas, $\alpha \in \mathbb{R}, E \in \mathcal{A}$

(i) ($f + g, \alpha f, fg$ son medibles y)

$$\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

$$\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu \quad \text{Tomando } \alpha * \infty = \infty, \quad \alpha * 0 = 0$$

(ii) $g(\omega) \leq f(\omega), \ \forall \omega \in \Omega \implies \int_E g d\mu \leq \int_E f d\mu$

(iii) $\int_E f d\mu = \int_\Omega f \mathcal{X}_e d\mu$

(iv) Teorema de Levi:

$$f_n : \Omega \to [0, \infty] \ \ medibles \implies \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

Demostración.

Si $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ son medibles y $\sum_{n \geq 1} f_n$ una serie de funciones, definimos:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} f_n \quad \text{sumas parciales}$$

Y tenemos que $S_1 \leq \cdots \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \cdots$, es decir, S_k es monótona creciente. Aplciando el *T.C.M.*, tenemos que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E S_k d\mu = \int_E \lim_{k\to\infty} S_k d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E \sum_{n=1}^{k} f_n d\mu = \int_E \lim_{k\to\infty}$$

□

(v) Si s es simple positiva, entonces $\varphi(E) = \int_E s d\mu \ \ (\forall E \in \mathcal{A})$ es una medida.

$$\left.\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A} &\to [0,\infty] \\ E &\mapsto \varphi(E) \end{aligned}\right\} \text{ es una medida. Además}$$

- $E \in \mathcal{A}, \mu(E) = 0 \implies \varphi(E) = 0$
- $g : \Omega \to [0,\infty]$ medible $\implies \int_E g d\varphi = \int_E g f d\mu$

(vi) $f : \Omega \to [0,\infty]$ medible

- $\int_\Omega f d\mu < \infty \implies \mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) = \infty\}) = 0$
- $\int_\Omega f d\mu = 0 \iff \mu(\{\omega \in \Omega : f(w) > 0\}) = 0$

Proposición 3.8. *Si $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espacio de medida, $E \in \mathcal{A}$ y $f_n : \Omega \to [0,\infty]$ medible. Entonces:*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Demostración.

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) = sup\{\}$$

□

FALTAN COSAS

Teorema 3.3 (Convergencia dominada de Lebesgue). *Sean $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones medibles y $E \in \mathcal{A}$. Además, supongamos que $f_n(\omega) \to f(\omega)$ c.p. con $\omega \in E$. Finalmente, supongamos que $\exists g : \Omega \to \mathbb{R}$ integrable tal que $|f_n(\omega)| \leq g(\omega)$ $\forall \omega \in E$. Entonces,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu = \int_E \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) d\mu$$

Nota. Como para cada n, $|f_n| \leq g$ y g es integrable, $|f_n|$ también es integrable, luego cada f_n es integrable.

Nota. Como $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ con cada f_n una función medible $\Rightarrow f$ es medible en Ω.

Demostración. Definimos $g_n(\omega) := 2g(\omega)\chi_E(\omega) - |f_n(\omega) - f(\omega)|\chi_E(\omega)$, que es integrable. Es claro que $\{g_n(\omega)\} \to 2g(\omega)\chi_E(\omega)$, ya que $f_n(\omega) \to f(\omega)$ y χ_E es acotada.

Vamos a ver además que $g_n \geq 0$ y es medible en Ω porque

$$|f_n - f| \leq |f_n| + |f| \leq g + g = 2g\chi_E(\omega)$$

Por el *Lema de Fatou*,

$$\liminf_{n\to\infty} \int_\Omega g_n d\mu \geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} g_n d\mu = 2\int_\Omega g\chi_E(\omega)d\mu$$

$$\liminf_{n\to\infty} \left[\int_\Omega 2g(\omega)\chi_E(\omega)d\mu - \int_\Omega |f_n(\omega) - f(\omega)|\chi_E(\omega)d\mu\right] \leq 2\int_\Omega g\chi_E(\omega)d\mu$$

Como recordatorio,

$$\text{si } \exists \lim_{n\to\infty} x_n \text{ entonces } \liminf_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \liminf_{n\to\infty} y_n$$

Además,

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = -\limsup_{n\to\infty}(-x_n)$$

Luego entonces

$$2\int_\Omega g(\omega)\chi_E(\omega)d\mu + \liminf_{n\to\infty}\left[-\int_\Omega |f_n - f|\chi_E(\omega)d\mu\right]$$

$$= 2\int_\Omega g\chi_E(\omega)d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|\chi_E(\omega)d\mu$$

En resumen,

$$2\int_\Omega g\chi_E(\omega)d\mu - \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|\chi_E(\omega)d\mu \geq 2\int_\Omega g\chi_E d\mu$$

$$\int_\Omega g\chi_E d\mu = \int_\Omega g d\mu < \infty \Rightarrow \limsup_{n\ to\infty}\int_\Omega |f_n - f|\chi_E d\mu \leq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \liminf_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|\chi_E d\mu \leq \limsup_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|\chi_E d\mu = 0$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|\chi_E d\mu = 0$$

Sustituyendo Ω por E hemos probado entonces que

$$\lim_{n\to\infty}\int_E |f_n - f| d\mu = 0$$

$$-\int_E |f_n - f| d\mu \leq \int_E (f_n - f) d\mu \leq \int_E |f_n - f| d\mu$$

Sumando entonces $\displaystyle\int_E f d\mu$ a cada término tenemos

$$-\int_E |f_n - f| d\mu + \int_E f d\mu \leq \int_E f_n d\mu \leq \int_E |f_n - f| d\mu + \int_E f d\mu$$

Y si finalmente, tomando $\lim_{n\to\infty}$ tenemos que

$$\exists \lim_{n\to\infty}\int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu$$

□

Una vez que tenemos estos resultados, vamos a trabajar un poco con ellos para acuñarlos. Comenzaremos con el Lema de Fatou.

Proposición 3.9 (Lema de Fatou para funciones medibles). *Sean $f_n : \omega \to \mathbb{R}$ medibles. Supongamos que $\exists h : \Omega \to \mathbb{R}$ con $-\infty < \int_\Omega h d\mu := \int_\Omega d\mu - \int_\Omega d\mu$ tal que $f_n(\omega) \geq h(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$.*
Entonces:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu \geq \int_\mu (\liminf_{n\to\infty} f_n) d\mu$$

Demostración. Llamamos $h_n := f_n - h \geq 0$ y medible por diferencia de funciones medibles. Ahora, usamos el lema de Fatou para funciones medibles positivas y así tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty}\int_\Omega (f_n - h) d\mu \geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty}(f_n - h) d\mu$$

$$(\liminf_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu) - \int_\Omega h d\mu \geq \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu - \int_\Omega f_n d\mu$$

Y podemos suprimir los miembros iguales y haber probado este resultado □

Teorema 3.4 (Teorema de la convergencia monótona para funciones integrables). *Sean $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones integrables y $f_n(\omega) \leq f_{n+1} \quad \forall \omega \in \Omega$. Supongamos también que $\{\int_\Omega f_n d\mu\}$ es una sucesión acotada superiormente.*
Entonces:

$$\begin{cases} f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) \text{ es integrable} \\ \lim_{n\to\infty}\int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} f_n d\mu \end{cases}$$

Demostración. Sabemos que $f_1 \leq f_2 \leq \cdots \leq f_n \leq \cdots$. Como queremos que sean positivas, definimos $h_n := f_n - f_1$, que es medible por diferencia de medibles y monótona creciente. Así, tenemos las condiciones para aplicar el teorema de la convergencia monótona para funciones medibles positivas y ver que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n d\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} h_n d\mu$$

Y como la sucesión de las integrales está acotada superiormente, tenemos que:

$$+\infty > \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu = \int_\Omega f d\mu \geq \int_\Omega f_1 d\mu > -\infty$$

□

Nota. Estos dos teoremas, los podemos realizar en un E un subconjunto del espacio medible Ω

Proposición 3.10. *Sean* $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$. *Si* f *es medible y* $f(\omega) = g(\omega)$ *a. e.* $\forall \omega \in \Omega$, *entonces* g *es medible. Además, si* f *es integrable,* g *es integrable y* $\int_\Omega f d\mu = \int_\Omega g d\mu$

Vamos a intentar dar ahora una definición de distancia en el espacio medible. Dado un espacio medible $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ y dos funciones $f, g : \Omega \to \mathbb{K}$ integrables en Ω. Intentamos definir una primera distancia como:

$$d_p(f,g) = \left(\int_\Omega |f(\omega) - g(\omega)|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

Sin embargo, esta definición no nos da una distancia ya que no sólo necesitamos que f, g sean integrables, también que $|f(\omega) - g(\omega)|^p$ sean integrables.

Vamos a dar algunas definiciones:

- $\mathcal{L}^p(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K}$ medibles $: |f|^p$ es integrable $\} \forall p \in [1, \infty)$.
- $\mathcal{L}^\infty(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K} : |f|$ es una función acotada $\}$.
- $\mathcal{L}^1(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{K}$ medibles $: f$ es integrable $\}$.

Proposición 3.11 (Lema). *Dadas* $f \in L^p(\Omega), gL^q(\Omega)$ *entonces* $fg \in L^1(\Omega)$ *y* $\displaystyle\int_\Omega |fg| d\mu \leq \left(\int_\Omega f^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega g^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}$

Demostración. Para probarlo, tenemos que demostrar que

$$\int_\Omega \frac{|f|}{\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g|}{\left(\int_\Omega |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} d\mu \leq 1$$

Aplicamos Young

$$\int_\Omega \frac{|f|}{\left(\int_\Omega |f|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} \frac{|g|}{\left(\int_\Omega |g|^q d\mu\right)^{\frac{1}{q}}} d\mu \leq$$

FALTAN COSAS.

Se da la igualdad cuando $\dfrac{|f|^p}{\int_\Omega |f|^p d\mu} = \dfrac{|g|^q}{\int_\Omega |g|^q d\mu}$ □

Definición 3.10. Se define $L^p(\Omega) = \mathcal{L}^p(\Omega)/\sim \ = \{\ [f] : f \in \mathcal{L}^p(\Omega)\}$ siendo $\sim$ la relación de equivalencia:

$$f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega), \quad f \sim g \iff f(\omega) = g(\omega) \quad a.e. \omega \in \Omega$$

Ejercicio:

Proposición 3.12. *Si* $0 < \mu(\Omega) < \infty$*, y* $1 \leq r < s < \infty$*, entonces* $L^s(\Omega) \subset L^r(\Omega)$

Nota. Para la prueba, usar la desigualdad de Holder.

Definición 3.11 (Supremo esencial). Si $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$, entonces:

$$ess\ supA = Min\{\ M : a \leq M \quad a.e. \quad A\ \}$$

Teorema 3.5 (Teorema de Riesz-Fisher). $(L^p(\Omega), || \cdot ||_p)$ *es un espacio de Banach* $\forall p \in [1, \infty]$.

Demostración. Ya hemos probado que el espacio es normado. Probemos ahora que es completo.

Sea $\{F_n\} \subset L^p(\Omega)$ una sucesión de Cauchy: $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \implies ||F_n - F_m||_p < \varepsilon$. Tomo entonces $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Entonces, por la definición $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_1 \implies ||F_n - F_m||_p < \varepsilon$. Si tomo $\varepsilon = \dfrac{1}{2^2}$, $\exists n_2 > n_1\ :\ n, m \geq n_2 \implies ||F_n - F_m||_p < \varepsilon$. Sucesivamente, podemos definir $\varepsilon = \dfrac{1}{2^k}$ y entonces $\exists n_k :\ n_k > n_{k-1} > \cdots > n_1 :\ \ m, n \geq n_k \implies ||F_n - F_m||_p < \varepsilon$

Así, podemos definir una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que lleva $k \mapsto n_k 0 \sigma(k)$ estrictamente creciente ($\sigma(k) > \sigma(k-1)$ y podemos tomar $\{F_{\sigma(k)}\}$ como una subsucesión y teniendo que: $||F_{\sigma(k+1)} - F_{\sigma(k)}||_p < \dfrac{1}{2^k}$.

Teniendo esta subsucesión, vamos a probar que es convergente. Para facilitar la tarea, vamos a tomar esta subsucesión como una sucesión, sin tener en cuenta la sucesión inicial durante un tiempo.

Definimos entonces:

$$g_n := \sum_{k=1}^{n} |f_{\sigma(k+1)} - f_{\sigma(k)}|$$

Esta función es convergente , medible y positiva $\forall n$ y:

$$g_n(\omega) \to \sum_{k=1}^{\infty} |f_{\sigma(k+1)}(\omega) - f_{\sigma(k)}(\omega)| \quad \in [0, \infty]$$

Entonces, por el Teorema de la convergencia monótona:

$$\int_\Omega |g_n|^p d\mu \to \int_\Omega |g|^p d\mu \implies (\int_\Omega |g_n|^p d\mu)^{1/p} \to (\int_\Omega |g|^p d\mu)^{1/p}$$

$$\implies ||g_n||_p \to ||g||_p$$

Y por el teorema de la convergencia monótona:

$$||g||_p = \lim_{n\to\infty} ||g_n||_p \leq 1$$

Esto indica que:

$$\int_\Omega |g|^p d\mu \leq 1 \implies g \in \mathcal{L}^p(\Omega) \implies \mu(\{\omega \in \Omega : g(\omega) = \infty\}) = 0$$

.

Consideramos el conjunto:

$$E = \{\omega \in \Omega : g(\omega) < \infty\}$$

Podemos considerar ahora :

$$f_{\sigma(k)} = f_{\sigma(k)}\mathcal{X}_E \implies F_{\sigma(k)} = [f_{\sigma(k)}] = f_{\sigma(k)}\mathcal{X}_E$$

Nota. La diferencia entre $f_{\sigma(k)}$ y $f_{\sigma(k)}\mathcal{X}_E$ es que la que está multiplicada por la función característica nunca puede tomar valores en infinito.

Si $G = [g] = [g\mathcal{X}_E]$, podemos afirmar sin pérdida de generalidad que $g(\omega) < \infty \quad \forall \omega \in \Omega$ donde g es un representante de la clase $[g]$.

Sabiendo que:

$$\sum_{k\geq 1} |f_{\sigma(k+1)}(\omega) - f_{\sigma(k)}(\omega)| \text{ es convergente}$$

pues lo habíamos dicho antes, entonces:

$$\sum_{k\geq 1} f_{\sigma(k+1)}(\omega) - f_{\sigma(k)}(\omega) \text{ es absolutamente convergente}$$

lo que implica que es convergente y por tanto:

$$\exists h(\omega) := \sum_{k=1}^{\infty} (f_{\sigma(k+1)}(\omega) - f_{\sigma(k)}(\omega))$$

medible por ser límite puntual de medibles y

$$h(\omega) = \lim_{k\to\infty} [f_{\sigma(k+1)}(\omega) - f_{\sigma(1)}(\omega)]$$

Y por tanto:

$$f_{\sigma(k+1)}(\omega) \to h(\omega) + f_{\sigma(1)}(\omega)$$

Falta añadir por qué $g(\omega) + f_{\sigma(1)} \in \mathcal{L}^p(\Omega)$

Y entonces, $\exists\{F_{\sigma(n)}\}$ convergente en $L^p(\Omega)$ y , como $\{F_n\}$ es de Cauchy, entonces $\{F_n\}$ es convergente en $L^p(\Omega)$. □

Corolario 3.2. $\{F_n\} \subset L^p(\Omega)$ *convergente en* $L^P(\Omega)$ *hacia* $F \in L^p(\Omega)$ *entonces:*

$$\exists\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \textit{ estrictamente creciente}: \{F_{\sigma(n)}(\omega)\} \to F(\omega) \;\; a.e.\ \omega \in \Omega$$

y

$$\exists\bar{g} \in \mathcal{L}^p(\Omega): \quad |f_{\sigma(n)}(\omega)| \leq \bar{g}(\omega) \quad a.e.\omega \in \Omega$$

Corolario 3.3. *Si* $1 \leq p < \infty \Rightarrow < \{\chi_E :$ *E es medible y* $\mu E < \infty$ *es denso en* $L^p(\Omega)$.

Demostración. Dada $f \in L^p$ de la forma $f : \Omega \to \mathbb{K}$ $f = (Ref)^+ - [-(Ref)^-] + [(inff)^+ - [-(inf)^-]]$

Entonces $(Ref)^+ : \Omega \to [0,\infty]$ es medible positiva, $-(Ref)^- : \Omega \to [0,\infty]$ es medible positiva, $(Imf)^+ : \Omega \to [0,\infty]$ es medible positiva y $-(Imf)^- : \Omega \to [0,\infty]$ es medible positiva.

Basta ver que $\forall$ función $g : \Omega \to [0,\infty]$ es medible positiva de $L^p(\Omega)$ se verifica que $\forall\varepsilon > 0 \exists E_1, E_2, \ldots, E_n \in \mathcal{A}, \mu(E_i) < \infty \forall i = 1, \ldots, n, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (0,\infty)$ tal que $||g - \sum_{i=1}^n \alpha_i \chi_{E_i}|| < \varepsilon$.

En efecto g es medible positiva y por el Teorema de Lebesgue, $\exists s_k$ simples positivas de forma que $s_k(\omega)$ es monótona creciente y converge a $g(\omega)\forall\omega \in \Omega$. Entonces $\exists E_1^k, \ldots, E_{n_k}^k \in \mathcal{A}$ y $\exists\alpha_1^k, \ldots, \alpha_{n_k}^k \in [0,\infty)$ tal que $s_k = \sum_{i=1}^{n_k} \alpha_i^k \chi_{E_i}^k$.

Por el teorema de la convergencia dominada,

$|g(\omega) - s_k(\omega)|^p = (g(\omega) - s_k(\omega))^p \leq g(\omega)^p := h(\omega) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ ya que $g \in \mathcal{L}^p/\Omega$. Luego $\int_\Omega |g(\omega) - s_k(\omega)|^p d\mu \to 0$

La medida de los E_i es finita porque $\sum_{i=1}^{n_k} (\alpha_i^k)^p \mu(E_i) = \int_\Omega s_k^p d\mu \leq \int_\Omega g^p d\mu < \infty \Rightarrow \mu(E_i) < \infty \forall i, \ldots, n$.

Por tanto, $||g - s_k|| \to 0 \Rightarrow$ dado $\varepsilon > 0 \exists k_0 : k \geq k_0 \Rightarrow ||g - s_k||_p < \varepsilon$. Eligiendo $k = k_0$ tenemos que $||g - \sum_{i=1}^{n_{k_0}} \alpha_i^{k_0} \chi_{E_i} k_0||_p < \varepsilon$ □

Dadas $f_n, f : \Omega \to \mathbb{K}$ medibles. Si $f_n(\omega) \to f(\omega)$ converge uniformemente dado $\omega \in \Omega$ entonces sabemos que también converge puntualmente y converge a $f(\omega)$ casi por doquier.

Por el teorema de la convergencia monótona, dada $f_n(\omega)$ monótona que converge a $f(\omega)$ casi por doquier para $\omega \in \Omega$ entonces $\int_\Omega f_n^p d\mu \to \int_\Omega f^p d\mu$ y $||f - f_n||_p = \left(\int_\Omega |f(\omega) - f_n(\omega)|^p d\mu\right)^{1/p} \to 0$.

$f_n \to f$ en $\mathcal{L}^p(\Omega) \Leftrightarrow ||f_n - f||_p \to 0 \Leftrightarrow ||[f_n] - [f]||_p \to 0 \Leftrightarrow [f_n] \to [f]]$ $L^p(\Omega)$ es lo que llamamos *convergencia p-media.*

El corolario 3.2 es una "vuelta"de la última implicación de convergencia. Pero solo lo podemos afinar por una sucesión parcial.

Teorema 3.6 (Egorov). *Una sucesión f_n y una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ medibles $\mu(\Omega) < \infty$ $f_n(\omega) \to f(\omega)$ a.e. $\omega \in \Omega$ $\forall \varepsilon > 0$. Entonces $\exists F \in \Omega$ medible tal que $f_n(\omega) \to f(\omega)$ convergente uniformemente dado $\omega \in F$ y $\mu(\Omega\ F) < \varepsilon$*

Demostración. $E_{n,k} = \bigcup_{m>n} \omega \in \Omega / |f_m(\omega) - f(\omega)| \geq 1/k$ medibles porque f_n, f son medibles.

$E_{n+1,k} = \bigcup_{m \geq n+1} \omega \in \Omega : |f_m(\omega) - f(\omega)| \geq 1/k$

Si k es fijo y $\omega \in \Omega$ tal que $f_n(\omega) \to f(\omega) \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \omega \notin E_{n,k} \Rightarrow \omega \notin \bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_{n,k}$.

Esto significa que $\bigcap_{n\in\mathbb{K}} E_{n,k} \subset \omega \in \Omega : f_n(\omega)$no converge a $f(\omega)$ que es de medida cero.

Ya que Dados $\Omega \supset E_{1,k} \supset E_{2,k} \supset \ldots \supset E_{n,k} \supset E_{n+1,k} \supset \ldots$ entonces si $\mu(\Omega) < \infty \Rightarrow$ $\lim_{n\to\infty} \mu(E_{n,k}) = \mu(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} E_{n,k})$. entonces $\exists n_k : \mu(E_{n_k,k}) < \varepsilon/2^k$.

Llamando $E := \bigcup_{k=1}^\infty E_{n_n,k} \mu(E) = \mu(\bigcup_{k=1}^\infty E_{n_k,k}) \leq \sum_{k=1}^\infty \mu(E_{n_k,k}) < \sum_{k=1}^\infty \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon$

Llamamos ahora $F := \Omega\ E$ medible $E = \Omega\ F$. ¿$f_n(\omega) \to f(\omega)$ c.u. en F?

Dado $\omega \in F = \Omega\ E \Rightarrow \omega \notin \bigcup_{k=1}^\infty E_{n_k,k} \Rightarrow \omega \notin E_{n_k,k} = \bigcup_{m\geq n_k} \omega \in \Omega : |f_m(\omega) - f(\omega)| \geq \frac{1}{k}$

Entonces $\omega \notin E_{n,k} = \bigcup_{m\geq n} \omega \in \Omega : |f_m(\omega) - f(\omega) \geq \frac{1}{k} \forall n \geq n_k$, luego $|f_n(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{k} \forall n \geq n_k$.

Dado $k \in \mathbb{N} \exists n_k$ independiente de $\omega \in F$ tal que $|f_n(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{k} \forall n \geq n_k$

Por tanto, queda probado que $f_n(\omega) \to f(\omega)$ c.u. $\omega \in F$.

□

Ejemplo 3.1: Dado $\Omega = \mathbb{R}$ tal que $\mu(\Omega) = \infty$. Tomando $A_n = [n, \infty)$ tal que $A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_n \supset A_{n+1} \supset \ldots$. Si $\mu(A_n) = \infty$, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset$ y $\mu(\emptyset) = 0$. $\infty = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) \neq \mu(\bigcap_{n=1}^\infty A_n) = 0$.

Teorema 3.7 (Vitali). *Sea* $\{f_n\} \subset L^p(\Omega), f \in L^p(\Omega)$ *y que* $\{f_n(\omega)\} \to f(\omega)$ *a.e.* $\omega \in \Omega$ $\{f_n\} \to f$ *en* $L^p(\Omega) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ *independiente de* n*, tal que si* $E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \delta$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *entonces* $\int_E |f_n|^p d\mu < \varepsilon$*.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos que $\{f_n\} \to f$ en $L^p(\Omega)$ i.e. $\lim_{h\to\infty}(\infty_\Omega|f_n - f|^p d\mu) = 0$.

$f \in L^(\Omega) \Leftrightarrow |f|^p \in L^1(\Omega)$. Ahora, por la propiedad absoluta de la integral, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tal que si $E \in \mathcal{A}$ y $\mu(E) < \delta$ entonces $\displaystyle\int_E |f|^p d\mu < \frac{\varepsilon}{2^p}$.

Como $\{f_n\} \to f$ con $\frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $||f_n - f||_{\mathcal{L}^p(\Omega)} < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2}$

$$\left(\int_E |f_n|^p d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = ||f_n||_{L^p(E)} \leq ||f_n - f||_{L(E)} + ||f||_{L^p(E)} \leq ||f_n - f||_{L^p(\Omega)} + ||f||_{L^p(E)} < \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} + \frac{\varepsilon^{\frac{1}{p}}}{2} = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$$

Hasta ahora hemos probado que $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \delta$ y $n_0 \in \mathbb{N} \Rightarrow \left(\int_E |f_n|^p d\mu\right) < \varepsilon$.

Para cada $f_i, i = 1, \ldots, n_{0-1}$ uso que $|f_i|^p \in L^1(\Omega)$ y por la continuidad absoluta de la integral, $\exists \delta_i > 0$ tal que si $E \in A$ y $\mu(E) < \delta$ entonces $\int_E |f_i|^p d\mu < \varepsilon \forall i = 1, \ldots, n_{0-1}$.

Si elijo $\delta_0 = min\{\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{n_0-1}\} > 0$ entonces si $E \in \mathcal{A}$, $\mu(E) < \delta_0$ y $n \in \mathbb{N}$ entonces $\int_E |f_n|^p d\mu < \varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$

□

Referencias

[1] Jerrold E. Marsden, Michael J. Hoffman. *Análisis Clásico Elemental*. Addison Wesley, 2ª edición, 1998.

[2] Walter Rudin. *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, 3ª edición, 1987.