

UNIVERSIDAD DE GRANADA

---

# Geometría III

---

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

<b>1. El espacio afín</b>	<b>3</b>
1.1. El plano afín . . . . .	3
1.2. Rectas afines . . . . .	4
1.2.1. Posición relativa entre rectas . . . . .	5
1.3. Triángulos . . . . .	6

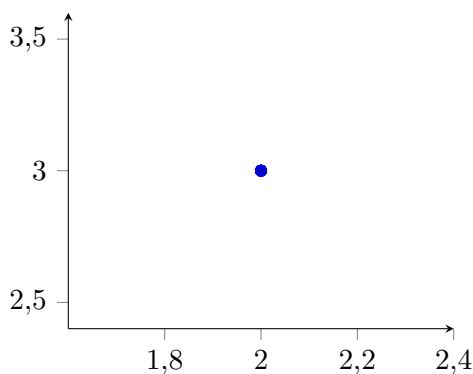
## Introducción

En esta asignatura trataremos de estudiar la geometría afín. Nos centraremos en el plano, el espacio y las figuras que se forman en él.

## 1. El espacio afín

### 1.1. El plano afín

Este plano, durante todo el contenido de los apuntes, será el plano  $\mathbb{R}^2$ . Sabemos que podemos representar un simple punto o un vector dentro de este plano (en este caso, es el plano vectorial). Daremos ahora por sabido todas las propiedades de los vectores.



Lo que haremos es transformar las propiedades de vectores en propiedades de puntos, veamos cómo unir estos dos conceptos.

Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos del plano. Entonces, podemos transformarlos en un vector  $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$ . De la misma forma, analíticamente podemos ver que si tenemos un punto  $P$  y le añadimos un vector  $\vec{u}$ , obtenemos otro punto  $Q$ . Damos así por definidas la suma de puntos, vectores y puntos y vectores.

**Definición (Combinación lineal de vectores).** Si  $u_1, u_2, u_3$  son vectores y  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  son escalares, entonces:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$$

es una combinación lineal de vectores.

**Definición (Razón de vectores proporcionales).** Si  $u$  y  $v$  son dos vectores proporcionales es decir  $u = \lambda v$ , entonces se llama a  $\lambda$  la razón de esos vectores. Si los vectores no son proporcionales no podemos tratar este concepto.

Podemos también hacer combinaciones de puntos de la siguiente forma:

**Definición (Combinaciones baricéntricas de puntos).** Si  $P_1, \dots, P_n$  son puntos y  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$  pesos de los puntos, que cumplen que  $\sum \alpha_i = 1$ , entonces una combinación de puntos de la forma:

$$P = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$$

Es un punto y se le llama combinación baricéntrica de puntos.

*Demostración.* Lo que haremos, es transformar los puntos en vectores y así la demostración será trivial.

Restamos primero  $P - P_1 = \sum \alpha_i (P_i - P_1)$ , así tenemos el vector determinado por  $P$  y  $P_1$  y una identidad de vectores, de la forma:

$$P - P_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i \overrightarrow{P_1 P_i}$$

Y llegamos así a que

$$P = P_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i \overrightarrow{P_1 P_i}$$

□

**Definición (Combinación convexa).** Si los pesos  $\alpha_i$  asignados a los puntos son todos positivos, llamaremos a su combinación una combinación convexa.

**Definición (Centro de gravedad de unos puntos).** Si  $P_1, \dots, P_n$  son puntos y  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son sus pesos, entonces llamamos a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i P_i$$

el centro de gravedad de los puntos.

**Definición (Punto medio).** Sean  $P$  y  $Q$  dos puntos en el espacio afín. Entonces  $m$  es el punto medio entre  $P$  y  $Q$  si está definido como:

$$m = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}(P + Q)$$

Otra forma de hablar de él es: si  $u = PQ$ , entonces:

$$m = \frac{1}{2}u + P$$

## 1.2. Rectas afines

A partir de ahora, cada vez que mencionemos una recta, estaremos hablando de una recta afín.

**Definición (Recta vectorial).** Una recta vectorial es un subespacio vectorial de dimensión 1. Estas están generadas por un vector. De hecho, se notan como  $L(v)$  con  $v$  un vector.

**Proposición.** Si  $P$  es un punto y  $v$  un vector, entonces la recta afín  $r$  viene dada por

$$r = P + L(v) = \{P + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Además, notaremos a  $L(v) = \vec{r}$ .

**Definición (Variedad de dirección).** Si  $v$  es un vector director, llamaremos variedad de dirección a  $L(v) = \vec{r}$ .

**Propiedades:**

- Si  $Q$  es un punto y  $Q \in r \implies r = Q + L(v)$
- Si  $P, Q$  son dos puntos, entonces por ellos pasa una recta y esta es única. Esta recta se nota :  $r = P + L(\overrightarrow{PQ})$

*Demostración.* Si la recta  $r$  pasa por  $P$  y  $Q$ , sea  $s$  otra recta que pasa por ellos, entonces:

$$s = P + L(\overrightarrow{PQ}) = r$$

□

### 1.2.1. Posición relativa entre rectas

Según se encuentren en el plano afín, dos rectas  $r$  y  $s$  pueden ser:

- Paralelas, notado  $r \parallel s \equiv \vec{r} = \vec{s}$
- No paralelas, notado  $r \nparallel s \equiv$  sus vectores directores son linealmente independientes  $\equiv u$  y  $v$  es base.

**Teorema.** Si  $r, s$  son dos rectas del plano afín, entonces:

(i)  $r \nparallel s \implies r \cap s = \text{un punto}$

(ii)  $r \parallel s \implies r = s \text{ ó } r \cap s = \emptyset$

*Demostración.* (i) Si  $u, v$  son los vectores directores de  $r$  y  $s$ , entonces con los pares  $\{u, v\}$  tenemos que  $P + \lambda u = Q + \mu v$  con  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  y si  $r = P + L(u)$  y  $s = Q + L(v)$ , y  $\overrightarrow{PQ} = \lambda u - \mu v$  y, por ello, existen únicos  $\lambda, \mu$ .

(ii) Sean  $u, v$  son los vectores directores de  $r$  y  $s$ . Supongamos que tienen al menos un punto  $A$  en común. Entonces como se podrían escribir estas rectas como  $r = A + L(u)$  y  $s = A + L(v)$  y además como  $r \parallel s \implies L(r) = L(s)$  descubrimos que  $r = A + L(u) = A + L(v) = s$ .

□

### 1.3. Triángulos

Son polígonos que vienen dados por tres puntos no alineados  $A, B, C$ , que son sus vértices y las tres rectas que los unen.

**Definición.** Dos o más puntos  $A_1, A_2, \dots, A_n$  están alineados  $\iff$  existe una recta  $r \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $A_i \in r \ \forall i \in 1, \dots, n$

**Proposición.**  $A, B, C$  son puntos no alineados sii  $\vec{AB}, \vec{AC}$  son linealmente independientes.

*Demostración.*  $\boxed{\Rightarrow}$  Si  $\nexists r \subset \mathbb{R}^2$  tal que  $A_i \in r \ \forall i \in 1, \dots, n \Rightarrow \nexists \vec{v}$  tal que  $A, B, C \in r = A + L(\vec{v}) \Rightarrow \vec{AB} \neq \alpha * \vec{AC}, \alpha \in \mathbb{R}$  porque si no se daría el caso anterior.  $\boxed{\Leftarrow}$   $\square$

**Teorema.** Si consideramos los triángulos  $ABC$  y  $A_1B_1C_1$  con dos de los lados homólogos paralelos y las razones de los vectores de esos lados son iguales. Si las rectas paralelas son:  $A \vee C \parallel A_1C_1$  y  $A \vee B \parallel A_1B_1$ , por lo que las razones son:

$$\frac{A_1\vec{C}_1}{\vec{AC}} = \frac{A_1\vec{B}_1}{\vec{AB}}$$

Entonces, la pareja restante  $C \vee B \parallel C_1B_1$  y  $\frac{B_1\vec{C}_1}{\vec{BC}} = \frac{A_1\vec{B}_1}{\vec{AB}} = \frac{A_1\vec{C}_1}{\vec{AC}}$

*Demostración.* Si los lados son paralelos, entonces los vectores directores son proporcionales.

Si  $w$  (el lado no mencionado del primer triángulo) es  $w = -u + v$  y  $w_1$  (el lado no mencionado del segundo triángulo) es  $w_1 = -\lambda u + \lambda v = \lambda(-u + v) = \lambda w$  por lo que tenemos lo que queríamos.  $\square$

**Definición (Triángulo medio).** Si  $ABC$  es un triángulo y  $A', B', C'$  los puntos medios de sus lados, entonces:

(i)  $A'B'C'$  es un triángulo

(ii) Los lados homólogos son paralelos y que el factor de proporcionalidad es:  $-\frac{1}{2}$

*Demostración.* (i) Se hace viendo que si  $ABC$  no están alineados, estos 3 tampoco

(ii) Tenemos que:  $A' = B/2 + C/2$ ,  $B' = A/2 + C/2$ ,  $C' = A/2 + B/2$ . Tenemos por tanto que:  $A'\vec{B}' = B' - A' = \frac{1}{2}(A - B) = -\frac{1}{2}\vec{AB}$  y por tanto los lados homólogos son paralelos.

Además, el factor es el número obtenido en la conversión, es decir  $-\frac{1}{2}$ .

$\square$

**Definición (Medianas de un triángulo).** Las medianas de un triángulo  $ABC$  son las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto

**Definición (Baricentro de un triángulo).** El baricentro  $G$  de un triángulo que viene dado por:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

**Teorema.** Si  $ABC$  es un triángulo en el plano afín, entonces las medianas son concurrentes. Su punto de corte es el Baricentro. El baricentro triseca el segmento que une un vértice con el punto medio homólogo.

**Teorema.** Sea  $A'$  el punto medio del lado opuesto a  $A$  en un triángulo  $ABC$ . Sea  $AvA'$  una de las medianas. Esta es:

$$\{\lambda A + \mu A' : \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}$$

Entonces, sabemos que  $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$  y veamos que este está en la mediana: Tenemos que ver la ecuación:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \lambda A + \mu A' \implies \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = \dots = G$$