Relación 2 k[x]

2. Calcular el máximo común divisor y el mínimo común múltiplo, en el anillo Z_3[x], de los polinomios $x^4 + x^3 - x - 1$ y $x^5 + x^4 - x - 1$. Encontrar todos los polinomios f (x) y g(x) en Z_3[x], con grado de g(x) igual a 7, tales que $(x^4 + x^3 - x - 1)$ f(x)+$(x^5 + x^4 - x - 1)$ g(x) = $x^4 + x^2 + 1$

Máximo común divisor

$x^5 + x^4 - x - 1$	|	1	0
$x^4 + x^3 - x - 1$	|	0	1
$x^2 - 1$	|	1	-x
0			

Las divisiones realizadas han sido :

- $(x^5 + x^4 - x - 1)/(x^4 + x^3 - x - 1)$

Cociente: x
Resto: $x^2 - 1$

- $(x^4 + x^3 - x - 1)/(x^2 - 1)$

Cociente: $x^2 + x + 1$
Resto: 0

Así, el máximo común divisor es $x^2 - 1$

Mínimo común múltiplo

Usamos que [a,b]=$\dfrac{ab}{(a,b)}$

$(x^5 + x^4 - x - 1)(x^4 + x^3 - x - 1) = x^9 + 2x^8 + x^7 - x^6 - x^3 + x^2 + 2x + 1$

$(x^9 + 2x^8 + x^7 - x^6 - x^3 + x^2 + 2x + 1)/(x^2 - 1) = x^7 + 2x^6 + x^4 + x^2 - x + 2$

Por lo tanto, el mínimo común múltiplo es $x^7 + 2x^6 + x^4 + x^2 - x + 2$

Ecuación diofántica

Dividiendo por el máximo común divisor la ecuación para obtener al reducida (vemos que tiene solución) queda:

$(x^2 + x + 1)$ f(x)+$(x^3 + x^2 + x + 1)$ g(x) = $x^2 + 2$

Aplicando la igualdad de Bezout (a partir de los cálculos del máximo común divisor):

$(x^2 + x + 1)(-x)+(x^3 + x^2 + x + 1)\ (1) = 1$

$(x^2 + x + 1)(-x^3 - 2x)+(x^3 + x^2 + x + 1)\ (x^2 + 2) = x^2 + 2$

Obtenemos como solución particular:

f_0(x) = $-x^3 - 2x$

g_0(x) = $x^2 + 2$

La solución general quedaría:

$f(\text{x}) = -x^3 - 2x + k(x)(x^3 + x^2 + x + 1)$

$g(\text{x}) = x^2 + 2 - k(x)(x^2 + x + 1)$

Para cumplir la condición g(x) igual a 7 observamos que el grado de k(x) tiene que ser igual a 5. De este modo, todas soluciones pedidas son las que se obtienen a partir de la general para todos los k(x) de Z_3[x] tal que gr(k(x)) = 5.