

Ejercicio 4: Una banda de 13 piratas se reparten N monedas de oro, pero le sobran 8. Dos mueren, las vuelven a repartir y sobran 3. Luego se ahogan 3 y sobran 5. ¿Cuál es la mínima cantidad posible N de monedas?

$$\begin{cases} N \equiv 8 \pmod{13} \\ N \equiv 3 \pmod{11} \\ N \equiv 5 \pmod{8} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por la primera y la tercera ecuación:

$$N \equiv 8 \pmod{13} \rightarrow N = 8 + 13 \cdot x$$

Sustituimos en la tercera ecuación

$$8 + 13 \cdot x \equiv 5 \pmod{8} \rightarrow 5 \cdot x \equiv 5 \pmod{8} \Rightarrow x \equiv 1 \pmod{8} \text{ (Podemos simplificar el 5 por qué } (5,8) = 1)$$

$$x_0 = 1 \Rightarrow N_0 = 8 + 13 \cdot 1 = 21 \text{ (Solución óptima)}$$

$$N \equiv 21 \pmod{8 \cdot 13} = 21 \pmod{104}$$

Ahora, resolvemos el sistema con la ecuación anterior y la segunda del sistema inicial

$$N \equiv 21 \pmod{104} \rightarrow N = 21 + 104 \cdot x$$

$$21 + 104 \cdot x \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow 10 + 5 \cdot x \equiv 3 \pmod{11} \Rightarrow 5 \cdot x \equiv -7 \pmod{11} \Rightarrow 5 \cdot x \equiv 4 \pmod{11}$$

Figure 1: mcd

11	1	0
5	0	1
1	1	-2
0		

$$1 = 1 \cdot 11 + 5 \cdot (-2) \rightarrow 5 \cdot (-2) \equiv 1 \pmod{11}$$

Multiplicamos por 4 y así obtendremos una solución particular

$$5 \cdot (-8) \equiv 4 \pmod{11} \Rightarrow x_0 = -8$$

Sustituimos y nos queda $N_0 = -811$

$$N \equiv -811 \pmod{1144} = 333 \pmod{1144} \text{ (donde } 1144 = [11, 104])$$

$$N = 333 + 1144 \cdot k$$

Solución: La cantidad mínima de monedas sería cuando k vale 0. Entonces el número de monedas es 333

Ejercicio 6: Antonio, Pepe y Juan son tres campesinos que principalmente se dedican al cultivo de la aceituna. Este año la producción de los olivos de Antonio fue tres veces la de los de Juan y la de Pepe cinco veces la de los de Juan. Los molinos a los que estos campesinos llevan la aceituna, usan recipientes de 25 litros el de Juan, 7 litros el de Antonio y 16 litros el de Pepe. Al envasar el aceite producido por los olivos de Juan sobraron 21 litros, al envasar el producido por Antonio sobraron 3 litros y al envasar el producido por Pepe sobraron 11 litros. Sabiendo que la producción de Juan está entre 1000 y 2000 litros ¿cual fue la producción de cada uno de ellos?.

A → producción de Antonio

P → producción de Pepe

J → producción de Juan

$$J \equiv 21 \pmod{25}$$

$$A \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow 3J \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow J \equiv 1 \pmod{7} \text{ (Aquí podemos simplificar el 3 debido a que es primo con 7)}$$

$$P \equiv 11 \pmod{16} \Rightarrow 5J \equiv 11 \pmod{16}$$

Figure 2: mcd

16	1	0
5	0	1
1	1	-3
0		

$$1 = 1 \cdot 16 + 5 \cdot (-3) \Rightarrow 5 \cdot (-3) = 1 \pmod{16} \rightarrow 5 \cdot ((-3) \cdot 11) \equiv 1 \pmod{16}$$

$$J \equiv 15 \pmod{10}$$

Así nos queda el sistema de ecuaciones de congruencia

$$\begin{cases} J \equiv 21 \pmod{25} \\ J \equiv 1 \pmod{7} \\ J \equiv 15 \pmod{16} \end{cases}$$

Resolvemos el sistema formado por las dos primeras ecuaciones

$$J \equiv 21 \pmod{25} \Rightarrow J = 21 + 25y$$

Sustituimos en la segunda ecuación

$$21 + 25y \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 4y \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow y \equiv 2 \pmod{7} \Rightarrow y_0 = 2$$

$$J_0 = 21 + 25 \cdot 2 = 71 \text{ (solución óptima)}$$

$$J \equiv 71 \pmod{175} \text{ (donde 175 es el mcm entre 7 y 25)}$$

Resolvemos el sistema formado por la tercera ecuación y el resultado anterior

$$J = 175y + 71$$

Sustituimos en la segunda ecuación

$$175y + 71 \equiv 15 \pmod{16} \Rightarrow 175y \equiv 56 \pmod{16} \Rightarrow 15y \equiv 8 \pmod{16}$$

Figure 3: mcd

16	1	0
15	0	1
1	1	-1
0		

$$1 = 16 + (-1) \cdot 15$$

$$1 = 16 + (-1) \cdot 15 \Rightarrow 15 \cdot (-1) = 1 \pmod{16} \rightarrow (-1) \cdot (-1) \equiv 1 \pmod{16} \Rightarrow 1 \equiv 1 \pmod{16}$$

Multiplicamos por 8, el resto, para encontrar una solución particular:

$$8 \equiv 8 \pmod{16} \Rightarrow y_0 = 8$$

$$J_0 = 71 + 8 \cdot 175 = 1471 \text{ (solución óptima)}$$

$$J = 1471 \pmod{16 \cdot 175} = 1471 \pmod{2800}$$

Los litros de la producción anuales tienen que estar entre 1000 y 2000

$$1000 < 1471 + 2800 \cdot k < 2000 \Rightarrow k = 0$$

Solución: La producción anual de los campesinos fue:

Juan = 1471 litros

Antonio = $1471 \cdot 3 = 4413$

Pepe = $1471 \cdot 5 = 7355$