

# **Análisis Matemático I**

Teoremas, proposiciones, definiciones y propiedades

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

## 1. Topología de un espacio métrico.

### 1.1. Concepto de espacio métrico. El espacio métrico $\mathbb{R}^N$ .

**Definición (Espacio métrico).** Consideremos un conjunto  $X$  y una aplicación  $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$  que cumple las siguientes propiedades:

- (i)  $d(x, y) \geq 0 \quad \forall x, y \in X$ .
- (ii)  $d(x, y) = 0 \iff x = y \quad \forall x, y \in X$ .
- (iii)  $d(x, y) = d(y, x) \quad \forall x, y \in X$ .
- (iv)  $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \quad \forall x, y, z \in X$ . (*desigualdad triangular*)

Entonces, se dice que el par  $(X, d)$  es un *espacio métrico*.

*Nota.* En adelante, entenderemos  $\mathbb{R}^N$  como el espacio métrico  $(\mathbb{R}^N, d)$ , siendo  $d$  la distancia usual (**distancia euclídea**) dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N (y_i - x_i)^2} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Existen otras distancias en  $\mathbb{R}^N$ . Las más destacadas son las siguientes:

- (i)  $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^N |x_i - y_i| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$ .
- (ii)  $d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : i = 1, \dots, N\} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$ .
- (iii)  $d_p(x, y) = \left( \sum_{i=1}^N |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$ .

**Definición.** Sean  $(X, d)$  y  $(X, d')$  dos espacios métricos sobre un mismo conjunto  $X$ . Se dice que las distancias  $d$  y  $d'$  son *equivalentes*  $\iff \exists k_1, k_2 > 0 : k_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq k_2 d(x, y) \quad \forall x, y \in X$ .

**Proposición.** En  $\mathbb{R}^N$ , todas las distancias mencionadas anteriormente son equivalentes entre sí. En particular, la distancia euclídea es equivalente a todas ellas.

### 1.2. Conceptos topológicos.

**Definición (Bola abierta).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y fijemos un  $x \in X$  y un  $\varepsilon > 0$ . Se llama *bola abierta de centro  $x$  y radio  $\varepsilon$*  al conjunto  $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ .

**Definición (Bola cerrada).** De forma análoga, se define la *bola cerrada de centro  $x$  y radio  $\varepsilon$*  como el conjunto  $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$ .

**Definición (Conjunto abierto).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y sea  $A \subseteq X$ . Decimos que  $A$  es *abierto*  $\iff \forall a \in A \exists \varepsilon > 0 : B(a, \varepsilon) \subseteq A$ .

*Nota.* Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces,  $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0$  se tiene que  $B(x, \varepsilon)$  es un conjunto abierto.

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) Si  $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  es una familia de subconjuntos abiertos de  $X$ , entonces  $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$  es abierto.
- (ii) Si  $\{A_1, \dots, A_n\}$  es una familia finita de abiertos de  $X$ , entonces  $\bigcap_{i=1}^n A_i$  es abierto.
- (iii)  $X, \emptyset$  son abiertos.

**Definición (Punto interior).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y consideremos  $A \subseteq X$ ,  $a \in A$ . Se dice que  $a$  es un punto interior de  $A$  si, y solo si,  $\exists \varepsilon_0 > 0 : B(a, \varepsilon_0) \subseteq A$ . Definimos  $\text{int}(A) = \mathring{A} = \{a \in A \mid a \text{ es punto interior de } A\}$ .

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i)  $\mathring{A} \subseteq A$ .
- (ii)  $\mathring{A}$  es abierto.
- (iii) Si  $B \subseteq A$  es un subconjunto abierto de  $A$ , entonces  $B \subseteq \mathring{A}$ . Es decir,  $\mathring{A}$  es el abierto más grande contenido en  $A$ .
- (iv)  $\mathring{A} = \bigcup \{B \subseteq A \mid B \text{ es abierto}\}$ .
- (v)  $A \text{ es abierto} \iff \mathring{A} = A$ .
- (vi)  $\text{int}(\text{int}(A)) = \text{int}(A)$ .
- (vii) Si  $A \subseteq B$ , entonces  $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$ .

**Definición (Conjunto cerrado).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $F \subseteq X$ . Se dice que el conjunto  $F$  es cerrado  $\iff X - F$  es abierto.

*Nota.* Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces,  $\forall x \in X \forall \varepsilon > 0$  se tiene que  $\bar{B}(x, \varepsilon)$  es un conjunto cerrado.

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i) Si  $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$  es una familia de cerrados de  $X$ , entonces  $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$  es cerrado.
- (ii) Si  $\{F_1, \dots, F_n\}$  es una familia finita de cerrados de  $X$ , entonces  $\bigcup_{i=1}^n F_i$  es cerrado.
- (iii)  $X, \emptyset$  son cerrados.

**Definición (Clausura).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Se llama clausura o cierre de  $A$  al conjunto  $\bar{A} = X - \text{int}(X - A)$ .

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces, se verifican las siguientes propiedades:

- (i)  $A \subseteq \bar{A}$ .
- (ii)  $\bar{A}$  es cerrado.

(iii) Si  $B \subseteq X$  es un subconjunto cerrado de  $X$  tal que  $A \subseteq B$ , entonces  $\bar{A} \subseteq B$ . Es decir,  $\bar{A}$  es el cerrado más pequeño que contiene a  $A$ .

(iv)  $\bar{A} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}$ .

(v)  $A$  es cerrado  $\iff \bar{A} = A$ .

(vi)  $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$ .

(vii) Si  $A \subseteq B$ , entonces  $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ .

**Definición (Frontera).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Llamamos *frontera de  $A$*  al conjunto  $\partial A = \bar{A} - \overset{\circ}{A}$ .

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces, se verifica lo siguiente:  
 $x \in \partial A \iff \forall \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$  y  $B(x, \varepsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset$ .

**Definición (Punto de acumulación).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Dado  $x \in X$ , decimos que  $x$  es *punto de acumulación de  $A$*   $\iff \forall \varepsilon > 0 \ B(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$ . Definimos  $A' = \{x \in X \mid x \text{ es punto de acumulación de } A\}$ .

**Proposición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:

(i)  $\overset{\circ}{A} = X - \overline{X - A}$

(ii)  $\bar{A} = A \cup \partial A$ .

(iii)  $\bar{A} = A \cup A'$

(iv)  $\partial A \subseteq A'$

(v)  $X = \text{int}(A) \cup \partial A \cup \text{int}(X - A)$ . Además, la unión es disjunta dos a dos.

## 2. Sucesiones en $\mathbb{R}^N$ .

**Definición (Sucesión en  $\mathbb{R}^N$ ).** Una sucesión en  $\mathbb{R}^N$  es una aplicación  $x : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^N$  que a cada  $n \in \mathbb{N}$  le hace corresponder un  $x(n) \in \mathbb{R}^N$ . Por simplicidad, al elemento imagen de  $n$  se le denomina  $x_n$ , y la aplicación  $x$  se denota  $\{x_n\}$ .

**Definición (Convergencia de sucesiones).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $A \subseteq X$  y  $x \in X$ . Decimos que una sucesión  $\{x_n\}$  de puntos de  $A$  converge a  $x$  si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \in \mathbb{N} : n \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

*Nota.* Este concepto no depende de la distancia equivalente elegida.

**Proposición.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $x \in \mathbb{R}^N$ , y  $\{x_n\}$  una sucesión de puntos de  $A$ . Adoptemos la notación  $x_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^N)$ , y  $x = (x^1, x^2, \dots, x^N)$ . Entonces, se verifica que:

$$\{x_n\} \rightarrow x \iff \{x_n^j\} \rightarrow x^j.$$

**Definición.** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $x \in X$ . Consideremos, para cada  $n \in \mathbb{N}$ , un punto  $a_n \in X$ . Entonces, decimos que  $d(a_n, x) \rightarrow 0 \iff \{a_n\} \rightarrow x$ .

**Definición (Conjunto acotado).** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ . Decimos que  $A$  está acotado si, y solo si,  $\exists R > 0 : A \subseteq B(0, R)$ .

**Definición (Sucesión acotada).** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de puntos de  $\mathbb{R}^N$ . Entonces, decimos que  $\{x_n\}$  está acotada si, y solo si,  $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  está acotado.

*Nota.* Si una sucesión  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$  es acotada, entonces  $\forall i = 1, \dots, N$  la sucesión  $\{x_n^i\}$  es acotada (en  $\mathbb{R}$ ).

*Nota.* Si un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  es acotado, entonces cualquier sucesión de puntos de  $A$  es acotada.

**Teorema (Bolzano-Weierstrass).** Sea  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$  acotada. Entonces, existe una subsucesión  $\{x_{\sigma_n}\}$  convergente.

**Definición (Sucesión de Cauchy).** Sea  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ . Decimos que  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy  $\iff \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_o \in \mathbb{N} : n, m \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$ .

**Teorema ( $\mathbb{R}^N$  es completo).** Sea  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ . Entonces:

$$\{x_n\} \text{ es de Cauchy} \iff \{x_n\} \text{ es convergente.}$$

**Proposición.** Sea  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$  con  $\{x_n\} \rightarrow x \in \mathbb{R}^N$ . Entonces, toda sucesión parcial de  $\{x_n\}$  es convergente a  $x$ .

### 3. Funciones continuas en $\mathbb{R}^N$ .

**Definición (Función continua).** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$  y  $a \in A$ . Decimos que  $f$  es continua en  $a$  si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x \in A, d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Además, se dice que  $f$  es continua si lo es en todos sus puntos.

**Proposición (Caracterización de continuidad).** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ , y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ . Entonces:

$$f \text{ es continua en } a \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \text{ con } \{x_n\} \rightarrow a \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow f(a).$$

**Definición (Continuidad uniforme).** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ ,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ . Se dice que  $f$  es uniformemente continua si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : x, y \in A, d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

**Definición (Conjunto compacto).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y sea  $\emptyset \neq A \subseteq X$ .

$$A \text{ es compacto} \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \quad \exists \{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x \in A.$$

**Proposición (Caracterización de cerrados).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces, son equivalentes:

(i)  $A$  es cerrado.

(ii)  $\forall \{x_n\} \subseteq A$  convergente a un  $x \in X$ , se verifica que  $x \in A$ .

**Proposición (Caracterización de compactos).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico, y  $A \subseteq X$ . Entonces:

$$A \text{ es compacto} \iff A \text{ es cerrado y acotado.}$$

**Proposición.** Sea  $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$  convergente a un  $x_0 \in \mathbb{R}^N$ . Entonces, el conjunto  $A = \{x_n : n = 0, 1, 2, \dots\}$  es compacto.

#### 3.1. Clasificación de conjuntos en $\mathbb{R}^N$

**Definición (Conjunto convexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice *convexo* si  $\forall x, y \in A$  se tiene que el segmento de extremos  $x$  e  $y$  está incluido en  $A$ . En otras palabras:

$$A \text{ convexo} \iff [x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\} \subseteq A.$$

**Definición (Poligonalmente convexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice *poligonalmente convexo* si  $\forall x, y \in A$  existe una poligonal que los une y no se sale de  $A$ . En otras palabras:  $A$  poligonalmente convexo  $\iff \exists \{x = a_0, a_1, \dots, a_k = y\} \subseteq A$  tal que:

$$\bigcup_{i=1}^k [a_{i-1}, a_i] \subseteq A.$$

**Definición (Conjunto arco-conexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice *arco-conexo* (conexo por arcos) si  $\forall x, y \in A$  existe un camino incluido en  $A$  que los une. En otras palabras,  $A$  es conexo por arcos  $\iff \exists \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a, b]) \subseteq A.$$

**Definición (Conjunto no conexo).** Decimos que un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  es *NO conexo* si existen  $U, V$  abiertos en  $\mathbb{R}^N$  tales que:

$$U \cap A \neq \emptyset; \quad V \cap A \neq \emptyset; \quad A \subseteq U \cup V; \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

*Nota.* La misma definición se aplica para un espacio topológico  $(X, \tau)$ .

**Definición (Conjunto conexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice *conexo* si no es no conexo. Equivalentemente,  $\forall U, V$  abiertos en  $\mathbb{R}^N$  tales que  $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset, A \subseteq U \cup V$ , se tiene que forzosamente  $A \cap U \cap V \neq \emptyset$ .

**Proposición.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^N$ . Entonces, se verifica lo siguiente:

- (i)  $A$  es abierto y conexo por arcos  $\Rightarrow A$  es poligonalmente conexo.
- (ii)  $A$  es conexo  $\Rightarrow A$  es arco-conexo.
- (iii)  $A$  es arco-conexo  $\Rightarrow A$  es conexo.

**Proposición.** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}$  un conjunto arco-conexo. Entonces,  $A$  es conexo.

### 3.2. Continuidad en espacios topológicos. Topología inducida.

**Definición (Continuidad en espacios topológicos).** Sean  $(X, \tau_x), (Y, \tau_y)$  dos espacios topológicos, y sea  $f : X \rightarrow Y$ . Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f^{-1}(B) \in \tau_x \quad \forall B \in \tau_y.$$

**Definición (Topología inducida).** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, y  $A \subseteq X$ . Entonces,  $\tau_A = \{B \cap A : B \in \tau\}$  es la *topología inducida en A*.

**Proposición (Caracterización de abiertos en topología inducida).** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, y  $A \subseteq X$ . Si  $(A, \tau_A)$  es el espacio topológico inducido en  $A$ , entonces:

$$B' \in \tau_A \iff \exists B \in \tau : B' = B \cap A.$$

**Proposición.** Sea  $(X, \tau)$  un espacio topológico, y  $A \subseteq X$ . Entonces,  $A$  es no conexo si, y solo si, existen  $U, V$  **abiertos en  $(A, \tau_A)$**  tales que:

$$U \neq \emptyset \neq V; \quad A \subseteq U \cup V; \quad U \cap V = \emptyset.$$

**Definición (Continuidad en topología inducida).** Sean  $(X, \tau_x), (Y, \tau_y)$  dos espacios topológicos,  $A \subseteq X$ , y  $f : A \rightarrow Y$ . Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f \text{ es continua en } (A, \tau_A).$$

### 3.3. Teoremas sobre funciones continuas en $\mathbb{R}^N$

**Teorema (Weierstrass).** Sea  $(X, d)$  un espacio métrico,  $\emptyset \neq A \subseteq X$  compacto, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua en  $A$ . Entonces,  $\exists x_1, x_2 \in A : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \quad \forall x \in A$ . En otras palabras, la función  $f$  alcanza su mínimo y su máximo.

**Teorema (Weierstrass generalizado).** Sean  $(X, d), (Y, d)$  espacios métricos,  $\emptyset \neq A \subseteq X$  compacto, y  $f : A \rightarrow Y$  continua. Entonces,  $f(A)$  es compacto.

**Teorema (Valor Intermedio).** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$  arco conexo, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$  continua. Entonces,  $f(A)$  es arco-conexo en  $\mathbb{R}^M$ .

**Teorema (Valor Intermedio revisitado).** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$  conexo, y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$  continua. Entonces,  $f(A)$  es conexo en  $\mathbb{R}^M$ .