Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

1. Convergencia uniforme y puntual. 2

1.1. El espacio de funciones continuas 4

Introducción.

1. Convergencia uniforme y puntual.

De igual manera que tratamos con sucesiones de puntos de $\mathbb{R}^N$, podemos hacerlo con sucesiones de funciones. Dado $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, podemos tomar para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : A \to \mathbb{R}^M$, y formar así una sucesión de funciones, que notaremos $\{f_n\}$. Normalmente estas funciones serán continuas. El conjunto de funciones de A en $\mathbb{R}^M$ lo denotaremos por $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$.

Definición (Convergencia punto a punto.). Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$ si $\forall x \in A$ $\{f_n(x)\} \to f(x)$. Esto es, si se verifica lo siguiente:

$$\forall x \in A \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

En ocasiones denotaremos la convergencia puntual como $\{f_n\} \xrightarrow{c.p} f$.

Definición (Convergencia uniforme.). Diremos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$ si se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 > 0 \; : n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \; \forall x \in A$$

En ocasiones denotaremos la convergencia uniforme como $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$.

Nota. Aunque ambas definiciones son muy parecidas, hay una diferencia clave. En la convergencia puntual, el valor de n_0 puede depender tanto de ε como de x. Sin embargo, en la convergencia uniforme, exigimos que n_0 sea válido para cualquier x.

Proposición. *Si* $\{f_n\} \to f$ *uniformemente* $\implies$ $\{f_n\} \to f$ *puntualmente.*

Nota. El recíproco no es cierto en general.

La necesidad del concepto de convergencia uniforme se aprecia bien en el siguiente teorema:

Teorema. *Sean* $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f_n \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\{f_n\} \to f \text{ uniformemente } \implies f \text{ es continua}$$

Demostración. Fijamos $a \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\{f_n\} \to f$ uniformemente,

$$\exists K > 0 \; n \geq K \implies |f_n(y) - f(y)| < \varepsilon \; \forall y \in A \implies \begin{cases} |f_n(a) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{3} \\ |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

Como además f_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists \delta > 0 \quad \left.\begin{aligned} |x-a| < \delta \\ x \in A \end{aligned}\right\} \implies |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces,

$$\exists \delta > 0 : \quad \left.\begin{aligned} |x-a| < \delta \\ x \in A \end{aligned}\right\} \implies |f(x)-f(a)| \leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(a)|+|f_n(a)-f(a)| < \varepsilon$$

$\square$

Algunos ejemplos de sucesiones de funciones:

Ejemplo (1):

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \dfrac{1}{n} \\ -nx+1 & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Ejemplo (2):

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n$$

Ejemplo (3):

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n}$$

Vamos a estudiar la convergencia puntual de la sucesión del ejemplo (1):

Primero, fijamos $x \in (0,1]$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \geq \frac{1}{n}$, luego $f_n(x) = 0$. Por otra parte, $f_n(0) = 1\ \forall n \in \mathbb{N}$. Concluimos que

$$\{f_n\} \to f = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observamos que la convergencia puntual no preserva la continuidad de las funciones. Esto implicaría que, con esta definición de convergencia, el espacio de funciones continuas en un conjunto no sería cerrado. Además, podemos comprobar que $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f, pues en caso de hacerlo f debería ser continua, por el teorema anterior.

Ahora estudiemos la convergencia uniforme del ejemplo (3):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > \frac{1}{\varepsilon} \quad n \geq K \implies \frac{|sen(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$$

Vemos que converge uniformemente a cero. Lo importante para esta demostración, y lo que lo será en la mayoría de los casos de convergencia uniforme, es que podemos encontrar un ε_n (en este caso $\frac{1}{n}$) tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$$

1.1. El espacio de funciones continuas

Ya sabemos que dado $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, el espacio $(\mathcal{C}(A,\mathbb{R}), ||\cdot||_\infty)$ es un espacio normado, donde la norma del máximo o *norma uniforme* se define así:

$$||f||_\infty := máx\{|f(x)| : x \in A\} = \underset{x\in A}{máx}\ |f(x)|$$

Proposición. *En el espacio $\mathcal{C}(A,\mathbb{R})$, la convergencia de sucesiones equivale a la convergencia uniforme, esto es:*

$$\{f_n\} \to f \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$$

Demostración.
$||f_n - f||_\infty \to 0 \iff máx\ |f_n(x) - f(x)| \to 0 \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow máx\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in A \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f.$ □

Teorema ($\mathcal{C}(A,\mathbb{R}^M)$ es completo). $f_n \xrightarrow{c.u.} f \iff ||f_n - f||_\infty \to 0 \iff f_n \xrightarrow{\mathcal{C}(A,\mathbb{R}^M)} f.$ *Ahora, si $\{f_n\}$ es de Cauchy en $\mathcal{C}(A,\mathbb{R}^M)$, sabemos que $\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \implies ||f_n - f_m||_\infty = sup_{x\in A}|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ es equivalente a decir que:*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon\ \forall x \in A$$

Teorema. *Sean $f, f_n \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ tales que $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$. Entonces,*

$$\left\{\int_a^b f_n\right\} \xrightarrow{c.u} \int_a^b f$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}\ \forall x \in [a,b]$. Entonces,

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

□

Teorema. *Supongamos que $f_n \in \mathcal{C}^1((a,b))$. Supongamos también que $f_n(x) \to f(x)\quad \forall x \in (a,b)$ Supongamos que: $f_n' \xrightarrow{c.u.} g$ en (a,b)*

Entonces, $f \in \mathcal{C}^1((a,b))$ y $f' = g$

Demostración. Elegimos primero un $x_0 \in (a, b)$ fijo. Entonces, $f_n(x_0) \to f(x_0)$ por hipótesis. Como f_n' es continua, entonces, por el teorema fundamental del cálculo:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt$$

Entonces, como $f_n' \xrightarrow{c.u.} g$ en el intervalo cerrado de extremos x_0 y x , por el Teorema 2 (el de las integrales), tenemos que:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt \to f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt =: G(x)$$

Ahora, G es de clase 1 por ser $g(t)$ continua. Además, tenemos que $G(x_0) = f(x_0)$. Por otro lado, $G' = g$.

Además, tenemos que $f_n(x) \to G$ y también tiende a f por hipótesis, por lo que tenemos necesariamente que: $\forall x \in (a, b) \;\; G(x) = f(x)$, o lo que es decir:

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt = g$$

$\square$