Universidad de Granada

Modelos Matemáticos I

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

Introducción.

En esta asignatura, estudiaremos una serie de modelos que se dan en la naturaleza y que dan respuesta a las posibles cuestiones que nos podemos hacer en torno al comportamiento de estos problemas. Por ejemplo, podremos estudiar cómo se desarrollará la población de una especie considerando unos recursos dados (finitos o infinitos), así como otros modelos que se ajustan a situaciones de la vida real.

1. Ecuaciones en diferencias de primer orden

1.1. Ecuaciones en diferencias de primer orden

Para motivar este tema, vamos a poner primero unos ejemplos de ecuaciones en diferencias de primer orden.

1. Progresión geométrica, una ecuación de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n$$

   Para dar una solución, deberíamos establecer el valor de x_n de forma explícita. En este caso, una solución sería:

$$x_n = \mathcal{C}\alpha^n$$

   Donde $\mathcal{C}$ es una constante. Así, $x_0 = \mathcal{C}$.

2. Progresión aritmética, es decir, una de la forma:

$$x_{n+1} = x_n + \beta$$

   donde una solución sería:

$$x_n = \mathcal{C} + n\beta$$

3. La sucesión de Fibonacci es otro ejemplo de una ecuación en diferencias.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

Definición (Ecuación en diferencias). Una ecuación en diferencias es una ecuación en la que intervienen un número fijo de términos consecutivos de una sucesión.

$$F(x_{n+k}, \dots, x_n, n) = 0$$

donde F es una función de varias variables, $\{x_n\}$ es una sucesión, las incógnitas y $k \geq 1$ es el orden de la ecuación.

Como ejemplo de cálculo de órdenes, podríamos que decir de la progresión aritmética y geométrica son de orden 1 y la sucesión de Fibonacci es de orden 2.

Definición (Resolución de una ecuación en diferencias). Resolver una ecuación en diferencias es hallar la forma explícita de todas las sucesiones que satisfacen la igualdad, la solución general. Una solución concreta de la ecuación se llama solución particular y normalmente se obtiene a partir de k condiciones iniciales en la solución general.

Nota. Una propiedad de las progresiones geométricas es que si la progresión converge, converge a 0. Si no converge, puede ser cíclica, divergente o alternada.

Definición (Ecuación en diferencias lineal). Una ecuación en diferencias lineal viene dado por una ecuación de la forma:

$$a_k(n)x_{n+k} + ... + a_0(n)x_n = b(n)$$

Si $a_k(n) \neq 0,\ n \geq 0$ se dice que es de orden k. Si $b(n) = 0$, se dice que la ecuación es homogénea.

1.2. Ecuación en diferencias de primer orden lineal con coeficientes constantes

Una ecuación en diferencias de primer orden lineal será de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

Estas ecuaciones serán de orden 1 con coeficientes constantes.

Proposición. *La solución de estas ecuaciones será:*

(i) *Si $\beta = 0$ es una progresión geométrica, así que $x_n = \mathcal{C}\alpha^n$*

(ii) *Si $\beta \neq 0$ y $\alpha = 1$ entonces es una progresión aritmética, así que $x_n = \mathcal{C} + \beta n$*

(iii) *Si $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ entonces la ecuación tiene una solución constante:*

$$x_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

Esta solución satisfacerá la ecuación si no dependiera de n.

Demostración. Probaremos la tercera, que es la que no es trivial.
Buscaremos entonces una solución constante x_*. Si es solución, debe verificar que:

$$x_* = \alpha x_* + \beta \implies x_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

□

EJEMPLO: Comprobar si en el caso (*iii*), una solución podría ser:

$$x_n = \alpha^n x_0 + \beta \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i$$

Proposición. *Si $\alpha \neq 1$, la sucesión $\{x_n\}$ es solución de la ecuación $\iff$ la sucesión $\{z_n\}$ definida por $z_n = x_n - x_*$ es solución de la ecuación:*

$$z_{n+1} = \alpha z_n \qquad (2)$$

Demostración. Si $\{\bar{x}_n\}_{n\geq 0}$ es solución de (1) $\implies \bar{x}_{n+1} = \alpha\bar{x}_n + \beta$

Además, $\{x_*\}$ es solución de (1) $\implies x_* = \alpha x_* + \beta$

Ahora, restamos ambas y nos queda:

$$\bar{x}_{n+1} - x_* = \alpha(\bar{x}_n - x_*).$$

Por lo que hemos obtenido una solución de la ecuación (2), pues si $\bar{z}_n = \bar{x}_n - x_* \implies \bar{z}_{n+1} = \alpha\bar{z}_n \implies \{\bar{z}_n\}_{n\geq 0} = \{\bar{x}_n - x_*\}_{n\geq 0}$ es solución de (2).

La implicación de izquierda a derecha se realiza deshaciendo la diferencia.

□

Ejemplo: Resuelva $x_{n+1} = -ix_n + 3$. Esto es una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea.

Solución. Primero, calculamos la solución constante: $x_n = x_*$ para $n \geq 0$. Esta es:

$$x_* = -ix_* + 3 \implies x_* = \frac{3}{1+i}$$

Calculamos ahora la ecuación homogénea asociada, esta es $z_{n+1} = -iz_n$ con $n \geq 0$. Así, $z_n = \mathcal{C}(-i)^n$.

Ahora, una solución de la ecuación inicial sería:

$$x_n = x_* + z_n = \frac{3}{1+i} + \mathcal{C}(-i)^n$$

□

Proposición. *Si $\alpha \neq 1$, la ecuación:*

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

entonces la ecuación tiene tantas soluciones como valores posibles tenga la condición inicial:

$$x_n = x_* + (x_0 - x_*)\alpha^n, \quad n = 0, 1, 2...$$

Demostración. Si $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ y $\alpha \neq 1$, las soluciones de son de la forma:

$$x_n = x_* + z_n$$

con z_n una solución homogénea asociada y x_* una solución constante.

$$z_{n+1} = \alpha z_n \implies z_n = \mathcal{C}\alpha^n \implies z_n = (x_o - x_*)\alpha^n \implies x_n = x_o + (x_0 - x_*)\alpha^n$$

Esto es,

$$x_n = \frac{\beta}{1-\alpha} + \left(x_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)$$

□

Ejemplo: $x_{n+1} = ix_n + 1 \quad n \geq 0$ con $x_0 = i$

Solución. Primero hallamos la solución constante:

$$x_* = \frac{1}{1-i} \Leftarrow x_* = ix_* + 1$$

Ahora, hallamos la solución homogénea asociada:

$$z_{n+1} = iz_n \text{ con } z_n = \mathcal{C}i^n$$

Seguidamente, hallamos la solución de la ecuación completa:

$$x_n = x_* + z_n = \frac{1}{1-i} + \mathcal{C}i^n$$

Por último, aplicamos la condición inicial $x_0 = i$ dada. Así:

$$x_0 = \frac{1}{1-i} + \mathcal{C}i \implies \mathcal{C} = i - \frac{1}{1-i} = \frac{i+1-1}{1-i} = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

De esta forma, la solución sería:

$$x_n = \frac{1}{1-i} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) i^n$$

Y esto se podría pasar a forma estándar de número complejo, quedando de la siguiente manera:

$$x_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) i^n$$

□

Ejemplo (2): $x_{n+1} = (3-2i)x_n - 1$ para $n \geq 0$.

Solución. Tenemos que:

$$x_n = \frac{-1}{1-(3-2i)} + \mathcal{C}(3-2i)^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i + \mathcal{C}(3-2i)^n$$

□

Proposición (Fórmula de Moivre). *Si α es un número complejo, entonces:*

$$\alpha^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Demostración. Vamos a hacer un razonamiento por inducción:

1. Si $n = 1$. Entonces, $\alpha = r(cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$, trivial.

2. Supuesto cierto para cierto n, lo demostraremos para $n+1$:

$$\alpha^{n+1} = \alpha\alpha^n = [r(cos(\theta) + i \operatorname{sen}(\theta))][r^n(cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta))] =$$

$$r^{n+1}[cos(\theta)cos(n\theta) + isen(\theta)cos(n\theta) + isen(n\theta)cos(\theta) - sen(\theta)sen(n\theta)] =$$

$$r^{n+1}[cos(\theta + n\theta) + isen(\theta + n\theta)] = r^{n+1}[cos((n+1)\theta) + isen((n+1)\theta)]$$

□

Nota. Esto es porque un número complejo es de la forma $\alpha = a + bi = r(cos\theta + isin\theta)$. Donde el módulo es $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y θ es el ángulo, tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $(cos\theta + isin\theta)$ tiene módulo 1.

1.2.1. Comportamiento asintótico de las soluciones

Tendríamos en este caso que estudiar cómo se comporta la sucesión $\{\alpha^n\}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Proposición.

(i) $|\alpha| < 1 \implies \{\alpha^n\} \to 0$

(ii) $|\alpha| > 1 \implies \{|\alpha|^n\} \to +\infty$

(iii) $|\alpha| = 1 \implies \alpha^n \in \mathbb{S}^1$

Ahora, si tuviéramos una ecuación de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

Ya sabemos que su solución sería:

$$x_* + z_n = x_* + \mathcal{C}\alpha^n$$

Por tanto tendríamos que estudiar cómo varía α^n.

Teorema (Comportamiento asintótico de las soluciones). *Las soluciones* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *de la ecuación:*

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

verifican:

- *Si* $|\alpha| < 1$, *se tiene que* $x_n \to x_*$
- *Si* $|\alpha| > 1$, *se tiene que* x_n *diverge.*
- *Si* $|\alpha| = 1$, *entonces* x_n *oscila alrededor de* x_*, *esto es,* x_n *está en la circunferencia de centro* x_* *y radio* $|x_0 - x_*|$.

Demostración. Si tenemos que:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

Ya sabemos que su solución sería:

$$x_* + z_n = x_* + \mathcal{C}\alpha^n$$

. Entonces:

(i) $|\alpha| < 1 \implies \{\alpha^n\} \to 0 \implies \{x_n\} \to x_*$

(ii) $|\alpha| > 1 \implies \{|\alpha|^n\} \to +\infty \implies \{|x_n|\}$ nos da el mismo comportamiento que $|\alpha|^n$

(iii) $|\alpha| = 1 \implies \alpha^n \in \mathbb{S}^1$ si tomamos módulos y despejamos, tenemos que:

$$|x_n - x_*| = |G|$$

Así que todas las soluciones se mantienen en la circunferencia de centro x_* y radio $|x_0 - x_*|$

□

1.2.2. Ajuste del precio de un producto: modelo de la telaraña

En este modelo, trabajaremos con dos funciones:

- Una función oferta, $O(p)$ que depende del precio p
- Una función demanda, $D(p)$, que también depende del precio p

Supondremos ahora que estas dos funciones son rectas y que $O(p)$ es creciente y $D(p)$ decreciente, para simplificar el sistema. Por ello, tendremos:

- $O(p) = a + bp$ con $b > 0$ la marginal de la oferta
- $D(p) = c - dp$ con $d > 0$ la marginal de la demanda

Sin embargo, estas funciones tienen que ajustarse haciendo una estimación con los datos anteriores. Buscamos un punto de equilibrio entre la oferta y la demanda, un punto de corte entre estas dos funciones establecidas. A este punto lo llamaremos p_*. Igualando las ecuaciones, tendríamos que:

$$a + bp_* = c - dp_* \implies (b+d)p_* = c - a \implies p_* = \frac{c-a}{b+d}$$

Ahora, para que este precio sea correcto, tenemos que tener que b y d sean mayores que cero para no dividir por cero, y que el precio sea positivo, así que supondremos que $c > a$.

Ahora, para poder trabajar con antelación, lo que intentamos hacer es que:

$$D(p_n) = O(p_{n-1}) \implies c - dp_n = a + bp_{n-1}$$

Lo cual es una ecuación en diferencias de primer orden, que se puede seguir despejando como:

$$p_{n+1} = -\frac{b}{d}p_n + \frac{c-a}{d}$$

Y ahora, resolvemos:

$$p_n = x_* + z_n = p_* + \mathcal{C}\left(-\frac{b}{d}\right)^n$$

porque

$$x_* = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{(c-a)/d}{1-(-b/d)} = \frac{c-a}{b+d} = p_*$$

El objetivo es conseguir que $p_n \to p_*$ y para ello tenemos que conseguir que, como $p_{n+1} = p_* + \mathcal{C}(\frac{-b}{d})^n$, entonces necesitamos que $\left|\frac{-b}{d}\right| < 1 \implies b < d$. Por ello, lo que tenemos en las rectas es que la pendiente (b) de la recta de la oferta sea menor que la pendiente de la demanda (d).

1.2.3. Modelo de Malthus. Modelo de Verhulst. Ecuación logística

Antes de llegar al modelo de Verhulst, estudiaremos un primer acercamiento que hubo a este modelo.

La ecuación de Malthus Vamos a estudiar ahora una ecuación que modeliza la evolución de la población de una determinada especie en un hábitat sin limitación de alimentos. Esta primera suposición ya no es real, pues siempre hay limitaciones.

Vamos a llamar:

- P_n es el número de individuos en el periodo de tiempo n. $P_n \geq 0$
- α_n es la tasa de fertilidad o natalidad por individuo. $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$

  De esta forma, $\alpha_n P_n$ será el número de nacimientos en el periodo n.
- α_m es la tasa de mortalidad. $0 < \alpha_m < 1$, pues esta es un tanto por ciento y tenemos que:

  Así, $\alpha_m P_n$ será el número de muertes en el periodo n.

Una vez presentadas las incógnitas, podemos afirmar que la población en el siguiente periodo será:

$$P_{n+1} = P_n + \alpha_n P_n - \alpha_m P_n \implies P_{n+1} = (1 + \alpha_m - \alpha_m)P_n$$

Esto es una ecuación en diferencias lineal de primer orden homogénea. En realidad, es una progresión geométrica y por tanto una solución es:

$$P_n = \mathcal{C}(1 + \alpha_n - \alpha_m)^n \quad n \geq 0$$

Pero esta constante es la población inicial, luego eso es equivalente a:

$$P_n = P_0(1 + \alpha_n - \alpha_m)^n \quad n \geq 0$$

Vamos a llamar entonces a $(1 + \alpha_n - \alpha_m) = R$ la razón de crecimiento.

- $(1+\alpha_n-\alpha_m) > 1 \implies \{P_n\} \to +\infty$. Ahora, esto ocurrirá si y sólamente si $\alpha_n > \alpha_m$
- $(1+\alpha_n-\alpha_m) < 1 \implies \{P_n\} \to 0$. Del mismo modo, esto sólo ocurre si $\alpha_n < \alpha_m$
- $(1+\alpha_n-\alpha_m) = 1 \implies \{P_n\} \to P_0$. Que ocurre si y solo si $\alpha_n = \alpha_m$.

Se cumple siempre que $R = \dfrac{P_{n+1}}{P_n}$.

Definición (Razón de crecimiento). Llamaremos razón de crecimiento a:

$$\alpha = \alpha_n - \alpha_m$$

Que representa la variación del tamaño de la población por individuo. Además, podemos ver despejando de la ecuación inicial que:

$$\alpha = \frac{P_{n+1}-P_n}{P_n}$$

El modelo de Verhulst Este modelo quiso dar un arreglo a la ecuación de Malthus. Ahora, suponemos que en el hábitat hay un número máximo de individuos al que llamaremos M.

Según Verhulst, la tasa de crecimiento es proporcional a $M - P_n$, esto es:

$$\alpha = \frac{P_{n+1}-P_n}{P_n} = K(M-P_N) \quad K > 0$$

De aquí, podemos ver fácilmente que si $P_n < M \implies P_{n+1} > P_n$, por lo que la población crece.

También, si $P_n > M \implies P_{n+1} < P_n$, por lo que la población decrece.

Por tanto, con el modelo de Verhulst desarrollando en la euación de Malthus la ecuación será:

$$P_{n+1} = [(1+K(M-P_n)]P_n \implies P_{n+1} = (1+KM)P_n - KP_n^2$$

Donde KP_n^2 lo llamaremos la **competencia entre individuos**.

Esto es una ecuación en diferencias **no lineal** de primer orden y no homogénea. Aún no hemos explicado cómo se resuelven este tipo de ecuaciones, abordaremos este tema más adelante.

Sin embargo, podemos hacer a la ecuación un cambio de variable haciendo que:

- $(1+KM) = \mu$
- $x_n = \dfrac{K}{1+Km}P_n$

Y nos queda que:

$$\frac{K}{1+Km}P_{n+1} = \frac{K}{1+Km}(1+KM)P_n(1-\frac{K}{1+Km}P_n)$$

Y con los términos anteriores esto nos queda como:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1-x_n)$$

Esta ecuación es conocida como la **Ecuación Logística**.

1.3. Sistemas dinámicos discretos

Definición. Un sistema dinámico discreto es la descripción formal de un fenómeno evolutivo en términos de una función cuya imagen está contenida en su dominio. Partiendo desde cualquier valor inicial admisible generaremos una sucesión de valores mediante la aplicación reiterada de la función dada. Lo notaremos SDD.

Definición. Supongamos que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo que contiene al menos dos puntos y $f : I \to I$ es una función continua. Entonces, al par $\{I, f\}$ se le llama un SDD de primer orden, autónomo y en forma normal. A f se le llama función de evolución.

Con estas definiciones, podemos ver que si $x_0 \in I$ es un valor inicial, podemos generar:

$$x_1 = f(x_0);\ x_2 = f(x_1) = f(f(x_0));\ x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0)));\cdots$$

Estos valores están bién definidos pues $f(I) \subset I$ y la sucesión así definida es solución de la ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n \geq 0$$

Ejemplo: Tomemos $f(x) = cos(x)$, que es continua. Ahora, tenemos que tomar $I \subset \mathbb{R}$ tal que $f(I) \subset I$. Podemos tomar el intervalo $I = [-1, 1]$ en radianes, por supuesto. Si tomamos $x_0 \in I$, podemos ver fácilmente que $x_{n+1} = f(x_n) \in I$, por lo que $\{[-1, 1], cos(x)\}$ es un SDD.

Proposición. *La ecuación logística es un SDD, pues* $f(x) = \mu x(1-x)$ *es continua y* $\exists I = [0, 1] : f(I) \subset I$

Ejemplo: Tenemos $f(x) = \frac{1}{2}x$, con $I = [0, 1]$, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n$. Esta función es continua (en particular es contractiva). $\{[0, 1], f\}$ es un SDD.

Ejemplo: $f(x) = log(x)$, $I = (0, +\infty)$ no es un SDD pues $Im(f) \not\subseteq Dom(f)$

Definición. UN SDD $\{I, f\}$ se dice lineal si f es lineal, afín si f es afín y no lineal si f no es lineal ni afín.

Notación. En lo sucesivo, para denotar las sucesivas iteradas de f usaremos que $f^n = f \circ f \circ f \cdots \circ f$

Definición (Órbita). Dado un SDD $\{I, f\}$ y un $x_0 \in I$, la sucesión definida por:

$$\{x_0, \cdots, x_n, \cdots\} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^n(x_0), \cdots\}$$

se denomina órbita o trayectoria del SDD $\{I, f\}$ asociada al valor inicial x_0 y se denota por $\gamma(I, f, x_0)$

Definición. Al conjunto de todas las órbitas asociadas al SDD $\{I, f\}$ a todos los $x_0 \in I$ se le llama retrato de fase.

1.3.1. Puntos de equilibrio

Definición (Punto de equilibrio). Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ se dice que es un punto de equilibrio del SDD $\{I, f\}$ si:

$$\alpha = f(\alpha) \quad \alpha \in I$$

Si tomamos como valor inicial un punto de equilibrio del SDD $x_0 = \alpha$ entonces la órbita resultante es constante y se denomina órbita estacionaria:

$$\gamma(I, f, \alpha) = \{\alpha, \alpha, \cdots\}$$

Ejemplo: Determine los puntos de equilibrio de la ecuación logística:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

Aquí, $f(x) = \mu x(1 - x)$, por lo que

$$\alpha = f(x) \implies \alpha = \mu\alpha(1-\alpha) \implies \alpha - \mu\alpha(1-\alpha) = 0 \implies \alpha[1 - \mu(1-\alpha)] = 0$$

Por lo que las soluciones pueden ser:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 1 - \mu(1-\alpha) = 0 \xrightarrow{(1)} \alpha_2 = \dfrac{\mu - 1}{\mu} \end{cases}$$

Donde en (1) hemos despejado α. Es claro que $\alpha_1 \in [0,1]$. Ahora, ¿$\alpha_2 = \dfrac{\mu-1}{\mu} \in [0,1]$?

Obtenemos dos puntos de equilibrio:

$\alpha_1 = 0 \in [0,1]$ y $\alpha_2 = \frac{\mu-1}{\mu}$. Ahora, ¿cuándo $\alpha_2 \in [0,1]$?

Tenemos que: $0 \leq \frac{\mu-1}{\mu} \leq 1$. Multiplicando por μ (podemos porque $\mu > 0$):

$$0 \leq \mu - 1 \leq \mu \Leftrightarrow -\mu \leq -1 \leq 0 \Leftrightarrow \mu \geq 1 \geq 0$$

Luego obtenemos que si $\mu \geq 1 \implies \alpha_2 \in [0,1]$

Definición. En una ecuación en diferencias, un punto de equilibrio es un punto inicial $x_0 = \alpha$ tal que la solución que genera es constante.

EJEMPLO: Existen SDD que no tienen puntos de equilibrio. Por ejemplo, una $f(x)$ continua tal que la ecuación $x = f(x)$ no tiene solución. Por ejemplo, $f(x) = x + 1$

Definición. Dado un punto $x_0 \in I$, si $\exists k : f^k(x_0) = \alpha = f(\alpha)$,entonces su órbita se dice eventualmente estacionaria:

$$\gamma(I, f, x_0) = \{x_0, f(x_0), \ldots, f^{k-1}(x_0), \alpha, \ldots, \alpha\}$$

Nota. Buscar puntos de equilibrio es equivalente a buscar intersecciones de la recta $y = x$ y la gráfica de f que estén contenidas en el subconjunto $I \times I$ del plano xy.

Proposición. *Si $\{I, f\}$ es un SDD, entonces $\{I, f^n\}$ también es un SDD.*

Teorema. *Todo SDD $\{I, f\}$ donde I sea cerrado y acotado entonces posee un punto de equilibrio.*

Demostración. Es consecuencia del teorema de Bolzano. Sea $g(x) = f(x) - x : [a,b] \to \mathbb{R}$. Esta g es continua y $g(a) = f(a) - a$. Pero estábamos en un SDD, luego $f : [a,b] \to [a,b]$ que lleva $a \to f(a)$ y $b \to (f(b)$. Si $f(a) = a$ ó $f(b) = b$, ya tenemos el punto fijo. De otra forma, tenemos que $a \leq f(a) \leq b$. Así que $g(a) > 0$. Si razonamos igual con b, tenemos que $g(b) < 0$. Por ello, por el teorema de Bolzano $\exists \alpha \in (a,b) : g(\alpha) = 0 \implies f(\alpha) = \alpha$ y tenemos el punto fijo.

□

Teorema. *Sea un SDD $\{I, f\}$ donde I es cerrado y supongamos que f es contractiva, es decir $0 < K < 1$ tal que:*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y \in I$$

Entonces, existe un único punto de equilibrio en f

Demostración. Probaremos primero la unicidad. Supongamos que hay dos puntos fijos. Sean α_1, α_2 dos puntos fijos. Entonces,

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leq K|\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|$$

Donde en el $\leq$ hemos usado la contractividad de la función. Por lo que hemos llegado a una contradicción y el punto será único.

Ahora, tomamos $x_0 \in I$. Definimos $x_{n+1} = f(x_n)$ con $n \geq 0$. Así, tenemos $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}\}$. Tenemos que:

$$|x_{n+1} - x_{n+2}| = |f(x_n) - f(x_{n+1})| \leq K|x_n - x_{n+1}| = K|f(x_{n-1}) - f(x_n)| \leq K^2|x_{n-1} - x_n| \leq$$

$$\leq \cdots \leq K^{n+1}|x_0 - x_1| \implies |x_{n+1} - x_{n+2}| \leq K^{n+1}|x_0 - x_1| \to 0 \implies \{x_n\} \to l$$

Ahora, como $f(I) \subset I$ e I es cerrado $\implies x_n \in I$. Hemos visto que $\exists \lim x_n = l \in I$, por tanto l es un punto fijo de $f(x)$.

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) =^1 f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(l)$$

Donde en 1 hemos usado la continuidad de f. $\square$

Teorema. *Sea el SDD $\{I, f\}$ donde I es cerrado y supongamos que $f \in \mathcal{C}^1(I)$, verificando que $|f'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$. Entonces existe un único punto de equilibrio de f.*

1.3.2. Estabilidad

Definición. Un punto de equilibrio α de un SDD $\{I, f\}$ se dice que es:

- Estable, si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : |x_0 - \alpha| < \delta$ y $x_n = f^n(x_0),\ n \in \mathbb{N}$, entonces se verifica $|x_n - \alpha| < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
- Asintóticamente estable, si es estable y además $\exists \delta > 0$: si $|x_0 - \alpha| < \delta \implies \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.
- Inestable, si no es estable, esto es, $\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall \delta > 0 \quad \exists x_0 \in I$ y $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_0 - \alpha| < \delta$ y $|x_{n_0} - \alpha| > \varepsilon_0$.

Definición (Atractor global). Un punto de equilibrio α del SDD $\{I, f\}$ se dice que es un atractor global si para cualquier $x_0 \in I$ y $x_n = f^n(x_0)$, se verifica

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

Definición (Atractor local). Un punto de equilibrio α del SDD $\{I, f\}$ se dice que es un atractor local si

$$\exists \eta > 0 : \forall x_0 \in I \ \cap \ (\alpha - \eta, \alpha + \eta) \implies \lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$$

Es decir, α atrae a las soluciones cuando x_0 está en un entorno suyo. En cuyo caso, diremos que α es LAE.

Teorema (Estabilidad asintótica local). *Si α es un punto de equilibrio del SDD $\{I, f\}$ y $f \in \mathcal{C}^1(I)$, entonces:*

*(*i) *Si $|f'(\alpha)| < 1$ entonces α es localmente asintóticamente estable.*

*(*ii) *Si $|f'(\alpha)| > 1$ entonces α es inestable.*

Demostración. (i) Supongamos $|f'(\alpha)| < 1 \overset{f' \text{ continua}}{\Longrightarrow} \begin{array}{c} \exists \eta > 0 \\ \exists 0 \leq \lambda < 1 \end{array} \Big/ \begin{array}{c} |f'(x)| \leq \lambda < 1 \\ \forall x \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta) \cap I \end{array}$

Sean $x, y \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta) \cap I$. Como es continua $\overset{\text{TVM}}{\Longrightarrow} |f(x) - f(y)| = |f'(\xi)||x - y|$ con ξ entre x e $y \implies \xi \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta) \cap I \implies |f(x) - f(y)| \leq \lambda |x - y|$.

Sea $x_0 \in (\alpha - \eta, \alpha + \eta) \cap I, x_{n+1} = f(x_n),\ n \geq 0\ |x_n - \alpha| = |f(x_{n+1}) - f(\alpha)| \leq \lambda |x_{n+1} - \alpha| = \lambda |f(x_{n-2}) - f(\alpha)| \leq \lambda^2 |x_{n-2} - \alpha| \leq \cdots \leq \lambda^n |x_0 - \alpha| \to 0$, puesto que $0 \leq \lambda < 1$ □

1.3.3. Ciclos

Definición (Ciclo). Un ciclo de orden s o una órbita periódica de período s o un $s-$ciclo del SDD= $\{I, f\}$ es un conjunto de puntos $\{\alpha_0, \cdots, \alpha_{s-1}\} \subset I$ distintos entre sí tales que:

$$\alpha_1 = f(\alpha_0), \cdots, \alpha_{s-1} = f(\alpha_{s-2}), \alpha_0 = f(\alpha_{s-1})$$

En ese caso, se llama ciclo

Nota. Si elegimos como dato inicial $x_0 = \alpha_0$, entonces la órbita correspondiente $\gamma(I, f, \alpha_0)$ tiene un comportamiento periódico:

$$\{\alpha_0, \cdots, \alpha_{s-1}, \alpha_0, \cdots\}$$

Nota. Una órbita de $\{I, f\}$ se dirá eventualmente periódica si ..

COMPLETAR DE LAS DIAPOSITIVAS; DIAPOSITIVA 55

Nota. Las órbitas periódicas de periodo mínimo s (si existen), están constituidas por valores que resuelven la ecuación $\{x \in I : f^s(x) = x\}$ pero que no son soluciones de las $s - 1$ ecuaciones $\{x \in I : f^h(x) = x\}$ con $h = 1, 2, \cdots, s - 1$.

Si $\alpha_0 \in I,\ f^s(\alpha_0) = f(f(f \cdots (f(\alpha_0)) \cdots) = f(f(f \cdots (f(\alpha_0)) \cdots) = \cdots = \alpha_0$ Donde en la primera vez se repite la f s veces, la segunda $s - 1$ veces y así sucesivamente. De esta forma, $\alpha_0, \cdots, \alpha_{s-1}$ son puntos de equilibrio de f^s pero NO son puntos de equilibrio de f^h con $h = 1, \cdots, s - 1$.

Puesto que los puntos de una órbita periódica de un periodo s son puntos de equilibrio de la función $f^s(x)$ para estudiar la estabilidad de una órbita periódica basta estudiar la estabilidad ed los puntos de equilibrio de la función $f^s(x)$:

Proposición. *Supongamos que* $f : I \to I, f \in \mathcal{C}^1(I)$ *y que* $\{\alpha_0, \cdots, \alpha_{s-1}\}$ *es un* $s-$*ciclo para el SDD* $\{I, f\}$*. Entonces:*

(i) *Si* $|f'(\alpha_0) \cdots f'(\alpha_{s-1})| < 1$ *el ciclo es asintóticamente estable*

(ii) *Si* $|f'(\alpha_0) \cdots f'(\alpha_{s-1})| > 1$ *el ciclo es inestable.*

1.3.4. Aplicación: estrategias de pesca

Ejemplo: La dinámica de una población de peces sin agentes externos y adecuadamente normalizada viene descrita por la ecuación:

$$x_{k+1} = \frac{3}{2}x_k - \frac{1}{2}x_k^2$$

El término $\frac{3}{2}x_k$ representa el crecimiento y el término $\frac{1}{2}x_k^2$ representa la competencia intraespecífica. Esta ecuación que tenemos es una ecuación en diferencias no lineal. Además, es un SDD por su forma pero no lo trataremos como tal. Se proponen dos estrategias de pesca:

- Pescar una cantidad fija b de peces al año, con lo que la ecuación sería:

$$x_{k+1} = \frac{3}{2}x_k - \frac{1}{2}x_k^2 - b$$

- Pescar una fracción $r \in (0, 1)$ del total de peces en cada año, con lo que la ecuación quedaría:

$$x_{k+1} = \frac{3}{2}x_k - \frac{1}{2}x_k^2 - rx_k$$

Vamos a ver las soluciones de ambas para ver cuál es más estable:

1. Estudiamos la primera. Tenemos la ecuación $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - b$, una parábola. Buscamos entonces los puntos de equilibrio, soluciones de la ecuación $x = f(x)$. Miramos la ecuación por ello:

$$x = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 \implies x^2 - x - 2b = 0 \implies x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 * 2b}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 8b}}{2}$$

Entonces, habrá puntos de equilibrio si el discriminante es positivo, es decir $1 - 8b \geq 0 \implies b \leq \frac{1}{8}$. Volvemos ahora a la ecuación en diferencias no lineal. Ahora, los puntos de equilibrio serán $\alpha_0 = \frac{1+\sqrt{1-8b}}{2}$ y $\alpha_1 = \frac{1-\sqrt{1-8b}}{2}$. Estudiamos ahora la estabilidad. Si $f(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - b$, tenemos que :

$$f'(x) = \frac{3}{2} - x \implies \begin{cases} f'(\alpha_0) = f'(\frac{1+\sqrt{1-8b}}{2}) = 1 - \dfrac{\sqrt{1-8b}}{2} < 1 \\ f'(\alpha_1) = f'(\frac{1-\sqrt{1-8b}}{2}) = 1 + \dfrac{\sqrt{1-8b}}{2} > 1 \end{cases}$$

Por lo que tenemos que en el primer caso, como $f'(\alpha_0)$ es menor que 1, el resultado es Localmente asintóticamente estable y el segundo caso, como $f'(\alpha_1)$ es mayor que 1, es inestable.

Por tanto, tenemos que tomar un x_0. Sabemos que $\alpha_1 < x_0$ pues de lo contrario, la población de peces se extinguiría. Así:

$$\frac{1-\sqrt{1-8b}}{2} < x_0 \implies b < \frac{1}{2}x_0 - (1-x_0)$$

De esta forma, para llegar al punto de equilibrio A.E., hay que tomar $0 < b < min\{\frac{1}{8}, \frac{1}{2}x_0 - (1-x_0)\}$

Ahora, si $b = \frac{1}{8}$, entonces $\alpha_0 = \alpha_1 = \frac{1}{2}$ y $f'(\frac{1}{2}) = 1$ y $f''(x) = -1 < 0 \implies \alpha = \frac{1}{2}$ es inestable

Por tanto, si tomáramos $x_0 > \frac{1}{2} \implies x_k$ converge hacia $\frac{1}{2} = \alpha$. Si tomáramos $x_0 < \frac{1}{2} \implies x_k$ diverge negativamente.

2. Ahora tenemos $x_{k+1} = \frac{3}{2}x_k - \frac{1}{2}x_k^2 - rx_k \implies x_{k+1} = (\frac{3}{2} - r)x_k - \frac{1}{2}x^2$. Ahora, volvemos a sacar los puntos de equilibrio:

$$x = (\frac{3}{2} - r)x_k - \frac{1}{2}x^2 \implies \begin{cases} \alpha_0 = 0 \\ \alpha_1 = 1 - 2r \end{cases}$$

Entonces, tenemos que estudiar ahora la estabilidad. Sabemos que $f'(0) = \frac{3}{2} - r$. También $f'(1-2r) = \frac{1}{2} + r$

Ahora, veremos si para $\alpha_0 = 0$ es Localmente Asintóticamente estable. tenemos que:

$$|f'(0)| < 1 \iff -1 < \frac{3}{2} - r < 1 \iff \frac{1}{2} < r\frac{5}{2}$$

Pero $r \in (0,1)$, luego si $\frac{1}{2} < r < 1$ entonces $\alpha_0 = 0$ es L.A.E. Del mismo modo, si $0 < r < \frac{1}{2}$, entonces $\alpha_0 = 0$ es inestable.

Hacemos lo mismo para $\alpha_1 = 1 - 2r$. Tenemos que el sistema será L.A.E si:

$$|f'(1-2r)| < 1 \iff |\frac{1}{2} + r| < 1 \iff \frac{-3}{2} < r\frac{1}{2}$$

Por tanto, tenemos que si $0 < r < \frac{1}{2}$ entonces α_1 es L.A.E. y si $r > \frac{1}{2}$ entonces α_1 es inestable.

Ahora,¿ y si $r = \frac{1}{2}$?. En ese caso, $\alpha_0 = 0$ y $\alpha_1 = 0$, por lo que solo hay un punto de equilibrio y

$$|f'(0)| = \frac{3}{2} - r = 1$$

y que:

$$f''(x) = -1 \implies \text{inestable}$$

2. Ecuaciones en diferencias lineales de orden superior

2.1. La ecuación lineal en diferencias de orden superior

Definición (Ecuación lineal en diferencias). Es una ecuación en diferencias de la forma:

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = b(n), \quad n \geq 0$$

con $a_0 \neq 0$. Si $b(n) = 0$ la ecuación se dice homogénea.

- $k \geq 1$ es el orden de la ecuación.
- Si $k > 1$ se dice que la ecuación es de orden superior.
- $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{K}$ donde $\mathbb{K}$ es un cuerpo que será $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.
- Una solución de esta ecuación será una sucesión $\{x_n\}$ tal que se verifica la ecuación $\forall n \geq 0$.

Ejemplo: Un ejemplo es la sucesión de Fibonacci:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \quad n \geq 1$$

con $f_0 = f_1 = 1$

El espacio de las soluciones de las ecuaciones lineales en diferencias

Sea S el conjunto de todas las sucesiones con coeficientes en $\mathbb{K}$:

$$S = \{X = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} : \quad x_n \in \mathbb{K}\}$$

Este conjunto es un espacio vectorial con las operaciones:

- Suma : $X = \{x_n\}$, $Y = \{y_n\}$ con $n \geq 0$, entonces $X + Y = \{x_n + y_n\}$
- Producto escalar: $X = \{x_n\}$ y $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $\lambda X = \{\lambda x_n\}$

Además, es de dimensión infinita pues podemos dar infinitas sucesiones linealmente independientes, como $X_0 = \{1, 0, 0, \cdots\}$, $X_1 = \{0, 1, 0, 0, \cdots\}$ y así sucesivamente.

Teorema. *Sea $\sum$ el conjunto de las soluciones de la ecuación lineal en diferencias homogénea:*

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0, \quad n \geq 0$$

Entonces, $\sum$ es un subespacio vectorial de S de dimensión k.

Demostración. Tenemos que probar que Σ es un espacio vectorial, para ello veremos que $\forall X, Y \in \sum$ y $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$ tenemos que:

$$\lambda X + \mu Y \in \sum \implies \{\lambda x_n + \mu y_n\}$$

Si sustituimos esto en la ecuación lineal en diferencias, y agrupamos los términos que tengan λ y μ, nos quedarán en términos de x_n e y_n, que, como son soluciones, igualarán la ecuación a 0 y quedará probado.

$(\lambda x_{n+k} + \mu y_{n+k}) + a_{k-1}(\lambda x_{n+k-1} + \mu y_{n+k-1}) + \cdots + a_1(\lambda x_{n+1} + \mu y_{n+1}) + a_0(\lambda x_n + \mu y_n) =$
$= \lambda(x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n) + \mu(y_{n+k} + a_{k-1}y_{n+k-1} + \cdots + a_1 y_{n+1} + a_0 y_n) =$
0

Veamos ahora que la $dim\Sigma = k$ con k el orden de la ecuación.

Sea $\mathcal{L} : S \to S$ que lleva $X \mapsto X^* = \mathcal{L}(X)$, es decir: $\{x_n\} \mapsto \{x_n^*\}$ y x_n^* es

$$x_n^* = x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \cdots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n$$

$\Sigma \subset \mathcal{S}$, se cumple que $\Sigma = \{\mathcal{X} : \mathcal{L}(\mathcal{X}) = 0\} = ker\mathcal{L}$ y, por tanto, Σ es un subespacio vectorial de $\mathcal{S}$. Para ver que $dim\Sigma = k$ basta ver que la aplicación:

$\Phi : \Sigma \to \mathbb{K}^k$, $\mathcal{X} \mapsto \Phi(\mathcal{X}) = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$ es un isomorfismo (si Σ y $\mathcal{K}$ son isomorfos, entonces tendrán igual dimensión). Como la aplicación Φ verifica las condiciones para ser un isomorfismo (es lineal y $\forall (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}) \in \mathbb{K}^k$, $\exists \{x_n\} \in \Sigma : \Phi(\mathcal{X}) = (x_0, x_1, \ldots, x_{k-1})$), queda demostrado. $\square$

FALTA CONTENIDO

Teorema. *La sucesión $X_\lambda = \{\lambda^n\}_{n\geq 0}$ es solución de la ecuación en diferencias lineal homogénea de orden $k \iff p(\lambda) = 0$, esto es: λ es una raíz característica.*

1.
2. Supongamos que $a_{k-1}, \cdots, a_0 \in \mathbb{R}$ pero existe una raíz λ_* que sea compleja. Sabemos que $\bar{\lambda_*}$ también es raíz de $p(\lambda)$. Así, $X_{\lambda_*} = \{\lambda_*^n\}$ $X_{\bar{\lambda_*}} = \{\bar{\lambda_*^n}\}$

Proposición (Lema). *Sean las sucesiones:*

$$R = \frac{1}{2}[X_{\lambda_*} + X_{\bar{\lambda_*}}] = \{\frac{1}{2}\lambda_*^n - +\bar{\lambda_*^n}\}$$

$$I = \frac{1}{2i}[X_{\lambda_*} - X_{\bar{\lambda_*}}] = \{\frac{1}{2i}\lambda_*^n - +\bar{\lambda_*^n}\}$$

Entonces, R e I son soluciones de la ecuación y además son linealmente independientes.

Demostración. Estas son soluciones puesto que Σ es un espacio vectorial y estamos sumando soluciones y multiplicando por escalares del cuerpo del e.v. Ahora, veamos que son Linealmente independientes:

$$\alpha R + \beta I = 0 \iff \alpha = 0 \quad y \quad \beta = 0$$

$$\alpha\frac{1}{2}[X_{\lambda_*} + X_{\bar{\lambda_*}}] + \beta\frac{1}{2i}[X_{\lambda_*} - X_{\bar{\lambda_*}}]$$

Ahora, agrupamos y tenemos que:

$$(\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2i})X_{\lambda_*} + (\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2i})X_{\bar{\lambda_*}} = 0$$

. Como X_{λ_*} y .... LO AHA BORRAO ME CAGO EN DIO; COMPLETARLA.

Ahora, tenemos potencias de números complejos, luego usamos la fórmula de Moivre. Teniendo el módulo y el argumento de los números complejos. Además, como un número complejo se puede escribir como $r(cos\theta isen\theta)$ con r su módulo y θ su argumento, podemos decir que:

$$X_{\lambda_*} = \{r^n(cosn\theta + isenn\theta)\}$$

$$X_{\bar{\lambda_*}} = \{r^n(cosn\theta + isenn\theta)\}$$

Y escribir así:

$$R = \{r^n cos(n\theta)\}$$

$$I = \{r^n sen(n\theta)\}$$

□

Definición (Raíz múltiple). Decimos que $\lambda_* \in \mathbb{K}$ es una raíz de $p(\lambda)$ de multiplicidad $m \geq 1$ si:

$$p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = \cdots = p^{(m-1)}(\lambda_*) = 0 \qquad p^{(m)}(\lambda_*) \neq 0$$

En el caso 3: Raíces múltiples, definimos las nuevas sucesiones:

$$DX_{\lambda_*} = \{n\lambda^{(n-1)}\}$$

$$D^2X_{\lambda_*} = \{n(n-1)\lambda^{(n-2)}\}$$

$$\cdots$$

$$D^hX_{\lambda_*}\{n(n-1)...(n-h+1)\lambda^{(n-h)}\}$$

Y sabemos que $n(n-1)...(n-h+1) = \frac{n!}{(n-h)!}$ es el símbolo de Pochhammer

Dada una ecuación en diferencias $x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0$

¿Bajo qué condiciones DX es solución? Será solución si $\mathcal{L}(DX) = 0$.

¿Para qué valor de λ el 2^o miembro vale 0?

Necesitamos λ_* tales que $p(\lambda_*) = p'(\lambda_*) = 0 \Rightarrow \lambda_*$ debe ser raíz de multiplicidad 2.

Hemos demostrado el lema para $r = 1$. El lema se demuestra por inducción en r.

Proposición (Lema). *Sea λ_* una raíz del polinomio característico de multiplicidad m, entonces $X_{\lambda_*}, DX_{\lambda_*}, \dots D^{m-1}X_{\lambda_*}$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación en diferencias homogénea.*

Demostración.
$lambda_*$ raíz de $p(\lambda)$ de multiplicidad $m \geq 1 \Rightarrow p(\lambda_* = 0 = p'(\lambda_*) = p''(\lambda_*) = \dots = p^{m-1}(\lambda_*)$. Por el Lema 1:

$$\mathcal{L}(DX_\lambda) = \sum_{h=0}^{r} \binom{r}{h} p^h(\lambda) D^{r-h} X_\lambda$$

Sustituimos $\lambda = \lambda_*$.

$$\mathcal{L}(DX_{\lambda_*}) = \sum_{h=0}^{r}$$

$X_{\lambda_*}, DX_{\lambda_*}, \dots D^{m-1}X_{\lambda_*}$ son linealmente independientes?

Sean $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{m-1} \in \mathbb{R}$.

$$\alpha_0 X_{\lambda_*} + \alpha_1 DX_{\lambda_*} + \alpha_0 D^2 X_{\lambda_*} + \dots + \alpha_{m-1} X_{\lambda_*}$$

$\square$

EJEMPLO: Sea la ecuación $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = 0$ con $n \geq 0, x_0 = 1, x_1 = 1$

Es de orden 2, luego $dim\Sigma = 2$, por lo que necesitamos una base de soluciones con dos elementos.

EL polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 \Rightarrow \lambda_* = 1$ (doble).

La base será

$$\begin{cases} X_{\lambda_*} = X_1 = 1, 1^2, 1^3, \dots, 1^n, \dots = \lambda^n_{*\,n\geq 0} \\ DX_{\lambda_*} = DX_1 = \end{cases}$$

Teorema. *Sean $\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, s$ las raíces del polinomio característico*

Teorema. *Sean $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ las raíces de $p(\lambda)$. Son equivalentes:*

1. *Todas las soluciones de la ecuación lineal en diferencias homogénea verifican*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

2. *Las raíces verifican*

$$max_{i=1,\ldots,s}|\lambda_i| < 1$$

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$

Supongamos que $\exists\bar{\lambda}$ raíz de $p(\lambda)$ tal que $|\bar{\lambda}| \geq 1$. Entonces la sucesión $X_{\bar{\lambda}} = \{\bar{\lambda}^n\}$ es solución de la ecuación.

Esto implica que hay una solución $x_n = C_1\bar{\lambda}^n$ tal que:

$$|x_n| = |C_1||\bar{\lambda}^n| = |C_1||\bar{\lambda}|^n \geq 1$$

con C_1 arbitraria, lo cual es absurdo

$\boxed{\Leftarrow}$

Sea $\mu = max|\lambda i| < 1$ con $1 \leq i \leq s$. Sabemos que :

$$x_n \leq |x_n| \leq \sum_{i=1}^{s} |q_i(n)||\lambda_i|^n \leq \mu^n(\sum_{i=1}^{s} |q_i(n)|)$$

por ello, existe un $c_i \in \mathbb{R}$ tal que $|q_i(n)| \leq c_i n^{m_i-1}$ así que, si $k = max(m_i)$ con m_i la multiplicidad de las raíces entonces:

$$\mu^n(\sum_{i=1}^{s} |q_i(n)|) \leq \mu^n \sum_{i=1}^{s} c_i n^{m_i-1} \leq \mu^n n^{k-1}(\sum_{i=1}^{s} c_i) \to 0$$

□

Teorema (Comportamiento asintótico de las soluciones con k=2). *En el caso $k = 2$, las raíces λ_1, λ_2 del polinomio $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0$ verifican $|\lambda_i| < 1$ para $i = 1, 2$ si y solo si*

$$\begin{cases} p(1) = 1 + a_1 + a_0 > 0 \\ p(-1) = 1 - a_1 + a_0 > 0 \\ p(0) = a_0 < 1 \end{cases}$$

Nota. Si $k = 2$, $a_1, a_0, \in \mathbb{R}$. Si tenemos la ecuación $x_{n+2} + a_1x_{n+1} + a_0x_n = 0$, entonces $p(\lambda) = \lambda^2 + a_1\lambda + a_1$ que tiene λ_1 y λ_2 como raíces, entonces:

$$\left.\begin{array}{r} p(1) > 0 \\ p(-1) > 0 \\ p(0) < 1 \end{array}\right\} \iff |\lambda_1|, |\lambda_2| < 1 \iff \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Sabemos que $p(0) = a_0 \leq |a_0| = |\lambda_1\lambda_2| = |\lambda_1||\lambda_2| < 1$.

Vamos a probar la primera doble implicación:

$\boxed{\Rightarrow}$

Vemos que $p(1) > 0$. Supongamos que no, supongamos que $p(1) \leq 0$. Entonces o bien $p(1) = 0 \implies$ es una raíz y $|1| > 1$, lo cual es absurdo. Ahora, si $p(1) < 0$. Como $\lim_{\lambda\to\infty} p(\lambda) = +\infty$. Entonces, por bolzano $\exists k > 1 : p(k) = 0 \implies k > 1$ es raíz, lo cual también es absurdo. Con el (-1) se hace análogamente.

$\boxed{\Leftarrow}$

Supongamos que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}/R$. Entonces $\lambda_2 = \bar{\lambda}_1$ y $a_0 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2$

Supongamos ahora que $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Entonces $1 > p(0) = a_0 = \lambda_1\lambda_2$. Pero también , como $p(1) = 1 + a_1 + a_0$ y $p(-1) = 1 - a_1 + a_0$ entonces $a_0 > -1$ por lo que $-1 < a_0 < 1 \implies -1\lambda_1\lambda_2 < 1 \implies |\lambda_1||\lambda_2| < 1 \implies$ al menos 1 tiene módulo menor que 1. Suponemos que es λ_1 (en caso contrario, tomamos el otro y seguimos igual).

Se puede probar que el cambio de crecimiento está en $(-1, 1)$, pues $(-\infty, -1)$ es decreciente y $(1, +\infty)$ es creciente, lo que implica que $-1 < \lambda_2 < 1$

Dada la ecuación en diferencias lineal completa

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1x_{n+1} + a_0x_n = b(n), \quad \textit{con } a_0 \neq 0. \tag{1}$$

Lema Sean $\{x_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ y $\{x_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ soluciones de la ecuación (1), entonces $\{x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ es solución de la ecuación lineal en diferencias homogénea.

Demostración. La prueba se realiza restando las dos ecuaciones e introduciendo las sucesiones en la ecuación y nos queda que $\{x_n^{(1)} - x_n^{(2)}\}$ es solución de la ecuación homogénea aosciada. □

Nota. Como consecuencia, toda solución $\{x_n\}$ de (1) se escribe como la suma de una solución particular de (1) y la solución de la ecuación homogénea asociada:

$$x_n = \overline{x_n} + x_n^h, \quad n \geq 0$$

Teorema (Principio de superposición). *Sean $\{x_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ y $\{x_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ soluciones de las ecuaciones lineales en diferencias completas*

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+k}^{(1)} + a_{n+k-1}^{(1)} + \ldots + a_1x_{n+1}^{(1)} + a_0x_n^{(1)} = b_1(n) \\ x_{n+k}^{(2)} + a_{n+k-1}^{(2)} + \ldots + a_1x_{n+1}^{(2)} + a_0x_n^{(2)} = b_2(n) \end{array}\right\}$$

respectivamente. Entonces $\{x_n^{(1)} + x_n^{(2)}\}_{n\geq 0}$ es solución de la ecuación en diferencias completa

$$x_{n+k} + a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n = b_1(n) + b_2(n)$$

Demostración. Sean $\{x_n^{(1)}\}$ solución de la primera y $\{x_n^{(2)}\}$ solución de la segunda.

Ahora, si sustituimos la primera ecuación en su solución y la segunda ecuación en su solución y sumamos ambas, nos queda que $\{x_1^{(1)} + x_2^{(1)}\}$ es solución de la nueva ecuación en diferencias con término independiente $b_1(n) + b_2(n)$ $\square$

Ejemplo: Vamos a resolver la siguiente ecuación en diferencias lineal completa de orden 2: $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 1 + n$.

1. Buscamos una solución de la ecuación en diferencias homogénea asociada: $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0$. Esta es la ecuación de Fibonacci, cuya solución es
$$x_n^h = C_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + C_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

2. Buscamos una solución particular de la ecuación dada. Usamos el principio de superposición, para dividir el término $b(n) = 1 + n$. En cada caso, buscaremos una solución particular del mismo carácter que el término independiente, atendiendo a la tabla de la **diapositiva 27** del tema 2.
   - $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 1$. Como el término independiente es constante, buscamos una solución particular constante. Sea x_* la posible solución constante. Entonces, se tendría $x_* - x_* - x_* = 1 \implies x_* = -1$. Por tanto, $\{x_n^{(1)}\} = \{-1\}_{n\geq 0}$ es solución (constante).
   - Resolvemos ahora $x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = n$. Como el término independiente es un polinomio de grado 1, buscamos una solución de la forma $c_0 + c_1 n$. Como debe ser solución, sustituimos:
   $$(c_0+c_1(n+2))-(c_0+c_1(n+1))-(c_0+c_1n) = n \implies -c_0+c_1+n(-c_1) = n$$
   que es un polinomio en n. Igualando coeficientes, tenemos que $c_1 = -1$ y $-c_0 + c_1 = 0 \implies c_0 = -1$. Por tanto, la solución buscada es $\{x_n^{(2)}\} = \{-1-n\}_{n\geq 0}$

3. Solución. Por el lema anterior, la solución final es la suma de la solución de la homogénea más la solución particular de la completa. A su vez, por el *principio de superposición*, la solución particular de la completa es la suma de las dos soluciones particulares halladas. Por tanto:
$$x_n = x_n^h + x_n^{(1)} + x_n^{(2)} = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1 - 1 - n =$$

$$= c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2 - n, \quad n \geq 0$$

Como siempre, las constantes c_1 y c_2 se determinan a partir de las condiciones iniciales, en cada caso.

2.2. El modelo de Samuelson

En un país con economía de mercado, la renta nacional Y_n en un período determinado n puede describirse como

$$Y_n = C_n + I_n + G_n$$

donde

- C_n = gasto de los consumidores para la compra de bienes de consumo
- I_n = inversión privada por la compra de bienes
- G_n = gasto público

Donde n se suele medir en años.

Para simplificar el modelo vamos a hacer algunas suposiciones que son ampliamente aceptadas por los economistas.

Diremos que el consumo C_n es proporcional a la renta nacional Y_{n-1} en el año anterior, es decir, $C_n = bY_{n-1}$, donde $b > 0$ (*multiplicador*) se conoce habitualmente como la *tendencia marginal al consumo.*

La inversión privada inducida I_n es proporcional al incremento del consumo $C_n - C_{n-1}$, esto es,

$$I_n = k[C_n - C_{n-1}],$$

donde $k > 0$ se denomina *coeficiente acelerador.*

Finalmente, el gasto público G_n se supone constante a lo largo de los años

$$G_n = G$$

Con las ecuaciones que tenemos, podemos ver que:

$$\begin{cases} Y_n = bY_{n-1} + k(bY_{n-1} - bY_{n-2}) + G \\ Y_{n+2} - b(1+k)Y_{n+1} + kbY_n = G \\ p(\lambda) = \lambda^2 - b(1-k) + kb \end{cases}$$

Con $G > 0$ constante. Ahora, resolvemos la segunda.

1. Calculamos la asociada homogénea:

$$Y_{n+2} - b(1-k)Y_{n+1} + kbY_n = 0$$

Soluciones al polinomio característico. Tenemos que buscar un equilibrio $Y_n = Y_n^h + Y_n^{(1)} = Y_n^h + Y_*$ con Y_* una solución particular constante.

2. Buscamos condiciones para que la renta nacional converja hacia Y_*. Ahora, ¿Cuándo las soluciones de la ecuación homogénea van a 0?. Si $k = max(|\lambda_i) < 1 \iff$

$$\iff \begin{cases} p(1) = 1 - b(1+k) + kb01 - b > 0 \\ p(-1) = 1 + b(1+k) + kb > 0 \text{ (siempre)} \\ p(0) = kb < 1 \end{cases}$$

Por tanto, debe ocurrir, teniendo que $b > 0$ y $k > 0$:

$$\begin{cases} 1 - b > 0 \\ bk < 1 \end{cases}$$

2.3. El modelo del jugador arruinado

Supongamos que un jugador va a jugar a una sucesión de juegos contra un solo adversario. En cada juego, la probabilidad de que el jugador gane 1\$ es un valor conocido a y la probabilidad de perder 1\$ es $1-q$, donde $0 \leq q \leq 1$. El juego se termina si pierde todo su dinero o bien alcanza su objetivo de conseguir N dólares. Si el jugador se queda sin dinero antes, se dice que el jugador se ha arruinado.

Por tanto, sea p_n la probabilidad de que el jugador se arruine si posee n dólares. Así, siendo $p_n = 1$ y $p_0 = 0$, por el teorema de la probabilidad total tenemos

$$p_n = qp_{n+1} + (1-q)p_{n-1}$$

y si cambiamos n por $n+1$, obtenemos:

$$p_{n+2} - \frac{1}{q}p_{n+1} + \frac{1-q}{q}p_n = 0, \quad n = 0, 1, \cdots, N, \quad p_0 = 1, p_N = 0$$

Ahora, la ecuación característica viene dada por :

$$\lambda^2 - \frac{1}{q}\lambda + \frac{1-q}{q} = 0$$

Y esta ecuación tendrá como raíces:

$$\lambda_1 = \frac{1-q}{q} \quad y \quad \lambda_2 = 1$$

Por tanto, la solución general será de la forma:

$$p_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n \implies p_n = c_1(\frac{1-q}{q})^n + c_2$$

Además, con $p_0 = 0$ y $p_n = 1$, tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas y podemos resolverlo.