Análisis Matemático I

Apuntes

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Introducción

El objetivo de este curso es el estudio de las funciones de varias variables, es decir, de funciones $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Para ello, empezaremos caracterizando el espacio $\mathbb{R}^N$, y proseguiremos intentando traspasar los resultados principales sobre funciones reales de variable real a nuestro campo de estudio, así como enunciando otros nuevos.

Es por esto que es fundamental haber cursado con aprovechamiento las asignaturas de *Cálculo I y II*, que tratan exclusivamente sobre funciones reales de variable real.

Aunque nos centraremos en funciones en el espacio $\mathbb{R}^N$, muchos de los resultados que obtendremos son igual de válidos en un espacio métrico en general, e incluso en espacios topológicos.

1. Topología de un espacio métrico.

1.1. Concepto de espacio métrico. El espacio métrico $\mathbb{R}^N$.

Definición (Espacio métrico). Consideremos un conjunto X y una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

(i) $d(x,y) \geq 0 \;\; \forall x, y \in X$.

(ii) $d(x,y) = 0 \iff x = y \;\; \forall x, y \in X$.

(iii) $d(x,y) = d(y,x) \;\; \forall x, y \in X$.

(iv) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \;\; \forall x, y, z \in X$. (*desigualdad triangular*)

Entonces, se dice que el par (X, d) es un *espacio métrico*.

Nota. En adelante, entenderemos $\mathbb{R}^N$ como el espacio métrico $(\mathbb{R}^N, d)$, siendo d la distancia usual **(distancia euclídea)** dada por:

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (y_i - x_i)^2} \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Existen otras distancias en $\mathbb{R}^N$. Las más destacadas son las siguientes:

(i) $d_1(x,y) = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

(ii) $d_\infty(x,y) = \text{máx}\{|x_i - y_i| : \; i = 1, \ldots, N\} \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

(iii) $d_p(x,y) = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \;\; \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

Definición. Sean (X, d) y (X, d') dos espacios métricos sobre un mismo conjunto X. Se dice que las distancias d y d' son *equivalentes* $\iff \exists k_1, k_2 > 0 : \; k_1 d(x,y) \leq d'(x,y) \leq k_2 d(x,y) \;\; \forall x, y \in X$.

Proposición. *En $\mathbb{R}^N$, todas las distancias mencionadas anteriormente son equivalentes entre sí. En particular, la distancia euclídea es equivalente a todas ellas.*

1.2. Conceptos topológicos.

Definición (Bola abierta). Sea (X, d) un espacio métrico, y fijemos un $x \in X$ y un $\varepsilon > 0$. Se llama *bola abierta de centro x y radio* ε al conjunto $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Definición (Bola cerrada). De forma análoga, se define la *bola cerrada de centro x y radio* ε como el conjunto $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$.

Definición (Conjunto abierto). Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $A \subseteq X$. Decimos que *A es abierto* $\iff \forall a \in A \; \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Nota. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $\forall x \in X \; \forall \varepsilon > 0$ se tiene que $B(x, \varepsilon)$ es un conjunto abierto.

Demostración.
Sea $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ arbitrario. Para demostrar que $B(x_0, \varepsilon_0)$ es un abierto, tenemos que encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, \varepsilon_0)$, y por lo tanto comprobar que se verifica que $\forall y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow y \in B(x_0, \varepsilon_0)$.

Sea $y \in B(x, \varepsilon)$ cualquiera. Consideremos $r = d(x, x_0)$, y tomemos $\varepsilon = \varepsilon_0 - r$. Queremos demostrar que $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$. Para ello, veamos que $d(x_0, y) < \varepsilon_0$. En efecto, por la desigualdad triangular se cumple que:

$$d(x_0, y) \leq d(x, x_0) + d(x, y) < r + \varepsilon = r + \varepsilon_0 - r = \varepsilon_0$$

Luego queda demostrado que $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$, y por tanto podemos afirmar que para todo punto $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ se puede encontrar una bola abierta centrada en él, tal que todos sus puntos están en el conjunto de origen.

@ Pedro Bonilla.

□

Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Si $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es abierto.*

(ii) *Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una familia finita de abiertos de X, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.*

(iii) *$X, \emptyset$ son abiertos.*

Definición (Punto interior). Sea (X, d) un espacio métrico, y consideremos $A \subseteq X$, $a \in A$. Se dice que *a es un punto interior de A* si, y solo si, $\exists \varepsilon_0 > 0 : B(a, \varepsilon_0) \subseteq A$. Definimos $int(A) = \mathring{A} = \{a \in A \mid a \text{ es punto interior de } A\}$.

Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *$\mathring{A} \subseteq A$.*

(ii) *$\mathring{A}$ es abierto.*

(iii) *Si $B \subseteq A$ es un subconjunto abierto de A, entonces $B \subseteq \mathring{A}$. Es decir, $\mathring{A}$ es el abierto más grande contenido en A.*

(iv) $\mathring{A} = \bigcup\{B \subseteq A \mid B \text{ es abierto}\}$.

(v) *A es abierto* $\iff \mathring{A} = A$.

(vi) $int(int(A)) = int(A)$.

(vii) *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.

Definición (Conjunto cerrado). Sea (X, d) un espacio métrico, y $F \subseteq X$. Se dice que el conjunto *F es cerrado* $\iff$ *$X - F$ es abierto.*

Nota. Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0$ se tiene que $\bar{B}(x, \varepsilon)$ es un conjunto cerrado.

Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Si* $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *es una familia de cerrados de X, entonces* $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ *es cerrado.*

(ii) *Si* $\{F_1, \ldots, F_n\}$ *es una familia finita de cerrados de X, entonces* $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ *es cerrado.*

(iii) $X, \emptyset$ *son cerrados.*

Definición (Clausura). Sea (X, d) un espacio métrico. Se llama *clausura o cierre de A* al conjunto $\bar{A} = X - int(X - A)$.

Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $A \subseteq \bar{A}$.

(ii) $\bar{A}$ *es cerrado.*

(iii) *Si $B \subseteq X$ es un subconjunto cerrado de X tal que $A \subseteq B$, entonces $\bar{A} \subseteq B$. Es decir, $\bar{A}$ es el cerrado más pequeño que contiene a A.*

(iv) $\bar{A} = \bigcap\{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}$.

(v) *A es cerrado* $\iff \bar{A} = A$.

(vi) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

(vii) *Si* $A \subseteq B$, *entonces* $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

Definición (Frontera). Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Llamamos *frontera de A* al conjunto $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$.

Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifica lo siguiente:* $x \in \partial A \iff \forall \varepsilon > 0\ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ *y* $B(x, \varepsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset$.

Definición (Punto de acumulación). Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Dado $x \in X$, decimos que *x es punto de acumulación de A* $\iff \forall \varepsilon > 0\ B(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. Definimos $A' = \{x \in X \mid x \text{ es punto de acumulación de } A\}$.

Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathring{A} = X - \overline{X - A}$

(ii) $\bar{A} = A \cup \partial A$.

(iii) $\bar{A} = A \cup A'$

(iv) $\partial A \subseteq A'$

(v) $X = int(A) \cup \partial A \cup int(X - A)$. *Además, la unión es disjunta dos a dos.*

2. Sucesiones en $\mathbb{R}^N$.

Definición (Sucesión en $\mathbb{R}^N$). Una sucesión en $\mathbb{R}^N$ es una aplicación $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que a cada $n \in \mathbb{N}$ le hace corresponder un $x(n) \in \mathbb{R}^N$. Por simplicidad, al elemento imagen de n se le denomina x_n, y la aplicación x se denota $\{x_n\}$.

Definición (Convergencia de sucesiones). Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A converge a x si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_o \in \mathbb{N} : \; n \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Nota. Este concepto no depende de la distancia equivalente elegida.

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$, y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A. Adoptemos la notación $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^N)$, y $x = (x^1, x^2, \ldots, x^N)$. Entonces, se verifica que:*

$$\{x_n\} \to x \iff \{x_n^j\} \to x^j.$$

Definición. Sea (X, d) un espacio métrico, y $x \in X$. Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, un punto $a_n \in X$. Entonces, decimos que $d(a_n, x) \to 0 \iff \{a_n\} \to x$.

Definición (Conjunto acotado). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Decimos que A *está acotado* si, y solo si, $\exists R > 0 : A \subseteq B(0, R)$.

Definición (Sucesión acotada). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de R^N. Entonces, decimos que $\{x_n\}$ *está acotada* sí, y solo sí, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

Nota. Si una sucesión $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotada, entonces $\forall i = 1, \ldots, n$ la sucesión $\{x_n^i\}$ es acotada (en $\mathbb{R}$).

Nota. Si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotado, entonces cualquier sucesión de puntos de A es acotada.

Teorema (Bolzano-Weierstrass). *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ acotada. Entonces, existe una subsucesión $\{x_{\sigma_n}\}$ convergente.*

Definición (Sucesión de Cauchy). Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Decimos que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* $\iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_o \in \mathbb{N} : \; n, m \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Teorema ($\mathbb{R}^N$ es completo). *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Entonces:*

$$\{x_n\} \text{ es de Cacuchy } \iff \{x_n\} \text{ es convergente.}$$

Proposición. *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ es convergente a x.*

3. Funciones continuas en $\mathbb{R}^N$.

Definición (Función continua). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ y $a \in A$. Decimos que f *es continua en* a si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \; x \in A, \; d(x,a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Además, se dice que f es continua si lo es en todos sus puntos.

Proposición (Caracterización de continuidad). *Sea* $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, *y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. *Entonces:*

$$f \text{ es continua en } a \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \text{ con } \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(a).$$

Definición (Continuidad uniforme). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Se dice que f es uniformemente continua si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \; x, y \in A, \; d(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Definición (Conjunto compacto). Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\emptyset \neq A \subseteq X$.

$$A \text{ es compacto} \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \;\; \exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A.$$

Proposición (Caracterización de cerrados). *Sea* (X, d) *un espacio métrico, y* $A \subseteq X$. *Entonces, son equivalentes:*

(i) *A es cerrado.*

(ii) $\forall \{x_n\} \subseteq A$ *convergente a un* $x \in X$, *se verifica que* $x \in A$.

Demostración. Veamos las dos implicaciones:

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos $A \subseteq X$ un conjunto cerrado. Entonces, $X - A$ es abierto. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A que converge a un $x \in X$. Para comprobar que, de hecho, $x \in A$, argumentamos por reducción al absurdo:

Supongamos $x \notin A$. Entonces, $x \in X - A$, y por ser este último conjunto abierto, encontramos un $\varepsilon > 0$ *tal que* $B(x, \varepsilon) \subseteq (X - A)$. Pero por ser x el límite de la sucesión $\{x_n\}$, se tiene que $\exists n_o \in \mathbb{N} : n \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$. Es decir, a partir de cierto índice en adelante, $x_n \in B(x, \varepsilon)$ *con* $x_n \in A \; \forall n \in \mathbb{N}$. Esto se contradice con el hecho de que $B(x, \varepsilon) \subseteq (X - A)$, pues encontramos en dicha bola puntos x_n que no pertenecen a $X - A$.
Por tanto, concluimos que $x \in A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $A \subseteq X$, y supongamos que se verifica que $\forall \{x_n\} \subseteq A$ *tal que* $\{x_n\} \to x \in X$, *se tiene que* $x \in A$. Para ver que A es cerrado, utilizaremos la siguiente caracterización de conjuntos cerrados:

$$A \text{ es cerrado} \iff \bar{A} = A$$

Si recordamos, se define la frontera de A como $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$. Por tanto, la equivalencia anterior quedaría así: A *es cerrado* $\iff \partial A \cup \mathring{A} = A$. Para comprobar esta última igualdad, veamos las dos inclusiones:

$\boxed{\subseteq}$ Sabemos por la definición del conjunto de puntos interiores de A, que $\mathring{A} \subseteq A$.
Comprobemos entonces que $\partial A \subseteq A$:

Sea $x \in \partial A$ cualquiera. Por una caracterización de la frontera de A, sabemos que $\forall \varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ *con* $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, es decir, $\exists a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ *tal que* $d(x, a_n) < \varepsilon = \frac{1}{n}$. Podemos construir entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{a_n\}$.

Así, se tiene que $0 < d(x, a_n) < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde concluimos que $d(x, a_n) \to 0$. Por definición, esto significa que $\{a_n\} \to x$, lo que por hipótesis implica, al ser $\{a_n\}$ una sucesión convergente de puntos de A, que $x \in A$. Por tanto, se verifica que $\partial A \subseteq A$.

$\boxed{\supseteq}$ Esta inclusión es trivial, pues sabemos que $A \subseteq \bar{A}$, y por tanto $A \subseteq \partial A \cup \mathring{A} = \bar{A}$.

De esta forma, queda probada la equivalencia.

@ Antonio Coín.

$\square$

Proposición (Caracterización de compactos). *Sea* (X, d) *un espacio métrico, y* $A \subseteq X$. *Entonces:*

$$A \text{ es compacto} \iff A \text{ es cerrado y acotado.}$$

Proposición. *Sea* $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ *convergente a un* $x_o \in \mathbb{R}^N$. *Entonces, el conjunto* $A = \{x_n : \ n = 0, 1, 2, \dots\}$ *es compacto.*

3.1. Clasificación de conjuntos en $\mathbb{R}^N$

Definición (Conjunto convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *convexo* si $\forall x, y \in A$ se tiene que el segmento de extremos x e y está incluido en A. En otras palabras:

$$A \text{ convexo} \iff [x, y] = \{tx + (1-t)y : \ t \in [0, 1]\} \subseteq A.$$

Definición (Poligonalmente convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *poligonalmente convexo* si $\forall x, y \in A$ existe una poligonal que los une y no se sale de A. En otras palabras: *A poligonalmente convexo* $\iff \exists\{x = a_0, a_1, \dots, a_k = y\} \subseteq A$ tal que:

$$\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i] \subseteq A.$$

Definición (Conjunto arco-conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *arco-conexo(conexo por arcos)* si $\forall x, y \in A$ existe un camino incluido en A que los une. En otras palabras, *A es conexo por arcos* $\iff \exists \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a, b]) \subseteq A.$$

Definición (Conjunto no conexo). Decimos que un conjunto $A \in \mathbb{R}^N$ es *NO conexo* si existen U, V abiertos en $\mathbb{R}^N$ tales que:

$$U \cap A \neq \emptyset; \quad V \cap A \neq \emptyset; \quad A \subseteq U \cup V; \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Nota. La misma definición se aplica para un espacio topológico (X, τ).

Definición (Conjunto conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice conexo si no es no conexo. Equivalentemente, $\forall\ U, V$ abiertos en $\mathbb{R}^N$ tales que $U \cap A \neq \emptyset,\ V \cap A \neq \emptyset,\ A \subseteq U \cup V$, se tiene que forzosamente $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto arco-conexo. Entonces, A es convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in A$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $x \leq y$. Sabemos que por ser A arco-conexo, $\exists \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ función continua verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a, b]) \subseteq A.$$

Como φ es una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado, aplicamos el **teorema del valor intermedio** en $\mathbb{R}$, y obtenemos que $\varphi([a, b])$ es un intervalo. Por ser un intervalo, verificará que $\forall \alpha, \beta \in \varphi([a, b])\ con\ \alpha \leq \beta,\quad [\alpha, \beta] \subseteq \varphi([a, b])$.

Por tanto, como $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi([a, b])$, concluimos que:

$$[\varphi(a),\ \varphi(b)] = [x, y] \subseteq \varphi([a, b]) \subseteq A.$$

Así, hemos demostrado que $\forall x, y \in A\ \ [x, y] \subseteq A$, y por tanto, A es convexo.

@ Antonio Coín.

□

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ convexo. Entonces, A es arco-conexo.*

Demostración.
Fijemos $x, y \in A$ arbitrarios, y construyamos la aplicación $\varphi : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ dada por:

$$\varphi(t) = (1 - t)x + ty \ \ \forall t \in [0, 1]$$

Una primera observación es que $\varphi([0, 1]) = \{(1 - t)x + ty : t \in [0, 1]\} = [x, y] \subseteq A$ por ser A convexo. También se desprende de la definición de φ que $\varphi(0) = x$ y $\varphi(1) = y$.
Para comprobar que φ es continua, utilicemos la caracterización de la continuidad por sucesiones:

Sea $\{x_n\} \subseteq [0, 1]\ con\ \{x_n\} \to a \in [0, 1]$. Entonces, $\{\varphi(x_n)\} = \{(1 - x_n)x + x_n y\}$.
Apliquemos ahora propiedades de las sucesiones convergentes, y obtenemos que:

$$\{\varphi(x_n)\} \to (1 - a)x + ay = \varphi(a).$$

Entonces, $\forall \{x_n\} \subseteq [0, 1]\ con\ \{x_n\} \to a \Rightarrow \{\varphi(x_n)\} \to \varphi(a)$, por lo que φ es continua.

Así, queda probado que A es conexo por arcos.

@ Guillermo Galindo.

□

Proposición. *Sea $A \in \mathbb{R}^N$ arco-conexo. Entonces, A es conexo.*

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y conexo por arcos. Entonces, A es poligonalmente convexo.*

3.2. Continuidad en espacios topológicos. Topología inducida.

Definición (Continuidad en espacios topológicos). Sean (X, τ_x), (Y, τ_y) dos espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$. Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f^{-1}(B) \in \tau_x \ \ \forall B \in \tau_y.$$

Definición (Topología inducida). Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Entonces, $\tau_A = \{B \cap A : \ B \in \tau\}$ es la *topología inducida en A*.

Proposición (Caracterización de abiertos en topología inducida). *Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Si (A, τ_A) es el espacio topológico inducido en A, entonces:*

$$B' \in \tau_A \iff \exists B \in \tau : \ B' = B \cap A.$$

Proposición. *Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Entonces, A es no conexo si, y solo si, existen U, V* ***abiertos en (A, τ_A)*** *tales que:*

$$U \neq \emptyset \neq V; \quad A \subseteq U \cup V; \quad U \cap V = \emptyset.$$

Definición (Continuidad en topología inducida). Sean (X, τ_x), (Y, τ_y) dos espacios topológicos, $A \subseteq X$, y $f : A \longrightarrow Y$. Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f \text{ es continua en } (A, \tau_A).$$

3.3. Teoremas sobre funciones continuas en $\mathbb{R}^N$

Teorema (Weierstrass). *Sea (X, d) un espacio métrico, $\emptyset \neq A \subseteq X$ compacto, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A. Entonces, $\exists x_1, x_2 \in A : \ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \ \forall x \in A$. En otras palabras, la función f alcanza su mínimo y su máximo.*

Teorema (Weierstrass generalizado). *Sean (X, d), (Y, d) espacios métricos, $\emptyset \neq A \subseteq X$ compacto, y $f : A \longrightarrow Y$ continua. Entonces, $f(A)$ es compacto.*

Teorema (Valor Intermedio). *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ arco conexo, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ continua. Entonces, $f(A)$ es arco-conexo en $\mathbb{R}^M$.*

Demostración. Sean $X, Y \in f(A)$. Entonces, $\exists x, y \in A : X = f(x), \ Y = f(y)$. Como A es arco-conexo, $\exists \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continua tal que $\varphi(a) = x, \ \varphi(b) = y, \ \varphi([a, b]) \subseteq A$.

Ahora, definimos $\psi := f \circ \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^M$, que es continua por ser composición de funciones continuas. Entonces, se verifica que:

$$\psi(a) = f(\varphi(a)) = f(x) = X; \quad \psi(b) = f(\varphi(b)) = f(y) = Y; \quad \psi([a, b]) = f(\varphi([a, b])) \subseteq f(A).$$

Por tanto, queda probado que A es arco-conexo en $\mathbb{R}^M$. $\square$

Teorema (Valor Intermedio revisitado). *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ conexo, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ continua. Entonces, $f(A)$ es conexo en $\mathbb{R}^M$.*