Universidad de Granada

Geometría III

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

Introducción

En esta asignatura trataremos de estudiar la geometría afín. Nos centraremos en el plano, el espacio y las figuras que se forman en él.

1. El espacio afín

Definición (Espacio afín). Dado un conjunto E no vacío diremos que es un espacio afín asociado a un espacio vectorial V si existe la aplicación

$$\varphi : E \times E \to V$$

$$(a, b) \mapsto \varphi(a, b)$$

tal que se cumplan:

- Fijado un punto a la aplicación φ_a es biyectiva, es decir:

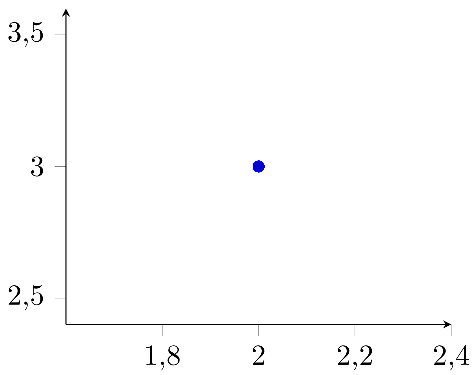
$$\forall a \in E, v \in V, \exists! b \in E : \varphi(a, b) = v$$

- Se tiene la relación de Charles, es decir:

$$\forall a, b, c \in E \varphi(a, b) + \varphi(b, c) = \varphi(a, c)$$

1.1. El plano afín

Este plano, durante todo el contenido de los apuntes, será el plano $\mathbb{R}^2$. Sabemos que podemos representar un simple punto o un vector dentro de este plano (en este caso, es el plano vectorial). Daremos ahora por sabido todas las propiedades de los vectores.



Lo que haremos es transformar las propiedades de vectores en propiedades de puntos, veamos cómo unir estos dos conceptos.

Sean P y Q dos puntos del plano. Entonces, podemos transformarlos en un vector $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$. De la misma forma, analíticamente podemos ver que si tenemos un punto P y le añadimos un vector $\vec{u}$, obtenemos otro punto Q. Damos así por definidas la suma de puntos, vectores y puntos y vectores.

Definición (Combinación lineal de vectores). Si u_1, u_2, u_3 son vectores y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son escalares, entonces:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$$

es una combinación lineal de vectores.

Definición (Razón de vectores proporcionales). Si u y v son dos vectores proporcionales es decir $u = \lambda v$, entonces se llama a λ la razón de esos vectores. Si los vectores no son proporcionales no podemos tratar este concepto.

Podemos también hacer combinaciones de puntos de la siguiente forma:

Definición (Combinaciones baricéntricas de puntos). Si $P_1, ..., P_n$ son puntos y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ pesos de los puntos, que cumplen que $\sum \alpha_i = 1$, entonces una combinación de puntos de la forma:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$$

se le llama combinación baricéntrica de puntos.

Proposición. *Una combinación baricéntrica de pnutos es un punto.*

Demostración. Lo que haremos, es transformar los puntos en vectores y así la demostración será trivial.

Restamos primero $P - P_1 = \sum \alpha_i (P_i - P_1)$, así tenemos el vector determinado por P y P_1 y una identidad de vectores, de la forma:

$$P - P_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_1 P_i}$$

Y llegamos así a que

$$P = P_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_1 P_i}$$

$\square$

Definición (Combinación convexa). Si los pesos α_i asignados a los puntos son todos positivos, llamaremos a su combinación una combinación convexa.

Definición (Centro de gravedad de unos puntos). Si $P_1, ..., P_n$ son puntos y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son sus pesos, entonces llamamos a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$$

el centro de gravedad de los puntos.

Definición (Punto medio). Sean P y Q dos puntos en el espacio afín. Entonces m es el punto medio entre P y Q si está definido como:

$$m = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}(P + Q)$$

Otra forma de hablar de él es: si $u = PQ$, entonces:

$$m = \frac{1}{2}u + P$$

1.2. Rectas afines

A partir de ahora, cada vez que mencionemos una recta, estaremos hablando de una recta afín.

Definición (Recta vectorial). Una recta vectorial es un subespacio vectorial de dimensión 1. Estas están generadas por un vector. De hecho, se notan como $L(v)$ con v un vector.

Proposición. *Si P es un punto y v un vector, entonces la recta afín r viene dada por*

$$r = P + L(v) = \{P + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Además, notaremos a $L(v) = \vec{r}$.

Definición (Variedad de dirección). Si v es un vector director, llamaremos variedad de dirección a $L(v) = \vec{r}$.

Propiedades:

- Si Q es un punto y $Q \in r \implies r = Q + L(v)$
- Si P, Q son dos puntos, entonces por ellos pasa una recta y esta es única. Esta recta se nota : $r = P + L(\overrightarrow{PQ})$

  Demostración. Si la recta r pasa por P y Q, sea s otra recta que pasa por ellos, entonces:

  $$s = P + L(\overrightarrow{PQ}) = r$$

  □

1.2.1. Posición relativa entre rectas

Según se encuentren en el plano afín, dos rectas r y s pueden ser:

- Paralelas, notado $r \parallel s \equiv \vec{r} = \vec{s}$

- No paralelas, notado $r \nparallel s \equiv$ sus vectores directores son linealmente independientes $\equiv u$ y v es base.

Teorema. *Si r, s son dos rectas del plano afín, entonces:*

(i) $r \nparallel s \implies r \cap s =$ *un punto*

(ii) $r \parallel s \implies r = s$ *ó* $r \cap s = \emptyset$

Demostración. (*i*) Si u, v son los vectores directores de r y s, entonces con los pares $\{u, v\}$ tenemos que $P + \lambda u = Q + \mu v$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y si $r = P + L(u)$ y $s = Q + L(v)$, y $\overrightarrow{PQ} = \lambda u - \mu v$ y, por ello, existen únicos λ, μ.

(*ii*) Sean u, v son los vectores directores de r y s. Supongamos que tienen al menos un punto A en común. Entonces como se podrían escribir estas rectas como $r = A + L(u)$ y $s = A + L(v)$ y además como $r \parallel s \implies L(r) = L(s)$ descubrimos que $r = A + L(u) = A + L(v) = s$.

$\square$

1.3. Triángulos

Son polígonos que vienen dados por tres puntos no alineados A, B, C, que son sus vértices y las tres rectas que los unen.

Definición. Dos o más puntos $A_1, A_2, ..., A_n$ estan alineados $\iff$ existe una recta $r \subset \mathbb{R}^2$ *tal que* $A_i \in r \ \forall i \in 1, ..., n$

Proposición. *A, B, C son puntos no alineados $\iff \vec{AB}, \vec{AC}$ son linealmente independientes.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $\nexists r \subset \mathbb{R}^2$ *tal que* $A_i \in r \ \forall i \in 1, ..., n \Rightarrow \nexists \vec{v}$ *tal que* $A, B, C \in r = A + L(\vec{v}) \Rightarrow \vec{AB} \neq \alpha \cdot \vec{AC}, \alpha \in \mathbb{R}$ porque si no se daría el caso anterior.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si A, B, C están en la misma recta, entonces la recta (única) que proporcionan los puntos A y B, y los puntos A y C son la misma, luego $r = A + L(\vec{AB}) = A + L(\vec{AC})$ y entonces $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ serían linealmente dependientes. Como sabemos que $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ no lo son, por lo tanto A, B y C no están alineados. $\square$

Teorema. *Si consideramos los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ con dos de los lados homólogos paralelos y las razones de los vectores de esos lados son iguales. Si las rectas paralelas son: $A \vee C \parallel A_1C_1$ y $A \vee B \parallel A_1B_1$, por lo que las razones son:*

$$\frac{\vec{A_1C_1}}{\vec{AC}} = \frac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}}$$

Entonces, la pareja restante $C \vee B \parallel C_1B_1$ y $\frac{\vec{B_1C_1}}{\vec{BC}} = \frac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}} = \frac{\vec{A_1C_1}}{\vec{AC}}$

Demostración. Si los lados son paralelos, entonces los vectores directores son proporcionales.

Si w (el lado no mencionado del primer triangulo) es $w = -u+v$ y w_1(el lado no mencionado del segundo triángulo) es $w_1 = -\lambda u + \lambda v = \lambda(-u+v) = \lambda w$ por lo que tenemos lo que queríamos. □

Definición (Triángulo medio). Si ABC es un triángulo y A',B',C' los puntos medios de sus lados, entonces:

(i) $A'B'C'$ es un triángulo

(ii) Los lados homólogos son paralelos y que el factor de proporcionalidad es: $-\dfrac{1}{2}$

Demostración. *(i)* Se hace viendo que si ABC no están alineados, estos 3 tampoco

(ii) Tenemos que: $A' = B/2 + C/2$, $B' = A/2 + C/2$, $C' = A/2 + B/2$. Tenemos por tanto que: $\vec{A'B'} = B' - A' = \dfrac{1}{2}(A-B) = -\dfrac{1}{2}\vec{AB}$ y por tanto los lados homólogos son paralelos.

Además, el factor es el número obtenido en la conversión, es decir $\dfrac{-1}{2}$.

□

Definición (Medianas de un triángulo). Las medianas de un triángulo ABC son las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto

Definición (Baricentro de un triángulo). El baricentro G de un triángulo que viene dado por:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

Teorema. *Si ABC es un triángulo en el plano afín, entonces las medianas son concurrentes. Su punto de corte es el Baricentro. El baricentro triseca el segmento que une un vértice con el punto medio homólogo.*

Teorema. *Sea A' el punto medio del lado opuesto a A en un triángulo ABC. Sea AvA' una de las medianas. Esta es:*

$$\{\lambda A + \mu A' : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ , \ \lambda + \mu = 1\}$$

Entonces, sabemos que $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ y veamos que este está en la mediana: Tenemos que ver la ecuación:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \lambda A + \mu A' \implies \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C) = ... = G$$

1.4. Ecuaciones de una recta

Hemos visto una recta como un punto A y un vector $\vec{v}$. Es decir, $r \equiv (x_0, y_0) + (x, y) : (x, y) \in L(v) \equiv (x_0 + x, y_0 + y)$.

También por tanto podemos hacer una recta mediante dos puntos, tomando el vector que forman esos dos puntos y uno de ellos y teniendo la situación anterior.

Las rectas vectoriales en el plano vectorial son siempre de la forma:

$$\vec{r} \equiv (x, y) \in L : \alpha x + \beta y = 0 \text{ con } \alpha \text{ o } \beta \text{ distinto de } 0$$

Si r es una recta afín, entonces:

$$r \equiv \alpha x + \beta y = \gamma$$

con α o β distintos de 0 y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Ahora, si tenemos $r' \equiv \alpha' x + \beta' x = \gamma'$ podemos ver que:

- $r \parallel r' \iff (\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ son linealmente dependientes. Es decir, si el determinante que forman es 0
- $r \nparallel r' \iff (\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ no son linealmente dependientes. Es decir, si el determinante que forman no es 0

1.5. Cuadriláteros

Definición. $ABCD$ es un cuadrilátero que está formado por 4 puntos consecutivos no alineados 3 a 3. Se llaman lados a los segmentos que unen los vertices consecutivos, y diagonales a los segmentos que unen $A \vee C$ y $B \vee D$.

Definición (Lado). Un lado es una recta que une dos vértices consecutivos. En concreto, los cuadriláteros tienen 4 lados: $A \vee B$, $B \vee C$, $C \vee D$ y $D \vee A$.

Definición (Diagonal). Una diagonal es una recta que une dos vertices no consecutivos. En concreto, los cuadriláteros tienen 2 diagonales: $A \vee C$ y $B \vee D$.

Definición (Paralelogramo). Un paralelogramo es un cuadrilátero que cumple que todos sus lados opuestos son paralelos. Es decir, sea $ABCD$ un paralelogramo entonces AvB es paralelo a $C \vee D$ y $B \vee C$ es paralelo a $D \vee A$. Además los paralelogramos cumplen que siendo $V_1 = A \vee B$, $V_2 = B \vee C$, $V_3 = C \vee D$, $V_4 = D \vee A$ entonces:

(i) $V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = 0$

(ii) $V_3 = \lambda V_1 \textit{ con } \lambda \neq 0$

(iii) $V_4 = \mu V_2$ *con* $\mu \neq 0$

Proposición. *Sea ABCD un cuadrilátero. Entonces, son equivalentes:*

(i) *ABCD es un paralelogramo*

(ii) $\vec{AB} = \vec{DC}$

(iii) *Las diagonales del cuadrilátero se cortan en su punto medio.*

Demostración. $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Solo tenemos que fijarnos en lo que implica ser paralelogramo (ver propiedad arriba): $V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = 0 \Leftrightarrow V_1 - V_2 = V_3 - V_4$ Sustituimos $V_3 = \lambda V_1$ y $V_4 = \mu V_2$: $V_1 - V_2 = \lambda V_1 - \mu V_2$ Como sabemos que V_1 *y* V_2 unen 3 puntos que no están alineados, entonces sabemos que son linealmente independientes y por tanto forman base, por esta razon, cualquier vector se forma como combinación lineal de ellos, con coeficientes únicos. Concluyendo por tanto que entonces $\lambda = 1 y \mu = 1$

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Tenemos que $B - A = C - D$, pasando los términos: $B + D = C + A$ Y ahora dividiendo todo entre 2: $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A$ Con lo cual obtenemos los puntos medios de las diagonales que son iguales.

$\boxed{3) \Rightarrow 2)}$ Del mismo modo, si se cortan en la diagonal $\Longrightarrow \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A \Longrightarrow \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}D \Longrightarrow B - A = C - D \Longrightarrow \vec{AB} = \vec{DC}$

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ Para que sea un paralelogramo, además de $\vec{AB} = \vec{DC}$, ha de cumplir $\vec{AD} = \vec{BC}$, pero por hipotesis $A - B = D - C \Longrightarrow A - D = B - C$

□

1.6. Transformaciones

Definición (Traslaciones). Se define la traslacion de vector v como $t_v : R^2 \rightarrow R^2$ con $t_v(P) = P + v$

Proposición. *Se dan las siguientes propiedades:*

(i) $t_v \circ t_w = t_{v+w}$

(ii) $t_v^{-1} = t_{-v}$

(iii) $t_0 = I$

Definición (Afinidades(aplicaciones lineales biyectivas)). Se define una afinidad f como una aplicacion $f : R^2 \rightarrow R^2$ con $f(x) = Ax + b$, con $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $b =$

$$\begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$$

Proposición. *Se dan las siguientes propiedades:*

(i) *Las traslaciones son un caso particular de afinidades, en las que* $A = I$ *y* $b = v$

(ii) *Sean* f *y* g *afinidades, entonces* $g \circ f(x)$ *es afinidad*