Universidad de Granada

Geometría III

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

Introducción

En esta asignatura trataremos de estudiar la geometría afín. Nos centraremos en el plano, el espacio y las figuras que se forman en él.

1. El espacio afín

Definición (Espacio afín). Dado un conjunto E no vacío diremos que es un espacio afín asociado a un espacio vectorial V si existe la aplicación

$$\varphi : E \times E \to V$$

$$(a,b) \mapsto \varphi(a,b)$$

tal que se cumplan:

- Fijado un punto a la aplicación φ_a es biyectiva, es decir:

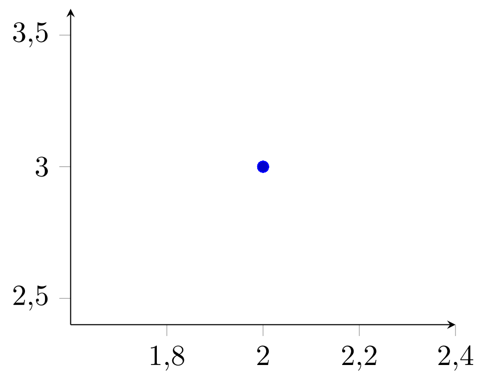
$$\forall a \in E, v \in V, \exists! b \in E : \varphi(a,b) = v$$

- Se tiene la relación de Charles, es decir:

$$\forall a,b,c \in E \quad \varphi(a,b) + \varphi(b,c) = \varphi(a,c)$$

1.1. El plano afín

Este plano, durante todo el contenido de los apuntes, será el plano $\mathbb{R}^2$. Sabemos que podemos representar un simple punto o un vector dentro de este plano (en este caso, es el plano vectorial). Daremos ahora por sabido todas las propiedades de los vectores.



Lo que haremos es transformar las propiedades de vectores en propiedades de puntos, veamos cómo unir estos dos conceptos.

Sean P y Q dos puntos del plano. Entonces, podemos transformarlos en un vector $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$. De la misma forma, analíticamente podemos ver que si tenemos un punto P y le añadimos un vector $\vec{u}$, obtenemos otro punto Q. Damos así por definidas la suma de puntos, vectores y puntos y vectores.

Definición (Combinación lineal de vectores). Si $u_1, \cdots, u_n$ son vectores y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ son escalares, entonces:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

es una combinación lineal de vectores.

Definición (Razón de vectores proporcionales). Si u y v son dos vectores proporcionales ,es decir $u = \lambda v$, entonces se llama a λ la razón de esos vectores. Si los vectores no son proporcionales no podemos tratar este concepto.

Podemos también hacer combinaciones de puntos de la siguiente forma:

Definición (Combinaciones baricéntricas de puntos). Si $P_1, ..., P_n$ son puntos y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ pesos de los puntos, que cumplen que $\sum \alpha_i = 1$, entonces una combinación de puntos de la forma:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$$

se le llama combinación baricéntrica de puntos.

Proposición. *Una combinación baricéntrica de puntos es un punto.*

Demostración. Lo que haremos, es transformar los puntos en vectores y así la demostración será trivial.

Restamos primero $P - P_1 = \sum \alpha_i (P_i - P_1)$, así tenemos el vector determinado por P y P_1 y una identidad de vectores, de la forma:

$$P - P_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_1 P_i}$$

Y llegamos así a que

$$P = P_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_1 P_i}$$

□

Definición (Combinación convexa). Si los pesos α_i asignados a los puntos son todos positivos, llamaremos a su combinación una combinación convexa.

Definición (Centro de gravedad de unos puntos). Si $P_1, ..., P_n$ son puntos y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ son sus pesos, entonces llamamos a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$$

el centro de gravedad de los puntos.

Definición (Punto medio). Sean P y Q dos puntos en el espacio afín. Entonces m es el punto medio entre P y Q si está definido como:

$$m = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}(P + Q)$$

Otra forma de hablar de él es: si $u = PQ$, entonces:

$$m = \frac{1}{2}u + P$$

1.2. Rectas afines

A partir de ahora, cada vez que mencionemos una recta, estaremos hablando de una recta afín.

Definición (Recta vectorial). Una recta vectorial es un subespacio vectorial de dimensión 1. Estas están generadas por un vector. De hecho, se notan como $L(v)$ con v un vector.

Proposición. *Si P es un punto y v un vector, entonces la recta afín r viene dada por*

$$r = P + L(v) = \{P + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Además, notaremos a $L(v) = \vec{r}$.

Definición (Variedad de dirección). Si v es un vector director, llamaremos variedad de dirección a $L(v) = \vec{r}$.

Propiedades:

- Si Q es un punto y $Q \in r \implies r = Q + L(v)$
- Si P, Q son dos puntos, entonces por ellos pasa una recta y esta es única. Esta recta se nota : $r = P + L(\overrightarrow{PQ})$

  Demostración. Si la recta r pasa por P y Q, sea s otra recta que pasa por ellos, entonces:

  $$s = P + L(\overrightarrow{PQ}) = r$$

  □

1.2.1. Posición relativa entre rectas

Según se encuentren en el plano afín, dos rectas r y s pueden ser:

- Paralelas, notado $r \parallel s \equiv \vec{r} = \vec{s}$

- No paralelas, notado $r \nparallel s \equiv$ sus vectores directores son linealmente independientes $\equiv u$ y v es base.

Teorema. *Si r, s son dos rectas del plano afín, entonces:*

(i) $r \nparallel s \implies r \cap s =$ *un punto*

(ii) $r \parallel s \implies r = s$ *ó* $r \cap s = \emptyset$

Demostración. *(i)* Si u, v son los vectores directores de r y s, entonces con los pares $\{u, v\}$ tenemos que $P + \lambda u = Q + \mu v$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y si $r = P + L(u)$ y $s = Q + L(v)$, y $\overrightarrow{PQ} = \lambda u - \mu v$ y, por ello, existen únicos λ, μ.

(ii) Sean u, v son los vectores directores de r y s. Supongamos que tienen al menos un punto A en común. Entonces como se podrían escribir estas rectas como $r = A + L(u)$ y $s = A + L(v)$ y además como $r \parallel s \implies L(r) = L(s)$ descubrimos que $r = A + L(u) = A + L(v) = s$.

□

1.3. Triángulos

Son polígonos que vienen dados por tres puntos no alineados A, B, C, que son sus vértices y las tres rectas que los unen.

Definición. Dos o más puntos $A_1, A_2, ..., A_n$ estan alineados $\iff$ existe una recta $r \subset \mathbb{R}^2$ *tal que* $A_i \in r \ \forall i \in 1, ..., n$

Proposición. *A, B, C son puntos no alineados $\iff$ $\vec{AB}, \vec{AC}$ son linealmente independientes.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Si $\nexists r \subset \mathbb{R}^2$ *tal que* $A_i \in r \ \forall i \in 1, ..., n \Rightarrow \nexists \vec{v}$ *tal que* $A, B, C \in r = A + L(\vec{v}) \Rightarrow \vec{AB} \neq \alpha \cdot \vec{AC}, \alpha \in \mathbb{R}$ porque si no se daría el caso anterior.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si A, B, C están en la misma recta, entonces la recta (única) que proporcionan los puntos A y B, y los puntos A y C son la misma, luego $r = A + L(\vec{AB}) = A + L(\vec{AC})$ y entonces $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ serían linealmente dependientes. Como sabemos que $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ no lo son, por lo tanto A, B y C no están alineados. □

Teorema. *Si consideramos los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ con dos de los lados homólogos paralelos y las razones de los vectores de esos lados son iguales. Si las rectas paralelas son: $A \vee C \parallel A_1C_1$ y $A \vee B \parallel A_1B_1$, por lo que las razones son:*

$$\frac{\vec{A_1C_1}}{\vec{AC}} = \frac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}}$$

Entonces, la pareja restante $C \vee B \parallel C_1B_1$ *y* $\frac{\vec{B_1C_1}}{\vec{BC}} = \frac{\vec{A_1B_1}}{\vec{AB}} = \frac{\vec{A_1C_1}}{\vec{AC}}$

Demostración. Si los lados son paralelos, entonces los vectores directores son proporcionales.

Si w (el lado no mencionado del primer triangulo) es $w = -u+v$ y w_1(el lado no mencionado del segundo triángulo) es $w_1 = -\lambda u + \lambda v = \lambda(-u+v) = \lambda w$ por lo que tenemos lo que queríamos. □

Definición (Triángulo medio). Si ABC es un triángulo y A',B',C' los puntos medios de sus lados, entonces:

(*i*) $A'B'C'$ es un triángulo

(*ii*) Los lados homólogos son paralelos y que el factor de proporcionalidad es: $-\dfrac{1}{2}$

Demostración. (*i*) Se hace viendo que si ABC no están alineados, estos 3 tampoco

(*ii*) Tenemos que: $A' = B/2 + C/2$, $B' = A/2 + C/2$, $C' = A/2 + B/2$. Tenemos por tanto que: $\vec{A'B'} = B' - A' = \dfrac{1}{2}(A - B) = -\dfrac{1}{2}\vec{AB}$ y por tanto los lados homólogos son paralelos.

Además, el factor es el número obtenido en la conversión, es decir $\dfrac{-1}{2}$.

□

1.3.1. Centros y ejes de un triángulo

Definición (Medianas de un triángulo). Las medianas de un triángulo ABC son las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto

Definición (Baricentro de un triángulo). El baricentro G de un triángulo que viene dado por:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

Teorema. *Si ABC es un triángulo en el plano afín, entonces las medianas son concurrentes. Su punto de corte es el Baricentro. El baricentro triseca el segmento que une un vértice con el punto medio homólogo.*

Teorema. *Sea A' el punto medio del lado opuesto a A en un triángulo ABC. Sea AvA' una de las medianas. Esta es:*

$$\{\lambda A + \mu A' : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ , \ \lambda + \mu = 1\}$$

Entonces, sabemos que $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ *y veamos que este está en la mediana: Tenemos que ver la ecuación:*

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \lambda A + \mu A' \implies \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C) = ... = G$$

Si ABC es un triángulo en $\mathbb{R}^2$, y $A'B'C'$ su triángulo medio. Sabemos que existen las medianas $m_A = L(\vec{AA'})$. Sabemos que las 3 medianas concurren en el baricentro. Este baricentro triseca a las medianas y tenemos que $G = \frac{2}{3}A' + \frac{1}{3}C$

Definición (Mediatriz de un segmento). Si $\bar{AB}$ es un segmento, entonces llamamos m_{AB} al lugar geométrico $\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}^2 : AP = BP\}$ (los puntos del plano que distan lo mismo que A que de B).

Propiedades:

(*i*) El punto medio $M \in \mathcal{L}$

(*ii*) La mediatriz es una recta que viene dada por $< \vec{AB}, P >= \frac{1}{2}(|B|^2 - |A|^2)$ y que es perpendicular al segmento AB y pasa por M el punto medio del segmento.

Definición (Rectas perpendiculares.). Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son ortogonales.

Definición (Mediatrices de un triángulo). Si ABC es un triángulo, cada lado de este triángulo tendrá su mediatriz. Por tanto, tendremos 3 mediatrices para cada triángulo.

Teorema. *Las tres mediatrices de un triángulo son concurrentes. Además, concurren en el punto O llamado el circuncentro, el centro de la circunferencia que pasa por A,B y C.*

Demostración. Lo primero es ver que es trivial que dos mediatrices nunca son paralelas. Así:

$$O = m_{AB} \cap m_{AC} \implies \begin{cases} AO = BO \\ AO = CO \end{cases} \implies BO = CO \implies O \in M_{BC}$$

□

Definición (Alturas de un triángulo). Son las rectas que pasan por un vértice y son perpendiculares al lado opuesto del triángulo. Estas alturas se cortan en el ortocentro H.

Nota. Las mediatrices de un triángulo ABC son las alturas de $A'B'C'$. Por lo que las alturas de $A'B'C'$ son concurrentes.

Proposición. *Todo triángulo* ABC *es el triángulo medio de otro triángulo* $A''B''C''$

Demostración. Para ello, tenemos que considerar $A'' = C + \vec{AB}$. Íden con B'' y C''. □

Proposición. *Todo triángulo ABC tiene un triángulo doble asociado.*

Proposición. *Si ABC es un triángulo y $A'B'C'$ su triángulo medio, entonces las alturas de $A'B'C'$ son las mediatrices de ABC y $O = H'$*

Ejercicio: Si 2 de los centros del triángulo ABC coinciden, entonces el triángulo es equilátero.

Ejercicio:Si h es una homotecia de razón $\lambda \neq 0$, entonces

- h multiplica la distancia por $|\lambda|$.
- h lleva rectas perpendiculares en rectas perpendiculares.
- h lleva mediatrices en mediatrices.
- h lleva alturas en alturas.

Ejercicio: Para toda homotecia, el centro un punto y su imagen están alineados.

Teorema (Recta de Euler). *Dado un triángulo ABC no equilátero, entonces sus tres centros G, O, H están alineados(están en la recta de Euler).*

Demostración. Tomamos el triángulo y su triángulo medio $A'B'C'$. Entonces, hay una homotecia de centro G y razón $\frac{-1}{2}$ que lleva ABC en $A'B'C'$.(Probarlo, aplicando la fórmula de la homotecia con su cent y su razón). Ahora, si G', O', H' son los centros de $A'B'C'$ y G, O, H los centros de ABC, tenemos que $G' = G$ y $O = H'$. Sabemos que la homotecia h lleva $G \to G$, $O \to O'$ y $H \to H' = O$.

Entonces, si aplicamos h al centro G, a un punto H y a su imagen O, por el ejercicio anterior, estan alineados.

□

1.4. Ecuaciones de una recta

Hemos visto una recta como un punto A y un vector $\vec{v}$. Es decir, $r \equiv (x_0, y_0) + (x, y) : (x, y) \in L(v) \equiv (x_0 + x, y_0 + y)$.

También por tanto podemos hacer una recta mediante dos puntos, tomando el vector que forman esos dos puntos y uno de ellos y teniendo la situación anterior.

Las rectas vectoriales en el plano vectorial son siempre de la forma:

$$\vec{r} \equiv (x, y) \in L : \alpha x + \beta y = 0 \text{ con } \alpha \text{ o } \beta \text{ distinto de } 0$$

Si r es una recta afín, entonces:

$$r \equiv \alpha x + \beta y = \gamma$$

con α o β distintos de 0 y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Ahora, si tenemos $r' \equiv \alpha' x + \beta' x = \gamma'$ podemos ver que:

- $r \parallel r' \iff (\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ son linealmente dependientes. Es decir, si el determinante que forman es 0
- $r \nparallel r' \iff (\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ no son linealmente dependientes. Es decir, si el determinante que forman no es 0

1.5. Cuadriláteros

Definición. $ABCD$ es un cuadrilátero que está formado por 4 puntos consecutivos no alineados 3 a 3. Se llaman lados a los segmentos que unen los vertices consecutivos, y diagonales a los segmentos que unen $A \vee C$ y $B \vee D$.

Definición (Lado). Un lado es una recta que une dos vértices consecutivos. En concreto, los cuadriláteros tienen 4 lados: $A \vee B$, $B \vee C$, $C \vee D$ y $D \vee A$.

Definición (Diagonal). Una diagonal es una recta que une dos vertices no consecutivos. En concreto, los cuadriláteros tienen 2 diagonales: $A \vee C$ y $B \vee D$.

Definición (Paralelogramo). Un paralelogramo es un cuadrilátero que cumple que todos sus lados opuestos son paralelos. Es decir, sea $ABCD$ un paralelogramo entonces AvB es paralelo a $C \vee D$ y $B \vee C$ es paralelo a $D \vee A$. Además los paralelogramos cumplen que siendo $V_1 = A \vee B$, $V_2 = B \vee C$, $V_3 = C \vee D$, $V_4 = D \vee A$ entonces:

(i) $V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = 0$

(ii) $V_3 = \lambda V_1$ *con* $\lambda \neq 0$

(iii) $V_4 = \mu V_2$ *con* $\mu \neq 0$

Proposición. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Entonces, son equivalentes:*

*(*i) *$ABCD$ es un paralelogramo*

*(*ii) $\vec{AB} = \vec{DC}$

*(*iii) *Las diagonales del cuadrilátero se cortan en su punto medio.*

Demostración. $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Solo tenemos que fijarnos en lo que implica ser paralelogramo (ver propiedad arriba): $V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = 0 \Leftrightarrow V_1 - V_2 = V_3 - V_4$ Sustituimos $V_3 = \lambda V_1$ y $V_4 = \mu V_2$: $V_1 - V_2 = \lambda V_1 - \mu V_2$ Como sabemos que V_1 *y* V_2 unen 3 puntos que no están alineados, entonces sabemos que son linealmente independientes y por tanto forman base, por esta razon, cualquier vector se forma como combinación lineal de ellos, con coeficientes únicos. Concluyendo por tanto que entonces $\lambda = 1 y \mu = 1$

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Tenemos que $B - A = C - D$, pasando los términos: $B + D = C + A$ Y ahora dividiendo todo entre 2: $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A$ Con lo cual obtenemos los puntos medios de las diagonales que son iguales.

$\boxed{3) \Rightarrow 2)}$ Del mismo modo, si se cortan en la diagonal $\implies \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A \implies \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}D \implies B - A = C - D \implies \vec{AB} = \vec{DC}$

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ Para que sea un paralelogramo, además de $\vec{AB} = \vec{DC}$, ha de cumplir $\vec{AD} = \vec{BC}$, pero por hipotesis $A - B = D - C \implies A - D = B - C$

□

1.6. Transformaciones

Definición (Traslaciones). Se define la traslacion de vector v como $t_v : R^2 \to R^2$ con $t_v(P) = P + v$

Proposición. *Se dan las siguientes propiedades:*

(i) $t_v \circ t_w = t_{v+w}$

(ii) $t_v^{-1} = t_{-v}$

(iii) $t_0 = I$

Definición (Afinidades(aplicaciones lineales biyectivas)). Se define una afinidad f como una aplicacion $f : R^2 \to R^2$ con $f(x) = Ax + b$, con $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$

Proposición. *Se dan las siguientes propiedades:*

(i) *Las traslaciones son un caso particular de afinidades, en las que $A = I$ y $b = v$*

(ii) *Sean f y g afinidades, entonces $g \circ f(x)$ es afinidad*

1.7. Circunferencias

Definición (Circunferencia). Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ que distan exactamente una distancia r de un punto fijo. Las notaremos como

$C = C(centro, radio)$

Proposición. *Dadas dos circunferencias, existen exactamente dos dilataciones que llevan una en la otra.*

1. $C_1 = C(A_1, p_1)$
2. $C_2 = C(A_2, p_2)$

Si h es una dilatación de razón λ, entonces $h(p) = \lambda p + b$. En nuestro caso, cumplirán que $h(C_1) = C_2$ y $p_2 = \lambda p_1$

Definición. Dos puntos A, B de $C = C(O, p)$ se dicen diametralmente opuestos si y solamente si $O \in \bar{AB} \equiv O = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$

Proposición. *Un par de puntos diametralmente opuestos de C determinan la circunferencia de forma única.*

Definición (Ángulo recto). Dos vectores forman un ángulo recto si $< \vec{PA}, \vec{PB} >= 0$, siendo P el punto donde se cortan.

Proposición. *El lugar geométrico desde el que dos puntos dados del plano se ven bajo un ángulo recto es una circunferencia.*

Teorema (La circunferencia de los 9 puntos de un triángulo). *Sea ABC un triángulo en el plano $\mathbb{R}^2$. Entonces existe una circunferencia que pasa por los siguientes puntos:*

- *A', B', C' los puntos medios de los lados*
- *A_2, B_2, C_2 los puntos medios de los segmentos $\bar{HA}$, $\bar{HB}$, $\bar{HC}$*
- *A_3, B_3, C_3 los tres pies de las alturas.*

Demostración. Tenemos que $B'A'B_2A_2$ es un rectángulo □

1.8. Rectángulos

Definición. Un rectángulo es un paralelogramo tal que los lados contiguos son perpendiculares.

Proposición. *Un paralelogramo es rectángulo $\iff$ las dos diagonales miden lo mismo.*

Proposición. *Todo rectángulo se inscribe en una circunferencia. Además,cada par de vértices opuestos son diametralmente opuestos.*

Proposición. *Un paralelogramo se puede inscribir en una circunferencia* $\iff$ *es un rectángulo*