Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

Introducción.

1. Convergencia uniforme y puntual

De igual manera que tratamos con sucesiones de puntos de $\mathbb{R}^N$, podemos hacerlo con sucesiones de funciones. Dado $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, podemos tomar para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : A \to \mathbb{R}^M$, y formar así una sucesión de funciones, que notaremos $\{f_n\}$. El conjunto de funciones de A en $\mathbb{R}^M$ lo denotaremos por $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$.

Definición (Convergencia punto a punto). Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$ si $\forall x \in A \quad \{f_n(x)\} \to f(x)$. Esto es, si se verifica lo siguiente:

$$\forall x \in A \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

En ocasiones denotaremos la convergencia puntual como $\{f_n\} \xrightarrow{c.p} f$.

Definición (Convergencia uniforme). Diremos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$ si se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \ : n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

En ocasiones denotaremos la convergencia uniforme como $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$.

Nota. Aunque ambas definiciones son muy parecidas, hay una diferencia clave. En la convergencia puntual, el valor de n_0 puede depender tanto de ε como de x. Sin embargo, en la convergencia uniforme, exigimos que n_0 sea válido para cualquier x.

Proposición. *Si $\{f_n\} \to f$ uniformemente $\implies$ $\{f_n\} \to f$ puntualmente.*

Nota. El recíproco no es cierto en general. Sin embargo, ambos conceptos son equivalentes si el conjunto de definición de las f_n es un conjunto finito. En efecto, si A es finito, y $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x) \ \forall x \in A$, entonces tomamos n_0 como el máximo de los $n_0(x)$ que nos da la convergencia puntual en cada $x \in A$, y $\{f_n\}$ converge uniformemente en A.

La necesidad del concepto de convergencia uniforme se aprecia bien en el siguiente teorema, junto con los ejemplos que aparecen a continuación. Normalmente, las funciones con las que trabajemos serán continuas.

Teorema 1.1. *Sean $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f_n \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M) \ \forall n \in \mathbb{N}$.*

$$\{f_n\} \to f \text{ uniformemente} \implies f \text{ es continua}$$

Demostración. Fijamos $a \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\{f_n\} \to f$ uniformemente,

$$\exists K > 0 : \; n \geq K \implies |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \;\forall y \in A \implies \begin{cases} |f_n(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} \\ |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

Como además, f_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists \delta > 0 : \left. \begin{array}{r} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \implies |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces,

$$\exists \delta > 0 : \left. \begin{array}{r} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \implies |f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)| < \varepsilon$$

Hemos probado que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \left. \begin{array}{r} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array} \right\} \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, por tanto, f es continua. □

Algunos ejemplos de sucesiones de funciones:

Ejemplo 1.1:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \; f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \frac{1}{n} \\ -nx + 1 & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{n} \end{cases}$$

Ejemplo 1.2:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \; f_n(x) = x^n$$

Ejemplo 1.3:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \; f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n}$$

Vamos a estudiar la convergencia puntual de la sucesión del ejemplo (1.1):

Primero, fijamos $x \in (0,1]$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \geq \frac{1}{n}$, luego $f_n(x) = 0$. Por otra parte, $f_n(0) = 1 \;\forall n \in \mathbb{N}$. Concluimos que

$$\{f_n\} \to f = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observamos que la convergencia puntual no preserva la continuidad de las funciones. Esto implicaría que, con esta definición de convergencia, el espacio de funciones continuas en un conjunto no sería cerrado. Además, podemos comprobar que $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f, pues en caso de hacerlo f debería ser continua, por el teorema anterior.

Ahora estudiemos la convergencia uniforme del ejemplo (1.3):

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K > \frac{1}{\varepsilon}:\quad n \geq K \implies \frac{|sen(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$$

Vemos que converge uniformemente a cero. Lo importante para esta demostración, y lo que lo será en la mayoría de los casos de convergencia uniforme, es que podemos encontrar un ε_n (en este caso $\frac{1}{n}$) tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$$

Proposición (Criterio de Cauchy). *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$, y sean $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall x \in A$. Entonces, dados $m, n \geq n_0$ se tiene que:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x) + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $x \in A$ fijo. Entonces, es claro que $\{f_n(x)\} \subseteq \mathbb{R}^M$ es una sucesión de Cauchy. Como $\mathbb{R}^M$ es completo, tenemos que $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x)\ \forall x \in A$. Ahora, tomando límite cuando $m \to \infty$ en la expresión de la hipótesis, y teniendo en cuenta que el último $<$ se transforma en $\leq$:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}:\ n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Es decir, $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$. □

1.1. El espacio de funciones continuas

Ya sabemos que dado $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, el espacio $(\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M), ||\cdot||_\infty)$ es un espacio normado, donde la norma del máximo o *norma uniforme* se define así:

$$||f||_\infty := máx\{|f(x)| : x \in A\} = \underset{x \in A}{máx}\ |f(x)|$$

Proposición. *En el espacio $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$, con A compacto, la convergencia de sucesiones equivale a la convergencia uniforme, esto es:*

$$\{f_n\} \to f \text{ en } \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M) \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$$

Demostración.
$||f_n - f||_\infty \to 0 \iff máx\ |f_n(x) - f(x)| \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow máx\ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\ \forall x \in A \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f.$ □

Teorema 1.2 ($\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ es completo). *En el espacio $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$, con A compacto, también ser sucesión de Cauchy equivale a la convergencia uniforme, esto es:*

$$\{f_n\} \text{ es de Cauchy en } \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M) \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$$

Demostración. El razonamiento es análogo al anterior, utilizando esta vez el criterio de Cauchy visto anteriormente. □

Es importante recalcar que estamos suponiendo que el subconjunto A es compacto. Podemos extender el resultado anterior, considerando el espacio $(\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M), \|\cdot\|_\infty)$, donde:

$\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M) := \{f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M : \text{f es continua y acotada}\}$

$\|f\|_\infty := \underset{x \in A}{sup}\ |f(x)|$

Proposición. *El espacio $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$ es un espacio de Banach, es decir, es un espacio normado y completo.*

Demostración. Empezamos probando que $(\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado:

- Positividad. $\|f\|_\infty = 0 \iff sup_{x \in A}|f(x)| = 0 \iff f(x) = 0,\ \forall x \in A \iff$ f es la función 0.
- Homogeneidad: $k \in \mathbb{R}$ entonces $\|kf\|_\infty = |k|\|f\|_\infty \iff sup_{x \in A}|kf(x)| = sup_{x \in A}|k||f(x)| = |k| sup_{x \in A}|f(x)| = |k|\|f\|_\infty$.
- Desigualdad triangular: $|f + g|_\infty \leq |f|_\infty + |g|_\infty \iff sup_{x \in A}|f(x) + g(x)| \leq sup_{x \in A}|f(x)| + sup_{x \in A}|g(x)|$. para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$.

□

Nota. Si A es compacto, entonces $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M) = \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$.

Veamos ahora dos teoremas que relacionan el concepto de convergencia uniforme con los conceptos de derivación e integración.

Teorema 1.3. *Sean $f, f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ tales que $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$. Entonces,*

$$\left\{\int_a^b f_n\right\} \xrightarrow{c.u} \int_a^b f$$

Equivalentemente, podemos intercambiar la integral con el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x \in [a,b]$. Entonces,

$$\left|\int_a^b f_n - \int_a^b f\right| = \left|\int_a^b (f_n - f)\right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

□

Teorema 1.4. *Sea $f_n \in \mathcal{C}^1((a,b))$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y sean $f, g \in \mathcal{C}((a,b)$. Supongamos que $\{f_n(x)\} \to f(x)$ c.p. $\forall x \in (a,b)$, y supongamos también que $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g$ en (a,b). Entonces, $f \in \mathcal{C}^1((a,b))$, y $f' = g$.*

Demostración. Elegimos primero un $x_0 \in (a,b)$ fijo. Entonces, $\{f_n(x_0)\} \to f(x_0)$ por hipótesis. Como f_n' es continua, entonces, por el teorema fundamental del cálculo:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)dt$$

Ahora, como $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g$ en el intervalo cerrado de extremos x_0 y x, por el *Teorema 1.3* tenemos que $\{f_n(x)\} \to G(x)$ $\forall x \in (a,b)$, donde:

$$G(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)dt$$

Es decir, $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente en (a,b) a $G(x)$. Ahora, G es de clase 1 por ser $g(t)$ continua, y además, tenemos que $G(x_0) = f(x_0)$. Por otro lado, es claro que $G' = g$.

Pero también $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x)$ por hipótesis, por lo que necesariamente $\forall x \in (a,b)$ $G(x) = f(x)$, esto es, $f \in \mathcal{C}^1((a,b))$ y $f' = G' = g$. □

Corolario 1.1. *Sea $f_n \in \mathcal{C}^1((a,b))$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y sean $f, g \in \mathcal{C}((a,b)$. Supongamos que $\exists \alpha \in (a,b)$ tal que $\{f_n(\alpha)\}$ es convergente, y supongamos también que $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g$ en (a,b). Entonces, $\exists f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\{f_n\} \to f$ uniformemente. Además, $f \in \mathcal{C}^1(a,b)$, y $f'(x) = g(x)$ $\forall x \in (a,b)$.*

Demostración. Probaremos únicamente que $\{f_n\} \to f$ uniformemente. El resto de la tesis se sigue de aplicar el *Teorema 1.4*.

Sea $\varepsilon > 0$. Por un lado, como $\{f_n'\}$ converge uniformemente, aplicamos el *Criterio de Cauchy* para obtener un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$p, q \geq k_1 \implies |f_p'(y) - f_q'(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Del mismo modo, como $\{f_n(\alpha)\}$ es una sucesión de vectores convergente, es de Cauchy, y obtenmos un $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$p, q \geq k_2 \implies |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora, defino $k := k_1 + k_2$, y teniendo en cuenta el *Teorema del Valor Medio*, se tiene que, dado $x \in (a, b)$:

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq |f_p(x) - f_p(\alpha) + f_p(\alpha) - f_q(\alpha) + f_q(\alpha) - f_q(x)|$$

$$\leq |f_p(x) - f_p(\alpha)| + |f_q(\alpha) - f_q(x)| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| \leq |x - a| \left| f_p'(z_x) - f_q'(z_x) \right| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)|$$

$$\leq (b - a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b - a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donde z_x está en el intervalo abierto de extremos a y x. Observemos que en este razonamiento, el valor de m **no depende de** x, sino exclusivamente de quién sea ε. Por tanto, por el *Criterio de Cauchy*, se tiene que $\{f_n\}$ converge uniformemente en (a, b). □

2. Series de funciones

Definición (Sumas parciales). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto. Dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciones $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$, se llama sumas parciales S_k a la función definida en Ω mediante

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x), \quad x \in \Omega.$$

Definición (Serie de funciones). Llamamos serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ al par formado por la sucesiones $\{f_n\}$ y $\{S_n\}$. Llamaremos a f_n el término general de la serie de funciones $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$.

Definición (Convergencia de series de funciones). El carácter de la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones se basa en la correspondiente convergencia de la sucesión de funciones $\{S_n\}$ formada por las sumas parciales S_n. Por tanto, tenemos de nuevo dos tipos de convergencia.

Si $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$ es una función y $A \subset \Omega$, diremos

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ es convergente puntualmente en } A \Leftrightarrow \{S_n\} \longrightarrow S \textit{ c.p. en } A.$$

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ es convergente uniformente en } A \Leftrightarrow \{S_n(x)\} \longrightarrow S(x) \text{ c.u. en } A.$$

Diremos que S es la suma de la serie de funciones:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ puntualmente (resp. uniformemente) en } A.$$

Proposición. *Sea $\sum_{n\geq 0} f_n$ una serie de funciones definida en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dicha serie converge uniformemente en un subconjunto $B \subseteq A$, entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge a 0 uniformemente en B.*

Demostración. Es claro que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = S_{n+1} - S_n$. Aplicando límites en la igualdad anterior, y sabiendo que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformemente en B, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\} = \lim_{n\to\infty} \{S_n(x)\} - \lim_{n\to\infty} \{S_{n+1}(x)\} = S - S = 0 \quad \forall x \in B$$

□

Puesto que la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones se basa en la correspondiente convergencia de la sucesión de funciones $\{S_n\}$ formada por las sumas parciales, tenemos una relación directa de la convergencia de series con la continuidad, derivación e integración.

Teorema 2.1. *Si una serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones continuas f_n es uniformemente convergente, entonces la función suma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una función continua.*

Demostración. Como la serie es uniformemente convergente, tenemos que $\{S_n\} \to S$ uniformemente. Como las f_n eran continuas, las funciones S_n son continuas, por ser suma finita de funciones continuas. Por tanto, aplicando el teorema *Teorema 1.1* a la sucesión de funciones $\{S_n\}$, tenemos que $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua. □

Teorema 2.2. *Si la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones continuas $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente convergente, entonces $\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx$.*

Demostración. Siguiendo la idea del teorema anterior, aplicamos el *Teorema 1.3* a la sucesión de funciones $\{S_n\}$, y obtenemos que:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n \Rightarrow \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{n} \int_a^b f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

□

Teorema 2.3. *Si para $f_n \in C^1(a,b)$ la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ es c.p. en (a,b) y la serie $\sum_{n\geq 1} f_n'$ es c.u. en (a,b), entonces la suma $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es una función de $C^1(a,b)$ con $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.*

Demostración. Claramente $S_n \in \mathcal{C}^1(a,b)$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y además tenemos que $\{S_n\}$ *c.p.* en (a,b), y $\{S_n'\}$ *c.u.* en (a,b), pues la derivada de una suma finita es la suma de las derivadas. Bajo estas hipótesis, podemos aplicar a $\{S_n\}$ el *Teorema 1.4*, obteniendo que $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{C}^1(a,b)$, y además:

$$S' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} \{S_n'\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

□

2.1. Criterios de convergencia para series de funciones

Teorema 2.4 (Criterio de Weierstrass). *Si existen constantes M_n positivas tales que $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A$ y la serie de números reales $\sum_{n\geq 1} M_n$ es convergente, entonces la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ es convergente uniformemente (y absolutamente) en A.*

Demostración. Por el criterio de Cauchy para la convergencia de una serie de números positivos (las sumas parciales son de Cauchy), se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_o \in \mathbb{N} : \; |S_{n+k} - S_{n-1}| = M_n + ... + M_{n+k} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_o \; \forall k \in \mathbb{N}$$

Usando que $|f_n(x)| \leq M_n$ $\forall x \in A$ y la desigualdad triangular obtenemos:

$$|f_n(x) + ... + f_{n+k}(x)| \leq |f_n(x)| + ... + |f_{n+k}(x)| \leq M_n + ... + M_{n+k} < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Y por tanto:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_o \in \mathbb{N} : \; |f_n(x) + ... + f_{n+k}(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq n_o \; \forall k \in \mathbb{N} \; \forall x \in A$$

Como la sucesión de sumas parciales de la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente, queda probado que dicha serie converge uniformemente en A. □

Teorema 2.5 (Criterio de Abel). *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ tales que $\{\phi_n\}$ es una sucesión decreciente de funciones, es decir, $\phi_{n+1}(x) \leq \phi_n(x)$ $\forall x \in A$. Supóngase que $\exists M$ tal que $|\phi_n(x)| \leq M$ $\forall x \in A$ $\forall n \in \mathbb{N}$.*

$$Si \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \text{ } c.u. \text{ } en \text{ } A \implies \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(x) f_n(x) \text{ } c.u. \text{ } en \text{ } A.$$

2.2. Series de potencias

Un caso interesante de series de funciones lo constituyen las series de potencias, esto es, aquellas series en las que las funciones son potenciales:

$$\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n, \quad a_n, a \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Veamos una característica importante de las series de potencias, que nos ayuda a determinar su carácter de convergencia.

Definición (Radio de convergencia). Dada una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, definimos su radio de convergencia $R \in [0, \infty]$ como:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

Nota. En la definición anterior, permitimos que $R = \infty$, tomando como convenio que $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$.

Definición (Disco de convergencia). Dada una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, definimos el disco de convergencia $D(a, R) := \{x : |x-a| < R\}$.

Nota. Si $R = \infty$, entonces $D(a, R) = \mathbb{R}$.

El siguiente teorema da sentido a la nomeclatura seguida en las dos definiciones anteriores.

Teorema 2.6. *La serie de potencias* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$

(i) *converge uniformemente en $D(a, R')$ para cualquier $R' < R$ (en particular, converge absolutamente para todo $x \in D(a, R)$.*

(ii) *no converge si $x \notin \overline{D(a, R)}$.*

Demostración.
(i) Sea $R' < R$. Como $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1/R'$, si elegimos $R'' \in (R', R)$, deducimos que $\exists n_0 \geq 0$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1/R''$, $\forall n \geq n_0$.

Esto implica que

$$|a_n(x-a)^n| = |a_n| \cdot |x-a|^n \leq \left(\frac{R'}{R''}\right)^n, \quad \forall x \in D(a, R'), \ \forall n \geq n_0,$$

y el primer apartado se concluye aplicando el criterio de Weierstrass.

(ii) Basta observar que si la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ es convergente en un punto $x \neq a$, entonces $\{a_n(x-a)^n\} \to 0$, y tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de convergencia tenemos que:

$$\exists n_0 > 0 : \, |a_n||x-a|^n \leq 1, \; \forall n \geq n_0$$

Y por tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \cdot |x-a| = |a_n| \cdot |x-a|^n = \frac{|x-a|}{R} \leq 1 \implies |x-a| \leq R$$

Es decir, si la serie converge, necesariamente $x \in \overline{D(a,R)}$. $\square$

Por último, veamos un teorema sobre derivación e integración de series de potencias. Para ello, notemos que si R es el radio de convergencia de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, podemos definir la función S en $D(a,R)$ mediante:

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad \forall x \in D(a,R)$$

Teorema 2.7. *Sea $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ una serie de potencias. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:*

*(*i*)* *La suma $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ es una función C^∞ en el disco de convergencia $D(a,R)$.*

*(*ii*)* $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n a_n(x-a)^{n-1}$, *esto es,*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n(x-a)^n\right).$$

*(*iii*)* $\displaystyle\int_a^x S(y)\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$, *esto es,*

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n(x-a)^n\,dx.$$

2.3. Funciones analíticas

Nos preguntamos ahora si cualquier función C^∞ se puede escribir como suma de una serie de potencias, es decir, si dada $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ *y* $a \in I$, $\exists\{a_n\}$ *tal que* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

Haciendo uso del teorema de Taylor, podemos ver la siguiente condición suficiente para que una función $f \in C^\infty$ coincida con la suma de su serie de Taylor.

Teorema 2.8. *Si una función de clase C^∞ en un intervalo I verifica*

$$\exists M > 0 \ : \ |f^{n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I$$

entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!} \ (x-a)^n, \quad \forall x \in I.$$

Demostración. Fijamos $x \in I$, y observamos que las sumas parciales $S_k(x)$ de la serie son el polinomio de Taylor de orden k:

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{n)}(a)}{n!} \ (x-a)^n,$$

Usando el teorema del resto, tendremos que $\exists c$ entre x y a tal que:

$$|f(x) - S_k(x)| = \left| \frac{f^{k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} \right| \leq M \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \to 0$$

Es decir, la distancia entre f y S_n se hace tan pequeña como se quiera. Por tanto, hemos probado que $f(x) = \lim_{n\to\infty} \{S_n(x)\} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!} \ (x-a)^n, \quad \forall x \in I.$ □

Como consecuencia de este teorema, podemos escribir algunas funciones elementales como la suma de su serie de Taylor, en el punto $a = 0$.

Ejemplo 2.1: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Ejemplo 2.2: $\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$.

Ejemplo 2.3: $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Sin embargo, no todas las funciones C^∞ admiten una descomposición en sumas de funciones potenciales. Dada una serie de potencias, y usando el *Teorema 2.7*, notemos lo siguiente:

$$S'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (a-a)^{n-1} = a_1 \quad ; \quad S''(a) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (a-a)^{n-2} = 2a_2 \quad ; \quad \ldots$$

En general, se demuestra por inducción que $S^{k)}(a) = k! \cdot a_k$. Es decir, fijado un a y conocida la función S, se tiene que necesariamente $a_k = \frac{S^{k)}(a)}{k!}$.

Recordemos que si una función $f \in \mathcal{C}^\infty$ cumple que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \ \forall x \in A$, dicha función es justamente lo que nos hemos referido como la suma de la serie, S. Pero acabamos de ver que, en ese caso, los a_n están perfectamente determinados, y resulta que f se escribiría como su suma de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Por tanto, la pregunta que nos hacíamos equivale a preguntarse si toda función $\mathcal{C}^\infty$ se puede escribir como su suma de Taylor. La respuesta es que, en general, esto no es posible (ya vimos en el *Teorema 2.8* que sí se cumple si todas las derivadas de f están acotadas).

Un contraejemplo sería la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es claro que $f \in \mathcal{C}^\infty$ y que $f \neq 0$. Además, se tiene que $f(0) = 0$, y $f^{k)}(0) = 0 \ \ \forall k \geq 1$.

Si f se escribiese como su suma de Taylor, tendríamos que, en el punto $a = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} \cdot x^n = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

Lo cual es una contradicción, pues $f \neq 0$. Por tanto, f no se puede escribir como suma de una serie de potencias.

Las funciones que *sí* se pueden escribir como suma de una serie de potencias tienen propiedades muy interesantes. Tanto es así, que dichas funciones tienen un nombre propio.

Definición (Función analítica). Decimos que una función $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$ es analítica si se puede escribir como su suma de Taylor, es decir, si se cumple que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n \ \ \forall x \in A$$