Universidad de Granada

Ejercicios resueltos Álgebra I

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

1. Ejercicio 6

En el anillo $\mathbb{Z}$[i], resolver el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv i & mod\ (3) \\ x \equiv 1+i & mod\ (3+2i) \\ x \equiv 3+2i & mod\ (4+i) \end{cases}$$

Resolución.

Empezaremos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x \equiv i & mod\ (3) \\ x \equiv 1+i & mod\ (3+2i) \end{cases}$$

Para ello hallaremos la solución particular de $x \equiv i\ mod\ (3)$. Como i es una unidad del anillo, entonces $\forall a \in \mathbb{Z}[i] \Rightarrow (a,i) = i$. Los coeficientes de Bezout son $0 * 3 + 1 * i = 1$ de manera trivial. Entonces la solución general de la primera ecuación sería $x = i + 3 * k$.

Ahora sustituimos x en la segunda ecuación, y nos queda la ecuación $i+3k \equiv 1+i\ mod(3+2i)$ de manera equivalente $3k \equiv 1\ mod\ (3+2i)$. Ahora sacaremos los coeficientes de Bezout de 3 y 3+2i.

	3+2i	3
3+2i	1	0
3	0	1
-i	1	-1-i

Por ello, sabemos que $3 * (-1-i) \equiv -i\ mod(3+2i)$. Una solución particular será $k = (-1-i) * -i = (i-1)$. La solución general para k será por lo tanto $k = (i-1)+(3+2i)*k'$.

Sustituimos la particular de k en la primera resolución y hallaríamos $M = [3, 3+2i]$ para ver cada cuanto debemos hacer la repetición. Para calcular el mcm recordaremos que $(a,b) * [a,b] = ab \Rightarrow \frac{ab}{(a,b)} = [a,b]$. Entonces para nuestro caso particular $[3, 3+2i] = \frac{9+6i}{-i} = 9i - 6$. Así pues la solución será:

$$x = i + 3(i-1) + k''(9i-6) = 4i - 3 + k''(9i-6)$$

Ahora cogemos el sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 4i-3 & mod\ (9i-6) \\ x \equiv 3+2i & mod\ (4+i) \end{cases}$$

Para resolverlo y hallar (por fin) la solución final haremos lo mismo: hallar la solución general de la primera ecuación (ya resuelta) y sustituir en la segunda, mcm de los módulos y terminamos.

Solución primera ecuación: $4i - 3 + k''(9i - 6)$.

Sustituimos segunda: $4i-3+k''(9i-6) \equiv 3+2i \;\; mod\; (4+i) \rightarrow (9i-6)k'' \equiv 6-2i \;\; mod\; (4+i)$

Hallamos coeficientes de bezout y mcd:

	9i-6	4+i
9i-6	1	0
4+i	0	1
2i	1	1-2i
i	-2	4i-1

Enunciamos solución particular y un indicio de la general: Como $(9i-6)(-2) \equiv i \; mod\; (4i-1) \Rightarrow (9i-6)(-2)(-6i-2) \equiv i(-6i-2) \; mod\; (4i-1) \Rightarrow (9i-6)(12i+4) \equiv (6-2i) \; mod\; (4i-1) \Rightarrow k'' = (12i+4) + [9i-6, 4+i]k'''$

Calculamos [9i-6,4+i]: $\frac{30i-33}{i} = 30 - 33i$

Solución general: $(12i + 4) + (30 - 33i)k'''$