Universidad de Granada

Modelos Matemáticos I

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

Introducción.

En esta asignatura, intentaremos estudiar una serie de modelos que se dan en la naturaleza y que explican cosas de

1. Ecuaciones en diferencias de primer orden

Para motivar este tema, vamos a poner primero unos ejemplos de ecuacinoes en diferencias de primer orden.

1. Progresión geométrica, una ecuación de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n$$

   Para dar una solución, deberíamos establecer el valor de x_n de forma explícita. En este caso, una solución sería:

$$x_n = \mathcal{C}\alpha^n$$

   Donde $\mathcal{C}$ es una constante. Así, $x_0 = \mathcal{C}$.

2. Progresión aritmética, es decir, una de la forma:

$$x_{n+1} = x_n + \beta$$

   donde una solución sería:

$$x_n = \mathcal{C} + n\beta$$

3. La sucesión de Fibonacci es otro ejemplo de una ecuación en diferencias.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

Definición (Ecuación en diferencias). Una ecuación en diferencias es una ecuación en la que intervienen un número fijo de términos consecutivos de una sucesión.

$$F(x_{n+k}, \ldots, x_n, n) = 0$$

donde F es una función de varias variables, $\{x_n\}$ es una sucesión, las incógnitas y $k \geq 1$ es el orden de la ecuación.

Como ejemplo de cálculo de órdenes, podríamos que decir de la progresión aritmética y geométrica son de orden 1 y la sucesión de Fibonacci es de orden 2.

Definición (Resolución de una ecuación en diferencias). Resolver una ecuación en diferencias es hallar la forma explícita de todas las sucesiones que satisfacen la igualdad, la solución general. Una solución concreta de la ecuación se llama solución particular y normalmente se obtiene a partir de k condiciones iniciales en la solución general.

Nota. Una propiedad de las progresiones geométricas es que si la progresión converge, converge a 0. Si no converge, puede ser cíclica, divergente o alternada.

Definición (Ecuación en diferencias lineal). Una ecuación en diferencias lineal viene dado por una ecuación de la forma:

$$a_k(n)x_{n+k} + ... + a_0(n)x_n = b(n)$$

Si $a_k(n) \neq 0,\ n \geq 0$ se dice que es de orden k. Si $b(n) = 0$, se dice que la ecuación es homogénea.

1.1. Ecuación en diferencias de primer orden lineal con coeficientes constantes

Una ecuación en diferencias de primer orden lineal será de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C} \qquad (1)$$

Estas ecuaciones serán de orden 1 con coeficientes constantes.

Proposición. *La solución de estas ecuaciones será:*

(i) *Si $\beta = 0$ es una progresión geométrica, así que $x_n = \mathcal{C}\alpha^n$*

(ii) *Si $\beta \neq 0$ y $\alpha = 1$ entonces es una progresión aritmética, así que $x_n = \mathcal{C} + \beta n$*

(iii) *Si $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ entonces la ecuación tiene una solución constante:*

$$x_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

Esta solución satisfacerá la ecuación si no dependiera de n.

Demostración. Probaremos la tercera, que es la que no es trivial.
Buscaremos entonces una solución constante x_*. Si es solución, debe verificar que:

$$x_* = \alpha x_* + \beta \implies x_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

□

Ejemplo: Comprobar si en el caso (*iii*), una solución podría ser:

$$x_n = \alpha^n x_0 + \beta \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i$$

Proposición. *Si $\alpha \neq 1$, la sucesión $\{x_n\}$ es solución de la ecuación $\iff$ la sucesión $\{z_n\}$ definida por $z_n = x_n - x_*$ es solución de la ecuación:*

$$z_{n+1} = \alpha z_n \qquad (2)$$

Demostración. Si $\{\bar{x}_n\}_{n\geq 0}$ es solución de (1) $\implies \bar{x}_{n+1} = \alpha\bar{x}_n + \beta$

Además, $\{x_*\}$ es solución de (1) $\implies x_* = \alpha x_* + \beta$

Ahora, restamos ambas y nos queda:

$$\bar{x}_{n+1} - x_* = \alpha(\bar{x}_n - x_*).$$

Por lo que hemos obtenido una solución de la ecuación (2), pues si $\bar{z}_n = \bar{x}_n - x_* \implies \bar{z}_{n+1} = \alpha\bar{z}_n \implies \{\bar{z}_n\}_{n\geq 0} = \{\bar{x}_n - x_*\}_{n\geq 0}$ es solución de (2).

La implicación de izquierda a derecha se realiza deshaciendo la diferencia.

□

Ejemplo: Resuelva $x_{n+1} = -ix_n + 3$. Esto es una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea.
Solución. Primero, calculamos la solución constante: $x_n = x_*$ para $n \geq 0$. Esta es:

$$x_* = -ix_* + 3 \implies x_* = \frac{3}{1+i}$$

Calculamos ahora la ecuación homogénea asociada, esta es $z_{n+1} = -iz_n$ con $n \geq 0$. Así, $z_n = \mathcal{C}(-i)^n$.

Ahora, una solución de la ecuación inicial sería:

$$x_n = x_* + z_n = \frac{3}{1+i} + \mathcal{C}(-i)^n$$

□

Proposición. *Si $\alpha \neq 1$, la ecuación:*

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

entonces la ecuación tiene tantas soluciones como valores posibles tenga la condición inicial:

$$x_n = x_* + (x_0 - x_*)\alpha^n, \quad n = 0, 1, 2...$$

Demostración. Si $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ y $\alpha \neq 1$, las soluciones de son de la forma:

$$x_n = x_* + z_n$$

con z_n una solución homogénea asociada y x_* una solución constante.

$$z_{n+1} = \alpha z_n \implies z_n = \mathcal{C}\alpha^n \implies z_n = (x_o - x_*)\alpha^n \implies x_n = x_o + (x_0 - x_*)\alpha^n$$

Esto es,

$$x_n = \frac{\beta}{1-\alpha} + \left(x_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right)$$

□

Ejemplo: $x_{n+1} = ix_n + 1 \quad n \geq 0$ con $x_0 = i$

Solución. Primero hallamos la solución constante:

$$x_* = \frac{1}{1-i} \Leftarrow x_* = ix_* + 1$$

Ahora, hallamos la solución homogénea asociada:

$$z_{n+1} = iz_n \text{ con } z_n = \mathcal{C}i^n$$

Seguidamente, hallamos la solución de la ecuación completa:

$$x_n = x_* + z_n = \frac{1}{1-i} + \mathcal{C}i^n$$

Por último, aplicamos la condición inicial $x_0 = i$ dada. Así:

$$x_0 = \frac{1}{1-i} + \mathcal{C}i \implies \mathcal{C} = i - \frac{1}{1-i} = \frac{i+1-1}{1-i} = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

De esta forma, la solución sería:

$$x_n = \frac{1}{1-i} + \left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i\right) i^n$$

Y esto se podría pasar a forma estándar de número complejo, quedando de la siguiente manera:

$$x_n = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right) i^n$$

□

Ejemplo (2): $x_{n+1} = (3-2i)x_n - 1$ para $n \geq 0$.

Solución. Tenemos que:

$$x_n = \frac{-1}{1-(3-2i)} + \mathcal{C}(3-2i)^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i + \mathcal{C}(3-2i)^n$$

□

Proposición (Fórmula de Moivre). *Si α es un número complejo, entonces:*

$$\alpha^n = r^n(cos(n\theta) + isen(n\theta))$$

Demostración. Vamos a hacer un razonamiento por inducción:

1. Si $n = 1$. Entonces, $\alpha = r(cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, trivial.
2. Supuesto cierto para cierto n, lo demostraremos para $n+1$:

$$\alpha^{n+1} = \alpha\alpha^n = [r(cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))][r^n(cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))] =$$

$$r^{n+1}[cos(\theta)cos(n\theta) + isen(\theta)cos(n\theta) + isen(n\theta)cos(\theta) - sen(\theta)sen(n\theta)] =$$

$$r^{n+1}[cos(\theta + n\theta) + isen(\theta + n\theta)] = r^{n+1}[cos((n+1)\theta) + isen((n+1)\theta)]$$

□

Nota. Esto es porque un número complejo es de la forma $\alpha = a + bi = r(cos\theta + isin\theta)$. Donde el módulo es $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ y θ es el ángulo, tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $(cos\theta + isin\theta)$ tiene módulo 1.

1.2. Comportamiento asintótico de las soluciones

Tendríamos en este caso que estudiar cómo se comporta la sucesión $\{\alpha^n\}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Proposición.

(i) $|\alpha| < 1 \implies \{\alpha^n\} \to 0$

(ii) $|\alpha| > 1 \implies \{|\alpha|^n\} \to +\infty$

(iii) $|\alpha| = 1 \implies \alpha^n \in \mathbb{S}^1$

Ahora, si tuviéramos una ecuación de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

Ya sabemos que su solución sería:

$$x_* + z_n = x_* + \mathcal{C}\alpha^n$$

Por tanto tendríamos que estudiar cómo varía α^n.

Teorema (Comportamiento asintótico de las soluciones). *Las soluciones $\{x_n\}_{n\geq 0}$ de la ecuación:*

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

verifican:

- *Si $|\alpha| < 1$, se tiene que $x_n \to x_*$*
- *Si $|\alpha| > 1$, se tiene que x_n diverge.*
- *Si $|\alpha| = 1$, entonces x_n oscila alrededor de x_*, esto es, x_n está en la circunferencia de centro x_* y radio $|x_0 - x_*|$.*

Demostración. Si tenemos que:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

Ya sabemos que su solución sería:

$$x_* + z_n = x_* + \mathcal{C}\alpha^n$$

. Entonces:

(i) $|\alpha| < 1 \implies \{\alpha^n\} \to 0 \implies \{x_n\} \to x_*$

(ii) $|\alpha| > 1 \implies \{|\alpha|^n\} \to +\infty \implies \{|x_n|\}$ nos da el mismo comportamiento que $|\alpha|^n$

(iii) $|\alpha| = 1 \implies \alpha^n \in \mathbb{S}^1$ si tomamos módulos y despejamos, tenemos que:

$$|x_n - x_*| = |G|$$

Así que todas las soluciones se mantienen en la circunferencia de centro x_* y radio $|x_0 - x_*|$

□

2. Modelo de la telaraña

En este modelo, trabajaremos con dos funciones:

- Una función oferta, $O(p)$ que depende del precio p
- Una función demanda, $D(p)$, que también depende del precio p

Supondremos ahora que estas dos funciones son rectas y que $O(p)$ es creciente y $D(p)$ decreciente, para simplificar el sistema. Por ello, tendremos:

- $O(p) = a + bp$ con $b > 0$ la marginal de la oferta
- $D(p) = c - dp$ con $d > 0$ la marginal de la demanda

Sin embargo, estas funciones tienen que ajustarse haciendo una estimación con los datos anteriores. Buscamos un punto de equilibrio entre la oferta y la demanda, un punto de corte entre estas dos funciones establecidas. A este punto lo llamaremos p_*. Igualando las ecuaciones, tendríamos que:

$$a + bp_* = c - dp_* \implies (b+d)p_* = c - a \implies p_* = \frac{c-a}{b+d}$$

Ahora, para que este precio sea correcto, tenemos que tener que b y d sean mayores que cero para no dividir por cero, y que el precio sea positivo, así que supondremos que $c > a$.

Ahora, para poder trabajar con antelación, lo que intentamos hacer es que:

$$D(p_n) = O(p_{n-1}) \implies c - dp_n = a + bp_{n-1}$$

Lo cual es una ecuación en diferencias de primer orden, que se puede seguir despejando como:

$$p_{n+1} = -\frac{b}{d}p_n + \frac{c-a}{d}$$

Y ahora, resolvemos:

$$p_n = x_* + z_n = p_* + \mathcal{C}\left(-\frac{b}{d}\right)^n$$

porque

$$x_* = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{(c-a)/d}{1-(-b/d)} = \frac{c-a}{b+d} = p_*$$

El objetivo es conseguir que $p_n \to p_*$ y para ello tenemos que conseguir que, como $p_{n+1} = p_* + \mathcal{C}(\frac{-b}{d})^n$, entonces necesitamos que $\left|\frac{-b}{d}\right| < 1 \implies b < d$. Por ello, lo que tenemos en las rectas es que la pendiente (b) de la recta de la oferta sea menor que la pendiente de la demanda (d).

3. El modelo de Verhulst

Primero, estudiaremos un primer acercamiento que hubo a este modelo

3.1. La ecuación de Malthus

Vamos a estudiar ahora una ecuación que modeliza la evolución de la población de una determinada especie en un hábitat sin limitación de alimentos. Esta primera suposición ya no es real, pues siempre hay limitaciones.

Vamos a llamar:

- P_n es el número de individuos en el periodo de tiempo n. $P_n \geq 0$
- α_n es la tasa de fertilidad o natalidad por individuo. $\alpha_n \in \mathbb{R}^+$

  De esta forma, $\alpha_n P_n$ será el número de nacimientos en el periodo n.
- α_m es la tasa de mortalidad. $0 < \alpha_m < 1$, pues esta es un tanto por ciento y tenemos que:

  Así, $\alpha_m P_n$ será el número de muertes en el periodo n.

Una vez presentadas las incógnitas, podemos afirmar que la población en el siguiente periodo será:

$$P_{n+1} = P_n + \alpha_n P_n - \alpha_m P_n \implies P_{n+1} = (1 + \alpha_m - \alpha_m)P_n$$

Esto es una ecuación en diferencias lineal de primer orden homogénea. En realidad, es una progresión geométrica y por tanto una solución es:

$$P_n = \mathcal{C}(1 + \alpha_n - \alpha_m)^n \quad n \geq 0$$

Pero esta constante es la población inicial, luego eso es equivalente a:

$$P_n = P_0(1 + \alpha_n - \alpha_m)^n \quad n \geq 0$$

Vamos a llamar entonces a $(1 + \alpha_n - \alpha_m) = R$ la razón de crecimiento.

- $(1 + \alpha_n - \alpha_m) > 1 \implies \{P_n\} \to +\infty$. Ahora, esto ocurrirá si y sólamente si $\alpha_n > \alpha_m$
- $(1 + \alpha_n - \alpha_m) < 1 \implies \{P_n\} \to 0$. Del mismo modo, esto sólo ocurre si $\alpha_n < \alpha_m$
- $(1 + \alpha_n - \alpha_m) = 1 \implies \{P_n\} \to P_0$. Que ocurre si y solo si $\alpha_n = \alpha_m$.

Se cumple siempre que $R = \dfrac{P_{n+1}}{P_n}$.

Definición (Razón de crecimiento). Llamaremos razón de crecimiento a:

$$\alpha = \alpha_n - \alpha_m$$

Que representa la variación del tamaño de la población por individuo. Además, podemos ver despejando de la ecuación inicial que:

$$\alpha = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}$$

3.2. El modelo de Verhulst

Esto quiso dar un arreglo a la ecuación de Malthus. Ahora, suponemos que en el hábitat hay un número máximo de individuos al que llamaremos M.

Según Verhulst, la tasa de crecimiento es proporcional a $M - P_n$, esto es:

$$\alpha = \frac{P_{n+1} - P_n}{P_n} = K(M - P_N) \quad K > 0$$

De aquí, podemos ver fácilmente que si $P_n < M \implies P_{n+1} > P_n$, por lo que la población crece.

También, si $P_n > M \implies P_{n+1} < P_n$, por lo que la población decrece.

Por tanto, con el modelo de Verhulst desarrollando en la euación de Malthus la ecuación será:

$$P_{n+1} = [(1 + K(M - P_n)]P_n \implies P_{n+1} = (1 + KM)P_n - KP_n^2$$

Donde KP_n^2 lo llamaremos la **competencia entre individuos**.

Esto es una ecuación en diferencias **no lineal** de primer orden y no homogénea. Aún no hemos explicado cómo se resuelven este tipo de ecuaciones, abordaremos este tema más adelante.

Sin embargo, podemos hacer a la ecuación un cambio de variable haciendo que:

- $(1 + KM) = \mu$
- $x_n = \dfrac{K}{1 + Km} P_n$

Y nos queda que:

$$\frac{K}{1 + Km} P_{n+1} = \frac{K}{1 + Km}(1 + KM) P_n (1 - \frac{K}{1 + Km} P_n)$$

Y con los términos anteriores esto nos queda como:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$

Esta ecuación es conocida como la **Ecuación Logística**.

4. Sistemas dinámicos discretos

Definición. Un sistema dinámico discreto es la descripción formal de un fenómeno evolutivo en términos de una función cuya imagen está contenida en su dominio. Partiendo desde cualquier valor inicial admisible generaremos una sucesión de valores mediante la aplicación reiterada de la función dada. Lo notaremos SDD.

Definición. Supongamos que $I \subset \mathbb{R}$ es un intervalo que contiene al menos dos puntos y $f : I \to I$ es una función continua. Entonces, al par $\{I, f\}$ se le llama un SDD de primer orden, autónomo y en forma normal. A f se le llama función de evolución.

Con estas definiciones, podemos ver que si $x_0 \in I$ es un valor inicial, podemos generar:

$$x_1 = f(x_0);\ x_2 = f(x_1) = f(f(x_0));\ x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0)));\cdots$$

Estos valores están bién definidoes pues $f(I) \subset I$ y la sucesión así definida es solución de la ecuación en diferencias:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad n \geq 0$$

Ejemplo: Tomemos $f(x) = cos(x)$, que es continua. Ahora, tenemos que tomar $I \subset \mathbb{R}$ tal que $f(I) \subset I$. Podemos tomar el intervali $I = [-1, 1]$ en radianes por supuesto. Si tomamos $X_0 \in I$, podemos ver fácilmente que $x_{n+1} = f(x_n) \in I$, por lo que $\{[-1, 1], cos(x)\}$ es un SDD.

Proposición. *La ecuación logística es un SDD, pues $f(x) = \mu x(1 - x)$ es continua y $\exists I = [0, 1] : f(I) \subset I$*

Ejemplo: Tenemos $f(x) = \dfrac{1}{2}x$, con $I = [0, 1]$, $x_{n+1} = \dfrac{1}{2}x_n$. Esta función es continua (en particular es contractiva). $\{[0, 1], f\}$ es un SDD.

EJEMPLO: $f(x) = log(x)$, $I = (0, +\infty)$ no es un SDD pues $Im(f) \nsubseteq Dom(f)$

Definición. UN SDD $\{I, f\}$ se dice lineal si f es lineal, afín si f es afín y no lineal si f no es lineal ni afín.

Notación. En lo sucesivo, para denotar las sucesivas iteradas de f usaremos que $f^n = f \circ f \circ f \cdots \circ f$

Definición (Órbita). Dado un SDD $\{I, f\}$ y un $x_0 \in I$, la sucesión definida por:

$$\{x_0, \cdots, x_n, \cdots\} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \cdots, f^n(x_0), \cdots\}$$

se denomina órbita o trayectoria del SDD $\{I, f\}$ asociada al valor inicial x_0 y se denota por $\gamma(I, f, x_0)$

Definición. Al conjunto de todas las órbitas asociadas al SDD $\{I, f\}$ a todos los $x_0 \in I$ se le llama retrato de fase.

Definición (Punto de equilibrio). Un número $\alpha \in \mathbb{R}$ se dice que es un punto de equilibrio del SDD $\{I, f\}$ si:

$$\alpha = f(\alpha) \quad \alpha \in I$$

Si tomamos como valor inicial un punto de equilibrio del SDD $x_0 = \alpha$ entonces la órbita resultante es constante y se denomina órbita estacionaria:

$$\gamma(I, f, \alpha) = \{\alpha, \alpha, \cdots\}$$

EJEMPLO: Determine los puntos de equilibrio de la ecuación logística:

$$x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$$

Aquí, $f(x) = \mu x(1 - x)$, por lo que

$$\alpha = f(x) \implies \alpha = \mu\alpha(1 - \alpha) \implies \alpha - \mu\alpha(1 - \alpha) \implies \alpha[1 - \mu(1 - \alpha)]$$

Por lo que las soluciones pueden ser:

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ 1 - \mu(1 - \alpha) = 0 \xrightarrow{(1)} \alpha_2 = \dfrac{\mu - 1}{\mu} \end{cases}$$

Donde en (1) hemos despejado α. Es claro que $\alpha_1 \in [0, 1]$. Ahora, ¿$\alpha_2 = \dfrac{\mu - 1}{\mu} \in [0, 1]$?

Obtenemos dos puntos de equilibrio:

$\alpha_1 = 0 \in [0, 1]$ y $\alpha_2 = \frac{\mu-1}{\mu}$. Ahora, ¿cuándo $\alpha_2 \in [0, 1]$?

Tenemos que: $0 \leq \frac{\mu-1}{\mu} \leq 1$. Multiplicando por μ (podemos porque $\mu > 0$):

$$0 \leq \mu - 1 \leq \mu \Leftrightarrow -\mu \leq -1 \leq 0 \Leftrightarrow \mu \geq 1 \geq 0$$

Luego obtenemos que si $\mu \geq 1 \implies \alpha_2 \in [0,1]$

Definición. En una ecuación en diferencias, un punto de equilibrio es un punto inicial $x_0 = \alpha$ tal que la solución que genera es constante.

EJEMPLO: Existen SDD que no tienen puntos de equilibrio. Por ejemplo, una $f(x)$ continua tal que la ecuación $x = f(x)$ no tiene solución. Por ejemplo, $f(x) = x + 1$

Definición. Dado un punto $x_0 \in I$, si $\exists k : f^k(x_0) = \alpha = f(\alpha)$,entonces su órbita se dice eventualmente estacionaria:

$$\gamma(I, f, x_0) = \{x_0, f(x_0), \cdots f^{k-1}(x_0), \alpha, \cdots, \alpha\}$$

Nota. Buscar puntos de equilibrio es equivalente a buscar intersecciones de la recta $y = x$ y la gráfica de f que esten... FALTA ALGO

Proposición. *SI $\{I, f\}$ es un SDD, entonces $\{I, f^n\}$ también es un SDD.*

Teorema. *Todo SDD $\{I, f\}$ donde I sea cerrado y acotado entonces posee un punto de equilibrio.*

Demostración. Es consecuencia del teorema de Bolzano. Sea $g(x) = f(x) - x : [a, b] \to \mathbb{R}$. Esta g es continua y $g(a) = f(a) - a$. Pero estábamos en un SDD, luego $f : [a, b] \to [a, b]$ que lleva $a \to f(a)$ y $b \to (f(b)$. Si $f(a) = a$ ó $f(b) = b$, ya tenemos el punto fijo. De otra forma, tenemos que $a \leq f(a) \leq b$. Así que $g(a) > 0$. Si razonamos igual con b, tenemos que $g(b) < 0$. Por ello, por el teorema de Bolzano $\exists \alpha \in (a, b) : g(\alpha) = 0 \implies f(\alpha) = \alpha$ y tenemos el punto fijo.

□

Teorema. *Sea un SDD $\{I, f\}$ donde I es cerrado y supongamos que f es contractiva, es decir $0 < K < 1$ tal que:*

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y| \quad \forall x, y \in I$$

Entonces, existe un único punto de equilibrio en f

Demostración. Probaremos primero la unicidad. Supongamos que hay dos puntos fijos. Sean α_1, α_2 dos puntos fijos. Entonces,

$$|\alpha_1 - \alpha_2| = |f(\alpha_1) - f(\alpha_2)| \leq K|\alpha_1 - \alpha_2| < |\alpha_1 - \alpha_2|$$

Donde en el $\leq$ hemos usado la contractividad de la función. Por lo que hemos llegado a una contradicción y el punto será único.

Ahora, tomamos $x_0 \in I$. Definimos $x_{n+1} = f(x_n)$ con $n \geq 0$. Así, tenemos $\{x_0, x_1, \cdots, x_{n+1}\}$. Tenemos que:

$$|x_{n+1}-x_{n+2}| = |f(x_n)-f(x_{n+1})| \leq K|x_n-x_{n+1}| = K|f(x_{n-1})-f(x_n)| \leq K^2|x_{n-1}-x_n| \leq$$

$$\leq \cdots \leq K^{n+1}|x_0 - x_1| \implies |x_{n+1} - x_{n+2}| \leq K^{n+1}|x_0 - x_1| \to 0 \implies \{x_n\} \to l$$

Ahora, como $f(I) \subset I$ e I es cerrado $\implies x_n \in I$. Hemos visto que $\exists \lim x_n = l \in I$, por tanto l es un punto fijo de $f(x)$.

$$l = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) =^1 f(\lim_{n\to\infty} x_n) = f(l)$$

Donde en 1 hemos usado la continuidad de f. $\square$

Teorema. *Sea el SDD $\{I, f\}$ donde I es cerrado y supongamos que $f \in \mathcal{C}^1(I)$, verificando que $|f'(x)| < 1 \quad \forall x \in I$. Entonces existe un único punto de equilibrio de f.*

Definición. Un punto de equilibrio α de un SDD $\{I, f\}$ se dice que es:

- Estable, si $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : ||$