Universidad de Granada

Ejercicios resueltos Álgebra I

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

1. Relación 2

1.1. Ejercicio 3 (2^a parte de la relación)

Determinar los polinomios $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado menor o igual que tres que satisfacen el sistema de congruencias

$$\left.\begin{aligned} f(x) \equiv x-1 \ mod(x^2+1) \\ f(x) \equiv x+1 \ mod(x^2+x+1) \end{aligned}\right\}$$

En primer lugar, reescribimos la primera ecuación para sustituirla en la segunda.

$$f(x) \equiv x-1 \ mod(x^2+1) \implies f(x) = x-1+(x^2+1)g(x)^{\circledast}$$

Reemplazando lo obtenido, tenemos:

$$x-1+(x^2+1)g(x) \equiv x+1 \ mod(x^2+x+1)$$

Pasamos el x-1 restando:

$$(x^2+1)g(x) \equiv 2 \ mod(x^2+x+1)$$

Resolvemos esta ecuación, que tendrá solución si, y solo si, $(x^2+1,\ x^2+x+1)/2$. Así, hallamos el mcd a través de la tablita correspondiente:

$$\begin{array}{c|cc} x^2+x+1 & 1 & 0 \\ x^2+1 & 0 & 1 \\ x & 1 & \text{-1} \\ 1 & -x & x+1 \\ 0 & & \end{array}$$

Obtenemos de esta forma que $(x^2+1,\ x^2+x+1) = 1$, que divide a 2, por tanto, habrá solución. Partiendo de la identidad de Bezout: $1 = (x^2+x+1)(-x)+(x^2+1)(x+1)$, la transformamos en una ecuación en congruencia (si vemos la ecuación como $(x^2+x+1)(x) = (x^2+1)(x+1)-1$, por la definición de congruencia) $(x^2+1)(x+1) \equiv 1 \ mod(x^2+x+1)$, multiplicando por 2, encontramos la g(x) buscada: $(x^2+1)(2x+2) \equiv 2 \ mod(x^2+x+1)$. $g(x) = 2x+2$.

Sustituyendo en $^{\circledast}$ el polinomio g(x) recién encontrado llegaremos a f_0(x), solución parcial del sistema.

$$f_0(x) = x-1+(x^2+1)g(x) = x-1+(x^2+1)(2x+2) = 2x^3+2x^2+3x+1$$

La solución general será

$$f(x) \equiv f_0(x) mod[x^2+1,\ x^2+x+1]$$

Calculamos el mcm:

$$[x^2+1,\ x^2+x+1] = \frac{(x^2+x+1)(x^2+1)}{1} = x^4+x^3+x^2+x+1$$

Como el ejercicio pide aquellos polinomios de grado menor o igual que tres, nos basta con la solución parcial, ya que otras soluciones eran polinomios de grado superior al buscado.

Solución: $f_0(x) = 2x^3+2x^2+3x+1$