Universidad de Granada

Varible Compleja I

Ejercicios resueltos

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

Números complejos

Ejercicio 1.1. Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

Ejercicio 1.2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los números complejos

$$\frac{i - \sqrt{3}}{1 + i} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{i\sqrt{3} - 1}$$

Ejercicio 1.3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \qquad \forall z \in U$$

Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

Solución.

$$|f(z)| < 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C} \text{ tal que } |z| < 1$$

$$f^{-1}(z) = \frac{z + a}{1 + \overline{a}z}$$

Si $|z| = 1$, entonces

$$|f(z)| = \left| \frac{z - a}{1 - \overline{a}z} \right|$$

multiplicando en esta expresión por $\overline{z}$

$$\frac{z - a}{1 - \overline{a}z}\overline{z} = \frac{1 - a\overline{z}}{1 - \overline{a}z}$$

Tenemos entonces que f es holomorfa en el disco $D(0, 1)$, lleva la frontera en la frontera.

Ejercicio 1.4. Dados $z_1, z_2, \ldots, z_n \in C^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Solución. Por inducción, todos los números complejos deben tener el mismo argumento, son vectores linealmente dependientes sin que se invierta el signo de ninguno de ellos.

$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0 : \lambda_1 z_1 = \lambda_2 z_2 = \ldots = \lambda_n z_n$

para probar que es necesaria no hace falta hacer inducción $|\sum_{k=1}^{n} z_n| = |\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_1}{\lambda_k} z_1| = |z_1| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_1}{\lambda_k} = |z_1| \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{|z_1|} = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

$n = 2 \implies |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \longleftrightarrow z_2 = \lambda z_1$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Sea cierto para $n \in \mathbb{N}$ $|\sum_{k=1}^{n+1} z_k| = |z_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} z_k| = |z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^{n} z_k|$

Hemos usado en este último paso que $|z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^{n}| \geq |\sum_{k=1}^{n+1} z_k| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| = |z_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ donde la otra desigualdad entre los extremos se sabe de la desigualdad triangular. $|z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^{n} z_k| = |z_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ Por la hipótesis de inducción para $k = 2$, tenemos que $\exists \lambda > 0 : z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} z_k$

Nos queda por hacer lo análogo con el resto de números complejos $z_k, k = 1...n$ Por la hipótesis de inducción para $k = n, \exists \mu_1, ...\mu_n : \mu_1 z_1 = \mu_2 z_2 = ... = \mu_n z_n$, como $z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} z_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_1}{\mu_k} z_1$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

entonces tenemos

$$z_1 \overline{z_2} = \lambda > 0 \text{ y que } z_1 = \frac{\lambda}{|z_2|^2} z_2$$

Ejercicio 1.5. Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = 2|z - i|\} \text{ y } B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4\}$$

Solución.

Veamos el conjunto A, notamos $z = (a, b)$,

$$\sqrt{a^2 + (b+1)^2} = 2\sqrt{a^2 + (b-1)^2}$$

Entonces

$$a^2 + b^2 + 1 + 2b = a^2 + (b+1)^2 = 4(a^2 + (b-1)^2) = 4a^2 + 4b^2 + 4 - 8b$$

Luego

$$3a^2 + 3b^2 - 10b + 3 = 0 \implies a^2 + b^2 - \frac{10}{3} b + 1 = 0$$

Sumamos y restamos $\frac{25}{9}$

$$a^2 + (b - \frac{5}{3})^2 - \frac{25}{9} + 1 \implies a^2 + (b - \frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$$

Por lo tanto A es la circunferencia con $c = (0, \frac{5}{3})$ y radio $r = \frac{4}{3}$

Veamos el B, elevando dos veces al cuadrado tenemos como resultado una elipse

$$\frac{a^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{b^2}{2^2} = 1$$

Ejercicio 1.6. Probar que $arg(z) = 2\arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)+|z|}\right)$ para todo $z \in \mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$.

Solución. Usamos la fórmula del ángulo doble

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$\phi = \arctan(\frac{Imz}{Rez+|z|}) \implies \phi = 2\alpha = \arctan(\frac{Imz}{Rez+|z|})$

Pista para otra forma de hacerlo

$$\phi = 2\arctan(\frac{Imz}{Rez + |z|})|z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) =?z$$

Para ello usamos, si $t = \theta/2$

$$\cos(\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} \sin(\theta) = \frac{2\tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$$

Ejercicio 1.7. Probar que, si $z = x + iy \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$arg(z) = \begin{cases} \arctan(y/x) & si \quad x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi & si \quad x < 0, y > 0 \\ \arctan(y/x) - \pi & si \quad x < 0, y < 0 \\ \pi/2 & si \quad x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & si \quad x = 0, y < 0 \end{cases}$$

Ejercicio 1.8. Probar las *fórmulas de De Moivre*:

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n \qquad \forall\theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$$

Solución. Haremos la prueba por inducción, para el caso inicial $n = 1$ es trivial, suponemos cierto para un $n \in \mathbb{N}$ genérico. Probamos que en ese caso es cierto para $n + 1$.

$$\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) + i\sin(n\theta + \theta)$$

$$= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) + i\cos(n\theta)\sin(\theta) + i\sin(n\theta)\cos(\theta)$$

$$= \cos(n\theta)(cos(\theta) + i\sin(\theta)) + i\sin(n\theta)(cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$= (\cos(theta) + i\sin(\theta))(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = (cos(\theta) + i\sin(theta))^{n+1}$$

La última igualdad la tenemos por la hipótesis de inducción.

Ejercicio 1.9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^8$

Ejercicio 1.10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

(a) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$

(b) $\sin\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\sin(kx) = \sin\left(\frac{nx}{2}\right)\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$

Solución. **Pista** Probar las dos simultáneamente y usar la fórmula de Moivre $\sum_{k=0}^{n}(cos(x) + sin(x))^k$

$$\sin(x/2)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) + i\sin(x/2)\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$$

Sacamos factor común

$$\sin(x/2)(\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) + i\sin(kx))$$

Usamos la fórmula de Moivre

$$\sin(x/2)\sum_{k=0}^{n}(\cos(x) + i\sin(x)^k$$

Usamos que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\sin(x/2)\frac{1-(\cos(x)+i\sin(x)^{n+1}}{1-(\cos(x)+i\sin(x)}$$

$$= \sin(x/2)\frac{1-(\cos((n+1)x)+i\sin((n+1)x))}{1-\cos(x)-i\sin(x)}$$

Usamos que $2\sin^2(x/2) = 1-\cos(x)$ y que $\sin(x) = \sin(x/2)\cos(x/2)$,

$$\sin(x/2)\frac{1-(\cos((n+1)x)+i\sin((n+1)x))}{2\sin^2(x/2)-2i\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1-(\cos((n+1)x)+i\sin((n+1)x))}{2\sin(x/2)-2i\cos(x/2)}$$

$$\frac{2\sin^2(\frac{n+1}{x}x)-i2\sin(\frac{n+1}{2}x)\cos(\frac{n+1}{2}x)}{2\sin(x/2)-2i\cos(x/2)}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador

$$\sin(\frac{n+1}{2}x)(\sin(\frac{n+1}{2}x)-i\cos(\frac{n+1}{2}x))(\sin(x/2)+i\cos(x/2))$$

$$= \sin(\frac{n+1}{2}x)(\cos(\frac{n+1}{2}x)\cos(x/2)+\sin(\frac{n+1}{2}x)\sin(x/2)+i(\sin(\frac{n+1}{2}x)\cos(x/2)-\cos(\frac{n+1}{2}x)\sin(x/2)))$$

$$= \sin(\frac{n+1}{2}x)(\cos(\frac{nx}{2})+i\sin(\frac{nx}{2}))$$

Topología del plano complejo

Ejercicio 2.1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal, arg : $\mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$.

Solución. Usamos la fórmula de la relación anterior para probar que es continua en $\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}$

$$argz = 2\arctan(\frac{Imz}{Rez + |z|}) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}$$

Luego nos aproximamos por sucesiones

$$\{z + \frac{i}{n}\} \to z \qquad \lim_n(arg(z + \frac{i}{n})) = \lim_n(\arctan(\frac{1}{nz} + \pi)) = \pi$$

$$\{z - \frac{i}{n}\} \to z \lim_n(arg(z - \frac{i}{n})) = \lim_n(\arctan(\frac{-1}{nz} - \pi)) = -\pi$$

Ejercicio 2.2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : \theta \notin Arg(z)\}$. Probar que existe una función $\varphi \in C(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in Arg(z)$ para todo $z \in S_\theta$

Solución. Definimos

$$f(z) = z(\cos(\pi - \theta) + i\sin(\pi - \theta)) \qquad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ es continua}$$

$$\phi(z) = arg(f(z)) - (\pi - \theta) \qquad \phi : S_\theta \to \mathbb{C}\ \phi \text{ es continua}$$

$$\phi(z) \in Arg(f(z)) + \theta - \pi \subset Arg(f(z)) + Arg(\cos(\theta - \pi) + i\sin(\theta - \pi))$$

$$= Arg(f(z) - \cos(\theta - \pi) + i(\theta - \pi)) = Argz$$

Ejercicio 2.3. Probar que no existe ninguna función $\phi \in C^*$ tal que $\varphi(z) \in Arg(z)$ para todo $z \in C^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

$\mathbb{T}$ compacto y conexo $\implies$ $\phi(\mathbb{T})$ intervalo cerrado y acotado

Sea $\alpha \in \mathbb{T} : \phi(\alpha) \neq \text{mín}(\phi(\mathbb{T})), \text{máx}(\phi(\mathbb{T}))\ \phi(\mathbb{T} - \{\alpha\})$ conexo $\implies$ $[\text{mín}(\phi(\mathbb{T})), \phi(\alpha)[\cup]\phi(\alpha), \text{máx}(\phi(\mathbb{T}))]$ que es una contradicción.

Si $\exists h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ con $h(z) \in Arg(z)\ \forall z \in \mathbb{C}^*$ y h continua, entonces $h_{|\mathbb{T}} : \mathbb{T} \to \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es continua y $h_{|\mathbb{T}}(z) \in Arg(z)\ \forall z \in \mathbb{T}$

Ejercicio 2.4. Probar que la función $Arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R} \backslash \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in Arg(z)$, se puede elegir $\theta_n \in Arg(z_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \to \theta$.

Solución.

$$\{z_n\} \to z \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m\ |z_n - z| z \varepsilon$$

Sea $\varepsilon = \frac{|z|}{2}$, entonces $\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m\ z_n \in D(z, |z|/2)$

A partir de aquí usamos el ejercicio 2 para concluir.

Ejercicio 2.5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y calcular su límite.

Idea

$$|1 + \frac{z}{n}|^n \to e^{Rez}$$

$$\lim_{n\to\infty} |1 + \frac{z}{n}|^n = e^{\lim_{n\to\infty} n(|1+\frac{z}{n}|-1)}$$

$$arg((1 + \frac{z}{n})^n) \to Imz$$

Solución. $z_n \in \mathbb{C}, \phi_n \in Arg(z_n)$

$\{|z_n|\} \to |z|$ y $\{y_n\} \to y \in Arg(z)$

Vamos a usar que is tiene sun sucesión de numeros complejos y la sucesion de los modulos converge y hay una sucesion de los argumentos de forma q convergen, la sucesion converge al modulo por el cos +isen

$\phi_n \in Arg(z_n), z_n = (1+\frac{z}{n})^n = (1+\frac{a+ib}{n})^n = [(1+\frac{a}{n})+(\frac{ib}{n})]^n\ |z_n| = [|(1+\frac{a}{n})+\frac{ib}{n}|]^n = [(1+\frac{a}{n})^2+(\frac{b}{n})^n]^{1/2} = limn[(1 + \frac{a^2}{n^2} + (\frac{a}{n} + \frac{b^2}{n^2}))]^{n/2} = e^{\lim n/2(\frac{a^2}{n^2}+2a/n+b^2/n^2)} = e^a = e^{Rez}$

Vamos a utilizar la fórmula de Moivre.

$z_m = (1 + z/n)^n\ Arg(a + \frac{a+ib}{n})^n = nArg(a + \frac{a+ib}{n}) = n * \arctan(\frac{b/n}{1+a/n}) = n * \arctan(\frac{b}{n+a})$ Llamamos $y = b/(n+a)$ y usamos $\lim_{y\to 0} \frac{\arctan(y)}{y} = 1$, $n * \arctan(\frac{b}{n+a}) = \frac{\arctan(\frac{b}{n+a})}{\frac{n+a}{n}\frac{b}{n+a}\frac{1}{b}} = b$

Funciones holomorfas

Ejercicio 3.1. En cada uno de los siguientes casos, estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida como se indica:

(a) $f(z)z(Re(z))^2 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

(b) $f(x+iy) = x^3 - y + i\left(y^3 + \frac{x^2}{2}\right) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$

(c) $f(x+iy) = \frac{x^3+iy^3}{x^2+y^2} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, f(0) = 0$

a) Cauchy Riemman

c)

$f(x+iy) = \frac{x^3+iy^3}{x^2+y^2}$, $\forall (x,y) \in \mathbf{R}^2 \backslash \{(0,0)\}, f(0) = 0$

$u(x,y) = Ref = \frac{x^3}{x^2+y^2}$, $\qquad v(x,y) = Imf = \frac{y^3}{x^2+y^2}$

En $\mathbf{C}^*$ tenemos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^2+y^2} + \frac{x^4(-1)2}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^2+y^2} = \frac{y^4(-1)2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3(-1)2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^3(-1)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

Usando las ecuaciones de Cauchy-Riemman de las dos primeras ecuaciones deducimos

$3x^2(x+y^2) - 2x^4 = 3y^2(x^2+y^2) - 2y^4 \implies x^4 - y^4 = 0 \implies |x| = |y|$

de las últimas dos deducimos

$2yx^3 = -2xy^3 \implies xy(x^2+y^2) = 0 \implies xy = 0$ ó $x^2 + y^2 = 0$

Como conclusión, para que la función sea derivable en un punto $x \in \mathbb{C}$ dicho punto debe cumplir que el módulo de su parte real sea igual que el módulo de su parte imaginaria.

Ejercicio 3.2. Probar que existe una función entera f tal que

$$Re(f(x+iy)) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Si se exige además que $f(0) = 0$, entonces f es única.

Sabemos que dicha función debe satisfacer las ecuaciones de Cauchy-Riemman, así que tenemos

$$\frac{\partial Re(f)}{\partial x}(x+iy) = 4x^3 - 12xy^2 = \frac{\partial Im(f)}{\partial y}(x+iy)$$

Integrando con respecto de la variable y el término central nos queda que $Im(f) = 4x^3 * y - 4xy^3 + k$ tal que $k \in \mathbb{R}$, ya que también se cumple la condición

$$\frac{\partial Re(f)}{\partial y}(x+iy) = -\frac{\partial Im(f)}{\partial x}(x+iy)$$

Si se exige $f(0) = 0$ nos queda una única ecuación como resultado de sustituir $k = 0$.

Ejercicio 3.3. Encontrar la condición necesaria y suficiente que deben cumplir $a, b, c \in \mathbb{R}$ para que exista una función entera f tal que

$$Re(f(x+iy)) = ax^2 + bxy + cy^2 \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Usamos Cauchy-Riemman, deben cumplir la condición $a = -c$.

Ejercicio 3.4. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Supongamos que existen $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 + b^2 > 0$, tales que

$$aRe(f(z)) + bIm(f(z)) = c \qquad \forall z \in \Omega$$

Probar que f es constante.

Solución. Definimos las funciones u y v: $Re(f(x+iy)) = u(x,y),\ Im(f(x+iy)) = v(x,y)$

Los casos extremos son $a = 0$ o $b = 0$, donde o la imagen o la parte real que quedan serían constantes. $au(x,y) + bv(x,y) = c \implies -bv(x,y) = c - au(x,y) \implies v(x,y) = c' - a'u(x,y)$

Derivamos con respecto a x e y a ambos lados de la última ecuación:

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -a'\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -a'\frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -a'\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = a'\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

Con lo que nos queda

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -a'\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

por tanto

$$\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} \qquad \forall (x,y) \in \Omega$$

Como tenemos que la parte imaginaria es constante dentro del dominio Ω y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, con lo que deducimos que la función f es constante.

Ejercicio 3.5. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es constante.

Solución. Un dominio es un abierto conexo no vacío.

La función $g := f + \overline{f} = 2Re(f)$ es holomorfa por ser suma de holomorfas, y su parte imaginaria es constante, por tanto g es constante.

Por tanto $Re(f)$ es constante, como $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y Ω es un dominio deducimos que f es constante.

Ejercicio 3.6. Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Sea $\Omega^* = \{\overline{z} : z \in \Omega\}$ y $f^* : \Omega^* \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$f^*(z) = \overline{f(\overline{z})} \qquad \forall z \in \Omega^*$$

Probar que $f^* \in \mathcal{H}(\Omega^*)$.

Solución.

$$a \in \Omega^* \iff \overline{a} \in \Omega$$

$$\lim_{z\to a} \frac{f^*(z) - f^*(a)}{z - a} = \lim_{z\to a} \frac{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{a})}}{z - a} = \lim_{z\to a} \frac{\overline{\overline{f(\overline{z})} - \overline{f(\overline{a})}}}{z - a} = \lim_{z\to a} \overline{\left(\frac{f(\overline{z}) - f(\overline{a})}{z - a}\right)} = \overline{f'(\overline{a})}$$

Ejercicio 3.7. Probar que la restricción de la función exponencial a un subconjunto abierto no vacío del plano, nunca es una función racional.

Solución. Suponemos que existe dicha función racional:

$$R(z) = \frac{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i z^i}{\sum_{i=0}^{m} \mu_i z^i} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Usamos que la derivada de la exponencial es ella misma:

$$R(z) = R'(z) = \frac{A'(z)B(z) - A(z)B'(z)}{B(z)^2} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

Entonces

$$A(z) = A'(z) - \frac{A(z)B'(z)}{B(z)} \implies B(z)A(z) = A'(z)B(z) - B'(z)A(z) \qquad \forall z \in D(a,r), a \in \mathbb{C}, r > 0$$

Tienes dos polinomios que son iguales en un entorno no vacío de un punto.

$$gr(B(z)) + gr(A(z)) \leq \max\{gr(A'(z)) + gr(B(z)), gr(A(z)) + gr(B'(z))\}$$

Por tanto llegamos a una contradicción, al derivar un polinomio su grado disminuiría, con lo que no puede cumplirse la última desigualdad. Como nuestra hipótesis no es cierta tenemos que dicha función nunca es una función racional.

Funciones analíticas

Ejercicio 4.1. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!}{n^n} z^n$

(b) $\sum_{n\geq 0} z^{2n}$

(c) $\sum_{n\geq 0} 2^n z^{n!}$

(d) $\sum_{n\geq 0}(3 + (-1)^n)^n z^n$

(e) $\sum_{n\geq 0}(n + a^n)z^n \ (a \in \mathbb{R}^+)$

(f) $\sum_{n\geq 0} a^{n^2} z^n \ (a \in \mathbb{C})$

c)

$$\sum_{n\geq 0} 2^n z^{n!}$$

Si $|z| \geq 1$ entonces la serie diverge, en el caso $|z| < 1$:

$$\sqrt[n]{|2^n z^{n!}|} = \sqrt[n]{2^n |z|^{n!}} = 2|z|^{(n-1)!}$$

Dicha sucesión tiende a 0 cuando $n \to \infty$, por tanto $\sum_{n\geq 0} |2^n z^{n!}| < \infty \implies \sum_{n\geq 0} 2^n z^{n!} < \infty$, entonces el radio de convergencia de la serie es $R = 1$.

e)

$$\sum_{n\geq 0}(n + a^n)z^n \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

Podríamos separar en dos series, calcular sus radios de convergencia y cogemos el menor:

$$\sum_{n\geq 0} nz^n \qquad \sum_{n\geq 0} a^n z^n \qquad a \in \mathbb{R}^+$$

También podemos usar otros criterios:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + a^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1) + a^{n+1}}{n + a^n}$$

por tanto el radio de convergencia buscado es:

$$R = \begin{cases} 1/a & si \quad a > 1 \\ 1 & si \quad a \leq 1 \end{cases}$$

Ejercicio 4.2. Conocido el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$, calcular el de las siguientes:

(a) $\sum_{n\geq 0} n^k \alpha_n z^n$ ($k \in \mathbb{N}$ fijo)

(b) $\sum_{n\geq 0} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$

a)

El radio de convergencia no se reduce, podemos comprobarlo utilizando el criterio de la raíz.

b)

Vemos el cociente entre los términos $n+1$ y n:

$$\frac{\alpha_{n+1}/(n+1)!}{\alpha_n/n} = \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n(n+1)}$$

Tomando límites:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{R} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

Por tanto el radio de convergencia de la serie es infinito.

Ejercicio 4.3. Caracterizar las series de potencias que convergen uniformemente en todo el plano.

Convergen en todo el plano las que a partir de cierto término son 0, o sea, las que son una suma finita

Sea $\sum_{n\geq 0} \alpha_n (z-a)^n$ que converge uniformemente

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (z-a)^k \text{ converge uniformemente } \iff S_n \text{ es uniformemente de Cauchy}$$

Lo cual, por definición, es:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : p \geq q \geq n \implies |S_p(z) - S_q(z)| < \varepsilon \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

Sea un polinomio $p \in \mathbb{P}[\mathbb{C}]$, tenemos que $\lim_{|z|\to\infty} p(z) = \infty \iff gr(p) > 0$ (grado del polinomio).

Vemos que $|S_p(z) - S_q(z)|$ es un polinomio que está acotado, tiene que ser constante para no diverger en infinito, en particular es la constante 0, ya que $S_p(a) = S_q(a)$, por tanto

$$\sum_{q=m}^{p-10} \alpha_n (z-\alpha)^n = 0 \implies \alpha_n = 0 \qquad \forall n \geq m$$

Ejercicio 4.4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de la serie $\sum_{n\geq 0} f_n$ donde

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{-1\}$$

Funciones elementales

Ejercicio 5.1. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función verificando que

$$f(z+w) = f(z)f(w) \qquad \forall z, w \in \mathbb{C}$$

Probar que, si f es derivable en algún punto del plano, entonces f es entera. Encontrar todas las funciones enteras que verifiquen la condición anterior. Dar un ejemplo de una función que verifique dicha condición y no sea entera.

Solución. $f(0) = f(0+0) = f(0)^2$ $f(0) = 0$ ó $f(0) = 1$

Si $f(0) = 0$ la función es constante. EN el caso $f(0) \neq 0$, $f(0) = 1$, Si f es derivable en $\alpha \in \mathbb{C}$

$\exists \lim_{n\to 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{n}$ vemos que cumple la fórmula de adición $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{n} = f(\alpha)\frac{f(n)-f(0)}{n} \iff f$ es derivable en 0 Y eso se puede aplicar $\forall z \in \Omega$

Ahora encontramos todas las funciones enteras que cumplan la condición del enunciado.

Sea $z \in \Omega$, $f(z) = 0$, $f(z) = e^{wz} : w \in \mathbf{C}$

Sea f tal que $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$

$f'(z) = f(z)\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$ $(f(z)e^{-wz})' = f'(z)e^{-w}z + (-w) + ze^{-wz} = f(z)we^{-wz} - f(z)we^{-wz} = 0$ las funciones son la misma salvo una constante En el punto 0 las dos funciones valen lo mismo, por lo que la función es la constante 1, ya que $f(0) = 1$

El ejemplo es $f(z) = e^{Re(z)}$

Ejercicio 5.2. Calcular la imagen por la función exponencial de una banda horizontal o vertical y del dominio cuya frontera es un rectángulo de lados paralelos a los ejes.

Solución. $e^z = e^{Re(z)(\cos(Imz)+i\sin(Imz))}$ $B_V = \{z \in \mathbb{C} : a \leq Rez \leq b\}, a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ $B_H = \{z \in \mathbb{C} : a \leq Imz \leq b\}$ si $a \leq Rez \leq b$, $e^a \leq e^{Rez} \leq e^b$ lo que pasa es que se puede mover en toda la circunferencia unidad

cuando la parte imaginaria se puede mover donde quiera le das infinitas vueltas a la circunferencia unidad. Tenemos que

e_V^B e la corona circular de centro 0 y radios e^a y e^b

donde

$a \leq Imz \leq b$

Tenemos que $\exp(B_H)$ es el sector del plano encerrado entre los ángulos a y b

Ejercicio 5.3. Dado $\theta \in]-\pi,\pi[$, estudiar la existencia del límite en $+\infty$ de la función $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$ definida por $\varphi(r) = exp(re^{i\theta})$ para todo $r \in \mathbb{R}^+$.

Ejercicio 5.4. Probar que si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son sucesiones de números complejos, con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \to 1$, entonces

$$\{w_n(z_n - 1)\} \to \lambda \in \mathbb{C} \implies \{z_n^{w_n}\} \to e^\lambda$$

Solución. Como la función exponencial es continua $\{w_n(z_n-1)\} \to \lambda \implies \{e^{w_n(z_n-1)}\} \to e^\lambda$

$\lim\{\log(z_n)\} = 0 \implies \lim\{z_n - \log(z_n)\} = 1 \implies \lim\{w_n(z_n - \log(z_n)) - w_n\} = 0$

$\lim\{z_n^{w_n} = e^{\log(z_n) - w_n}\} = \lim\{e^{w_n(z_n-1)}\} \iff \lim\{\frac{e^{w_n(z_n-1)}}{e^{w_n(\log(z_n))}} = e^{w_n(z_n - \log(z_n)) - w_n}\} = 1$

Vemos que $z_n^{w_n} = e^{w_n \frac{\log(z_n)}{z_n-1}(z_n-1)} = e^{w_n(z_n-1)\frac{\log(z_n)}{z_n-1}}$ Sabemos que $\frac{\log(z_n)}{z_n-1} \to 1$ ya que $\lim_{z\to 1} \frac{\log(z)-\log(1)}{z-1} = \log'(1) = 1/1$

Ejercicio 5.5. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} e^{-nz^2}$

Solución. La serie converge puntualmente si, y sólo si, $|\frac{1}{e^{z^2}}| < 1 \iff 1 < |e^{z^2}| \iff 0 < Rez^2 = (Rez)^2 - (Imz)^2 \iff |Rez| > |Imz|$

donde en la última implicación hemos usado $e^{z^2} = e^{Rez^2}e^{Imz^2}$

$Rez^2 = (Rez)^2 - (Imz)^2, Rez^2 > 0 \iff |Rez| > |Imz|$

Vemos ahora la convergencia uniforme

$A = \{z \in \mathbb{C} : (Rez)^2 > (Imz)^2\}$ Si $B \subset A$ y satisface que $\inf_{z\in B}[(Rez)^2 - (Imz)^2] > 0$, entonces hay convergencia uniforme en B

Ejercicio 5.6. Probar que $a, b, c \in \mathbb{T}$ son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $a + b + c = 0$.

Solución. $\{a, b, c\} = \{e^(\lambda - 2/3\pi), e^{\lambda i}, e^{(\lambda+2/3\pi)i}\}$

$\Rightarrow$

$e^{2/3\pi i}(a + b + c) = e^{2/3\pi i}a + e^{2/3\pi i}b + e^{2/3\pi i}c = a + b + c \implies a + b + c = 0$

$\Leftarrow$

$a' = \frac{a}{a} = 1, b' = \frac{b}{a}, c' = \frac{c}{a}\ b' = e^{\theta i}, c' = e^{\gamma i} = -b - 1$

$a + b + c = 0 \implies a' + b' + c' = 0 \implies 1 + b' + c' = 0 \implies c' = -b' - 1$ con $\gamma, \theta \in]-\pi, \pi[$

De lo que deducimos que $(-\cos(\theta) - 1) - i\sin(\theta) = (\cos(\gamma)) + i(\sin(\gamma))$

$- \in (\theta) = \sin(\gamma) \implies \theta = -\gamma - \cos(\theta) - 1 = \cos(\gamma)$ por tanto $\theta = \pm\frac{2\pi}{3} = -\gamma$

Ejercicio 5.7. Sea Ω un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{C}^*$ y $\varphi \in C(\Omega)$ tal que $\varphi(z)^2 = z$ para todo $z \in \Omega$. Probar que $\varphi \in \mathcal{H}(\Omega)$ y calcular su derivada.

Solución. $a \in \Omega$ y vemos que es derivable por la definición $\lim_{z\to a} \frac{\phi(z)-\phi(a)}{z-a} \frac{\phi(z)-\phi(a)}{\phi(z)+\phi(a)} = \lim_{z\to a} \frac{z-a}{z-a} \frac{1}{\phi(z)+\phi(a)} = \frac{1}{2\phi(a)} = \phi'(a)$ donde hemos usado que $\phi(a) \neq 0$

Ejercicio 5.8. Probar que, para todo $z \in D(0,1)$ se tiene:

(a) $\sum_{n=1} \infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1+z)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{n(2n+1)} = 2z - (1+z)\log(1+z) + (1-z)\log(1-z)$

Solución. **a)** $\log(1+z) \in \mathbb{H}(D(0,1))$ y $(\log(1+z))' = \frac{1}{1+z}$ $\forall z \in D(0,1)$

$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ por otra parte la serie de potencias

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ tiene radio de convergencia 1 y su suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = f(z)$ es holomorfa en $D(0,1)$ y su derivada se calcula término a término

$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$

Entonces $f'(z) = g'(z)$ $\forall z \in D(0,1)$, por tanto f y g difieren en una constante.

Como $g(0) = \log(1) = 0 = f(0)$ con lo que tenemos que f y g son iguales en $D(0,1)$

Ejercicio 5.9. Probar que la función $f : \mathbb{C}\backslash\{1,-1\} \to \mathbb{C}$ definida por

$$f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}\backslash\{1,-1\}$$

es holomorfa en el dominio $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$ y calcular su derivada. Probar también que

$$f(z) = 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Solución. $f(z) = \log(\frac{1+z}{1-z})$ la función es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ sabemos que $\log \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-)$ y vemos cuando la función logaritmo cae dentro de dicho conjunto

de forma intuitiva $\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}^- \iff \exists r > 0 : z \neq 1, \frac{1+z}{1-z} = -r \iff 1+z = rz-r \iff z(r-1) = 1+r \iff z = \frac{1+r}{r-1}$

Viendo que $g(z) = \frac{1+z}{1-z} \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $g(\Omega) \subseteq \mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ podemos asegurar que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ por composición.

$f'(z) = \frac{\frac{1-z+(1+z)}{(1-z)^2}}{\frac{1+z}{1-z}} = \frac{2}{1-z^2}$

Siendo $\xi \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces $\xi'(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \frac{2}{1-z^2}$

Pista hacer $\frac{2}{1-z^2}$ en serie de potencias

Ejercicio 5.10. Sean $\alpha, \beta \in [-\pi, \pi]$ con $\alpha < \beta$ y consideremos el dominio $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^* : \alpha < arg(z) < \beta\}$. Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho\alpha, \rho\beta \in [-\pi, \pi]$, probar que definiendo $f(z) = z^\rho$ para todo $z \in \Omega$, se obtiene una biyección de Ω sobre el doninio $\Omega_\rho = \{z \in \mathbb{C}^* : \rho\alpha < arg(z) < \rho\beta\}$, tal que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $f^{-1} \in \mathcal{H}(\Omega_\rho)$.

Pista $z^\phi = e^{\phi \log z}$ con $\Omega, \Omega_\phi \subset \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$

$f^{-1}(z) = \phi^{\frac{1}{\phi \log z}} = z^{1/phi}$

Ejercicio 5.11. Estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n \geq 0} \frac{\sin(nz)}{2^n}$

Pista

$\sin(nz) = \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i}$, entonces $\frac{1}{2i} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2^n}$ Tenemos que ver cuando, para un $z \in \mathbb{C}$ fijo, estudiar la convergencia de las series $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{inz}}{2^n}$ y $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-inz}}{2^n}$

$e^{inz} = e^{in(Rez + iImz)} = e^{-nImz + inRez} = e^{-nImz} e^{inRez}$ con $|e^{inRez}| = 1$

$|\frac{e^{inz}}{2^n}| = \frac{e^{-nImz}}{2^n} = (\frac{e^{-Imz}}{2})^n$ entonces

$\sum_{n \geq 0} |\frac{e^{inz}}{2^n}|$ converge $\iff e^{-Imz} < 2 \iff -Imz < \ln 2 \iff -\ln 2 < Imz$

y tenemos convergencia uniforme en $B \subset A = \{z \in \mathbb{C} : |Imz| < \ln 2\}$ tal que $\sup_{z \in B} |Imz| < \ln 2$

Ejercicio 5.12. Sea $\Omega = \mathbb{C} \backslash \{x \in \mathbb{R} : |x| \geq 1\}$. Probar que existe $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $\cos(f(z)) = z$ para todo $z \in \Omega$ y $f(x) == \arccos(x)$ para todo $x \in]-1, 1[$. Calcular la derivada de f.

Ejercicio 5.13. Para $z \in D(0,1)$ con $Re(z) \neq 0$, probar que

$$\arctan\left(\frac{1}{z}\right) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} = \begin{cases} \pi/2 & si \quad Re(z) > 0 \\ -\pi/2 & si \quad Re(z) < 0 \end{cases}$$

Integral curvilínea

Ejercicio 1

Enunciado

Solución

$\gamma : [0, r] \to \mathbb{C}$, $\gamma(s) = \alpha + s, s \in [0, r]$

$\int_{[\alpha,\alpha+r]} f(z)dz = \int_0^r f(\alpha + s)\gamma'(s)ds$, donde $\gamma'(s) = 1 \forall s \in [0, r]$

$\int_0^r f(\alpha + s)\gamma'(s)ds = \int_0^r f(\alpha + s)ds$

$\xi : [0, r] \to \mathbb{C}$, $\xi(s) = \alpha + is \forall s \in [0, r]$

$\int_{[\alpha,\alpha+ir]} f(z)dz = \int_0^r f(\alpha + is)\gamma'(s)ds = i\int_0^r f(\alpha + is)ds$

Ejercicio 2

Enunciado

Solución

Tenemos que probar que $\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{zdz}{z^3+1} = 0$

$|\int_{\gamma_r} \frac{z}{z^3+1}dz| \leq \int_{\gamma_r} \frac{|z|}{|z^3+1|}dz \leq l(\gamma_r)M(r)$ donde $M(r) > 0$ satisface que $\frac{|z|}{|z^3+1|} \leq M(r) \forall z \in \gamma_r*$

Dado $z \in \mathbb{C}(0, r)^*$, $|z| = r$

$\frac{|z|}{|z^3+1|} \leq \frac{r}{|z^3|-1} = \frac{r}{r^3-1}$

Por tanto $l(\gamma_r)M(r) = 2\pi r\frac{r}{r^3-1}$ y $\lim_{r\to\infty} \frac{r}{r^3-1} = 0$

Para la otra integral tenemos que probar que

$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{z^2e^z}{z+1}dz = 0$

$|\int_{\gamma_r} \frac{z^2e^z}{z+1}dz| < \int_{\gamma_r} \frac{|z|^2|e^z|}{z+1}dz$

Si $z \in \gamma_r^*$

$$|z|^2 = |-r + is|^2 \leq (r + 1)^2 \qquad s \in [0, 1]$$

$$|z + 1| \geq r - 1$$

Como $z \in \gamma_r^*$, $|e^z| = e^{Rez} = e^{-r}$

Ejercicio 3

Enunciado

Solución

$\int_{\mathbb{C}(0,r)} \frac{\log(i+z)}{z} dz$

donde $0 < r < 1$, $\mathbb{C}(0,r)^* \subset D(0,1)$ definimos $f(z) = \log(1+z)$, $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$

Usando la fórmula de Cauchy para la circunferencia:

$\int_{\mathbb{C}(0,r)} \frac{\log(i+z)}{z} dz = f(0)2\pi i = 0$

Sin usar la fórmula de Cauchy para la circunferencia vemos:

$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$, la serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$ converge uniformemente sobre compactos de $D(0,1)$.

La sucesión $\{\frac{1}{z}\}$ está acotada en el compacto $\mathbb{C}(0,1)^*$

Usando **observación** $\frac{1}{z}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$ converge uniformemente en $\mathbb{C}(0,r)^*$ a $\frac{\log(1+z)}{z}$

Observación

$\{f_n\}$ converge uniformemente en B a f y $g : B \to \mathbb{C}$ está acotada en B, entonces $\{gf_n\}$ converge uniformemente en B a gf

$(\exists M > 0 : |g(z)| \leq M \qquad \forall z \in B)$

$0 = \int_{\mathbb{C}(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log(1+re^{it})}{re^{it}} dt = i\int_{-pi}^{\pi} \log(1+re^{it})dt \; i\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}|dt - \int_{-\pi}^{\pi} arg(1+re^{it})dt \implies \int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}|dt = 0$

Sabemos que $\log(1+re^{it}) = \ln|1+re^{it}| + i * arg(1+re^{it})$ y que $\gamma(t) = re^{it}, \gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma'(t) = ire^{it}$

también sabemos que $|1+re^{it}| = ((1+r\cos(t))^2 + r^2\sin^2(t))^{1/2} = (1+2r\cos(t)+r^2\cos^2(t)+r^2\sin^2(t))^{1/2} = (1+2r\cos(t)+r^2)^{1/2}$

por tanto $0 = \int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}|dt = 1/2\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1++2r\cos(t)+r^2)dt$

Como sabemos que el coseno es par $1/2\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1++2r\cos(t)+r^2)dt = \int_0^{\pi} \ln(1+2r\cos(t)+r^2)dt$

Ejercicio 4

Enunciado

Solución

Sabemos que $f \in D(0,1)$, teniendo que $|f(z)-1| < 1, \forall z \in D(0,1)$

Sabemos que f no se anula en $D(0,1)$ y deducimos que $f(D(0,1)) \subset D(1,1)$. Por tanto $\log(f) \in \mathcal{H}(D(0,1))$

$\log(f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)} \implies \frac{f'}{f}$ admite primitiva holomorfa en $D(0,1)$ y $\mathbb{C}(0,r) \subset D(0,1)$ es un camino cerrado, por tanto $\int_{\mathbb{C}(0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$

Ejercicio 5

Enunciado

Solución

$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right]$

Por tanto

$\int_{\mathbb{C}(i,1)} \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{1}{2i}\left[\int_{\mathbb{C}(i,1)} \frac{1}{z-i} dz - \int_{\mathbb{C}(i,1)} \frac{1}{z+i} dz\right] \neq 0$

La primera es $2\pi i$

La segunda integral es 0 por el teorema de Cauchy para dominios estrellados, teniendo que $\mathbb{C}(i,1) \subset D(i,3/2)$.

Ejercicio 6

Idea

$\Omega = \mathbb{C} \backslash \{iy : |y| > 1\}$ arctan $\in \mathcal{H}(\Omega)$ y arctan es una primitiva de $\frac{1}{1+z^2}$

$\sigma^* \subset \Omega$ y σ es un camino cerrado.

Con esa información sabremos que $\int_\sigma \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

Teorema local de Cauchy

Ejercicio 1

Solución

Fijo $z \in \mathbf{C}$ con $|z-a| > r, \exists r' > 0 : |z-a| > r' > r$ Consideramos $\Omega = D(a, r'), f(w) = \frac{1}{w-z}, f \in \mathcal{H}(D(a, r'))$ $D(a, r')$ es convexo, en particular estrellado, por tanto, usando TLC y $TCDE$ $\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$

Ejercicio 2

Solución

Fijo $z \in D(a, R)$ Fijo $0 < r < R : |z - a| < r < R, \overline{D}(a, r) \subset D(a, R)$

Por la fórmula de Cauchy para la circunferencia $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$

$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{f(w)}{w-z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw\right| = \frac{1}{2\pi} | \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+Re^{it})iRe^{it}}{a+Re^{it}-z} dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+re^{it})ire^{it}}{a+re^{it}-z} dt|$

$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(a+Re^{it})R}{a+Re^{it}-z} - \frac{f(a+re^{it})r}{a+re^{it}-z}\right| dt$

$g : [r, R]x]-\pi, \pi[\to \mathbb{C}, g(p, t) = \frac{f(a+pe^{it})p}{a+pe^{it}-z}$ por lo que el término de la integral queda $|g(R, t) - g(r, t)|$

g es una función continua en un compacto, por lo tanto es uniformemente continua.

Dado $\varepsilon > 0 \exists \delta : si \|(p, t) - (p', t')\|_\infty < \delta \implies |g(p, t) - g(p', t')| < \varepsilon$, y lo utilizamos para $(p, t) = (R, t)$ y $(p', t') = r, t$, si $|R - r| < \delta$ entonces $|g(R, t) - g(r, t)| < \varepsilon$

Por lo tanto

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{f(a+Re^{it})R}{a+Re^{it}-z} - \frac{f(a+re^{it})r}{a+re^{it}-z}\right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon 2\pi$ en el caso de que $|R - r| < \delta$

Ejercicio 3

Solución

$\frac{1}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{b-c}[\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-c}]$

Vemos primero el caso $b \neq c$

Tenemos tres subcasos

- b interior, c exterior $\int_{C(a,r)} f(z)dz = \frac{1}{b-c}[\int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-b} - \int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-c}] = \frac{1}{b-c}(2\pi i(binterior) - 0(ej1))$
- b y c interiores $\int_{C(a,r)} f(z)dz = \frac{1}{b-c}[2\pi i - 2\pi i] = 0$
- b y c exteriores, por el ejercicio 1 ambas partes son 0: $\int_{C(a,r)} f(z)dz = 0 - 0 = 0$

Ahora vemos el caso $b = c$ $f(z) = \frac{1}{(z-b)^2}$ tiene primitiva holomorfa en $\mathbb{C}^*$, $\frac{-1}{z-b} \implies \int_{C(a,r)} f(z)dz = 0$

Ejercicio 4

Solución

a

$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}dz$, donde $r \neq 2$, $z \neq \pm 2i$

$\frac{z+1}{z(z^2+4)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{z+2i}$, donde $A = 1/4, B = 1/8 - i/4, C = -1/8 - i/4$

Por tanto

$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}dz = \frac{1}{4}\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} + (\frac{1}{8} - \frac{i}{4})\int_{C(0,r)} \frac{1}{z-2i}dz + (-\frac{1}{8} + \frac{i}{4})\int_{C(0,r)} \frac{1}{z+2i}$

para $r \neq 2$ las dos últimas integrales se anulan, y por tanto $\frac{1}{4}\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} = \frac{2\pi i}{4} = \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 5

Solución

$R > \text{máx}\{|a|, |b|\}$

$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz = \frac{1}{b-a}\left[\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b}dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a}dz\right]$

Por el ejercicio 3 tenemos

$\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = \frac{f(z)}{b-a}\left[\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right]$

Por la fórmula de Cauchy para la circunferencia

$= \frac{1}{b-a}\left[\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b}dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a}dz\right] = 2\pi i f(b) - 2\pi i f(a)$

Consecuencia

Si $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$

$\frac{2\pi|f(b)-f(a)|}{|b-a|} = \frac{|2\pi i(f(b)-f(a))|}{|b-a|} = \left|\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz\right| \leq \int_{C(0,R)} \frac{|f(z)|}{|z-a||z-b|}dz \leq \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)}2\pi R$ que tiende a 0 cuando $R \to \infty$ ya que $|z-a| \geq R - |a|$ y $|z-b| \geq R - |b|$

Equivalencia entre analiticidad y holomorfía

Ejercicio 1

Solución

$\phi(w, z) = \frac{\varphi}{w-z}$,

$\phi : \gamma^* x \mathbb{C} \backslash \gamma^* \to \mathbb{C}$

ϕ es continua

$\phi_w(z) = \phi(w, z)$

$z \to \phi_w(z)$

$\phi_w \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \backslash \{w\})$, $\phi_w \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \backslash \gamma^*)$

Por tanto por el teorema de holomorfía de una integral dependiente de 1 parámetro $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \backslash \gamma^*)$

Podemos proceder también de otra forma:

Fijo $a \in \mathbb{C} \backslash \gamma^*$ $\text{lím}_{z \to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \text{lím}_{z \to a} \frac{\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z} dw - \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-a} dw}{z-a}$

$= \text{lím}_{z \to a} \int_\gamma \varphi \frac{(w-a)-(w-z)}{(z-a)(w-z)(w-a)} dw = \text{lím}_{z \to a} \int_\gamma \varphi(w) \frac{dw}{(w-z)(w-a)}$

Sabemos que podemos intercambiar límite e integral

Nos podemos restringir a un compacto para ver $\psi : \phi_{|\gamma * \times \overline{D}(a,r)} \to \mathbb{C}$ es continua con r suficientemente pequeño y $\psi(w, z) = \frac{\varphi(w)}{(w-z)(w-a)}$

tenemos que $\gamma^* \times \overline{D}(a, r)$ es compacto, por tanto ϕ es uniformemente continua.

La fórmula para las derivadas la podemos obtener por inducción:

$k = 1$ lo hemos hecho, supuesto cierto para k, vemos para $k + 1$

Ejercicio 2

Solución

$(1 + z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)} \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ por tanto es analítica en ese disco.

Por el Teorema de desarrollo de Taylor $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n$

Ejercicio 3

Solución

a

$f'(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$

$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{1-z}$

Por tanto el desarrollo en serie de potencias de la original se puede conseguir a partir de desarrollo de las dos partes por separado.

$f'(z) = (2z-3)\sum_{n\geq 0}(\frac{A}{2}(\frac{z}{2})^n + Bz^n) = (2z-3)\sum_{n\geq 0}(\frac{A}{2^{n+1}} + B)z^n$

$= \sum_{n\geq 0}(\frac{A}{2^n} + 2B)z^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 3(\frac{A}{2^{n+1}} + B)z^n$

que nos da como resultado

$$f'(z) = -\left(\frac{3A}{2} + B\right) + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{A}{2^{n+1}} - B\right)z^n$$

Ejercicio 6

Solución

$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)}$ $z^2 + z - 1 = 0 \iff z = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, donde $a_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, a_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $f(z) = \frac{1}{(a_1-z)(a_2-z)} = \frac{1}{a_1-a_2}\left[\frac{1}{a_1-z} - \frac{1}{a_2-z}\right]$ Expresamos α_n en términos de a_1 y a_2 $a_1 + a_2 = -1$ $a_1 * a_2 = -1$ $(z-a_1)(z-a_2) = z^2 - (a_1+a_2) + a_1a_2$

α_{n+2} a partir de aquí se puede expresar en términos de α_n y α_{n+1}

Ejercicio 1

Solución

a)

$f(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{f^{n)}(0)}{n!}z^n$ $f^{n)}(0) = n$, vemos $\left\{\frac{n}{n!}\right\}, \left\{\sqrt[n]{\frac{n}{n!}}\right\} \to 0 \implies R = \infty,$

b)

$\frac{f^{n)}(0)}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$, $\sqrt[n]{n+1} \implies R = 1$ Por tanto no hay función entera que cumpla la condición

c)

$\frac{f^{n)}(0)}{n!} = \frac{2^n n!}{n!} = 2^n$, $\sqrt[n]{z^n} = 2 \implies R = 1/2$

d)

$\frac{f^{n)}(0)}{n!} = \frac{n^n}{n!}$, $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$ por el criterio del cociente $\implies R = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$

Ejercicio 12

Solución

$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2}$ $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^2}$

$\phi(z) = \frac{1}{z}$

$\gamma* = C(0,1/2)^*$ $\phi(\gamma^*) = C(0,2)^*$ Si $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{-it}$ $\phi(\gamma(t)) = 2e^{it} \implies \phi o \gamma = C(0,2)$

Por tanto

$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2} = \int_{C(0,1/2)} \frac{1}{\frac{1}{w^2}(\frac{1}{w}-1)^2} \frac{1}{w^2} dw = \int_{C(0,1/2)} \frac{w^2 dw}{(1-w)^2}$

Ceros de las funciones holomorfas

4 Existe la posibilidad de que f sea constante.

En otro caso, si f no es constante usando Liouille sabemos que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$ Entonces $\forall z \in f(\mathbb{C})$, $\exists : f(c) = z \implies f(z) = f(f(c)) = f(c) = z$

Por tanto

$f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C} \implies f(z) = z \forall z \in \mathbb{C}$

también se puede razonar de la siguiente forma: $\forall z \in \mathbb{C}, \exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n \in f(\mathbb{C}) \forall n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \to z \implies \{f(z_n)\} \to f(z) = z \implies f(z) = z \forall z \in \mathbb{C}$

Ejercicio 8

$f'(g(z))g'(z) = 0$ entonces puede darse $f'(g) = 0$ o $g' = 0$

Ejercicio 9

Definimos $h(z) = \frac{1}{f(1/z)}$, como $\lim_{w\to\infty} f(w) = \infty$ por tanto $\exists R > 0$ tal que si $|w| > R$, entonces $|f(w)| > 1$

Si $z \in D(0, 1/R)\backslash\{0\}$, $|z| < 1/R \iff 1/|z| > R$, entonces

podemos definir $h : D(0, 1/R)\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{H}(D(0, 1/R)\backslash\{0\})$ y $\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$ y deducimos por el Teorema de Extensión de Riemman $h \in \mathbb{H}(D(0, 1/R))$ y $h(0) = 0$

$\exists g \in \mathbb{H}(D(0, 1/R)))$ con $g(0) \neq 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $h(z) = \frac{1}{f(1/z)} = z^k g(z)$

$f(1/z) = \frac{1}{z^k}\frac{1}{g(z)}$ donde el valor absoluto del segundo término está acotado, por tanto $f(w) = w^k \frac{1}{g(1/w)}$, como $g(0) \neq 0 \exists \delta > 0$, $\exists C > 0$ tal que $D(0, \delta) \subset D(0, 1/R)$ tal que $|g(z)| \geq C > 0 \forall z \in D(0, \delta) \implies \frac{1}{|g(z)|} \leq \frac{1}{C} \forall z \in D(0, \delta) \implies \frac{1}{|g(1/w)|} \leq \frac{1}{C} \forall x \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}(0, 1/\delta)$

$|f(w)| = |w|^k \frac{1}{g(1/w)} \leq \frac{1}{C}|w|^k \; \forall w \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}(0, 1/\delta)$

por el ejercicio 2 de esta relación

f es un polinomio, en particular de grado menor o igual que k

10 pista LEMA Si f verifica que $|z| = 1 \implies |f(z)| = 1$, entonces $f(0) = 0$ o f es constante. PISTA LEMA: $1 = |f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} \forall z \in \mathbb{T} 1 = f(\overline{z})\overline{f(\overline{z})} = f(1/z)\overline{f(\overline{z})}\forall$ – Si hemos probado eso y f es constante es trivial, en caso contrario $f(0) = 0 \implies \exists g \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\exists k \in \mathbb{N}$ con $g(0) \neq 0$ tal que $f(z) = z^k g(z) \forall z \in \mathbb{C}$

$1 = |f(z)| = |z|^k |g(z)| z \in \mathbb{T}$ g está en las mismas condiciones que f y por el lema anterior g es constante

Teorema de Morera y sus consecuencias

Ejercicio 5

Sea U con interior no vacío, entonces $\exists z_o \in U$ con $|Im(z_o)| \geq r > 0$

$\frac{1}{n}|\sin(nz_O)| = \frac{1}{n}\left|\frac{e^{inz_0}-e^{-inz_0}}{2i}\right| = \frac{1}{2n}\left|e^{inz_0} - e^{inz_0}\right|$ entonces si $Im(z_0) \geq r$ $\frac{1}{2n}\left|e^{inz_0} - e^{inz_0}\right| \geq \frac{1}{2n}\left(e^{nIm(z_0)} - e^{-nIm(z_0)}\right)$ que tiende a infinito cuando $n \to \infty$

Ejercicio 6

$\frac{\sin(nz)}{3^n} = \frac{1}{2i}\left(\frac{e^{inz}}{3^n} - \frac{e^{-inz}}{3^n}\right)$

$\left|\frac{e^{inz}}{3^n}\right| = \frac{|e^{inRe(z)-nIm(z)}|}{3^n} = \frac{e^{nIm(z)}}{3^n}$ tenemos que hacer que sea menor que δ^n con $0 < \delta < 1$, lo que pasa solamente cuando $-Im(z) < \log(3) + \log(\delta)$

Ejercicio 7

Es entera por el teorema de holomorfía de integrales dependientes de un parámetro.

Ejercicio 8

a)

$f_n(z) = \int_0^n \sqrt{t}e^{-tz}dt$

Usaremos el teorema de holomorfía de integrales dependientes de un parámetro.

Definimos $\gamma_n : [0,n] \to \mathbb{C}$, $\gamma_n(t) = t$, $\gamma'(t) = 1$ Tenemos que buscar una función $\Phi_n : \gamma_n^* \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\Phi_n(w,z) = \sqrt{w}e^{-wz}$ Tenemos que

- Φ_n es continua
- $\Phi_n(w,\dot{})$ es entera $\forall w \in \gamma_n^*$

por el teorema de holomorfía $f_n \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ y $f_n'(z) = \int_{\gamma_n} \frac{d}{dz}(\Phi_n(w,z))dw$

entonces

$\int_{\gamma_n}(\Phi_n(w,z))dw = \int_0^n \sqrt{t}e^{-tz}dt$

b)

Sea $n \in \mathbb{N}$,

$|f_n(z) - f(z)| = |\int_0^n \sqrt{t}e^{-tz}dt - \int_0^\infty \sqrt{t}e^{-tz}dt| = |\int_n^{\int_n^\infty} \sqrt{t}e^{-tz}dt|$

Usamos que $|e^{-tz}| = |e^{-tRe(z)-iIm(z)}| = e^{-tRe(z)}$, de esta forma

$|\int_n^{\int_n^\infty} \sqrt{t}e^{-tz}dt| \leq \int_n^\infty \sqrt{t}e^{-tRe(z)}dt \leq \int_n^\infty \sqrt{t}e^{-tk}dt$

Y $\forall k \in \{z \in \mathbb{C} : Re(z) \geq k > 0\}$ tenemos $\int_n^\infty \sqrt{t}e^{-tk}dt \leq \int_n^\infty \sqrt{t}e^{-tk}dt \leq \int_n^\infty te^{-tk}$

Comportamiento local de una función holomorfa

Ejercicio 1

Si existen $0 < r1 < r2 < R$ tal qe $M(r_2) \leq M(r_1)$

$M(r_1) \geq M(r_2) = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}(0, r_2)^*\} = \text{máx}\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0, r_2)\}$

por tanto

$\exists z_0 \in D(0, r_1)$ en el que $|f|$ alcanza un máximo relativo para el disco $D(0, r_2)$, ahora usamos el principio de módulo máximo para deducir que f es constante en $D(0, r_2)$ y por el principio de identidad f es constante en $D(0, R)$

Ejercicio 2

$g : \overline{D}(0, 1)\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $g(z) = f(1/z)$ $g \in \mathbb{H}(D(0, 1)\backslash\{0\})$ y continua en $\overline{D}(0, 1)\backslash\{0\}$

$\text{lím}_{z\to 0}\, g(z) = \text{lím}_{w\to\infty}\, f(w) \in \mathbb{C}$ por tanto, por el teorema de extensión de Riemann $g \in \mathbb{H}(D(0, 1))$

Ahora se aplica el resultado del ejercicio 1 a g y sacamos la conclusión sobre f.

Ejercicio 3

$\text{lím}_{z\to\infty} \frac{P(z)}{z^n} = a_n$

$f(z) = \frac{P(z)}{z^n}$, $f \in \mathbb{H}(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\})$ y f es continua en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ y usando ejercicio 2 sabemos que $|f|$ alcanza su máximo en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ en un punto de $\mathbb{T}$.

$\left|\frac{P(z)}{z^n}\right| = |f(z)| \leq M$ $\forall z$ con $|z| \geq 1$

Ejercicio 4

$|f(a)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-a}dw\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{C(a,r)} \frac{|f(w)|}{|w-a|}dw \leq \frac{l(C(a,r))}{2\pi r}\,\text{máx}\{f(w) : w \in C(a, r)\} = \text{máx}\{f(w) : w \in C(a, r)\}$

Definimos $g(z) = f(z)f(-z)$, $|f(0)|^2 = |g(0)| = \text{máx}\{|g(w)| : w \in \mathbb{T}\} \leq 2$ $\forall w \in \mathbb{T}$

Ejercicio 5

Sabemos que $f \in \mathbb{H}(D(0, 1))$ y usamos la desigualdad de la medie en $C(0, r)$

$|f(0)| \leq \text{máx}\{|f(z)| : z \in C(0, r)^*\} = r^n$ $\forall 0 < r < 1$

tomamos límite con $r \to 0$ obtenemos que $f(0) = 0$

Si f es constante no hay nada que demostrar Si f no es constante, entonces, por el principio de los ceros de una función holomorfa $\exists g \in \mathbb{H}(D(0,1)), \exists k \in \mathbb{N}$ con $g(0) \neq 0$ tal que $f(z) = z^k g(z)\ \forall z \in D(0,1)$

Si tenemos que $k < n$ $r^n = \text{máx}\{|f(z)| : |z| = r\} = \text{máx}\{|z^k g(z)| : |z| = r\} = r^k \text{máx}\{|g(z)| : |z| = r\}$ por tanto $\text{máx}\{|g(z)| : |z| = r\} = r^{n-k}$ tomando límite en $r \to 0$ tenemos que g diverge en $z = 0$, lo que es una contradicción

Si tenemos que $n > k$, como $\text{máx}\{|g(z)| : |z| = r\} = r^{n-k}$ tomando límite en $r \to 0$ deducimos que $g(0) = 0$, lo que también es una contradicción.

Luego $k = n$ tenemos $f(z) = z^n g(z)\ \forall z \in D(0,1)$

como $\text{máx}\{|g(z)| : |z| = r\} = r^{n-k}$ deducimos que $\text{máx}\{|g(z)| : |z| = r\} = 1\ \forall r \in]0,1[$ por el ejercicio 1 tenemos que g es constante.

Ejercicio 7

$\lim_{z \to \infty} P(z) = \infty$ En $\overline{D}(0,R)|P|$ alcanza su mínimo absoluto en $\overline{D}(0,R)$ que vale $k = \text{mín}\{|P(z)| : z \in \overline{D}(0,R)\}$ Entonces $\exists R^+ > R$ tal que si $|z| \geq R^+$ entonces $|P(z)| > k$

En $\overline{D}(0,R) \subset \overline{D}(0,R^+)$ $|P|$ alcanza su mínimo absoluto en $z_0 \in \overline{D}(0,R^+)$ y sabemos que es menor o igual que k.

Como en $C(0,R^+)$ $|P| > k$ entonces $z_0 \in D(0,R^+)$

$P \in \mathbb{H}(D(0,R^+))$ y $|P|$ alcanza un mínimo relativo en z_0, por el principio del módulo mínimo $P(z_0) = 0$.

Ejercicio 8

Tenemos un punto $a \in \Omega$ tal que $Re(f)$ tiene un extremo relativo en a. Sabemos que $\exists R > 0$ tal que $D(a,R) \subset \Omega$ y $Re(f(z)) \geq Re(f(a))$ (respectivamente $Re(f(z)) \leq Re(f(a))$) $\forall z \in D(a,R)$.

Suponemos que f no es constante y por el teorema de la aplicación abierta, $f(a) \in (D(a,R))$ que es abierto. Sabemos que $existsr > 0$ tal que $D(f(a),r) \subset f(D(a,R))$, lo que es una contradicción con que $Re(f)$ alcance un extremo relativo en a.

Ejercicio 9

Como $C(0,1)$ es cerrado y acotado su imagen es un compacto. Si $Im(f(z)) = 0 \forall z \in D(0,1) \implies f$ es constante en $\overline{D}(0,1)$. En caso contrario $\exists z_0 \in D(0,1)$ tal que $Im(f(z_0)) \neq 0$, se continuará suponiendo que $Im(f(z_0)) > 0$, en caso de ser menor que 0 se razonaría igual pero usando el mínimo.

$Im(f) : \overline{D}(0,1) \to \mathbb{R}$ es continua en un compacto, por tanto $\exists w_0 \in \overline{D}(0,1)$ tal que $Im(f(w_0)) = \max\{Im(f(z)) : z \in \overline{D}(0,1)\} > 0$ Como $Im(f(w_0)) > 0$ tenemos que $w_0 \in D(0,1)$ y $Im(f)$ tiene un máximo relativo en w_0. Por el ejercicio 8 tenemos que f es constante.

Ejercicio 10

Tenemos un abierto $\Omega \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ inyectiva. $\overline{D}(a,r) \subseteq \Omega \forall z_0 \in D(a,r)$

$\int_{C(a,ra,r)} \frac{wf'(w)}{f(w)-f(z_0)} dw$ Sabemos que en el caso de un cambio de variable $\int_\gamma g(\varphi(w))\varphi' dw = \int_{\varphi\circ\gamma} g(z)dz$

Aplicando la fórmula del cambio de variable usando $\gamma = C(a,R), \varphi(w) = f(w), g(z) = \frac{f^{-1}(z)}{den}$ y nos queda $g(\varphi(w)) = \frac{w}{f(w)-f(z_0)}$.

Entonces $\int_{C(a,ra,r)} \frac{wf'(w)}{f(w)-f(z_0)} dw = \int_{f(C(a,r))} \frac{f^{-1}(z)}{z-f(z_0)} dz$

Por el teorema general de Cauchy ($\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(z)}{z-z_0} dz = Ind_\Gamma(z_0) f(z_0)$, tema 12) nos queda

$\int_{f(C(a,r))} \frac{f^{-1}(z)}{z-f(z_0)} dz = 2\pi i Ind_{f(C(a,r))}(f(z_0)) * f^{-1}(f(z_0)) = 2\pi i Ind_{f(C(a,r))}(f(z_0)) * z_0$

El teorema general de Cauchy

Ejercicio 12.1. Enunciar con detalle y demostrar que el índice de un punto respecto a un camino cerrado se conserva por giros, homotecias y traslaciones.

Solución. Veamos el giro de centro z_0 y ángulo θ. $\varphi(z) = z_0 + (z - z_0)e^{i\theta}$.

La homotecia de centro z_0 y módulo $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $\varphi_\lambda(z) = z_0 + (z - z_0)\lambda$

Y la traslación de vector z_0 $\varphi_{z_0}(z) = z + z_0$

Sea γ un camino cerrado en $\Omega = \Omega^\circ$ y $z \in \Omega \backslash \gamma*$.

Queremos ver si $Ind_\gamma(w) = Ind_{\varphi\circ\gamma}(\varphi(w_0)) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi\circ\gamma}\frac{1}{z-\varphi(w_0)}dz$

Por el ejercicio 11 de la relación 8 deducimos que $\frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi\circ\gamma}\frac{1}{z-\varphi(w_0)}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(\varphi(w))\varphi'(w)dw = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-\varphi(w_0)}dw$

$\varphi(w) - \varphi(w_0) = (w - w_0)\xi$ $z_0 + (w - z_0)e^{i\theta} - (z_0 + (w_0 - z_0))e^{i\theta}$ $\varphi'(w) = \xi \in \{e^{i\theta}, \lambda, 1\}$

De esa forma tenemos $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w)-\varphi(w_0)} = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dw}{w-w_0} = Ind_\gamma(w_0)$

Ejercicio 12.2. Sea $\rho : [-\pi, pi] \to \mathbb{R}^+$ una función de clase C^1, con $\rho(-\pi) = \rho(\pi)$ y sea $\sigma : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ el arco definido por

$$\sigma(t) = \rho(t)e^{it} \qquad \forall t \in [-\pi, \pi]$$

Calcular $Ind_\sigma(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma*$.

Solución. Sea $\mathbb{C}\backslash\sigma^*$ tiene una única componente conexa no acotada U y $\forall z \in U, Ind_\sigma(z) = 0 = \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \exists t \in [-\pi, \pi], z = |z|e^{it}, |z| < \varphi(t)\}$

Como $\varphi : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}^+$ es continua alcanza su mínimo absoluto que es positivo.

$0 \in \Omega$ y Ω es estrellado respecto a cero (dado $z \in \Omega$ $\lambda z + (1 - \lambda)0 \in \Omega$ con $\lambda \in [0, 1]$), por tanto Ω es conexo.

$\Omega \cup \sigma^* \cup U = \mathbb{C}$

Si $z \in \Omega$, como el índice es constante en cada componente conexa tenemos que $Ind_\sigma(z) = Ind_\sigma(0)$

$Ind_\sigma(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\sigma \frac{1}{z-0}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{\sigma(t)}\sigma'(t)dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\varphi'(t)+i\varphi(t)}{\varphi(t)}dt$

Singularidades

Residuos

Ejercicio 14.1. Probar que, para $a \in]0,1[$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3t)dt}{1+a^2-2a\cos(2t)} = \pi\frac{a^2-a+1}{1-a}$$

Solución. $\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3t)}{1+a^2-2a\cos(2t)}dt$

$1+a^2-2a\cos(2\pi) = |1-ae^{2it}|^2 = 1+a^2-2aRe(e^{2it}) = 1+a^2-2a\cos(2t) = (1+ae^{2it})\overline{1-ae^{2it}}$
$= (1-ae^{2it})(1-A\overline{e^{2it}}) = (1+ae^{2it})(1-ae^{-2it})$

$\gamma(t) = e^{it}$ $\gamma'(t) = ie^{it}$

entonces

$(1+ae^{2it})(1-ae^{-2it}) = (1-az^2)(a-\frac{a}{z^2})$

por lo que consideramos la función

$\frac{z^2}{(1-az^2)(z^2-a)}$ como tenemos que multiplicar por $\gamma'(t)$ consideramos $\frac{z}{(1-az^2)(z^2-a)}$

lo que es igual a

$\frac{e^{it}}{(1-ae^{2it})(e^{2it}-a)}ie^{it}$

Haciendo el mismo procedimiento con el numerador

$\cos^2(3t) = \frac{1+\cos(6t)}{2} = \frac{1+Re(e^{i6t})}{2} = Re(\frac{1+e^{i6t}}{2})$

Así vemos que la función que finalmente tendríamos que considerar es

$f(z) = \frac{(1+z^6)z}{2(1-az^2)(z^2-a)}$ $A = \{\frac{-1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}, \pm\sqrt{a}\}$ $f : \mathbb{C}\backslash A \to \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C}\backslash A)$

El camino $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ es nulhomólogo con respecto a $\mathbb{C}$

Como $A' = \emptyset$ por el teorema de los residuos $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(Ind_\gamma(-\sqrt{a})Res(f(z),-\sqrt{a}) + Res(f(z),\sqrt{a})\right)$

Ejercicio 14.2. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\in_0^{2\pi} \frac{(1+2\cos(t))^n\cos(nt)}{3+2\cos(t)}dt = \frac{2\pi}{\sqrt{5}}(3-\sqrt{5})^n$$

Ejercicio 14.3. Probar que, para $n \in \mathbb{N}$, se tiene:

$$\int_0^{2\pi} e^{\cos(t)} \cos(nt - \sin(t))dt = \frac{2\pi}{n!}$$

Ejercicio 14.4. Probar que, para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = \frac{\pi(a+2b)}{2ab^3(a+b)^2}$$

Solución. Sean $a, b \in \mathbf{R}^+$ calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^+a^2)(x^2+b^2)^2}$$

En el caso $a \neq b$ tomamos $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}$ $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C} \backslash \{\pm ia, \pm ib\})$

Tomamos $R > \text{máx}\{a, b\}$, consideramos el camino cerrado $\Gamma = [-R, R] + SC(0, R)$ (semicircunferencia recorrida en sentido positivo)

$\gamma : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma(x) = x$, $\gamma'(x) = 1$

Usamos que Γ es nul-homologa con respecto a $\mathbb{C}$ $\int_\Gamma f(z)dz = \int_{-R}^R f(x)dx + \int_{SC(0,R)}$

Por el teorema de los residuos

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i[Ind_\Gamma(ia)Res(f(z), ia) + Ind_\Gamma(ib)Res(f(z), ib)]$$

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i[Res(f(z), ia) + Res(f(z), ib)]$$

Ambos índices son 1 $\int_\Gamma f(z)dz = \int_{-R}^R f(x)dx + \int_{SC(0,R)} f(z)dz$

$|\int_{SC(0,R)} f(z)dz| \leq l(SC(0,R)) \text{máx}\{|f(z)| : z \in SC(0,R)\} \leq \frac{\pi R}{(R^2-a^)(R^2-a^2)^2}$ que tiende a 0 cuando $R \to \infty$

$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+a^2||z^2+b^2|} \leq \frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)^2}$

si $|z| = R$ $|z^2 + a^2| \geq |z|^2 - a^2 = R^2 - a^2$

———-

$Res(f(z), ia) = \text{lím}_{z\to ia}(z - ia)f(z) = \text{lím}_{z\to ia} \frac{(z-ia)}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2} = \frac{1}{(b^2-a^2)^2} \text{lím}_{z\to ia} \frac{z-ia}{z^2+a^2}$ por l'Hopital $= \frac{1}{(b^2-a^2)^2} \frac{1}{2ia}$

k es el orden del polo ib

$Res(f(z), ib) = \frac{1}{(z-1)'} \text{lím}_{z\to ib} \frac{d^{k-1)}}{dz^{k-1}}((z-ib)^k f(z)) = \text{lím}_{z\to ib} \frac{d}{dz}((z-ib)^2 f(z)) = \text{lím}_{z\to ib} \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-ib)^2}{(z^2+a^2)(z-ib)^2(z+ib)^2}\right) = \text{lím}_{z\to ib} \frac{2z*(z+ib)^2+2(z+ib)(z^2+a^2)}{(z^2+a^2)^2(z+ib)^4} = \frac{4b+2(-a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2(-ib^3)8}$

por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{2ia} \frac{1}{(b^2-a^2)^2} + \frac{4b+2(b^2-a^2)}{(b^2-a^2)(-i)8b^34} \right) = \frac{4b^3 - a(4b+2(b^2-a^2))}{4ab^3(b^2-a^2)^2}$$

continuará

Ejercicio 14.5. Probar que, para $a \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^6 dx}{(x^4+a^4)^2} = \frac{3\pi\sqrt{2}}{8a}$$

Ejercicio 14.6. Dado $n \in \mathbb{N}$ con $n > 2$, integrar una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del sector $D(0,R) \cup \{z \in \mathbb{C}^* : 0 < arg(z) < 2\pi/n\}$ con $R \in \mathbb{R}^+$, para probar que:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi}{n} cosec(\pi/n)$$

Ejercicio 14.7. Probar que, para $a, t \in \mathbb{R}^+$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(tx)dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{\pi}{2a^3}(1+at)e^{-at}$$

Ejercicio 14.8. Probar que: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\sin(\pi x)}{x^2-5x+6} dx = -5\pi$

Ejercicio 14.9. Integrando la función $z \to \frac{1-e^{2iz}}{z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera de la mitad superior del anillo $A(0; e, R)$, probar que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

$$0 = \int_{\Gamma_{\varepsilon,R}} f(z)dz = \int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)dz + \int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz + \int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz \tag{1}$$

Sabemos que

$$\int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(z)dz = \frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx \qquad \gamma_1 : [-R,-\varepsilon] \to \mathbb{C}, \gamma_1(x) = x$$

$$\int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}dx \qquad \gamma_2 : [\varepsilon,R] \to \mathbb{C}, \gamma_2(x) = x$$

Para los dos primeros términos usamos

$$\frac{1-(\cos(2x)+i\sin(2x))}{x^2} = 2\frac{\sin^2(x)}{x^2} - i\frac{\sin(2x)}{x^2}$$

$$\int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)dz+\int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz = 2\left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx\right]+i\left[-\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin(2x)}{x^2}dx - \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin(2x)}{x^2}ds\right]$$

$$\int_{[-R,-\varepsilon]} f(z)dz+\int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz = 2\left[\int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx\right]$$

Resolvemos los dos últimos términos

$$\int_{\gamma_R} f(z)dz + \int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz$$

$$\gamma_R : [0, \pi] \to \mathbb{R} \qquad \gamma_R(t) = Re^{it} \qquad \gamma_{R'}(t) = iRe^{it}$$

Para la primera parte tomamos módulos:

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| = \left|\int_0^{\pi} \frac{1 - e^{2iRe^{it}}}{R^2e^{2it}} iRe^{it}dt\right| \le \int_0^{\pi} \frac{|1| + |e^{2iRe^{it}}|}{R}dt \le \frac{2\pi}{R}$$

Donde en el último paso hemos usado que

$$|e^{2iRe^{it}}| = e^{-2R\sin(t)} \le 1 \qquad \forall t \in [0, \pi]$$

De esa forma sabemos que cuando $R \to \infty$ la integral tiende a 0.

Proposición Sea $a \in \mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(D(a,r)\backslash\{a\}), r > 0$. Si g tiene un polo de orden 1 en a y $\gamma_\varepsilon : [c, a] \to \mathbb{C}$ es un trozo de circunferencia centrado en a con radio $\varepsilon < r$ (recorrido en sentido positivo) entonces

$$\lim_{h\to 0} \varepsilon \to 0 \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)dz = (d-c)iRes(g(z), a)$$

Utilizando la proposición obtenemos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz = -\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\gamma_\varepsilon} f(z)dz = -\pi iRes(f(z), 0)$$

Calculamos el residuo

$$Res(f(z), 0) = \lim_{z\to 0} zf(z) = \lim_{z\to 0} z\frac{1-e^{2iz}}{z^2} = \lim_{z\to 0}\frac{1-e^{2iz}}{z}$$

Usando l'Hopital nos queda $-2i$, por lo que la integral queda:

$$-\pi iRes(f(z), 0) = -2\pi$$

Tomando límites en 1 tenemos

$$0 = 4\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx - 2\pi \implies \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}dx = \pi/2$$

Ejercicio 14.10. Dado $a \in \mathbb{R}$ con $a > 1$, integrar la función $z \to \frac{z}{a-e^{-iz}}$ sobre la poligonal $[-\pi, \pi, \pi + in, -\pi + in, -\pi]$, con $n \in \mathbb{N}$, para probar que

$$\int_{-\pi}^{\pi}$$

Ejercicio 14.11. Integrando una conveniente función compleja a lo largo de la frontera de la mitad superior del anillo $A(0; \varepsilon, R)$, probar que, para $\alpha \in]-1, 3[$, se tiene:

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha dx}{(1+x^2)^2} = \frac{\pi}{4}(1-\alpha)sec(\frac{\pi\alpha}{2})$$

Ejercicio 14.12. Probar que, para $\alpha \in]0, 2[$, se tiene:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\alpha x} dx}{1+e^x+e^{2x}} = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1} dt}{1+t+t^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}} \frac{\sin(\pi(1-\alpha)/3)}{\sin(\pi\alpha)}$$

Ejercicio 14.13. Integrando la función $z \to \frac{\log(z+i)}{1+z^2}$ sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R, Im(z) > 0\}$, con $R \in \mathbb{R}$ y $R > 1$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx$$

Ejercicio 14.14. Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$, con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{e^x + e^{-x}}$$

Probamos con la función

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{e^z + e^{-z}} \qquad e^{i(R+ti)} = e^{iR}e^{-t}$$

$$e^z + e^{-z} = 0 \iff e^{2z} + 1 = 0 \iff e^{2z} = -1 \iff 2z \in Log(-1)$$

$$2z \in \{\ln(|1|) + i(\pi + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} \iff z \in \{(\pi/2 + k\pi)i : k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\Omega = \mathbb{C} \qquad \Gamma = [-R, R, R + \pi i, -R + \pi i, -R]$$

$$A = \{(\pi/2 + k\pi)\, i : k \in \mathbb{Z}\} \qquad f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash A) \qquad \Gamma \text{ es nulhomólogo con respecto a } \Omega = \mathbb{C}$$

Sabeos que $A \cup \Omega = \emptyset$, luego por el teorema de los residuos sabemos que

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i Ind_\Gamma(\frac{\pi}{2}i)Res(f(z), \frac{\pi}{2}i) = 2\pi i Res(f(z), \frac{\pi}{2}i)$$

Que es igual a la siguiente expresión:

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{e^{x}+e^{-x}}dx+\int_{R}^{R+\pi i} f(z)dz+\int_{[R+\pi i,-R+\pi i]} f(z)dz+\int_{[-R+\pi i,-R]} f(z)dz \text{ Nombradas por (1),(2),(3) y (4)}$$

Vemos (3) y usamos la parametrización $x \to x+\pi i, x \in [-R, R]$

$$\int_{[R+\pi i,-R+\pi i]} f(z)dz = \int_{[-R+\pi i,R+\pi i]} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{i(x+\pi i)}}{e^{x+\pi i}+e^{-(x+\pi i)}} = e^{-\pi}\int_{-R}^{R} \frac{\cos(x)+i\sin(x)}{e^{x}+e^{-x}}dx$$

Veamos que lím $R \to \infty \int_{R}^{R+\pi i} f(z)dz$, donde usaremos la parametrización $R+ti,\ t \in [0,\pi]$

$$\left|\int_{[R,R+\pi i]} \frac{e^{iz}}{e^{z}+e^{-z}}\right| = \left|\int_{0}^{\pi} \frac{e^{i(R+ti)}}{e^{R+ti}+e^{-R-ti}}\right| \leq \int_{0}^{\pi} \frac{e^{-t}}{e^{R}-e^{-R}}dt \leq \frac{\pi}{e^{R}-e^{-R}} \text{ que tiende a 0 cuando } R \to \infty$$

donde hemos usado que

$$|e^{R+ti}+e^{-R-ti}| \geq |e^{R+ti}|-|e^{-R-ti}| = e^{R}-e^{-R}$$

Tomando límite con $R \to \infty$ en la expresión

$$(1)+(2)+(3)+(4) = 2\pi i Res(f(z),\frac{\pi}{2}i))$$

$$(1)+(3) = 2\pi i Res(f(z),\frac{\pi}{2}i)$$

Y ahora tomamos las partes reales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^{x}+e^{-x}}dx + e^{-\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^{x}+e^{-x}}dx = Re(2\pi i Res(f(z),\frac{\pi}{2}i))$$

Tras hacer los cálculos vemos que

$$Res(f(z),\frac{\pi}{2}i) = \frac{e^{-\pi/2}}{2i}$$

Por lo que

$$Re(2\pi i Res(f(z),\frac{\pi}{2}i)) = \pi e^{-\pi/2}$$

y tenemos que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{e^{x}+e^{-x}}dx = \frac{\pi e^{-\pi/2}}{1+e^{-\pi}}$$

Ejercicio 14.15. Integrando una conveniente función sobre un camino cerrado que recorra la frontera del conjunto $\{z \in \mathbb{C} : \varepsilon < |z| < R, 0 < arg(z) < \pi/2\}$, con $0 < \varepsilon < 1 < R$, calcular la integral

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x^{4}}dx$$

Probamos con la función

$$f(z) = \frac{\log(z)}{1+z^{4}}$$

entonces

$$\int_{[\varepsilon,R]} f(z)dz = \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\log(x)}{1+x^4}$$

$$\int_{[iR,i\varepsilon]} f(z)dz = -\int_{[i\varepsilon,iR]} f(z)dz = -\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\log(ix)}{1+(ix)^4} idx$$

Vemos

$$\log(ix) = \log(|ix|) + i\pi/2$$

entonces

$$-\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\log(ix)}{1+(ix)^4} idx = -i\int_{\varepsilon}^{R} \frac{\log(x)}{1+x^4} + \frac{\pi}{2}\int_{\varepsilon}^{R} \frac{dx}{1+x^4}$$

Como **idea** para las partes que quedan:

$$|f(z)| = \frac{|\log(|z|) + i\theta_z|}{|1+z^4|} \leq \frac{\pi/2 + \log(R)}{R^4 - 1} \qquad z = |z|e^{i\theta_z} \in \gamma_R^* \text{ tal que } \theta_z \in [0, \pi/2]$$

$$\left|\int_{\gamma_R} f(z)dz\right| \leq \frac{l(\gamma_R)(\pi/2 + \log(R))}{R^4 - 1} \qquad \text{que tiene a 0 cuando } R \to \infty$$

Si $z \in \gamma_\varepsilon^*$

$$|f(z)| = \frac{|\log(\varepsilon)| + \pi/2}{1 - \varepsilon^4}$$

$$\left|\int_{\gamma_\varepsilon} f(z)dz\right| \leq \frac{l(\gamma_\varepsilon)(|\log(\varepsilon)| + \pi/2))}{1 - \varepsilon^4}$$

Como tenemos

$$\Omega = \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^- \text{ que es homologicamente conexo y } \Gamma = [\varepsilon, R] + \gamma_R + [iR, i\varepsilon] + \gamma_\varepsilon$$

podemos deducir que Γ es nulhomólogo con respecto a Ω y que $f \in \mathcal{H}(\Omega \backslash A)$ con

$$A = \{e^{i\pi/4}, e^{3\pi i/4}, e^{5\pi i/4}, e^{7\pi i/4}\}$$

Y aplicando el teorema de los residuos tenemos que

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i Ind_{\Gamma}(e^{i\pi/4}) Res(f(z), e^{i\pi/4}) = 2\pi i Res(f(z), e^{i\pi/4})$$

donde

$$\lim_{z \to e^{i\pi/4}} \frac{(z - e^{i\pi/4})}{1+z^4} \log(z) = -\frac{\pi i}{16} e^{i\pi/4} = -\frac{\pi i}{16}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\pi}{16}\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 14.16. Integrando una conveniente función sobre la poligonal $[-R, R, R+2\pi i, -R+2\pi i, -R]$ con $R \in \mathbb{R}^+$, calcular la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} dx$$

Consideramos $f(z) = \frac{e^{z/2}}{e^z+1}$ $e^z + 1 = 0 \iff e^z = -1 \iff z \in Log(-1) = \{0 + i(\pi + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} = A$

$f : \mathbb{C} \backslash A \to \mathbb{C} \qquad f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \backslash A)$

$\Gamma_R = [-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$ es nulhomólogo con respecto a $\mathbb{C}$

Vemos que A no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$

Por el teorema de los residuos

$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i Ind_{\Gamma_R}(i\pi) Res(f(z), i\pi)$

$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i Res(f(z), i\pi) = \frac{[-R,R]}{f}(z)dz + \int_{[R,R+2\pi i]} f(z)dz + \int_{[R+2\pi i, -R+2\pi i]} f(z)dz + \int_{[-R+2\pi i, -R]}$

$\left|\int_{[R,R+2\pi i]}\right| \leq 2\pi \max\{|f(z)| : z \in [R, R+2\pi i]\} \leq 2\pi \frac{e^{R/2}}{e^R - 1} \to 0$ cuando $R \to \infty$

donde hemos usado: $|f(z)| = |\frac{e^{z/2}}{e^z+1}| = \frac{e^{R/2} e^{ti/2}}{e^R - 1} = \frac{e^{R/2}}{e^R - 1}$ y $|e^z + 1| \geq |e^z| - 1 = e^R - 1$ ya que $z = R + ti$

$\left|\int_{-R+2\pi i, -R} f(z)dz\right| \leq 2\pi \max\{|f(z)| : z \in [-R + 2\pi i, -R]\} \leq 2\pi \frac{e^{-R/2}}{1 - e^{-R}} \to 0$ cuando $R \to \infty$

usando: Si $z = -R + ti : t \in [0, 2\pi]$ $|f(z)| = \left|\frac{e^{-R/2} e^{ti/2}}{e^{-R} e^{ti} + 1}\right| \leq \frac{e^{-R/2}}{1 - e^{-R}}$

$\int_{[-R,R]} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{x/2}}{e^x+1} \gamma'(x)dx$ con $\gamma(x) = x$ y $x \in [-R, R]$

$\int_{[R+2\pi i, -R+2\pi i]} f(z)dz = -\int_{[-R+2\pi i, R+2\pi i]} f(z)dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{x/2} e^{\pi i}}{e^x+1} dz = \int_{[-R,R]} \frac{e^{x/2}}{e^x+1} dx$ donde hemos usado $\varphi(x) = xx + 2\pi i : x \in [-R, R]$, $\varphi'(x) = 1$

$f(\varphi(x)) = \frac{e^{x/2} e^{\pi i}}{e^{x+2\pi i} + 1} = \frac{-e^{x/2}}{e^2 + a}$

Tomando límite con $R \to \infty$ obtenemos que $2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x+1} dx = 2\pi i Res(f(z), i\pi)$

$Res(f(z), i\pi) = \text{lím}_{z \to i\pi} f(z) = \text{lím}_{z \to i\pi} (z - i\pi) \frac{e^{z/2}}{e^z+1} = e^{i\pi/2} \text{lím}_{z \to i\pi} \frac{z - i\pi}{e^z+1}$ que usando l'Hopital nos queda $-i$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x+1} dx = \pi i Res(f(z), i\pi) = \pi i(-i) = \pi$