Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Contents

Introducción

1 Convergencia uniforme y puntual

De igual manera que tratamos con sucesiones de puntos de $\mathbb{R}^N$, podemos hacerlo con sucesiones de funciones. Dado $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, podemos tomar para cada $n \in \mathbb{N}$ una función $f_n : A \to \mathbb{R}^M$, y formar así una sucesión de funciones que notaremos $\{f_n\}$. El conjunto de funciones de A en $\mathbb{R}^M$ lo denotaremos por $\mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$.

Definición (Convergencia punto a punto). Diremos que una sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente a una función $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$ si $\forall x \in A \;\; \{f_n(x)\} \to f(x)$. Esto es, si se verifica lo siguiente:

$$\forall x \in A \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

En ocasiones denotaremos la convergencia puntual como $\{f_n\} \xrightarrow{c.p} f$.

Definición (Convergencia uniforme). Diremos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f \in \mathcal{F}(A, \mathbb{R}^M)$ si se verifica:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \; : n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

En ocasiones denotaremos la convergencia uniforme como $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$.

Nota. Aunque ambas definiciones son muy parecidas, hay una diferencia clave. En la convergencia puntual, el valor de n_0 puede depender tanto de ε como de x. Sin embargo, en la convergencia uniforme, exigimos que n_0 sea válido para cualquier x.

Proposición. *Si $\{f_n\} \to f$ uniformemente $\implies$ $\{f_n\} \to f$ puntualmente.*

Nota. El recíproco no es cierto en general. Sin embargo, ambos conceptos son equivalentes si el conjunto de definición de las f_n es un conjunto finito. En efecto, si A es finito, y $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x) \; \forall x \in A$, entonces tomamos n_0 como el máximo de los $n_0(x)$ que nos da la convergencia puntual en cada $x \in A$, y $\{f_n\}$ converge uniformemente en A.

El siguiente resultado, conocido como *Teorema de Dini*, muestra que bajo ciertas condiciones, el recíproco de la proposición anterior sí es cierto.

Teorema 1.1. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto, y funciones $f_k : A \to \mathbb{R}$ continuas, verificando:*

(i) $f_k \geq 0$

(ii) $f_k(x) \geq f_{k+1}(x) \;\; \forall x \in A$ *(la sucesión $\{f_k\}$ es monótona decreciente).*

(iii) $f_k(x) \to 0$ *c.p.* $\forall x \in A$

Entonces, $\{f_k\} \to 0$ uniformemente en A.

Proof. Se puede consultar en *[Ejercicios, p.4]*. □

La necesidad del concepto de convergencia uniforme se aprecia bien en el siguiente teorema, junto con los ejemplos que aparecen a continuación. Normalmente, las funciones con las que trabajemos serán continuas.

Teorema 1.2. *Sean $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f_n \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, se tiene que*

$$\{f_n\} \to f \text{ uniformemente} \implies f \text{ es continua}$$

Proof. Fijamos $a \in A$. Dado $\varepsilon > 0$, como $\{f_n\} \to f$ uniformemente,

$$\exists K > 0 : \ n \geq K \implies |f_n(y) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{3} \ \forall y \in A \implies \begin{cases} |f_n(a) - f(a)| < \dfrac{\varepsilon}{3} \\ |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{3} \end{cases}$$

Como además, f_n es continua para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{r} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies |f_n(x) - f_n(a)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Entonces,

$$\exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{r} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies |f(x)-f(a)| \leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(a)|+|f_n(a)-f(a)| < \varepsilon$$

Hemos probado que dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{r} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, por tanto, f es continua. □

Veamos algunoss ejemplos de sucesiones de funciones:

Ejemplo 1.1:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \geq \dfrac{1}{n} \\ -nx + 1 & \text{si } 0 \leq x < \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

Ejemplo 1.2:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = x^n$$

Ejemplo 1.3:

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \ f_n(x) = \frac{sen(nx)}{n}$$

Vamos a estudiar la convergencia puntual de la sucesión del ejemplo (1.1):

Primero, fijamos $x \in (0, 1]$. Entonces, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \geq \dfrac{1}{n}$, luego $f_n(x) = 0$. Por otra parte, $f_n(0) = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Concluimos que

$$\{f_n\} \to f = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Observamos que la convergencia puntual no preserva la continuidad de las funciones. Esto implicaría que, con esta definición de convergencia, el espacio de funciones continuas en un conjunto no sería cerrado. Además, podemos comprobar que $\{f_n\}$ no converge uniformemente a f, pues en caso de hacerlo f debería ser continua, por el *Teorema* **??**.

Ahora estudiemos la convergencia uniforme del ejemplo (1.3):

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists K > \frac{1}{\varepsilon} : \quad n \geq K \implies \frac{|sen(nx)|}{n} \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{K} < \varepsilon$$

Vemos que converge uniformemente a cero. Lo importante para esta demostración, y lo que lo será en la mayoría de los casos de convergencia uniforme, es que podemos encontrar un ε_n (en este caso $\frac{1}{n}$), que no dependa de x, tal que $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_n$.

Proposición (Criterio de Cauchy). *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$, y sean $f_n : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Entonces:*

$$\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f \implies \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall x \in A$. Entonces, dados $m, n \geq n_0$ se tiene que:

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x) + |f_m(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $x \in A$ fijo. Entonces, es claro que $\{f_n(x)\} \subseteq \mathbb{R}^M$ es una sucesión de Cauchy. Como $\mathbb{R}^M$ es completo, tenemos que $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x)$ $\forall x \in A$. Ahora, tomando límite cuando $m \to \infty$ en la expresión de la hipótesis, y teniendo en cuenta que el último $<$ se transforma en $\leq$:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : \ n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \quad \forall x \in A$$

Es decir, $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$. $\square$

1.1 El espacio de funciones continuas

Ya sabemos que dado $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, el espacio $(\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M), || \cdot ||_\infty)$ es un espacio normado, donde la norma del máximo o *norma uniforme* se define así:

$$||f||_\infty := máx\{|f(x)| : x \in A\} = \underset{x \in A}{máx} \ |f(x)|$$

Proposición. *En el espacio $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$, con A compacto, la convergencia de sucesiones equivale a la convergencia uniforme, esto es:*

$$\{f_n\} \to f \ en \ \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M) \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$$

Proof.
$||f_n - f||_\infty \to 0 \iff \underset{x \in A}{máx} \ |f_n(x) - f(x)| \to 0 \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \underset{x \in A}{máx} \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \iff |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \ \forall x \in A \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f.$ □

Teorema 1.3 ($\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ es completo). *En el espacio $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$, con A compacto, también ser sucesión de Cauchy equivale a la convergencia uniforme, esto es:*

$$\{f_n\} \ es \ de \ Cauchy \ en \ \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M) \iff \{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$$

Proof. El razonamiento es análogo al anterior, utilizando esta vez el criterio de Cauchy visto anteriormente. □

Es importante recalcar que estamos suponiendo que el subconjunto A es compacto. Podemos extender el resultado anterior, considerando el espacio $(\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M), \| \cdot \|_\infty)$, donde:

$\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M) := \{f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M : f \text{ es continua y acotada}\}$

$\|f\|_\infty := \underset{x \in A}{sup} \ |f(x)|$

Proposición. *El espacio $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$ es un espacio de Banach, es decir, es un espacio normado y completo.*

Proof. Puede consultarse en *[Ejercicios, p.3]*. □

Nota. Si A es compacto, entonces $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M) = \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$.

Veamos ahora dos teoremas que relacionan el concepto de convergencia uniforme con los conceptos de derivación e integración.

Teorema 1.4. *Sean $f, f_n \in \mathcal{C}([a, b], \mathbb{R})$ tales que $\{f_n\} \xrightarrow{c.u} f$. Entonces,*

$$\left\{\int_a^b f_n\right\} \xrightarrow{c.u} \int_a^b f$$

Equivalentemente, podemos intercambiar la integral con el límite:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n$$

Proof. Dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{b-a}$ $\forall x \in [a, b]$. Entonces,

$$\left| \int_a^b f_n - \int_a^b f \right| = \left| \int_a^b (f_n - f) \right| \leq \int_a^b |f_n - f| < \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

□

Teorema 1.5. *Sea $f_n \in \mathcal{C}^1((a,b))$ $\forall n \in \mathbb{N}$, y sean $f, g \in \mathcal{C}((a,b)$. Supongamos que $\{f_n(x)\} \to f(x)$ c.p. $\forall x \in (a,b)$, y supongamos también que $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g$ en (a,b). Entonces, $f \in \mathcal{C}^1((a,b))$, y $f' = g$.*

Proof. Elegimos primero un $x_0 \in (a,b)$ fijo. Entonces, $\{f_n(x_0)\} \to f(x_0)$ por hipótesis. Como f_n' es continua, entonces, por el teorema fundamental del cálculo:

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(t)dt$$

Ahora, como $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g$ en el intervalo cerrado de extremos x_0 y x, por el *Teorema* **??** tenemos que $\{f_n(x)\} \to G(x)$ $\forall x \in (a,b)$, donde:

$$G(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x g(t)dt$$

Es decir, $\{f_n(x)\}$ converge puntualmente en (a,b) a $G(x)$. Ahora, G es de clase 1 por ser $g(t)$ continua, y además, tenemos que $G(x_0) = f(x_0)$. Por otro lado, es claro que $G' = g$.

Pero también $\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p} f(x)$ por hipótesis, por lo que necesariamente $\forall x \in (a,b)$ $G(x) = f(x)$, esto es, $f \in \mathcal{C}^1((a,b))$ y $f' = G' = g$. □

Corolario 1.1. *Sea $f_n \in \mathcal{C}^1((a,b))$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\exists \alpha \in (a,b)$ tal que $\{f_n(\alpha)\}$ es convergente, y supongamos también que $\{f_n'\} \xrightarrow{c.u.} g \in \mathcal{C}((a,b))$ en (a,b). Entonces, $\exists f : (a,b) \to \mathbb{R}$ tal que $\{f_n\} \to f$ uniformemente. Además, $f \in \mathcal{C}^1(a,b)$, y $f' = g$.*

Proof. Probaremos únicamente que $\{f_n\} \to f$ uniformemente. El resto de la tesis se sigue de aplicar el *Teorema* **??**.

Sea $\varepsilon > 0$. Por un lado, como $\{f_n'\}$ converge uniformemente, aplicamos el *Criterio de Cauchy* para obtener un $k_1 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$p, q \geq k_1 \implies |f_p'(y) - f_q'(y)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Del mismo modo, como $\{f_n(\alpha)\}$ es una sucesión de números reales convergente, es de Cauchy, y obtenemos un $k_2 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$p, q \geq k_2 \implies |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ahora, defino $K := k_1 + k_2$, y teniendo en cuenta el *Teorema del Valor Medio*, se tiene que, dado $x \in (a, b)$ y $p, q \geq K$:

$$|f_p(x) - f_q(x)| = |f_p(x) - f_p(\alpha) + f_p(\alpha) - f_q(\alpha) + f_q(\alpha) - f_q(x)|$$

$$\leq |f_p(x) - f_q(x) - (f_p(\alpha) - f_q(\alpha))| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)|$$

$$= |f_{pq}(x) - f_{pq}(\alpha)| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| \overset{T.V.M}{=} |x - \alpha||f'_{pq}(z_x)| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)|$$

$$= |x - \alpha| \left|f'_p(z_x) - f'_q(z_x)\right| + |f_p(\alpha) - f_q(\alpha)| < (b - a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b - a)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

donde z_x está en el intervalo abierto de extremos α y x, y $f_{pq}(x) := f_p(x) - f_q(x)$. Observemos que en este razonamiento, el valor de K **no depende de** x, sino exclusivamente de quién sea ε. Por tanto, por el *Criterio de Cauchy*, se tiene que $\{f_n\}$ converge uniformemente en (a, b). $\square$

1.2 Conjuntos compactos de $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$

En este apartado, nuestro objetivo será caracterizar los conjuntos compactos de $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Para ello, necesitamos primero definir ciertos conceptos el espacio de funciones continuas. Salvo que se especifique lo contrario, A será un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^N$ en todo el apartado.

Definición (Conjunto acotado). Sea $A \in \mathbb{R}^N$ compacto, $B \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Se dice que B es acotado (o equiacotado) si $\exists M > 0 : \; \|f\|_\infty \leq M \;\; \forall f \in B$.

Nota. Teniendo en cuenta la definición de la norma $\|\cdot\|_\infty$, el que B sea acotado es equivalente a decir que $|f(x)| \leq M, \; \forall x \in A, \; \forall f \in B$.

Definición (Conjunto equicontinuo). Sea $A \in \mathbb{R}^N$ compacto, $B \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Se dice que B es equicontinuo si

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{r} |x - y| < \delta \\ x, y \in A \end{array}\right\} \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \forall f \in B$$

Nota. Este concepto es muy parecido al de función uniformemente continua. De hecho, como A es compacto y todas las f son continuas, sabemos por el *Teorema de Heine-Cantor* que todas ellas son uniformemente continuas. Sin embargo, para poder afirmar que B es equicontinuo, es necesario que el número δ sea válido sea quien sea f.

Proposición. *Sea $B \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Si B es finito, entonces es equicontinuo.*

Proof. Sabemos que $\forall f \in B,\ f$ es uniformemente continua. Como B es finito, tenemos un conjunto finito $\{\delta_i > 0 : f_i \text{ es uniformemente continua con } \delta_i\}$. Concluimos tomando $\delta := \min_i \delta_i$. □

El interés en ver cuáles son los conjuntos compactos de $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ proviene, entre otras cosas, del hecho de que hay conjuntos cerrados y acotados que no son compactos. El siguiente ejemplo lo pone de manifiesto.

EJEMPLO 1.4: En $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$, ninguna bola cerrada es compacta.

Para verlo, sea $r > 0$, y consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas como $f_n(x) = rx^n \quad \forall x \in [0, 1]$. Ya sabemos que la sucesión converge puntualmente a la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ 0 \leq x < 1 \\ r & si\ x = 1 \end{cases}$$

Pero f no es continua, por lo que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, 1]$. De hecho, $\{f_n\}$ no puede tener ninguna sucesión parcial que converja uniformemente, pues en otro caso, el límite uniforme de la sucesión parcial sería f, que no es continua.

Por otro lado, $\|f_n\|_\infty = \max \{|f_n(x)| : x \in [0, 1]\} = r$, y entonces $f_n \in \overline{B}_\infty(0, r)$.

Recordemos que en este espacio, ser convergente era equivalente a la convergencia uniforme. Por tanto, combinando ambas informaciones, hemos encontrado una sucesión de funciones $\{f_n\} \subseteq \overline{B}_\infty(0, r)$ tal que no es posible extraer una subsucesión convergente a un punto de $\overline{B}_\infty(0, r)$. Esto prueba que $\overline{B}_\infty(0, r)$ no es compacta.

Además, sabemos que existe un homeomorfismo entre las bolas cerradas y centradas en el origen, y las bolas cerradas centradas en un punto arbitrario de $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Como la compacidad es una propiedad topológica, concluímos que ninguna bola cerrada es compacta. Para una demostración más detallada de esta última afirmación, consultar *[Ejercicios, p.4]*.

Definición (Sucesión acotada). Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ es acotada si el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es acotado.

Definición (Sucesión equicontinua). Se dice que una sucesión $\{f_n\} \subseteq \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ es equicontinua si el conjunto $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ es equicontinuo.

Si recordamos la prueba en $\mathbb{R}^N$ de que los conjuntos compactos son los cerrados y acotados, el *Teorema de Bolzano-Weierstrass* era una herramienta clave. Veamos ahora un resultado equivalente en $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$.

Teorema 1.6 (Arzelà-Ascoli). *Toda sucesión de funciones en $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ que sea equicontinua y acotada admite una sucesión parcial convergente.*

Proof. Dividiremos la demostración en varios pasos.

Paso 1. Vamos a probar que $\exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\{f_{\sigma(n)}\} \to f$ puntualmente en $\mathbb{Q}^N \cap A$. Recordemos que, puesto que $\mathbb{Q}$ es numerable:

$$A \cap \mathbb{Q}^N \text{ es numerable } \implies \exists N \subseteq \mathbb{N} : \quad \exists \phi : N \longrightarrow A \cap \mathbb{Q}^N \text{ biyectiva}$$

Denotamos $r_k = \phi(k) \in A \cap \mathbb{Q}^N$ (enumeración de $A \cap \mathbb{Q}^N$). Por otra parte, observemos lo siguiente:

$$\{f_n\} \text{ equiacotada } \implies \exists M > 0 \, : \, |f_n(x)| \leq M, \, \forall x \in A, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

En particular, $\{f_n(r_1)\}$ es una sucesión acotada en $\mathbb{R}^M$, y por tanto podemos aplicar el *Teorema de Bolzano-Weierstrass* para ver que $\exists \sigma_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que la subsucesión $\{f_{\sigma_1(n)}(r_1)\}$ de $\{f_n(r_1)\}$ es convergente hacia un vector de $\mathbb{R}^M$ que denotaremos como $f(r_1)$:

$$\{f_{\sigma_1(n)}(r_1)\} \longrightarrow f(r_1).$$

Como también tenemos la acotación de $\{f_{\sigma_1(n)}(r_2)\}$, deducimos de nuevo aplicando el *Teorema de Bolzano-Weierstrass* que $\exists \sigma_2 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que la subsucesión $\{f_{\sigma_2 \circ \sigma_1(n)}(r_2)\}$ de $\{f_{\sigma_1(n)}(r_2)\}$ es convergente hacía un vector que denotaremos como $f(r_2)$:

$$\{f_{\sigma_2 \circ \sigma_1(n)}(r_2)\} \longrightarrow f(r_2).$$

Por inducción, concluimos que $\forall k \in N \; \exists \sigma_k : \mathbb{N} \nearrow \mathbb{N}$ tal que

$$\{f_{\sigma_k \circ \ldots \sigma_2 \circ \sigma_1(n)}(r_k)\}_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow f(r_k).$$

Si definimos $\varphi_k := \sigma_k \circ \ldots \sigma_2 \circ \sigma_1$, podemos visualizar las sucesiones anteriores, cada una en una fila:

$$\begin{array}{cccccccc}
f_{\varphi_1(1)} & f_{\varphi_1(2)} & f_{\varphi_1(3)} & \cdots & f_{\varphi_1(k)} & \cdots & & \text{c.p. en } r = r_1 \\
f_{\varphi_2(1)} & f_{\varphi_2(2)} & f_{\varphi_2(3)} & \cdots & f_{\varphi_2(k)} & \cdots & & \text{c.p. en } r = r_2 \\
f_{\varphi_3(1)} & f_{\varphi_3(2)} & f_{\varphi_3(3)} & \cdots & f_{\varphi_3(k)} & \cdots & & \text{c.p. en } r = r_3 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots \\
f_{\varphi_k(1)} & f_{\varphi_k(2)} & f_{\varphi_k(3)} & \cdots & f_{\varphi_k(k)} & \cdots & & \text{c.p. en } r = r_k \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & & \cdots
\end{array}$$

Defino $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ mediante

$$\sigma(n) := \varphi_n(n) = \sigma_n \circ \dots \sigma_2 \circ \sigma_1(n)$$

Puesto que $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ son estrictamente crecientes,

$$\begin{aligned} \sigma(n) &= \sigma_n(\sigma_{n-1} \circ \dots \sigma_2 \circ \sigma_1(n)) \geq \sigma_{n-1} \circ \dots \sigma_2 \circ \sigma_1(n) \\ &> \sigma_{n-1} \circ \dots \sigma_2 \circ \sigma_1(n-1) = \sigma(n-1), \ \forall n \geq 2 \end{aligned}$$

donde hemos usado que $\sigma_n(k) \geq k \ \forall k \in \mathbb{N}$, y también que la composición de funciones estrictamente crecientes es estrictamente creciente. Por tanto, σ es estrictamente creciente; es decir, $\{f_{\sigma(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $\{f_n\}$. Aún más, es inmediato comprobar que

$$\{f_{\sigma(n)}\}_{n\geq k} \text{ es una subsucesión de } \{f_{\sigma_k\circ\dots\sigma_2\circ\sigma_1(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

Así, como la sucesión $\{f_{\sigma_k\circ\dots\sigma_2\circ\sigma_1(n)}(r_k)\} \to f(r_k)$, tenemos que $\{f_{\sigma(n)}(r_k)\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f(r_k)$ $\forall k \in N$, puesto que el comportamiento de un número finito de términos no afecta a la convergencia. Por último, como $\{r_k : k \in N\}$ era una enumeración de $A \cap \mathbb{Q}^N$, concluimos que:

$$\{f_{\sigma(n)}(r)\}_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f(r), \ \forall r \in A \cap \mathbb{Q}^N.$$

Notemos que en este paso no ha sido necesario utilizar la equicontinuidad.

Paso 2. Probaremos el siguiente resultado técnico: Dado $\delta > 0$, $\exists r_1, ..., r_k \in A \cap \mathbb{Q}^N$ tales que $\exists \ i = 1, ..., k : |x - r_i| < \delta \ \ \forall x \in A$.

Por ser A compacto, todo recubrimiento de abiertos del conjunto A admite un subrecubrimiento finito del mismo. Definimos el conjunto de bolas abiertas $B = \{B(r, \delta) : r \in A \cap \mathbb{Q}^N\}$. Como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$, el conjunto B recubre a A. Por tanto, como A es compacto, existe un subrecubrimiento finito del mismo que también lo recubre. Es decir,

$$\exists r_1, \dots, r_k \in A \cap \mathbb{Q}^N \text{ tales que } A \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} B(r_i, \delta)$$

Dado $x \in A$, por ser el anterior un subrecubrimiento finito de A, se tiene que
$\exists i \in \{1, \dots, k\}$ tal que $x \in B(r_i, \delta)$. Por tanto, $|x - r_i| < \delta$.

Paso 3. Concluímos probando que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente en A, donde $g_n := f_{\sigma(n)}$.

Sea $\varepsilon > 0$ fijo. Por la equicontinuidad de f_n, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} |x - y| < \delta \\ x, y \in A \end{array}\right\} \implies |g_n(x) - g_n(y)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Así, si para todo $x \in A$ consideramos el punto $r_i \in A \cap \mathbb{Q}^N$ $(i \in \{1, \ldots, k\})$ dado por el paso 2, tendremos:

$$\begin{aligned} |g_n(x) - g_m(x)| &\leq |g_n(x) - g_n(r_i)| + |g_n(r_i) - g_m(r_i)| + |g_m(r_i) - g_m(x)| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + |g_n(r_i) - g_m(r_i)| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Ya que cada sucesión $\{g_n(r_i)\}$ es convergente a $f(r_i)$ para cualquier $i \in \{1, \ldots, k\}$, cada una de estas k sucesiones es de Cauchy. En consecuencia, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ (dependiente solo de los puntos r_i e independiente de x) tal que

$$n, m \geq n_0 \implies |g_n(r_i) - g_m(r_i)| < \frac{\varepsilon}{3}, \ \forall i \in \{1, \ldots, k\}$$

y así

$$n, m \geq n_0 \implies |g_n(x) - g_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3} + |g_n(r_i) - g_m(r_i)| + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \quad \forall x \in A$$

Puesto que en $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$ la convergencia equivale a la convergencia uniforme, se concluye aplicando el *Criterio de Cauchy* a la sucesión $\{g_n\} = \{f_{\sigma(n)}\}$. □

Como conclusión de este capítulo, presentamos el siguiente corolario, que nos sirve para caracterizar los conjuntos compactos.

Corolario 1.2 (Caracterización de compactos). *Sea $B \in \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$. Entonces:*

$$B \text{ es compacto} \iff B \text{ es cerrado, acotado y equicontinuo}$$

Proof.
$\boxed{\Rightarrow}$ Ya sabemos que un conjunto compacto de un espacio métrico es cerrado y acotado. Veamos que además es equicontinuo.

Sea ε > 0 fijo. La familia $\{B(f, \varepsilon/3) : f \in B\}$ ($B(f, \varepsilon/3)$ son bolas abiertas en $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$) es un recubrimiento abierto de B puesto que

$$B \subseteq \bigcup_{f \in B} B(f, \varepsilon/3).$$

Luego, por la compacidad de B, $\exists f_1, \ldots, f_n \in$ B tales que

$$B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon/3).$$

Observemos que para cualquier $f \in B(f_i, \varepsilon/3)$ se verifica que $|f(x) - f_i(x)| < \varepsilon/3, \ \ \forall x \in A$. Además, como A es compacto, cada una de las funciones continuas f_i $(i = 1, \ldots, n)$ será uniformemente continua. Por tanto, existirá para cada una de ellas un número $\delta_i > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} |x - y| < \delta_i \\ x, y \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon/3$$

Por consiguiente, si tomamos $\delta = \min\{\delta_i : i = 1, \ldots, n\} > 0$, tendremos que cualquier $f \in B \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(f_i, \varepsilon/3)$ debe pertenecer a una bola $B(f_i, \varepsilon/3)$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, y así si se tiene

$$\left.\begin{array}{c} |x-y| < \delta \leq \delta_i \\ x, y \in A \end{array}\right\}$$

Entonces, es claro que $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 < \varepsilon$.

En resumen, hemos probado que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\left.\begin{array}{c} |x-y| < \delta \\ x, y \in A \end{array}\right\} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon, \quad \forall f \in B$$

Es decir, B es equicontinuo y la prueba está terminada.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $\{f_n\} \subseteq B$. Es claro que $\{f_n\}$ es acotada y equicontinua, y aplicando el *Teorema de Arzelà-Ascoli*, tenemos que $\exists\{f_{\sigma(n)}\} \to f \in \overline{B}$. Pero B es cerrado, por lo que $\overline{B} = B$. Obtenemos así que de cualquier sucesión de puntos de B es posible obtener una sucesión parcial convergente a un punto de B, por lo que B es compacto. $\square$

2 Series de funciones

Definición (Sumas parciales). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un conjunto. Dada una sucesión $\{f_n\}$ de funciones $f_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$, se llama sumas parciales S_k a la función definida en Ω mediante

$$S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x), \quad x \in \Omega.$$

Definición (Serie de funciones). Llamamos serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ al par formado por la sucesiones $\{f_n\}$ y $\{S_n\}$. Llamaremos a f_n el término general de la serie de funciones $\sum\limits_{n\geq 1} f_n$.

El carácter de la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones se basa en la correspondiente convergencia de la sucesión de funciones $\{S_n\}$ formada por las sumas parciales S_n. Por tanto, tenemos de nuevo dos tipos de convergencia.

Definición (Convergencia de series de funciones). Si $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^M$ es una función y $A \subset \Omega$, diremos

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ es convergente puntualmente en } A \Leftrightarrow \{S_n\} \longrightarrow S \textit{ c.p. en } A.$$

$$\sum_{n\geq 1} f_n \text{ es convergente uniformente en } A \Leftrightarrow \{S_n(x)\} \longrightarrow S(x) \text{ c.u. en } A.$$

Diremos que S es la suma de la serie de funciones:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \text{ puntualmente (resp. uniformemente) en } A.$$

Proposición. *Sea $\sum_{n\geq 0} f_n$ una serie de funciones definida en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Si dicha serie converge uniformemente en un subconjunto $B \subseteq A$, entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge a 0 uniformemente en B.*

Proof. Es claro que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n = S_{n+1} - S_n$. Aplicando límites en la igualdad anterior, y sabiendo que $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformemente en B, tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\} = \lim_{n\to\infty} \{S_n(x)\} - \lim_{n\to\infty} \{S_{n+1}(x)\} = S(x) - S(x) = 0 \quad \forall x \in B$$

$\square$

Puesto que la convergencia de la serie $\sum_{n\geq 1} f_n$ de funciones se basa en la correspondiente convergencia de la sucesión de funciones $\{S_n\}$ formada por las sumas parciales, tenemos una relación directa de la convergencia de series con la continuidad, derivación e integración.

Teorema 2.1. *Si una serie* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *de funciones continuas* f_n *es uniformemente convergente, entonces la función suma* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *es una función continua.*

Proof. Como la serie es uniformemente convergente, tenemos que $\{S_n\} \to S$ uniformemente. Como las f_n eran continuas, las funciones S_n son continuas, por ser suma finita de funciones continuas. Por tanto, aplicando el teorema *Teorema* **??** a la sucesión de funciones $\{S_n\}$, tenemos que $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ es continua. □

Teorema 2.2. *Si la serie* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *de funciones continuas* $f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *es uniformemente convergente, entonces* $\displaystyle\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)\,dx.$

Proof. Siguiendo la idea del teorema anterior, aplicamos el *Teorema* **??** a la sucesión de funciones $\{S_n\}$, y obtenemos que:

$$\int_a^b \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^b S_n \Rightarrow \int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \int_a^b f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

□

Teorema 2.3. *Si para* $f_n \in \mathcal{C}^1(a,b)$ *la serie* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *es c.p. en* (a,b) *y la serie* $\sum_{n\geq 1} f_n'$ *es c.u. en (a,b), entonces la suma* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ *es una función de* $\mathcal{C}^1(a,b)$ *con* $\displaystyle\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$.

Proof. Claramente $S_n \in \mathcal{C}^1(a,b)\ \forall n \in \mathbb{N}$, y además tenemos que $\{S_n\}$ *c.p.* en (a,b), y $\{S_n'\}$ *c.u.* en (a,b), pues la derivada de una suma finita es la suma de las derivadas. Bajo estas hipótesis, podemos aplicar a $\{S_n\}$ el *Teorema* **??**, obteniendo que $S = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{C}^1(a,b)$, y además:

$$S' = \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)' = \lim_{n\to\infty} \{S_n'\} = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'$$

□

2.1 Criterios de convergencia para series de funciones

Teorema 2.4 (Criterio de Weierstrass). *Si existen constantes* M_n *positivas tales que* $|f_n(x)| \leq M_n \quad \forall x \in A$ *y la serie de números reales* $\sum_{n\geq 1} M_n$ *es convergente, entonces la serie de funciones* $\sum_{n\geq 1} f_n$ *es convergente uniformemente (y absolutamente) en* A.

Proof. Por el criterio de Cauchy para la convergencia de una serie de números positivos (las sumas parciales son de Cauchy), se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists n_o \in \mathbb{N} :\ |S_{n+k} - S_{n-1}| = M_n + ... + M_{n+k} < \varepsilon \quad \forall n \geq n_o\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Usando que $|f_n(x)| \leq M_n \ \forall x \in A$ y la desigualdad triangular obtenemos:

$$|f_n(x) + ... + f_{n+k}(x)| \leq |f_n(x)| + ... + |f_{n+k}(x)| \leq M_n + ... + M_{n+k} < \varepsilon \ \ \forall x \in A$$

Y por tanto:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_o \in \mathbb{N} : \ |f_n(x) + ... + f_{n+k}(x)| < \varepsilon \ \ \forall n \geq n_o \ \forall k \in \mathbb{N} \ \forall x \in A$$

Como la sucesión de sumas parciales de la serie de funciones $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformemente, queda probado que dicha serie converge uniformemente en A. $\square$

Teorema 2.5 (Criterio de Abel). *Sean $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ tales que $\{\phi_n\}$ es una sucesión decreciente de funciones, es decir, $\phi_{n+1}(x) \leq \phi_n(x) \ \forall x \in A$. Supóngase que $\exists M$ tal que $|\phi_n(x)| \leq M \ \forall x \in A \ \forall n \in \mathbb{N}$. Entonces, se tiene que*

$$\sum_{n\geq 1} f_n(x) \text{ c.u. en } A \implies \sum_{n\geq 1} \phi_n(x) f_n(x) \text{ c.u. en } A.$$

Teorema 2.6 (Criterio de Dirichlet). *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\phi_n : A \to \mathbb{R}$ tales que $\{\phi_n\}$ es una sucesión decreciente de funciones, que converge a 0 uniformemente, con $\phi_n \geq 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$. Sea $\sum_{n\geq 1} f_n$ una serie de funciones, y supóngase que $\exists M$ tal que las sumas parciales de dicha serie están uniformemente acotadas, esto es,*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| \leq M \ \ \forall x \in A, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \phi_n(x) f_n(x)$ converge uniformemente en A.

Veamos un ejemplo de aplicación de estos criterios.

Ejemplo 2.1: Probar que la serie $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$ converge uniformemente en $[0, \infty)$.

Sea $\phi_n(x) = e^{-nx}$. Para $x \geq 0$, ϕ_n es decreciente, y además $|\phi_n(x)| = |e^{-nx}| = |\frac{1}{e^{nx}}| \leq 1$. Por otro lado, sabemos que la serie alternada $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, por el *Criterio de Leibnitz* para series de números reales. Por tanto, aplicando el *Criterio de Abel*, la serie de partida converge uniformemente para $x \geq 0$.

2.2 Series de potencias

Un caso interesante de series de funciones lo constituyen las series de potencias, esto es, aquellas series en las que las funciones son potenciales:

$$\sum_{n\geq 0} a_n (x-a)^n, \quad a_n, a \in \mathbb{R} \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Veamos una característica importante de las series de potencias, que nos ayuda a determinar su carácter de convergencia.

Definición (Radio de convergencia). Dada una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, definimos su radio de convergencia $R \in [0, \infty]$ como:

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|},$$

Nota. En la definición anterior, permitimos que $R = \infty$, tomando como convenio que $\frac{1}{0} = \infty$ y $\frac{1}{\infty} = 0$.

Definición (Disco de convergencia). Dada una serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, definimos el disco de convergencia $D(a, R) := \{x : |x-a| < R\}$.

Nota. Si $R = \infty$, entonces $D(a, R) = \mathbb{R}$.

El siguiente teorema da sentido a la nomeclatura seguida en las dos definiciones anteriores.

Teorema 2.7. *La serie de potencias* $\displaystyle\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$

(i) *converge uniformemente en $D(a, R')$ para cualquier $R' < R$ (en particular, converge absolutamente para todo $x \in D(a, R)$.*

(ii) *no converge si $x \notin \overline{D(a, R)}$.*

Proof.
(i) Sea $R' < R$. Como $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1/R'$, si elegimos $R'' \in (R', R)$, deducimos que $\exists n_0 \geq 0$ tal que $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 1/R''$, $\forall n \geq n_0$.

Esto implica que

$$|a_n(x-a)^n| = |a_n| \cdot |x-a|^n \leq \left(\frac{R'}{R''}\right)^n, \quad \forall x \in D(a, R'),\ \forall n \geq n_0,$$

y el primer apartado se concluye aplicando el criterio de Weierstrass.

(ii) Basta observar que si la serie $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ es convergente en un punto $x \neq a$, entonces $\{a_n(x-a)^n\} \to 0$, y tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de convergencia tenemos que:

$$\exists n_0 > 0 : |a_n||x-a|^n \leq 1,\ \forall n \geq n_0$$

Y por tanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \cdot |x-a| = |a_n| \cdot |x-a|^n = \frac{|x-a|}{R} \leq 1 \implies |x-a| \leq R$$

Es decir, si la serie converge, necesariamente $x \in \overline{D(a, R)}$. $\square$

Por último, veamos un teorema sobre derivación e integración de series de potencias. Para ello, notemos que si R es el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$, podemos definir la función S en $D(a,R)$ mediante:

$$S(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n, \quad \forall x \in D(a,R)$$

Teorema 2.8. *Sea* $\sum_{n\geq 0} a_n(x-a)^n$ *una serie de potencias. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:*

*(*i*)* *La suma* $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ *es una función* $\mathcal{C}^\infty$ *en el disco de convergencia* $D(a,R)$*.*

*(*ii*)* $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-a)^{n-1}$*, esto es,*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx}\left(a_n(x-a)^n\right).$$

*(*iii*)* $\int_a^x S(y)\,dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1}$*, esto es,*

$$\int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^x a_n(x-a)^n\,dx.$$

2.3 Funciones analíticas

Nos preguntamos ahora si cualquier función $\mathcal{C}^\infty$ se puede escribir como suma de una serie de potencias, es decir, si dada $f \in \mathcal{C}^\infty(I)$ *y* $a \in I$, $\exists \{a_n\}$ *tal que* $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$.

Haciendo uso del teorema de Taylor, podemos ver la siguiente condición suficiente para que una función $f \in \mathcal{C}^\infty$ coincida con la suma de su serie de Taylor.

Teorema 2.9. *Si una función de clase* $\mathcal{C}^\infty$ *en un intervalo* I *verifica*

$$\exists M > 0 \;:\; |f^{n)}(x)| \leq M, \quad \forall x \in I$$

entonces

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad \forall x \in I.$$

Proof. Fijamos $x \in I$, y observamos que las sumas parciales $S_k(x)$ de la serie son el polinomio de Taylor de orden k:

$$P_k(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

Usando el teorema del resto, tendremos que $\exists c$ entre x y a tal que:

$$|f(x) - S_k(x)| = \left| \frac{f^{k+1)}(c)}{(k+1)!}(x-a)^{k+1} \right| \leq M \frac{|x-a|^{k+1}}{(k+1)!} \to 0$$

Es decir, la distancia entre f y S_n se hace tan pequeña como se quiera. Por tanto, hemos probado que $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \{S_n(x)\} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n, \quad \forall x \in I.$ □

Como consecuencia de este teorema, podemos escribir algunas funciones elementales como la suma de su serie de Taylor, en el punto $a = 0$.

Ejemplo 2.2: $e^x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Ejemplo 2.3: $x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$.

Ejemplo 2.4: $\cos x = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$.

Sin embargo, no todas las funciones $\mathcal{C}^\infty$ admiten una descomposición en sumas de funciones potenciales. Dada una serie de potencias, y usando el *Teorema* **??**, notemos lo siguiente:

$$S'(a) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (a-a)^{n-1} = a_1 \quad ; \quad S''(a) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n (a-a)^{n-2} = 2a_2 \quad ; \quad \dots$$

En general, se demuestra por inducción que $S^{k)}(a) = k! \cdot a_k$. Es decir, fijado un a y conocida la función S, se tiene que necesariamente $a_k = \frac{S^{k)}(a)}{k!}$.

Recordemos que si una función $f \in \mathcal{C}^\infty$ cumple que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n \ \forall x \in A$, dicha función es justamente lo que nos hemos referido como la suma de la serie, S. Pero acabamos de ver que, en ese caso, los a_n están perfectamente determinados, y resulta que f se escribiría como su suma de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Por tanto, la pregunta que nos hacíamos equivale a preguntarse si toda función $\mathcal{C}^\infty$ se puede escribir como su suma de Taylor. La respuesta es que, en general, esto no es posible (ya vimos en el *Teorema* **??** que sí se cumple si todas las derivadas de f están acotadas).

Un contraejemplo sería la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Es claro que $f \in \mathcal{C}^\infty$ y que $f \neq 0$. Además, se tiene que $f(0) = 0$, y $f^{k)}(0) = 0 \quad \forall k \geq 1$.

Si f se escribiese como su suma de Taylor, tendríamos que, en el punto $a = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(0)}{n!} \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{0}{n!} \cdot x^n = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Lo cual es una contradicción, pues $f \neq 0$. Por tanto, f no se puede escribir como suma de una serie de potencias.

Las funciones que *sí* se pueden escribir como suma de una serie de potencias tienen propiedades muy interesantes. Tanto es así, que dichas funciones tienen un nombre propio.

Definición (Función analítica). Decimos que una función $f \in \mathcal{C}^\infty(A)$ es analítica si se puede escribir como su suma de Taylor, es decir, si se cumple que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \forall x \in A$$

3 Integral asociada a una medida

Riemman realizó una definición de la integral que nos daba ciertos problemas cuando la función (de manera intuitiva) realizaba muchas oscilaciones, en el intervalo de integración y además no establecía ninguna relación entre la función y las particiones que se tomaban del intervalo de integración.

Lebesgue por ello intentó cambiar esta definición para hacer esta integral más general e intentando establecer una relación entre el intervalo de integración y la función. El precio a pagar por esta generalización, es que necesitamos una **MEDIDA** de integración, que construiremos quizá al final de curso.

Necesitaremos primero algunas nociones para comenzar a presentar la integral.

Definición (Espacio medible). $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible si

(i) $\emptyset \neq \Omega$ es un conjunto

(ii) $\mathcal{A}$ es una $\sigma-$álgebra, esto es: $\emptyset \neq \mathcal{A}$, $\Omega \backslash A \in \mathcal{A} \quad \forall A \in \mathcal{A}$ y además $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}, \forall \{A_n\} \subset \mathcal{A}$

A los elementos A de $\mathcal{A}$ los llamaremos conjuntos medibles.

Nota. Un ejemplo sencillo de $\sigma-$álgebra es: dado un Ω cualquiera, tomamos como $\sigma-$álgebra las partes de Ω: $P(\Omega) = 2^{\Omega}$(es notación).

Definición (Función medible). Si $(\Omega, \mathcal{A})$ y $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ son espacios medibles y $f : \Omega \to X$ es una función, diremos que f es medible si:

$$f^{-1}(B) \in A, \ \forall B \in \mathcal{B}$$

Es decir, la imagen inversa de un medible es otro medible.

Nota. Un caso particular importante es: Si Ω es un espacio topológico, se llama σ-álgebra de Borel $B(\Omega)$ a la $\sigma-$álgebra engendrada por la topología τ de Ω.

Ejercicio: Definición de sigma-álgebra engendrada, probar cómo se forma y propiedades.

Ejercicio: Si $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio medible, $\mathcal{X}$ un espacio topológico con B su $\sigma-$álgebra de Borel, entonces:

$$f : \Omega \to X \ \textit{es medible} \iff f^{-1}(G) \in \mathcal{A} \ \forall G \in \tau$$

Definición (Funciones medibles positivas). Una función se llamará medible positiva si es medible y $f : \Omega \to \mathcal{X} = [0, \infty]$

Nota. Vamos a tomar primero dos convenios:

1. $\infty + x = \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$
2. $\infty \cdot 0 = 0$

Proposición. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio de medida y* $f : \Omega \to [0, \infty]$. *Entonces:*

$$f \text{ es medible} \iff \{w \in \Omega : f(w) < \gamma\} \text{ es medible } \forall \gamma \geq 0$$

$$\iff \{w \in \Omega : f(w) \leq \gamma\} \text{ es medible } \forall \gamma \geq 0$$

$$\iff \{w \in \Omega : f(w) > \gamma\} \text{ es medible } \forall \gamma \geq 0$$

$$\iff \{w \in \Omega : f(w) \geq \gamma\} \text{ es medible } \forall \gamma \geq 0$$

Proof. La prueba se deja como ejercicio al lector. □

Proposición. *Sea* $(\Omega, \mathcal{A})$ *un espacio medible. Si* $\{f_n\}$ *es una sucesión de funciones medibles positivas en* Ω, *entonces también son medibles las funciones definidas por:*

$$g_1(w) = sup\{f_n(w) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

$$g_2(w) = inf\{f_n(w) : \ n \in \mathbb{N}\}$$

$$g_3(w) = \limsup_{n\to\infty} \ f_n(w)$$

$$g_4(w) = \liminf_{n\to\infty} \ f_n(w)$$

En particular, si $f_n \xrightarrow{c.p.} f$ *en* Ω, *entonces* f *es medible.*

Definición (Funciones simples positivas). Si $s : \Omega \to [0, \infty)$ es medible, entonces:

$$\text{s es simple positiva} \iff s(\Omega) \text{ es un conjunto finito}$$

Corolario 3.1. *Si* $s : \Omega \to [0, \infty)$ *es simple con* $s(\Omega) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_m\}$, *entonces para los conjuntos medibles:*

$$A_k := \{w \in \Omega : s(\omega) = \alpha_k\} = s^{-1}([0, \alpha_k]) \ s^{-1}([0, \alpha_k))$$

se tiene $\Omega = \cup_{k=1}^{m} A_k$, $A_j \cap A_k = \emptyset \ \ (j \neq k)$ *y además:*

$$s = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \mathcal{X}_{A_k}$$

Donde $\mathcal{X}_{A_k}$ *es la función característica de* A_k. *Esta función, en general, está definida como:*

$$X_A(\omega) = \begin{cases} 1 \ \omega \in A \\ 0 \ \omega \notin A \end{cases}$$

Siendo esta la descomposición canónica, que es única si $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_m$

Ejercicio: $B_1, B_2, \cdots, B_m \subset \Omega$ medibles y $\beta_1, \cdots, \beta_m \in [0, \infty)$, implica que $t := \sum_{k=1}^{m} \beta_k \mathcal{X}_{B_k}$ es simple positiva. Para la realización del ejercicio, cuidado porque la definición dada NO es la descomposición canónica de t.

Ejercicio: si s y t son funciones simple y positivas y $\alpha \in \mathbb{R}^+$, entonces $s + t, \alpha s, \alpha t$ son simples positivas

Teorema 3.1 (Teorema de Lebesgue). *Si Ω es un espacio medible y $f : \Omega \to [0, \infty]$ es una función, son equivalentes las siguientes condiciones:*

(i) *f es medible*

(ii) *$\exists s_n : \Omega \to [0, \infty)$ simples positivas tal que $\{s_n\}$ es monótona creciente y convergente a f puntualmente en Ω*

Además, si f es medible y

$$f(\omega) \leq M < \infty, \quad \forall \omega \in \Omega$$

Entonces puede conseguirse que $\{s_n\} \xrightarrow{c.u.} f$ en Ω

Proof.

$\boxed{ii) \implies i)}$

Es consecuencia directa de la proposición ??

$\boxed{i) \implies ii)}$

Vamos a partir el dominio de f.

$$\begin{cases} n \in \mathbb{N} \to F_n = \{\omega \in \Omega : f(\omega) \geq n\} \\ 1 \leq k \leq n2^n \to E_{n,k} = \{\omega \in \Omega : \dfrac{k-1}{2^n} \leq f(\omega) < \dfrac{k}{2^n}\} \end{cases}$$

Así, tenemos que:

$$\Omega = F_n \cup \bigcup_{k=1}^{n2^n} E_{n,k}$$

y que:

$$s_n = n\mathcal{X}_{F_n} + \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathcal{X}_{E_{n,k}}$$

Ejercicio: Tomar la función de Dirichlet y buscar los F_n y los $E_{n,k}$ en la construcción de Lebesgue. □

Propiedades:

(*i*) (Monotonía). Si $A, B \in \mathcal{A}, A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$

(ii) (Subaditividad) . $\forall \{A_k\} \subset \mathcal{A}$, se tiene:

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

Definición (Integral de función simple positiva). Si $E \in \mathcal{A}$ y $s : \Omega \to [0, \infty]$ es simple: $s = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{X}_{A_k}$, entonces:

$$\int_E s d\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(E \cap A_k)$$

Definición. Si $E \in \mathcal{A}$ y $f : \Omega \to [0, \infty]$ es medible, entonces:

$$\int_e f d\mu = sup\{\int_e s d\mu : \text{ s es simple positiva}, s \leq f\}$$

Teorema 3.2 (Teorema de la convergencia monótona). *Sea* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida. Sea* $E \in A$ *y* $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ *medible. Supongamos que* $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega) \quad \forall \omega \in \Omega$. *Entonces:*

$$\int_E \lim_{n\to\infty} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Nota. $f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$ es medible. Además, con $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ estamos diciendo que la sucesión de funciones es monótona y por tanto convergerá a una función f.

Proof.

$\boxed{\leq}$

Como $f_n \leq f_{n+1} \leq f \implies$

$$\{s : \begin{cases} \text{s simple positiva} \\ s \leq f_n\} \end{cases} \} \subset \{s : \begin{cases} \text{s es simple positiva} \\ s \leq f_{n+1} \end{cases} \} \subset \{s : \begin{cases} \text{s es simple positiva} \\ s \leq f \end{cases} \}$$

Esto implica que:

$$\xrightarrow{sup} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f_{n+1} d\mu \leq \int_e f d\mu \implies \exists \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu \leq \int_E f d\mu$$

$\boxed{\geq}$

Para probar esta desigualdad, usaremos el siguiente lema:

Ahora, como

$$\int_E f d\mu := sup\{\int_E s d\mu : \begin{cases} \text{s es simple positiva} \\ s \leq f \end{cases} \}$$

basta ver que:

$$\left.\begin{matrix} \text{s es simple positiva} \\ s \leq f \end{matrix}\right\} \implies \int_E s d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Vamos a probar este hecho.

Sea $s : \Omega \to [0, \infty)$ simple positiva tal que $s \leq f$. Fijamos $p \in (0, 1)$ y $\forall n \in \mathbb{N}$

$$E_n = \{\omega \in E : ps(\omega) \leq f_n(\omega)\} \implies \begin{cases} E_n \;\; medibles \\ E_n \subset E_{n+1}, \;\; \cup_{n=1}^{\infty} E_n = E \end{cases}$$

$$\implies p\varphi(E_n) = p \int_{E_n} sd\mu = \int_{E_n} psd\mu \leq^{\text{def. } E_n} \int_{E_n} f_n d\mu \leq \int_E f_n d\mu$$

Donde en el último paso hemos usado que $\forall s : \Omega \to [0, \infty)$ simple que verifique $s \leq f_n$, se tiene que $\int_{E_n} sd\mu \leq \int_E sd\mu$. Recordemos que esta integral se definía: Si $s = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{X}_{A_i}$, entonces $\int sd\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(E_n \cap A_i)$.

Ahora, como φ es una medida, si $n \to \infty$, entonces:

$$p\varphi(E) = p \int_E sd\mu \implies p \int_E sd\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu$$

Y si ahora $(p \to 1)$, entonces:

$$1 \int_E sd\mu \leq \lim_{n \to \infty} \int_E f_n d\mu$$

Probando lo que queríamos. □

Propiedades de las funciones medibles positivas Si $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ medibles positivas, $\alpha \in \mathbb{R}, E \in \mathcal{A}$

(i) $(f + g, \alpha f, fg$ son medibles y)

$$\int_E (f + g)d\mu = \int_E fd\mu + \int_E gd\mu$$

$$\int_E \alpha fd\mu = \alpha \int_E fd\mu \quad \text{Tomando } \alpha * \infty = \infty, \quad \alpha * 0 = 0$$

(ii) $g(\omega) \leq f(\omega), \; \forall \omega \in \Omega \implies \int_E gd\mu \leq \int_E fd\mu$

(iii) $\int_E fd\mu = \int_\Omega f\mathcal{X}_e d\mu$

(iv) Teorema de Levi:

$$f_n : \Omega \to [0, \infty] \;\; medibles \implies \int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n d\mu$$

Proof.

Si $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ son medibles y $\sum_{n \geq 1} f_n$ una serie de funciones, definimos:

$$S_k = \sum_{n=1}^{k} f_n \quad \text{sumas parciales}$$

Y tenemos que $S_1 \leq \cdots \leq S_k \leq S_{k+1} \leq \cdots$, es decir, S_k es monótona creciente. Aplciando el *T.C.M.*, tenemos que:

$$\lim_{k\to\infty} \int_E S_k d\mu = \int_E \lim_{k\to\infty} S_k d\mu = \lim_{k\to\infty} \int_E \sum_{n=1}^{k} f_n d\mu = \int_E \lim_{k\to\infty}$$

□

(v) Si s es simple positiva, entonces $\varphi(E) = \int_E s d\mu \quad (\forall E \in \mathcal{A})$ es una medida.

$$\left.\begin{aligned} \varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty] \\ E \mapsto \varphi(E) \end{aligned}\right\} \text{es una medida. Además}$$

- $E \in \mathcal{A}, \mu(E) = 0 \implies \varphi(E) = 0$
- $g : \Omega \to [0, \infty]$ medible $\implies \int_E g d\varphi = \int_E g f d\mu$

(vi) $f : \Omega \to [0, \infty]$ medible

- $\int_\Omega f d\mu < \infty \implies \mu(\{\omega \in \Omega : f(\omega) = \infty\}) = 0$
- $\int_\Omega f d\mu = 0 \iff \mu(\{\omega \in \Omega : f(w) > 0\}) = 0$

Proposición. *Si* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espacio de medida,* $E \in \mathcal{A}$ *y* $f_n : \Omega \to [0, \infty]$ *medible. Entonces:*

$$\int_E \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_E f_n d\mu$$

Proof.

$$\liminf_{n\to\infty} f_n(\omega) = sup\{\}$$

□