Universidad de Granada

Análisis Matemático II

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Ejemplo: Sea $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f_n : A \to \mathbb{R}^M$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\{f_n\}$ es convergente uniformemente $\iff$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ \forall x \in A$$

Solución.
$\boxed{\Rightarrow}$ $f_n \xrightarrow{c.u.} f$, entonces

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 \ \forall x \in A$$

De la misma forma, podemos encontrar un m tal que si $m \geq n_0$, entonces:

$$|f_n(x) - f_m(x) \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Tomamos $\varepsilon = 1$. Entonces, existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n \geq n_0 \implies f_n(x) \in B(f_m(x), 1) \ \ \forall x \in A$. En particular, $m = n_0 \implies f_n \in B(f_{n_0}(x), 1) \ \ \forall x \in A$, por lo que $\{f_n(x)\}$ es una sucesión acotada de $\mathbb{R}^M$. Por tanto, podemos usar el T. de Bolzano-Weierstrass en $\mathbb{R}^M$, es decir: $\exists f_{\sigma(n)}(x) \to f(x)$. Además, esta sucesión $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy.

Por ser de Cauchy y por ser acotada, entonces tenemos que:

$$\{f_n(x)\} \xrightarrow{c.p.} f(x)$$

Entonces, como $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : m, n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ \ \forall x \in A$, al tomar límites cuando $m \to \infty$, nos queda que:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall x \in A$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : m, n \geq n_0 \implies |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \ \ \forall x \in A$ y por tanto $\{f_n\} \xrightarrow{c.u.} f$ $\square$

Solución Alternativa. Tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \implies |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \ \forall x \in A$$

Si tomamos $x \in A$ fijo, entonces $\{f_n(x)\}$ es de Cauchy y como $\mathbb{R}^M$ es completo, entonces $\{f_n(x)\} \to f(x)$, entonces:

$$f_n \xrightarrow{c.p.} f \quad f : A \to \mathbb{R}^M$$

Y podemos terminar la prueba como la hemos terminado en el otro caso.

En la primera demostración no se ha utilizado que $\mathbb{R}^n$ es completo de forma explícita, de forma que se ha demostrado la complitud de $\mathbb{R}^n$. Si este hecho se da por supuesto, la demostración queda como en el segundo caso. $\square$

EJEMPLO: $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M) = \{f : A \to \mathbb{R}^m :$ f es continua y acotada$\}$ con $||f||_\infty = (sup)_x \in A|f(x)|$ normado. Entonces:

$$\{f_n\} \xrightarrow{c.u.} f \iff f_n \to f \;\; \mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^m)$$

$\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^m)$ es un espacio de Banach(Completo y normado).

Nota. Si A es compacto $\implies \mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^m) = \mathcal{C}(A, \mathbb{R}^m)$