

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Variable Compleja I

Ejercicios resueltos

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Curso 2016/17



Índice

| | |
|--|-----------|
| 1. Números complejos | 5 |
| 1.1. Ejercicio 1. | 5 |
| 1.2. Ejercicio 3. | 5 |
| 1.3. Ejercicio 4. | 5 |
| 1.4. Ejercicio 5. | 6 |
| 1.5. Ejercicio 6. | 6 |
| 1.6. Ejercicio 8. | 7 |
| 1.7. Ejercicio 10. | 7 |
| 2. Topología del plano complejo | 9 |
| 2.1. Ejercicio 1. | 9 |
| 2.2. Ejercicio 2. | 9 |
| 2.3. Ejercicio 3. | 9 |
| 2.4. Ejercicio 4. | 10 |
| 2.5. Ejercicio 5. | 10 |
| 3. Funciones holomorfas | 11 |
| 3.1. Ejercicio 1 | 11 |
| 3.1.1. a) | 11 |
| 3.2. Ejercicio 2 | 11 |
| 3.3. Ejercicio 3 | 11 |
| 3.4. Ejercicio 4 | 11 |
| 3.5. Ejercicio 5 | 12 |
| 3.6. Ejercicio 6 | 12 |
| 3.7. Ejercicio 7 | 12 |
| 4. Funciones analíticas | 14 |
| 4.1. Ejercicio 1 | 14 |
| 4.1.1. b) | 14 |
| 4.1.2. c) | 14 |
| 4.1.3. e) | 14 |
| 4.1.4. c) | 14 |
| 4.2. Ejercicio 2 | 15 |
| 4.2.1. a) | 15 |
| 4.3. Ejercicio 3 | 15 |
| 4.4. Ejercicio 4 | 15 |

| | |
|--|-----------|
| 5. Funciones elementales | 16 |
| 5.1. Ejercicio 1 | 16 |
| 5.2. Ejercicio 2 | 16 |
| 5.3. Ejercicio 4 | 16 |
| 5.4. Ejercicio 5 | 17 |
| 5.5. Ejercicio 6 | 17 |
| 5.6. Ejercicio 7 | 18 |
| 5.7. Ejercicio 8 | 18 |
| 5.8. Ejercicio 9 | 18 |
| 5.9. Ejercicio 10 | 19 |
| 5.10. Ejercicio 12 | 19 |
| 6. Integral curvilínea | 20 |
| 6.1. Ejercicio 1 | 20 |
| 6.2. Ejercicio 2 | 20 |
| 6.3. Ejercicio 3 | 21 |
| 6.4. Ejercicio 4 | 21 |
| 6.5. Ejercicio 5 | 22 |
| 6.6. Ejercicio 6 | 22 |
| 7. Teorema local de Cauchy | 23 |
| 7.1. Ejercicio 1 | 23 |
| 7.2. Ejercicio 2 | 23 |
| 7.3. Ejercicio 3 | 23 |
| 7.4. Ejercicio 4 | 24 |
| 7.4.1. a | 24 |
| 7.5. Ejercicio 5 | 24 |
| 8. Equivalencia entre analiticidad y holomorfía | 25 |
| 8.1. Ejercicio 1 | 25 |
| 8.2. Ejercicio 2 | 25 |
| 8.3. Ejercicio 3 | 25 |
| 8.3.1. a | 26 |
| 8.4. Ejercicio 6 | 26 |
| 8.5. Ejercicio 1 | 26 |
| 8.5.1. a) | 26 |
| 8.5.2. b) | 26 |
| 8.5.3. c) | 27 |
| 8.5.4. d) | 27 |

| | |
|--|-----------|
| 8.6. Ejercicio 12 | 27 |
| 9. Ceros de las funciones holomorfas | 28 |
| 10. Teorema de Morera y sus consecuencias | 30 |
| 10.1. Ejercicio 5 | 30 |
| 10.2. Ejercicio 6 | 30 |
| 10.3. Ejercicio 7 | 30 |
| 10.4. Ejercicio 8 | 30 |
| 10.4.1. a) | 30 |
| 10.4.2. b) | 31 |
| 11. Comportamiento local de una función holomorfa | 32 |
| 11.1. Ejercicio 1 | 32 |
| 11.2. Ejercicio 2 | 32 |
| 11.3. Ejercicio 3 | 32 |
| 11.4. Ejercicio 4 | 32 |
| 11.5. Ejercicio 5 | 32 |
| 11.6. Ejercicio 7 | 33 |
| 11.7. Ejercicio 8 | 33 |
| 11.8. Ejercicio 9 | 33 |
| 11.9. Ejercicio 10 | 34 |
| 12. El teorema general de Cauchy | 35 |
| 12.1. Ejercicio 1 | 35 |
| 12.2. Ejercicio 2 | 35 |
| 13. Residuos | 36 |
| 13.1. Ejercicio 1 | 36 |
| 13.2. Ejercicio 4 | 36 |
| 13.3. Ejercicio 16 | 37 |

Números complejos

Ejercicio 1.

Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a \mathbb{C} .

Solución

Ejercicio 3.

Sea $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ dada por

Solución

$|f(z)| < 1 \forall z : |z| < 1$ $f^{-1}(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ Si $|z| = 1$, entonces $|f(z)| = \left| \frac{z-a}{a-\bar{a}z} \right|$ multiplicando en esta expresión por $\bar{z} \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \bar{z} = \frac{1-a\bar{z}}{1-\bar{a}z}$ f tenemos que es holomorfa en el disco, lleva la frontera en la frontera.

Ejercicio 4.

Dados $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \sum_{k=1}^n |z_k|$$

Solución

Por inducción, todos los números complejos deben tener el mismo argumento, son vectores linealmente dependientes sin que se invierta el signo de ninguno de ellos.

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_n > 0 : \lambda_1 z_1 = \lambda_2 z_2 = \dots = \lambda_n z_n$$

para probar que es necesaria no hace falta hacer inducción $\left| \sum_{k=1}^n z_k \right| = \left| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_k} z_1 \right| = |z_1| \sum_{k=1}^n \frac{\lambda_1}{\lambda_k} = |z_1| \sum_{k=1}^n \frac{|z_k|}{|z_1|} = \sum_{k=1}^n |z_k|$

$$n = 2 \implies |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff z_2 = \lambda z_1 \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Sea cierto para $n \in \mathbb{N}$ $|\sum_{k=1}^{n+1} z_k| = |z_{n+1} + \sum_{k=1}^n z_k| = |z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^n z_k|$

Hemos usado en este último paso que $|z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^n z_k| \geq |\sum_{k=1}^{n+1} z_k| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| = |z_{n+1}| + \sum_{k=1}^n |z_k|$ donde la otra desigualdad entre los extremos se sabe de la desigualdad triangular. $|z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^n z_k| = |z_{n+1}| + \sum_{k=1}^n |z_k|$ Por la hipótesis de inducción para $k = 2$, tenemos que $\exists \lambda > 0 : z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^n z_k$

Nos queda por hacer lo análogo con el resto de números complejos $z_k, k = 1 \dots n$ Por la hipótesis de inducción para $k = n, \exists \mu_1, \dots, \mu_n : \mu_1 z_1 = \mu_2 z_2 = \dots = \mu_n z_n$, como $z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^n z_k = \lambda \sum_{k=1}^n \frac{\mu_1}{\mu_k} z_1$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

entonces tenemos

$$z_1 \overline{z_2} = \lambda > 0 \text{ y que } z_1 = \frac{\lambda}{|z_2|^2} z_2$$

Ejercicio 5.

Describir geoméricamente los subconjuntos del plano dados por

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = 2|z - i|\} \text{ y } B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4\}$$

Veamos el conjunto A, tenemos en cuenta $z = (a, b)$, A cumple $\sqrt{a^2 + (b+1)^2} = 2\sqrt{a^2 + (b-1)^2}$, entonces $a^2 + b^2 + 1 + 2b = a^2 + (b+1)^2 = 4(a^2 + (b-1)^2) = 4a^2 + 4b^2 + 4 - 8b$, entonces $3a^2 + 3b^2 - 10b + 3 = 0$, $a^2 + b^2 - \frac{10}{3}b + 1 = 0$, sumamos y restamos $\frac{25}{9}$, $a^2 + (b - \frac{5}{3})^2 - \frac{25}{9} + 1$, $a^2 + (b - \frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$ Vemos que A es la circunferencia con $c = (0, \frac{5}{3})$, $r = \frac{4}{3}$

Veamos el B, elevando dos veces al cuadrado tenemos como resultado una elipse

$$\frac{a^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{b^2}{2^2} = 1$$

Ejercicio 6.

Probar que $\arg z = 2 \arctan(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|})$ para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Solución

Hemos usado la fórmula del ángulo doble

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)$$

$$\phi = \arctan(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}) \quad \phi = 2\alpha = \arctan(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|})$$

Pista para otra forma de hacerlo

$$\phi = 2 \arctan\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|}\right) |z| (\cos(\phi) + i \sin(\phi)) = z$$

Para ello usamos, si $t = \theta/2$

$$\cos(\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} \quad \sin(\theta) = \frac{2 \tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$$

Ejercicio 8.

Solución

Haremos la prueba por inducción, para el caso inicial $n = 1$ es trivial, suponemos cierto para un $n \in \mathbb{N}$ genérico. Probamos que en ese caso es cierto para $n + 1$.

$$\begin{aligned} \cos((n+1)\theta) + i \sin((n+1)\theta) &= \cos(n\theta + \theta) + i \sin(n\theta + \theta) \\ &= \cos(n\theta) \cos(\theta) - \sin(n\theta) \sin(\theta) + i \cos(n\theta) \sin(\theta) + i \sin(n\theta) \cos(\theta) \\ &= \cos(n\theta)(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) + i \sin(n\theta)(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \\ &= (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))^{n+1} \end{aligned}$$

La última igualdad la tenemos por la hipótesis de inducción.

Ejercicio 10.

Pista Probar las dos simultáneamente y usar la fórmula de Moivre $\sum_{k=0}^n (\cos(x) + i \sin(x))^k$

Solución

$$\sin(x/2) \sum_{k=0}^n \cos(kx) + i \sin(x/2) \sum_{k=0}^n \sin(kx)$$

Sacamos factor común

$$\sin(x/2) \left(\sum_{k=0}^n \cos(kx) + i \sin(kx) \right)$$

Usamos la fórmula de Moivre

$$\sin(x/2) \sum_{k=0}^n (\cos(x) + i \sin(x))^k$$

Usamos que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &\sin(x/2) \frac{1 - (\cos(x) + i \sin(x))^{n+1}}{1 - (\cos(x) + i \sin(x))} \\ &= \sin(x/2) \frac{1 - (\cos((n+1)x) + i \sin((n+1)x))}{1 - \cos(x) - i \sin(x)} \end{aligned}$$

Usamos que $2 \sin^2(x/2) = 1 - \cos(x)$ y que $\sin(x) = \sin(x/2) \cos(x/2)$,

$$\sin(x/2) \frac{1 - (\cos((n+1)x) + i \sin((n+1)x))}{2 \sin^2(x/2) - 2i \sin(x/2) \cos(x/2)} = \frac{1 - (\cos((n+1)x) + i \sin((n+1)x))}{2 \sin(x/2) - 2i \cos(x/2)}$$

$$\frac{2 \sin^2(\frac{n+1}{2}x) - i 2 \sin(\frac{n+1}{2}x) \cos(\frac{n+1}{2}x)}{2 \sin(x/2) - 2i \cos(x/2)}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador

$$\sin(\frac{n+1}{2}x) (\sin(\frac{n+1}{2}x) - i \cos(\frac{n+1}{2}x)) (\sin(x/2) + i \cos(x/2))$$

$$= \sin(\frac{n+1}{2}x) (\cos(\frac{n+1}{2}x) \cos(x/2) + \sin(\frac{n+1}{2}x) \sin(x/2) + i (\sin(\frac{n+1}{2}x) \cos(x/2) - \cos(\frac{n+1}{2}x) \sin(x/2)))$$

$$= \sin(\frac{n+1}{2}x) (\cos(\frac{nx}{2}) + i \sin(\frac{nx}{2}))$$

Topología del plano complejo

Ejercicio 1.

Estudiar la continuidad de la función argumento principal, $arg : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$.

Solución

Usamos la fórmula de la relación anterior para probar que es continua en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$

$$arg z = 2 \arctan\left(\frac{Im z}{Re z + |z|}\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}$$

Luego nos aproximamos por sucesiones

$$\{z + \frac{i}{n}\} \rightarrow z \quad \lim_n (arg(z + \frac{i}{n})) = \lim_n (\arctan(\frac{1}{nz} + \pi)) = \pi$$

$$\{z - \frac{i}{n}\} \rightarrow z \quad \lim_n (arg(z - \frac{i}{n})) = \lim_n (\arctan(\frac{-1}{nz} - \pi)) = -\pi$$

Ejercicio 2.

Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : \theta \notin Arg z\}$. Probar que existe una función $\phi \in C(S_\theta)$ que verifica

Solución

Definimos

$$f(z) = z(\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)) \quad f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \text{ es continua}$$

$$\phi(z) = arg(f(z)) - (\pi - \theta) \quad \phi : S_\theta \rightarrow \mathbb{C} \text{ es continua}$$

$$\begin{aligned} \phi(z) &\in Arg(f(z)) + \theta - \pi \subset Arg(f(z)) + Arg(\cos(\theta - \pi) + i \sin(\theta - \pi)) \\ &= Arg(f(z) - \cos(\theta - \pi) + i(\theta - \pi)) = Arg z \end{aligned}$$

Ejercicio 3.

Probar que no existe ninguna función $\phi \in C^*$ tal que $\phi(z) \in Arg z$ para todo $z \in C^*$

Solución

\mathbb{T} compacto y conexo $\implies \phi(\mathbb{T})$ intervalo cerrado y acotado

Sea $\alpha \in \mathbb{T} : \phi(\alpha) \neq \min(\phi(\mathbb{T})), \max(\phi(\mathbb{T}))$ $\phi(\mathbb{T} - \{\alpha\})$ conexo $\implies [\min(\phi(\mathbb{T})), \phi(\alpha) \cup \phi(\alpha), \max(\phi(\mathbb{T}))]$ que es una contradicción.

Si $\exists h : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$ con $h(z) \in \text{Arg}(z) \forall z \in \mathbb{C}^*$ y h continua, entonces $h|_{\mathbb{T}} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y $h|_{\mathbb{T}}(z) \in \text{Arg}(z) \forall z \in \mathbb{T}$

Ejercicio 4.

Solución

$$\{z_n\} \rightarrow z \implies \forall \varepsilon > 0 \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies |z_n - z| < \varepsilon$$

Sea $\varepsilon = \frac{|z|}{2}$, entonces $\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m \implies z_n \in D(z, |z|/2)$

Usamos el ejercicio 2

Ejercicio 5.

Idea

$$\begin{aligned} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n &\rightarrow e^{\text{Re} z} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left|1 + \frac{z}{n}\right|^n &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\left|1 + \frac{z}{n}\right| - 1\right)} \end{aligned}$$

$$\arg\left(\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right) \rightarrow \text{Im} z$$

Solución

$$z_n \in \mathbb{C}, \phi_n \in \text{Arg}(z_n)$$

$$\{|z_n|\} \rightarrow |z| \text{ y } \{\phi_n\} \rightarrow \phi \in \text{Arg}(z)$$

Vamos a usar que si tiene una sucesión de números complejos y la sucesión de los módulos converge y hay una sucesión de los argumentos de forma que convergen, la sucesión converge al módulo por el cos +isen

$$\begin{aligned} \phi_n \in \text{Arg}(z_n), z_n &= \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{a+ib}{n}\right)^n = \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right) + i\left(\frac{b}{n}\right)\right]^n \\ |z_n| &= \left|\left(1 + \frac{a}{n}\right) + i\left(\frac{b}{n}\right)\right|^n = \left[\left(1 + \frac{a}{n}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2\right]^{n/2} = \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{a^2}{n^2} + \left(\frac{a}{n} + \frac{b^2}{n^2}\right)\right)\right]^{n/2} &= e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n/2 \left(\frac{a^2}{n^2} + 2a/n + b^2/n^2\right)} = e^a = e^{\text{Re} z} \end{aligned}$$

Vamos a utilizar la fórmula de Moivre.

$$\begin{aligned} z_n &= \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \text{ Arg}\left(a + \frac{a+ib}{n}\right)^n = n \text{ Arg}\left(a + \frac{a+ib}{n}\right) = n * \arctan\left(\frac{b/n}{1+a/n}\right) = n * \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right) \text{ Llamamos} \\ y &= b/(n+a) \text{ y usamos } \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\arctan(y)}{y} = 1, n * \arctan\left(\frac{b}{n+a}\right) = \frac{\arctan\left(\frac{b}{n+a}\right)}{\frac{b}{n+a}} \cdot \frac{b}{n+a} = b \end{aligned}$$

Funciones holomorfas

Ejercicio 1

a)

Cauchy Riemman

Solución

c)

$$f(x + iy) = \frac{x^3 + iy^3}{x^2 + y^2}, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, f(0) = 0$$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f = \frac{x^3}{x^2 + y^2}, v(x, y) = \operatorname{Im} f = \frac{y^3}{x^2 + y^2}$$

En \mathbb{C}^*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^2 + y^2} + \frac{x^4(-1)2}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^2 + y^2} = \frac{y^4(-1)2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\text{entonces } \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3(-1)2y}{(x^2 + y^2)^2} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^3(-1)2x}{(x^2 + y^2)^2}$$

De las dos ecuaciones primeras deducimos

$$3x^2(x + y^2) - 2x^4 = 3y^2(x^2 + y^2) - 2y^4 \quad (1)$$

de últimas dos deducimos

$$2yx^3 = -2xy^3 \implies xy(x^2 + y^2) = 0 \implies xy = 0 \implies x^2 + y^2 = 0$$

por tanto

$$x^4 - y^4 = 0 \implies |x| = |y|$$

Ejercicio 2

$$2 \text{ cauchy riemman } \operatorname{Im} f = 4x^3 * y - 4xy^3$$

Ejercicio 3

$$3 \text{ cauchy rieman } a = -c$$

Ejercicio 4

Enunciado

Solución 4 cauchy rieman, derivar respecto x y respecto y $Re f(x, y) = u(x, y)$ $Im f(x, y) = v(x, y)$

Los casos extremos son $a = 0$ o $b = 0$, donde o la imagen o la parte real que quedan serían constantes.

$au(x, y) + bv(x, y) = c - bv(x, y) = c - au(x, y)$ $v(x, y) = c' - a'u(x, y)$ Derivamos

$$\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = \frac{-a' \partial u(x, y)}{\partial x} = \frac{-a' \partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = \frac{-a' \partial u(x, y)}{\partial y} = -a' \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \text{ implica } \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = -a' \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = -a' a' \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \text{ por tanto } \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \text{ en } \Omega$$

Ejercicio 5

Enunciado

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\bar{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es constante.

Solución

Ω dominio, $f \in \mathcal{H}(C)$ $f + \bar{f} = 2Re f$ g es holomorfa por ser suma de holomorfas, $g \in \mathcal{H}(C)$ $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y su parte imaginaria es constante, por tanto g es constante, entonces

$Re f$ es constante, $f \in \mathbb{H}(\Omega)$, Ω dominio implican que f es constante.

Ejercicio 6

Enunciado

Solución

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 \quad P(\bar{z}) = a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0$$

$$\overline{P(\bar{z})} = \overline{a_n \bar{z}^n + a_{n-1} \bar{z}^{n-1} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0} = \overline{a_n} z^n + \overline{a_{n-1}} z^{n-1} + \dots + \overline{a_1} z + \overline{a_0}$$

$$\bar{z}^n = \bar{z} \dots \bar{z} = \overline{(z^n)}$$

resolvemos

$$a \in \Omega^* \iff \bar{a} \in \Omega \quad \lim_{z \rightarrow a} \frac{f^*(z) - f^*(a)}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\overline{f(\bar{z}) - f(\bar{a})}}{z - a} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{\overline{f(\bar{z}) - f(\bar{a})}}{\overline{\bar{z} - \bar{a}}} = \lim_{z \rightarrow a} \overline{\left(\frac{f(\bar{z}) - f(\bar{a})}{\bar{z} - \bar{a}} \right)} = \overline{f'(\bar{a})}$$

Ejercicio 7

Enunciado

Solución

Idea 7 jugar con los grados del polinomio

Suponemos que existe una función racional que es la exponencial:

$$R(z) = \frac{\sum_{i=0}^k \lambda_i z^i}{\sum_{i=0}^m \mu_i z^i} = \frac{A(z)}{B(z)}$$

$$R(z) = R'(z) = \frac{A'(z)B(z) - A(z)B'(z)}{B(z)^2} = \frac{A'(z)}{B(z)} \quad (\text{Tachamos los } B(z))$$

$$A(z) = A'(z) - \frac{B'(z)A(z)}{B(z)}, \quad B(z)A(z) = A'(z)B(z) - B'(z)A(z), \text{ esto se da } \forall z \in D(a, r) \text{ con } a \in \mathbb{C}, r > 0$$

Tienes dos polinomios que son iguales en un entorno no vacío. Para deducir lo último tienes que pensar que son polinomios iguales en un montón de puntos.

$$gr(B(z)) + gr(A(z)) \leq \max\{gr(A'(z)) + gr(B(z)), gr(A(z)) + gr(B'(z))\}$$

Por tanto llegamos a una contradicción, nuestra hipótesis no era cierto.

Funciones analíticas

Ejercicio 1

b)

Solución

$\sum_{n \geq 0} z^{2n} = \sum_{n \geq 0} \alpha_n z^n$ con $\alpha_{2n+1} = 0, \alpha_{2n} = 1$ hay que ver el límite superior de la sucesión $\limsup |\alpha_n| = 1 \implies R = \frac{1}{1} = 1$

c)

Solución

$\sum_{n \geq 0} 2^n z^{n!}$, si $|z| \geq 1$, entonces la serie diverge, si $|z| < 1$ $\sqrt[n]{|2^n z^{n!}|} = \sqrt[n]{2^n |z|^{n!}} = 2 * |z|^{(n-1)!} \rightarrow 0$ por tanto $\sum_{n \geq 0} |2^n z^{n!}| < \infty \implies \sum_{n \geq 0} 2^n z^{n!} < \infty$, entonces $R = 1$.

e)

Solución

$\sum_{n \geq 0} (n + a^n) z^n$ con $a \in \mathbb{R}^+$. Lo separamos en dos series, calculamos los radios de convergencia por separado y cogemos el menor.

$$\sum_{n \geq 0} n z^n \text{ y } \sum_{n \geq 0} a^n z^n$$

$a^n \leq n + a^n \leq (n+1)a^n$ en los extremos el radio de convergencia es $1/a$, por tanto el radio de convergencia de $n + a^n$ es $1/a$

$$\sum_{n \geq 0} a^n |z|^n \leq \sum_{n \geq 0} (n + a^n) |z|^n \leq \sum_{n \geq 0} (n+1) a^n |z|^n$$

Por tanto el radio de convergencia es $1/a$

// Podemos usar el criterio de la raíz para sucesiones $\sum_{n \geq 0} (n + a^n) z^n$ con $a \in \mathbb{R}^+$ Calculamos $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n + a^n}$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) + a^{n+1}}{n + a^n} = a$ (si $a > 1$), 1 (si $a \leq 1$) por tanto $R = 1/a$ ($a > 1$), 1 ($a \leq 1$)

c)

$$\sum_{n \geq 0} a^{n^2} z^n, a \in \mathbb{C} \text{ raíz } n\text{-esima}$$

Ejercicio 2

a)

No se reduce el radio de convergencia, se puede intentar el radio de convergencia de las derivadas

Ejercicio 3

Convergen en todo el plano las que a partir de cierto término son 0, o sea, las que son una suma finita

Sea $\sum_{n \geq 0} \alpha_n (z - a)^n$ que converge uniformemente, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (z - a)^k$ c.u. $\iff S_n$ es uniformemente de Cauchy $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : p \geq q \geq n \implies |S_p(z) - S_q(z)| < \varepsilon \forall z \in \mathbb{C}$ Vemos que los polinomios divergen en infinito. Sea $p \in \mathbb{P}[\mathbb{C}]$, $\lim_{|z| \rightarrow \infty} p(z) = \infty \iff gr(p) > 0$

Vemos que $|S_p(z) - S_q(z)|$ es un polinomio que está acotado, tiene que ser constante para no diverger en infinito, en particular es la constante 0, ya que $S_p(a) = S_q(a)$, por tanto $\sum_{q=m}^{p-1} \alpha_n (z - a)^n = 0 \implies \alpha_n = 0 \forall n \geq m$

Ejercicio 4

Idea:

llamar w a $(w-1)/(z-1)$, y mirar cuando la función tiene imagen que cae en el disco de centro 0 y radio 1, afinar para saber cuando un subconjunto de \mathbb{C} por esta función cae dentro de un subconjunto compacto donde el sumatorio converja

Funciones elementales

Ejercicio 1

Solución

$$f(0) = f(0+0) = f(0)^2 \quad f(0) = 0 \text{ ó } f(0) = 1$$

Si $f(0) = 0$ la función es constante. EN el caso $f(0) \neq 0$, $f(0) = 1$, Si f es derivable en $\alpha \in \mathbb{C}$

$\exists \lim_{n \rightarrow 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h}$ vemos que cumple la fórmula de adición $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{h} = f(\alpha) \frac{f(h)-f(0)}{h} \iff f$ es derivable en 0 Y eso se puede aplicar $\forall z \in \Omega$

Ahora encontramos todas las funciones enteras que cumplan la condición del enunciado.

Sea $z \in \Omega$, $f(z) = 0$, $f(z) = e^{wz} : w \in \mathbb{C}$

Sea f tal que $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$

$$f'(z) = f(z) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h)-f(0)}{h} \quad (f(z)e^{-wz})' = f'(z)e^{-wz} + (-w) + ze^{-wz} = f(z)we^{-wz} - f(z)we^{-wz} = 0$$

funciones son la misma salvo una constante En el punto 0 las dos funciones valen lo mismo, por lo que la función es la constante 1, ya que $f(0) = 1$

El ejemplo es $f(z) = e^{Re(z)}$

Ejercicio 2

$e^z = e^{Re(z)}(\cos(Imz) + i \sin(Imz))$ $B_V = \{z \in \mathbb{C} : a \leq Re z \leq b\}$, $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ $B_H = \{z \in \mathbb{C} : a \leq Im z \leq b\}$ si $a \leq Re z \leq b$, $e^a \leq e^{Re z} \leq e^b$ lo que pasa es que se puede mover en toda la circunferencia unidad

cuando la parte imaginaria se puede mover donde quiera le das infinitas vueltas a la circunferencia unidad.

Tenemos que

e_V^B e la corona circular de centro 0 y radios e^a y e^b

donde

$$a \leq Im z \leq b$$

Tenemos que $\exp(B_H)$ es el sector del plano encerrado entre los ángulos a y b

Ejercicio 4

Enunciado

Probar que si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son sucesiones de números complejos, con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \rightarrow 1$, entonces

$$\{w_n(z_n - 1)\} \rightarrow \lambda \in \mathbb{C} \implies \{z_n^{w_n}\} \rightarrow e^\lambda$$

Solución Como la función exponencial es continua $\{w_n(z_n - 1)\} \rightarrow \lambda \implies \{e^{w_n(z_n - 1)}\} \rightarrow e^\lambda$

$$\lim\{\log(z_n)\} = 0 \implies \lim\{z_n - \log(z_n)\} = 1 \implies \lim\{w_n(z_n - \log(z_n)) - w_n\} = 0$$

$$\lim\{z_n^{w_n} = e^{\log(z_n)w_n}\} = \lim\{e^{w_n(z_n - 1)}\} \iff \lim\left\{\frac{e^{w_n(z_n - 1)}}{e^{w_n(\log(z_n))}}\right\} = e^{w_n(z_n - \log(z_n)) - w_n} = 1$$

Vemos que $z_n^{w_n} = e^{w_n \frac{\log(z_n)}{z_n - 1} (z_n - 1)} = e^{w_n(z_n - 1) \frac{\log(z_n)}{z_n - 1}}$. Sabemos que $\frac{\log(z_n)}{z_n - 1} \rightarrow 1$ ya que $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{\log(z) - \log(1)}{z - 1} = \log'(1) = 1/1$

Ejercicio 5

Enunciado

Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de funciones $\sum_{n \geq 0} e^{-nz^2}$

Solución

La serie converge puntualmente si, y sólo si, $|\frac{1}{e^{z^2}}| < 1 \iff 1 < |e^{z^2}| \iff 0 < \operatorname{Re} z^2 = (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2 \iff |\operatorname{Re} z| > |\operatorname{Im} z|$

donde en la última implicación hemos usado $e^{z^2} = e^{\operatorname{Re} z^2} e^{i \operatorname{Im} z^2}$

$$\operatorname{Re} z^2 = (\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2, \operatorname{Re} z^2 > 0 \iff |\operatorname{Re} z| > |\operatorname{Im} z|$$

Vemos ahora la convergencia uniforme

$A = \{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re} z)^2 > (\operatorname{Im} z)^2\}$ Si $B \subset A$ y satisface que $\inf_{z \in B} [(\operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2] > 0$, entonces hay convergencia uniforme en B

Ejercicio 6

Enunciado

Probar que $a, b, c \in \mathbb{T}$ son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $a + b + c = 0$.

Solución

$$\{a, b, c\} = \{e^{(\lambda - 2/3\pi)}, e^{\lambda i}, e^{(\lambda + 2/3\pi)i}\}$$

\implies

$$e^{2/3\pi i}(a + b + c) = e^{2/3\pi i}a + e^{2/3\pi i}b + e^{2/3\pi i}c = a + b + c \implies a + b + c = 0$$

\Leftarrow

$$a' = \frac{a}{a} = 1, b' = \frac{b}{a}, c' = \frac{c}{a} \quad b' = e^{\theta i}, c' = e^{\gamma i} = -b - 1$$

$$a + b + c = 0 \implies a' + b' + c' = 0 \implies 1 + b' + c' = 0 \implies c' = -b' - 1 \text{ con } \gamma, \theta \in]-\pi, \pi[$$

De lo que deducimos que $(-\cos(\theta) - 1) - i \sin(\theta) = (\cos(\gamma)) + i(\sin(\gamma))$

$$-\cos(\theta) - 1 = \cos(\gamma) \implies \theta = -\gamma - \cos(\theta) - 1 = \cos(\gamma) \text{ por tanto } \theta = \pm \frac{2\pi}{3} = -\gamma$$

Ejercicio 7

Solución

$a \in \Omega$ y vemos que es derivable por la definición $\lim_{z \rightarrow a} \frac{\phi(z) - \phi(a)}{z - a} \frac{\phi(z) - \phi(a)}{\phi(z) + \phi(a)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{z - a}{z - a} \frac{1}{\phi(z) + \phi(a)} = \frac{1}{2\phi(a)} = \phi'(a)$ donde hemos usado que $\phi(a) \neq 0$

Ejercicio 8

Enunciado

Probar que, para todo $z \in D(0, 1)$ se tiene:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1 + z)$$

Solución a) $\log(1 + z) \in \mathbb{H}(D(0, 1))$ y $(\log(1 + z))' = \frac{1}{1+z} \quad \forall z \in D(0, 1)$

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \text{ por otra parte la serie de potencias}$$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ tiene radio de convergencia 1 y su suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = f(z)$ es holomorfa en $D(0, 1)$ y su derivada se calcula término a término

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n$$

Entonces $f'(z) = g'(z) \quad \forall z \in D(0, 1)$, por tanto f y g difieren en una constante.

Como $g(0) = \log(1) = 0 = f(0)$ con lo que tenemos que f y g son iguales en $D(0, 1)$

Ejercicio 9

Solución

$f(z) = \log\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ la función es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ sabemos que $\log \in \mathbb{H}(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-)$ y vemos cuando la función logaritmo cae dentro de dicho conjunto

$$\text{de forma intuitiva } \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}^- \iff \exists r > 0 : z \neq 1, \frac{1+z}{1-z} = -r \iff 1+z = rz - r \iff z(r-1) = 1+r \iff z = \frac{1+r}{r-1}$$

Viendo que $g(z) = \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{H}(\Omega)$ y $g(\Omega) \subseteq \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$ podemos asegurar que $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ por composición.

$$f'(z) = \frac{\frac{1-z+(1+z)}{1-z}}{\frac{(1-z)^2}{1-z}} = \frac{2}{1-z^2}$$

Siendo $\xi \in \mathbb{H}(\Omega)$, entonces $\xi'(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \frac{2}{1-z^2}$

Pista hacer $\frac{2}{1-z^2}$ en serie de potencias

Ejercicio 10

Pista $z^\phi = e^{\phi \log z}$ con $\Omega, \Omega_\phi \subset \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$

$$f^{-1}(z) = \phi^{\frac{1}{\phi \log z}} = z^{1/\phi}$$

Ejercicio 12

Pista

$\sin(nz) = \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2i}$, entonces $\frac{1}{2i} \sum_{n \geq 0} \frac{e^{inz} - e^{-inz}}{2^n}$ Tenemos que ver cuando, para un $z \in \mathbb{C}$ fijo, estudiar la convergencia de las series $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{inz}}{2^n}$ y $\sum_{n \geq 0} \frac{e^{-inz}}{2^n}$

$$e^{inz} = e^{in(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z)} = e^{-n \operatorname{Im} z + i n \operatorname{Re} z} = e^{-n \operatorname{Im} z} e^{i n \operatorname{Re} z} \text{ con } |e^{i n \operatorname{Re} z}| = 1$$

$$|\frac{e^{inz}}{2^n}| = \frac{e^{-n \operatorname{Im} z}}{2^n} = (\frac{e^{-\operatorname{Im} z}}{2})^n \text{ entonces}$$

$$\sum_{n \geq 0} |\frac{e^{inz}}{2^n}| \text{ converge} \iff e^{-\operatorname{Im} z} < 2 \iff -\operatorname{Im} z < \ln 2 \iff -\ln 2 < \operatorname{Im} z$$

y tenemos convergencia uniforme en $B \subset A = \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \ln 2\}$ tal que $\sup_{z \in B} |\operatorname{Im} z| < \ln 2$

Integral curvilínea

Ejercicio 1

Enunciado

Solución

$$\gamma : [0, r] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(s) = \alpha + s, s \in [0, r]$$

$$\int_{[\alpha, \alpha+r]} f(z) dz = \int_0^r f(\alpha + s) \gamma'(s) ds, \text{ donde } \gamma'(s) = 1 \forall s \in [0, r]$$

$$\int_0^r f(\alpha + s) \gamma'(s) ds = \int_0^r f(\alpha + s) ds$$

$$\xi : [0, r] \rightarrow \mathbb{C}, \xi(s) = \alpha + is \forall s \in [0, r]$$

$$\int_{[\alpha, \alpha+ir]} f(z) dz = \int_0^r f(\alpha + is) \xi'(s) ds = i \int_0^r f(\alpha + is) ds$$

Ejercicio 2

Enunciado

Solución

$$\text{Tenemos que probar que } \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} \frac{z dz}{z^3 + 1} = 0$$

$$| \int_{\gamma_r} \frac{z}{z^3 + 1} dz | \leq \int_{\gamma_r} \frac{|z|}{|z^3 + 1|} dz \leq l(\gamma_r) M(r) \text{ donde } M(r) > 0 \text{ satisface que } \frac{|z|}{|z^3 + 1|} \leq M(r) \forall z \in \gamma_r^*$$

$$\text{Dado } z \in \mathbb{C}(0, r)^*, |z| = r$$

$$\frac{|z|}{|z^3 + 1|} \leq \frac{r}{|z^3| - 1} = \frac{r}{r^3 - 1}$$

$$\text{Por tanto } l(\gamma_r) M(r) = 2\pi r \frac{r}{r^3 - 1} \text{ y } \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{r}{r^3 - 1} = 0$$

Para la otra integral tenemos que probar que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\gamma_r} \frac{z^2 e^z}{z+1} dz = 0$$

$$| \int_{\gamma_r} \frac{z^2 e^z}{z+1} dz | < \int_{\gamma_r} \frac{|z|^2 |e^z|}{|z+1|} dz$$

$$\text{Si } z \in \gamma_r^*$$

$$|z|^2 = |-r + is|^2 \leq (r+1)^2 \quad s \in [0, 1]$$

$$|z+1| \geq r-1$$

$$\text{Como } z \in \gamma_r^*, |e^z| = e^{\text{Re} z} = e^{-r}$$

Ejercicio 3

Enunciado

Solución

$$\int_{\mathbb{C}(0,r)} \frac{\log(i+z)}{z} dz$$

donde $0 < r < 1$, $\mathbb{C}(0,r)^* \subset D(0,1)$ definimos $f(z) = \log(1+z)$, $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$

Usando la fórmula de Cauchy para la circunferencia:

$$\int_{\mathbb{C}(0,r)} \frac{\log(i+z)}{z} dz = f(0)2\pi i = 0$$

Sin usar la fórmula de Cauchy para la circunferencia vemos:

$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$, la serie $\sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente sobre compactos de $D(0,1)$.

La sucesión $\{\frac{1}{z}\}$ está acotada en el compacto $\mathbb{C}(0,1)^*$

Usando **observación** $\frac{1}{z} \sum_{n \geq 1} (-1)^{n+1} \frac{z^n}{n}$ converge uniformemente en $\mathbb{C}(0,r)^*$ a $\frac{\log(1+z)}{z}$

Observación

$\{f_n\}$ converge uniformemente en B a f y $g : B \rightarrow \mathbb{C}$ está acotada en B , entonces $\{gf_n\}$ converge uniformemente en B a gf

$$(\exists M > 0 : |g(z)| \leq M \quad \forall z \in B)$$

$$0 = \int_{\mathbb{C}(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log(1+re^{it})}{re^{it}} dt = i \int_{-\pi}^{\pi} \log(1+re^{it}) dt = i \int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}| dt - \int_{-\pi}^{\pi} \arg(1+re^{it}) dt$$

$$\implies \int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}| dt = 0$$

Sabemos que $\log(1+re^{it}) = \ln|1+re^{it}| + i \arg(1+re^{it})$ y que $\gamma(t) = re^{it}$, $\gamma : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma'(t) = ire^{it}$

también sabemos que $|1+re^{it}| = ((1+r \cos(t))^2 + r^2 \sin^2(t))^{1/2} = (1+2r \cos(t) + r^2 \cos^2(t) + r^2 \sin^2(t))^{1/2} = (1+2r \cos(t) + r^2)^{1/2}$

$$\text{por tanto } 0 = \int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}| dt = 1/2 \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1+2r \cos(t) + r^2) dt$$

Como sabemos que el coseno es par $1/2 \int_{-\pi}^{\pi} \ln(1+2r \cos(t) + r^2) dt = \int_0^{\pi} \ln(1+2r \cos(t) + r^2) dt$

Ejercicio 4

Enunciado

Solución

Sabemos que $f \in D(0, 1)$, teniendo que $|f(z) - 1| < 1, \forall z \in D(0, 1)$

Sabemos que f no se anula en $D(0, 1)$ y deducimos que $f(D(0, 1)) \subset D(1, 1)$. Por tanto $\log(f) \in \mathcal{H}(D(0, 1))$

$\log(f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)} \implies \frac{f'}{f}$ admite primitiva holomorfa en $D(0, 1)$ y $\mathbb{C}(0, r) \subset D(0, 1)$ es un camino cerrado, por tanto $\int_{\mathbb{C}(0, r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$

Ejercicio 5**Enunciado****Solución**

$$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{1}{2i} \left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i} \right]$$

Por tanto

$$\int_{\mathbb{C}(i, 1)} \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{1}{2i} \left[\int_{\mathbb{C}(i, 1)} \frac{1}{z-i} dz - \int_{\mathbb{C}(i, 1)} \frac{1}{z+i} dz \right] \neq 0$$

La primera es $2\pi i$

La segunda integral es 0 por el teorema de Cauchy para dominios estrellados, teniendo que $\mathbb{C}(i, 1) \subset D(i, 3/2)$.

Ejercicio 6**Idea**

$\Omega = \mathbb{C} \setminus \{iy : |y| > 1\}$ $\arctan \in \mathcal{H}(\Omega)$ y \arctan es una primitiva de $\frac{1}{1+z^2}$

$\sigma^* \subset \Omega$ y σ es un camino cerrado.

Con esa información sabremos que $\int_{\sigma} \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

Teorema local de Cauchy

Ejercicio 1

Solución

Fijo $z \in \mathbb{C}$ con $|z-a| > r, \exists r' > 0 : |z-a| > r' > r$ Consideramos $\Omega = D(a, r'), f(w) = \frac{1}{w-z}, f \in \mathcal{H}(D(a, r'))$
 $D(a, r')$ es convexo, en particular estrellado, por tanto, usando TLC y TCDE $\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$

Ejercicio 2

Solución

Fijo $z \in D(a, R)$ Fijo $0 < r < R : |z-a| < r < R, \overline{D}(a, r) \subset D(a, R)$

Por la fórmula de Cauchy para la circunferencia $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{f(w)}{w-z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw \right| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+Re^{it})iRe^{it}}{a+Re^{it}-z} dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+re^{it})ire^{it}}{a+re^{it}-z} dt \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(a+Re^{it})R}{a+Re^{it}-z} - \frac{f(a+re^{it})r}{a+re^{it}-z} \right| dt$$

$g : [r, R] \times [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{C}, g(p, t) = \frac{f(a+pe^{it})p}{a+pe^{it}-z}$ por lo que el término de la integral queda $|g(R, t) - g(r, t)|$

g es una función continua en un compacto, por lo tanto es uniformemente continua.

Dado $\varepsilon > 0 \exists \delta : si \|(p, t) - (p', t')\|_{\infty} < \delta \implies |g(p, t) - g(p', t')| < \varepsilon$, y lo utilizamos para $(p, t) = (R, t)$ y $(p', t') = (r, t)$, si $|R - r| < \delta$ entonces $|g(R, t) - g(r, t)| < \varepsilon$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(a+Re^{it})R}{a+Re^{it}-z} - \frac{f(a+re^{it})r}{a+re^{it}-z} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon 2\pi \text{ en el caso de que } |R - r| < \delta$$

Ejercicio 3

Solución

$$\frac{1}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{b-c} \left[\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-c} \right]$$

Vemos primero el caso $b \neq c$

Tenemos tres subcasos

- b interior, c exterior $\int_{C(a,r)} f(z) dz = \frac{1}{b-c} \left[\int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-b} - \int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-c} \right] = \frac{1}{b-c} (2\pi i (b \text{ interior}) - 0) = \frac{2\pi i}{b-c}$
- b y c interiores $\int_{C(a,r)} f(z) dz = \frac{1}{b-c} [2\pi i - 2\pi i] = 0$
- b y c exteriores, por el ejercicio 1 ambas partes son 0: $\int_{C(a,r)} f(z) dz = 0 - 0 = 0$

Ahora vemos el caso $b = c$ $f(z) = \frac{1}{(z-b)^2}$ tiene primitiva holomorfa en \mathbb{C}^* , $\frac{-1}{z-b} \implies \int_{C(a,r)} f(z) dz = 0$

Ejercicio 4

Solución

a

$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)} dz$, donde $r \neq 2, z \neq \pm 2i$

$\frac{z+1}{z(z^2+4)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{z+2i}$, donde $A = 1/4, B = 1/8 - i/4, C = -1/8 - i/4$

Por tanto

$$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)} dz = \frac{1}{4} \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} + \left(\frac{1}{8} - \frac{i}{4}\right) \int_{C(0,r)} \frac{1}{z-2i} dz + \left(-\frac{1}{8} + \frac{i}{4}\right) \int_{C(0,r)} \frac{1}{z+2i} dz$$

para $r \neq 2$ las dos últimas integrales se anulan, y por tanto $\frac{1}{4} \int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} = \frac{2\pi i}{4} = \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 5

Solución

$R > \max\{|a|, |b|\}$

$$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz = \frac{1}{b-a} \left[\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz \right]$$

Por el ejercicio 3 tenemos

$$\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = \frac{f(z)}{b-a} \left[\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a} \right]$$

Por la fórmula de Cauchy para la circunferencia

$$= \frac{1}{b-a} \left[\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b} dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a} dz \right] = 2\pi i f(b) - 2\pi i f(a)$$

Consecuencia

Si $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$

$\frac{2\pi|f(b)-f(a)|}{|b-a|} = \frac{|2\pi i(f(b)-f(a))|}{|b-a|} = \left| \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz \right| \leq \int_{C(0,R)} \frac{|f(z)|}{|z-a||z-b|} dz \leq \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)} 2\pi R$ que tiende a 0 cuando $R \rightarrow \infty$ ya que $|z-a| \geq R-|a|$ y $|z-b| \geq R-|b|$

Equivalencia entre analiticidad y holomorfía

Ejercicio 1

Solución

$$\phi(w, z) = \frac{\varphi}{w-z},$$

$$\phi : \gamma^* \times \mathbb{C} \setminus \gamma^* \rightarrow \mathbb{C}$$

ϕ es continua

$$\phi_w(z) = \phi(w, z)$$

$$z \rightarrow \phi_w(z)$$

$$\phi_w \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \{w\}), \phi_w \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$$

Por tanto por el teorema de holomorfía de una integral dependiente de 1 parámetro $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C} \setminus \gamma^*)$

Podemos proceder también de otra forma:

$$\begin{aligned} \text{Fijo } a \in \mathbb{C} \setminus \gamma^* \quad \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a} &= \lim_{z \rightarrow a} \frac{\int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-z} dw - \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w-a} dw}{z - a} \\ &= \lim_{z \rightarrow a} \int_{\gamma} \varphi(w) \frac{(w-a) - (w-z)}{(z-a)(w-z)(w-a)} dw = \lim_{z \rightarrow a} \int_{\gamma} \varphi(w) \frac{dw}{(w-z)(w-a)} \end{aligned}$$

Sabemos que podemos intercambiar límite e integral

Nos podemos restringir a un compacto para ver $\psi : \phi|_{\gamma^* \times \overline{D}(a, r)} \rightarrow \mathbb{C}$ es continua con r suficientemente pequeño y $\psi(w, z) = \frac{\varphi(w)}{(w-z)(w-a)}$

tenemos que $\gamma^* \times \overline{D}(a, r)$ es compacto, por tanto ϕ es uniformemente continua.

La fórmula para las derivadas la podemos obtener por inducción:

$k = 1$ lo hemos hecho, supuesto cierto para k , vemos para $k + 1$

Ejercicio 2

Solución

$(1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)} \in \mathcal{H}(D(0, 1))$ por tanto es analítica en ese disco.

Por el Teorema de desarrollo de Taylor $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$

Ejercicio 3

Solución

a

$$f'(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$$

$$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{1-z}$$

Por tanto el desarrollo en serie de potencias de la original se puede conseguir a partir de desarrollo de las dos partes por separado.

$$f'(z) = (2z-3) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{A}{2} \left(\frac{z}{2} \right)^n + Bz^n \right) = (2z-3) \sum_{n \geq 0} \left(\frac{A}{2^{n+1}} + B \right) z^n$$

$$= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{A}{2^n} + 2B \right) z^{n+1} - \sum_{n \geq 0} 3 \left(\frac{A}{2^{n+1}} + B \right) z^n$$

que nos da como resultado

$$f'(z) = - \left(\frac{3A}{2} + B \right) + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{A}{2^{n+1}} - B \right) z^n$$

Ejercicio 6

Solución

$$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)} \quad z^2 + z - 1 = 0 \iff z = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}, \text{ donde } a_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, a_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

$$f(z) = \frac{1}{(a_1-z)(a_2-z)} = \frac{1}{a_1-a_2} \left[\frac{1}{a_1-z} - \frac{1}{a_2-z} \right] \text{ Expresamos } \alpha_n \text{ en términos de } a_1 \text{ y } a_2$$

$$a_1 + a_2 = -1 \quad a_1 * a_2 = -1$$

$$(z-a_1)(z-a_2) = z^2 - (a_1+a_2)z + a_1a_2$$

α_{n+2} a partir de aquí se puede expresar en términos de α_n y α_{n+1}

Ejercicio 1

Solución

a)

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad f^{(n)}(0) = n, \text{ vemos } \left\{ \frac{n}{n!} \right\}, \left\{ \sqrt[n]{\frac{n}{n!}} \right\} \rightarrow 0 \implies R = \infty,$$

b)

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1, \sqrt[n]{n+1} \implies R = 1 \text{ Por tanto no hay función entera que cumpla la condición}$$

c)

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{2^n n!}{n!} = 2^n, \sqrt[n]{2^n} = 2 \implies R = 1/2$$

d)

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{n^n}{n!}, \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} \text{ por el criterio del cociente } \implies R = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$$

Ejercicio 12

Solución

$$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2} f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^2}$$

$$\phi(z) = \frac{1}{z}$$

$$\gamma^* = C(0, 1/2)^* \phi(\gamma^*) = C(0, 2)^* \text{ Si } \gamma(t) = \frac{1}{2}e^{-it} \phi(\gamma(t)) = 2e^{it} \implies \phi \circ \gamma = C(0, 2)$$

Por tanto

$$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2} = \int_{C(0,1/2)} \frac{1}{\frac{1}{w^2}(\frac{1}{w}-1)^2} \frac{1}{w^2} dw = \int_{C(0,1/2)} \frac{w^2 dw}{(1-w)^2}$$

Ceros de las funciones holomorfas

4 Existe la posibilidad de que f sea constante.

En otro caso, si f no es constante usando Liouville sabemos que $f(\mathbb{C})$ es denso en \mathbb{C} Entonces $\forall z \in f(\mathbb{C})$,
 $\exists : f(c) = z \implies f(z) = f(f(c)) = f(c) = z$

Por tanto

$$f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C} \implies f(z) = z \forall z \in \mathbb{C}$$

también se puede razonar de la siguiente forma: $\forall z \in \mathbb{C}, \exists \{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $z_n \in f(\mathbb{C}) \forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\{z_n\} \rightarrow z \implies \{f(z_n)\} \rightarrow f(z) = z \implies f(z) = z \forall z \in \mathbb{C}$

Ejercicio 8

$$f'(g(z))g'(z) = 0 \text{ entonces puede darse } f'(g) = 0 \text{ o } g' = 0$$

Ejercicio 9

Definimos $h(z) = \frac{1}{f(1/z)}$, como $\lim_{w \rightarrow \infty} f(w) = \infty$ por tanto $\exists R > 0$ tal que si $|w| > R$, entonces $|f(w)| > 1$

Si $z \in D(0, 1/R) \setminus \{0\}$, $|z| < 1/R \iff 1/|z| > R$, entonces

podemos definir $h : D(0, 1/R) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $h \in \mathcal{H}(D(0, 1/R) \setminus \{0\})$ y $\lim_{z \rightarrow 0} h(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$ y deducimos por el Teorema de Extensión de Riemann $h \in \mathcal{H}(D(0, 1/R))$ y $h(0) = 0$

$$\exists g \in \mathcal{H}(D(0, 1/R)) \text{ con } g(0) \neq 0, \exists k \in \mathbb{N} \text{ tal que } h(z) = \frac{1}{f(1/z)} = z^k g(z)$$

$f(1/z) = \frac{1}{z^k} \frac{1}{g(z)}$ donde el valor absoluto del segundo término está acotado, por tanto $f(w) = w^k \frac{1}{g(1/w)}$, como $g(0) \neq 0 \exists \delta > 0, \exists C > 0$ tal que $D(0, \delta) \subset D(0, 1/R)$ tal que $|g(z)| \geq C > 0 \forall z \in D(0, \delta) \implies \frac{1}{|g(z)|} \leq \frac{1}{C} \forall z \in D(0, \delta) \implies \frac{1}{|g(1/w)|} \leq \frac{1}{C} \forall x \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, 1/\delta)$

$$|f(w)| = |w|^k \frac{1}{|g(1/w)|} \leq \frac{1}{C} |w|^k \forall w \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0, 1/\delta)$$

por el ejercicio 2 de esta relación

f es un polinomio, en particular de grado menor o igual que k

10 pista LEMA Si f verifica que $|z| = 1 \implies |f(z)| = 1$, entonces $f(0) = 0$ o f es constante. PISTA LEMA:
 $1 = |f(z)|^2 = f(z) \overline{f(z)} \forall z \in \mathbb{T} \implies 1 = f(\bar{z}) \overline{f(\bar{z})} = f(1/z) \overline{f(\bar{z})} \forall z \in \mathbb{T}$ - Si hemos probado eso y f es constante es trivial, en caso contrario $f(0) = 0 \implies \exists g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \exists k \in \mathbb{N}$ con $g(0) \neq 0$ tal que $f(z) = z^k g(z) \forall z \in \mathbb{C}$

Ceros de las funciones holomorfas

$1 = |f(z)| = |z|^k |g(z)|$, $z \in \mathbb{T}$ g está en las mismas condiciones que f y por el lema anterior g es constante

Teorema de Morera y sus consecuencias

Ejercicio 5

Sea U con interior no vacío, entonces $\exists z_0 \in U$ con $|Im(z_0)| \geq r > 0$

$\frac{1}{n} |\sin(nz_0)| = \frac{1}{n} \left| \frac{e^{inz_0} - e^{-inz_0}}{2i} \right| = \frac{1}{2n} |e^{inz_0} - e^{-inz_0}|$ entonces si $Im(z_0) \geq r$ $\frac{1}{2n} |e^{inz_0} - e^{-inz_0}| \geq \frac{1}{2n} (e^{nIm(z_0)} - e^{-nIm(z_0)})$ que tiende a infinito cuando $n \rightarrow \infty$

Ejercicio 6

$$\frac{\sin(nz)}{3^n} = \frac{1}{2i} \left(\frac{e^{inz}}{3^n} - \frac{e^{-inz}}{3^n} \right)$$

$\left| \frac{e^{inz}}{3^n} \right| = \frac{|e^{inRe(z) - nIm(z)}|}{3^n} = \frac{e^{-nIm(z)}}{3^n}$ tenemos que hacer que sea menor que δ^n con $0 < \delta < 1$, lo que pasa solamente cuando $-Im(z) < \log(3) + \log(\delta)$

Ejercicio 7

Es entera por el teorema de holomorfía de integrales dependientes de un parámetro.

Ejercicio 8

a)

$$f_n(z) = \int_0^n \sqrt{t} e^{-tz} dt$$

Usaremos el teorema de holomorfía de integrales dependientes de un parámetro.

Definimos $\gamma_n : [0, n] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma_n(t) = t$, $\gamma'_n(t) = 1$ Tenemos que buscar una función $\Phi_n : \gamma_n^* \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$,

$\Phi_n(w, z) = \sqrt{w} e^{-wz}$ Tenemos que

- Φ_n es continua
- $\Phi_n(w, \cdot)$ es entera $\forall w \in \gamma_n^*$

por el teorema de holomorfía $f_n \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ y $f'_n(z) = \int_{\gamma_n} \frac{d}{dz}(\Phi_n(w, z))dw$

entonces

$$\int_{\gamma_n} (\Phi_n(w, z))dw = \int_0^n \sqrt{t} e^{-tz} dt$$

b)

Sea $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(z) - f(z)| = \left| \int_0^n \sqrt{t} e^{-tz} dt - \int_0^\infty \sqrt{t} e^{-tz} dt \right| = \left| \int_n^\infty \sqrt{t} e^{-tz} dt \right|$$

Usamos que $|e^{-tz}| = |e^{-t\operatorname{Re}(z) - i t\operatorname{Im}(z)}| = e^{-t\operatorname{Re}(z)}$, de esta forma

$$\left| \int_n^\infty \sqrt{t} e^{-tz} dt \right| \leq \int_n^\infty \sqrt{t} e^{-t\operatorname{Re}(z)} dt \leq \int_n^\infty \sqrt{t} e^{-tk} dt$$

Y $\forall k \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) \geq k > 0\}$ tenemos $\int_n^\infty \sqrt{t} e^{-tk} dt \leq \int_n^\infty \sqrt{t} e^{-tk} dt \leq \int_n^\infty t e^{-tk} dt$

Comportamiento local de una función holomorfa

Ejercicio 1

Si existen $0 < r_1 < r_2 < R$ tal que $M(r_2) \leq M(r_1)$

$$M(r_1) \geq M(r_2) = \max\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}(0, r_2)^*\} = \max\{|f(z)| : z \in \overline{D}(0, r_2)\}$$

por tanto

$\exists z_0 \in D(0, r_1)$ en el que $|f|$ alcanza un máximo relativo para el disco $D(0, r_2)$, ahora usamos el principio de módulo máximo para deducir que f es constante en $D(0, r_2)$ y por el principio de identidad f es constante en $D(0, R)$

Ejercicio 2

$g : \overline{D}(0, 1) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$, $g(z) = f(1/z)$ $g \in \mathbb{H}(D(0, 1) \setminus \{0\})$ y continua en $\overline{D}(0, 1) \setminus \{0\}$

$\lim_{z \rightarrow 0} g(z) = \lim_{w \rightarrow \infty} f(w) \in \mathbb{C}$ por tanto, por el teorema de extensión de Riemann $g \in \mathbb{H}(D(0, 1))$

Ahora se aplica el resultado del ejercicio 1 a g y sacamos la conclusión sobre f .

Ejercicio 3

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{P(z)}{z^n} = a_n$$

$f(z) = \frac{P(z)}{z^n}$, $f \in \mathbb{H}(\{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\})$ y f es continua en $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ y usando ejercicio 2 sabemos que $|f|$ alcanza su máximo en el conjunto $\{z \in \mathbb{C} : |z| \geq 1\}$ en un punto de \mathbb{T} .

$$\left| \frac{P(z)}{z^n} \right| = |f(z)| \leq M \quad \forall z \text{ con } |z| \geq 1$$

Ejercicio 4

$$|f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a, r)} \frac{f(w)}{w-a} dw \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{C(a, r)} \frac{|f(w)|}{|w-a|} dw \leq \frac{l(C(a, r))}{2\pi r} \max\{|f(w)| : w \in C(a, r)\} = \max\{|f(w)| : w \in C(a, r)\}$$

$$\text{Definimos } g(z) = f(z)f(-z), |f(0)|^2 = |g(0)| = \max\{|g(w)| : w \in \mathbb{T}\} \leq 2 \quad \forall w \in \mathbb{T}$$

Ejercicio 5

Sabemos que $f \in \mathbb{H}(D(0, 1))$ y usamos la desigualdad de la media en $C(0, r)$

$$|f(0)| \leq \max\{|f(z)| : z \in C(0, r)^*\} = r^n \quad \forall 0 < r < 1$$

tomamos límite con $r \rightarrow 0$ obtenemos que $f(0) = 0$

Si f es constante no hay nada que demostrar Si f no es constante, entonces, por el principio de los ceros de una función holomorfa $\exists g \in \mathbb{H}(D(0, 1))$, $\exists k \in \mathbb{N}$ con $g(0) \neq 0$ tal que $f(z) = z^k g(z) \forall z \in D(0, 1)$

Si tenemos que $k < n$ $r^n = \max\{|f(z)| : |z| = r\} = \max\{|z^k g(z)| : |z| = r\} = r^k \max\{|g(z)| : |z| = r\}$ por tanto $\max\{|g(z)| : |z| = r\} = r^{n-k}$ tomando límite en $r \rightarrow 0$ tenemos que g diverge en $z = 0$, lo que es una contradicción

Si tenemos que $n > k$, como $\max\{|g(z)| : |z| = r\} = r^{n-k}$ tomando límite en $r \rightarrow 0$ deducimos que $g(0) = 0$, lo que también es una contradicción.

Luego $k = n$ tenemos $f(z) = z^n g(z) \forall z \in D(0, 1)$

como $\max\{|g(z)| : |z| = r\} = r^{n-k}$ deducimos que $\max\{|g(z)| : |z| = r\} = 1 \forall r \in]0, 1[$ por el ejercicio 1 tenemos que g es constante.

Ejercicio 7

$\lim_{z \rightarrow \infty} P(z) = \infty$ En $\overline{D}(0, R)$ $|P|$ alcanza su mínimo absoluto en $\overline{D}(0, R)$ que vale $k = \min\{|P(z)| : z \in \overline{D}(0, R)\}$ Entonces $\exists R^+ > R$ tal que si $|z| \geq R^+$ entonces $|P(z)| > k$

En $\overline{D}(0, R) \subset \overline{D}(0, R^+)$ $|P|$ alcanza su mínimo absoluto en $z_0 \in \overline{D}(0, R^+)$ y sabemos que es menor o igual que k .

Como en $C(0, R^+)$ $|P| > k$ entonces $z_0 \in D(0, R^+)$

$P \in \mathbb{H}(D(0, R^+))$ y $|P|$ alcanza un mínimo relativo en z_0 , por el principio del módulo mínimo $P(z_0) = 0$.

Ejercicio 8

Tenemos un punto $a \in \Omega$ tal que $Re(f)$ tiene un extremo relativo en a . Sabemos que $\exists R > 0$ tal que $D(a, R) \subset \Omega$ y $Re(f(z)) \geq Re(f(a))$ (respectivamente $Re(f(z)) \leq Re(f(a))$) $\forall z \in D(a, R)$.

Suponemos que f no es constante y por el teorema de la aplicación abierta, $f(a) \in (D(a, R))$ que es abierto. Sabemos que $\exists r > 0$ tal que $D(f(a), r) \subset f(D(a, R))$, lo que es una contradicción con que $Re(f)$ alcance un extremo relativo en a .

Ejercicio 9

Como $C(0, 1)$ es cerrado y acotado su imagen es un compacto. Si $Im(f(z)) = 0 \forall z \in D(0, 1) \implies f$ es constante en $\overline{D}(0, 1)$. En caso contrario $\exists z_0 \in D(0, 1)$ tal que $Im(f(z_0)) \neq 0$, se continuará suponiendo que $Im(f(z_0)) > 0$, en caso de ser menor que 0 se razonaría igual pero usando el mínimo.

$Im(f) : \overline{D}(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en un compacto, por tanto $\exists w_0 \in \overline{D}(0,1)$ tal que $Im(f(w_0)) = \max\{Im(f(z)) : z \in \overline{D}(0,1)\} > 0$. Como $Im(f(w_0)) > 0$ tenemos que $w_0 \in D(0,1)$ y $Im(f)$ tiene un máximo relativo en w_0 . Por el ejercicio 8 tenemos que f es constante.

Ejercicio 10

Tenemos un abierto $\Omega \in \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ inyectiva. $\overline{D}(a,r) \subseteq \Omega \forall z_0 \in D(a,r)$

$$\int_{C(a,ra,r)} \frac{wf'(w)}{f(w)-f(z_0)} dw \text{ Sabemos que en el caso de un cambio de variable } \int_{\gamma} g(\varphi(w))\varphi' dw = \int_{\varphi \circ \gamma} g(z) dz$$

Aplicando la fórmula del cambio de variable usando $\gamma = C(a,R)$, $\varphi(w) = f(w)$, $g(z) = \frac{f^{-1}(z)}{den}$ y nos queda $g(\varphi(w)) = \frac{w}{f(w)-f(z_0)}$.

$$\text{Entonces } \int_{C(a,ra,r)} \frac{wf'(w)}{f(w)-f(z_0)} dw = \int_{f(C(a,r))} \frac{f^{-1}(z)}{z-f(z_0)} dz$$

Por el teorema general de Cauchy $(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = Ind_{\Gamma}(z_0)f(z_0)$, tema 12) nos queda

$$\int_{f(C(a,r))} \frac{f^{-1}(z)}{z-f(z_0)} dz = 2\pi i Ind_{f(C(a,r))}(f(z_0)) * f^{-1}(f(z_0)) = 2\pi i Ind_{f(C(a,r))}(f(z_0)) * z_0$$

El teorema general de Cauchy

Ejercicio 1

Veamos el giro de centro z_0 y ángulo θ . $\varphi(z) = z_0 + (z - z_0)e^{i\theta}$.

La homotecia de centro z_0 y módulo $\lambda \in \mathbb{R}^*$ $\varphi_\lambda(z) = z_0 + (z - z_0)\lambda$

Y la traslación de vector z_0 $\varphi_{z_0}(z) = z + z_0$

Sea γ un camino cerrado en $\Omega = \Omega^\circ$ y $z \in \Omega \setminus \gamma^*$.

Queremos ver si $Ind_\gamma(w) = Ind_{\varphi \circ \gamma}(\varphi(w_0)) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi \circ \gamma} \frac{1}{z - \varphi(w_0)} dz$

Por el ejercicio 11 de la relación 8 deducimos que $\frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi \circ \gamma} \frac{1}{z - \varphi(w_0)} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(\varphi(w))\varphi'(w)dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w) - \varphi(w_0)} dw$

$\varphi(w) - \varphi(w_0) = (w - w_0)\xi$ $z_0 + (w - z_0)e^{i\theta} - (z_0 + (w_0 - z_0))e^{i\theta}$ $\varphi'(w) = \xi \in \{e^{i\theta}, \lambda, 1\}$

De esa forma tenemos $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi'(w)}{\varphi(w) - \varphi(w_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w - w_0} = Ind_\gamma(w_0)$

Ejercicio 2

Sea $\mathbb{C} \setminus \sigma^*$ tiene una única componente conexa no acotada U y $\forall z \in U, Ind_\sigma(z) = 0 = \Omega = \{z \in \mathbb{C} : \exists t \in [-\pi, \pi], z = |z|e^{it}, |z| < \varphi(t)\}$

Como $\varphi : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^+$ es continua alcanza su mínimo absoluto que es positivo.

$0 \in \Omega$ y Ω es estrellado respecto a cero (dado $z \in \Omega$ $\lambda z + (1 - \lambda)0 \in \Omega$ con $\lambda \in [0, 1]$), por tanto Ω es conexo.

$$\Omega \cup \sigma^* \cup U = \mathbb{C}$$

Si $z \in \Omega$, como el índice es constante en cada componente conexa tenemos que $Ind_\sigma(z) = Ind_\sigma(0)$

$$Ind_\sigma(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{1}{z-0} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sigma(t)} \sigma'(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\varphi'(t) + i\varphi(t)}{\varphi(t)} dt$$

Residuos

Ejercicio 1

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3t)}{1+a^2-2a\cos(2t)} dt$$

$$1 + a^2 - 2a \cos(2\pi) = |1 - ae^{2it}|^2 = 1 + a^2 - 2a \operatorname{Re}(e^{2it}) = 1 + a^2 - 2a \cos(2t) = (1 + ae^{2it}) \overline{1 - ae^{2it}} \\ = (1 - ae^{2it})(1 - \overline{ae^{2it}}) = (1 + ae^{2it})(1 - ae^{-2it})$$

$$\gamma(t) = e^{it} \quad \gamma'(t) = ie^{it}$$

entonces

$$(1 + ae^{2it})(1 - ae^{-2it}) = (1 - az^2)(a - \frac{a}{z^2})$$

por lo que consideramos la función

$$\frac{z^2}{(1-az^2)(z^2-a)} \text{ como tenemos que multiplicar por } \gamma'(t) \text{ consideramos } \frac{z}{(1-az^2)(z^2-a)}$$

lo que es igual a

$$\frac{e^{it}}{(1-ae^{2it})(e^{2it}-a)} ie^{it}$$

Haciendo el mismo procedimiento con el numerador

$$\cos^2(3t) = \frac{1+\cos(6t)}{2} = \frac{1+\operatorname{Re}(e^{i6t})}{2} = \operatorname{Re}\left(\frac{1+e^{i6t}}{2}\right)$$

Así vemos que la función que finalmente tendríamos que considerar es

$$f(z) = \frac{(1+z^6)z}{2(1-az^2)(z^2-a)} \quad A = \left\{\frac{-1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}, \pm\sqrt{a}\right\} \quad f: \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C}, f \in \mathbb{H}(\mathbb{C} \setminus A)$$

El camino $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ es nulhomólogo con respecto a \mathbb{C}

$$\text{Como } A' = \emptyset \text{ por el teorema de los residuos } \int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \left(\operatorname{Ind}_{\gamma}(-\sqrt{a}) \operatorname{Res}(f(z), -\sqrt{a}) + \operatorname{Res}(f(z), \sqrt{a}) \right)$$

Ejercicio 4

Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$ calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)^2}$$

$$\text{En el caso } a \neq b \text{ tomamos } f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2} \quad f \in \mathbb{H}(\mathbb{C} \setminus \{\pm ia, \pm ib\})$$

Tomamos $R > \max\{a, b\}$, consideramos el camino cerrado $\Gamma = [-R, R] + SC(0, R)$ (semicircunferencia recorrida en sentido positivo)

$$\gamma : [-R, R] \rightarrow \mathbb{C}, \gamma(x) = x, \gamma'(x) = 1$$

$$\text{Usamos que } \Gamma \text{ es nul-homologa con respecto a } \mathbb{C} \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{SC(0, R)}$$

Por el teorema de los residuos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i [Ind_{\Gamma}(ia) Res(f(z), ia) + Ind_{\Gamma}(ib) Res(f(z), ib)]$$

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i [Res(f(z), ia) + Res(f(z), ib)]$$

$$\text{Ambos índices son 1 } \int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{SC(0, R)} f(z) dz$$

$$|\int_{SC(0, R)} f(z) dz| \leq l(SC(0, R)) \max\{|f(z)| : z \in SC(0, R)\} \leq \frac{\pi R}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)^2} \text{ que tiende a 0 cuando } R \rightarrow \infty$$

$$|f(z)| = \frac{1}{|z^2 + a^2||z^2 + b^2|} \leq \frac{1}{(R^2 - a^2)(R^2 - b^2)^2}$$

$$\text{si } |z| = R \quad |z^2 + a^2| \geq |z|^2 - a^2 = R^2 - a^2$$

$$Res(f(z), ia) = \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) f(z) = \lim_{z \rightarrow ia} \frac{(z - ia)}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)^2} = \frac{1}{(b^2 - a^2)^2} \lim_{z \rightarrow ia} \frac{z - ia}{z^2 + a^2} \text{ por l'Hopital} = \frac{1}{(b^2 - a^2)^2} \frac{1}{2ia}$$

k es el orden del polo ib

$$Res(f(z), ib) = \frac{1}{(z - ib)^k} \lim_{z \rightarrow ib} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} ((z - ib)^k f(z)) = \lim_{z \rightarrow ib} \frac{d}{dz} ((z - ib)^2 f(z)) = \lim_{z \rightarrow ib} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z - ib)^2}{(z^2 + a^2)(z - ib)^2(z + ib)^2} \right) = \lim_{z \rightarrow ib} \frac{2z * (z + ib)^2 + 2(z + ib)(z^2 + a^2)}{(z^2 + a^2)^2(z + ib)^4} = \frac{4b + 2(-a^2 + b^2)}{(a^2 - b^2)^2(-ib^3)8}$$

por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = 2\pi i \left(\frac{1}{2ia} \frac{1}{(b^2 - a^2)^2} + \frac{4b + 2(b^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(-i)8b^34} \right) = \frac{4b^3 - a(4b + 2(b^2 - a^2))}{4ab^3(b^2 - a^2)^2}$$

continuará

Ejercicio 16

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} dx$$

$$\text{Consideramos } f(z) = \frac{e^{z/2}}{e^z + 1} e^z + 1 = 0 \iff e^z = -1 \iff z \in \text{Log}(-1) = \{0 + i(\pi + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} = A$$

$$f : \mathbb{C} \setminus A \rightarrow \mathbb{C} \quad f \in \mathbb{H}(\mathbb{C} \setminus A)$$

$\Gamma_R = [-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$ es nul-homólogo con respecto a \mathbb{C} A no tiene puntos de acumulación en \mathbb{C}

Por el teorema de los residuos

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \text{Ind}_{\Gamma_R}(i\pi) \text{Res}(f(z), i\pi)$$

$$\int_{\Gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}(f(z), i\pi) = \frac{[-R, R]}{f}(z) dz + \int_{[R, R+2\pi i]} f(z) dz + \int_{[R+2\pi i, -R+2\pi i]} f(z) dz + \int_{[-R+2\pi i, -R]} f(z) dz$$

$$\left| \int_{[R, R+2\pi i]} f(z) dz \right| \leq 2\pi \max\{|f(z)| : z \in [R, R+2\pi i]\} \leq 2\pi \frac{e^{R/2}}{e^R - 1} \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty$$

donde hemos usado: $|f(z)| = \left| \frac{e^{z/2}}{e^z + 1} \right| = \frac{e^{R/2} e^{ti/2}}{e^R - 1} = \frac{e^{R/2}}{e^R - 1}$ y $|e^z + 1| \geq |e^z| - 1 = e^R - 1$ ya que $z = R + ti$

$$\left| \int_{[-R+2\pi i, -R]} f(z) dz \right| \leq 2\pi \max\{|f(z)| : z \in [-R+2\pi i, -R]\} \leq 2\pi \frac{e^{-R/2}}{1 - e^{-R}} \rightarrow 0 \text{ cuando } R \rightarrow \infty$$

$$\text{usando: Si } z = -R + ti : t \in [0, 2\pi] \quad |f(z)| = \left| \frac{e^{-R/2} e^{ti/2}}{e^{-R} e^{ti} + 1} \right| \leq \frac{e^{-R/2}}{1 - e^{-R}}$$

$$\int_{[-R, R]} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} \gamma'(x) dx \text{ con } \gamma'(x) = x \text{ y } x \in [-R, R]$$

$$\int_{[R+2\pi i, -R+2\pi i]} f(z) dz = - \int_{[-R+2\pi i, R+2\pi i]} f(z) dz = - \int_{-R}^R \frac{e^{x/2} e^{\pi i}}{e^x + 1} dx = \int_{[-R, R]} \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} dx \text{ donde hemos usado}$$

$$\varphi(x) = x + 2\pi i : x \in [-R, R], \varphi'(x) = 1$$

$$f(\varphi(x)) = \frac{e^{x/2} e^{\pi i}}{e^{x+2\pi i} + 1} = \frac{-e^{x/2}}{e^x + 1}$$

Tomando límite con $R \rightarrow \infty$ obtenemos que $2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} dx = 2\pi i \text{Res}(f(z), i\pi)$

$$\text{Res}(f(z), i\pi) = \lim_{z \rightarrow i\pi} f(z) = \lim_{z \rightarrow i\pi} (z - i\pi) \frac{e^{z/2}}{e^z + 1} = e^{i\pi/2} \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{z - i\pi}{e^z + 1} \text{ que usando l'Hopital nos queda } -i$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x + 1} dx = \pi i \text{Res}(f(z), i\pi) = \pi i(-i) = \pi$$