Universidad de Granada

Geometría III

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

Introducción

En esta asignatura trataremos de estudiar la geometría afín. Nos centraremos en el plano, el espacio y las figuras que se forman en él.

1. El espacio afín

Definición (Espacio afín). Sea E un conjunto no vacío. Entonces diremos que E es un espacio afín asociado a un espacio vectorial V si existe la aplicación

$$\begin{aligned} \varphi : E \times E &\to V \\ (a,b) &\mapsto \varphi(a,b) \end{aligned}$$

que cumple las siguientes propiedades:

- Si fijamos un punto a, la aplicación φ_a es biyectiva, o lo que es lo mismo:

$$\forall a \in E, \quad v \in V, \quad \exists! b \in E : \varphi(a,b) = v$$

- Se tiene la relación de Charles, es decir:

$$\forall a,b,c \in E \quad \varphi(a,b) + \varphi(b,c) = \varphi(a,c)$$

1.1. El plano afín

Desde ahora en adelante, en el desarollo de estos apuntes consideraremos $\mathbb{R}^2$ como el plano afín. En este plano podemos representar tanto *puntos* como *vectores* (realmente lo haríamos en el plano vectorial). No vamos a entrar a detallar todas las propiedades de los vectores, que vamos a suponer que el lector conoce.

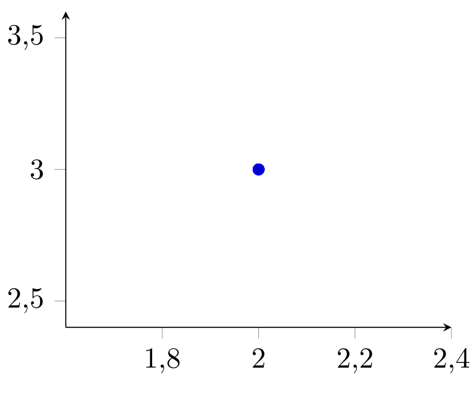


Figura 1: El punto (2,3) en el plano

Lo que vamos a tratar de hacer en este tema es *transformar* las propiedades de los vectores en propiedades de puntos e intentar relacionar estos dos conceptos.

Dados dos puntos P y Q del plano, podemos transformarlos en un vector llamando a $\overrightarrow{u}$ al vector que une P y Q. Así, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{PQ} = Q - P$. De forma analítica podemos observar también que si tenemos un punto P podemos sumarle un vector $\overrightarrow{u}$, obteniendo otro punto Q. Hemos visto entonces que podemos sumar tanto vectores como puntos con vectores.

Definición (Combinación lineal de vectores). Si tenemos una familia $u_1, \ldots, u_n$ de vectores vectores y $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ una familia de escalares, entonces a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$$

lo llamamos *combinación lineal de vectores.*

Definición (Razón de vectores proporcionales). Dados u y v dos vectores proporcionales ($u = \lambda v$), entonces llamamos *razón* de esos dos vectores al escalar λ.

A continuación vamos a estudiar distintas *combinaciones lineales* de puntos del plano afín.

Definición (Combinación baricéntrica de un conjunto de puntos). Dados $P_1, ..., P_n$ un conjunto de puntos del plano afín y $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$ un conjunto de escalares (llamados *pesos* de los puntos) que cumplen que $\sum \alpha_i = 1$, llamamos *combinación baricéntrica de puntos* a:

$$P = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$$

Proposición. *Una combinación baricéntrica de puntos es un punto.*

Demostración. Para simplificar la demostración vamos a comenzar transformando los puntos en vectores.

Restamos primero $P - P_1 = \sum \alpha_i (P_i - P_1)$, obteniendo así el vector determinado por P y P_1 y una identidad entre vectores de la forma:

$$P - P_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_1 P_i}$$

Y llegamos así a que

$$P = P_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i \overrightarrow{P_1 P_i}$$

Hemos demostrado que P es el resultado de sumar un vector a un punto (en este caso P_1), que es otro punto como queríamos. □

Definición (Combinación convexa). Si en una combinación baricéntrica los pesos α_i asignados a los puntos son todos positivos entonces llamaremos a esta combinación *convexa.*

Definición (Centro de gravedad de un conjunto de puntos). Si $P_1, ..., P_n$ es un conjunto de puntos del plano afín y $\alpha_1, ..., \alpha_n$ los *pesos* asociados a estos puntos, llamamos a

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_i$$

el *centro de gravedad del conjunto de puntos.*

Definición (Punto medio). Sean P y Q dos puntos en el espacio afín. Entonces decimos que m es el punto medio entre P y Q si está definido como:

$$m = \frac{1}{2}P + \frac{1}{2}Q = \frac{1}{2}(P+Q)$$

Alternativamente, si $u = \overrightarrow{PQ}$, entonces:

$$m = \frac{1}{2}u + P$$

1.2. Rectas afines

En este apartado vamos a describir las *rectas afines*. De ahora en adelante, si se hace mención a una recta sin más, daremos por hecho que se trata de una recta afín.

Definición (Recta vectorial). Una recta vectorial es un subespacio vectorial de dimensión 1. Para generarlas solo es necesario un único vector. Podemos escribir la *recta vectorial generada por un vector* v como $L(v)$.

Proposición. *Si P es un punto y v un vector, entonces la recta afín r viene dada por*

$$r = P + L(v) = \{P + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Para distinguir las rectas vectoriales de las rectas afines, notaremos a $L(v)$ como $\overrightarrow{r}$.

Definición (Variedad de dirección). Si v es un *vector director*, llamaremos *variedad de dirección* a la recta generada por este vector, $L(v) = \overrightarrow{r}$.

Propiedades de las rectas afines:

- Si Q es un punto y r una recta tales que que $Q \in r \implies r = Q + L(v)$ donde v es el vector director de la recta r.
- Si P, Q son dos puntos, entonces por ellos pasa una única recta $r = P + L(\overrightarrow{PQ})$.

  Demostración. (Unicidad) Si la recta r pasa por P y Q y sea s otra recta que pasa por ellos, entonces por definición:

  $$s = P + L(\overrightarrow{PQ}) = r$$

  □

1.2.1. Posición relativa entre rectas

Podemos clasificar un par de rectas r y s por su posición en el plano afín. Así, decimos que dos rectas son

- Paralelas, notado $r \parallel s$, si y solo si $\overrightarrow{r} = \overrightarrow{s}$
- No paralelas, notado $r \nparallel s$, si y solo si sus vectores directores son linealmente independientes o lo que es lo mismo, u y v forman una base.

Teorema. *Si r y s son dos rectas del plano afín, entonces si:*

*(*i*)* $r \nparallel s \implies r \cap s = A$*, un punto*

*(*ii*)* $r \parallel s \implies r = s$ *o bien* $r \cap s = \emptyset$

Demostración. *(i)* Si u, v son los vectores directores de r y s y P y Q puntos de r y s respectivamente, entonces con los pares $\{u, v\}$ tenemos que $P + \lambda u = Q + \mu v$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y si $r = P + L(u)$ y $s = Q + L(v)$, y $\overrightarrow{PQ} = \lambda u - \mu v$ y, por ello, existen únicos λ, μ.

(ii) Sean u, v son los vectores directores de r y s. Supongamos que además tienen al menos un punto A en común. Escribimos estas rectas como $r = A + L(u)$ y $s = A + L(v)$. Como $r \parallel s \implies L(r) = L(s)$ descubrimos que $r = A + L(u) = A + L(v) = s$.

□

1.3. Triángulos

Los *triángulos* son polígonos que vienen dados por tres puntos no alineados A, B, C llamados *vértices* y las tres rectas que los unen.

Definición. Dos o más puntos $A_1, A_2, ..., A_n$ estan alineados $\iff$ existe una recta $r \subset \mathbb{R}^2$ *tal que* $A_i \in r \ \forall i \in 1, ..., n$

Proposición. *A, B, C son puntos no alineados $\iff$ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$ Si los puntos A, B, y C no están alineados entonces $\nexists r \subset \mathbb{R}^2$ tal que A, B, y $C \in r$, luego $\nexists \overrightarrow{v}$ *tal que* $A, B, C \in r = A + L(\overrightarrow{v})$. Por tanto, $\overrightarrow{AB} \neq \alpha \cdot \overrightarrow{AC}, \alpha \in \mathbb{R}$ porque si no, sería cierto lo anterior. Así, $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes.

$\boxed{\Leftarrow}$ Si A, B, C están en la misma recta, entonces la única recta que une puntos A y B y los puntos A y C es la misma, luego $r = A + L(\overrightarrow{AB}) = A + L(\overrightarrow{AC})$, por lo que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$

serían linealmente dependientes. Como sabemos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ no lo son, por lo tanto A, B y C no están alineados. □

Teorema. *Si consideramos los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ con dos de los lados homólogos paralelos y las razones de los vectores de esos lados son iguales. Si las rectas paralelas son: $A \vee C \parallel A_1C_1$ y $A \vee B \parallel A_1B_1$, por lo que las razones son:*

$$\frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{\overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\overrightarrow{AB}}$$

Entonces, la pareja restante $C \vee B \parallel C_1B_1$ y $\frac{\overrightarrow{B_1C_1}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{\overrightarrow{A_1B_1}}{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{A_1C_1}}{\overrightarrow{AC}}$

Demostración. Si los lados son paralelos, entonces los vectores directores son proporcionales.

Si w (el lado no mencionado del primer triangulo) es $w = -u+v$ y w_1(el lado no mencionado del segundo triángulo) es $w_1 = -\lambda u + \lambda v = \lambda(-u + v) = \lambda w$ por lo que tenemos lo que queríamos. □

Definición (Triángulos semejantes). Dos triángulos son semejantes si sus lados son paralelos dos a dos. También son semejantes $\iff$ los ángulos son iguales. También son semejantes si sus lados son proporcionales.

Corolario 1 (Teorema de Thales). *Si en un triángulo ABC se traza una recta paralela a cualquiera de sus lados, obtenemos un triángulo semejante al triángulo original.*

Nota. Dos triángulos tienen todos los lados paralelos dos a dos $\iff$ los segmentos de los lados son proporcionales dos a dos. Esto es por el teorema anterior.

Definición (Triángulo medio). Si ABC es un triángulo y A',B',C' los puntos medios de sus lados, entonces:

(*i*) $A'B'C'$ es un triángulo

(*ii*) Los lados homólogos son paralelos y que el factor de proporcionalidad es: $-\dfrac{1}{2}$

Demostración. (*i*) Se hace viendo que si ABC no están alineados, estos 3 tampoco

(*ii*) Tenemos que: $A' = B/2 + C/2$, $B' = A/2 + C/2$, $C' = A/2 + B/2$. Tenemos por tanto que: $\overrightarrow{A'B'} = B' - A' = \dfrac{1}{2}(A - B) = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ y por tanto los lados homólogos son paralelos.

Además, el factor es el número obtenido en la conversión, es decir $\dfrac{-1}{2}$.

□

1.3.1. Centros y ejes de un triángulo

Definición (Medianas de un triángulo). Las medianas de un triángulo ABC son las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto

Definición (Baricentro de un triángulo). El baricentro G de un triángulo que viene dado por:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

Teorema. *Si ABC es un triángulo en el plano afín, entonces las medianas son concurrentes. Su punto de corte es el Baricentro. El baricentro triseca el segmento que une un vértice con el punto medio homólogo.*

Demostración. Sea A' el punto medio del lado opuesto a A en un triángulo ABC. Sea AvA' una de las medianas. Esta es:

$$\{\lambda A + \mu A' : \lambda, \mu \in \mathbb{R} \ , \ \lambda + \mu = 1\}$$

Entonces, sabemos que $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ y veamos que este está en la mediana: Tenemos que ver la ecuación:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \lambda A + \mu A' \implies \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C) = ... = G$$

$\square$

Si ABC es un triángulo en $\mathbb{R}^2$, y $A'B'C'$ su triángulo medio. Sabemos que existen las medianas $m_A = L(\overrightarrow{AA'})$. Sabemos que las 3 medianas concurren en el baricentro. Este baricentro triseca a las medianas y tenemos que $G = \frac{2}{3}A' + \frac{1}{3}A$

Definición (Mediatriz de un segmento). Si $\overline{AB}$ es un segmento, entonces llamamos m_{AB} al lugar geométrico $\mathcal{L} = \{P \in \mathbb{R}^2 : AP = BP\}$ (los puntos del plano que distan lo mismo que A que de B).

Nota. A partir de ahora, usaremos $\mu(A, B)$ para denotar la distancia euclídea entre los puntos A y B.

Propiedades:

(*i*) El punto medio $M \in \mathcal{L}$.

(ii) La mediatriz es una recta que viene dada por $<\overrightarrow{AB}, P>=\dfrac{1}{2}(|B|^2-|A|^2)$ y que es perpendicular al segmento AB y pasa por M el punto medio del segmento.

Demostración. La mediatriz está dada por $L=\{P\in\mathbb{R}^2, \mu(P,A)=\mu(P,B) \iff \mu(P,A)^2=\mu(P,B)^2\}$. Sea $P(x,y), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$, entonces $\mu(P,A)^2=|P|^2+|A|^2-2<A,P>=|P|^2+|B|^2-2<B,P>=\mu(P,B)^2 \implies$

$$\frac{|A|^2-|B|^2}{2}=<A-B,P>=<\overrightarrow{BA},P>$$

Donde podemos ver que $\frac{|A|^2-|B|^2}{2}$ es una constante y $<\overrightarrow{BA},P>$ genera la recta:

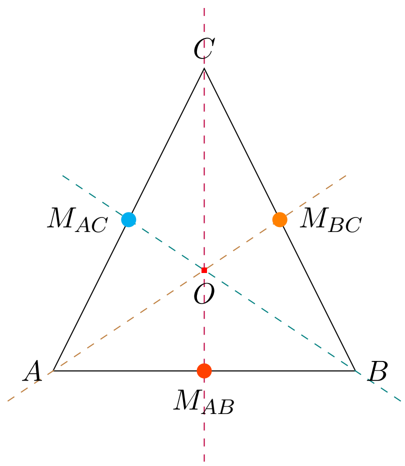
$$r:\overrightarrow{BA}_1x+\overrightarrow{BA}_2y-\frac{|A|^2-|B|^2}{2}=0$$

que es perpendicular a $\overrightarrow{BA}$. □

Nota. $|\overrightarrow{AP}|^2=\mu(A,P)^2 \implies \mu(A,P)^2=(\sqrt{<\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AP}>})^2=<A-P,A-P>=^{(1)}<A,A-P>-<P,A-P>=<A,A>-<A,P>+<P,P>-<P,A>=|A|^2+|P|^2-2<P,A>$. Y en (1) hemos aplicado la bilinealidad del producto escalar.

Definición (Rectas perpendiculares.). Dos rectas son perpendiculares si sus vectores directores son ortogonales.

Definición (Mediatrices de un triángulo). Si ABC es un triángulo, cada lado de este triángulo tendrá su mediatriz. Por tanto, tendremos 3 mediatrices para cada triángulo.



Teorema. *Las tres mediatrices de un triángulo son concurrentes. Además, concurren en el punto O llamado el circuncentro, el centro de la circunferencia que pasa por A,B y C.*

Demostración. Lo primero es ver que es trivial que dos mediatrices nunca son paralelas. Así:

$$O=m_{AB}\cap m_{AC} \implies \begin{cases} AO=BO \\ AO=CO \end{cases} \implies BO=CO \implies O\in M_{BC}$$

$\square$

Definición (Alturas de un triángulo). Son las rectas que pasan por un vértice y son perpendiculares al lado opuesto del triángulo. Estas alturas se cortan en el ortocentro H.

Nota. Las mediatrices de un triángulo ABC son las alturas de $A'B'C'$. Por lo que las alturas de $A'B'C'$ son concurrentes.

Proposición. *Todo triángulo ABC es el triángulo medio de otro triángulo $A''B''C''$*

Demostración. Para ello, tenemos que considerar $A'' = C + \overrightarrow{AB}$. Íden con B'' y C''. $\square$

Definición. Todo triángulo ABC tiene un triángulo doble asociado, el cual es el hallado en la proposicion

Proposición. *Si ABC es un triángulo y $A'B'C'$ su triángulo medio, entonces las alturas de $A'B'C'$ son las mediatrices de ABC y $O = H'$*

Demostración. Si tomamos m_{BC} podems comprobar que pasa por A' y es perpendicular a $\overrightarrow{BC}$, por lo que es perpendicular a $\overrightarrow{B'C'}$, por lo que será la altura del triángulo medio que pasa por A'. Análogamente ocurre con los B' y C', por tanto, $O = H'$. $\square$

Ejercicio: Si 2 de los centros del triángulo ABC coinciden, entonces el triángulo es equilátero.

Ejercicio:Si h es una homotecia de razón $\lambda \neq 0$, entonces

- h multiplica la distancia por $|\lambda|$.
- h lleva rectas perpendiculares en rectas perpendiculares.
- h lleva mediatrices en mediatrices.
- h lleva alturas en alturas.

Ejercicio: Para toda homotecia, el centro un punto y su imagen están alineados.

Teorema (Recta de Euler). *Dado un triángulo ABC no equilátero, entonces sus tres centros G, O, H están alineados(están en la recta de Euler).*

Demostración. Tomamos el triángulo y su triángulo medio $A'B'C'$. Entonces, hay una homotecia de centro G y razón $\frac{-1}{2}$ que lleva ABC en $A'B'C'$.(Probarlo, aplicando la fórmula de la homotecia con su cent y su razón). Ahora, si G', O', H' son los centros de $A'B'C'$ y G, O, H los centros de ABC, tenemos que $G' = G$ y $O = H'$. Sabemos que la homotecia h lleva $G \to G$, $O \to O'$ y $H \to H' = O$.

Entonces, si aplicamos h al centro G, a un punto H y a su imagen O, por el ejercicio anterior, estan alineados.

$\square$

1.4. Ecuaciones de una recta

Hemos visto una recta como un punto A y un vector $\overrightarrow{v}$. Es decir, $r \equiv (x_0, y_0) + (x, y) : (x, y) \in L(v) \equiv (x_0 + x, y_0 + y)$.

También por tanto podemos hacer una recta mediante dos puntos, tomando el vector que forman esos dos puntos y uno de ellos y teniendo la situación anterior.

Las rectas vectoriales en el plano vectorial son siempre de la forma:

$$\overrightarrow{r} \equiv (x, y) \in L : \alpha x + \beta y = 0 \text{ con } \alpha \text{ o } \beta \text{ distinto de } 0$$

Si r es una recta afín, entonces:

$$r \equiv \alpha x + \beta y = \gamma$$

con α o β distintos de 0 y $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

Ahora, si tenemos $r' \equiv \alpha' x + \beta' x = \gamma'$ podemos ver que:

- $r \parallel r' \iff (\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ son linealmente dependientes. Es decir, si el determinante que forman es 0
- $r \nparallel r' \iff (\alpha, \beta), (\alpha', \beta')$ no son linealmente dependientes. Es decir, si el determinante que forman no es 0

1.5. Cuadriláteros

Definición. $ABCD$ es un cuadrilátero que está formado por 4 puntos consecutivos no alineados 3 a 3. Se llaman lados a los segmentos que unen los vertices consecutivos, y diagonales a los segmentos que unen $A \vee C$ y $B \vee D$.

Definición (Lado). Un lado es una recta que une dos vértices consecutivos. En concreto, los cuadriláteros tienen 4 lados: $A \vee B$, $B \vee C$, $C \vee D$ y $D \vee A$.

Definición (Diagonal). Una diagonal es una recta que une dos vertices no consecutivos. En concreto, los cuadriláteros tienen 2 diagonales: $A \vee C$ y $B \vee D$.

Definición (Paralelogramo). Un paralelogramo es un cuadrilátero que cumple que todos sus lados opuestos son paralelos. Es decir, sea $ABCD$ un paralelogramo entonces

AvB es paralelo a $C \vee D$ y $B \vee C$ es paralelo a $D \vee A$. Además los paralelogramos cumplen que siendo $V_1 = A \vee B$, $V_2 = B \vee C$, $V_3 = C \vee D$, $V_4 = D \vee A$ entonces:

(i) $V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = 0$

(ii) $V_3 = \lambda V_1$ *con* $\lambda \neq 0$

(iii) $V_4 = \mu V_2$ *con* $\mu \neq 0$

Proposición. *Sea $ABCD$ un cuadrilátero. Entonces, son equivalentes:*

*(*i) *$ABCD$ es un paralelogramo*

*(*ii) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

*(*iii) *Las diagonales del cuadrilátero se cortan en su punto medio.*

Demostración. $\boxed{1) \Rightarrow 2)}$ Solo tenemos que fijarnos en lo que implica ser paralelogramo (ver propiedad arriba): $V_1 - V_2 - V_3 + V_4 = 0 \Leftrightarrow V_1 - V_2 = V_3 - V_4$ Sustituimos $V_3 = \lambda V_1$ y $V_4 = \mu V_2$: $V_1 - V_2 = \lambda V_1 - \mu V_2$ Como sabemos que V_1 *y* V_2 unen 3 puntos que no están alineados, entonces sabemos que son linealmente independientes y por tanto forman base, por esta razon, cualquier vector se forma como combinación lineal de ellos, con coeficientes únicos. Concluyendo por tanto que entonces $\lambda = 1 y \mu = 1$

$\boxed{2) \Rightarrow 3)}$ Tenemos que $B - A = C - D$, pasando los términos: $B + D = C + A$ Y ahora dividiendo todo entre 2: $\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A$ Con lo cual obtenemos los puntos medios de las diagonales que son iguales.

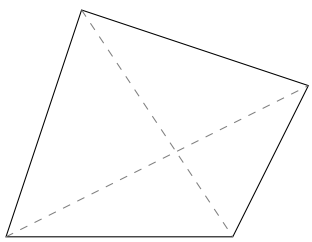
$\boxed{3) \Rightarrow 2)}$ Del mismo modo, si se cortan en la diagonal $\implies \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A \implies \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}C - \frac{1}{2}D \implies B - A = C - D \implies \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\boxed{2) \Rightarrow 1)}$ Para que sea un paralelogramo, además de $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, ha de cumplir $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$, pero por hipotesis $A - B = D - C \implies A - D = B - C$

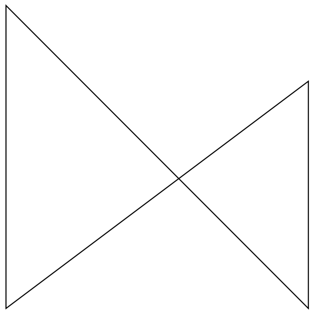
□

Definición.

- Un cuadrilátero es convexo si las dos diagonales separan a los otros vértices.



- Un cuadrilátero es no convexo si las dos diagonales no separan a los otros vértices.



1.6. Transformaciones

Definición (Traslaciones). Se define la traslacion de vector v como $t_v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $t_v(P) = P + v$

Proposición. *Se dan las siguientes propiedades:*

(i) $t_v \circ t_w = t_{v+w}$

(ii) $t_v^{-1} = t_{-v}$

(iii) $t_0 = I$

Demostración.

(i) $t_v \circ t_w = t_v(P + w) = P + w + v = t_{v+w}(P)$

(ii) Vamos a ver que $t_{-v} \circ t_v = I = t_v \circ t_{-v}$

- $t_{-v} \circ t_v(P) = P - v + v = P = I(P)$
- $t_v \circ t_{-v} = P + v - v = P = I(P)$

(iii) $t_0(p) = P + 0 = P = I(P)$

$\square$

Definición (Afinidades). Se define una afinidad f como una aplicacion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ con $f(x) = Ax + b$, con $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $b = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \end{pmatrix}$

Nota. Durante esta sección, consideraremos continuamente la afinidad $f(P) = AP + b$

Proposición. *Se dan las siguientes propiedades:*

(i) *Las traslaciones son un caso particular de afinidades, en las que* $A = I$ *y* $b = v$

(ii) *Sean f y g afinidades, entonces $(g \circ f)(P)$ es afinidad*

(iii) $f^{-1}(P) = A^{-1}P + A^{-1}b$

Demostración. (*i*) Trivial

(*ii*) $(f \circ g)(P) = f(AP + b) = A'(AP) + A'b + b'$, donde AA' es una matriz y $A'b + b'$ es un vector, por lo que tenemos una nueva afinidad.

(*iii*) Es directo por la composición de funciones.

□

Definición (Función vectorial asociada). Se llama función vectorial asociada a una afinidad($\overrightarrow{f}$) a la función que actúa sobre vectores $\overrightarrow{f}(v) = Av$

Propiedades de las afinidades:

1. $f(P + \overrightarrow{v}) = f(P) + \overrightarrow{f}(v)$
2. f lleva rectas en rectas.
3. $f(r \cap s) = f(r) \cap f(s)$
4. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda + \mu = 1$. Entonces, $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda f(P) + \mu f(Q)$
5. f lleva puntos medios en puntos medios
6. f lleva segmentos en segmentos
7. f lleva rectas paralelas en rectas paralelas
8. f lleva triángulos en triángulos
9. f lleva medianas en medianas
10. f lleva baricentros en baricentros
11. f lleva cuadriláteros en cuadriláteros
12. f lleva paralelogramos en paralelogramos

Demostración.

1. $f(P + \overrightarrow{v}) = A(P + \overrightarrow{v}) + b = AP + A\overrightarrow{v} + b = AP + b + A\overrightarrow{v} = f(P) + \overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$
2. Sea $r = P + \lambda\overrightarrow{v}$ una recta. Entonces, $f(r) = f(P + \lambda\overrightarrow{v}) =^{(1)} f(P) + \lambda\overrightarrow{f}(\overrightarrow{v})$, donde en (1) hemos usado la linealidad de la asociada vectorial.
3. Equivalente a la siguiente propiedad al ser $\lambda P + \mu Q$ con $\mu + \lambda = 1$ las combinaciones baricéntricas de P y Q y por lo tanto una recta.

4. $f(\lambda P+\mu Q) = A(\lambda P+\mu Q)+b = A(\lambda P+\mu Q)+(\lambda+\mu)b = \lambda(AP+b)+\mu(AQ+b) = \lambda f(P)+\mu f(Q)$
5. Si PQ es un segmento y $f(\frac{1}{2}P+\frac{1}{2}Q) = \frac{1}{2}f(P)+\frac{1}{2}f(Q)$
6. Trivial
7. Trivial
8. Trivial por las 4 anteriores.
9. Trivial pues f lleva rectas en rectas.
10. Trivial pues lleva intersecciones de rectas en intersecciones de rectas
11. Trivial pues lleva rectas en rectas e intersecciones en intersecciones
12. Trivial por la anterior y porque mantiene paralelismo

□

Definición (Homotecia). Se define homotecia de centro A y razón λ como la aplicación $h_{A,\lambda}(P) = \lambda P + (1-\lambda)A = A + \lambda(\overrightarrow{AP})$

1.7. Circunferencias

Definición (Circunferencia). Una circunferencia es el lugar geométrico de los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ que distan exactamente una distancia r de un punto fijo. Las notaremos como $C = C(centro, radio)$

Proposición. *Dadas dos circunferencias, existen exactamente dos dilataciones que llevan una en la otra.*

1. $C_1 = C(A_1, p_1)$

2. $C_2 = C(A_2, p_2)$

Si h es una dilatación de razón λ, entonces $h(p) = \lambda p + b$. En nuestro caso, cumplirán que $h(C_1) = C_2$ y $p_2 = \lambda p_1$

Definición. Dos puntos A, B de $C = C(O,p)$ se dicen diametralmente opuestos si y solamente si $O \in \bar{AB} \equiv O = \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B$

Proposición. *Un par de puntos diametralmente opuestos de C determinan la circunferencia de forma única.*

Definición (Ángulo recto). Dos vectores forman un ángulo recto si $<\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PB}>= 0$, siendo P el punto donde se cortan.

Proposición. *El lugar geométrico desde el que dos puntos dados del plano se ven bajo un ángulo recto es una circunferencia.*

Teorema (La circunferencia de los 9 puntos de un triángulo). *Sea ABC un triángulo en el plano $\mathbb{R}^2$. Entonces existe una circunferencia que pasa por los siguientes puntos:*

- A', B', C' *los puntos medios de los lados*
- A_2, B_2, C_2 *los puntos medios de los segmentos $\bar{HA}$, $\bar{HB}$, $\bar{HC}$*
- A_3, B_3, C_3 *los tres pies de las alturas.*

Demostración. Tenemos que $B'A'B_2A_2$ es un rectángulo □

1.8. Rectángulos

Definición. Un rectángulo es un paralelogramo tal que los lados contiguos son perpendiculares.

Proposición. *Un paralelogramo es rectángulo $\iff$ las dos diagonales miden lo mismo.*

Demostración.
$\boxed{\Rightarrow}$ Al ser ambas diagonales hipotenusas de tiágulos idénticos (por ser $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$ y por ser recto el ángulo que une los segemtos) son de igual distancia.
$\boxed{\Leftarrow}$ Sabemos que los ángulos de un paralelogramo tienen los ángulos iguales 2 a 2. Además sabemos que cada una de las diagonales es la hipotenusa

□

Proposición. *Todo rectángulo se inscribe en una circunferencia. Además,cada par de vértices opuestos son diametralmente opuestos.*

Proposición. *Un paralelogramo se puede inscribir en una circunferencia $\iff$ es un rectángulo*

1.9. Ángulos

Definición (Ángulo entre vectores). Dos vectores $\overrightarrow{w}$ y $\overrightarrow{v}$ en $\mathbb{R}^2$ forman un ángulo:

$$cos\theta = \frac{< v, w >}{|v||w|} \implies \theta = cos^{-1}\frac{< v, w >}{|v||w|}$$

Nota. Un ángulo entre rectas sería el ángulo que forman sus vectores directores

Proposición. *Si tenemos cuatro rectas $r \parallel r'$ y $s \parallel s'$, entonces los ángulos entre r y s, y entre r' y s' son iguales.*

Proposición. *Los ángulos opuestos por el vértice formados por dos rectas son iguales.*

Proposición. *Si r y s son perpendiculares, entonces $\theta = \pi/2$*

Teorema. *Los tres ángulos de un triángulo suman π*

Demostración. La prueba se hace realizando el triángulo medio y trasladando los ángulos a uno de los vértices de este por rectas paralelas. □

Proposición. *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una dilatación:*

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \quad \lambda \neq 0$$

Las distancias se multiplican por $|\lambda|$, los ángulos se mantienen.

Definición (La razón áurea).

2. Movimientos

Definición (Movimientos). Un movimiento es una aplicación $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ con $n = 2$ ó 3 que es una afinidad que conserva distancias.

$$|f(P) - f(Q)| = |P - Q| \qquad |\overrightarrow{f}(\overrightarrow{QP})| = |\overrightarrow{QP}|$$

Proposición. *f es un movimiento $\iff$ $\mathcal{A}$ es ortogonal ($\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^t$). Es de la forma:*

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \mathcal{A}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

EJEMPLO: *(i)* Traslaciones $p \mapsto p + v$

(ii) Reflexión central $p \mapsto -p + b = -p + 2A$ de centro A

(iii) Giro de ángulo θ y centro A (en $\mathbb{R}^2$).

$$f = \begin{cases} f(A) = A \\ \overrightarrow{f} \equiv A_\theta = \begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta \\ sen\theta & cos\theta \end{pmatrix} \end{cases}$$

Proposición. *Si realizamos un giro $\mathcal{A}_\theta$ y sobre ese giro aplicamos otro giro $\mathcal{A}_{\theta'}$, tenemos que:*

$$\mathcal{A}_\theta \circ \mathcal{A}_{\theta'} = \mathcal{A}_{\theta+\theta'}$$

Siendo $\mathcal{A}$ la matriz del giro.

Definición (Matrices ortogonales). Son de la forma:

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

con $a^2 + b^2 = 1$

Definición (Movimiento directo). Es un movimiento cuya matriz es ortogonal.

Proposición. *En $\mathbb{R}^n$, si $\lambda = 1$ no es un valor propio de $\mathcal{A}$, entonces f tiene un punto fijo y solo 1.*

2.1. Tipos de movimientos

- Movimiento deslizante si no hay puntos fijos $f = t_v \circ t_r$. En estas, el vector deslizamiento es $v = b^1$
- Auténtica reflexión: reflexión con puntos fijos $f = r_r$. En este caso, tenemos que $r = \frac{1}{2}b^{-1} + V_1$

2.2. Giros en el espacio

Definición (Movimiento helicoidal). Es un movimiento en el que no hay puntos fijos. Su matriz en cierta base ortonormal es:

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En ellas, podemos obtener el ángulo sabiendo que

$$tr(A) = 1 + 2cos\theta$$

2.3. Movimientos en $\mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

- Si la matriz A es simétrica, f es una reflexión que puede ser respecto de un plano o respecto de una recta (axial o especular). Además, tenemos el caso de que sea deslizante o no deslizante.

- Simetría axial, $dim(V_1) = 1$, $dim(V_{-1}) = 2$. Su determinante vale por tanto 1. Es un movimiento directo.
- Simetría especular , $dim(V_1) = 2$, $dim(V_{-1}) = 1$. Su determinante vale -1.Es un movimiento inverso.

- Si la matriz A no es simétrica, entonces podemos tener un movimiento directo con $dim(V_1) = 1$ y $dim(V_{-1}) = 0$, teniendo por tanto un giro o un movimiento helicoidal.
- Movimientos inversos, en los que hay puntos fijos por fuerza y tenemos que $dim(V_1) = 0$ y $dim(V_{-1}) = 1$. Este movimiento lo llamaremos giro con simetría. La matriz de este movimiento, en ciertas coordenadas, es:

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sen\theta & 0 \\ sen\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo: Obtener la expresión matricial en coordenadas usuales de la simetría respcto del plano $x - y + z = 1 \equiv \Pi$

Solución: Tomamos un punto $P(x, y, z)$ y tomamos su simétrico respecto del plano $\sigma(P)$. Si tomamos el vector normal al plano, el $n = (1, -1, 1)$, sacado de la ecuación del plano, podemos determinar una recta normal al plano de la forma:

$$s \equiv Q = P + \lambda n = (x, y, z) + \lambda(1, -1, 1)$$

Ahora, tenemos que buscar la intersección de la recta con el planno, introducimos la ecuación de la recta en el plano. Si desarrollamos la ecuación nos queda $(x + \lambda, y - \lambda, z + \lambda)$ y si lo introducimos en el plano:

$$x - y + z + 3\lambda = 1 \implies \lambda = \frac{1 - x + y + z}{3}$$

Por tanto, el punto de corte del plano con la recta estará en el punto:

$$Q = (x, y, z) + \frac{1 - x + y + z}{3}(1, -1, 1) \in s \cap \Pi$$

Ahora, tratamos de hallar $\sigma(P)$. Para ello, como el punto de intersección de la recta con el plano sería el punto medio del vector $\overrightarrow{PQ}$, podemos hacer :

$$\sigma(P) = P + 2\overrightarrow{PQ} = (x, y, z) + \frac{2}{3}(1 - x + y + z)(1, -1, 1)$$

Y ya tendríamos, para cada punto P, su simétrico. Ahora, desarrollamos la expresión y la transformamos en expresión matricial. □

Teorema. *Dados $ABC, A'B'C'$ dos triángulos $\Rightarrow \exists f$ una afinidad que lleva uno a otro. Son equivalentes:*

1. *Los triángulos son semejantes.*
2. *Los lados homólogos son proporcionales.*
3. *Los ángulos homólogos son iguales.*

Demostración.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ Trivial por definición de semejanza.
$\boxed{1 \Rightarrow 3}$ Trivial, ya que como la semejanza es la composición de homotecia y movimiento y tanto las homotecias como los movimientos conservan los ángulos.
$\boxed{2 \Rightarrow 1}$ Se h una homotecia de razón $\lambda = \frac{a'}{a}$. Llamemos $A''B''C'' = h(ABC)$. Entonces, $A'B'C'$ y $A''B''C''$ tienen sus lados homólogos de la misma logitud, luego existe g movimiento que lleva cada vértice de $A'B'C'$ en el correspondiente de $A''B''C''$ Entonces $g^{-1} \circ h$ lleva ABC en $A'B'C'$. Como g^{-1} es un movimiento y h una homotecia, $g^{-1} \circ h$ es una semejanza. □

Proposición (Propiedad del ángulo inscrito). *Si C es una circunferencia de centro O y A un punto cualquiera de ella y B y C dos puntos distintos y distintos de A, entonces el ángulo que forman los segmentos AB,AC es justo la mitad del que forman OB, OC. Esto es:*

$$A = \frac{1}{2}O$$

Corolario 2. *Todos los ángulos inscritos que abarcan el mismo arco son iguales.*

Definición (Arco Capaz). Es el lugar geométrico de los puntos del plano $\mathbb{R}^2$ desde los que un segmento dado $\bar{AB}$ se observa bajo un ángulo dado.

Ejemplo: El arco capaz de un segmento $\bar{AB}$ es la unión de dos carcos de circunferencia con extremos A y B simétricos respecto de AvB.
Solución. Por la propiedad el ángulo inscrito, los dos arcos están contenidos en $\mathcal{L}$. Sea

□

Ejemplo: Sea $ABCD$ un cuadtrilátero convexo. $ABCD$ está inscrito en una circunferencia $\Longleftrightarrow$ Â+ Ĉ$= \pi$ y B̂ + D̂ $= \pi$
Demostración. Supongamos que no, supongamos que $ABC \in \mathcal{C}$. Ahora, tomamos $D' \in \mathcal{C}$ tal que $ABCD' \in \mathcal{C}$ □

Definición (Triángulo órtico). SI ABC es un triángulo con con ángulos menores que $\pi/2$,entonces los pies de las alturas pertenencen al interior de los lados. El triángulo órtico es entonces el triángulo DEF en el que los lados están formados por los puntos donde se cortan las alturas con los lados del inicial.

Propiedades:

(i) Existe una circunferencia por $ADHF$. Lo mismo para $BEHD$ y $CFHE$

3. Cónicas y Cuádricas

Ya sabemos que la ecuación de una recta viene dada por una ecuación de la forma:

$$ax + by + c = 0$$

Ahora, la ecuación de una elipse vendría dada por una ecuación de una forma:

$$ax^2 + by^2 + c = 0$$

También la ecuación de una hipérbola viene dada por una ecuación de la fora;

$$axby = c$$

También si multiplicamos dos ecuaciones de una recta, tendríamos la ecuación de una cónica en $\mathbb{R}^2$

$$(ax + by + c)(a'x + b'y + c') = 0$$

3.1. Cambio de coordenadas en el espacio afín.

En el espacio afín $\mathbb{R}^3$ tomaremos dos sistemas de referencia ortonomales:

(i) El usual: con $\mathcal{R} = \{O, e_1, e_2, e_3\}$ con $O = (0, 0, 0)$, e_i tiene un 1 en la posición i.

(ii) El formado por otro origen $\bar{O} = (a, b, c)$ y una base ortonormal $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$.

La matriz de cambio de base es una matriz ortogonal P cuyas columnas son las coordenadas de $\bar{e}_i$ con $i = 1, 2, 3$ respecto de la base usual.

Así, el cambio de coordenadas para vectores será:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix}$$

Y para puntos será:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

3.2. Cuádricas con centro en $\mathbb{R}^3$.

Una cuadríca $\mathcal{Q}$ es el lugar geométrico de los puntos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que

$$\alpha_1 x^2 + 2\alpha_2 xy + 2\alpha_3 xz + \alpha_4 y^2 + 2\alpha_5 yz + \alpha_6 z^2 + 2\beta_1 x + 2\beta_2 y + 2\beta_3 z + \gamma = 0$$

o en forma matricial

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2/2 & \alpha_3/2 \\ \alpha_2/2 & \alpha_4 & \alpha_5/2 \\ \alpha_3/2 & \alpha_5/2 & \alpha_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \gamma = 0$$

donde $\mathcal{A}$ es una matriz 3×3 simétrica y no nula y $\beta_i, \gamma \in \mathbb{R}$.

Nota. Recordemos que la traza de una matriz es igual a la suma de los elementos de su diagonal.

Proposición. *Toda matriz simétrica es diagonalizable por una matriz ortogonal:*

$$\mathcal{P}^t \mathcal{A} \mathcal{P} = \bar{\mathcal{A}}, \quad \bar{\mathcal{A}} \text{ es simétrica}$$

Nota. Recordemos que diagonalizar por semejanza es hacer $P^{-1}AP$ u hacerlo por conjugación es hacer P^tAP

Teorema. *Si una A es una matriz simétrica, entonces $\exists = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ una base ortonormal de vectores propios*

Proposición. *El centro de una cuádrica $\mathcal{Q}$ es un punto $P = (a, b, c)$ tal que la reflexión central $\sigma_A : P \mapsto -P + 2A$ se tiene que $\sigma_A(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$*

Definición (Centro). Un *centro* de $\mathcal{Q}$ es un punto $A = (a, b, c)$ que es un centro de simetría de $\mathcal{Q}$, es decir, tal que la reflexión central $\sigma_A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\sigma_A(P) = -P + 2A$ lleva $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{Q}$. Hacemos el cambio de coordenadas que toma a A como nuevo origen y y una base ortonormal tal que la matriz del cambio de base sea $\mathcal{P}$.

Expresamos la cuádrica en las nuevas coordenadas

$$\begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{y} & \overline{z} \end{pmatrix} \overline{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \overline{\beta_1} & \overline{\beta_2} & \overline{\beta_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \overline{\gamma} = 0$$

siendo

$$\overline{\mathcal{A}} = \mathcal{P}^t \mathcal{A} \mathcal{P} \qquad \begin{pmatrix} \overline{\beta}_1 & \overline{\beta}_2 & \overline{\beta}_3 \end{pmatrix} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \mathcal{A} + \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \right\} \mathcal{P}$$

$$\overline{\gamma} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \mathcal{A} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \gamma$$

Para que el origen de las nuevas coordenadas sea un centro de la cúadrica imponemos que la parte lineal de la ecuación anterior se anule

$$\begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \mathcal{A} + \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} = 0$$

y la ecuación de la cuádrica en esas coordenadas queda

$$\mathcal{Q} \ \equiv \ \begin{pmatrix} \overline{x} & \overline{y} & \overline{z} \end{pmatrix} \overline{\mathcal{A}} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \\ \overline{z} \end{pmatrix} + \overline{\gamma} = 0$$

siendo $\overline{\gamma}$ la constante dada por

$$\overline{\gamma} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \mathcal{A} + 2 \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \gamma = \begin{pmatrix} \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + \gamma$$

$$\overline{\gamma} = \beta_1 a + \beta_2 b + \beta_3 c + \gamma$$

3.2.1. Ecuación reducida de una cuádrica con centro

Para obtener la ecuación reducida de la cuádrica, consideramos el sistema de referencia que tiene como origen el centro de $\mathcal{Q}$ y como vectores una base ortonormal de vectores propios de la matriz $\mathcal{A}$ y valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Entonces

$$\mathcal{R} = \{A; e_1, e_2, e_3\} \qquad \mathcal{Q} \ \equiv \ \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \gamma = 0.$$

A continuación damos la lista de los distintos tipos de cuádricas con centro y sus ecuaciones reducidas. Cuando $\gamma \neq 0$, estas ecuaciones se obtienen dividiendo la ecuación anterior por γ.

- **Rango de $\mathcal{A} = 3$.**

  Si $\mathcal{A}$ tiene rango 3 entonces $\mathcal{Q}$ tiene un único centro. Entonces existen $a, b, c > 0$ tales que en esas coordenadas la cuádrica se escribe

Elipsoide	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
Elipsoide imaginario	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Hiperboloide de una hoja	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Hiperboloide de dos hojas	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
Cono	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
Cono imaginario	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$

- **Rango $\mathcal{A} = 2$.**

  Consideramos cuádricas con centro y rango 2 en el sistema de referencia $\mathcal{R}$

Cilindro elíptico	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Cilindro imaginario	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Cilindro hiperbólico	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Par de planos reales	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
Par de planos imaginarios	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$

- **Rango $\mathcal{A} = 1$.**

  Cuádricas con centro y rango 1 en el sistema de referencia $\mathcal{R}$

Par de planos paralelos.	$\frac{x^2}{a^2} = 1$
Par de planos imaginarios paralelos	$\frac{x^2}{a^2} = -1$
Plano doble	$x^2 = 0$

3.3. Cónicas con centro en $\mathbb{R}^2$.

Dada una cónica $\mathcal{C}$ con centro consideramos el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{A; e_1, e_2\}$ donde A es el centro y e_1, e_2 es una base ortonormal de vectores propios de la matriz $\mathcal{A}$. Se tienen los siguientes casos

Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Elipse imaginaria	$-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Hipérbola	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
Par de rectas reales concurrentes	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
Par de rectas imaginarias	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
Par de rectas reales paralelas	$\frac{x^2}{a^2} = 1$
Par de rectas imaginarias paralelas	$-\frac{x^2}{a^2} = 1$
Recta doble	$x^2 = 0$

3.3.1. Elementos notables de las cónicas y cuádricas con centro.

Definición (Centro). Es el centro de simetría de la cónica, es decir, el punto A tal que la reflexión σ_A mantiene invariante la cónica. Es importante notar que no todas las gáficas tienen centro.

Definición (Ejes). Son los ejes de simetría. Cada eje es una recta que pasa por el centro y tiene como vector director a un vector propio de la matriz $\mathcal{A}$. En $\mathbb{R}^2$ (respectivamente $\mathbb{R}^3$) se consideran dos (respectivamente tres) ejes perpendiculares pasando por el centro.

Definición (Vértices). La intersección de los ejes con la cónica o cuádrica.

3.4. Cuádricas sin centro en $\mathbb{R}^3$.

Sea $\mathcal{Q}$ una cuádrica sin centro tal que el rango de $\mathcal{A}$ sea 2. Entonces los valores propios son $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ y $\lambda_3 = 0$. Tomamos el sistema de referencia $\mathcal{R} = \{O; e_1, e_2, e_3\}$ con una base de vectores propios y la ecuación queda de la forma

$$\mathcal{Q} \;\equiv\; \lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z + \gamma = 0$$

Consideramos un nuevo sistema de referencia $\overline{\mathcal{R}} = \{A; e_1, e_2, e_3\}$ de manera que el origen $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ nos permita obtener cuadrados perfectos en $\overline{x} = x - \alpha_1$ e $\overline{y} = y - \alpha_2$. La nueva ecuación es

$$\mathcal{Q} \;\equiv\; \lambda_1 \overline{x}^2 + \lambda_2 \overline{y}^2 + \overline{\beta}_3 \overline{z} = 0$$

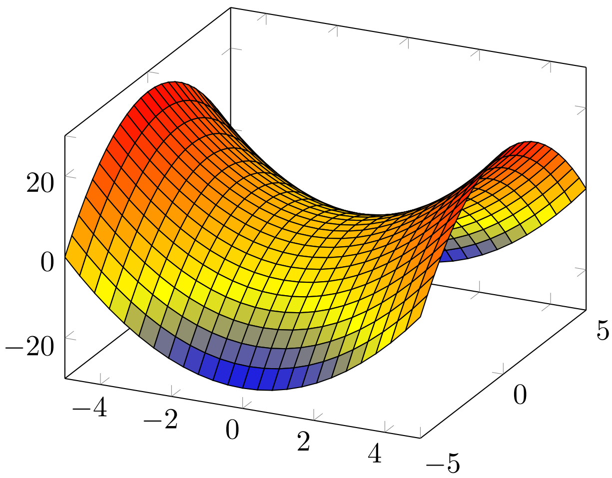
donde $\overline{\beta}_3 \neq 0$ ya que la cuádrica no tiene centro. Esto nos permite obtener las ecuaciones reducidas para el caso sin centro.

3.4.1. Ecuaciones reducidas para cuádricas sin centro.

- Rango $\mathcal{A} = 2$.

  Paraboloide Elíptico. $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

  Paraboloide Hiperbólico. $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$



- Rango $\mathcal{A} = 1$.

  Cilindro Parabólico $z = \frac{x^2}{a^2}$

3.5. Cónicas sin centro en $\mathbb{R}^2$.

Parábola $y = \frac{x^2}{a^2}$

3.6. Cuádricas sin centro