

# Resúmenes Análisis

## 1. Conjuntos.

**Definición (Punto de acumulación).** Un punto  $x$  en un espacio métrico  $M$  es un punto de acumulación de un conjunto  $A \subset M$  si todo conjunto abierto  $U$  que contiene a  $x$  también contiene a algún punto de  $A$  distinto de  $x$ .

**Teorema.** *Un conjunto  $A \subset M$  es cerrado  $\iff$  todos los puntos de acumulación de  $A$  pertenecen a  $A$ .*

## 2. Sucesiones.

**Proposición.** *Una sucesión  $\{x_n\}$  en  $M$  converge a  $x \in M \iff \forall \varepsilon > 0 \exists N : k \geq N \implies d(x, x_k) < \varepsilon$*

**Proposición.**  *$\{v_n\} \rightarrow v \in \mathbb{R}^n \iff$  cada sucesión de coordenadas converge a la coordenada correspondiente de  $v$  como una sucesión en  $\mathbb{R}$*

**Proposición.**

- *Un conjunto  $A \subset M$  es cerrado  $\iff \forall \{x_n\} \subset A$  con  $\{x_n\}$  convergente, el límite es un elemento de  $A$ .*
- *Para un conjunto  $B \subset M$ ,  $x \in \bar{B} \iff$  existe una sucesión  $\{x_n\} \in B$  tal que  $\{x_n\} \rightarrow x$*

*Demostración.* Demostraremos el primero.

Sea  $A$  un conjunto cerrado y  $\{x_n\} \rightarrow x$ . Entonces  $x$  es un punto de acumulación de  $A$ .  $x$  es un punto de acumulación de  $A$ , pues cualquier entorno de  $x$  contiene algún punto de  $\{x_n\} \subset A$ . Ahora, como sabemos que  $A$  es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación,  $A$  es cerrado y  $x$  es un punto de acumulación entonces  $x \in A$ .

De la misma forma, sea  $x \in A$  un punto de acumulación de  $A$  y elegimos  $\{x_n\} \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ . De esta forma,  $\{x_n\} \rightarrow x$  (pues  $\forall \varepsilon > 0 \exists N \geq 1/\varepsilon$  con lo que  $k \geq N \implies x_k \in B(x, \varepsilon)$ ). Así, tenemos una sucesión de elementos de  $A$  que converge a un elemento de  $A$ , y su límite es un punto de acumulación, por tanto por el teorema anterior,  $A$  es cerrado.  $\square$

**Definición (Sucesión de Cauchy).** Una sucesión de Cauchy es una sucesión  $\{x_n\} \in M$  tal que  $\forall \varepsilon > 0 \exists N$  tal que si  $p, q \geq N$  entonces  $d(x_p, x_q) < \varepsilon$ .  $M$  es completo  $\iff$  toda sucesión de Cauchy en  $M$  converge a un punto de  $M$ .

**Proposición.** Una sucesión convergente en un espacio normado o métrico está acotada.

*Demostración.* Sea  $\{x_n\} \rightarrow x$ , sabemos que  $\exists N : d(x_n, x) < 1$  si  $n \geq N$ , así que  $x_n \in B(x, 1)$  si  $n \geq N$ . Basta tomar  $R = \max\{1, d(x_1, x), \dots, d(x_{N-1}, x)\}$  y así  $d(x, x_n) \leq R \forall n$  por lo que  $x_n \in B(x, R) \forall n$  y así está acotada.  $\square$

**Teorema (Teorema de Bolzano Weierstrass).** Sea  $\{x_n\}$  una sucesión de  $\mathbb{R}^N$  acotada. Entonces existe una sucesión parcial suya  $\{x_{\sigma(n)}\}$  convergente.

*Demostración.* Notaremos  $x_n = (x_n^1, \dots, x_n^N)$ . Como  $\{x_n^1\}$  es acotada en  $\mathbb{R}$ , existe  $\sigma_1 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente creciente tal que  $\{x_{\sigma_1(n)}^1\}$  es convergente.

Ahora, como  $\{x_n^2\}$  es acotada,  $\{x_{\sigma_1(n)}^2\}$  también es acotada, y existe  $\sigma_2 : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente creciente tal que  $\{x_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}^2\}$  es convergente.

Procediendo de esta forma con cada componente de  $x_n$ , obtenemos  $\sigma_1, \dots, \sigma_N$ , y  $\{x_{\sigma_1(n)}^1\}, \{x_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}^2\}, \dots, \{x_{(\sigma_N \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}^N\}$  sucesiones convergentes en  $\mathbb{R}$ . Al ser  $\sigma_i$  estrictamente creciente  $\forall i = 1, \dots, N$ ,  $\{x_{(\sigma_N(n) \circ \dots \circ \sigma_{i+1} \circ \sigma_i \circ \dots \circ \sigma_1)(n)}^i\}$  también es convergente (toda sucesión parcial de una sucesión convergente es convergente).

Así, tomando  $\sigma = \sigma_1 \circ \dots \circ \sigma_N$ ,  $\{x_{\sigma(n)}\}$  es convergente.  $\square$

**Proposición.**

- (i) Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy.
- (ii) Una sucesión de Cauchy en un espacio métrico debe estar acotada.
- (iii) Si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge a  $x$ , entonces la sucesión converge a  $x$ .

**Teorema ( $\mathbb{R}^n$  es completo).** Una sucesión  $x_n \in \mathbb{R}^n$  converge a un punto de  $\mathbb{R}^n \iff$  es una sucesión de Cauchy

*Demostración.*

$\Rightarrow$

Dado  $\varepsilon > 0$ , existe  $m \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq m$  entonces  $d(x_n, x) < \frac{\varepsilon}{2}$ , y si  $p, q \geq m$  entonces  $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) < \varepsilon$

◁

Como  $\{x_n\}$  es de Cauchy,  $\{x_n^i\}$  es de Cauchy  $\forall i = 1, \dots, N$  (porque  $|x_n^i - x_m^i| \leq |x_n - x_m|$ ).  
 $\implies \{x_n^i\} \rightarrow x^i$  es convergente, por ser  $\mathbb{R}$  completo. Luego  $\{x_n\}$  es convergente.

□

### 3. Conjuntos compactos y conexos.

**Definición (Compacto).** Un subconjunto  $A$  de un espacio métrico  $M$  es compacto si todo recubrimiento abierto de  $A$  contiene un subrecubrimiento finito.

**Definición (Otra definición de compacto.).** Sea  $A \subset X$  con  $X$  espacio métrico.

$A$  es compacto  $\iff \forall \{x_n\} \subset A \ \exists \{x_{\sigma(n)}\}$  parcial de  $\{x_n\}$  con  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x \in A$

**Teorema (Teorema de Heine-Borel).** Un conjunto  $A \subset \mathbb{R}^n$  es compacto  $\iff$  es cerrado y acotado.

*Demostración.*

⇒

Suponemos que  $A \subset \mathbb{R}^n$  es compacto. Entonces, por su definición,  $\forall \{x_n\} \subset A \ \exists \{x_{\sigma(n)}\}$  parcial de  $\{x_n\}$  con  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x \in A$ . Supongamos que  $A$  no está acotado. Entonces,  $\forall n \in \mathbb{N}, \exists a_n \in A : |a_n| \geq n$ , por lo que  $\{a_n\}$  no converge y por tanto  $\sigma(n) \geq n \implies \{a_{\sigma(n)}\}$  no converge, por lo que  $A$  está acotado.

Supongamos ahora que  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \exists \{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x \in A$ , y como sabemos que si una sucesión es convergente todas sus parciales convergen al mismo límite, entonces eso implica que  $\{x_n\} \rightarrow x \in A$  por lo que toda sucesión converge a un punto de  $A$ , y así  $A$  es cerrado.

◁

Supongamos ahora que  $A$  es cerrado y acotado. Sea  $\{x_n\}$  una sucesión cualquiera de puntos de  $A$ .

Como  $A$  es acotado, entonces  $\exists R > 0 : A \subset B(0, R)$ . Además, como  $\{x_n\} \subset A \ \forall n \implies |x_n| < R \ \forall n \in \mathbb{N}$ , así  $\{x_n\}$  es acotada.

Como  $\{x_n\}$  es acotada, por el teorema de Bolzano Weierstrass,  $\exists \sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  estrictamente creciente con  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x \in \mathbb{R}^n$ , y como  $\{x_{\sigma(n)}\}$  es una subsucesión de puntos de  $A$  que converge a  $x$  y el conjunto  $A$  es cerrado, entonces el límite de esta sucesión está en  $A$ , es

decir:

$$\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x \in A$$

Por lo que tenemos la definición de conjunto compacto.

□

**Definición (Función continua).** Una aplicación  $f : A \rightarrow M$  es continua si  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$  para toda sucesión  $x_n$  convergente a un punto de  $A$  con  $x_n \in A$

**Proposición (Caracterización de continuidad).** Sea  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ , y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^M$ . Entonces:

$$f \text{ es continua en } a \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \text{ con } \{x_n\} \rightarrow a \Rightarrow \{f(x_n)\} \rightarrow f(a).$$

**Definición (Conjunto convexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice *convexo* si  $\forall x, y \in A$  se tiene que el segmento de extremos  $x$  e  $y$  está incluido en  $A$ . En otras palabras:

$$A \text{ convexo} \iff [x, y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0, 1]\} \subseteq A.$$

**Definición (Poligonalmente conexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice *poligonalmente conexo* si  $\forall x, y \in A$  existe una poligonal que los une y no se sale de  $A$ . En otras palabras:  $A$  *poligonalmente conexo*  $\iff \exists \{x = a_0, a_1, \dots, a_k = y\} \subseteq A$  tal que:

$$\bigcup_{i=1}^k [a_{i-1}, a_i] \subseteq A.$$

**Definición (Conjunto arco-conexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice *arco-conexo* (*conexo por arcos*) si  $\forall x, y \in A$  existe un camino incluido en  $A$  que los une. En otras palabras,  $A$  *es conexo por arcos*  $\iff \exists \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$  continua verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a, b]) \subseteq A.$$

**Definición (Conjunto no conexo).** Decimos que un conjunto  $A \in \mathbb{R}^N$  es *NO conexo* si existen  $U, V$  abiertos en  $\mathbb{R}^N$  tales que:

$$U \cap A \neq \emptyset; \quad V \cap A \neq \emptyset; \quad A \subseteq U \cup V; \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

*Nota.* La misma definición se aplica para un espacio topológico  $(X, \tau)$ .

**Definición (Conjunto conexo).** Un conjunto  $A \subseteq \mathbb{R}^N$  se dice *conexo* si no es no conexo. Equivalentemente,  $\forall U, V$  abiertos en  $\mathbb{R}^N$  tales que  $U \cap A \neq \emptyset, V \cap A \neq \emptyset, A \subseteq U \cup V$ , se tiene que forzosamente  $A \cap U \cap V \neq \emptyset$ .

**Teorema.** Los conjuntos conexos por arcos en  $\mathbb{R}$  son convexos.

*Demostración.* Sean  $x, y$  dos puntos de  $A$ . Suponemos  $x \leq y$  (si fuera al revés, cambiamos los nombres).

Como  $A$  es arco conexo  $\implies \exists \varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua con  $\varphi(a) = x$ ,  $\varphi(b) = y$  y  $\varphi([a, b])$  es un intervalo por el teorema del valor intermedio en  $\mathbb{R}$ .

Ahora,  $\forall \alpha, \beta \in \varphi([a, b])$  con  $\alpha \leq \beta \implies [\alpha, \beta] \subseteq \varphi([a, b])$  y así tenemos  $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi([a, b]) \implies [\varphi(a), \varphi(b)] = [x, y] \subseteq \varphi([a, b]) \subseteq A$   $\square$

## 4. Funciones continuas

**Definición (Límite).** Supongamos que  $x_0$  es un punto de acumulación de  $A$ . Decimos que  $b \in \mathbb{R}$  es el límite de  $f$  en  $x_0$ , denotado por:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

Si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que  $\forall x \in A$  que sea distinto de  $x_0$  y  $d(x, x_0) < \delta$ , entonces  $d(f(x), b) < \varepsilon$

**Definición (Función continua).** Una función  $f : A \rightarrow B$  es continua en un punto  $x_0$  de su dominio  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in A$  que cumpla que  $d(x, x_0) < \delta \implies d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

**Teorema.** Sea  $f : A \rightarrow B$  continua y  $K \subset A$  conexo. Entonces,  $f(K)$  es conexo. Análogamente, si  $K$  es arco-conexo, entonces,  $f(K)$  es arco-conexo.

**Teorema (Teorema de Weierstrass).** Sea  $f : A \rightarrow B$  continua y  $K \subset A$  un compacto. Entonces,  $f(K)$  es compacto.

*Demostración.* Sea  $\{y_n\} \subseteq f(K)$  una sucesión cualquiera en  $f(K)$ . Para demostrar que  $f(K)$  es compacto debemos demostrar que  $\{y_n\}$  tiene una subsucesión convergente a algún punto de  $f(K)$ . Sea  $y_n = f(x_n)$  con  $x_n \in K$ , por ser  $A$  compacto  $\{x_n\}$  tiene una subsucesión  $\{x_{\sigma(n)}\}$  convergente a un  $a \in K$ . Por lo tanto,  $\{f(x_{\sigma(n)})\}$  convergente a un  $f(a) \in f(K)$ , siendo  $\{f(x_{\sigma(n)})\}$  una subsucesión de  $\{f(x_n)\}$ , es decir, de  $\{y_n\}$ .  $\square$

**Teorema.** Sean  $M, N, P$  espacios métricos y supongamos que  $f : A \subset M \rightarrow N$  y  $g : B \subset N \rightarrow P$  son transformaciones continuas tales que  $f(A) \subset B$ . Entonces,  $g \circ f : A \subset M \rightarrow P$  es continua.

**Teorema (Teorema del máximo-mínimo).** Sea  $(M, d)$  un espacio métrico,  $A \subset M$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua. Sea  $K \subset A$  un conjunto compacto. Entonces  $f$  está acotada en  $K$ , es decir:  $B = \{f(x) : x \in K\} \subset \mathbb{R}$  es un conjunto acotado. Además, existen

puntos  $x_0, x_1 \in K$  tales que  $f(x_0) = \inf(B)$  y  $f(x_1) = \sup(B)$ . Decimos que  $\sup(B)$  es el máximo de  $f$  en  $K$  e  $\inf(B)$  el mínimo de  $f$  en  $K$ .

**Teorema (Teorema de los valores intermedios).** Sean  $M$  un espacio métrico,  $A \subset M$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Supongamos que  $K \subset A$  es conexo y que  $x, y \in K$ . Para cada número  $c \in \mathbb{R}$  tal que  $f(x) < c < f(y)$  existe un punto  $z \in K : f(z) = c$

#### 4.1. Continuidad uniforme

**Definición (Uniformemente continua).** Sean  $(M, d)$  y  $(N, p)$  espacios métricos,  $A \subset M$ ,  $f : A \rightarrow N$  y  $B \subset A$ . Decimos que  $f$  es uniformemente continua en el conjunto  $B$  si  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : x, y \in B \text{ y } d(x, y) < \delta \implies p(f(x), f(y)) < \varepsilon$

**Teorema (Teorema de la continuidad uniforme. Teorema de Heine-Cantor.).** Sean  $f : A \rightarrow N$  continua y  $K \subset A$  un compacto. Entonces,  $f$  es uniformemente continua en  $K$ .

*Demostración.* La condición para la continuidad uniforme es la siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x, y \in A : d(x, y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Vamos a proceder por reducción al absurdo, para lo cual negamos esta condición:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \forall \delta > 0 \exists x, y \in A : d(x, y) < \delta \wedge d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$$

Tomamos este  $\varepsilon_0$ , lo que nos da, para cada  $\delta > 0$ , un par de puntos  $x$  e  $y$  que cumplen la propiedad expresada arriba. Tomamos  $\delta = \frac{1}{n} \forall n \in \mathbb{N}$ . Esto nos da dos sucesiones  $\{x_n\}$  e  $\{y_n\}$  tales que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \wedge d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$$

Por ser  $A$  compacto, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos da dos sucesiones parciales  $\{x_{n_k}\}$  a  $x_0$  e  $\{y_{n_k}\}$  a  $y_0$ . Por tanto:

$$d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \wedge d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon_0$$

Sin embargo,  $\{x_{n_k}\}$  e  $\{y_{n_k}\}$  convergen al mismo punto (por converger su distancia a cero), y como  $f$  es continua, esta proposición no puede ser verdadera. Hemos llegado por tanto a una contradicción, luego  $f$  debe ser uniformemente continua.  $\square$

## 5. Transformaciones diferenciables

**Definición (Diferenciable).** Una transformación  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $x_0 \in A$  si existe una transformación lineal, denotada  $Df(x_0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  llamada diferencial de  $f$  en  $x_0$  tal que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

Donde  $Df(x_0)(x - x_0)$  es el valor de la aplicación lineal aplicada al vector  $(x - x_0)$ .

Equivalentemente, podemos decir que  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  tal que si  $x \in A$  y  $\|x - x_0\| < \delta$  entonces:

$$\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\| \leq \varepsilon \|x - x_0\|$$

**Teorema (Matriz jacobiana de  $f$ ).** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  es diferenciable en  $A$ . Entonces, las derivadas parciales  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  existen y la matriz de la transformación lineal  $Df(x)$  con respecto de las bases canónicas en  $\mathbb{R}^n$  y  $\mathbb{R}^m$  es:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

donde cada derivada parcial se evalúa en  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Esta matriz es la matriz jacobiana de  $f$ .

**Definición (Gradiente (caso  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ )).** En el caso de que  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces  $Df(x)$  es una matriz  $1 \times n$ . El vector cuyas componentes son iguales a las de  $Df(x)$  se denomina gradiente de  $f$  y se denota  $\nabla f$ .

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

**Teorema.** Sean  $A \subset \mathbb{R}^n$  un conjunto abierto y  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Si  $f = (f_1, \dots, f_m)$  y cada  $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}$  existe y es continua en  $A$ , entonces  $f$  es diferenciable en  $A$ .

**Definición (Derivada direccional).** Las derivadas parciales de una función miden su variación en las direcciones paralelas a los ejes. Las derivadas direccionales hacen lo mismo en otras direcciones.

Sea  $f$  una función escalar definida en un entorno de  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  y sea  $e \in \mathbb{R}^n$  un vector unitario, entonces:

$$\frac{d}{dt} f(x_0 + te)|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + te) - f(x_0)}{t}$$

es la derivada direccional de  $f$  en  $x_0$  en la dirección  $e$ .

Se puede afirmar que la derivada direccional en la dirección de  $e$  es igual a  $Df(x_0)(e)$ . Se suele notar  $D_e f(x)$ .

**Proposición (Regla de la cadena).** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable en  $x_0 \in A$ . Sean  $B \subset \mathbb{R}^m$  abierto y  $f(A) \subset B$  y  $g : B \rightarrow \mathbb{R}^p$  diferenciable en  $f(x_0)$ . Entonces, la composición  $g \circ f$  es diferenciable en  $x_0$  y

$$D(g \circ f)(x_0) = Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0)$$

**Teorema (Teorema del valor medio).**

- (i) Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable en un abierto  $A$ .  $\forall a, b \in A$  tales que el segmento de recta que une a con b esté en  $A$ , existe un punto  $c$  en ese segmento tal que:

$$f(b) - f(a) = Df(c)(b - a)$$

- (ii) Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  diferenciable en el conjunto abierto  $A$ . Supongamos que el segmento de recta que une  $x$  e  $y$  está contenido en  $A$  y  $f = (f_1, \dots, f_m)$ . Entonces, existen puntos  $c_1, \dots, c_m$  en ese segmento tales que:

$$f_i(y) - f_i(x) = Df_i(c_i)(y - x) \quad i = 1, \dots, m$$

*Demostración.* Lo vamos a hacer para una función  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  y lo aplicamos luego a cada coordenada de  $f$ .

Consideremos la función  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $h(t) = f((1-t)a + tb) \quad \forall t \in [0, 1]$  es continua en  $[0, 1]$  y por la regla de la cadena es derivable en  $]0, 1[$  con:

$$h'(t) = Df((1-t)a + tb)(b - a)$$

. El TVM para funciones de  $\mathbb{R}$  en  $\mathbb{R}$  nos da un  $t_0 \in ]0, 1[$  tal que:

$$f(b) - f(a) = h(1) - h(0) = h'(t_0) = Df((1-t_0)a + t_0b)(b - a)$$

Si tomamos  $c = (1-t_0)a + t_0b \in [a, b]$  obtenemos el  $c$  que buscábamos.

□

**Teorema (Matriz Hessiana).** Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  dos veces diferenciable en el conjunto abierto  $A$ . Entonces, la matriz  $D^2f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  en la base canónica está dada por:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{pmatrix}$$

donde cada derivada parcial está evaluada en el punto  $x = (x_1, \dots, x_n)$



**Proposición.** Si  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^m$  es dos veces diferenciable en el conjunto abierto  $A$  con  $D^2 f(x)$  continua  $\forall x \in A$ , entonces  $D^2 f(x)$  es simétrica  $\forall x \in A$ , es decir:

$$\frac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i}$$

**Teorema (Teorema de Taylor. Caso n=1).** Sea  $A \subseteq \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in A$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  con  $f \in \mathcal{C}^2(A)$ . Entonces,  $\forall x \in A \exists c$  comprendido entre  $x$  y  $a$  tal que:

$$f(x) = f(a) + \frac{Df(a)(x-a)}{1!} + \frac{(x-a)^t Hf(c)(x-a)}{2!}$$

Donde  $(x-a)$  es un vector columna.

## 6. Máximos y mínimos

**Definición.** Sea  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  donde  $A$  es abierto. Si existe un entorno de  $x_0 \in A$  en el que  $f(x_0)$  es máximo, es decir si  $f(x_0) \geq f(x) \forall x$  en el entorno, entonces  $x_0$  es un punto de máximo local y  $f(x_0)$  es un máximo local de  $f$ . Análogamente se define un mínimo local de  $f$ . Un punto es extremo si es un máximo o un mínimo local de  $f$ . Un punto  $x_0$  es un punto crítico si  $f$  es diferenciable en ese punto y  $Df(x_0) = 0$ .

**Teorema.**

- (i) Si  $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $\mathcal{C}^2$  definida en un abierto  $A$  y  $x_0$  es un punto crítico de  $f$  tal que  $H_{x_0}(f)$  es definida negativa, entonces  $f$  tiene un máximo local en  $x_0$ .
- (ii) Si  $f$  tiene un máximo local en  $x_0$ , entonces  $H_{x_0}(f)$  es semidefinida negativa.

Para el caso del mínimo, reemplazamos negativa por positiva. La matriz hessiana, es la vista anteriormente.

## 7. Clasificación de matrices según su signo

Si  $A_k$  es el determinante del menor de orden  $K$  de una matriz  $A$ , entonces:

- $A$  es definida positiva  $\iff A_k > 0 \forall k$
- $A$  es definida negativa  $\iff A_k > 0$  si  $K$  es par y  $A_k < 0$  si  $K$  es impar.

## 8. Teorema de la función Inversa

**Teorema (Teorema de la función inversa. Caso general.).** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n$  abierto,  $a \in A$  y  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  de clase 1. Si  $Df(a) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es invertible  $\implies \exists U \subset A$  abierto y  $\exists V$  abierto en  $\mathbb{R}^n$  tales que  $a \in U$ ,  $f(a) \in V$  y  $f|_U : U \rightarrow V$  es biyectiva, y por tanto existe la inversa de la función  $g = (f|_U)^{-1} : V \rightarrow U$  es de clase 1 y además:

$$Dg(f(a)) = (Df(a))^{-1}$$

Además, decir que  $Df(a)$  es invertible es lo mismo que decir que  $\det(Jf(a)) \neq 0$  Y decir que  $Dg(f(a)) = (Df(a))^{-1}$  es lo mismo que decir  $Jg(f(a)) = (Jf(a))^{-1}$

## 9. Teorema de la función implícita

**Teorema (Teorema de la función implícita).** Sea  $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  abierto y no vacío. Sea  $F : A \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función de clase 1. Fijando un  $(x_0, y_0) \in A$  tal que  $F(x_0, y_0) = 0$ . Si:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}(x_0, y_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(x_0, y_0) & \cdots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \neq 0$$

Entonces, existe  $U$  un entorno abierto de  $x_0$  en  $\mathbb{R}^n$  y también existe  $V$  un entorno abierto de  $y_0$  en  $\mathbb{R}^m$  tal que  $U \times V \subset A$  y  $\forall y \in V \exists! x \in U : F(x, y) = 0$

## 10. Teorema de Lagrange.

**Teorema.** Sean  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}^N$  un abierto,  $f \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$ ,  $g_1, \dots, g_k \in \mathcal{C}^1(A, \mathbb{R})$  ( $k$  restricciones). Llamo  $S = \{x \in A : g_1(x) = \dots = g_k(x) = 0\}$  y supongo  $1 \leq k < N$ .

Sea  $a \in S$  tal que  $f$  presenta un mínimo (respectivamente máximo) relativo condicionado a  $S$ . Entonces  $\exists \lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$  que verifican:

$$(i) \ (\lambda_0, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0), \lambda_0 \geq 0$$

$$(ii) \ \lambda_0 \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j} = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$$

Si, además  $r(Jg(a)) = k$ , donde  $g = (g_1, \dots, g_k) : A \rightarrow \mathbb{R}^k$  entonces puedo escoger  $\lambda_0 = 1$ .

*Nota.* Demostraremos el teorema para el caso en el que  $f$  presente un mínimo relativo. Para la prueba con máximo en lugar de mínimo, basta aplicar el resultado a  $-f$ .

*Demostración (método de penalización).*

$f$  presenta un mínimo relativo en  $a$  condicionado a  $S$ , luego

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \text{ tal que } B(a, \varepsilon_0) \subseteq A \text{ y } f(a) \leq f(x) \quad \forall x \in B(a, \varepsilon_0) \cap S$$

Paso 1

Afirmamos que  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \exists M > 0$  tal que

$$f(x) + |x - a|^2 + M \sum_{i=1}^k g_i(x)^2 > f(a) \quad \forall x \text{ tal que } |x - a| = \varepsilon$$

Para probarlo, supongamos lo contrario. Entonces

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall M > 0 \quad \exists x \in A : |x - a| = \varepsilon \text{ y } f(x) + |x - a|^2 + M \sum_{i=1}^k g_i(x)^2 \leq f(a)$$

Tomando  $M = n \in \mathbb{N}$ ,

$$\exists x_n \in A \text{ t.q. } \begin{cases} |x_n - a| = \varepsilon \\ f(x_n) + |x_n - a|^2 + n \sum_{i=1}^k g_i(x_n)^2 \leq f(a) \end{cases}$$

$\{x_n\}$  está acotada, pues  $|x_n - a| = \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Luego existe  $\{x_{\sigma(n)}\}$  sucesión parcial de  $\{x_n\}$  tal que  $\{x_{\sigma(n)}\} \rightarrow x^*$ , y se verifica que  $|x^* - a| = \varepsilon$  ( $|x^* - a| = \lim |x_{\sigma(n)} - a| = \varepsilon$ ).

Reescribiendo tenemos que

$$f(x_n) + |x_n - a|^2 - f(a) \leq -n \sum_{i=1}^k g_i(x_n)^2 \quad (1)$$

Dividiendo por  $-n$  y tomando para cada  $n$   $\sigma(n)$ :

$$\frac{f(x_{\sigma(n)})}{-\sigma(n)} + \frac{\varepsilon^2}{-\sigma(n)} - \frac{f(a)}{-\sigma(n)} \geq \sum_{i=1}^k g_i(x_{\sigma(n)})^2$$

Y tomando límites:

$$0 \geq \sum_{i=1}^k g_i(x^*) \implies g_i(x^*) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k \implies x^* \in S$$

Es decir,  $x^* \in B(a, \varepsilon_0) \cap S \implies f(x^*) \geq f(a) \quad (*)$ . Sabemos que

$$f(x_{\sigma(n)}) \leq f(a) - \underbrace{\varepsilon^2 - n \sum_{i=1}^k g_i(x_{\sigma(n)})^2}_{\geq 0 \text{ por (1)}}$$

Luego,

$$f(x_{\sigma(n)}) \leq f(a) - \varepsilon^2 \implies f(x^*) \leq f(a) - \varepsilon^2 < f(a)$$

lo cual es una contradicción con (\*), por lo que **queda probado el paso 1**.

**Paso 2**

Veamos que  $\forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \exists x^\varepsilon \in A$  que verifica que  $|x - a| < \varepsilon$  y  $\exists (\lambda_0^\varepsilon, \dots, \lambda_k^\varepsilon) \in \mathbb{R}^{k+1}$  tal que

$$\begin{cases} |(\lambda_0^\varepsilon, \dots, \lambda_k^\varepsilon)| = 1 \\ \lambda_0^\varepsilon \left[ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^\varepsilon) + 2(x_j^\varepsilon - a_j) \right] + \sum_{i=1}^k \lambda_i^\varepsilon \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^\varepsilon) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N \end{cases}$$

Recordemos:  $f(a) = f(a) + |a - a|^2 + M \sum_{i=1}^k g_i(a)^2$  (porque  $a \in S$ ).

Definimos  $F(x) := f(x) + |x - a|^2 + M \sum_{i=1}^k g_i(x)^2 \in \mathcal{C}^1$ . Por el teorema de Weierstrass,  $\exists \min_{\bar{B}(a, \varepsilon)} F \implies \exists x^\varepsilon \in \bar{B}(a, \varepsilon)$  tal que

$$F(x^\varepsilon) = \min_{\bar{B}(a, \varepsilon)} F \left( \underbrace{\leq F(a)}_{=f(a)} < \underbrace{F \restriction_{\partial B(a, \varepsilon)}}_{\text{Paso 1}}(x) \implies x^\varepsilon \in B(a, \varepsilon) \text{ (es interior)} \right)$$

Por tanto  $x^\varepsilon$  es un mínimo relativo de  $F$  en  $B(a, \varepsilon)$ , que es un abierto, luego

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x^\varepsilon) = 0 < \quad \forall j = 1, \dots, N$$

Y vemos que por el paso 1, además:

$$\left[ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^\varepsilon) + 2(x_j^\varepsilon - a_j) \right] + \sum_{i=1}^k M 2g_i(x^\varepsilon) \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^\varepsilon) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$$

Ahora ajustamos las constantes, dividiendo por el módulo del vector de los candidatos a

$$\lambda_i, \text{ que es } \sqrt{\underbrace{1}_{\lambda_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^k 4M^2 g_i(x^\varepsilon)^2}_{\lambda_i}} \quad (\lambda_i \text{ son los candidatos}).$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^k 4M^2 g_i(x^\varepsilon)^2}} \left( \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^\varepsilon) + 2(x_j^\varepsilon - a_j) \right) + \sum_{i=1}^k \frac{M 2g_i(x^\varepsilon)}{\sqrt{1 + \sum_{i=1}^k 4M^2 g_i(x^\varepsilon)^2}} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^\varepsilon) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$$

Ahora, escogemos  $\lambda_0^\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^k 4M^2 g_i(x^\varepsilon)^2}}$ ,  $\lambda_i^\varepsilon = \frac{M 2g_i(x^\varepsilon)}{\sqrt{1+\sum_{i=1}^k 4M^2 g_i(x^\varepsilon)^2}} \quad \forall i = 1, \dots, k$  y se verifica que  $|(\lambda_0^\varepsilon, \dots, \lambda_k^\varepsilon)| = 1$ , y además  $\lambda_0^\varepsilon > 0$ .

**Conclusión.**

Escojo  $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{n}$ ,  $n \in \mathbb{N} - \{1\} \xrightarrow{\text{Paso } 2} \exists (\lambda_0^n, \dots, \lambda_k^n)$  tales que

$$(i) \quad |x^n - a| < \frac{\varepsilon_0}{n}$$

$$(ii) \quad |(\lambda_0^n, \dots, \lambda_k^n)| = 1, \quad \lambda_0^n > 0$$

$$(iii) \quad \lambda_0^n \left[ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^n) + 2(x_j^n - a_j) \right] + \sum_{i=1}^k \lambda_i^n \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^n) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$$

Ahora, por (i),  $\{x^n\} \rightarrow a$ . En (ii) tenemos una sucesión acotada de vectores  $\xRightarrow{\text{Bolz.-Weierstrass}} \exists \{(\lambda_0^{\sigma(n)}, \dots, \lambda_k^{\sigma(n)})\} \rightarrow (\lambda_0, \dots, \lambda_k)$  con módulo 1 y  $\lambda_0 \geq 0$ .

En (iii) reescribo sustituyendo  $n$  por  $\sigma(n)$ :

$$\lambda_0^{\sigma(n)} \left[ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^{\sigma(n)}) + 2(x_j^{\sigma(n)} - a_j) \right] + \sum_{i=1}^k \lambda_i^{\sigma(n)} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^{\sigma(n)}) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$$

Y tomando límites:

$$\lambda_0 \left[ \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + 0 \right] + \sum_{i=1}^k \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, N$$

Donde  $(\lambda_0, \dots, \lambda_k) \neq (0, \dots, 0)$ , porque  $|(\lambda_0, \dots, \lambda_k)| = 1$ . **Queda probada la primera afirmación del teorema.**

□