Universidad de Granada

Análisis Matemático I

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

Introducción.

El objetivo de este curso es el estudio de las funciones de varias variables, es decir, de funciones $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Para ello, empezaremos caracterizando el espacio $\mathbb{R}^N$, y proseguiremos intentando traspasar los resultados principales sobre funciones reales de variable real a nuestro campo de estudio, así como enunciando otros nuevos.

Es por esto que es fundamental haber cursado con aprovechamiento las asignaturas de *Cálculo I y II*, que tratan exclusivamente sobre funciones reales de variable real.

Aunque nos centraremos en funciones en el espacio $\mathbb{R}^N$, muchos de los resultados que obtendremos son igual de válidos en un espacio métrico en general, e incluso en espacios topológicos.

1. Topología de un espacio métrico.

1.1. Concepto de espacio métrico. El espacio métrico $\mathbb{R}^N$.

Definición (Espacio métrico). Consideremos un conjunto X cualquiera, y una aplicación $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ que cumple las siguientes propiedades:

(i) $d(x, y) \geq 0 \ \ \forall x, y \in X$.

(ii) $d(x, y) = 0 \iff x = y \ \ \forall x, y \in X$.

(iii) $d(x, y) = d(y, x) \ \ \forall x, y \in X$.

(iv) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \ \ \forall x, y, z \in X$. *(desigualdad triangular)*

Entonces, se dice que el par (X, d) es un *espacio métrico.*

Nota. En adelante, entenderemos $\mathbb{R}^N$ como el espacio métrico $(\mathbb{R}^N, d)$, siendo d la distancia usual **(distancia euclídea)** dada por:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} (y_i - x_i)^2} \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N.$$

Existen otras distancias en $\mathbb{R}^N$. Las más destacadas son las siguientes:

(i) $d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

(ii) $d_\infty(x, y) = máx\{|x_i - y_i| : \ i = 1, \dots, N\} \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

(iii) $d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{N} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^N$.

Definición. Sean (X, d) y (X, d') dos espacios métricos sobre un mismo conjunto X. Se dice que las distancias d y d' son *equivalentes* si, y solo si,

$$\exists k_1, k_2 > 0 : \ k_1 d(x, y) \leq d'(x, y) \leq k_2 d(x, y) \ \ \forall x, y \in X.$$

Proposición. *En $\mathbb{R}^N$, todas las distancias mencionadas anteriormente son equivalentes entre sí. En particular, la distancia euclídea es equivalente a todas ellas.*

1.2. Conceptos topológicos.

Definición (Bola abierta). Sea (X, d) un espacio métrico, y fijemos un $x \in X$ y un $\varepsilon > 0$. Se llama *bola abierta de centro x y radio* ε al conjunto $B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$.

Definición (Bola cerrada). De forma análoga, se define la *bola cerrada de centro x y radio* ε como el conjunto $\bar{B}(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon\}$.

Definición (Conjunto abierto). Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $A \subseteq X$. Decimos que A *es abierto* $\iff \forall a \in A\ \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, $\forall x \in X\ \forall \varepsilon > 0$ se tiene que $B(x, \varepsilon)$ es un conjunto abierto.*

Demostración. Sea $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ arbitrario. Para demostrar que $B(x_0, \varepsilon_0)$ es un abierto, tenemos que encontrar un $\varepsilon > 0$ tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq B(x_0, \varepsilon_0)$, y por lo tanto comprobar que se verifica que $\forall y \in B(x, \varepsilon) \Rightarrow y \in B(x_0, \varepsilon_0)$.

Sea $y \in B(x, \varepsilon)$ cualquiera. Consideremos $r = d(x, x_0)$, y tomemos $\varepsilon = \varepsilon_0 - r$. Queremos demostrar que $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$. Para ello, veamos que $d(x_0, y) < \varepsilon_0$. En efecto, por la desigualdad triangular se cumple que:

$$d(x_0, y) \leq d(x, x_0) + d(x, y) < r + \varepsilon = r + \varepsilon_0 - r = \varepsilon_0$$

Luego queda demostrado que $y \in B(x_0, \varepsilon_0)$, y por tanto podemos afirmar que para todo punto $x \in B(x_0, \varepsilon_0)$ se puede encontrar una bola abierta centrada en él, tal que todos sus puntos están en el conjunto de origen. $\square$

Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Si $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de subconjuntos abiertos de X, entonces $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es abierto.*

(ii) *Si $\{A_1, \ldots, A_n\}$ es una familia finita de abiertos de X, entonces $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ es abierto.*

(iii) *$X, \emptyset$ son abiertos.*

Definición (Punto interior). Sea (X, d) un espacio métrico, y consideremos $A \subseteq X$, $a \in A$. Se dice que *a es un punto interior de A* si, y solo si, $\exists \varepsilon_0 > 0 : B(a, \varepsilon_0) \subseteq A$. Definimos $int(A) = \mathring{A} = \{a \in A \mid a \textit{ es punto interior de } A\}$.

Proposición. *Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *$\mathring{A} \subseteq A$.*

(ii) *$\mathring{A}$ es abierto.*

(iii) *Si $B \subseteq A$ es un subconjunto abierto de A, entonces $B \subseteq \mathring{A}$. Es decir, $\mathring{A}$ es el abierto más grande contenido en A.*

(iv) *$\mathring{A} = \bigcup \{B \subseteq A \mid B \text{ es abierto}\}$.*

(v) *A es abierto $\iff \mathring{A} = A$.*

(vi) *$int(int(A)) = int(A)$.*

(vii) *Si $A \subseteq B$, entonces $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.*

Definición (Conjunto cerrado). Sea (X, d) un espacio métrico, y $F \subseteq X$. Se dice que el conjunto F *es cerrado* $\iff$ $X - F$ *es abierto.*

Proposición. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Entonces,* $\forall x \in X$ $\forall \varepsilon > 0$ *se tiene que* $\bar{B}(x, \varepsilon)$ *es un conjunto cerrado.*

Proposición. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) *Si* $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ *es una familia de cerrados de* X*, entonces* $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda$ *es cerrado.*

(ii) *Si* $\{F_1, \ldots, F_n\}$ *es una familia finita de cerrados de* X*, entonces* $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ *es cerrado.*

(iii) $X, \emptyset$ *son cerrados.*

Definición (Clausura). Sea (X, d) un espacio métrico. Se llama *clausura o cierre de* A al conjunto $\bar{A} = X - int(X - A)$.

Proposición. *Sea* (X, d) *un espacio métrico, y* $A \subseteq X$*. Entonces, se verifican las siguientes propiedades:*

(i) $A \subseteq \bar{A}$.

(ii) $\bar{A}$ *es cerrado.*

(iii) *Si* $B \subseteq X$ *es un subconjunto cerrado de* X *tal que* $A \subseteq B$*, entonces* $\bar{A} \subseteq B$*. Es decir,* $\bar{A}$ *es el cerrado más pequeño que contiene a* A*.*

(iv) $\bar{A} = \bigcap \{F \subseteq X \mid F \text{ es cerrado y } A \subseteq F\}$.

(v) A *es cerrado* $\iff$ $\bar{A} = A$.

(vi) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

(vii) *Si* $A \subseteq B$*, entonces* $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

Definición (Frontera). Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Llamamos *frontera de* A al conjunto $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$.

Proposición. *Sea* (X, d) *un espacio métrico, y* $A \subseteq X$*. Entonces, se verifica lo siguiente:* $x \in \partial A \iff \forall \varepsilon > 0\ B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ *y* $B(x, \varepsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset$.

Definición (Punto de acumulación). Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Dado $x \in X$, decimos que x *es punto de acumulación de* A $\iff$ $\forall \varepsilon > 0\ B(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\}) \neq \emptyset$. Definimos $A' = \{x \in X \mid x \text{ es punto de acumulación de } A\}$.

Proposición. *Sea* (X, d) *un espacio métrico. Entonces, se verifican las siguientes afirmaciones:*

(i) $\mathring{A} = X - \overline{X - A}$

(ii) $\bar{A} = A \cup \partial A$.

(iii) $\bar{A} = A \cup A'$

(iv) $\partial A \subseteq A'$

(v) $X = int(A) \cup \partial A \cup int(X - A)$. *Además, la unión es disjunta dos a dos.*

2. Sucesiones en $\mathbb{R}^N$.

Definición (Sucesión en $\mathbb{R}^N$). Una sucesión en $\mathbb{R}^N$ es una aplicación $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^N$ que a cada $n \in \mathbb{N}$ le hace corresponder un $x(n) \in \mathbb{R}^N$. Por simplicidad, al elemento imagen de n se le denomina x_n, y la aplicación x se denota $\{x_n\}$.

Definición (Convergencia de sucesiones). Sea (X, d) un espacio métrico, $A \subseteq X$ y $x \in X$. Decimos que una sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A converge a x si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_o \in \mathbb{N} : \;\; n \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon.$$

Nota. Este concepto no depende de la distancia equivalente elegida.

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$, $x \in \mathbb{R}^N$, y $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A. Adoptemos la notación $x_n = (x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^N)$, y $x = (x^1, x^2, \ldots, x^N)$. Entonces, se verifica que:*

$$\{x_n\} \to x \iff \{x_n^j\} \to x^j.$$

Definición. Sea (X, d) un espacio métrico, y $x \in X$. Consideremos, para cada $n \in \mathbb{N}$, un punto $a_n \in X$. Entonces, decimos que $d(a_n, x) \to 0 \iff \{a_n\} \to x$.

Definición (Conjunto acotado). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Decimos que A *está acotado* si, y solo si, $\exists R > 0 : A \subseteq B(0, R)$.

Definición (Sucesión acotada). Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de R^N. Entonces, decimos que $\{x_n\}$ *está acotada* sí, y solo sí, $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

Proposición. *Si una sucesión $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotada, entonces $\forall i = 1, \ldots, n$ la sucesión $\{x_n^i\}$ es acotada (en $\mathbb{R}$).*

Nota. Si un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ es acotado, entonces cualquier sucesión de puntos de A es acotada.

Teorema (Bolzano-Weierstrass). *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ acotada. Entonces, existe una sucesión parcial suya $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente.*

Definición (Sucesión de Cauchy). Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Decimos que $\{x_n\}$ es una *sucesión de Cauchy* $\iff \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists n_o \in \mathbb{N} : \;\; n, m \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Teorema ($\mathbb{R}^N$ es completo). *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$. Entonces:*

$$\{x_n\} \text{ es de Cacuchy } \iff \{x_n\} \text{ es convergente.}$$

Proposición. *Sea $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ con $\{x_n\} \to x \in \mathbb{R}^N$. Entonces, toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ es convergente a x.*

3. Funciones continuas en $\mathbb{R}^N$.

Definición (Función continua). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ y $a \in A$. Decimos que *f es continua en a* si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \; x \in A, \; d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Además, se dice que f es continua si lo es en todos sus puntos.

Proposición (Caracterización de continuidad). *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Entonces:*

$$f \text{ es continua en } a \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \text{ con } \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(a).$$

Definición (Continuidad uniforme). Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Se dice que f es uniformemente continua si, y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 : \; x, y \in A, \; d(x, y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon.$$

Definición (Conjunto compacto). Sea (X, d) un espacio métrico, y sea $\emptyset \neq A \subseteq X$.

$$A \text{ es compacto} \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \;\; \exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A.$$

Definición (Recubrimiento abierto). Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$. Se dice que una familia $\{O_i, i \in I\}$ de abiertos es un *recubrimiento abierto* de A si

$$A \subseteq \bigcup_{i \in I} O_i$$

También, si R_1 y R_2 son recubrimientos abiertos de A y $R_1 \subseteq R_2$, se dice que R_1 es un *subrecubrimiento abierto* de R_2.

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto. Entonces existe un subrecubrimiento finito de A.*

Proposición (Caracterización de cerrados). *Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Entonces, son equivalentes:*

(i) *A es cerrado.*

(ii) *$\forall \{x_n\} \subseteq A$ convergente a un $x \in X$, se verifica que $x \in A$.*

Demostración. Veamos las dos implicaciones:

$\boxed{\Rightarrow}$ Supongamos $A \subseteq X$ un conjunto cerrado. Entonces, $X - A$ es abierto. Sea $\{x_n\}$ una sucesión de puntos de A que converge a un $x \in X$. Para comprobar que, de hecho, $x \in A$, argumentamos por reducción al absurdo:

Supongamos $x \notin A$. Entonces, $x \in X - A$, y por ser este último conjunto abierto, encontramos un $\varepsilon > 0$ *tal que* $B(x, \varepsilon) \subseteq (X - A)$. Pero por ser x el límite de la sucesión $\{x_n\}$, se tiene que $\exists n_o \in \mathbb{N} : n \geq n_o \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$. Es decir, a partir de cierto índice en adelante, $x_n \in B(x, \varepsilon)$ *con* $x_n \in A \; \forall n \in \mathbb{N}$. Esto se contradice con el hecho de que $B(x, \varepsilon) \subseteq (X - A)$, pues encontramos en dicha bola puntos x_n que no pertenecen a $X - A$.

Por tanto, concluimos que $x \in A$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Sea $A \subseteq X$, y supongamos que se verifica que $\forall \{x_n\} \subseteq A$ *tal que* $\{x_n\} \to x \in X$, *se tiene que* $x \in A$. Para ver que A es cerrado, utilizaremos la siguiente caracterización de conjuntos cerrados:

$$A \textit{ es cerrado} \iff \bar{A} = A$$

Si recordamos, se define la frontera de A como $\partial A = \bar{A} - \mathring{A}$. Por tanto, la equivalencia anterior quedaría así: A *es cerrado* $\iff \partial A \cup \mathring{A} = A$. Para comprobar esta última igualdad, veamos las dos inclusiones:

$\boxed{\subseteq}$ Sabemos por la definición del conjunto de puntos interiores de A, que $\mathring{A} \subseteq A$. Comprobemos entonces que $\partial A \subseteq A$:

Sea $x \in \partial A$ cualquiera. Por una caracterización de la frontera de A, sabemos que $\forall \varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Si tomamos $\varepsilon = \frac{1}{n} > 0$ *con* $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $B(x, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$, es decir, $\exists a_n \in B(x, \frac{1}{n}) \cap A$ *tal que* $d(x, a_n) < \varepsilon = \frac{1}{n}$. Podemos construir entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{a_n\}$.

Así, se tiene que $0 < d(x, a_n) < \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde concluimos que $d(x, a_n) \to 0$. Por definición, esto significa que $\{a_n\} \to x$, lo que por hipótesis implica, al ser $\{a_n\}$ una sucesión convergente de puntos de A, que $x \in A$. Por tanto, se verifica que $\partial A \subseteq A$.

$\boxed{\supseteq}$ Esta inclusión es trivial, pues sabemos que $A \subseteq \bar{A}$, y por tanto $A \subseteq \partial A \cup \mathring{A} = \bar{A}$.

De esta forma, queda probada la equivalencia. □

Proposición (Caracterización de compactos). *Sea* (X, d) *un espacio métrico, y sea* $A \subseteq X$*. Entonces:*

$$A \textit{ es compacto} \iff A \textit{ es cerrado y acotado.}$$

Proposición. *Sea* $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^N$ *convergente a un* $x_o \in \mathbb{R}^N$*. Entonces, el conjunto* $A = \{x_n : \; n = 0, 1, 2, \dots\}$ *es compacto.*

3.1. Clasificación de conjuntos en $\mathbb{R}^N$

Definición (Conjunto convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *convexo* si $\forall x, y \in A$ se tiene que el segmento de extremos x e y está incluido en A. En otras palabras:

$$A \textit{ convexo} \iff [x, y] = \{tx + (1-t)y : \; t \in [0, 1]\} \subseteq A.$$

Definición (Poligonalmente convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *poligonalmente convexo* si $\forall x, y \in A$ existe una poligonal que los une y no se sale de A. En otras palabras: A *poligonalmente convexo* $\iff \exists \{x = a_0, a_1, \dots, a_k = y\} \subseteq A$ tal que:

$$\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i] \subseteq A.$$

Definición (Conjunto arco-conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *arco-conexo(conexo por arcos)* si $\forall x, y \in A$ existe un camino incluido en A que los une. En otras palabras, A *es conexo por arcos* $\iff \exists \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a,b]) \subseteq A.$$

Definición (Conjunto no conexo). Decimos que un conjunto $A \in \mathbb{R}^N$ es *NO conexo* si existen U, V abiertos en $\mathbb{R}^N$ tales que:

$$U \cap A \neq \emptyset; \quad V \cap A \neq \emptyset; \quad A \subseteq U \cup V; \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Nota. La misma definición se aplica para un espacio topológico (X, τ).

Definición (Conjunto conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice conexo si no es no conexo. Equivalentemente, $\forall$ U, V abiertos en $\mathbb{R}^N$ tales que $U \cap A \neq \emptyset$, $V \cap A \neq \emptyset$, $A \subseteq U \cup V$, se tiene que forzosamente $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto arco-conexo. Entonces, A es convexo.*

Demostración. Sean $x, y \in A$, y supongamos sin pérdida de generalidad que $x \leq y$. Sabemos que por ser A arco-conexo, $\exists \varphi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ función continua verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a,b]) \subseteq A.$$

Como φ es una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado, aplicamos el **teorema del valor intermedio** en $\mathbb{R}$, y obtenemos que $\varphi([a,b])$ es un intervalo. Por ser un intervalo, verificará que $\forall \alpha, \beta \in \varphi([a,b])$ *con* $\alpha \leq \beta$, $\ [\alpha, \beta] \subseteq \varphi([a,b])$.

Por tanto, como $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi([a,b])$, concluimos que:

$$[\varphi(a),\ \varphi(b)] = [x, y] \subseteq \varphi([a,b]) \subseteq A.$$

Así, hemos demostrado que $\forall x, y \in A \ \ [x, y] \subseteq A$, y por tanto, A es convexo. □

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ convexo. Entonces, A es arco-conexo.*

Demostración.
Fijemos $x, y \in A$ arbitrarios, y construyamos la aplicación $\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ dada por:

$$\varphi(t) = (1-t)x + ty \ \ \forall t \in [0,1]$$

Una primera observación es que $\varphi([0,1]) = \{(1-t)x + ty : t \in [0,1]\} = [x, y] \subseteq A$ por ser A convexo. También se desprende de la definición de φ que $\varphi(0) = x$ y $\varphi(1) = y$.

Para comprobar que φ es continua, utilicemos la caracterización de la continuidad por sucesiones:

Sea $\{x_n\} \subseteq [0,1]$ *con* $\{x_n\} \to a \in [0,1]$. Entonces, $\{\varphi(x_n)\} = \{(1-x_n)x + x_n y\}$.
Apliquemos ahora propiedades de las sucesiones convergentes, y obtenemos que:

$$\{\varphi(x_n)\} \to (1-a)x + ay = \varphi(a).$$

Entonces, $\forall \{x_n\} \subseteq [0,1]$ *con* $\{x_n\} \to a \Rightarrow \{\varphi(x_n)\} \to \varphi(a)$, por lo que φ es continua.

Así, queda probado que A es conexo por arcos. □

Proposición. *Sea $A \in \mathbb{R}^N$ arco-conexo. Entonces, A es conexo.*

Proposición. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}^N$ abierto y conexo por arcos. Entonces, A es poligonalmente convexo.*

3.2. Continuidad en espacios topológicos. Topología inducida.

Definición (Continuidad en espacios topológicos). Sean (X, τ_x), (Y, τ_y) dos espacios topológicos, y sea $f : X \longrightarrow Y$. Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f^{-1}(B) \in \tau_x \ \ \forall B \in \tau_y.$$

Definición (Topología inducida). Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Entonces, $\tau_A = \{B \cap A : \ B \in \tau\}$ es la *topología inducida en A*.

Proposición (Caracterización de abiertos en topología inducida). *Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Si (A, τ_A) es el espacio topológico inducido en A, entonces:*

$$B' \in \tau_A \iff \exists B \in \tau : \ B' = B \cap A.$$

Proposición. *Sea (X, τ) un espacio topológico, y $A \subseteq X$. Entonces, A es no conexo si, y solo si, existen U, V* ***abiertos en (A, τ_A)*** *tales que:*

$$U \neq \emptyset \neq V; \quad A \subseteq U \cup V; \quad U \cap V = \emptyset.$$

Definición (Continuidad en topología inducida). Sean (X, τ_x), (Y, τ_y) dos espacios topológicos, $A \subseteq X$, y $f : A \longrightarrow Y$. Entonces:

$$f \text{ es continua} \iff f \text{ es continua en } (A, \tau_A).$$

3.3. Teoremas sobre funciones continuas en $\mathbb{R}^N$

Teorema (Weierstrass). *Sea (X, d) un espacio métrico, $\emptyset \neq A \subseteq X$ compacto, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continua en A. Entonces, $\exists x_1, x_2 \in A : \ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) \ \ \forall x \in A$. En otras palabras, la función f alcanza su mínimo y su máximo.*

Teorema (Weierstrass generalizado). *Sean (X, d), (Y, d) espacios métricos, $\emptyset \neq A \subseteq X$ compacto, y $f : A \longrightarrow Y$ continua. Entonces, $f(A)$ es compacto.*

Teorema (Valor Intermedio). *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ arco conexo, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ continua. Entonces, $f(A)$ es arco-conexo en $\mathbb{R}^M$.*

Demostración. Sean $X, Y \in f(A)$. Entonces, $\exists x, y \in A : X = f(x), \ Y = f(y)$. Como A es arco-conexo, $\exists \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continua tal que $\varphi(a) = x, \ \varphi(b) = y, \ \varphi([a, b]) \subseteq A$.

Ahora, definimos $\psi := f \circ \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^M$, que es continua por ser composición de funciones continuas. Entonces, se verifica que:

$$\psi(a) = f(\varphi(a)) = f(x) = X; \quad \psi(b) = f(\varphi(b)) = f(y) = Y; \quad \psi([a, b]) = f(\varphi([a, b])) \subseteq f(A).$$

Por tanto, queda probado que $f(A)$ es arco-conexo en $\mathbb{R}^M$. $\square$

Teorema (Valor Intermedio revisitado). *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ conexo, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$ continua. Entonces, $f(A)$ es conexo en $\mathbb{R}^M$.*

Teorema (Heine-Cantor). *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^N$ continua. Entonces f es uniformemente continua en A.*

Demostración. f es continua en A $\implies$ f es continua en a $\forall a \in A$. Ahora, sea $\varepsilon > 0$ fijo.

$$\forall a \in A \quad \exists \delta = \delta_a > 0 \;\; \forall x \in A \;\; d(x,a) < \delta_a \implies d(f(x), f(a)) < \varepsilon$$

Tomamos un recubrimiento abierto de A, y como A es compacto, encontramos un subrecubrimiento finito.

$$A \subseteq \bigcup_{a \in A} B(a, \frac{\delta_a}{2}) \implies \exists a_1, \ldots, a_n \in A : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B\left(a_i, \frac{\delta_{a_i}}{2}\right)$$

Por esta última inclusión:

$$\forall x \in A \quad \exists i \in \{1, \ldots, n\} : x \in B\left(a_i, \frac{\delta_{a_i}}{2}\right) \cap A \implies f(x) \in B(f(a_i), \varepsilon)$$

Sean $\delta = \text{mín}\left\{\frac{\delta_{a_i}}{2} : i \in \{1, \ldots, n\}\right\} > 0$ y $y \in A : d(x,y) < \delta < \delta_{a_i}$ para un $x \in A$ fijo. Tomamos el a_i proporcionado por la proposición anterior para x.

$$d(y, a_i) \leq d(y, x) + d(x, a_i) < \delta_{a_i} \implies y \in B(a_i, \delta_{a_i}) \implies f(y) \in B(f(a_i), \varepsilon)$$

Finalmente,

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f(a_i)) + d(f(a_i), f(y)) < \varepsilon$$

Para cualquier ε para el que se desee que se verifique la condición de la continuidad uniforme, basta tomar $\frac{\varepsilon}{2}$ en la continuidad. □

Demostración alternativa. La condición para la continuidad uniforme es la siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in A : d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Vamos a proceder por reducción al absurdo, para lo cual negamos esta condición:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in A : d(x,y) < \delta \wedge d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$$

Tomamos este ε_0, lo que nos da, para cada $\delta > 0$, un par de puntos x e y que cumplen la propiedad expresada arriba. Tomamos $\delta = \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Esto nos da dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tales que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \wedge d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$$

Por ser A compacto, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos da dos sucesiones parciales $\{x_{n_k}\}$ a x_0 e $\{y_{n_k}\}$ a y_0. Por tanto:

$$d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \wedge d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon_0$$

Sin embargo, $\{x_{n_k}\}$ e $\{y_{n_k}\}$ convergen al mismo punto (por converger su distancia a cero), y como f es continua, esta proposición no puede ser verdadera. Hemos llegado por tanto a una contradicción, luego f debe ser uniformemente continua. $\square$

4. Límite funcional en $\mathbb{R}^N$.

Definición (Límite funcional). Sean $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, $a \in A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Entonces f tiene límite l en $x = a$, y se denota $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ si:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \left.\begin{array}{r} 0 < d(x,a) < \delta \\ x \in A \end{array}\right\} \implies d(f(x), l) < \varepsilon$$

Proposición (Caracterización punto de acumulación). *Sea (X, d) un espacio métrico, y $A \subseteq X$. Consideremos un punto $x \in X$. Son equivalentes:*

(i) *x es punto de acumulación de A.*

(ii) *$\exists \{a_n\} \subseteq A - \{x\}$ tal que $\{a_n\} \to x$.*

(iii) *$\forall \varepsilon > 0$ $B(x, \varepsilon) \cap (A - \{x\})$ es un conjunto infinito.*

5. Funciones derivables en $\mathbb{R}^N$.

5.1. Concepto de función derivable.

Sea A un abierto de $\mathbb{R}^N$. Partimos de la siguiente observación:

$\forall x_0 \in A \quad \exists \delta > 0 : B(x_0, \delta) \subset A \implies \forall v \in \mathbb{R}^N \quad \exists \varepsilon > 0 : [\, t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \implies x_0 + tv \in B(x_0, \delta)\,]$

En particular, si $|v| = 1 \implies \varepsilon = \delta$.

Definición (Función derivable). Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$, y $x_0 \in A$. Se dice que f es derivable en x_0, según Fréchet, si

$$\exists L \in Lin(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M) : \lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - f(x_0) - L(x - x_0)|}{|x - x_0|} = 0$$

Notamos $Df(x_0) = L$.

Nota (1).

(*i*) El límite tiene sentido porque $x_0 \in A'$.

(ii) El límite anterior es equivalente a $\lim_{y\to 0} \frac{|f(x_0+y)-f(x_0)-L(y)|}{|y|}$.

Nota (2). A es abierto $\implies$ L (si existe) es única. De aquí se exige que A sea un abierto.

Demostración (Nota 2). Suponemos que $\exists L_1, L_2 \in Lin(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^M)$ tales que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)-L_1(x-x_0)|}{|x-x_0|} = 0 = \frac{|f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)|}{|x-x_0|}$$

Entonces, dado un $x \in A$:

$$\frac{|L_1(x-x_0)-L_2(x-x_0)|}{|x-x_0|} \leq \frac{|f(x)-f(x_0)-L_1(x-x_0)|}{|x-x_0|} + \frac{|f(x)-f(x_0)-L_2(x-x_0)|}{|x-x_0|}$$

$$\implies \lim_{x\to x_0} \frac{|(L_1-L_2)(x-x_0)|}{|x-x_0|} = 0$$

(Terminar) $\square$

Proposición. *En los mismos términos: si f es derivable en x_0 $\implies$ f es continua en x_0.*

Demostración. Para probar esta proposición, hay que probar que $\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = 0$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)) = \underbrace{\lim_{x\to x_0}(f(x)-f(x_0)-L(x-x_0))}_{=0\ (f\ \text{derivable})} + \underbrace{\lim_{x - x_0} L(x-x_0)}_{=0\ (L\ \text{lineal}\ \implies\ \text{continua})} = 0$$

$\square$

Definición (Derivada direccional). Sea $v \in \mathbb{R}^N$, con $|v| = 1$. f es derivable en x_0 en la dirección v si:

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = D_v f(x_0) \iff$$

$$\iff f_1, f_2, \cdots f_m \text{ derivable direccionalmente en } x_0 \text{ en la dirección v.} \iff$$

$$\iff D_v f(x_0) = (D_v f_1(x_0), \cdots, D_v f_m(x_0))$$

Proposición. *Sea f derivable en x_0 $\implies$ f derivable a lo largo de la dirección v y $D_v f(x_0) = Df(x_0)(v)$*

Demostración. f derivable en x_0. Tomo $y = tv$. Podemos ver entonces:

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)-Df(x_0)(tv)}{t} = 0 \implies$$

$$\implies \lim_{t\to 0} \left| \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - Df(x_0)(\frac{tv}{t}) \right| \implies \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} - Df(x_0)(v)$$

$$\implies \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+tv)-f(x_0)}{t} = Df(x_0)(v)$$

Hemos probado que $\exists D_v f(x_0)$ $\square$

6. Matriz asociada a $Df(x_0)$.

Si $f : B \longrightarrow \mathbb{R}^M$, con $\emptyset \neq B \in \mathbb{R}^N$, la matriz asociada a $Df(x_0)$ es una matriz de orden $M \times N$, (que notaremos A en lo sucesivo), como ya sabemos, por ser una aplicación lineal. Ahora, nuestro siguiente objetivo es encontrar esa matriz. Observemos cómo podemos obtenerla por filas, aplicándole los vectores de la base canónica:

$$e_i = (0, \ldots, \overset{i)}{1}, \ldots, 0) \implies Df(x_0)(e_i) = D_{e_i}f(x_0) = Ae_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ \vdots \\ a_{Mi} \end{pmatrix}$$

Tras esta observación, vamos a caracterizar cada elemento a_{ji}:

$$D_{e_i}f(x_0) =$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + te_i) - f(x_0)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{f_1(x_0 + (0, \ldots, \overset{i)}{t}, \ldots, 0) - f_1(x_0)}{t}, \ \cdots, \ \frac{f_M(x_0 + (0, \ldots, \overset{i)}{t}, \ldots, 0) - f_M(x_0)}{t} \right) =$$

$$\left(\lim_{t\to 0} \frac{f_1(x_0 + (0, \ldots, \overset{i)}{t}, \ldots, 0) - f_1(x_0)}{t}, \cdots, \lim_{t\to 0} \frac{f_M(x_0 + (0, \ldots, \overset{i)}{t}, \ldots, 0) - f_M(x_0)}{t} \right) =$$

$$(D_{e_i}f_1(x_0, \ldots, D_{e_i}f_M(x_0))) = \left(\frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_i}, \ldots, \frac{\partial f_M(x_0)}{\partial x_i} \right) \implies a_{ji} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x_0)$$

Por tanto, A queda de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_N}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_M(x_0)}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_M(x_0)}{\partial x_N}(x_0) \end{pmatrix}$$

Deducimos que:

$$\exists \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} := D_v f(x_0) \iff f_1, \ldots, f_M \text{ son derivables direc. en } x_0 \text{ en la dir. } v.$$

Además, $D_v f(x_0) = (D_v f_1(x_0), \ldots, D_v f_M(x_0))$.