UNIVERSIDAD DE GRANADA

Análisis Matemático II

Ejercicios resueltos

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Ejercicio 1. Probar que el espacio $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$ es un espacio de Banach, esto es, un espacio normado y completo.

Demostración. Empezamos probando que $(\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio normado:

- Positividad. En primer lugar puesto que la norma se ha definido como supremo de un conjunto de numeros positivos, tendremos que $\|f\|_\infty \geq 0$ para toda $f \in (\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$. Además, $|f\|_\infty = 0 \iff sup_{x\in A}|f(x)| = 0 \iff f(x) = 0,\ \forall x \in A \iff f$ es la función 0.
- Homogeneidad. Si $k \in \mathbb{R}$ entonces $\|kf\|_\infty = |k|\|f\|_\infty \iff sup_{x\in A}|kf(x)| = sup_{x\in A}|k||f(x)| = |k|sup_{x\in A}|f(x)| = |k|\|f\|_\infty$.
- Desigualdad triangular. $|f + g|_\infty \leq |f|_\infty + |g|_\infty \iff sup_{x\in A}|f(x) + g(x)| \leq sup_{x\in A}|f(x)| + sup_{x\in A}|g(x)|$. para cualesquiera $f, g \in \mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$.

Para demostrar que $f_n \to f$ c.u. en A $\iff f_n \to f\ en\ \mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$, solo tenemos que observar que $f_n \to f$ c.u. en A significa que:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall x \in A,$$

lo cual equivale a decir

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists n_0 \in \mathbb{N}\ :\ n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty = sup_{x\in A}|f_n - f| \leq \varepsilon,\ \forall x \in A,$$

es decir, $f_n \to f\ en\ \mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$.

Por último, $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$ es de Banach si es completo, es decir si toda sucesión $\{f_n\}$ (de funciones en $\mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$) de Cauchy converge. La prueba es análoga a la que se hizo para ver que $\mathcal{C}(A, \mathbb{R}^M)$, con $A \subseteq \mathbb{R}^N$ compacto, era completo. La única diferencia será que tras probar la convergencia uniforme de f_n a una función f, deberemos probar que $f \in \mathcal{C}_B(A, \mathbb{R}^M)$, es decir que el límite uniforme de la sucesión $\{f_n\}$ de funciones continuas y acotadas es una función continua y acotada. Veámoslo.

Recordemos que ya sabemos por teoría que f es continua. Para la acotación, tomando $\varepsilon = 1$ en la definición de convergencia uniforme, obtenemos un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < 1\ \forall x \in A$. Por otro lado, como f_{n_0} es acotada, existe un $M > 0$ tal que $|f_{n_0}(x)| \leq M\ \forall x \in A$. Entonces, se tiene que:

$$|f(x)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| < 1 + M, \quad \forall x \in A$$

Por tanto, f está acotada. $\square$

Ejercicio 2. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales uniformemente continuas en todo $\mathbb{R}$ que converge uniformemente a una función real f. ¿Puede concluirse que la función f es necesariamente uniformemente continua?.

Solución. La respuesta es afirmativa. Veamos la prueba.

Dado $\varepsilon > 0$, como $f_n \to f$ converge uniformemente, $\exists k > 0$ tal que

$$n > k \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3, \quad \forall x \in A.$$

De otro lado, por ser f_k uniformemente continua en A, $\exists \delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \; con \; |x - y| < \delta, \; se \; tiene \; |f_k(x) - f_k(y)| < \varepsilon/3$$

Juntando ambas informaciones:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_k(x)| + |f_k(x) - f_k(y)| + |f_k(y) - f(y)| < \varepsilon$$

Es decir, hemos probado que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\forall x, y \in A \; con \; |x - y| < \delta \; se \; verifica \; |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Por tanto, f es uniformemente continua.

Ejercicio 3. Estudiar la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones f_n definidas en $[0, 1]$ mediante $f_n(x) = x - x^n$ para todo $x \in [0, 1]$.

Solución. Sabemos que para $0 \leq x < 1$, $f_n(x) = x - x^n \to x$, y para $x = 1$, tenemos que $f_n(x) = 1 - 1^n = 0 \to 0$. Por tanto, el límite puntual es:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x < 1 \\ \\ 0 & si \qquad x = 1 \end{cases}$$

Como cada f_n es continua y f no es continua, no hay convergencia uniforme.

Ejercicio 4. Estudiad la convergencia uniforme de la sucesión de funciones f_n definidas en $[0, 99999]$ mediante $f_n(x) = x^n$ para todo $x \in [0, 99999]$.

Solución. En efecto, la sucesión de funciones converge uniformemente. En primer lugar, $\{f_n\} \xrightarrow{c.p} f = 0$ por ser potencia de base menor que 1. Además, por ser una función potencial, el valor máximo que toma es $0{,}99999^n$. Por tanto: $|x^n| \leq 0{,}99999^n \to 0$, luego $\{f_n\}$ converge uniformemente a $f = 0$.

Ejercicio 5. Estudiad la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones f_n definidas en $[0, 1]$ mediante $f_n(x) = (x - \frac{1}{n})^2$ para todo $x \in [0, 1]$.

Solución. Sabemos que $\{\frac{1}{n}\} \to 0$, por lo que podemos afirmar que $\{f_n(x)\} \to x^2$ puntualmente en $[0, 1]$. Veamos que también hay convergencia uniforme:

$$|f_n(x) - x^2| = \left| -\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} \right| \leq \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2} \to 0, \; \forall x \in [0, 1].$$

Ejercicio 6. Estudiar el caracter de la siguientes series de funciones.

- $\sum_{n\geq 1} \frac{sen(nx)^2}{n^2}$
- $\sum_{n\geq 1} (\frac{x^n}{n!})^2 = \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$
- $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{x^2+n^2}$
- $\sum_{k\geq 1} \frac{x^k}{k^2}$
- $\sum_{k\geq 1} k!x^k = \sum_{k\geq 1} a_k x^k$
- $\forall x \in (-1,1) \qquad \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1}$

1.
$|sen(nx)| < 1 \implies |\frac{sen(nx)^2}{n^2}| \leq \frac{1}{n^2}$.

$$\left.\begin{array}{r} |\dfrac{sen(nx)^2}{n^2}| \leq \dfrac{1}{n^2} \\ \displaystyle\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^2} \end{array}\right\} \implies \sum |\frac{sen^2(nx)}{n^2}| c.u \iff \sum_{n\geq 1} \frac{sen^2(nx)}{n^2} \text{ es abs. convergente.} \implies$$

$$\sum \frac{sen^2(nx)}{n^2} \text{ converge uniformamente.}$$

2.
$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^{2n}}{(n!)^2} \leq \dfrac{M^{2n}}{(n!)^2}\ con\ |x| \leq M \\ \dfrac{M^{2n}}{(n!)^2}\ converge \end{array}\right\} \implies (\frac{x^n}{(n!)})^2 \text{ es c.u en } [-M, M]$$

Por que, $lim \frac{\frac{M^{2(n+1)}}{(n+1)!)^2}}{\frac{M^{2n}}{(n!)^2}} = lim \frac{M^2}{(n+1)^2} = 0 < 1$.

Ejercicio 7. Teorema de Divi.
$A \subset \mathbb{R}^n$ compacto.
$f_k : A \to R$ continua.

$$\left.\begin{array}{r} f_k \geq 0,\ f_k(x) \geq f_{k+1}(x) \ \ \forall x \in A\ (\{f_k\}\ monotona\ \ convergente \\ f_k(x) \to f(x) = 0 \forall x \in A \end{array}\right\} \implies f_k \to 0 \text{ c.u. en A}$$

Solución:

$f_k(x) \to f(x)\ \forall x \in A \implies \forall\ x \in A, \forall \varepsilon > 0\ \ \exists k_x \in \mathbb{N}$ t.q. $k \geq k_x \implies |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon$
f_{k_x} cont. en A. $\implies$ f_{k_x} continua en x $\implies$ $\exists U_x$ entorno abierto de x en A t.q. $|f_{k_x}(y) - f_{k_x}(x)| < \varepsilon\ \forall y \in U_x$

$A \subset \bigcup_{x\in A} U_x \implies \{U_x | x \in A\}$ es un recub. por abiertos de A. Entonces, $\exists x_1, .., x_n \in A$: $A \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$ Por cada x_i existe un k_{x_i} naturales. Sea $k_0 = max\{k_{x_1}, ..., k_{x_n}\}$
Si $k \geq k_0 \implies f_k(x_i) = |f_k(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon/2$ y $|f_{k_{x_i}}(y) - f_{k_{x_i}}(x_i)| < \varepsilon/2\ \forall y \in U_{x_i}$
Sea $y \in A \implies \exists i \in \{1, ..n\}$ t.q $y \in U_{x_i} \implies |f_{k_{x_i}}(y) - f_{k_{x_i}}(x_i)| < \varepsilon/2 \implies f_{k_{x_i}}(x_i) < \varepsilon/2$

Sumando: $f_k(y) \geq f_{k_{x_i}}(y) \geq |f_{k_{x_i}}(x_i) + f_{k_{x_i}}(y) - f_{k_{x_i}}(x_i) < \varepsilon$

Hemos probado que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists k_0$ (dep. de ε y $x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}$ t.q. $k \geq k_0 \implies |f_k(y)| = f_k(y) < \varepsilon \;\; \forall y \in A$

Ejercicio 8. Encontrar un ejemplo de una función que cumpla:
$\{f_k\} \to 0$ c.u.
$\int_A f_k \not\to \int_A 0 = 0$
con $A \subset R$

Una solución es: $f_k(x) = \begin{cases} 1/k & x < k \\ 0 & x \geq k \end{cases}$