Universidad de Granada

Modelos Matemáticos I

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

1. Relación 1

1.1. Ejercicio 2

Sea la ecuación:

$$x_{n+1} = 1/3x_n + 2^n$$

Hallar una solución del tipo $x_n = c2^n$.

Llo primero es ver que esta ecuación es una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea. Vamos a hallar el c que nos piden. Entonces:

$$c2^{n+1} = \frac{1}{3}c2^n + 2^n \implies 2^n[2c - c\frac{1}{3} - 1] = 0$$

$$2c - \frac{1}{3}c - 1 = 0 \implies c = \frac{3}{5}$$

Por tanto, la solución es: $x'_n = \frac{3}{5}2^n$, pero esta es una solución particular.

Ahora, probaremos que x_n es solución de la ecuación inicial $\iff$ $z_n = x_n - x'_n$ donde x'_n es una solución particular, es solución de: $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n$.

Lo probamos: Que x_n es solución de la inicial implica que $x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + 2^n$. Que x'_n es solución de la inicial implica que $x'_{n+1} = \frac{1}{3}x'_n 2^n$.

Si restamos estas dos obtenemos que:

$$x_{n+1} - x'_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n - x'_n)$$

Lo que implica que $z_{n+1} = x_{n+1} - x'_{n+1}$ y $z_n = (x_n - x'_n)$

Ahora, continuamos la resolución del ejercicio:

1. Encontrar una solución particular de la ecuación inicial, $x'_n = \frac{3}{5}2^n$
2. Resolvemos la ecuación homogénea asociada

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n \implies z_n = K(\frac{1}{3})^n$$

3. Usando el resultado:

$$x_n = x'_n + z_n = \frac{3}{5}2^n + K(\frac{1}{3})^n$$

4. Aplicamos la condición inicial $x_0 = 1$.

Así, la solución es $x_n = \frac{3}{5}2^n + \frac{2}{5}(\frac{1}{3})^n$ con $n \geq 0$

1.2. Ejercicio 4

Llamaremos primero x_n el número de clientes de $Paga^+$ en el año n. Llamaremos y_n el número de clientes de $Paga^-$ en el año n. Ahora, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= 0{,}5x_n + 0{,}25y_n \\ y_{n+1} &= 0{,}75y_n + 0{,}5x_n \end{aligned}\right\}$$

Sabemos que $x_n + y_n = 1$, que es el 100 % de los clientes. Podemos despejar así una en función de la otra y nos queda:

$$x_{n+1} = 0{,}5x_n + 0{,}25(1 - x_n)$$

Esta es una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea. Despejando, tenemos:

$$x_{n+1} = 0{,}25x_n + 0{,}25 \implies x_n = x^* + z_n \implies x_n = \frac{0{,}25}{1 - 0{,}25} + K(0{,}25)^n$$

Ahora, tenemos que tomar el límite pues nos piden el mercado a largo plazo. Esto es:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}$$

Podemos afirmar ahora que, asintóticamente , $\frac{1}{3}$ de los clientes estarán en $Paga^+$ y $\frac{2}{3}$ en $Paga^-$

1.3. Ejercicio 6

Vamos a llamar A_n al número de empleados en el departamento A en el año n. Del mismo modo, llamaremos B_n a los del departamento B en el año n. Si $0 \leq p \leq 1$ y $0 \leq q \leq 1$, tenemos que:

$$\left.\begin{aligned} A_{n+1} &= (1 - p)A_n + qB_n \\ B_{n+1} &= pA_n + (1 - q)B_n \end{aligned}\right\}$$

Y tenemos ahora que $A_n + B_n = M$, (aunque se podría tomar como 1) por lo que el sistema lo reducimos a una ecuación teniendo:

$$A_{n+1} = (1 - p)A_n + q(M - A_n) \implies A_{n+1} = (1 - p - 1)A_n + qM$$

Teniendo de nuevo una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea. Así, su solución es:

$$A_n = \frac{qM}{1 - (1 - p - q)} + K(1 - p - q)^n$$

Estudiamos primero la solución constante.

$$A_* = \frac{qM}{1 - (1 - p - q)} = \frac{qM}{p + q}$$

Impondremos que $p + q \neq 0$, al menos 1 trabajador cambiará de departamento. Nuestro término general es:

$$A_n = \frac{qM}{p+q} + K(1-p-q)^n$$

Estudiaremos esto a largo plazo. Tenemos que $-1 \leq 1-p-q < 1$. Tenemos que $|1-p-q| < 1$, por lo que:

$$\begin{cases} \text{lím}_{n\to\infty} A_n = \dfrac{qM}{p+q} = M\dfrac{q}{p+q} \\ \text{lím}_{n\to\infty} B_n = \text{lím}_{n\to\infty}(M - A_n) = M - M\dfrac{q}{p+q} = \dfrac{p}{p+q}M \end{cases}$$

1.4. Ejercicio 8

1. X_n es el número de árboles en el año n.

$$x_{n+1} = 0{,}9x_n + K$$

Esto tiende a la solución constante $x_* = \dfrac{K}{0{,}1}$

1.5. Ejercicio 12

La ecuación logística de Pielou es una ecuación en diferencias no lineal de la forma:

$$x_{n+1} = \frac{\alpha x_n}{1+\beta x_n} \qquad \alpha > 1 \quad \beta > 0$$

1. Demuestre que posee un punto de equilibrio positivo. Tenemos que buscar un $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}$ tal que $\bar{\alpha} = f(\bar{\alpha})$ donde $f(x) = \frac{ax}{1+bx}$. Por tanto, buscamos la solución de:

$$\alpha = \frac{ax}{1+bx} \implies b\alpha^2 - a\alpha + \alpha = 0 \implies \alpha[b\alpha + (1-a)] = 0 \implies \alpha = 0$$

   Es un punto de equilibrio, así que tenemos que:

$$b\alpha + (1-a) = 0 \implies \alpha = \frac{a-1}{b} > 0$$

2. Tomando $\alpha = 2$ y $\beta = 1$, probar que el punto de equilibrio es Asintóticamente Estable. Para ello , trabajaremos ahora en $\mathbb{R}^+$. Tenemos que $f(x) = \dfrac{2x}{1+x} \in \mathcal{C}^\infty$ y que su derivada es:

$$f'(x) = \frac{2(1+x) - 2x}{(1+x)^2} = \frac{2}{(1+x)^2} \implies |f'(1)| = \frac{1}{2} < 1$$

   Por lo que sí es A.E.

3. Demostrar que el cambio de variable $x_n = \dfrac{1}{z_n}$ trasnforma esa ecuación en una ecuación lineal del primer orden. Tenemos ahora por tanto:

$$\frac{1}{z_{n+1}} = \frac{a\dfrac{1}{z_n}}{1+b\dfrac{1}{z_n}} \implies z_{n+1} = \frac{1}{a}z_n + \frac{b}{a} \quad (2)$$

   Que es una ecuación lineal de primer orden

4. A partir del resultado anterior, determinar el comportamiento asintótico de las soluciones de la ecuación logística.

   Esta es una ecuación en diferencias lineal no homogénea, por tanto tendremos una solución $z_n = z_* + y_n$ donde z_* es la solución constante y y_n es la solución de la homogénea asociada.

   Tenemos que $z_* = \frac{b/a}{1-(1/a)} = \frac{b}{a-1} > 0$. Ahora, calculamos la ecuación homogénea asociada a (2), calculado en el apartado anterior:

$$y_n = \mathcal{C} + (\frac{1}{a})^n$$

   Ya tenemos la solución, por tanto la solucion de z_n es:

$$z_n = \frac{b}{a-1} + \mathcal{C}(\frac{1}{a})^n \quad n \geq 0$$

   El comportamiento asintótico de esta es convergente a $\dfrac{b}{a-1}$ pues , como $a > 1$, entonces $(\frac{1}{a})^n \to 0$

   Ahora, volviendo al cambio de variable, como z_n tiene límite distinto de cero, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} z_n} = \frac{1}{b/(a-1)} = \frac{a-1}{b}$$

   Que es el punto de equilibrio de x_n, luego $\alpha = \frac{a-1}{b}$ es Asintóticamente Estable.