Universidad de Granada

Ejercicios resueltos Álgebra I

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

1. Relación 2

1.1. Ejercicio 3 (2^a parte de la relación)

Determinar los polinomios $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ de grado menor o igual que tres que satisfacen el sistema de congruencias

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \equiv x-1 \ mod(x^2+1) \\ f(x) \equiv x+1 \ mod(x^2+x+1) \end{array}\right\}$$

En primer lugar, reescribimos la primera ecuación para sustituirla en la segunda.

$$f(x) \equiv x-1 \ mod(x^2+1) \implies f(x) = x-1+(x^2+1)g(x)^{\circledast}$$

Reemplazando lo obtenido, tenemos:

$$x-1+(x^2+1)g(x) \equiv x+1 \ mod(x^2+x+1)$$

Pasamos el x-1 restando:

$$(x^2+1)g(x) \equiv 2 \ mod(x^2+x+1)$$

Resolvemos esta ecuación, que tendrá solución si, y solo si, $(x^2+1, \ x^2+x+1)/2$. Así, hallamos el mcd a través de la tablita correspondiente:

$$\begin{array}{r|cc} x^2+x+1 & 1 & 0 \\ x^2+1 & 0 & 1 \\ x & 1 & \text{-}1 \\ 1 & -x & x+1 \\ 0 & & \end{array}$$

Obtenemos de esta forma que $(x^2+1, \ x^2+x+1) = 1$, que divide a 2, por tanto, habrá solución. Partiendo de la identidad de Bezout: $1 = (x^2+x+1)(-x)+(x^2+1)(x+1)$, la transformamos en una ecuación en congruencia (si vemos la ecuación como $(x^2+x+1)(x) = (x^2+1)(x+1)-1$, por la definición de congruencia) $(x^2+1)(x+1) \equiv 1 \ mod(x^2+x+1)$, multiplicando por 2, encontramos la g(x) buscada: $(x^2+1)(2x+2) \equiv 2 \ mod(x^2+x+1)$. $g(x) = 2x+2$.

Sustituyendo en $^{\circledast}$ el polinomio g(x) recién encontrado llegaremos a f_0(x), solución parcial del sistema.

$$f_0(x) = x-1+(x^2+1)g(x) = x-1+(x^2+1)(2x+2) = 2x^3+2x^2+3x+1$$

La solución general será

$$f(x) \equiv f_0(x) mod[x^2+1, \ x^2+x+1]$$

Tabla 1: coeficientes de bezout

	3+2i	3
3+2i	1	0
3	0	1
-i	1	-1-i

Calculamos el mcm:

$$[x^2+1,\ x^2+x+1] = \frac{(x^2+x+1)(x^2+1)}{1} = x^4+x^3+x^2+x+1$$

Como el ejercicio pide aquellos polinomios de grado menor o igual que tres, nos basta con la solución parcial, ya que otras soluciones eran polinomios de grado superior al buscado.

Solución: $f_0(x) = 2x^3+2x^2+3x+1$

2. Ejercicio 6

En el anillo $\mathbb{Z}$[i], resolver el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv i & mod\ (3) \\ x \equiv 1+i & mod\ (3+2i) \\ x \equiv 3+2i & mod\ (4+i) \end{cases}$$

Resolución.

Empezaremos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x \equiv i & mod\ (3) \\ x \equiv 1+i & mod\ (3+2i) \end{cases}$$

Para ello hallaremos la solución particular de $x \equiv i\ mod\ (3)$. Como i es una unidad del anillo, entonces $\forall a \in \mathbb{Z}[i] \Rightarrow (a,i) = i$. Los coeficientes de Bezout son $0*3+1*i = 1$ de manera trivial. Entonces la solución general de la primera ecuación sería $x = i+3*k$.

Ahora sustituimos x en la segunda ecuación, y nos queda la ecuación $i+3k \equiv\ 1+i\ mod(3+2i)$ de manera equivalente $3k\ \equiv\ 1\ mod\ (3+2i)$. Ahora sacaremos los coeficientes de Bezout de 3 y 3+2i (Mirar abajo). Por ello, sabemos que $3*(-1-i) \equiv -i\ mod(3+2i)$. Una solución particular será $k = (-1-i)*-i = (i-1)$. La solución general para k será por lo tanto $k = (i-1)+(3+2i)*k'$.

Tabla 2: coficientes de bezout 2

	9i-6	4+i
9i-6	1	0
4+i	0	1
2i	1	1-2i
i	-2	4i-1

Sustituimos la particular de k en la primera resolución y hallaríamos $M = [3, 3 + 2i]$ para hallar cada cuanto debemos hacer la repetición. Para calcular el mcm recordaremos que $(a, b) * [a, b] = ab \Rightarrow \frac{ab}{(a,b)} = [a, b]$. Entonces para nuestro caso particular $[3, 3 + 2i] = \frac{9+6i}{-i} = 9i - 6$. Así pues la solución será:

$$x = i + 3(i - 1) + k''(9i - 6) = 4i - 3 + k''(9i - 6)$$

Ahora cogemos el sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 4i - 3 \ \ mod \ (9i - 6) \\ x \equiv 3 + 2i \ \ mod \ (4 + i) \end{cases}$$

Para resolverlo y hayar (por fin) la solución final haremos lo mismo: hayar la solución general de la primera ecuación (ya resuelta) y sustituir en la segunda, m.c.m de los módulos, y terminamos.

Solución primera ecuación: $4i - 3 + k''(9i - 6)$.

Sustituimos segunda: $4i - 3 + k''(9i - 6) \equiv 3 + 2i \ \ mod \ (4 + i) \to (9i - 6)k'' \equiv 6 - 2i \ \ mod \ (4 + i)$

Hayamos coeficientes de bezout y M.C.D. (tabla adjunta arriba):

Enunciamos solución particular y un indicio de la general: $Como \ (9i - 6)(-2) \equiv i \ mod \ (4i - 1) \Rightarrow (9i - 6)(-2)(-6i - 2) \equiv i(-6i - 2) \ mod \ (4i - 1) \Rightarrow (9i - 6)(12i + 4) \equiv (6 - 2i) \ mod \ (4i - 1) \Rightarrow k'' = (12i + 4) + [9i - 6, 4 + i]k'''$

Calculamos [9i-6,4+i]: $\frac{30i-33)}{i} = 30 - 33i$

Solución general: $(12i + 4) + (30 - 33i)k'''$