Resúmenes Análisis

1. Conjuntos

Definición (Punto de acumulación). Un punto x en un espacio métrico M es un punto de acumulación de un conjunto $A \subset M$ si todo conjunto abierto U que contiene a x también contiene a algún punto de A distinto de x.

Teorema. *Un conjnuto $A \subset M$ es cerado $\iff$ todos los puntos de acumulación de A pertenecen a A.*

2. Sucesiones

Proposición. *Una sucesión x_n en M converge a $x \in M$ $\iff$ $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N : \;\; k \geq N \implies d(x, x_k) < \varepsilon$*

Proposición. *Sea $v_n \to v \in \mathbb{R}^n$ $\iff$ cada sucesión de coordenadas converge a la coordenada correspondiente de v como una sucesión en $\mathbb{R}$*

Proposición.

- *Un conjunto $A \subset M$ es cerrado $\iff$ $\forall x_n \in A$ con x_n convergente, el límite es un elemento de A.*
- *Para un conjunto $B \subset M$, $x \in cl(B)$ $\iff$ existe una sucesión $x_n \in B$ tal que $x_n \to x$*

Demostración. Demostraremos el primero.
Sea A un conjunto cerrado y $x_n \to x$. Entonces x es un punto de acumulación de A. x es un punto de acumulación de A, pues cualquier vecindad de x contiene a $x_n \in A$. Ahora, como sabemos que A es cerrado si contiene a todos sus puntos de acumulación, A es cerrado y x es un punto de acumulación entonces $x \in A$.

De la misma forma, sea $x \in A$ un punto de acumulación de A y elegimos $x_n \in B(x, 1/n) \cap A$. De esta forma, $x_n \to x$ (pues $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \geq 1/\varepsilon$ con lo que $k \geq N \implies x_n \in B(x, \varepsilon)$). Así, tenememos una sucesión de elementos de A que converge a un elemento de A, y su límite es un punto de acumulación, por tanto por el teorema anterior, A es cerrado. □

Definición (Sucesión de Cauchy). Una sucesión de Cauchy es una sucesión $x_n \in M$ tal que $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists N$ tal que si $p, q \geq N$ entonces $d(x_p, x_q) < \varepsilon$. M es completo $\iff$ toda sucesión de Cauchy en M converge a un punto de M.

Proposición. *Una sucesión convergente en un espacio normado o métrico está acotada.*

Demostración. Sea $x_n \to x$, sabemos que $\exists N : d(x_n, x) < 1$ si $n \geq N$, así que $x_n \in B(x, 1)$ si $n \geq N$. Basta tomar $R = max\{1, d(x_1, x), ..., d(x_{N-1}, x)\}$ y así $d(x, x_n) \leq R \; \forall n$ por lo que $x_n \in B(x, R) \; \forall n$ y así está acotada. □

Teorema (Teorema de Bolzano Weierstrass). *Sea $\{x_n\}$ una sucesión de $\mathbb{R}^N$ acotada. Entonces existe una sucesión parcial suya $\{x_{\sigma(n)}\}$ convergente.*

Demostración. Notaremos $x_n = (x_n^1, \ldots, x_n^N)$. Como $\{x_n^1\}$ es acotada en $\mathbb{R}$, existe $\sigma_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\{x_{\sigma_1(n)}^1\}$ es convergente.

Ahora, como $\{x_n^2\}$ es acotada, $\{x_{\sigma_1(n)}^2\}$ también es acotada, y existe $\sigma_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\{x_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}^1\}$ es convergente.

Procediendo de esta forma con cada componente de x_n, obtenemos $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$, y $\{x_{\sigma_1(n)}^1\}, \{x_{(\sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}^2\}, \ldots, \{x_{(\sigma_N \circ \cdots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1)(n)}^N\}$ sucesiones convergentes en $\mathbb{R}$. Al ser σ_i estrictamente creciente $\forall i = 1, \ldots, N$, $\{x_{(\sigma_N(n) \circ \cdots \circ \sigma_{i+1} \sigma_i \circ \cdots \circ \sigma_1)(n)}^i\}$ también es convergente (toda sucesión parcial de una sucesión convergente es convergente).

Así, tomando $\sigma = \sigma_1 \circ \cdots \circ \sigma_N$, $\{x_{\sigma(n)}\}$ es convergente. □

Proposición. (i) *Toda sucesión convergente en un espacio métrico es una sucesión de Cauchy*

(ii) *Una sucesión de Cauchy enun espacio métrico debe estar acotada*

(iii) *Si una subsucesión de una sucesión de Cauchy converge a x, entonces la sucesión converge a x*

Teorema ($\mathbb{R}^n$ es completo). *Una sucesión $x_n \in \mathbb{R}^n$ converge a un punto de $\mathbb{R}^N$ $\iff$ es una sucesión de Cauchy*

Demostración. $\boxed{\Leftarrow}$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq m$ entonces $d(x_n, x) < \dfrac{\varepsilon}{2}$, y si $p, q \geq m$ entonces $d(x_p, x_q) \leq d(x_p, x) + d(x, x_q) < \varepsilon$

$\boxed{\Rightarrow}$

Como $\{x_n\}$ es de Cauchy, $\{x_n^i\}$ es de Cauchy $\forall i = 1, \ldots, N$ (porque $|x_n^i - x_m^i| \leq |x_n - x_m|$).

$\implies \{x_n^i\} \to x^i$ es convergente, por ser $\mathbb{R}$ completo. Luego $\{x_n\}$ es convergente.

$\square$

3. Conjuntos Compactos y Conexos

Definición (Compacto). Un subconjunto A de un espacio métrico M es compacto si todo recubrimiento abierto de A contiene un recubrimiento finito.

Definición (Otra definición de Compacto.). Sea $A \subset X$ con X espacio métrico.

$$\text{A es compacto} \iff \forall \{x_n\} \subset A \;\; \exists \{x_{\sigma(n)}\} \text{ parcial de } \{x_n\} \text{ con } \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A$$

Teorema (Teorema de Heine-Borel). *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto $\iff$ es cerrado y acotado.*

Demostración. $\boxed{\Rightarrow}$
Sunponemos que $A \subset \mathbb{R}^n$ es compacto. Entonces, por su definición, $\forall \{x_n\} \subset A\ \exists \{x_{\sigma(n)}\}$ parcial de $\{x_n\}$ con $\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A$. Supongamos que A no está acotado. Entonces, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists a_n \in A :\ |a_n| \geq n$, por lo que $\{a_n\}$ no converge y por tanto $\sigma(n) \geq n \implies \{a_{\sigma(n)}\}$ no converge, por lo que A está acotado.

Supongamos ahora que $\{x_n\} \to x \implies \exists \{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A$, y como sabemos que si una sucesión es convergente todas sus parciales convergen al mismo límite, entonces eso implica que $\{x_n\} \to x \in A$ por lo que toda sucesión converge a un punto de A, y así A es cerrado.
$\boxed{\Leftarrow}$
Supongamos ahora que A es cerrado y acotado. Sea $\{x_n\}$ una sucesión cualquiera de puntos de A.

Como A es acotado, entonces $\exists R > 0 :\quad A \subset B(0, R)$. Además, como $x_n \subset A\ \forall n \implies |x_n| < R\ \forall n \in \mathbb{N}$, así $\{x_n\}$ es acotada.

Como $\{x_n\}$ es acotada, por el teorema de Bolzano Weierstrass, $\exists \sigma \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente con $\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in \mathbb{R}^n$, y como $\{x_{\sigma(n)}\}$ es una subsucesión de puntos de A que converge a x y el conjunto A es cerrado, entonces el límite de esta sucesión está en A , es decir:

$$\{x_{\sigma(n)}\} \to x \in A$$

Por lo que tenemos la definición de conjunto compacto.

$\square$

Definición (Función continua). Una aplicación $f : A \to M$ es continua si $x_n \to x \implies f(x_n) \to f(x)$ para toda sucesión x_n convergente a un punto de A con $x_n \in A$

Proposición (Caracterización de continuidad). *Sea $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^N$, y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^M$. Entonces:*

$$f \text{ es continua en } a \iff \forall \{x_n\} \subseteq A \text{ con } \{x_n\} \to a \Rightarrow \{f(x_n)\} \to f(a).$$

Definición (Conjunto convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *convexo* si $\forall x, y \in A$ se tiene que el segmento de extremos x e y está incluido en A. En otras palabras:

$$A \text{ convexo } \iff [x, y] = \{tx + (1-t)y : \ t \in [0,1]\} \subseteq A.$$

Definición (Poligonalmente convexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *poligonalmente convexo* si $\forall x, y \in A$ existe una poligonal que los une y no se sale de A. En otras palabras: A *poligonalmente convexo* $\iff \exists \{x = a_0, a_1, \ldots, a_k = y\} \subseteq A$ tal que:

$$\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i] \subseteq A.$$

Definición (Conjunto arco-conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice *arco-conexo(conexo por arcos)* si $\forall x, y \in A$ existe un camino incluido en A que los une. En otras palabras, A *es conexo por arcos* $\iff \exists \varphi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^N$ verificando:

$$\varphi(a) = x; \quad \varphi(b) = y; \quad \varphi([a, b]) \subseteq A.$$

Definición (Conjunto no conexo). Decimos que un conjunto $A \in \mathbb{R}^N$ es *NO conexo* si existen U, V abiertos en $\mathbb{R}^N$ tales que:

$$U \cap A \neq \emptyset; \quad V \cap A \neq \emptyset; \quad A \subseteq U \cup V; \quad A \cap U \cap V = \emptyset.$$

Nota. La misma definición se aplica para un espacio topológico (X, τ).

Definición (Conjunto conexo). Un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^N$ se dice conexo si no es no conexo. Equivalentemente, $\forall\ U, V$ abiertos en $\mathbb{R}^N$ tales que $U \cap A \neq \emptyset,\ V \cap A \neq \emptyset,\ A \subseteq U \cup V$, se tiene que forzosamente $A \cap U \cap V \neq \emptyset$.

Teorema. *Los conjuntos conexos por arcos son conexos.*

Demostración. Sean x,y dos puntes de A. Suponemos $x \leq y$ (si fuera al revés, cambiamos los nombres).

Como A es arco conexo $\Longrightarrow$ $\exists \varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua con $\varphi(a) = x$, $\varphi(b) = y$ y $\varphi([a, b])$ es un intervalo por el teorema del valor intermedio en R.

Ahora, $\forall\ \alpha, \beta \in \varphi([a, b])$ con $\alpha \leq \beta \implies [\alpha, \beta] \subseteq \varphi([a, b])$ y así tenemos $\varphi(a), \varphi(b) \in \varphi([a.b]) \implies [\varphi(a), \varphi(b)] = [x, y] \subseteq \varphi([a, b]) \subseteq A$ □

4. Funciones continuas

Definición (Límite). Supongamos que x_0 es un punto de acumulación de A. Decimos que $b \in N$ es el límite de f en x_0, denotado por:

$$\lim x \to x_0 f(x) = b$$

Si para todo $\varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in A$ que sea distinto de x_0 y $d(x_0, x)$, entonces $d'(f(x), b) < \varepsilon$

Definición (Función continua). Una función $f : A \to B$ es continua en un punto x_0 de su dominio $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ $\exists > 0 :$ $\forall x \in A$ que cumpla que $d(x, x_0) < \delta \implies d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$

Teorema. *Sea $f : A \to B$ continua y $K \subset A$ conexo. Entonces, $f(K)$ es conexo. Análogamente, si K es arco-conexo, entonces, f(K) es arco-conexo.*

Teorema (Teorema de Weierstrass). *Sea $f : A \to B$ continua y $K \subset A$ un compacto. Entonces, $f(K)$ es compacto.*

Demostración. Sea $\{x_n\} \subseteq K$ cualquiera. Entonces $\{f(x_n)\} \subseteq f(K)$. Como K es compacto, existe $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\{x_{\sigma(n)}\} \to a \in K$. Luego, $\{f(x_{\sigma(n)})\} \to f(a) \in K$ y queda probado que $f(A)$ es compacto. □

Teorema. *Sean M,N,P espacios métricos y supongamos que $f : A \subset M \to N$ y $g : B \subset N \to P$ son transformaciones continuas tales que $f(A) \subset B$. Entonces, $g \cong f : A \subset M \to P$ es continua*

Teorema (Teorema del máximo-mínimo). *Sea (M,d) un espacio métrico, $A \subset M$ y $f : A \to \mathbb{R}$ una función continua. Sea $K \subset A$ un conjunto compacto. Entonces f está acotada en K, es decir: $B = \{f(x) : x \in K\} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado. Además, existen puntos $x_0, x_1 \in K$ tales que $f(x_0) = inf(B)$ y $f(x_1) = sup(B)$. Decimos que sup(B) es el máximo de f en K e inf(B) el mínimo de f en K.*

Teorema (Teorema de los valores intermedios). *Sean M un espacio métrico, $A \subset M$ y $f : A \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $K \in A$ es conexo y que x,y $\in K$. Para cada número $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) < cf(y)$ existe un punto $z \in K : f(z) = c$*

4.1. Continuidad uniforme

Definición (Uniformemente continua). Sean (M,d) y (N,p) espacioes métricos, $A \subset M$, $f : A \to N$ y $B \subset A$. Decimos que f es uniformemente continua en el conjunto B si $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 :\ x, y \in B\ \ y\ \ d(x, y) < \delta \implies p(f(x), f(y)) < \varepsilon$

Teorema (Teorema de la continuidad uniforme. Teorema de Heine-Cantor.). *Sean $f : A \to N$ continua y $K \subset A$ un compacto. Entonces, f es uniformemente continua en K.*

Demostración. La condición para la continuidad uniforme es la siguiente:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall x, y \in A : d(x,y) < \delta \implies d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Vamos a proceder por reducción al absurdo, para lo cual negamos esta condición:

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists x, y \in A : d(x,y) < \delta \wedge d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$$

Tomamos este ε_0, lo que nos da, para cada $\delta > 0$, un par de puntos x e y que cumplen la propiedad expresada arriba. Tomamos $\delta = \frac{1}{n} \; \forall n \in \mathbb{N}$. Esto nos da dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ tales que

$$d(x_n, y_n) < \frac{1}{n} \wedge d(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$$

Por ser A compacto, el teorema de Bolzano-Weierstrass nos da dos sucesiones parciales $\{x_{n_k}\}$ a x_0 e $\{y_{n_k}\}$ a y_0. Por tanto:

$$d(x_{n_k}, y_{n_k}) < \frac{1}{n_k} \wedge d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \geq \varepsilon_0$$

Sin embargo, $\{x_{n_k}\}$ e $\{y_{n_k}\}$ convergen al mismo punto (por converger su distancia a cero), y como f es continua, esta proposición no puede ser verdadera. Hemos llegado por tanto a una contradicción, luego f debe ser uniformemente continua. $\square$