Universidad de Granada

Varible Compleja I

Ejercicios resueltos

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

Números complejos

Ejercicio 1.

Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a C .

Solución

Ejercicio 3.

Sea $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \to \mathbb{C}$ dada por ——————————

-

Solución

$|f(z)| < 1 \ \forall z : |z| < 1$ $f^{-1}(z) = \frac{z+a}{1+\bar{a}z}$ Si $|z| = 1$, entonces $|f(z)| = |\frac{z-a}{a-\bar{a}z}|$ multiplicando en esta expresión por $\overline{z}$ $\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\overline{z} = \frac{1-a\overline{z}}{1-\bar{a}z}$ f tenemos que es holomorfa en el disco, lleva la frontera en la frontera.

Ejercicio 4.

Dados $z_1, z_2, ..., z_n \in C^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$|\sum_{k=1}^{n} z_k| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

Solución

Por inducción, todos los números complejos deben tener el mismo argumento, son vectores linealmente dependientes sin que se invierta el signo de ninguno de ellos.

$\exists \lambda_1, ..., \lambda_n > 0 : \lambda_1 z_1 = \lambda_2 z_2 = ... = \lambda_n z_n$

para probar que es necesaria no hace falta hacer inducción $|\sum_{k=1}^{n} z_n| = |\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_1}{\lambda_k} z_1| = |z_1| \sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_1}{\lambda_k} = |z_1| \sum_{k=1}^{n} \frac{|z_k|}{|z_1|} = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$

$n = 2 \implies |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \longleftrightarrow z_2 = \lambda z_1$ con $\lambda \in \mathbb{R}$

Sea cierto para $n \in \mathbb{N}$ $|\sum_{k=1}^{n+1} z_k| = |z_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} z_k| = |z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^{n} z_k|$

Hemos usado en este último paso que $|z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^{n}| \geq |\sum_{k=1}^{n+1} z_k| = \sum_{k=1}^{n+1} |z_k| = |z_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ donde la otra desigualdad entre los extremos se sabe de la desigualdad triangular. $|z_{n+1}| + |\sum_{k=1}^{n} z_k| = |z_{n+1}| + \sum_{k=1}^{n} |z_k|$ Por la hipótesis de inducción para $k = 2$, tenemos que $\exists \lambda > 0 : z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} z_k$

Nos queda por hacer lo análogo con el resto de números complejos $z_k, k = 1...n$ Por la hipótesis de inducción para $k = n, \exists \mu_1, ...\mu_n : \mu_1 z_1 = \mu_2 z_2 = ... = \mu_n z_n$, como $z_{n+1} = \lambda \sum_{k=1}^{n} z_k = \lambda \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_1}{\mu_k} z_1$

$$|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff |z_1 + z_2|^2 = (|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2$$

entonces tenemos

$$z_1\overline{z_2} = \lambda > 0 \text{ y que } z_1 = \frac{\lambda}{|z_2|^2} z_2$$

Ejercicio 5.

Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z + i| = 2|z - i|\} \text{ y } B = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| + |z + i| = 4\}$$

Veamos el conjunto A, tenemos en cuenta $z = (a, b)$, A cumple $\sqrt{a^2 + (b+1)^2} = 2\sqrt{a^2 + (b-1)^2}$, entonces $a^2 + b^2 + 1 + 2b = a^2 + (b+1)^2 = 4(a^2 + (b-1)^2) = 4a^2 + 4b^2 + 4 - 8b$, entonces $3a^2 + 3b^2 - 10b + 3 = 0$, $a^2 + b^2 - \frac{10}{3}b + 1 = 0$, sumamos y restamos $\frac{25}{9}$, $a^2 + (b - \frac{5}{3})^2 - \frac{25}{9} + 1$, $a^2 + (b - \frac{5}{3})^2 = \frac{16}{9}$ Vemos que A es la circunferencia con $c = (0, \frac{5}{3})$, $r = \frac{4}{3}$

Veamos el B, elevando dos veces al cuadrado tenemos como resultado una elipse

$$\frac{a^2}{\sqrt{3}^2} + \frac{b^2}{2^2} = 1$$

Ejercicio 6.

Probar que $arg z = 2\arctan(\frac{Im z}{Re z + |z|})$ para todo $z \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}^-$.

Solución

Hemos usado la fórmula del ángulo doble

$$\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$$

$\phi = \arctan(\frac{Im z}{Re z + |z|})$ $\phi = 2\alpha = \arctan(\frac{Im z}{Re z + |z|})$

Pista para otra forma de hacerlo

$$\phi = 2\arctan(\frac{Imz}{Rez + |z|})|z|(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) =?z$$

Para ello usamos, si $t = \theta/2$

$$\cos(\theta) = \frac{1 - \tan^2(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)} \sin(\theta) = \frac{2\tan(\theta/2)}{1 + \tan^2(\theta/2)}$$

Ejercicio 8.

Solución

Haremos la prueba por inducción, para el caso inicial $n = 1$ es trivial, suponemos cierto para un $n \in \mathbb{N}$ genérico. Probamos que en ese caso es cierto para $n + 1$.

$$\cos((n+1)\theta) + i\sin((n+1)\theta) = \cos(n\theta + \theta) + i\sin(n\theta + \theta)$$

$$= \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) + i\cos(n\theta)\sin(\theta) + i\sin(n\theta)\cos(\theta)$$

$$= \cos(n\theta)(cos(\theta) + i\sin(\theta)) + i\sin(n\theta)(cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

$$= (\cos(theta) + i\sin(\theta))(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) = (cos(\theta) + i\sin(theta))^{n+1}$$

La última igualdad la tenemos por la hipótesis de inducción.

Ejercicio 10.

Pista Probar las dos simultáneamente y usar la fórmula de moivre $\sum_{k=0}^{n}(cos(x) + sin(x))^k$

Solución

$$\sin(x/2)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) + i\sin(x/2)\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)$$

Sacamos factor común

$$\sin(x/2)(\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) + i\sin(kx))$$

Usamos la fórmula de Moivre

$$\sin(x/2)\sum_{k=0}^{n}(\cos(x) + i\sin(x)^k$$

Usamos que $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$

$$\sin(x/2)\frac{1 - (\cos(x) + i\sin(x)^{n+1}}{1 - (\cos(x) + i\sin(x)}$$

$$= \sin(x/2)\frac{1 - (\cos((n+1)x) + i\sin((n+1)x))}{1 - \cos(x) - i\sin(x)}$$

Usamos que $2\sin^2(x/2) = 1 - \cos(x)$ y que $\sin(x) = \sin(x/2)\cos(x/2)$,

$$\sin(x/2)\frac{1-(\cos((n+1)x)+i\sin((n+1)x))}{2\sin^2(x/2)-2i\sin(x/2)\cos(x/2)} = \frac{1-(\cos((n+1)x)+i\sin((n+1)x))}{2\sin(x/2)-2i\cos(x/2)}$$

$$\frac{2\sin^2(\frac{n+1}{x}x)-i2\sin(\frac{n+1}{2}x)\cos(\frac{n+1}{2}x)}{2\sin(x/2)-2i\cos(x/2)}$$

Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado del denominador

$$\sin(\frac{n+1}{2}x)(\sin(\frac{n+1}{2}x)-i\cos(\frac{n+1}{2}x))(\sin(x/2)+i\cos(x/2))$$

$$= \sin(\frac{n+1}{2}x)(\cos(\frac{n+1}{2}x)\cos(x/2)+\sin(\frac{n+1}{2}x)\sin(x/2)+i(\sin(\frac{n+1}{2}x)\cos(x/2)-\cos(\frac{n+1}{2}x)\sin(x/2)))$$

$$= \sin(\frac{n+1}{2}x)(\cos(\frac{nx}{2})+i\sin(\frac{nx}{2}))$$

Topología del plano complejo

Ejercicio 1.

Estudiar la continuidad de la función argumento principal, $arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$.

Solución

Usamos la fórmula de la relación anterior para probar que es continua en $\mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}$

$$arg z = 2 \arctan(\frac{Imz}{Rez + |z|}) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^* \backslash \mathbb{R}$$

Luego nos paroximamos por sucesiones

$$\{z + \frac{i}{n}\} \to z \qquad \lim_n (arg(z + \frac{i}{n})) = \lim_n (\arctan(\frac{1}{nz} + \pi)) = \pi$$

$$\{z - \frac{i}{n}\} \to z \lim_n (arg(z - \frac{i}{n})) = \lim_n (\arctan(\frac{-1}{nz} - \pi)) = -\pi$$

Ejercicio 2.

Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : \theta \notin Arg z\}$. Probar que existe una función $\phi \in C(S_\theta)$ que verifica

Solución

Definimos

$$f(z) = z(\cos(\pi - \theta) + i \sin(\pi - \theta)) \qquad f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \text{ es continua}$$

$$\phi(z) = arg(f(z)) - (\pi - \theta) \qquad \phi : S_\theta \to \mathbb{C} \ \phi \text{ es continua}$$

$$\phi(z) \in Arg(f(z)) + \theta - \pi \subset Arg(f(z)) + Arg(\cos(\theta - \pi) + i \sin(\theta - \pi))$$

$$= Arg(f(z) - \cos(\theta - \pi) + i(\theta - \pi)) = Arg z$$

Ejercicio 3.

Probar que no existe ninguna función $\phi \in C^*$ tal que $\phi(z) \in Arg z$ para todo $z \in C^*$

Solución

$\mathbb{T}$ compacto y conexo $\implies$ $\phi(\mathbb{T})$ intervalo cerrado y acotado

Sea $\alpha \in \mathbb{T} : \phi(\alpha) \neq \text{mín}(\phi(\mathbb{T})), \text{máx}(\phi(\mathbb{T}))\ \phi(\mathbb{T}-\{\alpha\})$ conexo $\implies$ $[\text{mín}(\phi(\mathbb{T})), \phi(\alpha)[\cup]\phi(\alpha), \text{máx}(\phi(\mathbb{T}))]$ que es una contradicción.

Si $\exists h : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ con $h(z) \in Arg(z)\ \forall z \in \mathbb{C}^*$ y h continua, entonces $h_{|\mathbb{T}} : \mathbb{T} \to \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ es continua y $h_{|\mathbb{T}}(z) \in Arg(z)\ \forall z \in \mathbb{T}$

Ejercicio 4.

Solución

$$\{z_n\} \to z \implies \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N} : n \geq m\ |z_n - z| z \varepsilon$$

Sea $\varepsilon = \frac{|z|}{2}$, entonces $\exists m \in \mathbb{N} : n \geq m\ z_n \in D(z, |z|/2)$

Usamos el ejercicio 2

Ejercicio 5.

Idea

$$|1 + \frac{z}{n}|^n \to e^{Rez}$$
$$\lim_{n\to\infty} |1 + \frac{z}{n}|^n = e^{\text{lím}_{n\to\infty} n(|1+\frac{z}{n}|-1)}$$

$$arg((1 + \frac{z}{n})^n) \to Imz$$

Solución

$z_n \in \mathbb{C}, \phi_n \in Arg(z_n)$

$\{|z_n|\} \to |z|$ y $\{y_n\} \to y \in Arg(z)$

Vamos a usar que is tiene sun sucesión de numeros complejos y la sucesion de los modulos converge y hay una sucesion de los argumentos de forma q convergen, la sucesion converge al modulo por el cos +isen

$\phi_n \in Arg(z_n), z_n = (1+\frac{z}{n})^n = (1+\frac{a+ib}{n})^n = [(1+\frac{a}{n})+(\frac{ib}{n})]^n\ |z_n| = [|(1+\frac{a}{n})+\frac{ib}{n}|]^n = [(1+\frac{a}{n})^2+(\frac{b}{n})^n]^{1/2} = limn[(1+\frac{a^2}{n^2}+(\frac{a}{n}+\frac{b^2}{n^2}))]^{n/2} = e^{\text{lím}\, n/2(\frac{a^2}{n^2}+2a/n+b^2/n^2)} = e^a = e^{Rez}$

Vamos a utilizar la fórmula de Moivre.

$z_m = (1+z/n)^n\ Arg(a+\frac{a+ib}{n})^n = nArg(a+\frac{a+ib}{n}) = n * \arctan(\frac{b/n}{1+a/n}) = n * \arctan(\frac{b}{n+a})$ Llamamos $y = b/(n+a)$ y usamos $\text{lím}_{y\to 0} \frac{\arctan(y)}{y} = 1$, $n * \arctan(\frac{b}{n+a}) = \frac{\arctan(\frac{b}{n+a})}{\frac{n+a}{n}\frac{b}{n+a}\frac{1}{b}} = b$

Funciones holomorfas

Ejercicio 1

a) Cauchy Riemman

Solución

c)

$f(x+iy) = \frac{x^3+iy^3}{x^2+y^2}, \forall(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, f(0) = 0$

$u(x,y) = Ref = \frac{x^3}{x^2+y^2}, v(x,y) = Imf = \frac{y^3}{x^2+y^2}$

En $\mathbf{C}^*$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3x^2}{x^2+y^2} + \frac{x^4(-1)2}{(x^2+y^2)^2}\ \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{3y^2}{x^2+y^2} = \frac{y^4(-1)2}{(x^2+y^2)^2}$

entonces $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^3(-1)2y}{(x^2+y^2)^2}\ \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{y^3(-1)2x}{(x^2+y^2)^2}$

De las dos ecuaciones primeras deducimos

$3x^2(x+y^2) - 2x^4 = 3y^2(x^2+y^2) - 2y^4$ (1)

de últimas dos deducimos

$2yx^3 = -2xy^3 \implies xy(x^2+y^2) = 0 \implies xy = 0x^2 + y^2 = 0$

por tanto

$x^4 - y^4 = 0 \implies |x| = |y|$

Ejercicio 2

2 cauchy riemman $Imf = 4x^3 * y - 4xy^3$

Ejercicio 3

3 cauchy rieman $a = -c$

Ejercicio 4

Enunciado

Solución 4 cauchy rieman, derivar respecto x y respecto y $Ref(x,y) = u(x,y)\ Imf(x,y) = v(x,y)$

Los casos extremos son $a = 0$ o $b = 0$, donde o la imagen o la parte real que quedan serían constantes. $au(x, y) + bv(x, y) = c$ $-bv(x, y) = c - au(x, y)$ $v(x, y) = c' - a'u(x, y)$ Derivamos $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = \frac{-a'\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{-a'\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{-a'\partial u(x,y)}{\partial y} = -a'\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ implica $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = -a'\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = -a'a'\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$ por tanto $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = 0 = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ en Ω

Ejercicio 5

Enunciado

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Probar que si $\overline{f} \in \mathcal{H}(\Omega)$, entonces f es constante.

Solución

Ω dominio, $f \in \mathcal{H}(C)$ $f + \overline{f} = 2Ref$ g es holomorfa por ser suma de holomorfas, $g \in \mathcal{H}(C)$ $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ y su parte imaginaria es constante, por tanto g es constante, entonces

Ref es constante, $f \in \mathbb{H}(\Omega), \Omega$ dominio implican que f es constante.

Ejercicio 6

Enunciado

Solución

$P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$ $P(\overline{z}) = a_n\overline{z}^n + a_{n-1}\overline{z}^{n-1} + ... + a_1\overline{z} + a_0$

$\overline{P(\overline{z})} = \overline{a_n}z^n + \overline{a_{n-1}}z^{n-1} + ... + \overline{a_1}z + \overline{a_0}$

$\overline{z}^n = \overline{z}...\overline{z} = \overline{(z^n)}$

resolvemos

$a \in \Omega^* \longleftrightarrow \overline{a} \in \Omega$ $\text{lím}_{z\to a} \frac{f^*(z)-f^*(a)}{z-a} = \text{lím}_{z\to a} \frac{\overline{f(\overline{z})}-\overline{f(\overline{a})}}{z-a} = \text{lím}_{z\to a} \frac{\overline{\overline{f(\overline{z})}-\overline{f(\overline{a})}}}{z-a} = \text{lím}_{z\to a} \overline{\left(\frac{f(\overline{z})-f(\overline{a})}{z-a}\right)} = \overline{f'(\overline{a})}$

Ejercicio 7

Enunciado

Solución

Idea 7 jugar con los grados del polinomio

Suponemos que existe una función racional que es la exponencial:

$R(z) = \frac{\sum_{i=0}^{k} \lambda_i z^i}{\sum_{i=0}^{m} \mu_i z^i} = \frac{A(z)}{B(z)}$

$R(z) = R'(z) = \frac{A'(z)B(z)-A(z)B'(z)}{B(z)^2} = \frac{A(z)}{B(z)}$ (Tachamos los $B(z)$)

$A(z) = A'(z) - \frac{B'(z)A(z)}{B(z)}, B(z)A(z) = A'(z)B(z) - B'(z)A(z)$, esto se da $\forall z \in D(a, r)$ con $a \in \mathbb{C}, r > 0$

Tienes dos polinomios que son iguales en un entorno no vació. Para deducir lo último tienes que pensar que son polinomios iguales en un montón de puntos.

$gr(B(z)) + gr(A(z)) \leq \text{máx}\{gr(A'(z)) + gr(B(z)), gr(A(z)) + gr(B'(z))\}$

Por tanto llegamos a una contradicción, nuestra hipótesis no era cierto.

Funciones analíticas

Ejercicio 1

b)

Solución

$\sum_{n\geq 0} z^{2n} = \sum_{n\geq 0} \alpha_n z^n$ con $\alpha_n z 2n+1 = 0, \alpha_{2n} = 1$ hay que ver el límite superior de la sucesión $\limsup |\alpha_n| = 1 \implies R = \frac{1}{1} = 1$

c)

Solución

$\sum_{n\geq 0} 2^n z^{n!}$, si $|z| \geq 1$, entonces la serie diverge, si $|z| < 1$ $\sqrt[n]{|2^n z^{n!}|} = \sqrt[n]{2^n |z|^{n!}} = 2 * |z|^{(n-1)!} \to 0$ por tanto $\sum_{n\geq 0} |2^n z^{n!}| < \infty \implies \sum_{n\geq 0} 2^n z^{n!} < \infty$, entonces $R = 1$.

e)

Solución

$\sum_{n\geq 0}(n + a^n)z^n$ con $a \in \mathbb{R}^+$. Lo separamos en dos series, calculamos los radios de convergencia por separado y cogemos el menor.

$\sum_{n\geq 0} nz^n$ y $\sum_{n\geq 0} a^n z^n$

$a^n \leq n + a^n \leq (n+1)a^n$ en los extremos el radio de convergencia es $1/a$, por tanto el radio de convergencia de $n + a^n$ es $1/a$

$\sum_{n\geq 0} a^n |z|^n \leq \sum_{n\geq 0}(n + a^n)|z|^n \leq \sum_{n\geq 0}(n+1)a^n |z|^n$

Por tanto el radio de convergencia es $1/a$..................................

//Podemos usar el criterio de la raíz para sucesiones $\sum_{n\geq 0}(n+a^n)z^n$ con $a \in \mathbb{R}^+$ Calculamos $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n + a^n}$ $= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)+a^{n+1}}{n+a^n} = a(\text{si a>1}), 1(\text{ si a<=1})$ por tanto $R = 1/a(a > 1), 1(a <= 1)$

c)

$\sum_{n\geq 0} a^{n^2} z^n, a \in \mathbb{C}$ raíz n-esima

Ejercicio 2

a)

No se reduce el radio de convergencia, se puede intentar el radio de convergencia de las derivadas

Ejercicio 3

Convergen en todo el plano las que a partir de cierto término son 0, o sea, las que son una suma finita

Sea $\sum_{n\geq 0} \alpha_n (z-a)^n$ que converge uniformemente, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (z-a)^k$ c.u. $\iff S_n$ es uniformemente de Cauchy $\iff \forall \varepsilon > 0, \exists m \in \mathbb{N} : p \geq q \geq n \implies |S_p(z) - S_q(z)| < \varepsilon \forall z \in \mathbb{C}$ Vemos que los polinomios divergen en infinito. Sea $p \in \mathbb{P}[\mathbb{C}]$, $\lim_{|z|\to\infty} p(z) = \infty \iff gr(p) > 0$

Vemos que $|S_p(z) - S_q(z)|$ es un polinomio que está acotado, tiene que ser constante para no diverger en infinito, en particular es la constante 0, ya que $S_p(a) = S_q(a)$, por tanto $\sum_{q=m}^{p-10} \alpha_n (z-\alpha)^n = 0 \implies \alpha_n = 0 \forall n \geq m$

Ejercicio 4

Idea:

llamar w a (w-1)/(z-1), y mirar cuando la función tiene imagen que cae en el disco de centro 0 y radio 1, afinar para saber cuando un subconjunto de C po esta función cae dentro de un subconjunto compacto donde el sumatorio converja

Funciones elementales

Ejercicio 1

Solución

$f(0) = f(0+0) = f(0)^2$ $f(0) = 0$ ó $f(0) = 1$

Si $f(0) = 0$ la función es constante. EN el caso $f(0) \neq 0$, $f(0) = 1$, Si f es derivable en $\alpha \in \mathbb{C}$

$\exists \lim_{n\to 0} \frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{n}$ vemos que cumple la fórmula de adición $\frac{f(\alpha+h)-f(\alpha)}{n} = f(\alpha)\frac{f(n)-f(0)}{n} \iff f$ es derivable en 0 Y eso se puede aplicar $\forall z \in \Omega$

Ahora encontramos todas las funciones enteras que cumplan la condición del enunciado.

Sea $z \in \Omega$, $f(z) = 0$, $f(z) = e^{wz} : w \in \mathbf{C}$

Sea f tal que $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$

$f'(z) = f(z) \lim_{h\to 0} \frac{f(h)-f(0)}{h}$ $(f(z)e^{-wz})' = f'(z)e^{-w}z + (-w) + ze^{-wz} = f(z)we^{-wz} - f(z)we^{-wz} = 0$ las funciones son la misma salvo una constante En el punto 0 las dos funciones valen lo mismo, por lo que la función es la constante 1, ya que $f(0) = 1$

El ejemplo es $f(z) = e^{Re(z)}$

Ejercicio 2

$e^z = e^{Re(z)(\cos(Imz)+i\sin(Imz))}$ $B_V = \{z \in \mathbb{C} : a \leq Rez \leq b\}, a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ $B_H = \{z \in \mathbb{C} : a \leq Imz \leq b\}$ si $a \leq Rez \leq b$, $e^a \leq e^{Rez} \leq e^b$ lo que pasa es que se puede mover en toda la circunferencia unidad

cuando la parte imaginaria se puede mover donde quiera le das infinitas vueltas a la circunferencia unidad. Tenemos que

e_V^B e la corona circular de centro 0 y radios e^a y e^b

donde

$a \leq Imz \leq b$

Tenemos que $\exp(B_H)$ es el sector del plano encerrado entre los ángulos a y b

Ejercicio 4

Enunciado

Probar que si $\{z_n\}$ y $\{w_n\}$ son sucesiones de números complejos, con $z_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \to 1$, entonces

$$\{w_n(z_n - 1)\} \to \lambda \in \mathbb{C} \implies \{z_m^{w_n}\} \to e^\lambda$$

Solución Como la función exponencial es continua $\{w_n(z_n - 1)\} \to \lambda \implies \{e^{w_n(z_n-1)}\} \to e^\lambda$

$\text{lím}\{\log(z_n)\} = 0 \implies \text{lím}\{z_n - \log(z_n)\} = 1 \implies \text{lím}\{w_n(z_n - \log(z_n)) - w_n\} = 0$

$\text{lím}\{z_n^{w_n} = e^{\log(z_n) - w_n}\} = \text{lím}\{e^{w_n(z_n-1)}\} \iff \text{lím}\{\frac{e^{w_n(z_n-1)}}{e^{w_n(\log(z_n))}} = e^{w_n(z_n - \log(z_n)) - w_n}\} = 1$

Vemos que $z_n^{w_n} = e^{w_n \frac{\log(z_n)}{z_n-1}(z_n-1)} = e^{w_n(z_n-1)\frac{\log(z_n)}{z_n-1}}$ Sabemos que $\frac{\log(z_n)}{z_n-1} \to 1$ ya que $\text{lím}_{z\to 1} \frac{\log(z)-\log(1)}{z-1} = \log'(1) = 1/1$

Ejercicio 5

Enunciado

Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme de la serie de funciones $\sum_{n\geq 0} e^{-nz^2}$

Solución

La serie converge puntualmente si, y sólo si, $|\frac{1}{e^{z^2}}| < 1 \iff 1 < |e^{z^2}| \iff 0 < Rez^2 = (Rez)^2 - (Imz)^2 \iff |Rez| > |Imz|$

donde en la última implicación hemos usado $e^{z^2} = e^{Rez^2} e^{Imz^2}$

$Rez^2 = (Rez)^2 - (Imz)^2, Rez^2 > 0 \iff |Rez| > |Imz|$

Vemos ahora la convergencia uniforme

$A = \{z \in \mathbb{C} : (Rez)^2 > (Imz)^2\}$ Si $B \subset A$ y satisface que $\text{ínf}_{z\in B}[(Rez)^2 - (Imz)^2] > 0$, entonces hay convergencia uniforme en B

Ejercicio 6

Enunciado

Probar que $a, b, c \in \mathbb{T}$ son vértices de un triángulo equilátero si, y sólo si, $a + b + c = 0$.

Solución

$\{a, b, c\} = \{e^(\lambda - 2/3\pi), e^{\lambda i}, e^{(\lambda+2/3\pi)i}\}$

$\Rightarrow$

$e^{2/3\pi i}(a + b + c) = e^{2/3\pi i}a + e^{2/3\pi i}b + e^{2/3\pi i}c = a + b + c \implies a + b + c = 0$

$\Leftarrow$

$a' = \frac{a}{a} = 1, b' = \frac{b}{a}, c' = \frac{c}{a}$ $b' = e^{\theta i}$, $c' = e^{\gamma i} = -b - 1$

$a + b + c = 0 \implies a' + b' + c' = 0 \implies 1 + b' + c' = 0 \implies c' = -b' - 1$ con $\gamma, \theta \in]-\pi, \pi[$

De lo que deducimos que $(-\cos(\theta) - 1) - i\sin(\theta) = (\cos(\gamma)) + i(\sin(\gamma))$

$- \in (\theta) = \sin(\gamma) \implies \theta = -\gamma$ $-\cos(\theta) - 1 = \cos(\gamma)$ por tanto $\theta = \pm\frac{2\pi}{3} = -\gamma$

Ejercicio 7

Solución

$a \in \Omega$ y vemos que es derivable por la definición $\lim_{z\to a} \frac{\phi(z)-\phi(a)}{z-a} \frac{\phi(z)-\phi(a)}{\phi(z)+\phi(a)} = \lim_{z\to a} \frac{z-a}{z-a} \frac{1}{\phi(z)+\phi(a)} = \frac{1}{2\phi(a)} = \phi'(a)$ donde hemos usado que $\phi(a) \neq 0$

Ejercicio 8

Enunciado

Probar que, para todo $z \in D(0,1)$ se tiene:

a) $\sum_{n=1} \infty \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = \log(1+z)$

Solución a) $\log(1+z) \in \mathbb{H}(D(0,1))$ y $(\log(1+z))' = \frac{1}{1+z}$ $\forall z \in D(0,1)$

$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$ por otra parte la serie de potencias

$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n$ tiene radio de convergencia 1 y su suma $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} z^n = f(z)$ es holomorfa en $D(0,1)$ y su derivada se calcula término a término

$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} nz^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$

Entonces $f'(z) = g'(z)$ $\forall z \in D(0,1)$, por tanto f y g difieren en una constante.

Como $g(0) = \log(1) = 0 = f(0)$ con lo que tenemos que f y g son iguales en $D(0,1)$

Ejercicio 9

Solución

$f(z) = \log(\frac{1+z}{1-z})$ la función es holomorfa en $\mathbb{C}\backslash\{1\}$ sabemos que $\log \in \mathbb{H}(\mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-)$ y vemos cuando la función logaritmo cae dentro de dicho conjunto

de forma intuitiva $\frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{R}^- \iff \exists r > 0 : z \neq 1, \frac{1+z}{1-z} = -r \iff 1 + z = rz - r \iff z(r-1) = 1 + r \iff z = \frac{1+r}{r-1}$

Viendo que $g(z) = \frac{1+z}{1-z} \in \mathbb{H}(\Omega)$ y $g(\Omega) \subseteq \mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$ podemos asegurar que $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$ por composición.

$f'(z) = \frac{\frac{1-z+(1+z)}{(1-z)^2}}{\frac{1+z}{1-z}} = \frac{2}{1-z^2}$

Siendo $\xi \in \mathbb{H}(\Omega)$, entonces $\xi'(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \frac{2}{1-z^2}$

Pista hacer $\frac{2}{1-z^2}$ en serie de potencias

Ejercicio 10

Pista $z^{\phi} = e^{\phi \log z}$ con $\Omega, \Omega_{\phi} \subset \mathbb{C}^*\backslash\mathbb{R}^-$

$f^{-1}(z) = \phi^{\frac{1}{\phi \log z}} = z^{1/phi}$

Ejericicio 12

Pista

$\sin(nz) = \frac{e^{inz}-e^{-inz}}{2i}$, entonces $\frac{1}{2i}\sum_{n\geq 0}\frac{e^{inz}-e^{-inz}}{2^n}$ Tenemos que ver cuando, para un $z \in \mathbb{C}$ fijo, estudiar la convergencia de las series $\sum_{n\geq 0}\frac{e^{inz}}{2^n}$ y $\sum_{n\geq 0}\frac{e^{-inz}}{2^n}$

$e^{inz} = e^{in(Rez+iImz)} = e^{-nImz+inRez} = e^{-nImz}e^{inRez}$ con $|e^{inRez}| = 1$

$|\frac{e^{inz}}{2^n}| = \frac{e^{-nImz}}{2^n} = (\frac{e^{-Imz}}{2})^n$ entonces

$\sum_{n\geq 0}|\frac{e^{inz}}{2^n}|$ converge $\Longleftrightarrow e^{-Imz} < 2 \Longleftrightarrow -Imz < \ln 2 \Longleftrightarrow -\ln 2 < Imz$

y tenemos convergencia uniforme en $B \subset A = \{z \in \mathbb{C} : |Imz| < \ln 2\}$ tal que $\sup_{z\in B}|Imz| < \ln 2$

Integral curvilínea

Ejercicio 1

Enunciado

Solución

$\gamma : [0, r] \to \mathbb{C}, \gamma(s) = \alpha + s, s \in [0, r]$

$\int_{[\alpha,\alpha+r]} f(z)dz = \int_0^r f(\alpha + s)\gamma'(s)ds$, donde $\gamma'(s) = 1 \forall s \in [0, r]$

$\int_0^r f(\alpha + s)\gamma'(s)ds = \int_0^r f(\alpha + s)ds$

$\xi : [0, r] \to \mathbb{C}, \xi(s) = \alpha + is \forall s \in [0, r]$

$\int_{[\alpha,\alpha+ir]} f(z)dz = \int_0^r f(\alpha + is)\gamma'(s)ds = i\int_0^r f(\alpha + is)ds$

Ejercicio 2

Enunciado

Solución

Tenemos que probar que $\text{lím}_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{zdz}{z^3+1} = 0$

$|\int_{\gamma_r} \frac{z}{z^3+1}dz| \leq \int_{\gamma_r} \frac{|z|}{|z^3+1|}dz \leq l(\gamma_r)M(r)$ donde $M(r) > 0$ satisface que $\frac{|z|}{|z^3+1|} \leq M(r) \forall z \in \gamma_r*$

Dado $z \in \mathbb{C}(0, r)^*$, $|z| = r$

$\frac{|z|}{|z^3+1|} \leq \frac{r}{|z^3|-1} = \frac{r}{r^3-1}$

Por tanto $l(\gamma_r)M(r) = 2\pi r\frac{r}{r^3-1}$ y $\text{lím}_{r\to\infty} \frac{r}{r^3-1} = 0$

Para la otra integral tenemos que probar que

$\text{lím}_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{z^2e^z}{z+1}dz = 0$

$|\int_{\gamma_r} \frac{z^2e^z}{z+1}dz| < \int_{\gamma_r} \frac{|z|^2|e^z|}{z+1}dz$

Si $z \in \gamma_r^*$

$$|z|^2 = |-r + is|^2 \leq (r + 1)^2 \qquad s \in [0, 1]$$

$$|z + 1| \geq r - 1$$

Como $z \in \gamma_r^*$, $|e^z| = e^{Rez} = e^{-r}$

Ejercicio 3

Enunciado

Solución

$\int_{\mathbb{C}(0,r)} \frac{\log(i+z)}{z} dz$

donde $0 < r < 1$, $\mathbb{C}(0,r)^* \subset D(0,1)$ definimos $f(z) = \log(1+z)$, $f \in \mathcal{H}(D(0,1))$

Usando la fórmula de Cauchy para la circunferencia:

$\int_{\mathbb{C}(0,r)} \frac{\log(i+z)}{z} dz = f(0)2\pi i = 0$

Sin usar la fórmula de Cauchy para la circunferencia vemos:

$\log(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$, la serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$ converge uniformemente sobre compactos de $D(0,1)$.

La sucesión $\{\frac{1}{z}\}$ está acotada en el compacto $\mathbb{C}(0,1)^*$

Usando **observación** $\frac{1}{z}\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$ converge uniformemente en $\mathbb{C}(0,r)^*$ a $\frac{\log(1+z)}{z}$

Observación

$\{f_n\}$ converge uniformemente en B a f y $g : B \to \mathbb{C}$ está acotada en B, entonces $\{gf_n\}$ converge uniformemente en B a gf

$(\exists M > 0 : |g(z)| \leq M \quad \forall z \in B)$

$0 = \int_{\mathbb{C}(0,r)} \frac{\log(1+z)}{z} dz = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\log(1+re^{it})}{re^{it}} dt = i\int_{-pi}^{\pi} \log(1+re^{it})dt \ \ i\int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}|dt - \int_{-\pi}^{\pi} arg(1+re^{it})dt \implies \int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}|dt = 0$

Sabemos que $\log(1+re^{it}) = \ln|1+re^{it}| + i * arg(1+re^{it})$ y que $\gamma(t) = re^{it}, \gamma : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma'(t) = ire^{it}$

también sabemos que $|1+re^{it}| = ((1+r\cos(t))^2 + r^2\sin^2(t))^{1/2} = (1+2r\cos(t)+r^2\cos^2(t)+r^2\sin^2(t))^{1/2} = (1+2r\cos(t)+r^2)^{1/2}$

por tanto $0 = \int_{-\pi}^{\pi} \ln|1+re^{it}|dt = 1/2\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1++2r\cos(t)+r^2)dt$

Como sabemos que el coseno es par $1/2\int_{-\pi}^{\pi} \ln(1++2r\cos(t)+r^2)dt = \int_0^{\pi} \ln(1+2r\cos(t)+r^2)dt$

Ejercicio 4

Enunciado

Solución

Sabemos que $f \in D(0,1)$, teniendo que $|f(z)-1| < 1, \forall z \in D(0,1)$

Sabemos que f no se anula en $D(0,1)$ y deducimos que $f(D(0,1)) \subset D(1,1)$. Por tanto $\log(f) \in \mathcal{H}(D(0,1))$

$\log(f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)} \implies \frac{f'}{f}$ admite primitiva holomorfa en $D(0,1)$ y $\mathbb{C}(0,r) \subset D(0,1)$ es un camino cerrado, por tanto $\int_{\mathbb{C}(0,r)} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0$

Ejercicio 5

Enunciado

Solución

$\frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{1}{2i}\left[\frac{1}{z-i} - \frac{1}{z+i}\right]$

Por tanto

$\int_{\mathbb{C}(i,1)} \frac{1}{1+z^2} dz = \frac{1}{2i}\left[\int_{\mathbb{C}(i,1)} \frac{1}{z-i} dz - \int_{\mathbb{C}(i,1)} \frac{1}{z+i} dz\right] \neq 0$

La primera es $2\pi i$

La segunda integral es 0 por el teorema de Cauchy para dominios estrellados, teniendo que $\mathbb{C}(i,1) \subset D(i,3/2)$.

Ejercicio 6

Idea

$\Omega = \mathbb{C} \backslash \{iy : |y| > 1\}$ arctan $\in \mathcal{H}(\Omega)$ y arctan es una primitiva de $\frac{1}{1+z^2}$

$\sigma^* \subset \Omega$ y σ es un camino cerrado.

Con esa información sabremos que $\int_\sigma \frac{1}{1+z^2} dz = 0$

Teorema local de Cauchy

Ejercicio 1

Solución

Fijo $z \in \mathbf{C}$ con $|z-a| > r, \exists r' > 0 : |z-a| > r' > r$ Consideramos $\Omega = D(a,r'), f(w) = \frac{1}{w-z}, f \in \mathcal{H}(D(a,r'))$
$D(a,r')$ es convexo, en particular estrellado, por tanto, usando TLC y $TCDE$ $\int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = 0$

Ejercicio 2

Solución

Fijo $z \in D(a,R)$ Fijo $0 < r < R : |z-a| < r < R, \overline{D}(a,r) \subset D(a,R)$

Por la fórmula de Cauchy para la circunferencia $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw$

$\left|\frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,R)} \frac{f(w)}{w-z} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{C(0,r)} \frac{f(w)}{w-z} dw\right| = \frac{1}{2\pi} | \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+Re^{it}) iRe^{it}}{a+Re^{it}-z} dt - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a+re^{it}) ire^{it}}{a+re^{it}-z} dt|$
$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(a+Re^{it})R}{a+Re^{it}-z} - \frac{f(a+re^{it})r}{a+re^{it}-z} \right| dt$

$g : [r,R]x]-\pi,\pi[\to \mathbb{C}, g(p,t) = \frac{f(a+pe^{it})p}{a+pe^{it}-z}$ por lo que el término de la integral queda $|g(R,t)-g(r,t)|$

g es una función continua en un compacto, por lo tanto es uniformemente continua.

Dado $\varepsilon > 0 \exists \delta : si \|(p,t)-(p',t')\|_\infty < \delta \implies |g(p,t)-g(p',t')| < \varepsilon$, y lo utilizamos para $(p,t) = (R,t)$ y $(p',t') = r,t$, si $|R-r| < \delta$ entonces $|g(R,t)-g(r,t)| < \varepsilon$

Por lo tanto

$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{f(a+Re^{it})R}{a+Re^{it}-z} - \frac{f(a+re^{it})r}{a+re^{it}-z} \right| dt \leq \frac{1}{2\pi} \varepsilon 2\pi$ en el caso de que $|R-r| < \delta$

Ejercicio 3

Solución

$\frac{1}{(z-b)(z-c)} = \frac{1}{b-c}[\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-c}]$

Vemos primero el caso $b \neq c$

Tenemos tres subcasos

- b interior, c exterior $\int_{C(a,r)} f(z)dz = \frac{1}{b-c}[\int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-b} - \int_{C(a,r)} \frac{dz}{z-c}] = \frac{1}{b-c}(2\pi i(binterior) - 0(ej1))$
- b y c interiores $\int_{C(a,r)} f(z)dz = \frac{1}{b-c}[2\pi i - 2\pi i] = 0$
- b y c exteriores, por el ejercicio 1 ambas partes son 0: $\int_{C(a,r)} f(z)dz = 0 - 0 = 0$

Ahora vemos el caso $b = c$ $f(z) = \frac{1}{(z-b)^2}$ tiene primitiva holomorfa en $\mathbb{C}^*$, $\frac{-1}{z-b} \implies \int_{C(a,r)} f(z)dz = 0$

Ejercicio 4

Solución

a

$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}dz$, donde $r \neq 2$, $z \neq \pm 2i$

$\frac{z+1}{z(z^2+4)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-2i} + \frac{C}{z+2i}$, donde $A = 1/4, B = 1/8 - i/4, C = -1/8 - i/4$

Por tanto

$\int_{C(0,r)} \frac{z+1}{z(z^2+4)}dz = \frac{1}{4}\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} + (\frac{1}{8} - \frac{i}{4})\int_{C(0,r)} \frac{1}{z-2i}dz + (-\frac{1}{8} + \frac{i}{4})\int_{C(0,r)} \frac{1}{z+2i}$

para $r \neq 2$ las dos últimas integrales se anulan, y por tanto $\frac{1}{4}\int_{C(0,r)} \frac{dz}{z} = \frac{2\pi i}{4} = \frac{\pi}{2}$

Ejercicio 5

Solución

$R > \text{máx}\{|a|, |b|\}$

$\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz = \frac{1}{b-a}\left[\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b}dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a}dz\right]$

Por el ejercicio 3 tenemos

$\frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} = \frac{f(z)}{b-a}\left[\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right]$

Por la fórmula de Cauchy para la circunferencia

$= \frac{1}{b-a}\left[\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-b}dz - \int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{z-a}dz\right] = 2\pi i f(b) - 2\pi i f(a)$

Consecuencia

Si $\exists M > 0 : |f(z)| \leq M \forall z \in \mathbb{C}$

$\frac{2\pi|f(b)-f(a)|}{|b-a|} = \frac{|2\pi i(f(b)-f(a))|}{|b-a|} = \left|\int_{C(0,R)} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)}dz\right| \leq \int_{C(0,R)} \frac{|f(z)|}{|z-a||z-b|}dz \leq \frac{M}{(R-|a|)(R-|b|)}2\pi R$ que tiende a 0 cuando $R \to \infty$ ya que $|z-a| \geq R - |a|$ y $|z-b| \geq R - |b|$

Equivalencia entre analiticidad y holomorfía

Ejercicio 1

Solución

$\phi(w,z) = \frac{\varphi}{w-z}$,

$\phi : \gamma^* x\mathbb{C}\backslash\gamma^* \to \mathbb{C}$

ϕ es continua

$\phi_w(z) = \phi(w,z)$

$z \to \phi_w(z)$

$\phi_w \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\{w\})$, $\phi_w \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\gamma^*)$

Por tanto por el teorema de holomorfía de una integral dependiente de 1 parámetro $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}\backslash\gamma^*)$

Podemos proceder también de otra forma:

Fijo $a \in \mathbb{C}\backslash\gamma^*$ $\lim_{z\to a} \frac{f(z)-f(a)}{z-a} = \lim_{z\to a} \frac{\int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-z}dw - \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w-a}dw}{z-a}$

$= \lim_{z\to a} \int_\gamma \varphi \frac{(w-a)-(w-z)}{(z-a)(w-z)(w-a)} dw = \lim_{z\to a} \int_\gamma \varphi(w) \frac{dw}{(w-z)(w-a)}$

Sabemos que podemos intercambiar límite e integral

Nos podemos restringir a un compacto para ver $\psi : \phi_{|\gamma * \times \overline{D}(a,r)} \to \mathbb{C}$ es continua con r suficientemente pequeño y $\psi(w,z) = \frac{\varphi(w)}{(w-z)(w-a)}$

tenemos que $\gamma^* \times \overline{D}(a,r)$ es compacto, por tanto ϕ es uniformemente continua.

La fórmula para las derivadas la podemos obtener por inducción:

$k = 1$ lo hemos hecho, supuesto cierto para k, vemos para $k+1$

Ejercicio 2

Solución

$(1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)} \in \mathcal{H}(D(0,1))$ por tanto es analítica en ese disco.

Por el Teorema de desarrollo de Taylor $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{n)}(0)}{n!} z^n$

Ejercicio 3

Solución

a

$f'(z) = \frac{2z-3}{z^2-3z+2}$

$\frac{1}{z^2-3z+2} = \frac{A}{2-z} + \frac{B}{1-z}$

Por tanto el desarrollo en serie de potencias de la original se puede conseguir a partir de desarrollo de las dos partes por separado.

$f'(z) = (2z-3)\sum_{n\geq 0}(\frac{A}{2}(\frac{z}{2})^n + Bz^n) = (2z-3)\sum_{n\geq 0}(\frac{A}{2^{n+1}} + B)z^n$

$= \sum_{n\geq 0}(\frac{A}{2^n} + 2B)z^{n+1} - \sum_{n\geq 0} 3(\frac{A}{2^{n+1}} + B)z^n$

que nos da como resultado

$$f'(z) = -\left(\frac{3A}{2} + B\right) + \sum_{n\geq 1}\left(\frac{A}{2^{n+1}} - B\right)z^n$$

Ejercicio 6

Solución

$f(z) = \frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1}{(z-a_1)(z-a_2)}$ $z^2 + z - 1 = 0 \iff z = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$, donde $a_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, a_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ $f(z) = \frac{1}{(a_1-z)(a_2-z)} = \frac{1}{a_1-a_2}\left[\frac{1}{a_1-z} - \frac{1}{a_2-z}\right]$ Expresamos α_n en términos de a_1 y a_2 $a_1 + a_2 = -1$ $a_1 * a_2 = -1$ $(z-a_1)(z-a_2) = z^2 - (a_1+a_2) + a_1a_2$

α_{n+2} a partir de aquí se puede expresar en términos de α_n y α_{n+1}

Ejercicio 1

Solución

a)

$f(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{f^{n)}(0)}{n!}z^n$ $f^{n)}(0) = n$, vemos $\left\{\frac{n}{n!}\right\}, \left\{\sqrt[n]{\frac{n}{n!}}\right\} \to 0 \implies R = \infty$,

b)

$\frac{f^{n)}(0)}{n!} = \frac{(n+1)!}{n!} = n+1$, $\sqrt[n]{n+1} \implies R = 1$ Por tanto no hay función entera que cumpla la condición

c)

$\frac{f^{n)}(0)}{n!} = \frac{2^n n!}{n!} = 2^n$, $\sqrt[n]{z^n} = 2 \implies R = 1/2$

d)

$\frac{f^{n)}(0)}{n!} = \frac{n^n}{n!}$, $\sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}}$ por el criterio del cociente $\implies R = \frac{1}{e} < \frac{1}{2}$

Ejercicio 12

Solución

$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2}$ $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)^2}$

$\phi(z) = \frac{1}{z}$

$\gamma* = C(0,1/2)^*$ $\phi(\gamma^*) = C(0,2)^*$ Si $\gamma(t) = \frac{1}{2}e^{-it}$ $\phi(\gamma(t)) = 2e^{it} \implies \phi o \gamma = C(0,2)$

Por tanto

$\int_{C(0,2)} \frac{dz}{z^2(z-1)^2} = \int_{C(0,1/2)} \frac{1}{\frac{1}{w^2}(\frac{1}{w}-1)^2} \frac{1}{w^2} dw = \int_{C(0,1/2)} \frac{w^2 dw}{(1-w)^2}$

Ceros de las funciones holomorfas

4 Existe la posibilidad de que f sea constante.

En otro caso, si f no es constante usando Liouille sabemos que $f(\mathbb{C})$ es denso en $\mathbb{C}$ Entonces $\forall z \in f(\mathbb{C})$, $\exists : f(c) = z \implies f(z) = f(f(c)) = f(c) = z$

Por tanto

$f(\mathbb{C}) \cap \mathbb{C} \implies f(z) = z \forall z \in \mathbb{C}$

también se puede razonar de la siguiente forma: $\forall z \in \mathbb{C}, \exists \{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $z_n \in f(\mathbb{C}) \forall n \in \mathbb{C} \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{z_n\} \to z \implies \{f(z_n)\} \to f(z) = z \implies f(z) = z \forall z \in \mathbb{C}$

Ejercicio 8

$f'(g(z))g'(z) = 0$ entonces puede darse $f'(g) = 0$ o $g' = 0$

Ejercicio 9

Definimos $h(z) = \frac{1}{f(1/z)}$, como $\lim_{w\to\infty} f(w) = \infty$ por tanto $\exists R > 0$ tal que si $|w| > R$, entonces $|f(w)| > 1$

Si $z \in D(0, 1/R) \backslash \{0\}$, $|z| < 1/R \iff 1/|z| > R$, entonces

podemos definir $h : D(0, 1/R)\backslash\{0\} \to \mathbb{C}$, $h \in \mathbb{H}(D(0, 1/R)\backslash\{0\})$ y $\lim_{z\to 0} h(z) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{f(1/z)} = 0$ y deducimos por el Teorema de Extensión de Riemman $h \in \mathbb{H}(D(0, 1/R))$ y $h(0) = 0$

$\exists g \in \mathbb{H}(D(0, 1/R)))$ con $g(0) \neq 0$, $\exists k \in \mathbb{N}$ tal que $h(z) = \frac{1}{f(1/z)} = z^k g(z)$

$f(1/z) = \frac{1}{z^k}\frac{1}{g(z)}$ donde el valor absoluto del segundo término está acotado, por tanto $f(w) = w^k \frac{1}{g(1/w)}$, como $g(0) \neq 0 \exists \delta > 0$, $\exists C > 0$ tal que $D(0, \delta) \subset D(0, 1/R)$ tal que $|g(z)| \geq C > 0 \forall z \in D(0, \delta) \implies \frac{1}{|g(z)|} \leq \frac{1}{C} \forall z \in D(0, \delta) \implies \frac{1}{|g(1/w)|} \leq \frac{1}{C} \forall x \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}(0, 1/\delta)$

$|f(w)| = |w|^k \frac{1}{g(1/w)} \leq \frac{1}{C}|w|^k \ \forall w \in \mathbb{C}\backslash\overline{D}(0, 1/\delta)$

por el ejercicio 2 de esta relación

f es un polinomio, en particular de grado menor o igual que k

10 pista LEMA Si f verifica que $|z| = 1 \implies |f(z)| = 1$, entonces $f(0) = 0$ o f es constante. PISTA LEMA: $1 = |f(z)|^2 = f(z)\overline{f(z)} \forall z \in \mathbb{T} 1 = f(\overline{z})\overline{f(\overline{z})} = f(1/z)\overline{f(\overline{z})} \forall$ – Si hemos probado eso y f es constante es trivial, en caso contrario $f(0) = 0 \implies \exists g \in \mathbb{H}(\mathbb{C})$, $\exists k \in \mathbb{N}$ con $g(0) \neq 0$ tal que $f(z) = z^k g(z) \forall z \in \mathbb{C}$

$1 = |f(z)| = |z|^k |g(z)| z \in \mathbb{T}$ g está en las mismas condiciones que f y por el lema anterior g es constante

Residuos

Ejercicio 1

$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2(3t)}{1+a^2-2a\cos(2t)}dt$

$1+a^2-2a\cos(2\pi) = |1-ae^{2it}|^2 = 1+a^2-2aRe(e^{2it}) = 1+a^2-2a\cos(2t) = (1+ae^{2it})\overline{1-ae^{2it}}$
$= (1-ae^{2it})(1-A\overline{e^{2it}}) = (1+ae^{2it})(1-ae^{-2it})$

$\gamma(t) = e^{it}\ \gamma'(t) = ie^{it}$

entonces

$(1+ae^{2it})(1-ae^{-2it}) = (1-az^2)(a-\frac{a}{z^2})$

por lo que consideramos la función

$\frac{z^2}{(1-az^2)(z^2-a)}$ como tenemos que multiplicar por $\gamma'(t)$ consideramos $\frac{z}{(1-az^2)(z^2-a)}$

lo que es igual a

$\frac{e^{it}}{(1-ae^{2it})(e^{2it}-a)}ie^{it}$

Haciendo el mismo procedimiento con el numerador

$\cos^2(3t) = \frac{1+\cos(6t)}{2} = \frac{1+Re(e^{i6t})}{2} = Re(\frac{1+e^{i6t}}{2})$

Así vemos que la función que finalmente tendríamos que considerar es

$f(z) = \frac{(1+z^6)z}{2(1-az^2)(z^2-a)}$ $A = \{\frac{-1}{\sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a}}, \pm\sqrt{a}\}$ $f : \mathbb{C}\backslash A \to \mathbb{C}$, $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C}\backslash A)$

El camino $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$, $\gamma(t) = e^{it}$ es nulhomólogo con respecto a $\mathbb{C}$

Como $A' = \emptyset$ por el teorema de los residuos $\int_\gamma f(z)dz = 2\pi i\left(Ind_\gamma(-\sqrt{a})Res(f(z), -\sqrt{a}) + Res(f(z), \sqrt{a})\right)$

Ejercicio 4

Sean $a, b \in \mathbf{R}^+$ calcular

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^+a^2)(x^2+b^2)^2}$$

En el caso $a \neq b$ tomamos $f(z) = \frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2}$ $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C}\backslash\{\pm ia, \pm ib\})$

Tomamos $R > \text{máx}\{a, b\}$, consideramos el camino cerrado $\Gamma = [-R, R] + SC(0, R)$ (semicircunferencia recorrida en sentido positivo)

$\gamma : [-R, R] \to \mathbb{C}$, $\gamma(x) = x$, $\gamma'(x) = 1$

Usamos que Γ es nul-homologa con respecto a $\mathbb{C}$ $\int_\Gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{SC(0,R)}$

Por el teorema de los residuos

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i[Ind_\Gamma(ia)Res(f(z), ia) + Ind_\Gamma(ib)Res(f(z), ib)]$$

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i[Res(f(z), ia) + Res(f(z), ib)]$$

Ambos índices son 1 $\int_\Gamma f(z)dz = \int_{-R}^{R} f(x)dx + \int_{SC(0,R)} f(z)dz$

$|\int_{SC(0,R)} f(z)dz| \leq l(SC(0,R))\,\text{máx}\{|f(z)| : z \in SC(0,R)\} \leq \frac{\pi R}{(R^2-a^)(R^2-a^2)^2}$ que tiende a 0 cuando $R \to \infty$

$|f(z)| = \frac{1}{|z^2+a^2||z^2+b^2|} \leq \frac{1}{(R^2-a^2)(R^2-b^2)^2}$

si $|z| = R$ $|z^2 + a^2| \geq |z|^2 - a^2 = R^2 - a^2$

———-

$Res(f(z), ia) = \text{lím}_{z\to ia}(z - ia)f(z) = \text{lím}_{z\to ia} \frac{(z-ia)}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)^2} = \frac{1}{(b^2-a^2)^2} \text{lím}_{z\to ia} \frac{z-ia}{z^2+a^2}$ por l'Hopital $= \frac{1}{(b^2-a^2)^2} \frac{1}{2ia}$

k es el orden del polo ib

$Res(f(z), ib) = \frac{1}{(z-1)'} \text{lím}_{z\to ib} \frac{d^{k-1)}}{dz^{k-1}}((z-ib)^k f(z)) = \text{lím}_{z\to ib} \frac{d}{dz}((z-ib)^2 f(z)) = \text{lím}_{z\to ib} \frac{d}{dz}\left(\frac{(z-ib)^2}{(z^2+a^2)(z-ib)^2(z+ib)^2}\right) = \text{lím}_{z\to ib} \frac{2z*(z+ib)^2+2(z+ib)(z^2+a^2)}{(z^2+a^2)^2(z+ib)^4} = \frac{4b+2(-a^2+b^2)}{(a^2-b^2)^2(-ib^3)8}$

por tanto

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)^2} = 2\pi i\left(\frac{1}{2ia}\frac{1}{(b^2 - a^2)^2} + \frac{4b + 2(b^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(-i)8b^34}\right) = \frac{4b^3 - a(4b + 2(b^2 - a^2))}{4ab^3(b^2 - a^2)^2}$$

continuará

Ejercicio 16

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x+1}dx$

Consideramos $f(z) = \frac{e^{z/2}}{e^z+1}$ $e^z + 1 = 0 \iff e^z = -1 \iff z \in Log(-1) = \{0 + i(\pi + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z}\} = A$

$f : \mathbb{C}\backslash A \to \mathbb{C}$ $f \in \mathbb{H}(\mathbb{C}\backslash A)$

$\Gamma_R = [-R, R, R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$ es nul-homólogo con respecto a $\mathbb{C}$ A no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$

Por el teorema de los residuos

$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i Ind_{\Gamma_R}(i\pi) Res(f(z), i\pi)$

$\int_{\Gamma_R} f(z)dz = 2\pi i Res(f(z), i\pi) = \frac{[-R,R]}{f}(z)dz + \int_{[R,R+2\pi i]} f(z)dz + \int_{[R+2\pi i,-R+2\pi i]} f(z)dz + \int_{[-R+2\pi i,-R]}$

$\left|\int_{[R,R+2\pi i]}\right| \leq 2\pi \max\{|f(z)| : z \in [R, R + 2\pi i]\} \leq 2\pi \frac{e^{R/2}}{e^R - 1} \to 0$ cuando $R \to \infty$

donde hemos usado: $|f(z)| = |\frac{e^{z/2}}{e^z+1}| = \frac{e^{R/2}e^{ti/2}}{e^R-1} = \frac{e^{R/2}}{e^R-1}$ y $|e^z + 1| \geq |e^z| - 1 = e^R - 1$ ya que $z = R + ti$

$\left|\int_{-R+2\pi i,-R} f(z)dz\right| \leq 2\pi \max\{|f(z)| : z \in [-R + 2\pi i, -R]\} \leq 2\pi \frac{e^{-R/2}}{1-e^{-R}} \to 0$ cuando $R \to \infty$

usando: Si $z = -R + ti : t \in [0, 2\pi]$ $|f(z)| = \left|\frac{e^{-R/2}e^{ti/2}}{e^{-R}e^{ti}+1}\right| \leq \frac{e^{-R/2}}{1-e^{-R}}$

$\int_{[-R,R]} f(z)dz = \int_{-R}^{R} \frac{e^{x/2}}{e^x+1}\gamma'(x)dx$ con $\gamma(x) = x$ y $x \in [-R, R]$

$\int_{[R+2\pi i,-R+2\pi i]} f(z)dz = -\int_{[-R+2\pi i,R+2\pi i]} f(z)dz = -\int_{-R}^{R} \frac{e^{x/2}e^{\pi i}}{e^x+1}dz = \int_{[-R,R]} \frac{e^{x/2}}{e^x+1}dx$ donde hemos usado $\varphi(x) = xx + 2\pi i : x \in [-R, R]$, $\varphi'(x) = 1$

$f(\varphi(x)) = \frac{e^{x/2}e^{\pi i}}{e^{x+2\pi i}+1} = \frac{-e^{x/2}}{e^2+a}$

Tomando límite con $R \to \infty$ obtenemos que $2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x+1}dx = 2\pi i Res(f(z), i\pi)$

$Res(f(z), i\pi) = \lim_{z\to i\pi} f(z) = \lim_{z\to i\pi}(z - i\pi)\frac{e^{z/2}}{e^z+1} = e^{i\pi/2} \lim_{z\to i\pi} \frac{z-i\pi}{e^z+1}$ que usando l'Hopital nos queda $-i$

$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{x/2}}{e^x+1}dx = \pi i Res(f(z), i\pi) = \pi i(-i) = \pi$