

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Geometría III

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

1. El espacio afín	3
1.1. El plano afín	3
1.2. Rectas afines	4
1.2.1. Posición relativa entre rectas	5
1.3. Triángulos	5

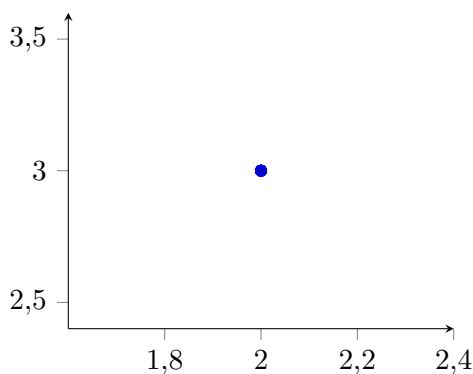
Introducción.

En esta asignatura trataremos de estudiar la geometría afín. Nos centraremos en el plano, el espacio y las figuras que se forman en él.

1. El espacio afín

1.1. El plano afín

Este plano, durante todo el contenido de los apuntes será el plano \mathbb{R}^2 . Sabemos que en este plano podemos representar un simple punto o un vector dentro de este plano (en este caso, es el plano vectorial). Daremos ahora por sabido todas las propiedades de los vectores.



Lo que haremos es transformar las propiedades de vectores en propiedades de puntos, veamos cómo unir estos dos conceptos.

Sean p y q dos puntos del plano. Entonces, podemos transformarlos en un vector $\vec{u} = pq = q - p$. De la misma forma, analíticamente podemos ver que si tenemos un punto p y le añadimos un vector \vec{u} , obtenemos otro punto q . Damos así por definidas la suma de puntos, vectores y puntos y vectores.

Definición (Combinación lineal de vectores). Si u_1, u_2, u_3 son vectores y $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ son escalares, entonces:

$$\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3$$

es una combinación lineal de vectores

Definición (Razón de vectores proporcionales). Si u, v son dos vectores proporcionales es decir $u = \lambda v$, entonces se llama a λ la razón de esos vectores.

Podemos también hacer combinaciones de puntos de la siguiente forma:

Definición (Combinaciones baricéntricas de puntos). Si p_1, \dots, p_n son puntos y $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ pesos de los puntos, que tienen la condición de que $\sum \alpha_i = 1$, entonces una combinación de puntos de la forma:

$$p = \sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$$

Es un punto y se le llama combinación baricéntrica de puntos

Demostración. Lo que haremos, es transformar los puntos en vectores y así la demostración será trivial.

Restamos primero $p - p_1 = \sum \alpha_i(p_i - p_1)$, así tenemos el vector determinado por p y p_1 y tenemos así una identidad de vectores, de la forma:

$$p - p_1 = \sum_{i=2}^n \alpha_i p_i - p_1$$

Y llegamos así a que

$$p = p_1 + \sum_{i=2}^n \alpha_i p_i$$

□

Definición. Si los pesos α_i asignados a los puntos son todos positivos, llamaremos a su combinación una combinación convexa.

Definición (Centro de gravedad de unos puntos). Si p_1, \dots, p_n son puntos y $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ son sus pesos, entonces llamamos a

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i p_i$$

el centro de gravedad de los puntos.

Definición (Punto medio). Sean p y q dos puntos en el espacio afín. Entonces m es el punto medio entre p y q si está definido como:

$$m = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}q = \frac{1}{2}(p + q)$$

Otra forma de hablar de él es: si $u = pq$, entonces:

$$m = \frac{1}{2}u + p$$

1.2. Rectas afines

A partir de ahora, cada vez que mencionemos una recta, estaremos hablando de una recta afín.

Definición. Una recta vectorial es un subespacio vectorial de dimensión 1. Estas están generadas por un vector. De hecho, se notan como $L(v)$ con v un vector.

Proposición. Una recta vectorial se puede formar haciendo una combinación de la forma: Si p es un punto y v un vector, entonces la recta r viene dada por

$$r = p + L(v) = \{p + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Además, notaremos a $L(v) = \vec{r}$.

Definición. Si v es un vector director, llamaremos variedad de dirección v a $L(v) = \vec{r}$.

Propiedades:

- Si q es un punto y $q \in r \implies r = q + L(v)$
- Si p, q son dos puntos, entonces por ellos pasa una recta y esta es única. Esta recta se nota : $r = p + L(\vec{pq})$

Demostración. Si la recta r pasa por p y q , sea s otra recta que pasa por ellos, entonces:

$$s = p + L(\vec{pq}) = r$$

□

1.2.1. Posición relativa entre rectas

Según se encuentren en el plano afín, dos rectas r y s pueden ser:

- Paralelas, notado $r \parallel s \equiv \vec{r} = \vec{s}$
- No paralelas, si sus vectores directores son linealmente independientes.

Teorema. Si r, s son dos rectas del plano afín, entonces:

$$(i) \ r \not\parallel s \implies r \cap s = \text{un punto}$$

$$(ii) \ r \parallel s \implies r = s \text{ ó } r \cap s = \emptyset$$

Demostración. (i) Si u, v son los vectores directores de r y s , entonces con los pares $\{u, v\}$ tenemos que $p + \lambda u = q + \mu v$ con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ y si $r = p + L(u)$ y $s = q + L(v)$, y $\vec{pq} = \lambda u - \mu v$ y por ello existen únicos λ, μ .

□

1.3. Triángulos

Son polígonos que vienen dados por tres puntos no alineados A, B, C , que son sus vértices y las tres rectas que los unen.

Proposición. A, B, C son puntos no alineados si \vec{AB}, \vec{AC} son linealmente independientes

Teorema. Si consideramos los triángulos ABC y $A_1B_1C_1$ con dos de los lados homólogos paralelos y las razones de los vectores de esos lados son iguales. Si las rectas paralelas son:

$AvC \parallel A_1C_1$ y $AvB \parallel A_1B_1$, por lo que las razones son:

$$\frac{A_1\vec{C}_1}{\vec{AC}} = \frac{A_1\vec{B}_1}{\vec{AB}}$$

Entonces, la pareja restante $CvB \parallel C_1B_1$ y $\frac{B_1\vec{C}_1}{\vec{BC}} = \frac{A_1\vec{B}_1}{\vec{AB}} = \frac{A_1\vec{C}_1}{\vec{AC}}$

Demostración. Si los lados son paralelos, entonces los vectores directores son proporcionales.

Si w (el lado no mencionado del primer triángulo) es $w = -u+v$ y w_1 (el lado no mencionado del segundo triángulo) es $w_1 = -\lambda u + \lambda v = \lambda(-u+v) = \lambda w$ por lo que tenemos lo que queríamos. \square

Definición (Triángulo medio). Si ABC es un triángulo y A', B', C' los puntos medios de sus lados, entonces:

- (i) $A'B'C'$ es un triángulo
- (ii) Los lados homólogos son paralelos y que el factor de proporcionalidad es: $-\frac{1}{2}$

Demostración. (i) Se hace viendo que si ABC no están alineados, estos 3 tampoco

- (ii) Tenemos que: $A' = B/2 + C/2$, $B' = A/2 + C/2$, $C' = A/2 + B/2$. Tenemos por tanto que: $A'\vec{B}' = B' - A' = \frac{1}{2}(A - B) = -\frac{1}{2}\vec{AB}$ y por tanto los lados homólogos son paralelos.

Además, el factor es el número obtenido en la conversión, es decir $-\frac{1}{2}$.

\square

Definición (Medianas de un triángulo). Las medianas de un triángulo ABC son las rectas que unen un vértice con el punto medio del lado opuesto

Definición (Baricentro de un triángulo). El baricentro G de un triángulo que viene dado por:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$$

Teorema. Si ABC es un triángulo en el plano afín, entonces las medianas son concurrentes. Su punto de corte es el Baricentro. El baricentro triseca el segmento que une un vértice con el punto medio homólogo.

Teorema. Sea A' el punto medio del lado opuesto a A en un triángulo ABC . Sea AvA' una de las medianas. Esta es:

$$\{\lambda A + \mu A' : \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}$$

Entonces, sabemos que $G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C$ y veamos que este está en la mediana: Tenemos que ver la ecuación:

$$G = \frac{1}{3}A + \frac{1}{3}B + \frac{1}{3}C = \lambda A + \mu A' \implies \frac{1}{3}A + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = \dots = G$$