Universidad de Granada

Modelos Matemáticos I

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Índice

Introducción.

En esta asignatura, intentaremos estudiar una serie de modelos que se dan en la naturaleza y que explican cosas de

1. Ecuaciones en diferencias de primer orden

Para motivar este tema, vamos a poner primero unos ejemplos de ecuacinoes en diferencias de primer orden.

1. Progresión geométrica, una ecuación de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n$$

   Para dar una solución, deberíamos establecer el valor de x_n de forma explícita. En este caso, una solución sería:

$$x_n = \mathcal{C}\alpha^n$$

   Donde $\mathcal{C}$ es una constante. Así, $x_0 = \mathcal{C}$.

2. Progresión aritmética, es decir, una de la forma:

$$x_{n+1} = x_n + \beta$$

   donde una solución sería:

$$x_n = \mathcal{C} + n\beta$$

3. La sucesión de Fibonacci es otro ejemplo de una ecuación en diferencias.

$$x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$$

Definición (Ecuación en diferencias). Una ecuación en diferencias es una ecuación en la que intervienen un número fijo de términos consecutivos de una sucesión.

$$F(x_{n+k}, \ldots, x_n, n) = 0$$

donde F es una función de varias variables, $\{x_n\}$ es una sucesión, las incógnitas y $k \geq 1$ es el orden de la ecuación

Como ejemplo de cálculo de órdenes, podríamos que decir de la progresión aritmética y geométrica son de orden 1 y la sucesión de Fibonacci es de orden 2.

Definición (Resolución de una ecuación en diferencias). Resolver una ecuación en diferencias es hallar la forma explícita de todas las sucesiones que satisfacen la igualdad, la solución general. Una solución concreta de la ecuación se llama solución particular y generalmente se obtiene a partir de k condiciones iniciales en la solución general.

Nota. Una propiedad de las progresiones geométricas es que si la progresión converge, converge a 0. Si no converge, puede ser cíclica, divergente o alternada.

Definición (Ecuación en diferencias lineal). Una ecuación en diferencias lineal viene dado por una ecuación de la forma:

$$a_k(n)x_{n+k} + ... + a_0(n)x_n = b(n)$$

Si $a_k(n) \neq 0$, $n \geq 0$ se dice que es de orden k. Si $b(n) = 0$, se dice que la ecuación es homogénea.

1.1. Ecuación en diferencias de primer orden lineal con coeficientes constantes

Una ecuación en diferencias de primer orden lineal será de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Estas ecuaciones serán de orden 1 con coeficientes constantes.

Proposición. *La solución de estas ecuaciones será:*

(i) *Si $\beta = 0$ es una progresión geométrica así que $x_n = \mathcal{C}\alpha^n$*

(ii) *Si $\beta \neq 0$ y $\alpha = 1$ entonces es una progresión aritmética, así que $x_n = \mathcal{C} + \beta$*

(iii) *Si $\beta \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ entonces la ecuación tiene una solución constante:*

$$x_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

Esta solución satisfacerá la ecuación si no dependiera de n.

Demostración. Probaremos la tercera, que es la que no es trivial.
Buscaremos entonces una solución constante x_*. Si es solución, debe verificar que:

$$x_* = \alpha x_* + \beta \implies x_* = \frac{\beta}{1-\alpha}$$

□

EJEMPLO: Comprobar si en el caso 3, una solución podría ser:

$$x_n = \alpha^n x_0 + \beta \sum_{i=0}^{n-1} \alpha^i$$

Proposición. *Si $\alpha \neq 1$, la sucesión $\{x_n\}$ es solución de la ecuación $\iff$ la sucesión $\{z_n\}$ definida por $z_n = x_n - x_*$ es solución de la ecuación:*

$$z_{n+1} = \alpha z_n$$

Demostración. Si $\{x_n\}_{n\geq 0}$ es solución de (1) $\implies \bar{x}_{n+1} = \alpha\bar{x}_n + \beta$

Además, $\{x_*\}$ es solución de (1) $\implies \bar{x}_* = \alpha\bar{x}_* + \beta$

Ahora, restamos ambas y nos queda:

$$\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_* = \alpha(\bar{x}_n - \bar{x}_*).$$

Por lo que hemos obtenido una solución de la ecuación (2), pues si $\bar{z}_n = \bar{x}_n - \bar{x}_* \implies \bar{z}_{n+1} = \alpha\bar{z}_n \implies \{\bar{z}_n\}$

□

EJEMPLO: Resuelva $x_{n+1} = -ix_n + 3$. Esto es una ecuación en diferencias de primer orden lineal no homogénea.
Solución. Primero, calculamos la solución constante: $x_n = x_*$ para $n \geq 0$. Esta es:

$$x_* = -ix_* + 3 \implies x_* = \frac{3}{1+i}$$

Calculamos ahora la ecuación homogénea asociada, esta es $z_{n+1} = -iz_n$ con $n \geq 0$. Así, $z_n = \mathcal{C}(-i)^n$.

Ahora, una solución de la ecuación inicial sería:

$$x_n = x_* + z_n = \frac{3}{1+i} + \mathcal{C}(-i)^n$$

□

Proposición. *Si $\alpha \neq 1$, la ecuación:*

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

entonces la ecuación tiene tantas soluciones como valores posibles tenga la condición inicial:

$$x_n = x_* + (x_0 - x_*)\alpha^n, \quad n = 0, 1, 2...$$

Demostración. Si $x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$ y $\alpha \neq 1$, las soluciones de son de la forma:

$$x_n = x_* + z_n$$

con z_n una solución homogénea asociada y x_* una solución constante.

$$z_{n+1} = \alpha z_n \implies z_n = \mathcal{C}\alpha^n \implies z_n = (x_o - x_*)\alpha^n \implies x_n = x_o + (x_0 - x_*)\alpha^n$$

□

EJEMPLO: $x_{n+1} = ix_n + 1 \;\; n \geq 0$ con $x_0 = i$

Solución. Primero hallamos la solución constante:

$$x_* = \frac{1}{1-i} \implies x_* = ix_* + 1$$

Ahora, hallamos la solución homogénea asociada:

$$z_{n+1} = iz_n \text{con } z_n = \mathcal{C}i^n$$

Seguidamente, hallamos la solución de la ecuación completa:

$$x_n = x_* + z_n = \frac{1}{1-i} + \mathcal{C}i^n$$

Por último, aplicamos la condición inicial $x_0 = i$ dada. Así:

$$x_0 = \frac{1}{1-i} + \mathcal{C}i \implies \mathcal{C} = i - \frac{1}{1-i} = \frac{i+1-1}{1-i} = \frac{i}{1-i} = \frac{i(1+i)}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i$$

De esta forma, la solución sería:

$$x_n = \frac{1}{1-i} + (\frac{-1}{2} + \frac{1}{2}i)i^n$$

Y esto se podría pasar a forma estándar de número complejo. □

Ejemplo (2): $x_{n+1} = (3-2i)x_n - 1$ para $n \geq 0$.
Solución. Tenemos que:

$$x_n = \frac{-1}{1-(3-2i)} + \mathcal{C}(3-2i)^n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i + \mathcal{C}(3-2i)^n$$

□

Proposición (Fórmula de Moivre). *Si α es un número complejo, entonces:*

$$\alpha^n = r^n(cos(n\theta) + isin(n\theta))$$

Demostración. Vamos a hacer un razonamiento por inducción:

1. Si $n = 1$. Entonces, $\alpha = r(cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)$, trivial.

2. Supuesto cierto para cierto n, lo demostraremos para $n+1$:

$$\alpha^{n+1} = \alpha\alpha^n = [r(cos(\theta) + i\operatorname{sen}(\theta))][r^n(cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta))] =$$

$$r^{n+1}[cos(\theta)cos(n\theta) + isen(\theta)cos(n\theta) + isen(n\theta)cos(\theta) - sen(\theta)sen(n\theta)] =$$

$$r^{n+1}[cos(\theta + n\theta) + isen(\theta + n\theta)] = r^{n+1}[cos((n+1)\theta) + isen((n+1)\theta)]$$

□

Nota. Esto es porque un número complejo es de la forma $\alpha = a + bi = r(cos\theta + isin\theta)$. Donde el módulo es $r = \sqrt{a^2+b^2}$ y θ es el ángulo, tal que $0 \leq \theta \leq 2\pi$. $(cos\theta + isin\theta)$ tiene módulo 1.

1.2. Comportamiento asintótico de las soluciones

Tendríamos en este caso que estudiar cómo se comporta la sucesión $\{\alpha^n\}$ con $\alpha \in \mathbb{C}$.

Proposición.

(i) $|\alpha| < 1 \implies \{\alpha^n\} \to 0$

(ii) $|\alpha| > 1 \implies \{|\alpha|^n\} \to +\infty$

(iii) $|\alpha| = 1 \implies \alpha^n \in \mathbb{S}^1$

Ahora, si tuviéramos una ecuación de la forma:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

Ya sabemos que su solución sería:

$$x_* + z_n = x_* + \mathcal{C}\alpha^n$$

Por tanto tendríamos que estudiar cómo varía α^n.

Teorema (Comportamiento asintótico de las soluciones). *Las soluciones* $\{x_n\}_{n\geq 0}$ *de la ecuación:*

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

verifican:

- *Si* $|\alpha| < 1$, *se tiene que* $x_n \to x_*$
- *Si* $|\alpha| > 1$, *se tiene que* x_n *diverge.*
- *Si* $|\alpha| = 1$, *entonces* x_n *oscila alrededor de* x_*, *esto es,* x_n *está en la circunferencia de centro* x_* *y radio* $|x_0 - x_*|$.

Demostración. Si tenemos que:

$$x_{n+1} = \alpha x_n + \beta$$

Ya sabemos que su solución sería:

$$x_* + z_n = x_* + \mathcal{C}\alpha^n$$

. Entonces:

(i) $|\alpha| < 1 \implies \{\alpha^n\} \to 0 \implies \{x_n\} \to x_*$

(ii) $|\alpha| > 1 \implies \{|\alpha|^n\} \to +\infty \implies \{|x_n|\}$ nos da el mismo comportamiento que $|\alpha|^n$

(iii) $|\alpha| = 1 \implies \alpha^n \in \mathbb{S}^1$ si tomamos módulos y despejamos, tenemos que:

$$|x_n - x_*| = |G|$$

Así que todas las soluciones se mantienen en la circunferencia de centro x_* y radio $|x_0 - x_*|$

□

2. Modelo de la telaraña

En este modelo, tendremos dos funciones con las que trabajaremos.

- Una función oferta, $O(p)$ que depende del precio p
- Una función demanda, $D(p)$, que también depende del precio p

Supondremos ahora que estas dos funciones son rectas, para simplificar el sistema. Por ello, tendremos:

- $O(p) = a + bp$ con $b > 0$ la marginal de la oferta
- $D(p) = c - dp$ con $d > 0$ la marginal de la demanda

Sin embargo, estas funciones tienen que ajustarse haciendo una estimación con los datos anteriores. Se supone que habrá un punto de equilibrio entre la oferta y la demanda, lo que será un punto de corte entre estas dos funciones establecidas. A este punto lo llamaremos p_*. Igualando las ecuaciones, tendríamos que:

$$(b + d)p_* = c - a \implies p_* = \frac{c - a}{b + d}$$

Ahora, para que este precio sea correcto, tenemos que tener que b y d sean mayores que cero para no dividir por cero, y que el precio sea positivo, así que supondremos que $c > a$.

Ahora, para trabajar con esa antelación, lo que intentamos hacer es que:

$$D(p_n) = O(p_{n-1)} \implies c - dp_n = a + bp_{n-1}$$

Lo cual es una ecuación en diferencias de primer orden, que se puede seguir despejando como:

$$p_{n+1} = \frac{-b}{d}p_n + \frac{c - a}{d}$$

Y ahora, resolvemos:

$$p_n = x_* + z_n = p_* + \mathcal{C}(\frac{-b}{d})^n$$

tenemos que

$$x_* = \frac{\beta}{1-\alpha} = \frac{(c-a)/d}{(1-(-b/d))} = \frac{c-a}{b+d} = p_*$$

Por tanto, tenemos que conseguir que $p_n \to p_*$ y para ello tenemos que conseguir que, como $p_{n+1} = p_* + \mathcal{C}(\frac{-b}{d})^n$, entonces tenemos que hacer que $|\dfrac{-b}{d}| < 1 \implies b < d$. Por ello, lo que tenemos en las rectas es que la pendiente (b) de la recta de la oferta sea menor que la pendiente de la demanda (d).