

UNIVERSIDAD DE GRANADA

Ejercicios resueltos Álgebra I

Doble Grado de Informática y Matemáticas

Curso 2016/17

Ejercicio 6

En el anillo $\mathbb{Z}[i]$, resolver el siguiente sistema de congruencias:

$$\begin{cases} x \equiv i & \text{mod } (3) \\ x \equiv 1 + i & \text{mod } (3 + 2i) \\ x \equiv 3 + 2i & \text{mod } (4 + i) \end{cases}$$

Resolución.

Empezaremos resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x \equiv i & \text{mod } (3) \\ x \equiv 1 + i & \text{mod } (3 + 2i) \end{cases}$$

Para ello hallaremos la solución particular de $x \equiv i \text{ mod } (3)$. Como i es una unidad del anillo, entonces $\forall a \in \mathbb{Z}[i] \Rightarrow (a, i) = i$. Los coeficientes de Bezout son $0 * 3 + 1 * i = i$ de manera trivial. Entonces la solución general de la primera ecuación sería $x = i + 3 * k$.

Ahora sustituimos x en la segunda ecuación, y nos queda la ecuación $i + 3k \equiv 1 + i \text{ mod } (3 + 2i)$ de manera equivalente $3k \equiv 1 \text{ mod } (3 + 2i)$. Ahora sacaremos los coeficientes de Bezout de 3 y $3 + 2i$.

$$\begin{array}{c|cc} & 3+2i & 3 \\ 3+2i & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ -i & 1 & -1-i \end{array}$$

Por ello, sabemos que $3 * (-1 - i) \equiv -i \text{ mod } (3 + 2i)$. Una solución particular será $k = (-1 - i) * -i = (i - 1)$. La solución general para k será por lo tanto $k = (i - 1) + (3 + 2i) * k'$.

Sustituimos la particular de k en la primera resolución y hallaríamos $M = [3, 3 + 2i]$ para ver cada cuanto debemos hacer la repetición. Para calcular el mcm recordaremos que $(a, b) * [a, b] = ab \Rightarrow \frac{ab}{(a, b)} = [a, b]$. Entonces para nuestro caso particular $[3, 3 + 2i] = \frac{9 + 6i}{-i} = 9i - 6$. Así pues la solución será:

$$x = i + 3(i - 1) + k''(9i - 6) = 4i - 3 + k''(9i - 6)$$

Ahora cogemos el sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 4i - 3 & \text{mod } (9i - 6) \\ x \equiv 3 + 2i & \text{mod } (4 + i) \end{cases}$$

Para resolverlo y hallar (por fin) la solución final haremos lo mismo: hallar la solución general de la primera ecuación (ya resuelta) y sustituir en la segunda, mcm de los módulos

y terminamos.

Solución primera ecuación: $4i - 3 + k''(9i - 6)$.

Sustituimos segunda: $4i - 3 + k''(9i - 6) \equiv 3 + 2i \pmod{4+i} \rightarrow (9i - 6)k'' \equiv 6 - 2i \pmod{4+i}$

Hallamos coeficientes de bezout y mcd:

$$\begin{array}{r|rr} & 9i-6 & 4+i \\ 9i-6 & 1 & 0 \\ 4+i & 0 & 1 \\ 2i & 1 & 1-2i \\ i & -2 & 4i-1 \end{array}$$

Enunciamos solución particular y un indicio de la general: Como $(9i - 6)(-2) \equiv i \pmod{4i - 1} \Rightarrow (9i - 6)(-2)(-6i - 2) \equiv i(-6i - 2) \pmod{4i - 1} \Rightarrow (9i - 6)(12i + 4) \equiv (6 - 2i) \pmod{4i - 1} \Rightarrow k'' = (12i + 4) + [9i - 6, 4 + i]k'''$

Calculamos $[9i-6, 4+i]: \frac{30i-33}{i} = 30 - 33i$

Solución general: $(12i + 4) + (30 - 33i)k'''$