Tarea 12 de Modelos Probabilistas Aplicados

Ejercicios

5271

24 de noviembre de 2020

1. Introducción

En este documento se presentan los resultados de varios ejercicios del libro "*Introduction to Probability*"[1].

2. Ejercicio 1 de la página 392

Let $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ describe a branching process in which each parent has j offspring with probability p_j. Find the probability d that the process eventually dies out if

a) $p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$.

b) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3}$.

c) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = 0, p_2 = \frac{2}{3}$.

d) $p_j = \frac{1}{2}^{j+1}$, for $j = 0, 1, 2, ...$

e) $p_j = (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^j$, for $j = 0, 1, 2, ...$

f) $p_j = e^{-2}2^j/j!$, for $j = 0, 1, 2, ...$ (estimate d nummerically)

De acuerdo al teorema 10.3 si el número medio m de descendientes producidos por un solo padre es ≤ 1, entonces d $= 1$ y el proceso se extingue con probabilidad uno. Si m > 1 entonces d < 1 y el proceso se extingue con probabilidad d. Para la resolución de los incisos a), b), c) se utiliza la expresión siguiente:

$$\mathrm{m} = p_1 + 2p_2 = 1 - p_0 + p_2 \tag{1}$$

a) $p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$.

$$
\begin{align}
\mathrm{m} &= p_1 + 2p_2 \tag{2}\\
&= \frac{1}{4} + 2\left(\frac{1}{4}\right) \tag{3}\\
&= \frac{3}{4} \tag{4}
\end{align}
$$

Por tanto m es menor que uno y la probabilidad de decadencia es uno.

b) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3}$.

$$
\begin{align}
\mathrm{m} &= p_1 + 2p_2 \tag{5}\\
&= \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right) \tag{6}\\
&= 1 \tag{7}
\end{align}
$$

Por tanto m es igual a uno y la probabilidad de decadencia es uno.

c) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = 0, p_2 = \frac{2}{3}$.

$$
\begin{align}
\mathrm{m} &= p_1 + 2p_2 \tag{8}\\
&= 0 + 2\left(\frac{2}{3}\right) \tag{9}\\
&= \frac{4}{3} \tag{10}
\end{align}
$$

Por tanto m es mayor que uno y la probabilidad de decadencia es igual a d. A contención pasamos a calcular la probabilidad de decadencia (d)

$$
\begin{align}
d &= \frac{p_0}{p_2} \tag{11}\\
&= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \tag{12}\\
d &= \frac{1}{2} \tag{13}\\
& \tag{14}
\end{align}
$$

d) $p_j = \frac{1}{2}^{j+1}$, for $j = 0, 1, 2,.$

$$\begin{aligned}
h(z) &= p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 ... && (15)\\
&= \frac{1}{2}^{0+1} + \frac{1}{2}^{1+1} z + \frac{1}{2}^{2+1} z^2 + \frac{1}{2}^{3+1} z^3 + \frac{1}{2}^{4+1} z^4 + ... && (16)\\
&= \frac{1}{2}^1 + \frac{1}{2}^2 z + \frac{1}{2}^3 z^2 + \frac{1}{2}^4 z^3 + \frac{1}{2}^5 z^4 .. && (17)\\
&= \frac{1}{2}(1 + 1/2^1 z + 1/2^2 z^2 + 1/2^3 z^3 + ...) && (18)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z}\right) && (19)\\
&= \frac{1}{2 - z}. && (20)
\end{aligned}$$

Calculando h'(z) tenemos:

$$\begin{aligned}
h'(z) &= \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{2 - z}\right) && (21)\\
&= \frac{-\frac{d}{dz}(2 - z)}{(2 - z)^2} && (22)\\
&= \frac{1}{(2 - z)^2} && (23)\\
& && (24)
\end{aligned}$$

ahora calculamos h'(1): $m = h'(1) = \frac{1}{(2-1)^2} = 1$ Como m es igual a 1 entones la probabilidad de decadencia es uno.

3. Ejercicio 3 de la página 392

In the chain letter problem (see Example 10.14) find your expected profit if

a) $p_0 = 1/2$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1/2$.

b) $p_0 = 1/6$, $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$.

Show that if $p_0 > 1/2$, *you cannot expect to make a profit.*

Para la resolver este ejercicio se se emplea la siguiente expresión:

$$50\mathrm{m} + 50\mathrm{m}^{12}, \quad \text{con} \quad \mathrm{m} = p_1 + 2p_2. \tag{25}$$

a) $p_0 = 1/2$, $p_1 = 0$, $p_2 = 1/2$. Sustituyendo en la expresión anterior se tiene:

$$\begin{aligned}
\mathrm{m} &= 0 + 2\left(\frac{1}{2}\right) && (26)\\
&= 1, && (27)
\end{aligned}$$

por lo que:

$$50(1) + 50(1^{12}) - 100 = 0 \tag{28}$$

Por tanto el la ganancia esperada es cero.

b) $p_0 = 1/6$, $p_1 = 1/2$, $p_2 = 1/3$.

$$\begin{aligned} \mathrm{m} &= \frac{1}{2} + 2\left(\frac{1}{3}\right) & (29)\\ &= \frac{7}{6}, & (30) \end{aligned}$$

por lo que:

$$50\left(\frac{7}{6}\right) + 50\left(\frac{7}{6}\right)^{12} - 100 \approx 276{,}3 \tag{31}$$

Por tanto el la ganancia esperada es 276.3.

Para todos los posibles valores de $p_0 > 1/2$, $p_2 < p_0$ por lo tanto $\mathrm{m} < 1$ y $50\mathrm{m} + 50\mathrm{m}^{12} < 100$, por lo que el juego no va a ser favorable.

4. Ejercicio 1 de la página 401

Let X be a continuous random variable with values in $[0, 2]$ and density f_X. Find the moment generating function $g(t)$ for X if

a) $f_X(x) = \frac{1}{2}$.

b) $f_X(x) = \frac{1}{2}x$.

c) $f_X(x) = 1 - \frac{1}{2}x$.

d) $f_X(x) = |1 - x|$.

e) $f_X(x) = \frac{3}{8}x^2$.

Para la realización de este ejercicio se utiliza la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} g(t) &= \mathbb{E}[e^{tx}] & (32)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} fX(x)\mathrm{d}x & (33) \end{aligned}$$

a) $fX(x) = \frac{1}{2}$.

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^2 e^{tx} \cdot \frac{1}{2}\mathrm{d}x && (34)\\
&= \int \frac{\mathrm{e}^{tx}}{2}\,\mathrm{d}x && (35)\\
&= \frac{1}{2t}\int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u && (36)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{tx}}{2t} && (37)\\
&= \frac{\frac{\mathrm{e}^{2t}}{t} - \frac{1}{t}}{2} && (38)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{2t} - 1}{2t}. && (39)
\end{aligned}
$$

b) $fX(x) = \frac{1}{2}(x)$.

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \int_0^2 e^{tx} \cdot \frac{1}{2}x\mathrm{d}x && (40)\\
&= \frac{1}{2}\int x\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}x. && (41)
\end{aligned}
$$

Resolviendo:

$$\int x\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}x,$$

se tiene:

$$= \frac{x\mathrm{e}^{tx}}{t} - \int \frac{\mathrm{e}^{tx}}{t}\,\mathrm{d}x \qquad (42)$$

Ahora se resuelve:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{tx}}{t}\,\mathrm{d}x,$$

y se tiene:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{t^2}\int \mathrm{e}^{u}\,\mathrm{d}u && (43)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{u}}{t^2} && (44)\\
&= \frac{\mathrm{e}^{tx}}{t^2}. && (45)
\end{aligned}
$$

Remplazando las integrales resuelta se tiene:

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[\frac{x\mathrm{e}^{tx}}{t} - \frac{\mathrm{e}^{tx}}{t^2}\right] && (46)\\
&= \frac{x\mathrm{e}^{tx}}{2t} - \frac{\mathrm{e}^{tx}}{2t^2} && (47)\\
&= \frac{(tx-1)\,\mathrm{e}^{tx}}{2t^2} && (48)\\
&= \frac{(2t-1)\,\mathrm{e}^{2t} + 1}{2t^2}. && (49)
\end{aligned}
$$

c) $fX(x) = 1 - \frac{1}{2}(x)$.

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x\right) \mathrm{d}x \tag{50}$$
$$= -\frac{1}{2} \int (x-2)\, \mathrm{e}^{tx}\, \mathrm{d}x. \tag{51}$$

Resolviendo:

$$\int (x-2)\, \mathrm{e}^{tx}\, \mathrm{d}x,$$

se tiene:

$$= \frac{(x-2)\, \mathrm{e}^{tx}}{t} - \int \frac{\mathrm{e}^{tx}}{t}\, \mathrm{d}x \tag{52}$$

Ahora se resuelve:

$$\int \frac{\mathrm{e}^{tx}}{t}\, \mathrm{d}x,$$

y se tiene:

$$= \frac{1}{t^2} \int \mathrm{e}^{u}\, \mathrm{d}u \tag{53}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{u}}{t^2} \tag{54}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{tx}}{t^2}. \tag{55}$$

Remplazando las integrales resuelta se tiene:

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{(x-2)\, \mathrm{e}^{tx}}{t} - \frac{\mathrm{e}^{tx}}{t^2} \right] \tag{56}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{tx}}{2t^2} - \frac{(x-2)\, \mathrm{e}^{tx}}{2t} \tag{57}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{2t}}{2t^2} - \frac{2t+1}{2t^2} \tag{58}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{2t} - 2t - 1}{2t^2}. \tag{59}$$

d) $fX(x) = |x-1|$.

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} \cdot |x-1|\, \mathrm{d}x \tag{60}$$
$$= \frac{|x-1|\, \mathrm{e}^{tx}}{t} - \int \frac{(x-1)\, \mathrm{e}^{tx}}{t\, |x-1|}\, \mathrm{d}x. \tag{61}$$

Resolviendo:

$$\int \frac{(x-1)\, \mathrm{e}^{tx}}{t\, |x-1|}\, \mathrm{d}x,$$

se tiene:

$$= \frac{1}{t^2}\int 1\,\mathrm{d}u, \tag{62}$$

ahora se resuelve:

$$\int 1\,\mathrm{d}u,$$

y se tiene:

$$= u \tag{63}$$
$$= \frac{u}{t^2}, \tag{64}$$

desciendo la sustitución:

$$= \frac{(x-1)\,\mathrm{e}^{tx}}{t^2\,|x-1|}. \tag{65}$$

Remplazando las integrales resuelta se tiene:

$$= \frac{|x-1|\,\mathrm{e}^{tx}}{t} - \frac{(x-1)\,\mathrm{e}^{tx}}{t^2\,|x-1|} \tag{66}$$
$$= \frac{(t-1)\,\mathrm{e}^{2t}}{t^2} + \frac{2\mathrm{e}^{t}}{t^2} - \frac{t+1}{t^2} \tag{67}$$
$$= \frac{(t-1)\,\mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^{t} - t - 1}{t^2}. \tag{68}$$

e) $fX(x) = \frac{3}{8}(x^2)$.

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx}\cdot\frac{3}{8}x^2\mathrm{d}x \tag{69}$$
$$= \frac{3}{8}\int x^2\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}x. \tag{70}$$

Resolviendo:

$$\int x^2\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}x,$$

se tiene:

$$= \frac{x^2\mathrm{e}^{tx}}{t} - \int \frac{2x\mathrm{e}^{tx}}{t}\,\mathrm{d}x, \tag{71}$$

ahora se resuelve:

$$\int \frac{2x\mathrm{e}^{tx}}{t}\,\mathrm{d}x,$$

y se tiene:

$$= \frac{2}{t}\int x\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}x, \tag{72}$$

resolviendo:

$$\int x\mathrm{e}^{tx}\,\mathrm{d}x,$$

se tiene:

$$= \frac{1}{t^2} \int \mathrm{e}^u \,\mathrm{d}u \tag{73}$$

$$= \frac{\mathrm{e}^u}{t^2} \tag{74}$$

$$== \frac{\mathrm{e}^{tx}}{t^2} \tag{75}$$

Remplazando las integrales resuelta se tiene:

$$= \frac{3}{8}\left[\frac{x^2\mathrm{e}^{tx}}{t} - \frac{2x\mathrm{e}^{tx}}{t^2} + \frac{2\mathrm{e}^{tx}}{t^3}\right] \tag{76}$$

$$= \frac{3x^2\mathrm{e}^{tx}}{8t} - \frac{3x\mathrm{e}^{tx}}{4t^2} + \frac{3\mathrm{e}^{tx}}{4t^3} \tag{77}$$

$$= \frac{\left(6t^2 - 6t + 3\right)\mathrm{e}^{2t} - 3}{4t^3}. \tag{78}$$

5. Ejercicio 6 de la página 402

Let X be a continuous random variable whose characteristic function $k_X(\tau)$ is $k_X(\tau) = e^{-|\tau|}$, $-\infty < \tau < \infty$. Show directly that the density f_X of X is

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Para la solución de este ejercicio se utilizara la formula que se muestra a continuación:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} \cdot k_X(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{79}$$

Respuesta sustituyendo en la ecuación anterior se tiene:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} \cdot e^{-|\tau|}\mathrm{d}\tau \tag{80}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\infty}^{0} e^{-ix\tau} e^{\tau}\, d\tau\right) + \frac{1}{2\pi}\left(\int_{0}^{\infty} e^{-ix\tau} e^{-\tau}\, d\tau\right) \tag{81}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mathrm{i}x+1}{x^2+1}\right) + \frac{1}{2\pi}\left[-\left(\frac{\mathrm{i}x-1}{x^2+1}\right)\right] \tag{82}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\mathrm{i}x+1-\mathrm{i}x+1}{x^2+1}\right) \tag{83}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{x^2+1}\right) \tag{84}$$

$$= \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \tag{85}$$

6. 10

Let $X_1, X_2, \ldots, X_n$ be an indepentent trials process with density

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty.$$

a) Find the mean and variance of $f(x)$.

b) Find the moment generating function for X_1, S_n, A_n, and S_n^*.

c) What can you say about the moment generating function of S_n^* as $n \to \infty$.

d) What can you say about the moment generating function of A_n as $n \to \infty$.

a) Find the mean and variance of $f(x)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x\frac{e^{-|x|}}{2}dx && (86)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|x|}e^{-|x|}|x|dx && (87)\\
&= -\frac{e^{-|x|}|x|}{2} - \frac{e^{-|x|}}{2} && (88)\\
&= \left[\frac{e^{-|x|}(-|x|-1)}{2}\right]_{-\infty}^{\infty} && (89)\\
&= 0. && (90)
\end{aligned}$$

Ya se tiene el valor de $\mathbb{E}[X]$, pasamos a calcular $\mathbb{V}(X)$ con la expresión:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2) \qquad (91)$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X]^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx && (92)\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} x^2e^{-(-x)}\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2e^{-(x)}\,dx\right] && (93)\\
&= \frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0} x^2e^{(x)}\,dx + \int_{0}^{\infty} x^2e^{-(x)}\,dx\right] && (94)\\
&= \frac{1}{2}\left[2+2\right]\\
&= 2. && (95)
\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}(X) &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2) && (96)\\
&= 2-(0)^2 && (97)\\
&= 2-0 && (98)\\
&= 2. && (99)
\end{aligned}$$

Referencias

[1] Grinstead, Charles M., Snell, J. Laurie. *Introduction to Probability.* American Mathematical Society, 2006.