

Tarea 12 de Modelos Probabilistas Aplicados

Ejercicios

5271

24 de noviembre de 2020

1. Introducción

En este documento se presentan los resultados de varios ejercicios del libro “*Introduction to Probability*” [1].

2. Ejercicio 1 de la página 392

Let Z_1, Z_2, \dots, Z_n describe a branching process in which each parent has j offspring with probability p_j . Find the probability d that the process eventually dies out if

a) $p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$.

b) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3}$.

c) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = 0, p_2 = \frac{2}{3}$.

d) $p_j = \frac{1}{2}^{j+1}$, for $j = 0, 1, 2, \dots$

e) $p_j = (\frac{1}{3})(\frac{2}{3})^j$, for $j = 0, 1, 2, \dots$

f) $p_j = e^{-2}2^j/j!$, for $j = 0, 1, 2, \dots$ (estimate d numerically)

De acuerdo al teorema 10.3 si el número medio m de descendientes producidos por un solo padre es ≤ 1 , entonces $d = 1$ y el proceso se extingue con probabilidad uno. Si $m > 1$ entonces $d < 1$ y el proceso se extingue con probabilidad d . Para la resolución de los incisos a), b), c) se utiliza la expresión siguiente:

$$m = p_1 + 2p_2 = 1 - p_0 + p_2 \quad (1)$$

a) $p_0 = \frac{1}{2}, p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}$.

$$m = p_1 + 2p_2 \quad (2)$$

$$= \frac{1}{4} + 2 \left(\frac{1}{4} \right) \quad (3)$$

$$= \frac{3}{4} \quad (4)$$

Por tanto m es menor que uno y la probabilidad de decadencia es uno.

b) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = \frac{1}{3}, p_2 = \frac{1}{3}.$

$$m = p_1 + 2p_2 \quad (5)$$

$$= \frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{3} \right) \quad (6)$$

$$= 1 \quad (7)$$

Por tanto m es igual a uno y la probabilidad de decadencia es uno.

c) $p_0 = \frac{1}{3}, p_1 = 0, p_2 = \frac{2}{3}.$

$$m = p_1 + 2p_2 \quad (8)$$

$$= 0 + 2 \left(\frac{2}{3} \right) \quad (9)$$

$$= \frac{4}{3} \quad (10)$$

Por tanto m es mayor que uno y la probabilidad de decadencia es igual a d . A continuación pasamos a calcular la probabilidad de decadencia (d)

$$d = \frac{p_0}{p_2} \quad (11)$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} \quad (12)$$

$$d = \frac{1}{2} \quad (13)$$

$$(14)$$

d) $p_j = \frac{1}{2}^{j+1}$, for $j = 0, 1, 2, \dots$

$$h(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2 + p_3 z^3 + p_4 z^4 \dots \quad (15)$$

$$= \frac{1}{2}^{0+1} + \frac{1}{2}^{1+1} z + \frac{1}{2}^{2+1} z^2 + \frac{1}{2}^{3+1} z^3 + \frac{1}{2}^{4+1} z^4 + \dots \quad (16)$$

$$= \frac{1}{2}^1 + \frac{1}{2}^2 z + \frac{1}{2}^3 z^2 + \frac{1}{2}^4 z^3 + \frac{1}{2}^5 z^4 \dots \quad (17)$$

$$= \frac{1}{2} (1 + 1/2^1 z + 1/2^2 z^2 + 1/2^3 z^3 + \dots) \quad (18)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z} \right) \quad (19)$$

$$= \frac{1}{2 - z}. \quad (20)$$

Calculando $h'(z)$ tenemos:

$$h'(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{2 - z} \right) \quad (21)$$

$$= \frac{-\frac{d}{dz} (2 - z)}{(2 - z)^2} \quad (22)$$

$$= \frac{1}{(2 - z)^2} \quad (23)$$

$$(24)$$

ahora calculamos $h'(1)$: $m = h'(1) = \frac{1}{(2-1)^2} = 1$ Como m es igual a 1 entonces la probabilidad de decadencia es uno.

3. Ejercicio 3 de la página 392

In the chain letter problem (see Example 10.14) find your expected profit if

a) $p_0 = 1/2, p_1 = 0, p_2 = 1/2$.

b) $p_0 = 1/6, p_1 = 1/2, p_2 = 1/3$.

Show that if $p_0 > 1/2$, you cannot expect to make a profit.

Para la resolver este ejercicio se se emplea la siguiente expresión:

$$50m + 50m^{12}, \quad \text{con} \quad m = p_1 + 2p_2. \quad (25)$$

a) $p_0 = 1/2, p_1 = 0, p_2 = 1/2$. Sustituyendo en la expresión anterior se tiene:

$$m = 0 + 2 \left(\frac{1}{2} \right) \quad (26)$$

$$= 1, \quad (27)$$

por lo que:

$$50(1) + 50(1^{12}) - 100 = 0 \quad (28)$$

Por tanto el la ganancia esperada es cero.

b) $p_0 = 1/6, p_1 = 1/2, p_2 = 1/3$.

$$m = \frac{1}{2} + 2 \left(\frac{1}{3} \right) \quad (29)$$

$$= \frac{7}{6}, \quad (30)$$

por lo que:

$$50 \left(\frac{7}{6} \right) + 50 \left(\frac{7}{6} \right)^{12} - 100 \approx 276,3 \quad (31)$$

Por tanto el la ganancia esperada es 276.3.

Para todos los posibles valores de $p_0 > 1/2, p_2 < p_0$ por lo tanto $m < 1$ y $50m + 50m^{12} < 100$, por lo que el juego no va a ser favorable.

4. Ejercicio 1 de la página 401

Let X be a continuous random variable with values in $[0, 2]$ and density f_X . Find the moment generating function $g(t)$ for X if

a) $f_X(x) = \frac{1}{2}$.

b) $f_X(x) = \frac{1}{2}x$.

c) $f_X(x) = 1 - \frac{1}{2}x$.

d) $f_X(x) = |1 - x|$.

e) $f_X(x) = \frac{3}{8}x^2$.

Para la realización de este ejercicio se utiliza la ecuación siguiente:

$$g(t) = \mathbb{E}[e^{tx}] \quad (32)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x) dx \quad (33)$$

a) $f_X(x) = \frac{1}{2}$.

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} \cdot \frac{1}{2} dx \quad (34)$$

$$= \int \frac{e^{tx}}{2} dx \quad (35)$$

$$= \frac{1}{2t} \int e^u du \quad (36)$$

$$= \frac{e^{tx}}{2t} \quad (37)$$

$$= \frac{\frac{e^{2t}}{t} - \frac{1}{t}}{2} \quad (38)$$

$$= \frac{e^{2t} - 1}{2t}. \quad (39)$$

b) $fX(x) = \frac{1}{2}(x).$

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} \cdot \frac{1}{2} x dx \quad (40)$$

$$= \frac{1}{2} \int x e^{tx} dx. \quad (41)$$

Resolviendo:

$$\int x e^{tx} dx,$$

se tiene:

$$= \frac{x e^{tx}}{t} - \int \frac{e^{tx}}{t} dx \quad (42)$$

Ahora se resuelve:

$$\int \frac{e^{tx}}{t} dx,$$

y se tiene:

$$= \frac{1}{t^2} \int e^u du \quad (43)$$

$$= \frac{e^u}{t^2} \quad (44)$$

$$= \frac{e^{tx}}{t^2}. \quad (45)$$

Remplazando las integrales resuelta se tiene:

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{x e^{tx}}{t} - \frac{e^{tx}}{t^2} \right] \quad (46)$$

$$= \frac{x e^{tx}}{2t} - \frac{e^{tx}}{2t^2} \quad (47)$$

$$= \frac{(tx - 1) e^{tx}}{2t^2} \quad (48)$$

$$= \frac{(2t - 1) e^{2t} + 1}{2t^2}. \quad (49)$$

c) $fX(x) = 1 - \frac{1}{2}(x).$

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}x\right) dx \quad (50)$$

$$= -\frac{1}{2} \int (x-2) e^{tx} dx. \quad (51)$$

Resolviendo:

$$\int (x-2) e^{tx} dx,$$

se tiene:

$$= \frac{(x-2) e^{tx}}{t} - \int \frac{e^{tx}}{t} dx \quad (52)$$

Ahora se resuelve:

$$\int \frac{e^{tx}}{t} dx,$$

y se tiene:

$$= \frac{1}{t^2} \int e^u du \quad (53)$$

$$= \frac{e^u}{t^2} \quad (54)$$

$$= \frac{e^{tx}}{t^2}. \quad (55)$$

Remplazando las integrales resuelta se tiene:

$$= -\frac{1}{2} \left[\frac{(x-2) e^{tx}}{t} - \frac{e^{tx}}{t^2} \right] \quad (56)$$

$$= \frac{e^{tx}}{2t^2} - \frac{(x-2) e^{tx}}{2t} \quad (57)$$

$$= \frac{e^{2t}}{2t^2} - \frac{2t+1}{2t^2} \quad (58)$$

$$= \frac{e^{2t} - 2t - 1}{2t^2}. \quad (59)$$

d) $fX(x) = |x-1|.$

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} \cdot |x-1| dx \quad (60)$$

$$= \frac{|x-1| e^{tx}}{t} - \int \frac{(x-1) e^{tx}}{t|x-1|} dx. \quad (61)$$

Resolviendo:

$$\int \frac{(x-1) e^{tx}}{t|x-1|} dx,$$

se tiene:

$$= \frac{1}{t^2} \int 1 \, du, \quad (62)$$

ahora se resuelve:

$$\int 1 \, du,$$

y se tiene:

$$= u \quad (63)$$

$$= \frac{u}{t^2}, \quad (64)$$

desciendo la sustitución:

$$= \frac{(x-1) e^{tx}}{t^2 |x-1|}. \quad (65)$$

Remplazando las integrales resuelta se tiene:

$$= \frac{|x-1| e^{tx}}{t} - \frac{(x-1) e^{tx}}{t^2 |x-1|} \quad (66)$$

$$= \frac{(t-1) e^{2t}}{t^2} + \frac{2e^t}{t^2} - \frac{t+1}{t^2} \quad (67)$$

$$= \frac{(t-1) e^{2t} + 2e^t - t - 1}{t^2}. \quad (68)$$

e) $fX(x) = \frac{3}{8}(x^2).$

$$g(t) = \int_0^2 e^{tx} \cdot \frac{3}{8} x^2 \, dx \quad (69)$$

$$= \frac{3}{8} \int x^2 e^{tx} \, dx. \quad (70)$$

Resolviendo:

$$\int x^2 e^{tx} \, dx,$$

se tiene:

$$= \frac{x^2 e^{tx}}{t} - \int \frac{2x e^{tx}}{t} \, dx, \quad (71)$$

ahora se resuelve:

$$\int \frac{2x e^{tx}}{t} \, dx,$$

y se tiene:

$$= \frac{2}{t} \int x e^{tx} \, dx, \quad (72)$$

resolviendo:

$$\int x e^{tx} \, dx,$$

se tiene:

$$= \frac{1}{t^2} \int e^u du \quad (73)$$

$$= \frac{e^u}{t^2} \quad (74)$$

$$= \frac{e^{tx}}{t^2} \quad (75)$$

Remplazando las integrales resuelta se tiene:

$$= \frac{3}{8} \left[\frac{x^2 e^{tx}}{t} - \frac{2x e^{tx}}{t^2} + \frac{2 e^{tx}}{t^3} \right] \quad (76)$$

$$= \frac{3x^2 e^{tx}}{8t} - \frac{3x e^{tx}}{4t^2} + \frac{3 e^{tx}}{4t^3} \quad (77)$$

$$= \frac{(6t^2 - 6t + 3) e^{2t} - 3}{4t^3}. \quad (78)$$

5. Ejercicio 6 de la página 402

Let X be a continuous random variable whose characteristic function $k_X(\tau)$ is $k_X(\tau) = e^{-|\tau|}$, $-\infty < \tau < \infty$. Show directly that the density f_X of X is

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Para la solución de este ejercicio se utilizara la formula que se muestra a continuación:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} \cdot k_X(\tau) d\tau. \quad (79)$$

Respuesta sustituyendo en la ecuación anterior se tiene:

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau x} \cdot e^{-|\tau|} d\tau \quad (80)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^0 e^{-ix\tau} e^{\tau} d\tau \right) + \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\infty} e^{-ix\tau} e^{-\tau} d\tau \right) \quad (81)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{ix+1}{x^2+1} \right) + \frac{1}{2\pi} \left[- \left(\frac{ix-1}{x^2+1} \right) \right] \quad (82)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{ix+1-ix+1}{x^2+1} \right) \quad (83)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{x^2+1} \right) \quad (84)$$

$$= \frac{1}{\pi(1+x^2)}. \quad (85)$$

6. ejercicio 10 de la página 402

Let X_1, X_2, \dots, X_n be an independent trials process with density

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty.$$

- a) Find the mean and variance of $f(x)$.
 - b) Find the moment generating function for X_1, S_n, A_n , and S_n^* .
 - c) What can you say about the moment generating function of S_n^* as $n \rightarrow \infty$.
 - d) What can you say about the moment generating function of A_n as $n \rightarrow \infty$.
- a) Find the mean and variance of $f(x)$.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{e^{-|x|}}{2} dx \quad (86)$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{|x|} e^{-|x|} |x| dx \quad (87)$$

$$= -\frac{e^{-|x|}|x|}{2} - \frac{e^{-|x|}}{2} \quad (88)$$

$$= \left[\frac{e^{-|x|}(-|x| - 1)}{2} \right]_{-\infty}^{\infty} \quad (89)$$

$$= 0. \quad (90)$$

Ya se tiene el valor de $\mathbb{E}[X]$, pasamos a calcular $\mathbb{V}(X)$ con la expresión:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \quad (91)$$

$$\mathbb{E}[X]^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \frac{1}{2} e^{-|x|} dx \quad (92)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^0 x^2 e^{-(-x)} dx + \int_0^{\infty} x^2 e^{-(x)} dx \right] \quad (93)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_{-\infty}^0 x^2 e^{(x)} dx + \int_0^{\infty} x^2 e^{-(x)} dx \right] \quad (94)$$

$$= \frac{1}{2} [2 + 2] \quad (95)$$

$$= 2.$$

Entonces:

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \quad (96)$$

$$= 2 - (0)^2 \quad (97)$$

$$= 2 - 0 \quad (98)$$

$$= 2. \quad (99)$$

Referencias

- [1] Grinstead, Charles M., Snell, J. Laurie. *Introduction to Probability*. American Mathematical Society, 2006.