1	13
2	15
3	5
4	10
5	9
	10

30 43 52

62

DIINF - Ingeniería Informática - Algoritmos Numéricos II PEP

Profesor: Oscar Rojas D. Nombre: BRYAN GUZMÁN

1.- (15 puntos) Explique **solo** utilizando **esquemas y dibujos** el funcionamiento de los métodos directos basado en factorización LU (10p). Ademas, indique como es el procedimiento para resolver sistemas de ecuaciones utilizando notación matricial (5p)

2.- (15 puntos) Comente y describa el funcionamiento del método de Gauss-Seidel y en que se diferencia del método de Jacobi (10p). Ademas, escriba el pseudo código del algoritmo de Gauss-Seidel(5p).

3.- (10 puntos) Por que se utilizan las ecuaciones normales en el método de mínimos cuadrados (su respuesta no debe ambigua). Acompañe su respuesta con graficos.

4.- (10 puntos) Obtenga los errores absolutos y relativos al hallar el valor de la función $f(x) = e^{x+1}$ para $x = 0.75$ usando un polinomio interpolador de Lagrange de grado 2. Para ello utilice $x_0 = 0, x_1 = 0,5$ y $x_2 = 1$

5.- (10 puntos) Describa los pasos realizados al aproximar los valores de una función utilizando Splines Cúbicos. Puede acompañar su explicación con esquemas, gráficos, formulas y/o calculo numérico.

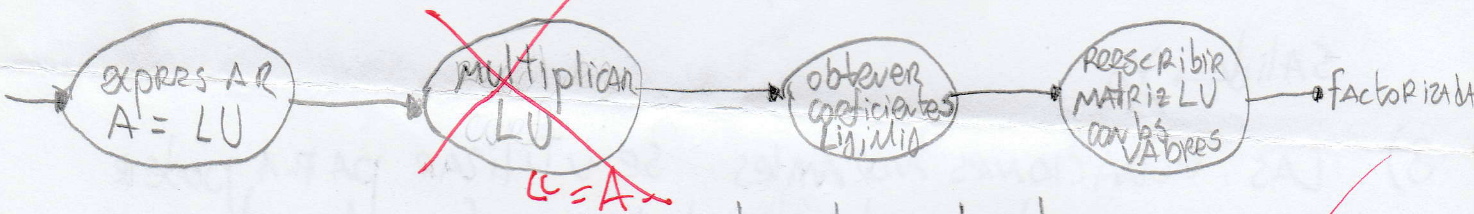
Bryan Guzmán

1. Para los métodos LU lo primero que se debe hacer es expresar la matriz A como A=LU, en donde.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ L_{21} & 1 & 0 & 0 \\ L_{31} & L_{32} & 1 & 0 \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{pmatrix}$$

Luego se resuelven estos sistemas multiplicando las matrices LU, para despues igualar los coeficientes a_{ij} con el correspondiente en la matriz.

Luego de haber obtenido los valores se expresa la matriz factorizada, en resumen tenemos 8



Luego si quisieramos resolver el sistema basta con resolver primero:

$Ly=b$; con un b dado en el sistema $Ax=b$

y luego resolver

$Ux=y$; obteniendo los valores de la solución en X.

2) El método de Gauss-Seidel se basa en el método de Jacobi, pero en vez de utilizar sólo los elementos de la iteración anterior, utiliza algunos elementos de la iteración actual agilizando la convergencia a la solución aproximada de los datos, utilizando la ecuación de recurrencia:

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} + b_i\right]$$

Algoritmo GAUSS-Seidel (A, X0, b, tol, N)

$X_1 = size(X_0);$

$K=1;$

while $K \leq N$

for $i = 1 \dots n$

$$X(i) = \frac{1}{a_{ii}}\left[-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} X_1(j) - \sum_{i=i+1}^{n} a_{ij} X0(j) + b_i\right];$$

if $|X - X_0| < tol \rightarrow$ stop salida X_0

$K = K+1$

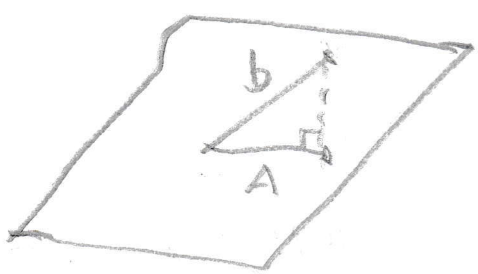
for $i = 1 \dots n$

$X0(i) = X1(i);$

salida $\rightarrow X_0$

3) Las ecuaciones normales se utilizar para poder aproximar los valores de los coeficientes de mejor manera, ya que se utiliza la ortogonalización de estos en el plano.

bastante cerca.



5

10

BRYAN GUZMÁN

4) $f(x) = e^{x+1}$ $\quad X = 0{,}75 \quad X_0 = 0 \quad X_1 = 0{,}5 \quad X_2 = 1$

$Y_0 = 2{,}718281828 \quad Y_1 = 4{,}48168907 \quad Y_2 = 7{,}389056099$

$$P_2(x) = Y_0\frac{(X-X_1)(X-X_2)}{(X_0-X_1)(X_0-X_2)} + Y_1\frac{(X-X_0)(X-X_2)}{(X_1-X_0)(X_1-X_2)} + Y_2\frac{(X-X_0)(X-X_1)}{(X_2-X_0)(X_2-X_1)}$$

$$P_2(x) = Y_0\frac{(X-0{,}5)(X-1)}{(0-0{,}5)(0-1)} + Y_1\frac{(X-0)(X-1)}{(0{,}5-0)(0{,}5-1)} + Y_2\frac{(X-0)(X-0{,}5)}{(1-0)(1-0{,}5)}$$

Resolviendo

$$P_2(x) = 2{,}718281828\frac{(X-0{,}5)(X-1)}{0{,}5} + 4{,}48168907\frac{X(X-1)}{-0{,}25} + 7{,}389056099\frac{X(X-0{,}5)}{0{,}5}$$

$$P_2(0{,}75) = 2{,}718281828\frac{(0{,}75-0{,}5)(0{,}75-1)}{0{,}5} + 4{,}48168907\frac{0{,}75(0{,}75-1)}{-0{,}25} + 7{,}389056099\frac{0{,}75(0{,}75-0{,}5)}{0{,}5}$$

$$P_2(0{,}75) = -0{,}339785228 + 3{,}361266803 + 2{,}770896037$$

$$= 5{,}792377612$$

10

Real: $e^{0{,}75+1} = 5{,}754602676$

Calculado

ERROR Abs $|5{,}754602676 - 5{,}792377612| = 0{,}037774936$

$|X - X^*|$

ERROR relativo $\dfrac{|5{,}754602676 - 5{,}792377612|}{5{,}754602676} \times 100 = 0{,}65643\%$

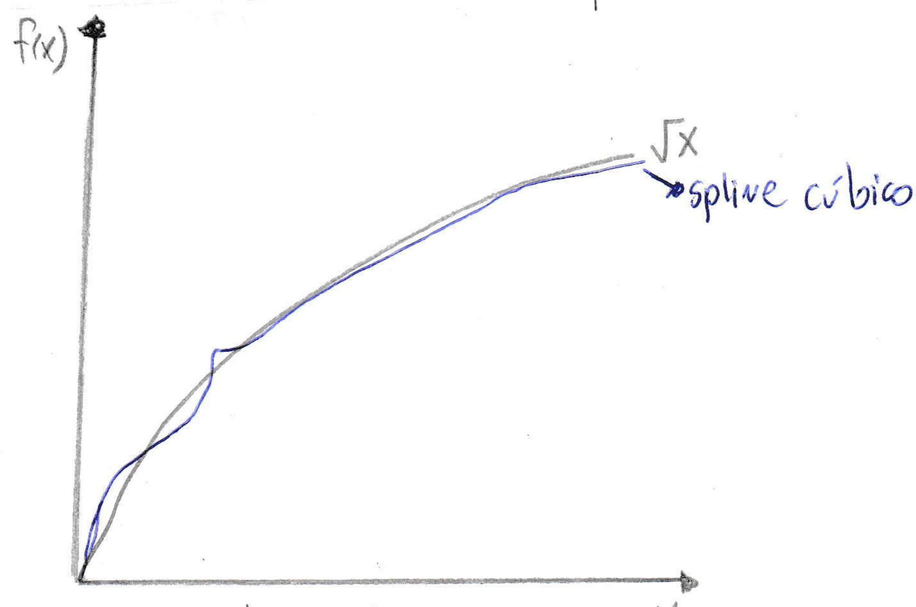
$\dfrac{|X - X^*|}{X}$

5) Para aproximar los valores de una función utilizando spline cúbicos primero se deben calcular los coeficientes u_i, h_i, b_i y v_i, que se utilizan para resolver el siguiente sistema

$$\begin{bmatrix} u_1 & h_1 & & & \\ h_1 & u_2 & h_2 & & \\ & h_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & h_{n-2} \\ & & & h_{n-2} & u_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{bmatrix}$$

de donde se obtienen los valos de los z_i, que luego se utiza para obtener los coef. A_i, B_i y C_i con los cuales finalmente se construyen los polinomios $S_i(x)$.

si tenemos una función $y(x) = \sqrt{x}$



Del gráfico se puede obtener que los spline cúbicos nos permiten aproximarse al comportamiento real de la función que se desee aproximar.

9

falta mostrar más claro un $P_3(x)$ se agrega en los segmentos.