



Laboratorio 3: Modelos de Estado y Sistemas Discretos

Integrantes: Alberto Rodríguez
Chun-zen Yu
Curso: Modelación y Simulación
Sección A-1
Profesor: Gonzalo Acuña
Ayudante: Alan Barahona

9 de Enero de 2021

Tabla de contenidos

1. Introducción	1
2. Marco teórico	2
2.1. Modelos de estado	2
2.2. Zero-Order Hold	3
2.3. First-Order Hold	3
3. Desarrollo primera parte	4
4. Desarrollo segunda parte	7
4.1. Obtención del Modelo de Estado	7
4.2. Análisis del sistema	9
4.2.1. Caso 1	10
4.2.2. Caso 2	11
4.2.3. Caso 3	12
5. Desarrollo tercera parte	13
6. Conclusiones	16
Bibliografía	17

1. Introducción

La modelación tiene como propósito estudiar una situación o fenómeno en específico, con el fin de comprenderlo mejor o abordarlo en caso de ser un problema. Estos modelos definen como es su entrada y su salida, gracias a las denominadas variables de estado, que van cambiando en el tiempo y representan la variación del fenómeno, o en otras palabras, su comportamiento. (Dipseil, 2006).

Para este laboratorio se realiza un análisis de los modelos de estado aplicado para distintos objetivos, estos son funciones de transferencia, resolver un problema general mediante flujos de estanques y la discretización de un modelo de estado.

El objetivo principal es la aplicación de modelos de estado mediante el lenguaje de programación MATLAB, la obtención de modelos con la forma matricial, la obtención de la función de transferencia a partir de un modelo, discretizar un modelo y poder simular una situación general con parámetros genéricos.

EL presente informe muestra en primer lugar una serie de conceptos básicos para entender el trabajo, para así mostrar las pruebas experimentales y los resultados obtenidos en ella, tanto la obtención del modelo de estado como para un problema en específico. Para la primera parte se considera la obtención de un modelo de estado en base a un diagrama de bloques dado, la segunda parte considera el desarrollo de un problema de flujo en estanques, para representar el modelo fenomenológico identificando las variables de entrada, salida y estado, mientras que la tercera parte se muestra la obtención de un sistema discreto mediante dos tipos de discretización. Con esto se obtendrán y presentarán las conclusiones del trabajo respecto a la aplicación de la modelación en MATLAB.

2. Marco teórico

2.1. Modelos de estado

Habitualmente por conveniencia los sistemas de control se modelan dentro del dominio de la frecuencia, esto los limita a sistemas lineales con una única entrada y una única salida. Los modelos de estados son utilizados como una forma de modelar y analizar sistemas los cuales cuentan con múltiples entradas y salidas, tanto para sistemas lineales y no lineales.

Los modelos de estados se componen de un conjunto de entradas, salidas y variables de estados las cuales se encuentran relacionadas por ecuaciones diferenciales de cualquier orden en el dominio del tiempo. Las variables de estado corresponden a las variables cuyos valores cambian según el tiempo.(Cheever, 2005)

Para representar este modelo se utiliza las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \dot{q}(t) &= Aq(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cq(t) + Du(t) \end{aligned} \tag{1}$$

La primera ecuación corresponde a la ecuación de estado, mientras que la segunda corresponde a la ecuación de salida, las variables A, B, C y D corresponden a matrices. Para un sistema de orden n (con una ecuación diferencial de orden n), con r entradas y m salidas las dimensiones de las matrices serán las siguientes:

- **q** con dimensión $n \times 1$, q es el vector de estado, es una función en el dominio del tiempo.
- **A** con dimensión $n \times n$, A es la matriz de estado, constante.
- **B** con dimensión $n \times r$, B es la matriz de entrada, constante.
- **u** con dimensión $r \times 1$, u es la entrada, una función en el dominio del tiempo.
- **C** con dimensión $m \times n$, C es la matriz de salida, constante.
- **D** con dimensión $m \times r$, constante.
- **y** con dimensión $m \times 1$, y es la salida, función en el dominio del tiempo.

2.2. Zero-Order Hold

Zero-Order Hold corresponde a un modelo matemático utilizado para la reconstrucción de señales a partir de muestreos digitales de señales, es decir este modelo es utilizado para transformar funciones discretas a funciones continuas. Esto lo logra manteniendo un valor de la muestra por un tiempo determinado.

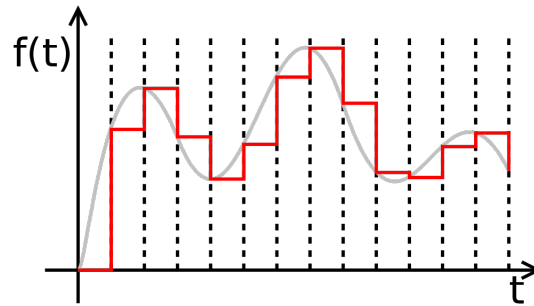


Figura 1: Ejemplo de Zero-Order Hold.

2.3. First-Order Hold

First-Order Hold al igual que *Zero-Order Hold* es utilizado para reconstrucción de señales, a diferencia de la anterior se utiliza una aproximación mediante una función compuesta por segmentos rectos.

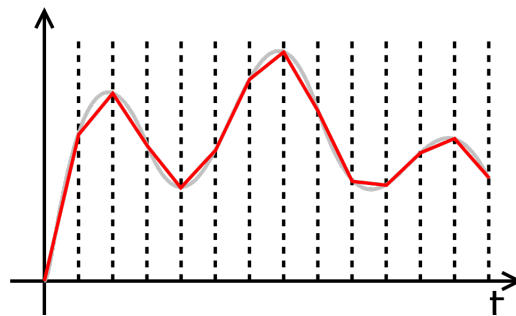


Figura 2: Ejemplo de First-Order Hold.

3. Desarrollo primera parte

Esta sección del laboratorio tiene como objetivo convertir una Función de Transferencia a un Modelo de Estado dado un diagrama de Modelo Retroalimentado. En primer lugar se le pide al usuario ingresar los parámetros por consola, estos son los valores a , b , c , d , e , f , los cuales son los parámetros que componen cada función de transferencia H respectivamente (Como se aprecia en el diagrama de bloque de la Figura 3).

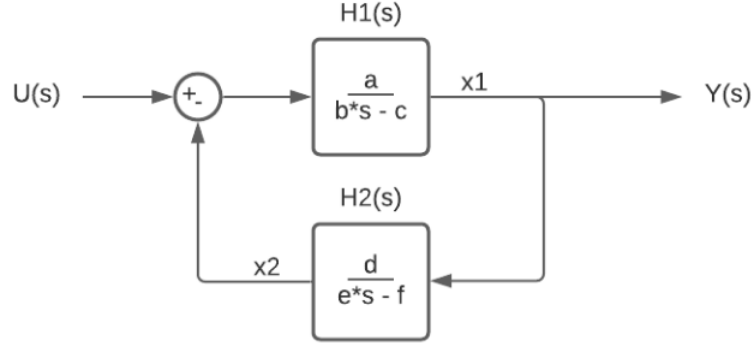


Figura 3: Diagrama de bloque dado.

Se tiene entonces las ecuaciones de transferencia H_1 y H_2 .

$$H_1(s) = \frac{a}{b * s - c} \quad (2)$$

$$H_2(s) = \frac{d}{e * s - f} \quad (3)$$

Para el desarrollo del modelo de estado (ME), se escogen las variables de estado, que en este caso serían las salidas de cada bloque, que se pueden expresar en las siguientes ecuaciones.

$$X_1 = H_1 * (U - X_2) \quad (4)$$

$$X_2 = H_2 * X_1 \quad (5)$$

Se necesitan despejar ambas ecuaciones para que en el lado izquierdo de la ecuación quede $X_i * s$ y así se pueda aplicar la transformada de Laplace inversa. Entonces las ecuaciones simplificadas.

Para X_1 :

$$s * X_1 = \frac{a}{b} * U + \frac{c}{b} * X_1 - \frac{a}{b} X_2 / \mathcal{L}^{-1} \quad (6)$$

$$X_1' = \frac{a}{b} * u + \frac{c}{b} * x_1 - \frac{a}{b} x_2 \quad (7)$$

Para X_2 :

$$s * X_2 = \frac{d}{e} * X_1 + \frac{f}{e} * X_2 / \mathcal{L}^{-1} \quad (8)$$

$$X_2' = \frac{d}{e} * x_1 + \frac{f}{e} * x_2 \quad (9)$$

Con esto se pueden armar las matrices A, B, C y D.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{c}{b} & -\frac{a}{b} \\ \frac{d}{e} & \frac{f}{e} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Como la matriz B esta asociada con U queda.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

Por lo que el modelo de entrada quedaría como

$$\begin{bmatrix} X_1' \\ X_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{c}{b} & -\frac{a}{b} \\ \frac{d}{e} & \frac{f}{e} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a}{b} \\ 0 \end{bmatrix} * u \quad (12)$$

SI se tiene en cuenta la forma del sistema, la salida solo depende de la variable de estado X_1

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$Y = X_1 \quad (14)$$

Con esto y sabiendo que $D=0$ se puede armar la ecuación de salida. Por lo tanto con las ecuaciones (12) y (15) se tiene el Modelo de Estado del sistema.

$$Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + 0 * u \quad (15)$$

Luego se debe transformar del Modelo de Estado a la Función de Transferencia, donde se deben considerar las ecuaciones del ME:

$$X' = AX + BU \quad (16)$$

$$Y = CX + DU \quad (17)$$

Lo cual aplicando la transformada de Laplace a ambas ecuaciones la única que cambia es la primera la cual sería

$$sX - x(0) = AX + BU \quad (18)$$

Como estamos interesados en $H(s)$ y este es independiente de las condiciones iniciales, $x(0)$ se asume 0. Luego realizando ciertos despejes, usando la matriz de identidad I .

$$X = (sI - A)^{-1}BU \quad (19)$$

$$Y = CX + DU \quad (20)$$

Se reemplaza X abajo, entonces resolviendo Y , se tiene finalmente.

$$Y = C(sI - A)^{-1}BU + DU \quad (21)$$

Obteniendo finalmente la forma de transferencia $H(s)$ y $D=0$.

$$H(s) = \frac{Y}{U} = C(sI - A)^{-1}B \quad (22)$$

4. Desarrollo segunda parte

Esta parte tiene como objetivo resolver un problema general propuesto en la Figura 4. Se solicita obtener el modelo de estado de esta, indicando inicialmente sus variables de entrada, salida y de estado.

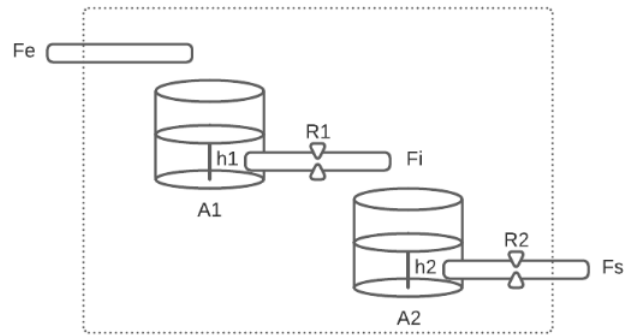


Figura 4: Diagrama de vasos comunicantes.

4.1. Obtención del Modelo de Estado

En base al diagrama, las variables y parámetros que tiene el sistema corresponden a:

- Fe : Flujo de entrada
- Fi : Flujo intermedio
- Fs : Flujo de salida
- $h1$: Nivel de agua del estanque 1
- $h2$: Nivel de agua del estanque 2
- $A1$: Area de superficie del estanque 1
- $A2$: Area de superficie del estanque 2
- $R1$: Resistencia 1

- R2: Resistencia 2

De lo anterior se puede mencionar que F_e , F_i , F_s , h_1 y h_2 son variables, mientras que A_1 , A_2 , R_1 y R_2 son parámetros. Ahora es importante señalar cuales corresponden a variables de entrada, salida y estado:

- Las variables de entrada corresponde a F_e
- Las variables de estado corresponden a h_1 y h_2
- Las variables de salidas elegidas a estudiar son las alturas o nivel de agua h_1 y h_2

Elaboramos el modelo fenomenológico:

- $dV_1/dt = F_e - F_i$
- $dV_2/dt = F_i - F_s$
- $F_i = h_1 - h_2 / R_1$
- $F_s = h_2 / R_2$
- $V_1 = A_1 * h_1$
- $V_2 = A_2 * h_2$

Por lo tanto tenemos.

$$\frac{dV_1}{dt} = \frac{F_e}{A_1} - \frac{(h_1 - h_2)}{R_1 * A_1} \quad (23)$$

$$\frac{dV_2}{dt} = \frac{h_1 - h_2}{R_1 * A_2} - \frac{h_2}{R_2 * A_2} \quad (24)$$

Se realiza la representación matricial, considerando $X' = AX + BU$, se tiene entonces.

$$\frac{d(h_1)}{dt} = \frac{-1}{A_1 * R_1} X_1 + \frac{1}{A_1 * R_1} X_2 + \frac{1}{A_1} u \quad (25)$$

$$\frac{d(h2)}{dt} = \frac{1}{R1 * A2} X1 - ((\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}) * \frac{1}{A2}) X2 + 0u \quad (26)$$

Para el modelo de salida se $Y = CU + DU$, se sabe que $Y1 = X1$ y $Y2 = X2$.

Por lo tanto podemos obtener las matrices A, B, C y D

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A1*R1} & \frac{1}{A1*R1} \\ \frac{1}{A2*R1} & -((\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}) * \frac{1}{A2}) \end{bmatrix} \quad (27)$$

Como la matriz B esta asociada con U queda.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{1}{A1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Por lo que el modelo de entrada quedaría como

$$\begin{bmatrix} X'_1 \\ X'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{A1*R1} & \frac{1}{A1*R1} \\ \frac{1}{A2*R1} & -((\frac{1}{R1} + \frac{1}{R2}) * \frac{1}{A2}) \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A1} \\ 0 \end{bmatrix} * u \quad (29)$$

Sabiendo que en la salida nada acompaña a la variable U, entonces la matriz D=0, por lo tanto el modelo de salida sería. Por lo tanto con las ecuaciones (29) y (30) se tiene el Modelo de Estado del sistema.

$$\begin{bmatrix} Y1 \\ Y2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} X1 \\ X2 \end{bmatrix} + 0 * u \quad (30)$$

4.2. Análisis del sistema

Ya al obtener el Modelo de Estado del Sistema, se puede analizar la respuesta del sistema ante distintas entradas. Se realizan 3 casos, en el cual en cada caso se ingresa un caso diferentes. Para todos los casos se tiene los mismo parámetros iniciales:

- $A1=2m^2$
- $A2=4m^2$
- $R1=0,25\frac{s}{m^2}$
- $R2=0,0625\frac{s}{m^2}$

4.2.1. Caso 1

En este caso se tiene como entrada un escalón, al Modelo de estado se le aplica la función *step* de MATLAB obteniendo el gráfico de la Figura 5.

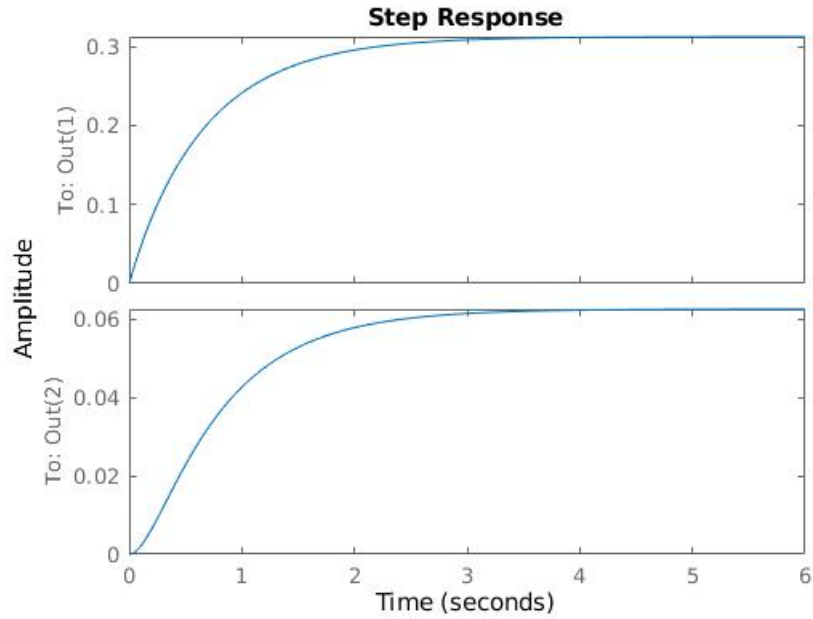


Figura 5: Respuesta a un escalón.

Respecto a lo obtenido en el gráfico podemos darnos cuenta que cuando se ingresa un escalón el flujo de agua va aumentando a través del tiempo hasta aproximadamente el segundo 3, donde el flujo de agua se mantiene constante a través del tiempo.

4.2.2. Caso 2

En este caso se tiene como entrada un impulso, al Modelo de estado se le aplica la función *impulse* de MATLAB obteniendo el gráfico de la Figura 6.

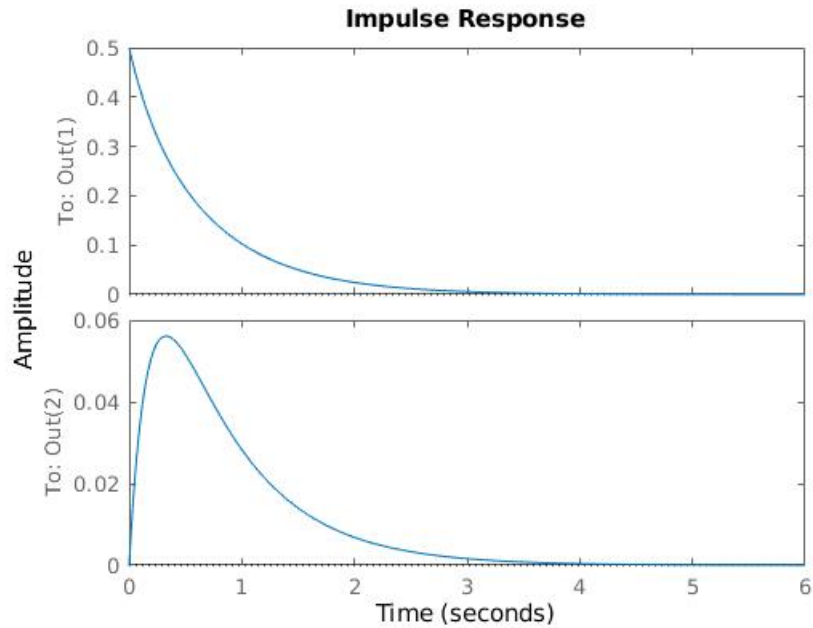


Figura 6: Respuesta a un impulso.

Respecto a lo obtenido en el gráfico podemos inferir que cuando se ingresa un impulso, que puede que se haya roto alguna cañería y hubo un flujo de agua tremendo en un solo instante, esto debido a que en el gráfico de arriba se puede ver que el flujo de agua es mayor que en el gráfico de abajo, entonces llegó con harta fuerza el flujo de agua desde la variable de entrada. Además en el segundo vaso el flujo alto de agua aumentó cuando el primer vaso empezó a disminuir su flujo de agua.

4.2.3. Caso 3

Para este caso se tiene como entrada una función $u(t)$, donde el tiempo esta en un rango de $[0, 2\pi]$, la función anterior corresponde a:

$$u(t) = 100 * \sin\left(\frac{t}{4}\right) \quad (31)$$

Al Modelo de estado se le aplica la función *lsim* de MATLAB obteniendo el gráfico de la Figura 7.

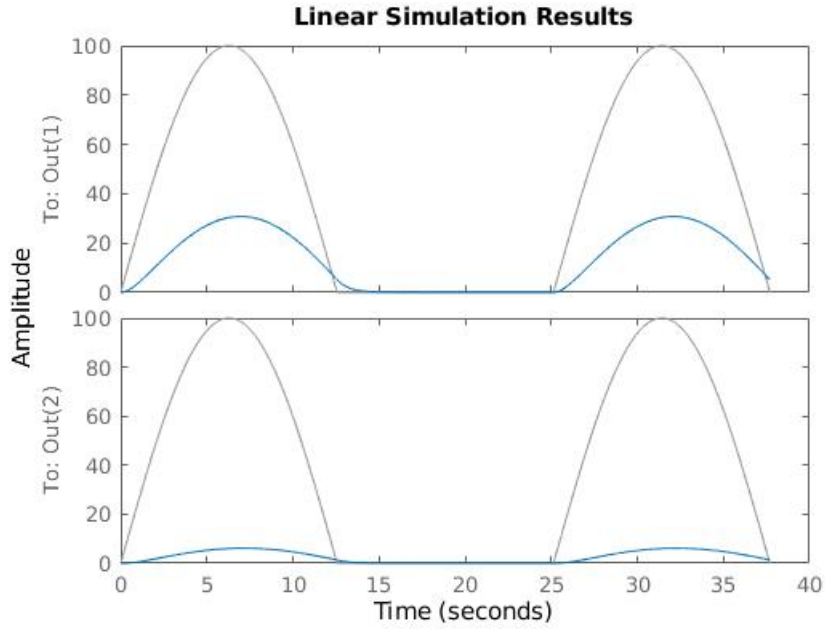


Figura 7: Respuesta a la función $u(t)$

Respecto a lo obtenido en el gráfico podemos inferir que por ejemplo si fuera una empresa, esta en un cierto periodo de tiempo consume mucha agua, esto podría ser que durante el día se utiliza mas agua en el edificio, ya que todos están en este trabajando, pero durante la noche, nadie se encuentra entonces no hay flujo de agua. Por lo tanto los gráficos podrían representar el flujo de agua durante un periodo de dos días.

5. Desarrollo tercera parte

En esta sección del laboratorio se pretende discretizar un modelo de estado continuo mediante el algoritmo *Zero-Order Hold* y *First-Order Hold*, para esto se tiene en cuenta tres tiempos de muestreos $T_1 = 0,001s$, $T_2 = 0,1s$ y $T_3 = 2s$.

Para esto se utilizo el modelo de estado obtenido en la segunda parte del laboratorio y luego utilizando la función *c2d* de MATLAB se realiza la discretización del modelo utilizando los algoritmos *ZoH* y *FoH*. Para analizar el comportamiento del sistema se ingreso como entrada una función $u(t) = 100 * \text{sen}(t/4)$ y se elimino las respuestas negativas debido a que no puede haber un flujo de agua negativo. Los gráficos obtenidos fueron los siguientes:

■ T1:

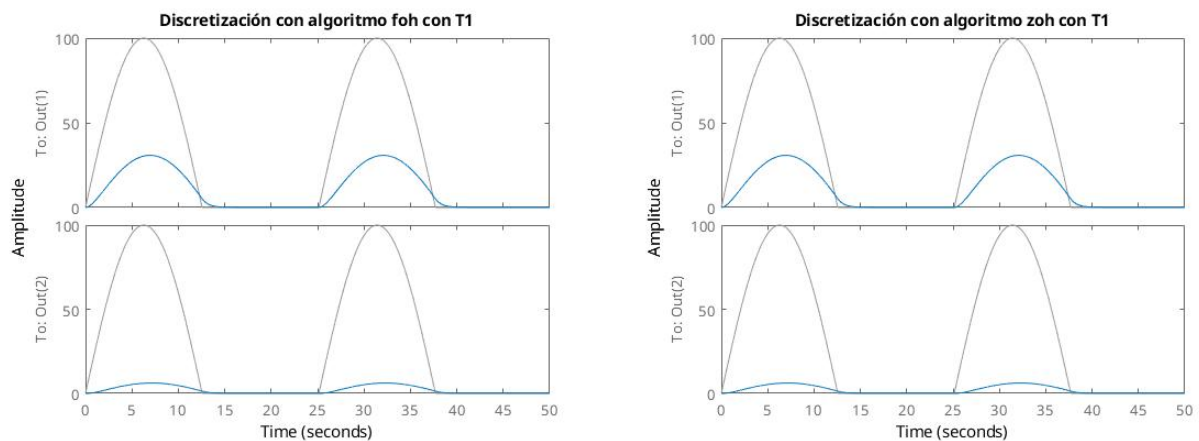


Figura 8: Gráficos con tiempo de muestreo $T_1 = 0.001s$.

Primero se estudio el comportamiento del sistema con un tiempo de muestreo de $t = 0.001s$, como se puede observar en la figura 8. El gráfico superior representa la salida de agua del primer estanque y el inferior representa el segundo estanque. La curva gris corresponde a la función $u(t) = 100 * \text{sen}(t/4)$ mientras que la azul corresponde a la respuesta del sistema discretizado, la función pareciera ser continua, sin embargo, esto se debe a que el tiempo de muestreo es tan pequeño que los escalones no se pueden ver con facilidad, entre los algoritmos de discretización ZoH y FoH no se encontró una diferencia clara con este tiempo de muestreo.

■ T2:

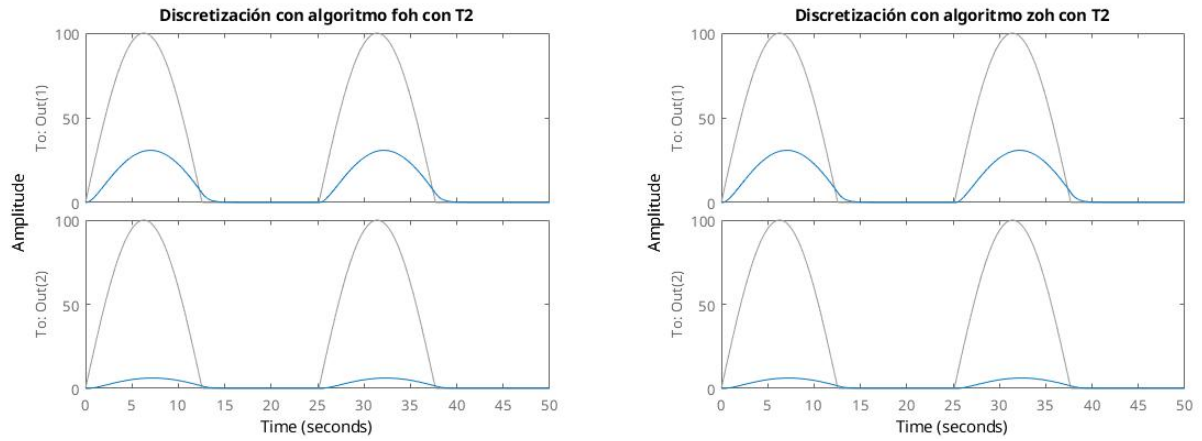


Figura 9: Gráficos con tiempo de muestreo $T_2 = 0.1s$.

La siguiente prueba se realizó con un tiempo de muestreo de $t = 0.1s$, este tiempo de muestreo es mayor que el utilizado anteriormente, es decir, los escalones dentro de esta función son de mayor magnitud, la diferencia no se observa a simple vista pero al realizar un acercamiento de la curva se puede observar con claridad que el tiempo T_2 de muestreo si registra escalones con mayor claridad como se representa en la figura 10. No hubo una diferencia entre los algoritmos ZoH y FoH.

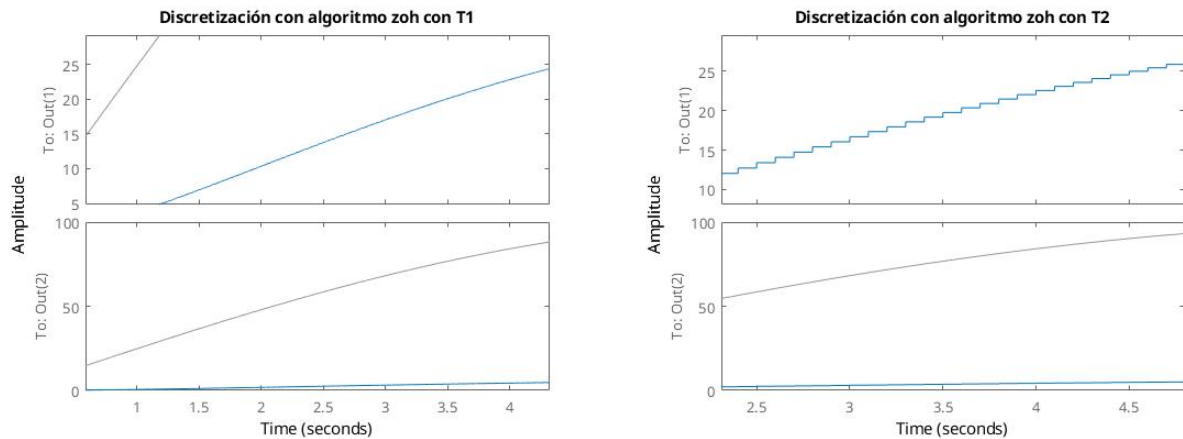


Figura 10: Comparación de tiempo de T_1 y T_2 con acercamiento.

■ T3:

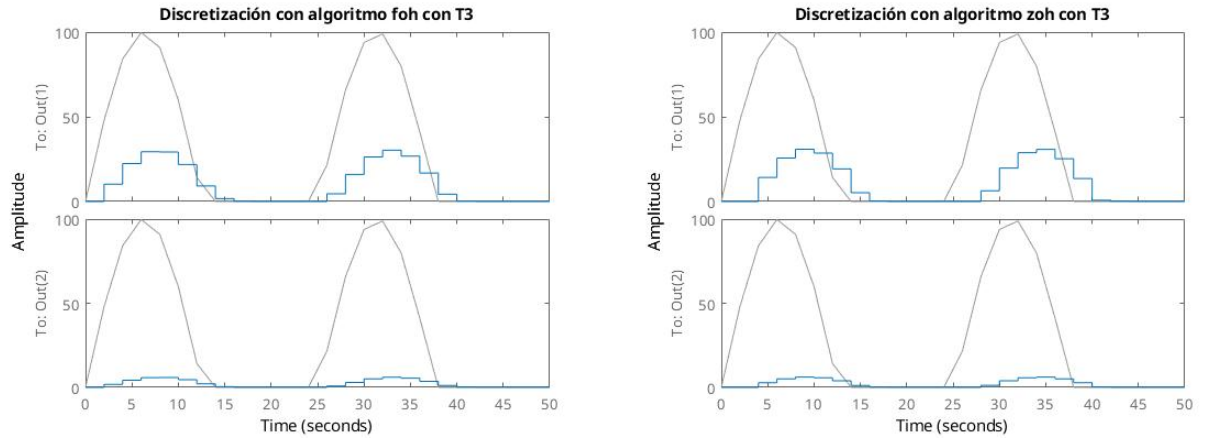


Figura 11: Gráficos con tiempo de muestreo $T3 = 2s$.

Finalmente se realizo la prueba con el tiempo de muestreo de $t = 2s$, en esta prueba el tamaño de los escalones fue significativamente mas grande, en esta prueba fue la primera instancia donde se presento una diferencia clara entre el algoritmo ZoH y FoH, las curvas generadas por cada algoritmo variaban según cada ciclo de la función $100 * \sin(t/4)$ como se puede observar en la figura 11.

6. Conclusiones

Este laboratorio fue realizado de forma correcta, se logro cumplir con todos los objetivos planteados en el inicio, utilizando las herramientas de MATLAB en conjunto con los conceptos estudiados en clases, se logro realizar el análisis de un modelo de estados estudiando cada una de sus componentes y el comportamiento que tiene bajo múltiples circunstancias. Además se realizo una transformación del modelo en donde se llevo de un modelo continuo a uno discreto con la finalidad de estudiar los algoritmos de FoH y ZoH.

Para la primera parte se realizaron todos los cálculos necesarios para obtener las ecuaciones de estado a partir del diagrama de bloque, luego se realizo el mismo proceso pero de manera inversa donde se tiene las ecuaciones de estados y se pretende obtener las funciones de transferencia, los resultados fueron los esperados, sin embargo al realizar el proceso inverso solo se logro obtener la función de transferencia general para el sistema, no se logro obtener las funciones $H1$ y $H2$, esto se debe a que el desarrollo necesario para realizar este procedimiento escapa de nuestro alcance.

En la segundo parte se logro analizar el comportamiento de un diagrama de vasos comunicantes, donde cada flujo de agua estaba representado por una función de transferencia, para obtener las ecuaciones de estado se realizo los algebraicos cálculos necesarios sin problemas, luego para observar el comportamiento del sistema se ingreso como entrada múltiples funciones. Los resultados y gráficos obtenidos fueron los esperados, no hubo ninguna complejidad en el desarrollo de esta parte.

En la ultima parte se realiza una discretización del modelo de estado obtenido en la parte anterior utilizando los algoritmos ZoH y FoH en tres tiempos de muestreo distintos, se obtuvieron varios gráficos representando el comportamiento en cada uno de estos tiempos y algoritmos, se logro observar de forma clara como se diferencian los algoritmos y el comportamiento del sistema en un estado discreto.

Finalmente, como conclusión esta en esta experiencia no se encontró ningún problema significativo, con las herramientas de MATLAB utilizadas y los cálculos realizados se logro obtener todos los resultados esperados.

Bibliografía

Cheever, E. (2005). *State Space Representations of Linear Physical Systems*.

Dipseil, C. (2006). *Modelos de Estado*.

MathWorks (2006). *Feedback connection of two models*.

tutorialsPoint (2014). *Basic Elements of Block Diagram*.