UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Laboratorio 2: Análisis de Sistemas Lineales

Integrantes:	Alberto Rodríguez
	Chun-zen Yu
Curso:	Modelación y Simulación
Sección	A-1
Profesor:	Gonzalo Acuña
Ayudante:	Alan Barahona

6 de Diciembre de 2020

Tabla de contenidos

1. Introducción

Se puede observar que a lo largo de la historia muchos fenómenos de la realidad, la cual es compleja y confusa, se pueden analizar mediante sistemas. Estos sistemas no son mas que un ordenamiento de la realidad, elementos interrelacionados entre sí que actúan juntos para lograr cierta meta. De estas surgen los modelos que son una herramienta que surge a partir de un sistema y permite manejar o actuar sobre la realidad, uno de estos modelos son los matemáticos.

Para este laboratorio se realiza un análisis de sistemas lineales, para esto se trabaja con sus funciones de transferencia. Toda la interconexión de estos sistemas se expresan mediantes diagramas de bloques, en la cual la salidas de estos representan el comportamiento en el tiempo del sistema, lo cual es lo que queremos analizar ante un escalón unitario como entrada.

EL objetivo principal es que mediante el lenguaje de programación MATLAB, podamos tener un análisis satisfactorio de un sistema mediante su función de transferencia, que con esta herramientas se puedan graficar las respuestas de estos sistemas, junto con obtener toda la información importante de estos, como polos, ceros, ganancia estática.

2. Marco teórico

2.1. Modelos matemáticos

Un sistema es una colección de entidades (seres o máquinas) que actúan y se relacionan hacia un fin lógico. Mientras que un modelo es una representación simplificada de un sistema elaborada para comprender, predecir y controlar el comportamiento de dicho sistema. Existe una gran variedad de modelos, para este trabajo se utilizara los modelos matemáticos.

Los modelos matemáticos son un tipo de modelo científico que emplea algún tipo de formulismo matemático para expresar relaciones entre distintas variables y relaciones, para estudiar el comportamiento de un sistema. Dependiendo del objetivo buscado el modelo puede predecir los valores de las variables en el futuro, evaluar los efectos de alguna actividad, entre otros objetivos.

Un modelo matemático puede estar dentro de las siguientes clasificaciones:

- Lineal o no lineal.
- Estático o dinámico.
- Discreto o continuo.
- Determinista o probabilístico.
- Deductivo, inductivo o flotante.

2.2. Sistemas de primer y segundo orden

Se denomina orden de un sistema al grado de su polinomio característico. Consecuentemente el orden de un sistema coincide con el número de polos de éste y con el orden de la ecuación diferencial que lo modela. (Lorca, 2011). Estos sistemas contiene muchos valores que son explicados a continuación.

2.2.1. Funciones de transferencia

La función de transferencia representa una relación entre la salida y la entrada del sistema, para todos los valores de entrada posibles. Esta función modela el comportamiento del sistema en solo dos variables, es decir se compone de una variable independiente de entrada y una variable dependiente de salida. Se define como:

”La función de transferencia de un sistema lineal e invariante en el tiempo (LTI), se define como el cociente entre la transformada de Laplace de la salida y la transformada de Laplace de la entrada, bajo la suposición de que las condiciones iniciales son nulas.”

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{L\{y(t)\}}{L\{x(t)\}} \tag{1}$$

Donde H(s) es la función de transferencia; Y(s) es la transformada de Laplace de la respuesta y X(s) es la transformada de Laplace de la señal de entrada.

La función de transferencia H(s) de un sistema de primer y segundo orden se puede expresar con las ecuaciones 2 y 3.

$$H(s) = \frac{b}{a_1 s + a_0} \tag{2}$$

$$H(s) = \frac{b}{a_2 s^2 + a_1 s + a_0} \tag{3}$$

2.2.2. Ganancia estática

La ganancia estática **K** se define como el valor final ante entrada escalón unitario. Es el cociente entre la variación final de la salida y la variación de la entrada.

2.2.3. Tiempo de estabilización

Consiste en el tiempo que requiere un sistema en estabilizarse ante la respuesta de un escalón, esta esta dentro de un rango específico, comúnmente entre 2 % y 5 %. En la figura 1 se puede visualizar la respuesta de un sistema a un escalón, cuando este llega al tiempo t_s entra dentro de este rango de valores, por lo que este valor es su tiempo de estabilización.

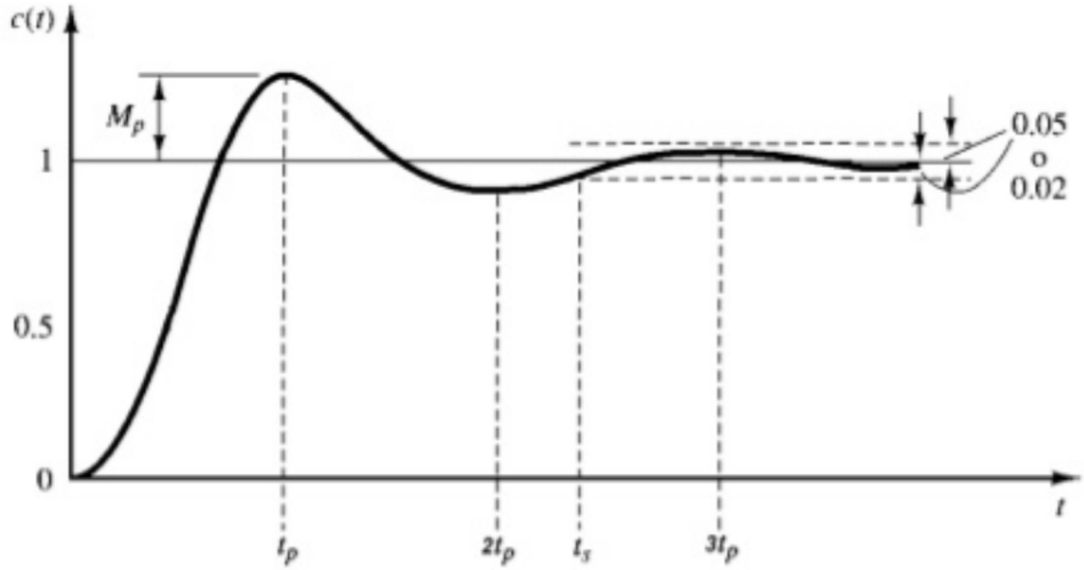

Figura 1: Representación gráfica del tiempo de estabilización.

2.2.4. Ceros y polos

Los ceros y polos son utilizados determinar el comportamiento de un sistema de tiempo continuo según la posición de sus polos y ceros en el plano.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = K * \frac{(s - z_1) * (s - z_2)...(s - z_n)}{(s - p_1) * (s - p_2)...(s - p_n)} \tag{4}$$

Los ceros corresponden a los valores de z para los que el polinomio del numerador Y(s) vale cero, (z1, z2, ... zm) y los valores para los que el polinomio del denominador X(s) vale cero se conocen como polos (p1, p2, ... pn)

2.3. Diagramas de bloque

Los diagramas de bloques representan el funcionamiento interno de un sistema, mediante bloques y relaciones, y además define la organización del proceso interno incluyendo las entradas y salidas. En un modelo matemático donde existe una gran cantidad de variables es de vital importancia utilizar, debido a que, mejora la comprensión del comportamiento del sistema.

Los diagramas de bloques son compuestos por los siguientes componentes:

2.3.1. Bloque

Los bloques representan una función de transferencia la cual contiene una sola entrada y salida. Como se puede observar en la figura 2, donde $G(S)$ es la función de transferencia, $x(t)$ la entrada y $y(t)$ la salida.

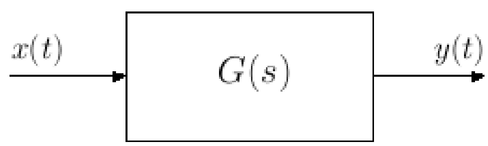

Figura 2: Ejemplo de bloque.

2.3.2. Punto de suma y punto de ramificación

Los puntos de suma son representados con una cruz dentro de un circulo, contiene dos o mas entradas y una sola salida. Estos puntos producen una suma algebraica de las entradas, pueden representar una suma o una resta según se indique en el diagrama.

Como se demuestra en la figura 3, donde (A, B, C) corresponden a la entrada y producen la salida Y. Acá la entrada A y B tienen símbolo positivo y la C negativo por lo que el resultado de Y sera $Y = A + B + (-C)$.

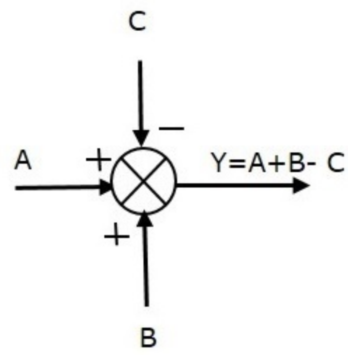

Figura 3: Ejemplo de punto suma.

Los puntos de ramificación representan un punto donde la señal puede desviarse a mas de una rama, esto permite que se puede utilizar la misma entrada a mas de un bloque o punto de suma.

En la figura 4 se puede observar como la entrada R(s) se bifurca y entra a tres funciones de transferencia distintas.

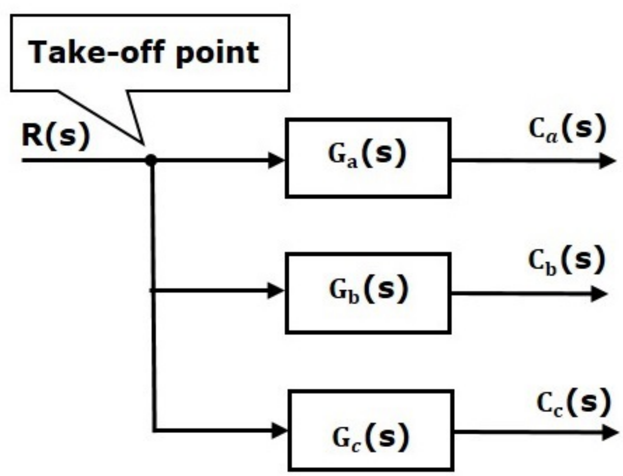

Figura 4: Ejemplo de punto de ramificación.

2.3.3. Conexiones en serie y paralelo

Una de las formas mas comunes de como se interconectan los bloques dentro de un diagrama corresponden a la conexión en serie y en paralelo.

En la figura 5 se puede observar una conexión en serie entre los bloques del sistema. los valores intermedios representan las salidas de cada subsistema. Cada uno de estos valores se obtiene como resultado de multiplicar la transformada de Laplace de la entrada por la transformada de Laplace de cada una de las funciones de transferencia.

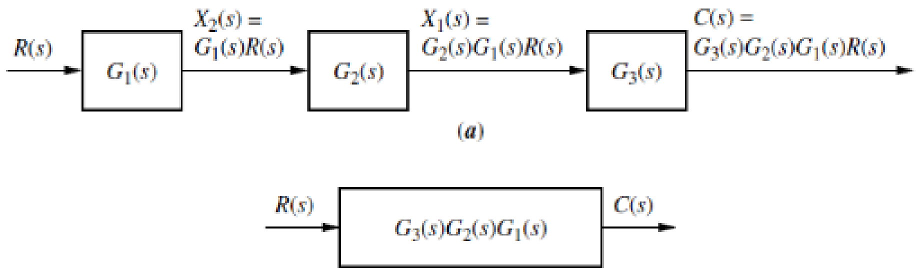

Figura 5: Ejemplo de conexión en paralelo.

A continuación en la figura 6 se presenta una conexión en paralelo entre los bloques del sistema. Nuevamente se multiplica la transformada de Laplace de la entrada con las función de transferencia, pero a diferencia de la conexión en serie la salida de cada subsistema se forma como producto de la suma algebraica de todas ellas.

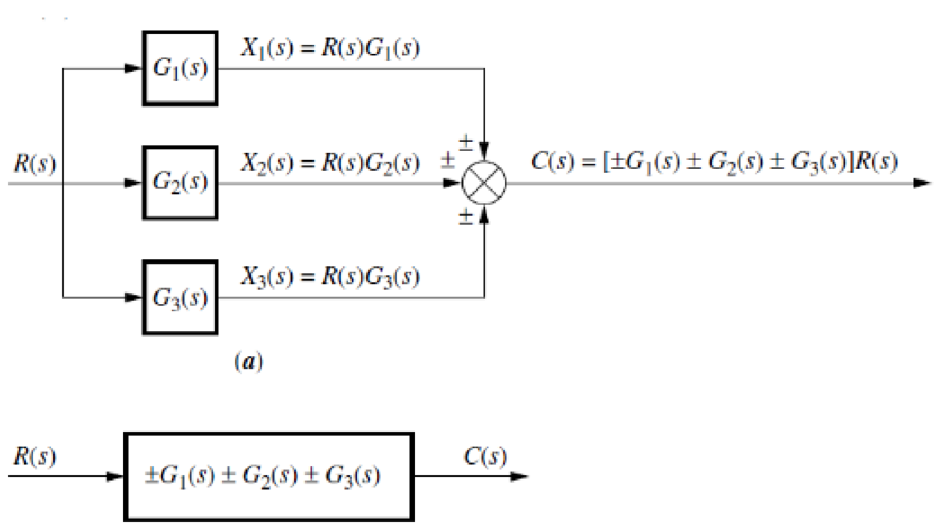

Figura 6: Ejemplo de conexión en serie.

2.3.4. Sistema de lazo abierto y lazo cerrado

Un sistema de lazo cerrado o también conocido como sistema de retroalimentación, este corresponde a un sistema donde la salida se retornada y utilizada como parte de la entrada del mismo sistema. Esta retroalimentación es utilizada para mejorar el rendimiento del sistema. Existen retroalimentación positiva y negativa.

Como se puede observar en la siguiente figura, la salida de G es reutilizada y vuelve como entrada a la misma función.

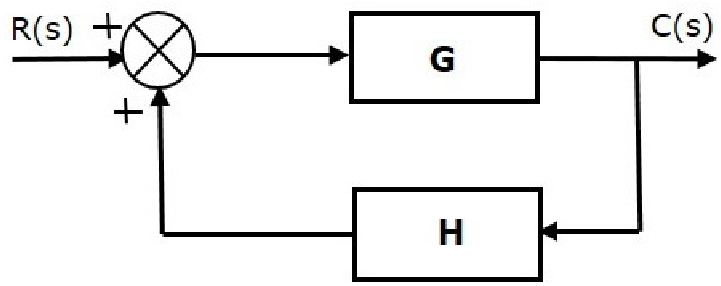

Figura 7: Ejemplo de sistema de lazo cerrado.

Por el otro lado, los sistemas de lazo abierto no cuentan con ninguna forma de retroalimentación, es decir la salida no afecta el funcionamiento del sistema.

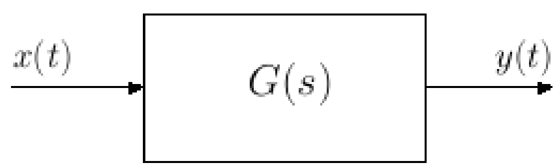

Figura 8: Ejemplo de sistema de lazo abierto.

3. Desarrollo

Para la primera parte de esta experiencia se debe graficar las respuestas de lazo abierto y lazo cerrado de las funciones 5 y 6

$$6y'(t) + 2y(t) = 8u'(t) \tag{5}$$

$$y''(t) + 6y'(t) + 3y(t) - 5u''(t) - u'(t) - 4u(t) = 0 \tag{6}$$

Para obtener las respuestas de lazo abierto y cerrado primero se necesita obtener las funciones de transferencia de cada una de las funciones 5 y 6. Primero se muestra el cálculo para obtener la función de transferencia de cada una.

3.1. Obtención función de transferencia de la primera función

La función 5 también se puede escribir de la siguiente forma.

$$6\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 8\frac{du(t)}{dt} \tag{7}$$

1. Se calcula la transformada de Laplace a la función, como no se conocen los valores iniciales y(0) y y'(0), se dejan escritos como constantes:

   I) $6\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = 8\frac{du(t)}{dt}\ /\mathscr{L}$

   II) $6\mathscr{L}\{\frac{dy(t)}{dt}\} + 2\mathscr{L}\{y(t)\} = 8\mathscr{L}\{\frac{du(t)}{dt}\}$

   III) 6(sY(s) - y(0)) + 2Y(s) = 8(sU(s) - U(0))

   Se factoriza Y(s) en el lado izquierdo de la función y U(s) en el derecho

   IV) Y(s)(6s+2) - 6y(0) + 8u(0) = 8sU(s)

2. Dejamos solo a Y(s) en el lado izquierdo pasando dividiendo hacia el otro lado el termino que acompaña a Y(s), y en el lado derecho separamos los términos en los que acompañan al U(s) y los que no.

   I) $Y(s) = \frac{8sU(s)}{6s+2} + \frac{6y(0)-8u(0)}{6s+2}$

3. Finalmente lo que queremos es la función de transferencia, es decir, lo que acompaña al U(s), esto quiere decir que da igual cuales valores iniciales $y(0)$ y $y'(0)$ tengamos.

   I) $Y(s) = \frac{8s}{6s+2}U(s)$

   Por lo tanto la función de transferencia obtenida es:

   II) $H(s) = \frac{8s}{6s+2}$

3.2. Obtención función de transferencia de la segunda función

La función 6 se obtiene de una forma similar a la anterior, solo que al ser de segundo orden el cálculo para obtener la función de transferencia es mas largo.

La función 5 también se puede escribir de la siguiente forma.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 5\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} - 4u(t) \tag{8}$$

1. Se calcula la transformada de Laplace a la función, como no se conocen los valores iniciales y(0) y y'(0), se dejan escritos como constantes:

   I) $\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 6\frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = 5\frac{d^2u(t)}{dt^2} + 7\frac{dy(t)}{dt} + 4u(t)\ /\mathscr{L}$

   II) $\mathscr{L}\{\frac{d^2y(t)}{dt^2}\} + 6\mathscr{L}\{\frac{dy(t)}{dt}\} + 3\mathscr{L}\{y(t)\} = 5\mathscr{L}\{\frac{d^2u(t)}{dt^2}\} + 7\mathscr{L}\{\frac{dy(t)}{dt}\} + 4\mathscr{L}\{\frac{dy(t)}{dt}\}$

   III) $s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) + 6sY(s) - 6y(0) = 5s^2U(s) - 5su(0) - 5u'(0) + 7sU(s) - u(0) + 4U(s)$

   Los pasos siguientes son factorizar Y(s) y U(s), esto se hace igual que en la función anterior.

2. Como ya vimos anterior solo nos importa la función de transferencia de la función (Lo que acompaña al U(s)) entonces solo se muestra esa parte de la función

   I) $Y(s) = \frac{5s^2+7s+4}{s^2+6s+3}U(s)$

   Por lo tanto la función de transferencia obtenida es:

   II) $H(s) = \frac{5s^2+7s+4}{s^2+6s+3}$

3.3. Respuesta de funciones a un escalón

Ahora que se conoce el valor de todas las funciones de transferencia, se procede a hacer los gráficos respectivos. Ya analizado el comportamiento del sistema se ingresa un escalón como entrada con la función *step* de MATLAB. En la figura 9 se puede observar el comportamiento de la función en un lazo abierto y cerrado.

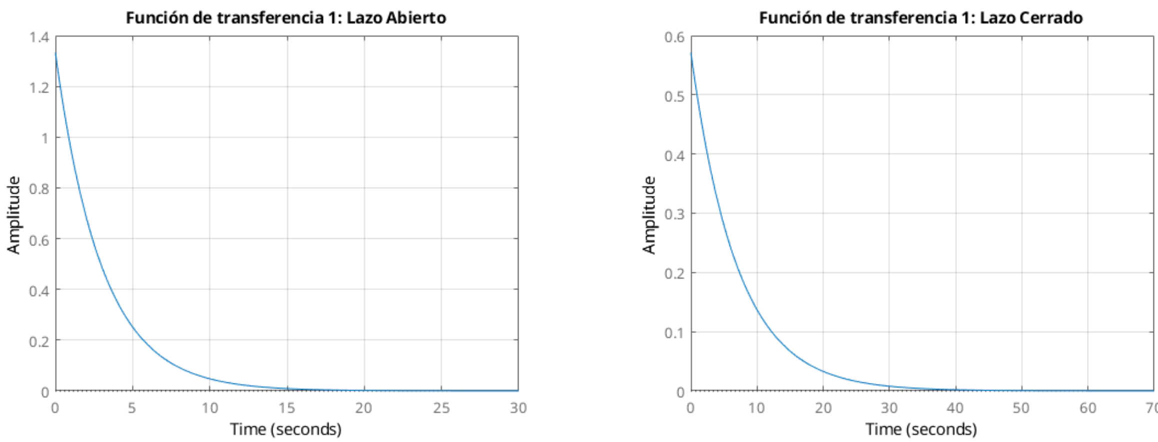

Figura 9: Respuesta de escalón de lazo abierto y cerrado función 1.

En estos gráficos se puede apreciar como la función de lazo cerrado tiene una demora mas larga hasta llegar a la estabilización del sistema. Además se observa que la amplitud máxima que alcanza el lazo abierto es mas alto que el lazo cerrado. Y por otro lado se puede comprobar que este sistema es estable debido a que después de un cierto tiempo la salida obtenida converge a un valor estable.

A continuación se procede a obtener la ganancia estática, el tiempo de estabilización, los ceros y los polos del sistema. Se calcula cada uno de estos valores para la función de lazo abierto y cerrado. Los resultados quedan expresados en el cuadro 1.

	Lazo abierto	Lazo cerrado
Ganancia estática	1.33	0.57
Tiempo de estabilización	11.73	27.38
Ceros	0	0
Polos	-0.33	-0.14

Cuadro 1: Tabla comparativa primera función

Con estos datos se puede determinar mas claramente que la función de lazo abierto tiene una demora mas corta hasta llegar a su estabilización, mientras que la de lazo cerrado cuenta con un tiempo de casi el doble. Sin embargo la función de lazo abierto alcanza un peak mas alto en la salida obtenida debido al escalón.

Luego se gráfica los polos y ceros de las funciones de transferencia (como x y o respectivamente), según su componente real y compleja. Según el valor de los polos se puede determinar que el sistema es estable debido a que la parte real de los polos son menores que cero.

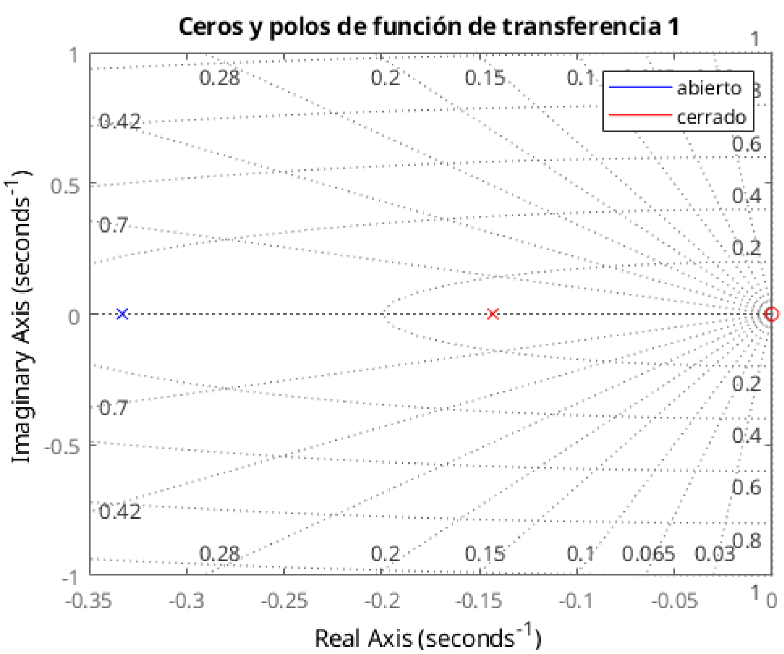

Figura 10: Gráfico polo y ceros función 1.

Luego se realiza el mismo proceso para la función 2, donde se ingresa un escalón como entrada para el sistema y luego se gráfica su comportamiento.

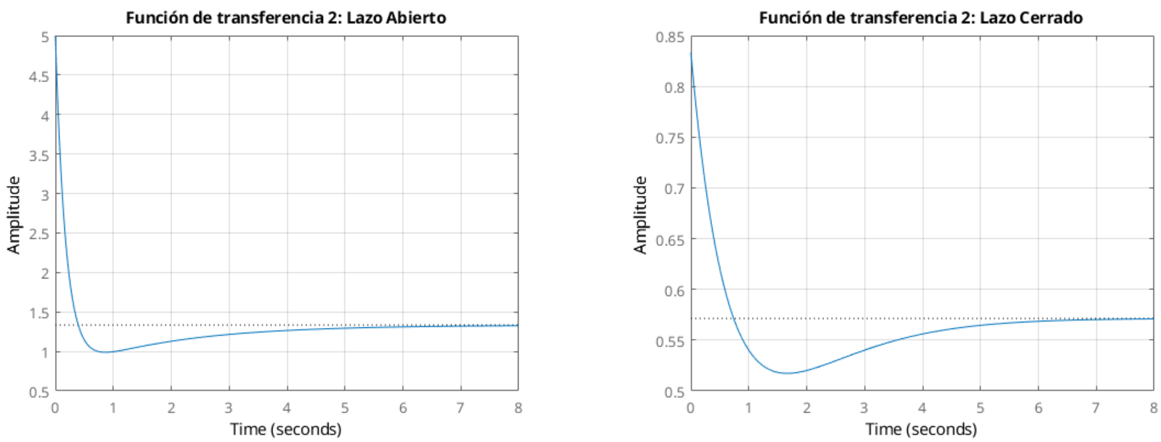

Figura 11: Gráfico de respuesta de escalón de lazo abierto y cerrado función 2.

En esta función se puede observar u comportamiento similar a la anterior donde la función de lazo cerrado tiene un tiempo de estabilización mas largo pero cuenta con una amplitud máxima menor que la función de lazo abierto.

Se realiza el mismo proceso para la obtención de la ganancia estática, el tiempo de estabilización, los ceros y los polos para este sistema.

	Lazo abierto	Lazo cerrado
Ganancia estática	5	0.83
Tiempo de estabilización	3.86	5.31
Ceros	[-0.7 + 0.55i; -0.7 - 0.55i]	[-0.7 + 0.55i; -0.7 - 0.55i]
Polos	[-5.44; -0.55]	[-1.16; -1]

Cuadro 2: Tabla comparativa segunda función

Acá se puede observar la diferencia de tiempo de estabilización y de amplitud máxima que tiene cada una de las funciones. Además al igual que la función 1 se puede notar que los polos tiene parte real negativa por lo que se puede deducir que es un sistema estable.

Luego finalmente se gráfica los polos y ceros de las funciones, según su componente real y compleja para la funcion 2.

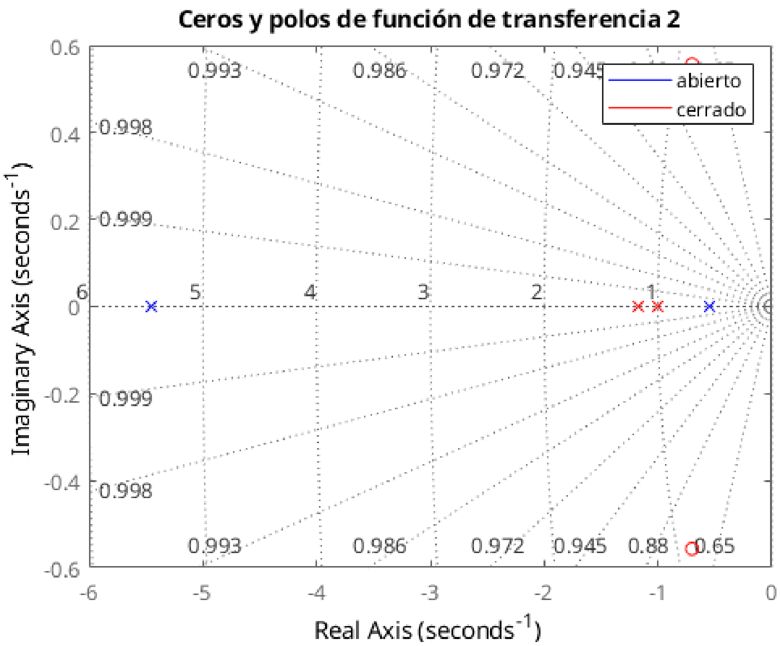

Figura 12: Gráfico polo y ceros función 2.

4. Desarrollo Segunda Parte

Para la segunda parte del laboratorio es necesario graficar en MATLAB la respuesta a un escalón del siguiente sistema representado en un diagrama de bloques. El diagrama se puede observar en al figura 13.

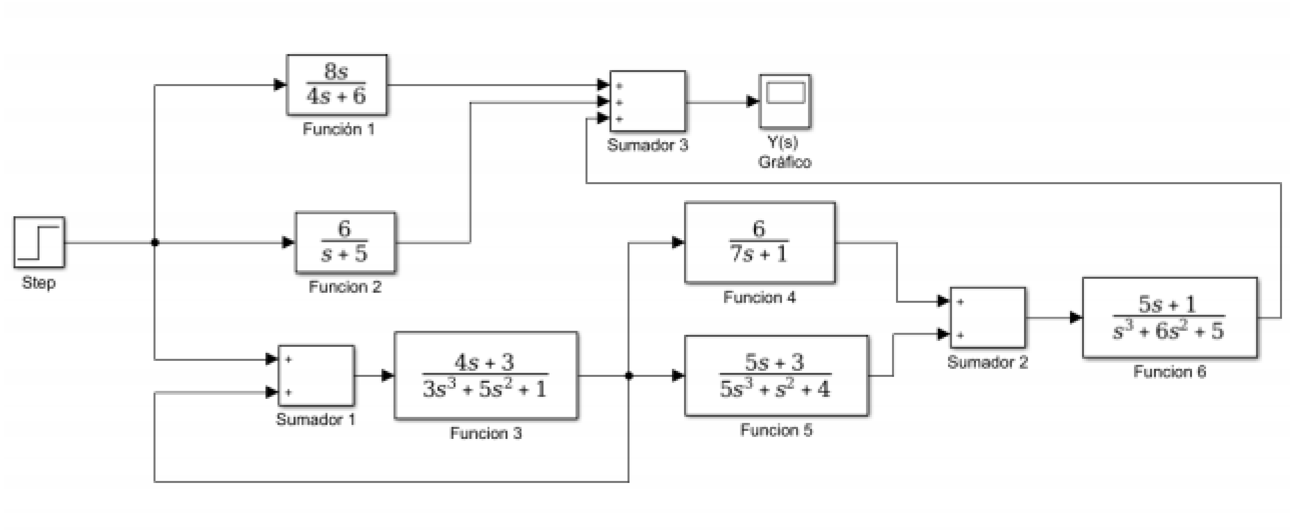

Figura 13: Diagrama de bloques.

Primero es necesario obtener la función de transferencia total del sistema, tomando en cuenta que se utilizara MATLAB es necesario seguir la sintaxis correcta de esta herramienta. Para esto se define cada uno de los bloques en una variable. Estas definciones se pueden observar en la figura 16.

```
%Se definen las funciones de transferencia del sistema
H1 = 8*s / (4*s + 6);
H2 = 6 / (s + 5);
H3 = (4*s+3)/(3*s^3 + 5*s^2 + 1);
H4 = 6 / (7*s + 1);
H5 = (5*s + 3)/(5*s^3 + s^2 + 4);
H6 = (5*s + 1)/(s^3 + 6*s^2 + 5);
```

Figura 14: Funciones definidas en variables en MATLAB.

Luego según las conexiones correspondiente se realizan operaciones necesarias para obtener la función de transferencia final del diagrama de bloques. Y cuando es necesario se utiliza la función *feedback* para simular un lazo cerrado.

```
% Operaciones para obtener la funcion de transferencia final
B1 = H1 + H2;
B2 = feedback(H3,1,1);
B3 = H4 + H5;

final = B1 + (H6 * B3 * B2);
```

Figura 15: Operaciones definidas en variables en MATLAB.

Al realizar este proceso se logra obtener la función de transferencia de todo el sistema

$$\frac{840s^{12} + 13448s^{11} + 67116s^{10} + 106644s^{9} + 53020s^{8} + 70064s^{7} + 68052s^{6} + 20692s^{5} + 61702s^{4} + 44564s^{3} + 8392s^{2} + 4316s + 990}{420s^{12} + 6094s^{11} + 29772s^{10} + 56280s^{9} + 40574s^{8} + 28210s^{7} + 33916s^{6} - 11636s^{5} - 20822s^{4} - 9508s^{3} - 25060s^{2} - 11840s - 1200}$$

Figura 16: Función de transferencia final

Una vez obtenida la función de transferencia final, se utiliza la función *step* para ingresar un escalón al sistema. Luego se gráfica el comportamiento de la función según el tiempo para conocer el sistema.

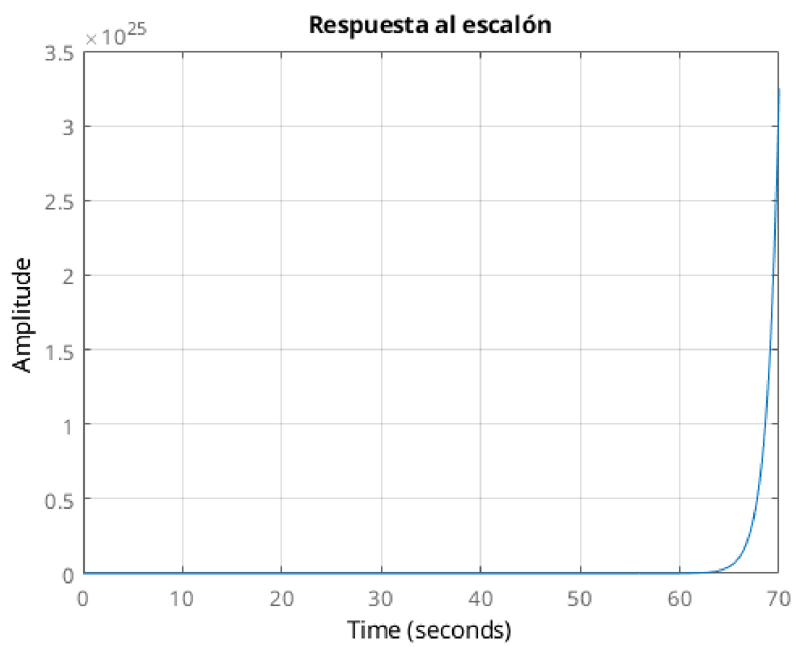

Figura 17: Respuesta de función a un escalón.

5. Conclusiones

Con los resultados obtenidos en las secciones anteriores se puede apreciar que gracias a las herramientas proporcionadas por el módulo *Control System Toolbox* de MATLAB, pudo realizar un lograr satisfactoriamente un análisis de sistemas de primer y segundo orden, y sistemas conformados por la unión de sistemas (diagrama de bloques). Agregar también que varias partes del código se pudieron desarrollar gracias a las clases y ayudantías.

Se pudo realizar completamente la experiencia, que consistía en graficar la respuesta a sistemas previamente mencionados ante un escalón como entrada, y obtener información importante de ellos como los ceros, polos, ganancia estática y tiempo de estabilización. Todo esto ayudó a comprender mejor todos los conceptos mencionados, ya que al verlos en el plano y trabajar con ellos permite mejor su comprensión y análisis de su comportamiento.

Se logro observar una diferencia en el comportamiento de las funciones al responder al escalón, las funciones de lazo cerrado contaban con un tiempo de estabilización mas largo que las funciones de lazo abierto. Por otro lado, se noto que las funciones de lazo abierto contaban con una amplitud máxima mas grande que las de lazo cerrado.

Finalmente podemos concluir que los objetivos del laboratorio fueron cumplidos con éxito. Cuando no se tenían claros algunos conceptos, se investigó y se buscó toda la documentación perteneciente a MATLAB. Gracias a este laboratorio pudimos ver la importancia de los sistemas, como estos se plantean, que modelos se pueden usar, como combinar sistemas y como interpretar las resultados de salida de estos.

Bibliografía

Lorca, C. (2011). *Estudio Temporal de Sistemas Continuos.*

MathWorks (2006). *Feedback connection of two models.*

tutorialsPoint (2014). *Basic Elements of Block Diagram.*