Inlämningsuppgift 1

David Wessman, 19940325-1037
Manu Upadhyaya, 19920831-6530

Lunds Tekniska Högskola
Funktionsteori, FMAF01

1.1

Lös rekursionsekvationen

$$\begin{cases} x_{n+2} - 8x_{n+1} + 16x_n = 9n + 3, \quad n \in \mathbb{N} \\ x_0 = 0, x_1 = 0 \end{cases}$$

Lösning:
Ansätt den homogena lösningen till $x_n^h = Cr^n$, $C \neq 0$, $r \neq 0$ och $C, r \in \mathbb{C}$. Insättning i korresponderade homogena ekvation ger

$$\begin{aligned} Cr^{n+2} - 8Cr^{n+1} + 16Cr^n = 0 &\Leftrightarrow \\ Cr^n(r^2 - 8r + 16) = 0 &\Leftrightarrow \\ r^2 - 8r + 16 = 0 &\Leftrightarrow \\ (r-4)^2 = 0 &\Leftrightarrow \\ r_{1,2} = 4 & \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen till den homogena ekvationen blir, enligt sats 4.14

$$x_n^h = C_1 4^n + C_2 n 4^n \text{ där } C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Ansätt partikulärlösningen till $x_n^p = An + B$ där $A, B \in \mathbb{C}$. Insättning i den ursprungliga ekvationen ger

$$\begin{aligned} A(2+n) + B - 8(A(n-1) + B) + 16(An + B) = 9n + 3 &\Leftrightarrow \\ 2A + An + B - 8An - 8A - 8B + 16An + 16B = 9n + 3 &\Leftrightarrow \\ 9An - 6A + 9B = 9n + 3 & \end{aligned}$$

Ovanstående ekvation ska vara uppfylld för samtliga n, den enda möjligheten är att

$$\begin{cases} 9A = 9 \\ -6A + 9B = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ 9B = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = 1 \end{cases}$$

Parktikulärlösningen blir

$$x_n^p = n + 1$$

och därmed ges den allmänna lösningen till den sökta rekursionsekvation av

$$x_n = x_n^h + x_n^p = C_1 4^n + C_2 n 4^n + n + 1.$$

Insättning av begynnelsevärdena $x_0 = 0, x_1 = 0$ ger

$$\begin{cases} 0 = x_0 = 1 + C_1 \\ 0 = x_1 = 4C_1 + 4C_2 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -1 \\ C_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Den sökta lösningen blir

$$x_n = x_n^h + x_n^p = \frac{1}{2} 4^n - 4^n + n + 1 \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.2

Lös rekursionsekvationen

$$\begin{cases} x_n - 10x_{n-1} + 50x_{n-2} = 0, & n \in \{2,3,4,\dots\} \\ x_0 = 0, x_1 = 10. \end{cases}$$

och svara på reell form. Bestäm x_{32} med Maple och Matlab.
Lösning:
Observera att

$$\begin{cases} x_n - 10x_{n-1} + 50x_{n-2} = 0, & n \in \{2,3,4,\dots\} \\ x_0 = 0, x_1 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+2} - 10x_{n+1} + 50x_n = 0, & n \in \mathbb{N} \\ x_0 = 0, x_1 = 10 \end{cases}$$

Ekvationen är homogen så det räcker med ansatsen $x_n = Cr^n$, $C \neq 0$, $r \neq 0$ och $C, r \in \mathbb{C}$. Insättning ger

$$\begin{aligned} Cr^{n+2} - 10Cr^{n+1} + 50Cr^n = 0 &\Leftrightarrow \\ Cr^n(r^2 - 10r + 50) = 0 &\Leftrightarrow \\ r^2 - 10r + 50 = 0 &\Leftrightarrow \\ (r-5)^2 - 25 + 50 = 0 &\Leftrightarrow \\ (r-5)^2 = -25 &\Leftrightarrow \\ r - 5 = \pm i5 &\Leftrightarrow \\ r_{1,2} = 5 \pm i5 & \end{aligned}$$

Den allmänna lösningen blir då

$$x_n = C_1(5+i5)^5 + C_2(5-i5)^n \text{ där } C_1, C_2 \in \mathbb{C}.$$

Insättning av begynnelsevärdena $x_0 = 0, x_1 = 10$ ger

$$\begin{cases} 0 = x_0 = C_1 + C_2 \\ 10 = x_1 = 5C_1 + i5C_1 + 5C_2 - i5C_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -C_2 \\ -i10C_2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = -i \\ C_2 = i \end{cases}$$

Den sökta lösningen blir

$$\begin{aligned} x_n &= i(5-i5)^n - i(5+i5)^5 \\ &= i\left(\left(5\sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^n - \left(5\sqrt{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n\right) \\ &= i\left((5\sqrt{2})^n\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}n} - \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}n}\right)\right) \\ &= 2(5\sqrt{2})^n\left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}n} - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}n}}{2i}\right) \\ &= 2(5\sqrt{2})^n \sin\left(\frac{\pi}{4}n\right) \qquad (1) \end{aligned}$$

Följande kod i Maple

```
x := n -> 2*exp((1/2)*n*ln(50))*sin((1/4)*n*Pi);
x(32)
```

ger resultatet

$$x_{32} = 0.$$

Följande kod i Matlab

```
x =@(n) 2*((5*sqrt(2))^(n))*sind(45*n);
x(32)
```

ger resultatet

$$x_{32} = 0.$$

Den sökta lösningen på rekursionsekvationen beskrivs av **ekvation (1)** och uträkning, i både Matlab och Maple, ger $\mathbf{x_{32} = 0}$. I Matlab skrivs sinusuttrycket om från radianer till grader eftersom att Matlabs beräkning av $\sin \pi \neq 0$ men $\text{sind}(180) = 0$.

1.3

Bestäm alla lösningar till ekvationen:

$$\mathrm{e}^{2z} = -5i$$

Lösning:
Omskrivning till exponentialform ger

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2z} &= -5i \Leftrightarrow \\ \mathrm{e}^{2z} &= 5e^{-i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Ansätter $z = x + iy$

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2(x+iy)} &= 5\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \\ \mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{2iy} &= 5\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} \end{aligned}$$

Detta ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} \mathrm{e}^{2x} = 5 \\ 2y = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\ln 5}{2} \\ y = -\frac{\pi}{4} + \pi k \end{cases}$$

Insättning i z ger

$$z = \frac{1}{2}\ln 5 + i\left(-\frac{\pi}{4} + \pi k\right), \quad k \in \mathbb{Z} \tag{2}$$

I Maple löses problemet med följande kod

```
solve(exp(2·z)=-5·I)
```

$$\frac{1}{2}\ln(-5I)$$

```
evalc(%)
```

$$\frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{4}I\pi$$

Körning med tillägget `_EnvAllSoultions:=true:` ger

$$\frac{1}{2}\ln 5 + I\left(-\frac{1}{4}\pi + \pi\_Z2\right)$$

Med jämförelse av svaret ovan och ekvation (2) så tolkar vi Maples uttryck π_Z2 som den godtyckliga konstanten k, $k \in \mathbb{Z}$ i vår ekvation.

1.4

Bestäm alla lösningar till

$$4\sin z = 5$$

Lösning:
Det gäller att

$$4\sin z = 5 \quad \Leftrightarrow \quad \sin z = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad e^{iz} - e^{-iz} = i\frac{5}{2} \quad \Leftrightarrow \quad e^{2iz} - 1 = i\frac{5}{2}e^{iz}$$

Sätt $e^{iz} = t$. Detta ger

$$\begin{aligned} t^2 - 1 = i\frac{5}{2}t \Leftrightarrow \\ t^2 - i\frac{5}{2}t - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \left(t - i\frac{5}{4}\right)^2 - \left(i\frac{5}{4}\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \\ \left(t - i\frac{5}{4}\right)^2 = -\frac{9}{16} \Leftrightarrow \\ t - i\frac{5}{4} = \pm i\frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ t = i\frac{5}{4} \pm i\frac{3}{4} \Leftrightarrow \\ t_1 = 2i \quad \text{och} \quad t_2 = \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

Studera z med avseende på t_1 och t_2:

$$\begin{aligned} e^{iz} = t_1 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{iz} = 2i \quad \Leftrightarrow \quad iz = \ln 2 + i\frac{\pi}{2} + 2\pi ik \quad \Leftrightarrow \quad z = -i\ln 2 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \\ e^{iz} = t_2 \quad &\Leftrightarrow \quad e^{iz} = \frac{1}{2}i \quad \Leftrightarrow \quad iz = \ln\frac{1}{2} + i\frac{\pi}{2} + 2\pi ik \quad \Leftrightarrow \quad z = i\ln 2 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k \end{aligned}$$

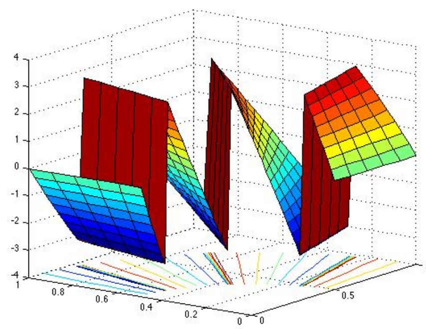
Den totala lösningen är

$$z = \pm i\ln 2 + \frac{\pi}{2} + 2\pi k. \quad k \in \mathbb{Z}$$

1.5

Vad är värdet på t i respektive språng i Figur 1 som ritas med följande Matlab-kommandon?

```
t=0:pi/100:pi/2;
r=0.5:0.1:1;
x=r'*cos(t);
y=r'*sin(t);
z=x+i*y;
w=log(z.^12);
surfc(x,y,imag(w));
```



Figur 1: Surface-plot av givet Matlab-kommandon.

Lösning:
För att motivera de tre sprången som sker i grafen studeras dess funktion

$$\begin{cases} t : 0 \to \frac{\pi}{2} \\ r : 0{,}5 \to 1 \\ x = r \cdot \cos t \\ y = r \cdot \sin t \\ z = x + iy \\ w = \operatorname{Im}\left(\log z^{12}\right) \end{cases}$$

Ansätts $z = re^{it}$ ger det att $z^{12} = r^{12} \cdot e^{i12t}$. Definitionen av logaritmens principalgren, som används i Matlab, är

$$\operatorname{Log}_p(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) \quad \text{där } -\pi < \operatorname{Arg}(z) < \pi$$

Sprången sker då $\arg(z) \equiv \pi \pmod{2\pi}$, vilket ger

$$\begin{aligned} \arg(z^{12}) = 12t &= \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \\ t &= \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{6}k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned} \tag{3}$$

k	0	1	2
t	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{12}$

Tabell 1: Vinklarna för de tre sprången i Figur 1, enligt Ekvation 3.

Sprången beskrivna av ekvation (3) sammanfattas i Tabell 1.

1.6

Låt

$$\mathrm{Log}_p(z) = \ln|z| + i\mathrm{Arg}(z)$$

vara logaritmfunktionens principalgren. Ge exempel på tal z_1 *och* z_2 *sådant att* $\mathrm{Log}_p(z_1)$, $\mathrm{Log}_p(z_1)$ *och* $\mathrm{Log}_p(\frac{z_1}{z_2})$ *är definierade men* $\mathrm{Log}_p(\frac{z_1}{z_2}) \neq \mathrm{Log}_p(z_1) - \mathrm{Log}_p(z_2)$.

Lösning:

Vi har att

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}_p\left(\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right) &= i\frac{3\pi}{4} \\ \mathrm{Log}_p\left(\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}\right) &= -i\frac{3\pi}{4} \\ \mathrm{Log}_p\left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}}\right) = \mathrm{Log}_p\left(\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{2}}\right) &= -i\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

där det är klart att

$$\mathrm{Log}_p\left(\frac{\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}}{\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}}\right) \neq \mathrm{Log}_p\left(\mathrm{e}^{i\frac{3\pi}{4}}\right) - \mathrm{Log}_p\left(\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{4}}\right).$$

1.7

Bestäm den reella konstanten a så att

$$v(x,y) = x^3 + axy^2 - 3x^2y + y^3$$

blir imaginärdelen av en hel funktion f sådan att $f(0) = 1$. Uttryck också $f(z)$ som en funktion av z, där $z = x + iy$.
Lösning:
Skriv f på formen

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

där $u(x,y)$ är den sökta realdelen av f. Då f är holomorf i hela $\mathbb{C}$ gäller enligt sats 1.19 att $\bigtriangledown^2 v = 0$. Börja med att ta fram partialerna

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = 3x^2 + ay^2 - 6xy \\ \frac{\partial v}{\partial y} = 2axy - 3x^2 + 3y^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 6x - 6y \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 2ax + 6y \end{cases}$$

Detta ger

$$0 = \bigtriangledown^2 v = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = (6x - 6y) + (2ax + 6y) \Leftrightarrow a = -3$$

Cauchy-Riemanns ekvationer måste gälla eftersom f är holomorf på hela $\mathbb{C}$. Detta ger

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} = -6xy - 3x^2 + 3y^2 & (4) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x} = -3x^2 + 3y^2 + 6xy & (5) \end{cases}$$

Integration av ekvation (5) med avseende på y ger

$$u(x,y) = -3x^2y + y^3 + 3xy^2 + \phi(x) \tag{6}$$

där $\phi(x)$ är en funktion som är deriverbar med och endast beror på x. Tag partialen av ekvation (6) med avseende på x och jämför med ekvation (4)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy + 3y^2 + \phi'(x) \\ \frac{\partial u}{\partial x} = -6xy - 3x^2 + 3y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \phi'(x) = -3x^2 \quad \Leftrightarrow \quad \phi(x) = -x^3 + K \text{ där } K \in \mathbb{R}$$

f kan nu skrivas som

$$f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y) = (-3x^2y + y^3 + 3xy^2 - x^3 + K) + i(x^3 - 3xy^2 - 3x^2y + y^3)$$

Med anpassning till restriktionen $f(0) = 1$ och tricket att sätta $y = 0$ och sedan ersätta x med z, fås

$$f(z) = -z^3 + 1 - iz^3 = z^3(i-1) + 1$$