

Projet EDP

Baptiste AUSSEL et Albin CINTAS

February 2021

Contents

1	Introduction	1
2	Approximation spatiale du Laplacien	2
3	Approximation des termes advectifs	6
4	Marches en temps	7
5	Conclusion	12

1 Introduction

Au travers de ce projet nous allons étudier le comportement dispersif d'un produit déversé dans une rivière de largeur constante b et animée d'une vitesse V au cours du temps.

L'eau est plus dense que le produit, et le produit est très peu miscible avec l'eau. Ainsi le produit flotte à la surface de l'eau. Nous allons essayer de représenter cet écoulement via différentes étapes de construction : tout d'abord nous étudierons l'approximation spatiale du Laplacien, ensuite nous approximerons les termes advectifs à notre modèle. Enfin nous ajouterons les marches en temps en utilisant 2 schémas différents : Euler explicite, Crank-Nicholson..

Question 1:

La conservation de la concentration est donnée par :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\phi) = 0$$

avec $\phi = \phi_c + \phi_d = -\lambda \nabla C + \rho C V$

En injectant, on obtient :

$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} + \operatorname{div}(-\lambda \nabla C) + \operatorname{div}(\rho C V) = 0$$

De plus,

$$\operatorname{div}(-\lambda \nabla C) = -\lambda \Delta C$$

$$\operatorname{div}(\rho C V) = C \operatorname{div}(\rho V) + \rho V \nabla C$$

Notre équation devient alors :

$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} - \lambda \Delta C + C \operatorname{div}(\rho V) + \rho V \nabla C = 0$$

On a par ailleurs :

$$\frac{\partial \rho C}{\partial t} = \rho \frac{\partial C}{\partial t} + C \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Et donc en utilisation l'équation de conservation de la masse on a :

$$\rho \frac{\partial C}{\partial t} - \lambda \Delta C + \rho V \nabla C = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial C}{\partial t} - \mu \Delta C + V \nabla C = 0$$

avec $\mu = \frac{\lambda}{\rho}$

2 Approximation spatiale du Laplacien

On considère ici une approximation du Laplacien en 2D, avec conditions aux limites de type Dirichlet, donnée par :

$$\begin{cases} -\mu \Delta u &= f \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Question 2 :

On a :

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Et en utilisant le développement de Taylor de u en h et en fixant y_j on obtient le schéma centré d'ordre 2 :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{2u(x_i, y_j) - u(x_{i-1}, y_j) - u(x_{i+1}, y_j)}{h_x^2} + O(h_x^2)$$

De la même manière, à x_i fixé :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) = \frac{2u(x_i, y_j) - u(x_i, y_{j-1}) - u(x_i, y_{j+1})}{h_y^2} + O(h_y^2)$$

Question 3 :

D'après la question précédente on obtient :

$$-\Delta u(x_i, y_j) \simeq \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right)u(x_i, y_j) - \frac{1}{h_x^2}(u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)) - \frac{1}{h_y^2}(u(x_i, y_{j-1}) + u(x_i, y_{j+1}))$$

Ainsi, le schéma à l'ordre 2 en (x_i, y_j) est donné par :

$$\mu \left[\left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}\right)u(x_i, y_j) - \frac{1}{h_x^2}(u(x_{i-1}, y_j) + u(x_{i+1}, y_j)) - \frac{1}{h_y^2}(u(x_i, y_{j-1}) + u(x_i, y_{j+1})) \right] = f(x_i, y_j)$$

Question 4 :

On notera par la suite : $u(x_i, y_j) = u_{i,j}$ et $\forall i \in 0 : (N_y + 1) \quad U_i = [u_{0,i}, \dots, u_{N_x+1,i}]$

Avec les conditions de Dirichlet on a :

$$\forall j \in 0 : (N_y + 1) \quad u_{0,j} = u_{N_x+1,j} = 0$$

$$\forall i \in 0 : (N_x + 1) \quad u_{i,0} = u_{i,N_y+1} = 0$$

Ainsi, le schéma se présente sous forme matricielle de la manière suivante :

$$A = UF$$

avec

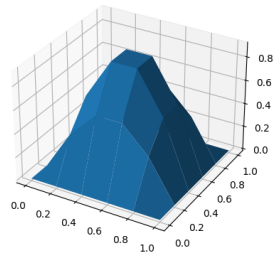
$$A = \begin{bmatrix} I_{N_x+2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ C & B & C & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & C & B & C \\ 0 & \dots & \dots & 0 & I_{N_x+2} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{h_x^2} & 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) & -\frac{1}{h_y^2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & -\frac{1}{h_x^2} & 2\left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2}\right) & -\frac{1}{h_y^2} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{h_y^2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & -\frac{1}{h_y^2} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

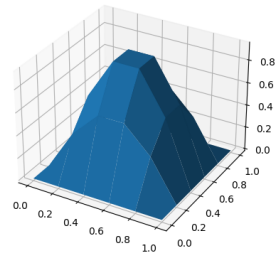
$$U = \begin{bmatrix} U_0 \\ \vdots \\ \vdots \\ U_{N_y+1} \end{bmatrix} \text{ et } F = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \text{---} \\ 0 \\ f(x_1, y_1) \\ \vdots \\ f(x_1, y_{N_y}) \\ 0 \\ \text{---} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Question 5 :

Avec cette implémentation et les conditions de Dirichlet homogènes discrètes on obtient :

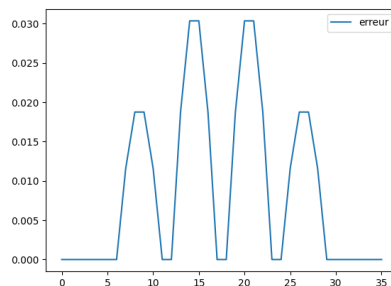


exact solution



numerical solution

Avec une erreur de l'ordre de 10^{-2} :



Question 6 :

En $x = a - h$ et $x = a - 2h$, on a les développements de Taylor à l'ordre 3 suivants :

$$u(a - h, y) = u(a, y) - h \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, y) + O(h^3)$$

$$u(a - 2h, y) = u(a, y) - 2h \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) + \frac{4h^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(a, y) + O(h^3)$$

On en déduit donc :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y_j) = \frac{3u(a, y_j) + u(a - 2h, y_j) - 4u(a - h, y_j)}{2h_x} + O(h^2)$$

De plus comme $x = a = (N_x + 1)h_x$, on peut écrire cette approximation :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(a, y_j) \simeq \frac{3u_{N_x+1,j} + u_{N_x-1,j} - 4u_{N_x,j}}{2h_x}$$

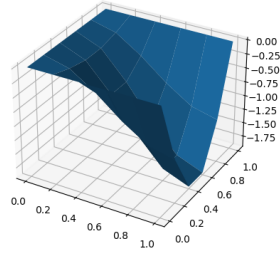
Question 7 :

Afin de prendre en compte cette condition de Neumann sur Γ_1 , il faut modifier A et plus précisément la matrice B :

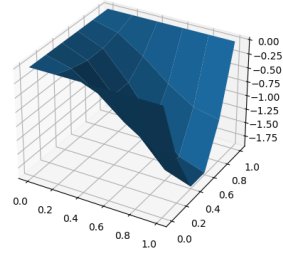
En effet, le changement s'effectue sur la dernière ligne de B qui devient :

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{2h_x} & -\frac{2}{h_x} & \frac{3}{2h_x} \end{bmatrix}$$

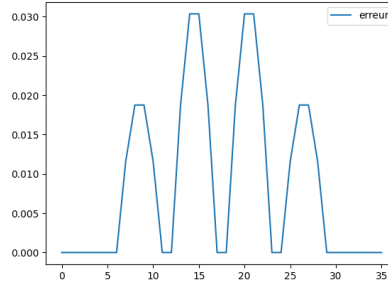
Implémentation :



exact solution
On obtient ici une erreur de l'ordre de 10^{-2} :



numerical solution



3 Approximation des termes advectifs

Dans cette partie on ne considère plus le terme V nul.
On considère ainsi le problème :

$$\begin{cases} -\mu\Delta u &= f \\ u &= 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \text{ sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

Question 8 :

On modélise le phénomène diffusif et le phénomène advectif par leurs termes respectifs ($V\nabla u$ et $\mu\Delta u$). Afin de déterminer lequel des deux est prédominants, on effectue le rapport :

$$\frac{\|V\nabla u\|}{\|\mu\Delta u\|} \simeq \frac{v \frac{u}{l}}{\mu \frac{u}{l^2}} = \frac{vl}{\mu} = P_{el}$$

Question 9 :

On a $V = (v_x \ 0)^T$ et par développement de Taylor de $u_{i-1,j}$ et de $u_{i+1,j}$, on a :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} + O(h_x^2)$$

Donc on en déduit :

$$V \cdot \nabla u(x_i, y_j) = v_x \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h_x} + O(h_x^2)$$

4 Marches en temps

(a)

On considère dans cette partie le problème initial, on ajoute ainsi la dérivée de la concentration.

QUESTION 10 :

On considère ici $v_x = 0$, donc A est l'approximation de l'opérateur $C \rightarrow -\mu \Delta C$. On peut donc écrire le schéma d'Euler explicite de la façon suivante en utilisant la question 2 :

$$\frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\delta t} = \mu \left[\frac{U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n - 2U_{i,j}^n}{h_x^2} + \frac{U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n - 2U_{i,j}^n}{h_y^2} \right]$$

$U_{i,j}^{n+1}$ est une combinaison convexe des autres termes si chaque coefficient devant ces termes est positif et que leur somme vaut 1.

On réécrit le schéma sous la forme :

$$U_{i,j}^{n+1} = \mu \frac{\delta t}{h_x^2} (U_{i+1,j}^n + U_{i-1,j}^n) + \mu \frac{\delta t}{h_y^2} (U_{i,j+1}^n + U_{i,j-1}^n) + U_{i,j}^n (1 - \mu \delta t (\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}))$$

On doit donc avoir dans un premier temps :

$$1 - \mu \delta t (\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu \delta t}{h_x^2} + \frac{\mu \delta t}{h_y^2} \leq \frac{1}{2}$$

Les autres coefficients sont positifs.

Dans un deuxième temps, on a bien la somme des termes qui vaut 1 :

$$2\mu \frac{\delta t}{h_x^2} + 2\mu \frac{\delta t}{h_y^2} + (1 - \mu \delta t (\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2})) = 1$$

Donc $U_{i,j}^{n+1}$ est bien une combinaison convexe des autres termes si $CFL \leq \frac{1}{2}$

(b)
Pour un CFL de 0,2 :

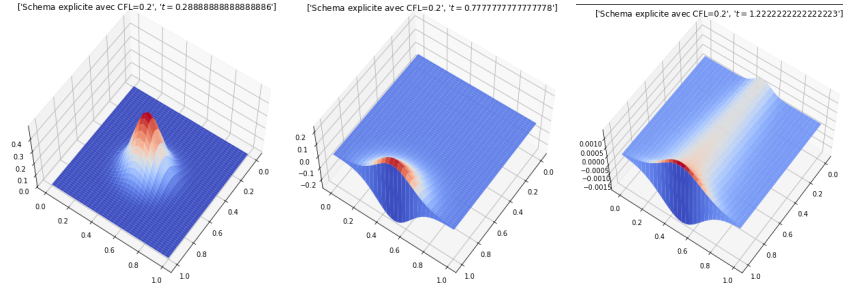


Figure 1: CFL = 0,2 , $t \in \{0,2 ; 0,7 ; 1,2\}$

Pour un CFL de 0,5 :

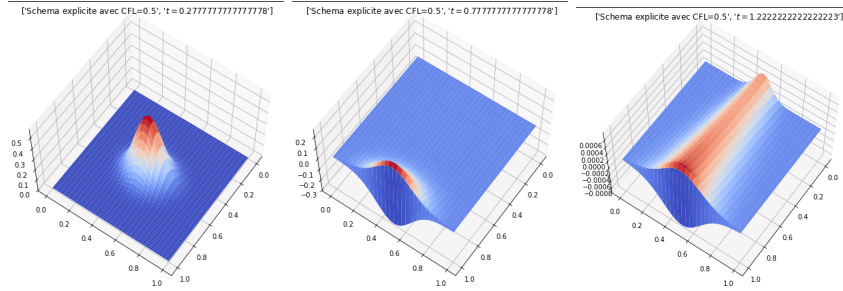


Figure 2: CFL = 0,5 , $t \in \{0,2 ; 0,7 ; 1,2\}$

Pour un CFL de 0,65 :

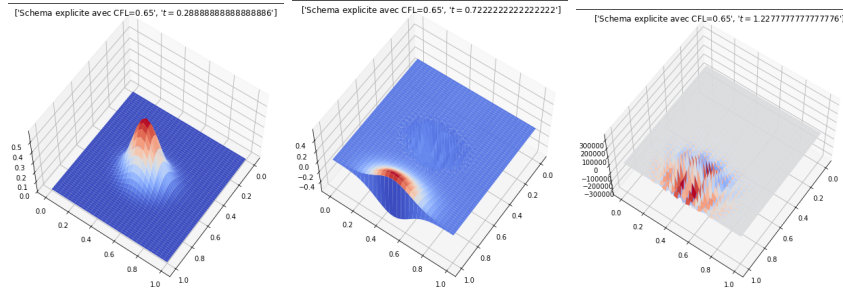


Figure 3: CFL = 0,65 , $t \in \{0,2 ; 0,7 ; 1,2\}$

On constate qu'en pratique, un CFL allant jusqu'à 0,6 implique toujours la convergence de notre schéma. Cependant, à partir de CFL = 0,65, on observe une divergence lorsque le fluide arrive sur la frontière.

Pour un CFL de 0,5 ceci correspond au profil suivant :

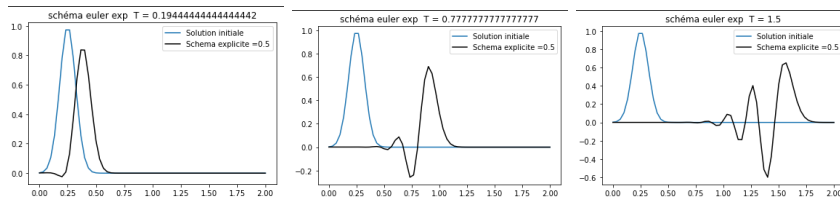


Figure 4: profil Euler

On observe bien la diffusion du produit.

(c)

Ce schéma implicite est inconditionnellement stable au sens de Von Neumann pour l'équation de la chaleur ($|G| \leq 1$) à la différence du schéma d'Euler explicite qui ne l'est que si $CFL \leq 0,5$.

QUESTION 11 :

Le régime de l'écoulement est donné par le nombre de Reynolds :

$$Re = \frac{uL}{\nu}$$

avec :

ν la viscosité cinématique de l'eau : $1,007 \cdot 10^6$

u la vitesse moyenne de l'écoulement

: $1 m \cdot s^{-1}$ L Taille caractéristique de la rivière : $\simeq 10m$

$$Re = \frac{110}{1,007 \cdot 10^6} \simeq 10^7 > 10000$$

Donc le régime est turbulent.

QUESTION 12 :

Le schéma de Crank-Nicholson avec la première condition initiale donne lieu au comportement suivant :

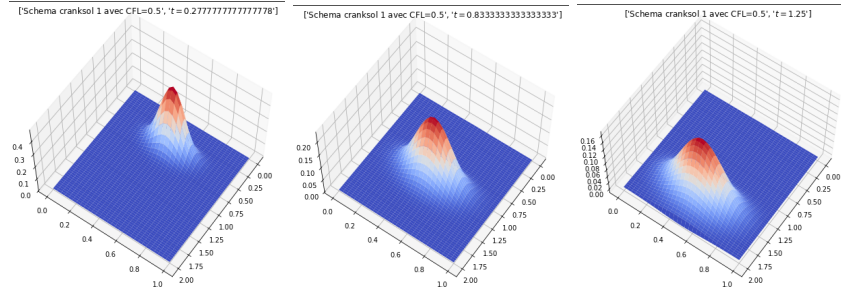


Figure 5: Crank-Nicholson sol initiale 1

Ce qui en terme de profil correspond à :

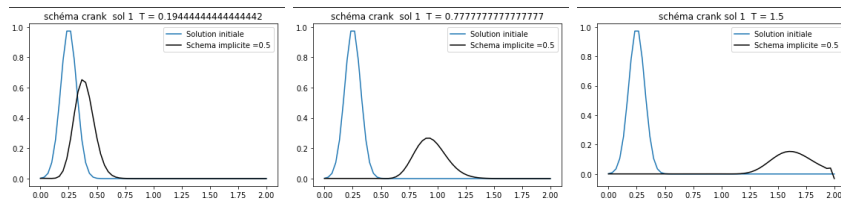
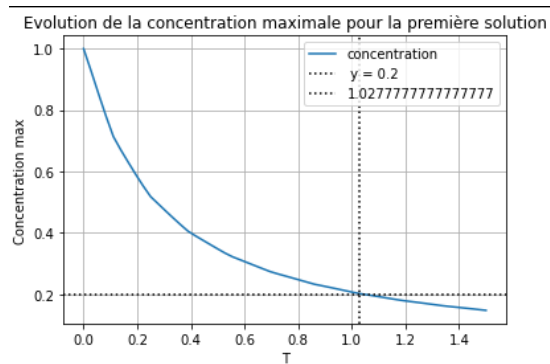


Figure 6: profil Crank-Nicholson sol initiale 1

On distingue bien la perte d'amplitude de la concentration au fil du temps. Dans le cas de cette condition initiale, on observe que la concentration maximale diminue de 80% après 1 seconde comme on peut le voir ci-dessous :



QUESTION 13 :

On a procédé de même pour la nouvelle condition initiale : Le schéma de Crank-Nicholson donne désormais lieu au comportement suivant :

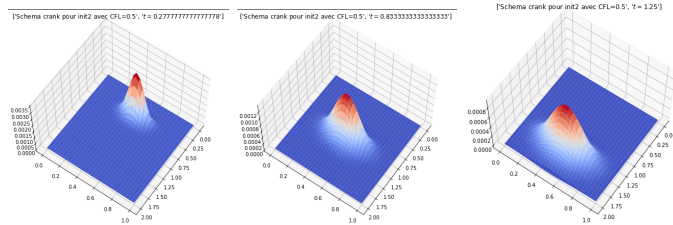


Figure 7: Crank-Nicholson sol initiale 2

Ce qui en terme de profil correspond à :

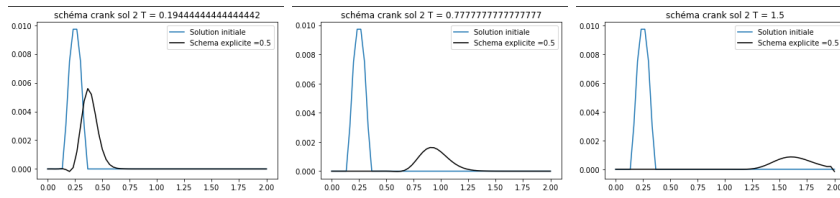
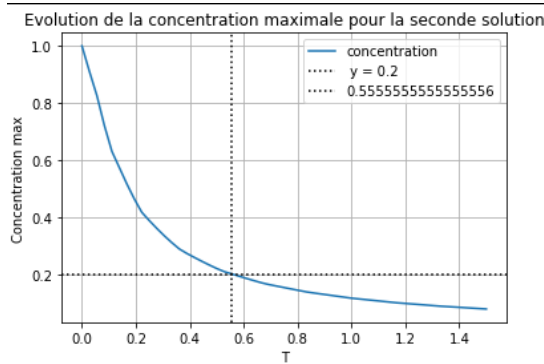


Figure 8: profil Crank-Nicholson sol initiale 2

On distingue également dans ce cas une perte d'amplitude. Dans le cas de cette condition initiale, on observe que la concentration maximale diminue de 80% après 0,55 secondes comme on peut le voir ci-dessous:



5 Conclusion

Au travers de l'étude menée sur ces différents schémas, nous observons bien le phénomène d'advection et le phénomène de diffusion pour un produit dans une rivière.

Nous avons procédé par étapes : tout d'abord nous avons commencé par approximer le Laplacien, puis nous avons rajouté le terme d'advection et enfin la marche en temps. Nous avons modélisé sur 2 différentes solutions : une solution régulière et une solution non régulière.

Les résolutions numériques de ces problèmes ont donné des résultats satisfaisants en termes de convergence et de stabilité. On a de plus remarqué que nos résultats sont plus précis avec le schéma implicite de crank-Nicholson qu'avec le schéma d'Euler explicite. On distingue enfin que la diffusion semble se stopper au bout d'un certain temps. Cela semble être dû aux conditions aux limites que nous avons fixé. Pour conclure, la diffusion et l'advection du produit semblent correctes, et le fluide finit bien par sortir du modèle.