

1 Intro mathématique

1.1 Trigonométrie

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= 1 & \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\ \frac{1}{\cos^2(\alpha)} &= 1 + \tan^2(\alpha) & \frac{1}{\sin^2(\alpha)} &= 1 + \cot^2(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm 2\pi) &= \cos(\alpha) & \sin(\alpha \pm 2\pi) &= \sin(\alpha) & \tan(\alpha \pm \pi) &= \tan(\alpha) \\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) & \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) & \tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha) \\ \cos(\pi \pm \alpha) &= -\cos(\alpha) & \sin(\pi \pm \alpha) &= \mp \sin(\alpha) & \tan(\pi \pm \alpha) &= \pm \tan(\alpha) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \sin(\alpha) & \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \cos(\alpha) & \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \cot(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} & \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{2} \\ \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} & \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & \cos(\alpha) - \cos(\beta) &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & \sin(\alpha) - \sin(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \tan(\alpha) + \tan(\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} & \tan(\alpha) - \tan(\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} \end{aligned}$$

$$a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \varphi)$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\cos(x) = a \Rightarrow \begin{cases} x = \arccos(a) + k \cdot 2\pi \text{ ou} \\ x = -\arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\sin(x) = a \Rightarrow \begin{cases} x = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \text{ ou} \\ x = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\tan(x) = a \Rightarrow x = \arctan(a) + k \cdot \pi$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin(\arctan x) = x^2 \cos(\arctan x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

1.2 Géométrie

1.2.1 Vecteur

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Projection de \vec{b} sur \vec{a} :

$$\vec{b}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

1.3 Dérivés et intégrales

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Intégration par parties:

$$\int xy dt = xy - \int xy dt$$

Intégration par substitution: $\int \dot{x} f(x) dt = \int f(x) dx$

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	a	ax
1	x	x^2
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$-\frac{1}{2}\sqrt{x^3}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
nx^{n-1}	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$-\frac{n}{x^{n-1}}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{n-1}x^{n-1}$
$\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{n-1}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n+1]{x^{n+1}}$
ae^{ax}	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$ab^{ax} \ln(b)$	b^{ax}	$\frac{1}{a \ln(b)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x(\ln(x) - 1)$
$\frac{1}{x \ln(a)}$	$\log_a(bx)$	$x \log_a\left(\frac{bx}{e}\right)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\frac{g'(x)^2 + g(x)g''(x)}{g(x)^2}$	$g(x)g'(x)$	$\frac{1}{2}g(x)^2$
$\frac{g''(x)g(x) - g'(x)^2}{g(x)^2}$	$g'(x)$	$\ln g(x) $

1.4 Polynômes Taylor

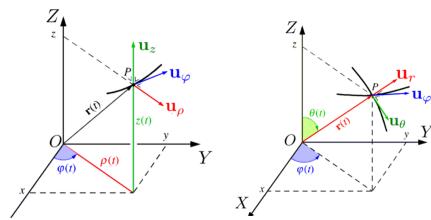
$$P_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n$$

2 Cinématique

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} = \vec{r} = \frac{d^2}{dt^2} (x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3)$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R_c} \vec{u}_r$$

2.1 Coordonnée cylindrique



$$\frac{d}{dt} \vec{u}_\rho = \dot{\phi} \vec{u}_\theta \quad \frac{d}{dt} \vec{u}_\theta = -\dot{\rho} \vec{u}_\rho - \dot{\phi} \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\theta = \rho \dot{\phi} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad \vec{a} \begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\phi}^2 \\ a_\theta = \ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho \dot{\phi}^2 \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

2.2 Coordonnée sphérique

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{u}_r &= \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\phi} \sin \theta \vec{u}_\varphi \\ \frac{d}{dt} \vec{u}_\theta &= -\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\phi} \cos \theta \vec{u}_\varphi \\ \frac{d}{dt} \vec{u}_\varphi &= -\dot{\phi} \sin \theta \vec{u}_r - \dot{\phi} \cos \theta \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} \sin \theta \end{cases} \quad \vec{a} \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \cos \theta + 2r\dot{\varphi} \sin \theta \end{cases}$$

2.3 Changement de base

Cartésien-cylindrique :

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y & \vec{u}_x &= \cos \varphi \vec{u}_\rho - \sin \varphi \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y & \vec{u}_y &= \sin \varphi \vec{u}_\rho + \cos \varphi \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_z &= \vec{u}_z & \vec{u}_z &= \vec{u}_z \end{aligned}$$

Cartésien-sphérique :

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y \end{aligned}$$

Cylindrique-sphérique :

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta & \vec{u}_r &= \sin \theta \vec{u}_\rho + \cos \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi &= \vec{u}_\varphi & \vec{u}_\theta &= \cos \theta \vec{u}_\rho - \sin \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_z &= \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi &= \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

3 Dynamique

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

3.1 Ressort

$$\vec{F}_r = -k(x - l_0) \vec{u} \quad U = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

3.2 Gravitation

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1} \quad \vec{F} = m \vec{g}$$

$$U = -G \frac{Mm}{r} \quad U = mgh$$

3.3 Electromagnétisme

$$\begin{aligned} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{F} &= q \vec{E} \quad \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}$$

$$q_1 \bullet -\vec{u}_{2 \rightarrow 1} q_2 \quad m_1 \bullet -\vec{u}_{2 \rightarrow 1} m_2$$

3.4 Frottement

3.4.1 Frottement visqueux

$$\vec{F}_{fr} = -f(\|\vec{v}_{rel}\|) \frac{\vec{v}_{rel}}{\|\vec{v}_{rel}\|}$$

Régime laminaire :

$$f(\|\vec{v}_{rel}\|) = k\eta \|\vec{v}_{rel}\|$$

Régime turbulent :

$$f(\|\vec{v}_{rel}\|) = \frac{1}{2} C_x \rho S \|\vec{v}_{rel}\|^2$$

3.4.2 Frottement sec

Dépend des matériaux et de $\|\vec{N}\|$, pas de l'aire de la surface.

Statique :

$$\|\vec{F}_{fr}\| \leq F_{max}^{fr} = F^{arr} = \mu_s \|\vec{N}\|$$

Avec glissement :

$$\vec{F} = -\mu_c \|\vec{N}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

4 Energie, quantité de mouvement, moments

4.1 Quantité de mouvement

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta \vec{p} = \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

4.2 Moment cinétique et de force

$$\vec{L}_0 = \vec{OP} \times \vec{p}$$

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{M}_0$$

4.3 Mouvement sous l'action d'une force centrale

Energie potentielle effective : $V_{eff} = U + \frac{\vec{L}_0^2}{2mr^2}$

4.4 Travail et Energie

Travail :

$$W = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

Energie cinétique :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Energie potentielle d'une force \vec{F} par rapport à un point P et un point de référence O :

$$U(P) = - \int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad W = K_B - K_A = \Delta K$$

Énergie mécanique :

$$E_m = K + \sum_i U_i$$

Généralisation :

$$K_B + \sum_i U_{iB} = K_A + \sum_i U_{iA} + \int_A^B \vec{F}^{NC} \cdot d\vec{r}$$

P est la puissance d'une énergie E .

$$P = \frac{dE}{dt} \quad \frac{dE_m}{dt} = \vec{F}^{NC} \cdot \vec{v}$$

Si $\vec{F}^{NC} \cdot \vec{v} \neq 0$ l'énergie n'est pas conservé, sinon oui.

Les forces conservatives sont tel que :

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

Possibilité pour la conservation de l'énergie :

— Si $\vec{F} \perp \vec{v}$, elle ne travaille pas ($P = 0$) et n'affecte ni E_m ni U .

— Si $\vec{F} \parallel \vec{v}$:

— Si \vec{F} est conservative, elle contribue à U , donc à E_m .

— Si \vec{F} est non-conservative, elle modifie E_m : $E_m = P^{NC} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

— Si seules des forces conservatives ou des forces non-conservatives perpendiculaires à \vec{v} agissent, E_m est conservé ($\dot{E}_m = 0$).

— Si une force non-conservative a une composante parallèle à \vec{v} , E_m n'est pas conservée ($\dot{E}_m = P^{NC} \neq 0$).

4.5 Méthode pour les position d'équilibres et variations

$$1. \sum \vec{F} = m \vec{a} = 0 \Big|_{x_{eq}} \Leftrightarrow x_{eq} = \dots$$

— $\frac{d\vec{F}}{dx} \Big|_{x_{eq}} > 0 \rightarrow$ équilibre stable

— $\frac{d\vec{F}}{dx} \Big|_{x_{eq}} < 0 \rightarrow$ équilibre instable

$$2. \frac{dU}{dx} \Big|_{x_{eq}} = 0 \Leftrightarrow x_{eq} = \dots$$

$$\begin{aligned} - \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x_{eq}} &> 0 \rightarrow \text{équilibre stable} \\ - \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x_{eq}} &< 0 \rightarrow \text{équilibre instable} \end{aligned}$$

5 Oscillations

- $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$
- $x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$
- $x = C \sin(\omega_0 t + \phi)$
- $x = C \cos(\omega_0 t + \phi')$
- $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = -\omega_0^2 x$
Mouvement oscillatoire sous-critique : $\gamma^2 < \omega_0^2 \rightarrow x = C e^{\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$
- Amortissement fort (surcritique) : $\gamma^2 > \omega_0^2 \rightarrow x = e^{-\gamma t} (A e^{\omega t} + B e^{-\omega t})$
- Amortissement critique : $\gamma^2 = \omega_0^2 \rightarrow x = e^{-\gamma t} (A + B t), \quad \omega^2 = |\gamma - \omega_0|$
- $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)$
 $\ddot{x} \approx \frac{1}{\gamma} A(\Omega) \cos(\Omega t + \phi(\Omega))$
 $A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}$
- Résonnance max : $\Omega_{Max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$
- $\phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$
- Période pour une oscillation : $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ (avec $\omega = \omega_0$ pour un oscillateur harmonique)

6 Référentiel non-absolu

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\vec{u}'_i \times \frac{d\vec{u}'_i}{dt} \right) \quad \frac{d\vec{u}'_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}'_i \\ \vec{v}_p &= \vec{v}'_p + \vec{v}'_O + \vec{\omega} \times \vec{O}'P \\ \vec{a}_p &= \vec{a}'_p + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'_p}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{a}'_O + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}'P)}_{\text{Centripète}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{O}'P \\ m\vec{a}'_p &= \sum \vec{F} - \underbrace{\sum \vec{F}_i}_{m\vec{a}'_i} \end{aligned}$$

7 Système de particules et chocs

7.1 Systèmes de point matériels

$$\text{Moment cinétique : } \vec{L}_C = \sum_i \vec{C}\vec{P}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\text{Moment d'inertie, si } C \text{ fait partie d'un axe de symétrie du solide : } I_C = \sum_i m_i \|\vec{C}\vec{P}_i\|^2$$

$$\text{Centre de Masse : } \vec{O}\vec{G} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{O}\vec{P}_i$$

Dans le référentiel du centre de masse (en translation par rapport au référentiel d'inertie) :

$$\sum_i m_i \vec{C}\vec{P}_i = 0 \quad \sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i^2$$

Théorème du centre de masse : $M \vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}$

Théorème du moment cinétique : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$

Principe de conservations :

$$\vec{P}^{\text{in}} = \vec{P}^{\text{fin}} \quad \vec{L}_O^{\text{in}} = \vec{L}_O^{\text{fin}}$$

7.2 Chocs

$$\Delta K \stackrel{?}{=} \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{choc élastique} \\ 0 \neq \Rightarrow \text{choc inélastique} \end{cases}$$

Il y a **choc mou** lorsque les deux masses se collent. La conservation de la quantité de mouvement est vérifiée mais $\Delta K \neq 0$.

7.2.1 Choc 1-D, élastique

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{2i}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = 0 \end{cases}$$

Ce système a pour solutions :

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2i} + 2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

7.2.2 Choc inélastique

$$\Delta K \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{exo-énergetique} \\ < 0 \Rightarrow \text{endo-énergetique} \end{cases}$$

7.2.3 Choc mou (parfaitement inélastique)

Les deux objets se collent ($\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{v}_{\text{mou}}$). Dans le cas particulier où $\vec{v}_{2i} = 0$, la conservation de la quantité de mouvement nous donne que :

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{mou}}$$

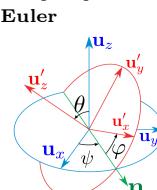
$$\vec{v}_{\text{mou}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i}$$

$$\Delta K = K^{\text{fin}} - K^{\text{in}} = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{\text{mou}}^2 < 0$$

8 Corps solide

8.1 Position d'un solide

Un solide est défini comme un ensemble de points dont les distances entre chaque points est fixe.



Pour passer de \mathcal{R} à \mathcal{R}' :

1. Précission : rotation ψ autour de \vec{u}_z pour amener \vec{u}_x sur \vec{n}
2. Nutation : rotation θ autour de \vec{n} , amène \vec{u}_z sur \vec{u}'_z
3. Rotation propre : rotation φ autour de \vec{u}'_z , amène \vec{n} sur \vec{u}'_x

8.1.2 Vitesse et accélération d'un point du solide

$$\vec{v}_p = \vec{v}'_O + \vec{\omega} \times \vec{O}'P$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}'_O + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{O}'P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}'P)$$

En utilisant un repère cylindrique on peut dire que $\vec{\omega} \times \vec{O}'P = r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$

On remarque aussi que $\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{u}_z + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\varphi} \vec{u}'_z$

8.1.3 Dynamique d'un corps solide

Thm du moment cinétique sur G : $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$

Équation de l'énergie : $\Delta K = W^{\text{ext}}$

8.2 Rotation autour d'un axe de symétrie Δ_G

$$\exists \Delta_G \Leftrightarrow \forall P_i, \exists P'_i \text{ tq. } \begin{cases} \|\vec{GP}_i\| = \|\vec{GP}'_i\| \\ \vec{GP}_{i\perp} = -\vec{GP}'_{i\perp} \end{cases}$$

8.2.1 Moment cinétique

Valable seulement autour d'un axe de symétrie :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{dI_{\Delta_G} \vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

8.2.2 Energie cinétique

$$K = K_c + K_r = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta_G} \omega^2$$

8.3 Rotation autour d'un axe instantané fixe (=sans vitesse) $\Delta \parallel \Delta_G$

O est la projection de G sur Δ .

Théorème de Huygens-Steiner :

$$I_\Delta = M d^2 + I_{\Delta_G}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{dI_\Delta \vec{\omega}}{dt} = I_\Delta \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

Roulement sans glissement : vitesse instantané du point de contact est égale à 0, malgré le fait que le point de contact change (+ force de frottement statique).

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d\tilde{I}_G \vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

$$\tilde{I}_{G,\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[\|\vec{GP}_i\|^2 \delta_{\alpha\beta} - G P_{i,\alpha} G P_{i,\beta} \right]$$

$$K_r = \frac{1}{2} M \| \vec{v}_G \|^2 + \frac{1}{2} \omega^\perp \tilde{I}_G \omega$$

Si les axes sont parallèles à des axes des symétrie alors on a plus que des composantes sur la diagonale. Pour retrouver dans les coordonnées que l'on veut on prend nos axes tel que \tilde{I}_G soit diagonale et on compute $\tilde{I}'_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}'$. Puis on projette chaque axe sur ceux que l'on veut : $\tilde{I}_G = (\tilde{I}'_G \cdot \vec{u}_x) \vec{u}_x + (\tilde{I}'_G \cdot \vec{u}_y) \vec{u}_y + (\tilde{I}'_G \cdot \vec{u}_z) \vec{u}_z$

8.4 Si O ne bouge pas

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\tilde{I}_O \vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

$$\tilde{I}_{O,\alpha\beta} = M \left[\|\vec{OG}\|^2 \delta_{\alpha\beta} - O G_\alpha O G_\beta \right] + \tilde{I}_{G,\alpha\beta}$$

$$K = \frac{1}{2} \omega^\perp \tilde{I}_O \omega$$

8.5 Les formules utiles

$$M \vec{a} = \sum \vec{F}^{\text{ext}} \quad \Delta K = W^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\forall P \in \text{solide} \quad \begin{cases} \vec{L}_O = \vec{OG} \times m \vec{v}_G + \vec{L}_G \\ \vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{GP} \end{cases}$$

$$\vec{a}_G = \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2}$$

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \vec{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_G \vec{\omega})$$

$$\text{Position centre de masse : } \vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\text{où } x_G = \frac{1}{M} \int x \ dm$$

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\vec{p}}{M} \quad \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M \vec{a}_G$$

$$\begin{cases} 3 \text{ eq CDM : } m \vec{v}_G = \sum \vec{F}^{\text{ext}} \\ 3 \text{ eq TMC : } \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G \end{cases}$$

Energie mécanique d'un solide : Toutes les forces qui sont au point de contact ne sont pas pris en compte dans E_m (travaillent pas parce que la vitesse au point d'application est nulle).

8.6 Les cas particulier

Pour une force d'inertie d'un solide entier il faut d'abord le faire pour une masse quelconque m sur le solide puis le généraliser. Exemple d'une tige : Soit $\mu = \frac{M}{L}$ avec M la masse d'un solide et L sa longueur. On calcule la force d'inertie à une distance ρ du point pour une masse m quelconque : $d\vec{F}_{ie} = \alpha(\theta, \rho)m$ avec $\alpha(\theta, \rho)$ une fonction quelconque. Puis on remplace $m = \mu \cdot d\rho$ puis on intègre : $\vec{F}_{ie} = \int_0^L d\vec{F}_{ie} = \int_0^L \alpha(\theta, \rho) \mu \cdot d\rho$

9 Kepler

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\|\vec{L}_0\|}{2m} = \text{const} \quad \frac{a_A^3}{T_A^2} = \frac{a_B^3}{T_B^2}$$

$a_A \approx R_A$ pour un cercle

10 Système à masses variable

$$M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dM}{dt}$$

11 Moment d'inertie

Δ_C = axe du cylindre

$$\text{Boule (pleine)} \quad I = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\text{Sphère (creuse)} \quad I = \frac{2}{3} m R^2$$

$$\text{Anneau } (\Delta_c) \quad I = m R^2$$

$$\text{Anneau } (\perp \Delta_c) \quad I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\text{Anneau } (\text{épaisseur } \neq 0, \Delta_c) \quad I = \frac{1}{2} m (R_1^2 + R_2^2)$$

$$\text{Cylindre } (\Delta_c) \quad I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\text{Cylindre } (\perp \Delta_c) \quad I = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m L^2$$

12 Lagrange

$$\mathcal{L} = K - U$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$