

## 1 Intro mathématique

### 1.1 Trigonométrie

$$\begin{aligned} \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) &= 1 & \tan(\alpha) &= \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \\ \frac{1}{\cos^2(\alpha)} &= 1 + \tan^2(\alpha) & \frac{1}{\sin^2(\alpha)} &= 1 + \cot^2(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm 2\pi) &= \cos(\alpha) & \sin(\alpha \pm 2\pi) &= \sin(\alpha) & \tan(\alpha \pm \pi) &= \tan(\alpha) \\ \cos(-\alpha) &= \cos(\alpha) & \sin(-\alpha) &= -\sin(\alpha) & \tan(-\alpha) &= -\tan(\alpha) \\ \cos(\pi \pm \alpha) &= -\cos(\alpha) & \sin(\pi \pm \alpha) &= \mp \sin(\alpha) & \tan(\pi \pm \alpha) &= \pm \tan(\alpha) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \sin(\alpha) & \sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \cos(\alpha) & \tan\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) &= \mp \cot(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) \mp \sin(\alpha)\sin(\beta) \\ \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin(\alpha)\cos(\beta) \pm \cos(\alpha)\sin(\beta) \\ \tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 + \cos(\alpha)}{2} & \sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{2} \\ \tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} & \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) &= \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) + \cos(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & \cos(\alpha) - \cos(\beta) &= -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \sin(\alpha) + \sin(\beta) &= 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) & \sin(\alpha) - \sin(\beta) &= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \\ \tan(\alpha) + \tan(\beta) &= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} & \tan(\alpha) - \tan(\beta) &= \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)} \end{aligned}$$

$$a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \varphi)$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\cos(x) = a \Rightarrow \begin{cases} x = \arccos(a) + k \cdot 2\pi \text{ ou} \\ x = -\arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\sin(x) = a \Rightarrow \begin{cases} x = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \text{ ou} \\ x = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\tan(x) = a \Rightarrow x = \arctan(a) + k \cdot \pi$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

$$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$$

$$\sin(\arctan x) = x^2 \cos(\arctan x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$$

### 1.2 Géométrie

#### 1.2.1 Vecteur

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Projection de  $\vec{b}$  sur  $\vec{a}$ :

$$\vec{b}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

### 1.3 Dérivés et intégrales

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Intégration par parties:

$$\int xy dt = xy - \int xy dt$$

$$\text{Intégration par substitution: } \int \dot{x} f(x) dt = \int f(x) dx$$

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	$a$	$ax$
1	$x$	$x^2$
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$-\frac{1}{2}\sqrt{x^3}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$nx^{n-1}$	$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$-\frac{n}{x^{n-1}}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{n-1}x^{n-1}$
$\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{n-1}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n+1]{x^{n+1}}$
$ae^{ax}$	$e^{ax}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$ab^{ax} \ln(b)$	$b^{ax}$	$\frac{1}{a \ln(b)}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x(\ln(x) - 1)$
$\frac{1}{x \ln(a)}$	$\log_a(bx)$	$x \log_a\left(\frac{bx}{e}\right)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\frac{g'(x)^2 + g(x)g''(x)}{g(x)^2}$	$g(x)g'(x)$	$\frac{1}{2}g(x)^2$
$\frac{g''(x)g(x) - g'(x)^2}{g(x)^2}$	$g'(x)$	$\ln g(x) $

### 1.4 Polynômes Taylor

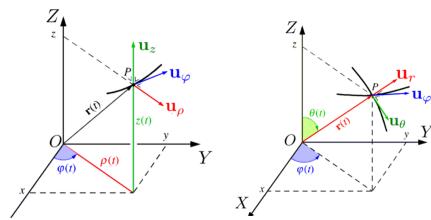
$$P_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n f}{dx^n} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^n$$

### 2 Cinématique

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} = \vec{r} = \frac{d^2}{dt^2} (x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3)$$

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R_c} \vec{u}_r$$

### 2.1 Coordonnée cylindrique



$$\frac{d}{dt} \vec{u}_\rho = \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi \quad \frac{d}{dt} \vec{u}_\varphi = -\dot{\rho} \vec{u}_\rho$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\varphi = \rho \dot{\varphi} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad \vec{a} \begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

### 2.2 Coordonnée sphérique

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \vec{u}_r &= \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi \\ \frac{d}{dt} \vec{u}_\theta &= -\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\varphi \\ \frac{d}{dt} \vec{u}_\varphi &= -\dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \\ v_\varphi = r\dot{\varphi} \sin \theta \end{cases} \quad \vec{a} \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{r}\dot{\varphi} \cos \theta + 2r\dot{\varphi} \sin \theta \end{cases}$$

### 2.3 Changement de base

Cartésien-cylindrique :

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y & \vec{u}_x &= \cos \varphi \vec{u}_\rho - \sin \varphi \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y & \vec{u}_y &= \sin \varphi \vec{u}_\rho + \cos \varphi \vec{u}_\varphi \\ \vec{u}_z &= \vec{u}_z & \vec{u}_z &= \vec{u}_z \end{aligned}$$

Cartésien-sphérique :

$$\begin{aligned} \vec{u}_r &= \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\theta &= \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi &= -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y \end{aligned}$$

Cylindrique-sphérique :

$$\begin{aligned} \vec{u}_\rho &= \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta & \vec{u}_r &= \sin \theta \vec{u}_\rho + \cos \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_\varphi &= \vec{u}_\varphi & \vec{u}_\theta &= \cos \theta \vec{u}_\rho - \sin \theta \vec{u}_z \\ \vec{u}_z &= \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta & \vec{u}_\varphi &= \vec{u}_\varphi \end{aligned}$$

### 3 Dynamique

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

#### 3.1 Ressort

$$\vec{F}_r = -k(x - l_0) \vec{u} \quad U = \frac{1}{2}k(x - l_0)^2$$

#### 3.2 Gravitation

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1} \quad \vec{F} = m \vec{g}$$

$$U = -G \frac{Mm}{r} \quad U = mgh$$

#### 3.3 Electromagnétisme

$$\begin{aligned} \vec{F}_{2 \rightarrow 1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1} \\ \vec{F} &= q \vec{E} \quad \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B} \end{aligned}$$

$$q_1 \bullet -\vec{u}_{2 \rightarrow 1} q_2 \quad m_1 \bullet -\vec{u}_{2 \rightarrow 1} m_2$$

#### 3.4 Frottement

##### 3.4.1 Frottement visqueux

$$\vec{F}_{fr} = -f(\|\vec{v}_{rel}\|) \frac{\vec{v}_{rel}}{\|\vec{v}_{rel}\|}$$

Régime laminaire :

$$f(\|\vec{v}_{rel}\|) = k\eta \|\vec{v}_{rel}\|$$

Régime turbulent :

$$f(\|\vec{v}_{rel}\|) = \frac{1}{2} C_x \rho S \|\vec{v}_{rel}\|^2$$

##### 3.4.2 Frottement sec

Dépend des matériaux et de  $\|\vec{N}\|$ , pas de l'aire de la surface.

Statique :

$$\|\vec{F}_{fr}\| \leq F_{max}^{fr} = F^{arr} = \mu_s \|\vec{N}\|$$

Avec glissement :

$$\vec{F} = -\mu_c \|\vec{N}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

### 4 Energie, quantité de mouvement, moments

#### 4.1 Quantité de mouvement

$$\vec{p} = m \vec{v}$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta \vec{p} = \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$$

#### 4.2 Moment cinétique et de force

$$\vec{L}_0 = \vec{OP} \times \vec{p}$$

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{M}_0$$

#### 4.3 Mouvement sous l'action d'une force centrale

Energie potentielle effective :  $V_{eff} = U + \frac{\vec{L}_0^2}{2mr^2}$

#### 4.4 Travail et Energie

Travail :

$$W = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$$

Energie cinétique :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Energie potentielle d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un point  $P$  et un point de référence  $O$  :

$$U(P) = - \int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad W = K_B - K_A = \Delta K$$

Énergie mécanique :

$$E_m = K + \sum_i U_i$$

Généralisation :

$$K_B + \sum_i U_{iB} = K_A + \sum_i U_{iA} + \int_A^B \vec{F}^{NC} \cdot d\vec{r}$$

$P$  est la puissance d'une énergie  $E$ .

$$P = \frac{dE}{dt} \quad \frac{dE_m}{dt} = \vec{F}^{NC} \cdot \vec{v}$$

Si  $\vec{F}^{NC} \cdot \vec{v} \neq 0$  l'énergie n'est pas conservé, sinon oui.

Les forces conservatives sont tel que :

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

Possibilité pour la conservation de l'énergie :

— Si  $\vec{F} \perp \vec{v}$ , elle ne travaille pas ( $P = 0$ ) et n'affecte ni  $E_m$  ni  $U$ .

— Si  $\vec{F} \parallel \vec{v}$ :

— Si  $\vec{F}$  est conservative, elle contribue à  $U$ , donc à  $E_m$ .

— Si  $\vec{F}$  est non-conservative, elle modifie  $E_m$ :  $E_m = P^{NC} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ .

— Si seules des forces conservatives ou des forces non-conservatives perpendiculaires à  $\vec{v}$  agissent,  $E_m$  est conservé ( $\dot{E}_m = 0$ ).

— Si une force non-conservative a une composante parallèle à  $\vec{v}$ ,  $E_m$  n'est pas conservée ( $\dot{E}_m = P^{NC} \neq 0$ ).

#### 4.5 Méthode pour les position d'équilibres et variations

$$1. \sum \vec{F} = m \vec{a} = 0 \Big|_{x_{eq}} \Leftrightarrow x_{eq} = \dots$$

$$— \frac{d\vec{F}}{dx} \Big|_{x_{eq}} > 0 \rightarrow \text{équilibre stable}$$

$$— \frac{d\vec{F}}{dx} \Big|_{x_{eq}} < 0 \rightarrow \text{équilibre instable}$$

$$2. \frac{dU}{dx} \Big|_{x_{eq}} = 0 \Leftrightarrow x_{eq} = \dots$$

$$\begin{aligned} - \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x_{eq}} &> 0 \rightarrow \text{équilibre stable} \\ - \frac{d^2U}{dx^2} \Big|_{x_{eq}} &< 0 \rightarrow \text{équilibre instable} \end{aligned}$$

## 5 Oscillations

- $\ddot{x} = -\omega^2 x$
- $x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$
- $x = C \sin(\omega_0 t + \phi)$
- $x = C \cos(\omega_0 t + \phi')$
- $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = -\omega_0^2 x$
- Mouvement oscillatoire sous-critique :  $\gamma^2 < \omega_0^2 \rightarrow x = C e^{\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$
- Amortissement fort (surcritique) :  $\gamma^2 > \omega_0^2 \rightarrow x = e^{-\gamma t}(A e^{\omega t} + B e^{-\omega t})$
- Amortissement critique :  $\gamma^2 = \omega_0^2 \rightarrow x = e^{-\gamma t}(A + Bt), \omega^2 = |\gamma - \omega_0|$
- $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)$
- $x \approx A(\Omega) \cos(\Omega t + \phi(\Omega))$
- $A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}$
- Résonnance max :  $\Omega_{Max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$
- $\phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$
- Période pour une oscillation :  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$  (avec  $\omega = \omega_0$  pour un oscillateur harmonique)

## 6 Référentiel non-absolu

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \vec{u}'_i \times \frac{d\vec{u}'_i}{dt} \right) \quad \frac{d\vec{u}'_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}'_i$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}'_p + \vec{v}'_O + \vec{\omega} \times \vec{O}'P$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_p &= \vec{a}'_p + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'_p}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{a}'_O + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}'P)}_{\text{Centripète}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{O}'P \\ m\vec{a}'_p &= \sum \vec{F} - \underbrace{\sum \vec{F}_i}_{\text{Entrainement}} \end{aligned}$$

## 7 Système de particules et chocs

### 7.1 Systèmes de point matériels

$$\text{Moment cinétique : } \vec{L}_C = \sum_i \vec{C}\vec{P}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\text{Moment d'inertie, si } C \text{ fait partie d'un axe de symétrie du solide : } I_C = \sum_i m_i \|\vec{C}\vec{P}_i\|^2$$

$$\text{Centre de Masse : } \vec{O}\vec{G} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{O}\vec{P}_i$$

Dans le référentiel du centre de masse (en translation par rapport au référentiel d'inertie) :

$$\sum_i m_i \vec{C}\vec{P}_i = 0 \quad \sum_i m_i \vec{v}'_i = 0$$

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}'_i^2$$

Théorème du centre de masse :  $M \vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}$

Théorème du moment cinétique :  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$

Principe de conservations :

$$\vec{P}^{\text{in}} = \vec{P}^{\text{fin}} \quad \vec{L}_O^{\text{in}} = \vec{L}_O^{\text{fin}}$$

### 7.2 Chocs

$$\Delta K \stackrel{?}{=} \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{choc élastique} \\ 0 \neq \text{choc inélastique} \end{cases}$$

Il y a **choc mou** lorsque les deux masses se collent. La conservation de la quantité de mouvement est vérifiée mais  $\Delta K \neq 0$ .

#### 7.2.1 Choc 1-D, élastique

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{2i}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = 0 \end{cases}$$

Ce système a pour solutions :

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2i} + 2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

#### 7.2.2 Choc inélastique

$$\Delta K \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{exo-énergetique} \\ < 0 \Rightarrow \text{endo-énergetique} \end{cases}$$

#### 7.2.3 Choc mou (parfaitement inélastique)

Les deux objets se collent ( $\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{v}_{\text{mou}}$ ). Dans le cas particulier où  $\vec{v}_{2i} = 0$ , la conservation de la quantité de mouvement nous donne que :

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{mou}}$$

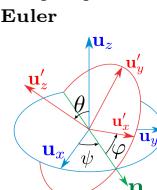
$$\vec{v}_{\text{mou}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i}$$

$$\Delta K = K^{\text{fin}} - K^{\text{in}} = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{\text{mou}}^2 < 0$$

## 8 Corps solide

### 8.1 Position d'un solide

Un solide est défini comme un ensemble de points dont les distances entre chaque points est fixe.



Pour passer de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  :

1. Précission : rotation  $\psi$  autour de  $\vec{u}_z$  pour amener  $\vec{u}_x$  sur  $\vec{n}$
2. Nutation : rotation  $\theta$  autour de  $\vec{n}$ , amène  $\vec{u}_z$  sur  $\vec{u}'_z$
3. Rotation propre : rotation  $\varphi$  autour de  $\vec{u}'_z$ , amène  $\vec{n}$  sur  $\vec{u}'_x$

#### 8.1.2 Vitesse et accélération d'un point du solide

$$\vec{v}_p = \vec{v}'_O + \vec{\omega} \times \vec{O}'P$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}'_O + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{O}'P + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O}'P)$$

En utilisant un repère cylindrique on peut dire que  $\vec{\omega} \times \vec{O}'P = r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$

On remarque aussi que  $\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{u}_z + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\varphi} \vec{u}'_z$

### 8.1.3 Dynamique d'un corps solide

$$\text{Thm du moment cinétique sur } G : \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

Équation de l'énergie :  $\Delta K = W^{\text{ext}}$

### 8.2 Rotation autour d'un axe de symétrie $\Delta_G$

$$\exists \Delta_G \Leftrightarrow \forall P_i, \exists P'_i \text{ tq. } \begin{cases} \vec{GP}_{i\parallel} = \vec{GP}'_{i\parallel} \\ \vec{GP}_{i\perp} = -\vec{GP}'_{i\perp} \end{cases}$$

#### 8.2.1 Moment cinétique

Valable seulement autour d'un axe de symétrie :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{dI_{\Delta_G} \vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

#### 8.2.2 Energie cinétique

$$K = K_c + K_r = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta_G} \omega^2$$

### 8.3 Rotation autour d'un axe instantané fixe (=sans vitesse) $\Delta \parallel \Delta_G$

$O$  est la projection de  $G$  sur  $\Delta$ .

Théorème de Huygens-Steiner :

$$I_\Delta = M d^2 + I_{\Delta_G}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{dI_\Delta \vec{\omega}}{dt} = I_\Delta \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

**Roulement sans glissement** : vitesse instantané du point de contact est égale à celle de la surface (donc souvent 0), malgré le fait que le point de contact change (+ force de frottement statique).

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d\tilde{I}_G \vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

$$\tilde{I}_{G,\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[ \left\| \vec{GP}_i \right\|^2 \delta_{\alpha\beta} - GP_{i,\alpha} GP_{i,\beta} \right]$$

$$K_r = \frac{1}{2} M \left\| \vec{v}_G \right\|^2 + \frac{1}{2} \omega^\perp \tilde{I}_G \omega$$

$$\omega^\perp \tilde{I}_G \omega = \vec{L}_G \cdot \vec{\omega}$$

Si les axes sont parallèles à des axes de symétrie alors on a plus que des composantes sur la diagonale. Pour retrouver dans les coordonnées que l'on veut on prend nos axes tel que  $\tilde{I}_G$  soit diagonale et on compute  $\tilde{L}_G = \tilde{I}_G \cdot \vec{\omega}'$ . Puis on projette chaque axe sur ceux que l'on veut :  $\tilde{L}_G = (\tilde{L}'_G \cdot \vec{u}_x) \vec{u}_x + (\tilde{L}'_G \cdot \vec{u}_y) \vec{u}_y + (\tilde{L}'_G \cdot \vec{u}_z) \vec{u}_z$

#### 8.4 Si $O$ ne bouge pas

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\tilde{I}_O \vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\tilde{I}_{O,\alpha\beta} = M \left[ \left\| \vec{OG} \right\|^2 \delta_{\alpha\beta} - OG_\alpha OG_\beta \right] + \tilde{I}_{G,\alpha\beta}$$

$$K = \frac{1}{2} \omega^\perp \tilde{I}_O \omega$$

### 8.5 Les formules utiles

$$M \vec{a} = \sum \vec{F}^{\text{ext}} \quad \Delta K = W^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\forall P \in \text{solide} \quad \begin{cases} \vec{L}_O = \vec{OG} \times m \vec{v}_G + \vec{L}_G \\ \vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{GP} \end{cases}$$

$$\vec{a}_G = \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2}$$

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \vec{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_G \vec{\omega})$$

$$\text{Position centre de masse : } \vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\text{où } x_G = \frac{1}{M} \int x \ dm$$

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\vec{p}}{M} \quad \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M \vec{a}_G$$

$$\begin{aligned} \text{EdM d'un solide : } & \begin{cases} 3 \text{ eq CDM : } m \vec{v}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \\ 3 \text{ eq TMC : } \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G \end{cases} \end{aligned}$$

Energie mécanique d'un solide : Toutes les forces qui sont au point de contact ne sont pas pris en compte dans  $E_m$  (travaillent pas parce que la vitesse au point d'application est nulle).

## 8.6 Les cas particulier

Pour une force d'inertie d'un solide entier il faut d'abord le faire pour une masse quelconque  $m$  sur le solide puis le généraliser. Exemple d'une tige : Soit  $\mu = \frac{M}{L}$  avec  $M$  la masse d'un solide et  $L$  sa longueur. On calcule la force d'inertie à une distance  $\rho$  du point pour une masse  $m$  quelconque :  $d\vec{F}_{ie} = \alpha(\theta, \rho)m$  avec  $\alpha(\theta, \rho)$  une fonction quelconque. Puis on remplace  $m = \mu \cdot d\rho$  puis on intègre :  $\vec{F}_{ie} = \int_0^L d\vec{F}_{ie} = \int_0^L \alpha(\theta, \rho) \mu \cdot d\rho$

## 9 Kepler

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\| \vec{L}_0 \|}{2m} = \text{const} \quad \frac{a_A^3}{T_A^2} = \frac{a_B^3}{T_B^2} \quad \frac{T^2}{R^2} = \frac{4\pi^2}{G(M_s + M)}$$

$a_A \approx R_A$  pour un cercle

## 10 Système à masses variable

$$M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dM}{dt}$$

## 11 Moment d'inertie

$\Delta_C$  = axe du cylindre

$$\text{Boule (pleine)} \quad I = \frac{2}{5} m R^2$$

$$\text{Sphère (creuse)} \quad I = \frac{2}{3} m R^2$$

$$\text{Anneau } (\Delta_c) \quad I = m R^2$$

$$\text{Anneau } (\perp \Delta_c) \quad I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\text{Anneau } (\text{épaisseur } \neq 0, \Delta_c) \quad I = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$$

$$\text{Cylindre } (\Delta_c) \quad I = \frac{1}{2} m R^2$$

$$\text{Cylindre } (\perp \Delta_c) \quad I = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m L^2$$

## 12 Lagrange

$$\mathcal{L} = K - U$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$