

1 Intro mathématique

1.1 Trigo

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{1}{\cot(\alpha)}$$

$$\frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$$

$\cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha)$	$\sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha)$	$\tan(\alpha + \pi) = \tan(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha)$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan(\alpha)$
$\cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha)$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos(\alpha)$	$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\cot(\alpha)$

$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$	$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)$
$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \cos(\alpha)\sin(\beta)$	$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) - \cos(\alpha)\sin(\beta)$
$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan(\alpha) + \tan(\beta)}{1 - \tan(\alpha)\tan(\beta)}$	$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan(\alpha) - \tan(\beta)}{1 + \tan(\alpha)\tan(\beta)}$
$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$	$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$
$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$	$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$
$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2\sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2\cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$	$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha)\cos(\beta)}$

$$a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \varphi)$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$\cos(x) = a \Rightarrow \begin{cases} x = \arccos(a) + k \cdot 2\pi & \text{ou} \\ x = -\arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\sin(x) = a \Rightarrow \begin{cases} x = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi & \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$$

$$\tan(x) = a \Rightarrow x = \arctan(a) + k \cdot \pi$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$$

$$\frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$$

1.2 Géométrie

1.2.1 Vecteur

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}|| \cos \varphi$$

$$||\vec{a}|| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Projection de \vec{b} sur \vec{a} :

$$\vec{b}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{||\vec{a}||^2} \vec{a}$$

$$||\vec{a} \times \vec{b}|| = ||\vec{a}|| \, ||\vec{b}|| \sin \varphi$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

1.3 Dérivés et integrales

Par parties :

$$\int f'(x)g(x) \, \mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) \, \mathrm{d}x$$

Par substitution : $\int g(f(x))f'(x) \, \mathrm{d}x = G(x) + c$

Par changement de variable ($x = f(t)$) :

$$\int g(x) \, \mathrm{d}x = \int g(f(t))f'(t) \, \mathrm{d}t$$

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	a	ax
1	x	x^2
$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	\sqrt{x}	$\frac{2}{3}x\sqrt{x}$
$-\frac{1}{2}\sqrt{x^3}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
nx^{n-1}	x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$
$\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{n-1}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{x^{n+1}}}$
ae^{ax}	e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$ab^{ax} \ln(b)$	b^{ax}	$\frac{a}{b^{ax}} \ln(b)$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x(\ln(x) - 1)$
$\frac{1}{x \ln(a)}$	$\log_a(bx)$	$x \log_a\left(\frac{bx}{e}\right)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\frac{g'(x)^2 + g(x)g''(x)}{g'(x)g(x) - g'(x)^2}$	$\frac{g(x)g'(x)}{g'(x)}$	$\frac{1}{2}g(x)^2$
	$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln g(x) $

1.4 Polynômes Taylor

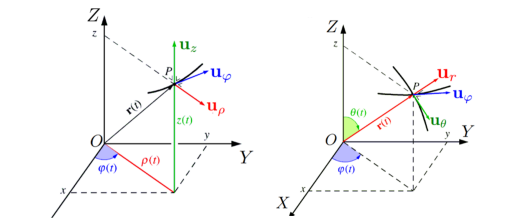
$$P_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d} x^n} \bigg|_{x=x_0} (x - x_0)^n$$

2 Cinématique

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d} \vec{v}}{\mathrm{d} t} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d} t^2} (x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3)$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d} v}{\mathrm{d} t} \vec{u}_t + v \frac{\mathrm{d} \vec{u}_t}{\mathrm{d} t} = \frac{\mathrm{d} v}{\mathrm{d} t} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R_c} \vec{u}_n$$

2.1 Coordonnée cylindrique



$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \vec{u}_\rho = \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \vec{u}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{u}_\rho$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\varphi = \rho \dot{\varphi} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad \vec{a} \begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = 2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$$

2.2 Coordonnée sphérique

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \vec{u}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \vec{u}_\theta = -\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\varphi$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d} t} \vec{u}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{v} \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r \dot{\theta} \\ v_\varphi = r \dot{\varphi} \sin \theta \end{cases} \quad \vec{a} \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta \\ a_\varphi = r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \end{cases}$$

2.3 Changement de base

Cartésien-cylindrique :

$$\vec{u}_\rho = \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_z = \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_x = \cos \varphi \vec{u}_\rho - \sin \varphi \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{u}_y = \sin \varphi \vec{u}_\rho + \cos \varphi \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{u}_z = \vec{u}_z$$

Cartésien-sphérique :

$$\vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y$$

$$\vec{u}_x = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_r + \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_\theta - \sin \varphi \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{u}_y = \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_r + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_\theta + \cos \varphi \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

Cylindrique-sphérique :

$$\vec{u}_\rho = \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_\varphi$$

$$\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$$

$$\vec{u}_r = \sin \theta \vec{u}_\rho + \cos \theta \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{u}_\rho - \sin \theta \vec{u}_z$$

$$\vec{u}_\varphi = \vec{u}_\varphi$$

3 Dynamique

$$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a} = m \frac{\mathrm{d}^2 \vec{r}}{\mathrm{d} t^2}$$

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

3.1 Ressort

$$\vec{F}_r = -k(x - l_0) \vec{u}$$

$$U = \frac{1}{2} k (x - l_0)^2$$

3.2 Gravitation

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$$

$$\vec{F} = m \vec{g}$$

$$U = -G \frac{Mm}{r}$$

$$U = mgh$$

3.3 Electromagnétisme

$$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$$

$$\vec{F} = q \vec{E}$$

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$$

$$q_1 \bullet \leftarrow \vec{u}_{2 \rightarrow 1} \bullet q_2$$

$$m_1 \bullet \leftarrow \vec{u}_{2 \rightarrow 1} \bullet m_2$$

3.4 Frottement

3.4.1 Frottement visqueux

$$\vec{F}_{fr} = -f(||\vec{v}_{rel}||) \frac{\vec{v}_{rel}}{||\vec{v}_{rel}||}$$

Régime laminaire :

$$f(||\vec{v}_{rel}||) = k \eta ||\vec{v}_{rel}||$$

Régime turbulent :

$$f(||\vec{v}_{rel}||) = \frac{1}{2} C_x \rho S ||\vec{v}_{rel}||^2$$

3.4.2 Frottement sec

Dépend des matériaux et de $||\vec{N}||$, pas de l'aire de la surface.

Statique :

$$||\vec{F}_{fr}|| \leq \vec{F}_{Max}^{fr} = \vec{F}^{arr} = \mu_s ||\vec{N}||$$

Avec glissement :

$$\vec{F} = -\mu_c ||\vec{N}|| \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}$$

4 Energie

4.1 Quantité de mouvement

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta \vec{p} = \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} \, \mathrm{d} t$$

4.2 Travail et Energie

Travail :

$$W = \vec{F}_1 \cdot \mathrm{d} \vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot \mathrm{d} \vec{r}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i \cdot \mathrm{d} \vec{r}_i$$

Energie cinétique :

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Energie potentielle d'une force \vec{F} par rapport à un point P et un point de référence O :

$$U(P) = - \int_O^P \vec{F} \cdot \, \mathrm{d} \vec{r} \qquad W = K_B - K_A = \Delta K$$

Énergie mécanique :

$$E_m = K + \sum_i U_i$$

Généralisation :

$$K_B + \sum_i U_{iB} = K_A + \sum_i U_{iA} + \int_A^B \vec{F}^{NC} \cdot \mathrm{d} \vec{r}$$

P est la puissance d'une energie E .

$$P = \frac{\mathrm{d} E}{\mathrm{d} t} \qquad \frac{\mathrm{d} E_m}{\mathrm{d} t} = \vec{F}^{NC} \cdot \vec{v}$$

Si $\vec{F}^{NC} \cdot \vec{v} \neq 0$ l'énergie n'est pas conservé, sinon oui.
Les forces conservatives sont tel que :

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$$

Possibilité pour la conservation de l'énergie :

- Si $\vec{F} \perp \vec{v}$, elle ne travaille pas ($P = 0$) et n'affecte ni E_m ni U .
- Si $\vec{F} \parallel \vec{v}$:
 - Si \vec{F} est conservative, elle contribue à U , donc à E_m .
 - Si \vec{F} est non-conservative, elle modifie E_m : $\dot{E}_m = P^{NC} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.
- Si seules des forces conservatives ou des forces non-conservatives perpendiculaires à \vec{v} agissent, E_m est conservée ($\dot{E}_m = 0$).
- Si une force non-conservative a une composante parallèle à \vec{v} , E_m n'est pas conservée ($\dot{E}_m = P^{NC} \neq 0$).

4.3 Méthode pour les position d'équilibres et variations

- $\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0 \Big|_{x_{eq}} \Leftrightarrow x_{eq} = \dots$
 - $\left. \frac{d\vec{F}}{dx} \right|_{x_{eq}} > 0 \rightarrow$ équilibre stable
 - $\left. \frac{d\vec{F}}{dx} \right|_{x_{eq}} < 0 \rightarrow$ équilibre instable
- $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_{eq}} = 0 \Leftrightarrow x_{eq} = \dots$
 - $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_{eq}} > 0 \rightarrow$ équilibre stable
 - $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_{eq}} < 0 \rightarrow$ équilibre instable

5 Oscillations

- $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$
 - $x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$
 - $x = C \sin(\omega_0 t + \phi)$
 - $x = C \cos(\omega_0 t + \phi')$
- $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = -\omega_0^2 x$
 - Mouvement oscillatoire sous-critique : $\gamma^2 < \omega_0^2 \rightarrow x = Ce^{\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$
 - Amortissement fort (surcritique) : $\gamma^2 > \omega_0^2 \rightarrow x = e^{-\gamma t} (Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t})$
 - Amortissement critique : $\gamma^2 = \omega_0^2 \rightarrow x = e^{-\gamma t} (A + Bt)$, $\omega^2 = |\gamma - \omega_0^2|$
- $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)$
 - $x \approx \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}} A(\Omega) \cos(\Omega t + \phi(\Omega))$
 - Résonnance max : $\Omega_{Max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$
 - $\phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\Omega^2 - \omega_0^2}\right)$
- Période pour une oscillation : $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$ (avec $\omega = \omega_0$ pour un oscillateur harmonique)

6 Referentiel non-absolu

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left(\vec{u}'_i \times \frac{d\vec{u}'_i}{dt} \right) \quad \frac{d\vec{u}'_i}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}'_i$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}'_p + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{O'P}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}'_p + \underbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}'_p}_{\text{Coriolis}} + \underbrace{\vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O'P})}_{\text{Centripète}} + \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{O'P}}_{\text{Entraînement}}$$

$$m\vec{a}'_p = \sum \vec{F} - \underbrace{\vec{F}_i}_{m\vec{a}_i}$$

6.1 Moment cinétique

$$\vec{L}_0 = \vec{OP} \times \vec{p}$$

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{OP} \times \vec{F} = \vec{M}_0$$

6.2 Mouvement sous l'action d'une force centrale

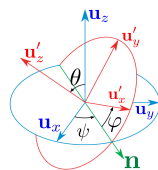
$$\text{Energie potentielle effective : } V_{eff} = U + \frac{\vec{r}_O^2}{2mr^2}$$

7 Solide en 3D

7.1 Position d'un solide

Un solide est défini comme un ensemble de points dont les distances entre chaque points est fixe.

7.1.1 Angles d'Euler



Pour passer de \mathcal{R} à \mathcal{R}' :

1. Précession : rotation ψ autour de \vec{u}_z pour amener \vec{u}_x sur \vec{n}
2. Nutation : rotation θ autour de \vec{n} , amène \vec{u}_z sur \vec{u}'_z
3. Rotation propre : rotation φ autour de \vec{u}'_z , amène \vec{n} sur \vec{u}'_x

7.1.2 Vitesse et accélération d'un point du solide

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{O'P}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{O'P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O'P})$$

En utilisant un repère cylindrique on peut dire que $\vec{\omega} \times \vec{O'P} = r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$

On remarque aussi que $\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{u}_z + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\varphi} \vec{u}'_z$

7.1.3 Dynamique d'un corps solide

- Thm du centre de masse : $M\vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}$
- Thm du moment cinétique :

1. $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$ (O doit être fixe)
2. $\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$

- Equation de l'énergie : $\Delta K = W^{\text{ext}}$

7.2 Rotation autour d'un axe de symétrie Δ_G

7.2.1 Moment cinétique

Valable seulement autour d'un axe de symétrie :

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d}{dt} (I_{\Delta_G} \vec{\omega}) = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

7.2.2 Energie cinétique

$$K = K_c + K_r = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta_G} \omega^2$$

7.3 Rotation autour d'un axe instantané fixe (=sans vitesse) $\Delta \parallel \Delta_G$

O est la projection de G sur Δ .

Théorème de Huygens-Steiner :

$$I_{\Delta} = M d^2 + I_{\Delta_G}$$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} (I_{\Delta} \vec{\omega}) = I_{\Delta} \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

Roulement sans glissement : vitesse instantané du point de contact est égale à 0, malgré le fait que le point de contact change (+ force de frottement statique).

8 Solide quelconque

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \frac{d}{dt} (\tilde{I}_G \vec{\omega}) = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

$$\tilde{I}_{G,\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[\|\vec{G}\vec{P}_i\|^2 \delta_{\alpha\beta} - G P_{i,\alpha} G P_{i,\beta} \right]$$

$$K_r = \frac{1}{2} M \|\vec{v}_G\|^2 + \frac{1}{2} \omega^\perp \tilde{I}_G \omega$$

$$\omega^\perp \tilde{I}_G \omega = \vec{L}_G \cdot \vec{\omega}$$

Si les axes sont parallèles à des axes de symétrie alors on a plus que des composantes sur la diagonale. Pour retrouver dans les coordonnées que l'on veut on prend nos axes tel que \tilde{I}'_G soit diagonale et on compute $\vec{L}'_G = \tilde{I}'_G \cdot \vec{\omega}'$. Puis on reprojette chaque axe sur ceux que l'on veut : $\vec{L}_G = (\vec{L}'_G \cdot \vec{u}_x) \vec{u}_x + (\vec{L}'_G \cdot \vec{u}_y) \vec{u}_y + (\vec{L}'_G \cdot \vec{u}_z) \vec{u}_z$

8.1 Si O ne bouge pas

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d}{dt} (\tilde{I}_O \vec{\omega}) = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\tilde{I}_{O,\alpha\beta} = M \left[\|\vec{O}\vec{P}_i\|^2 \delta_{\alpha\beta} - G P_{i,\alpha} G P_{i,\beta} \right] + \tilde{I}_{G,\alpha\beta}$$

$$K = \frac{1}{2} \omega^\perp \tilde{I}_O \omega$$

8.2 Les formules utiles

$$M\vec{a} = \sum \vec{F}^{\text{ext}} \quad \Delta K = W^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\forall P \in \text{solide} \quad \begin{cases} \vec{L}_O = \vec{OG} \times m \vec{v}_G + \vec{L}_G \\ \vec{v}_P = \vec{v}_G + \vec{\Omega} \times \vec{GP} \end{cases}$$

$$\vec{a}_G = \frac{d^2 \vec{OG}}{dt^2}$$

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot (\vec{\omega} \times \vec{AG}) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (\tilde{I}_G \vec{\omega})$$

$$\text{Position centre de masse : } \vec{OG} = \frac{\sum_i m_i \vec{r}'_i}{\sum_i m_i}$$

$$\text{où } x_G = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

$$\vec{v}_G = \frac{d\vec{r}_G}{dt} = \frac{\vec{p}}{M} \quad \vec{F}_{\text{ext}} = \frac{d\vec{p}}{dt} = M \vec{a}_G$$

$$\text{EdM d'un solide : } \begin{cases} 3 \text{ eq CDM : } m \vec{v}_G = \sum \vec{F}_{\text{ext}} \\ 3 \text{ eq TMC : } \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G \end{cases}$$

Energie mécanique d'un solide : Toutes les forces qui sont au point de contact ne sont pas prises en compte dans E_m (travaillent pas parce que la vitesse au point d'application est nulle).

8.3 Les cas particuliers

Pour une force d'inertie d'un solide entier il faut d'abord le faire pour une masse quelconque m sur le solide puis le généraliser. Exemple d'une tige : Soit $\mu = \frac{M}{L}$ avec M la masse d'un solide et L sa longueur. ON calcule la force d'inertie à une distance ρ du point pour une masse m quelconque : $d\vec{F}_{ie} = \alpha(\theta, \rho) m$ avec $\alpha(\theta, \rho)$ une fonction quelconque. Puis on remplace $m = \mu \, d\rho$ puis on intègre :

$$\vec{F}_{ie} = \int_0^L d\vec{F}_{ie} = \int_0^L \alpha(\theta, \rho) \mu \, d\rho$$

9 Kepler

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\|\vec{L}_0\|}{2m} = \text{const} \quad \frac{a_A^3}{T_A^2} = \frac{a_B^3}{T_B^2} \quad \frac{T^2}{R^2} = \frac{4\pi^2}{G(M_s + M)}$$

$a_A \approx R_A$ pour un cercle

10 Chocs

$$\vec{p}^{\text{in}} = \vec{p}^{\text{fin}} \quad \vec{L}_O^{\text{in}} = \vec{L}_O^{\text{fin}}$$

$$\Delta K = \begin{cases} 0 & \Rightarrow \text{ choc élastique} \\ 0 \neq & \Rightarrow \text{ choc inélastique} \end{cases}$$

Il y a un **choc mou** lorsque les deux masses se collent. La conservation de la quantité de mouvement est vérifiée mais $\Delta K \neq 0$.

10.1 Choc 1-D, élastique

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_1 v_{2i}^2 - \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 = 0 \end{cases}$$

Ce système a pour solutions :

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2i} + 2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

10.2 Choc inélastique

$$\Delta K \begin{cases} > 0 & \Rightarrow \text{ exo-énergétique} \\ < 0 & \Rightarrow \text{ endo-énergétique} \end{cases}$$

10.3 Choc mou (parfaitement inélastique)

Les deux objets se collent ($\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{v}_{\text{mou}}$). Dans le cas particulier où $\vec{v}_{2i} = 0$, la conservation de la quantité de mouvement nous dit que :

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{mou}}$$

$$\vec{v}_{\text{mou}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i}$$

$$\Delta K = K^{\text{fin}} - K^{\text{in}} = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{\text{mou}}^2 < 0$$

11 **Système à masses variable**

$$M(t)\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}=\sum \vec{F}^{\mathrm{ext}}+\vec{v}_{\mathrm{rel}}\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}$$

12 **Moment d’inertie**

Δ_C =axe du cylindre

Boule (pleine)	$I=\frac{2}{5}mR^2$
Sphère (creuse)	$I=\frac{2}{3}mR^2$
Anneau (Δ_c)	$I=mR^2$
Anneau ($\perp\Delta_c$)	$I=\frac{1}{2}mR^2$
Anneau (épaisseur $\neq 0$, Δ_c)	$I=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)$
Cylindre (Δ_c)	$I=\frac{1}{2}mR^2$
Cylindre ($\perp\Delta_c$)	$I=\frac{1}{4}mR^2+\frac{1}{12}mL^2$