

1 Intro mathématique

1.1 Trigonométrie

$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$	$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$
$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$	$\frac{1}{\sin^2(\alpha)} = 1 + \cot^2(\alpha)$
$\cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos(\alpha)$	$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin(\alpha)$
$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$	$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$
$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos(\alpha)$	$\sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin(\alpha)$
$\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin(\alpha)$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos(\alpha)$

$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) \mp \sin(\alpha) \sin(\beta)$
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) \pm \cos(\alpha) \sin(\beta)$
$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan(\alpha) \pm \tan(\beta)}{1 \mp \tan(\alpha) \tan(\beta)}$

$\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos(\alpha)}{2}$	$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{2}$
$\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$	$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{1 + \cos(\alpha)}$

$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$	$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$
$\tan(\alpha) + \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}$	$\tan(\alpha) - \tan(\beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha) \cos(\beta)}$

$a \cos(\alpha) + b \sin(\alpha) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(\alpha - \varphi)$   
 $\varphi = \arccos\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \arcsin\left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$

$\cos(x) = a \Rightarrow \begin{cases} x = \arccos(a) + k \cdot 2\pi & \text{ou} \\ x = -\arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$

$\sin(x) = a \Rightarrow \begin{cases} x = \arcsin(a) + k \cdot 2\pi & \text{ou} \\ x = \pi - \arcsin(a) + k \cdot 2\pi \end{cases}$

$\tan(x) = a \Rightarrow x = \arctan(a) + k \cdot \pi$   
 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha) \quad \frac{a}{\sin(\alpha)} = \frac{b}{\sin(\beta)}$

$\sin(\arccos x) = \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$   
 $\sin(\arctan x) = x^2 \cos(\arctan x) = \frac{x^2}{1 + x^2}$

Posons  $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ , alors :

$\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} \quad \sin x = \frac{2t}{1 + t^2} \quad \tan x = \frac{2t}{1 - t^2}$

1.2 Géométrie

1.2.1 Vecteur

$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \varphi \quad \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$

Projection de  $\vec{b}$  sur  $\vec{a}$  :  
 $\vec{b}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\|^2} \vec{a} \quad \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \varphi$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = -(\vec{b} \times \vec{a})$   
 $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

1.3 Dérivés et integrales

$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

Intégration par parties :

$\int \dot{x} y dt = xy - \int x \dot{y} dt$

Intégration par substitution :  $\int \dot{x} f(x) dt = \int f(x) dx$

$f'(x)$	$f(x)$	$F(x)$
0	$a$	$ax$
1	$x$	$x^2$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\ln x $
$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x}$
$-\frac{1}{3}\sqrt{x^3}$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$nx^{n-1}$	$x^n$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\frac{-n}{x^{n-1}}$	$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{n-1}\frac{1}{x^{n-1}}$
$\frac{1}{n}\sqrt[n]{x^{n-1}}$	$\sqrt[n]{x}$	$\frac{n}{n+1}\sqrt[n]{x^{n+1}}$
$a e^{ax}$	$e^{ax}$	$\frac{1}{a}e^{ax}$
$a b^{ax} \ln(b)$	$b^{ax}$	$\frac{1}{a \ln(b)} b^{ax}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$x(\ln(x) - 1)$
$\frac{1}{x \ln(a)}$	$\log_a(bx)$	$x \log_a\left(\frac{bx}{e}\right)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) $
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$x \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{-\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x)$	$x \arccos(x) - \sqrt{1-x^2}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\frac{g'(x)^2 + g(x)g''(x)}{g'(x)}$	$g(x)g'(x)$	$\frac{1}{2}g(x)^2$
$\frac{g''(x)g(x) - g'(x)^2}{g(x)^2}$	$\frac{g'(x)}{g(x)}$	$\ln g(x) $

1.4 Polynômes Taylor

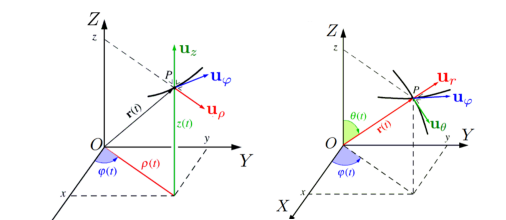
$$P_N(x) = \sum_{n=0}^N \frac{1}{n!} \frac{d^n f}{dx^n} \Big|_{x=x_0} (x - x_0)^n$$

2 Cinématique

$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2}{dt^2} (x_1 \vec{u}_1 + x_2 \vec{u}_2 + x_3 \vec{u}_3)$

$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + v \frac{d\vec{u}_t}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_t + \frac{v^2}{R_c} \vec{u}_n$

2.1 Coordonnée cylindrique



$\frac{d}{dt} \vec{u}_\rho = \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi \quad \frac{d}{dt} \vec{u}_\varphi = -\dot{\varphi} \vec{u}_\rho$   
 $\vec{v} \begin{cases} v_\rho = \dot{\rho} \\ v_\varphi = \rho \dot{\varphi} \\ v_z = \dot{z} \end{cases} \quad \vec{a} \begin{cases} a_\rho = \ddot{\rho} - \rho \dot{\varphi}^2 \\ a_\varphi = 2\dot{\rho} \dot{\varphi} + \rho \ddot{\varphi} \\ a_z = \ddot{z} \end{cases}$

2.2 Coordonnée sphérique

$\frac{d}{dt} \vec{u}_r = \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_\varphi$   
 $\frac{d}{dt} \vec{u}_\theta = -\dot{\theta} \vec{u}_r + \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\varphi$   
 $\frac{d}{dt} \vec{u}_\varphi = -\dot{\varphi} \sin \theta \vec{u}_r - \dot{\varphi} \cos \theta \vec{u}_\theta$

$\vec{v} \begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r \dot{\theta} \\ v_\varphi = r \dot{\varphi} \sin \theta \end{cases} \quad \vec{a} \begin{cases} a_r = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 - r \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta \\ a_\theta = r \ddot{\theta} + 2\dot{r} \dot{\theta} - r \dot{\varphi}^2 \cos \theta \sin \theta \\ a_\varphi = r \ddot{\varphi} \sin \theta + 2r \dot{\varphi} \dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{r} \dot{\varphi} \sin \theta \end{cases}$

2.3 Changement de base

Cartésien-cylindrique :

$\vec{u}_\rho = \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \varphi \vec{u}_y \quad \vec{u}_x = \cos \varphi \vec{u}_\rho - \sin \varphi \vec{u}_\varphi$   
 $\vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y \quad \vec{u}_y = \sin \varphi \vec{u}_\rho + \cos \varphi \vec{u}_\varphi$   
 $\vec{u}_z = \vec{u}_z \quad \vec{u}_z = \vec{u}_z$

Cartésien-sphérique :

$\vec{u}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_y + \cos \theta \vec{u}_z$   
 $\vec{u}_\theta = \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_x + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_y - \sin \theta \vec{u}_z$   
 $\vec{u}_\varphi = -\sin \varphi \vec{u}_x + \cos \varphi \vec{u}_y$

$\vec{u}_x = \sin \theta \cos \varphi \vec{u}_r + \cos \theta \cos \varphi \vec{u}_\theta - \sin \varphi \vec{u}_\varphi$   
 $\vec{u}_y = \sin \theta \sin \varphi \vec{u}_r + \cos \theta \sin \varphi \vec{u}_\theta + \cos \varphi \vec{u}_\varphi$   
 $\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta$

Cylindrique-sphérique :

$\vec{u}_\rho = \sin \theta \vec{u}_r + \cos \theta \vec{u}_\theta \quad \vec{u}_r = \sin \theta \vec{u}_\rho + \cos \theta \vec{u}_z$   
 $\vec{u}_\varphi = \vec{u}_\varphi \quad \vec{u}_\theta = \cos \theta \vec{u}_\rho - \sin \theta \vec{u}_z$   
 $\vec{u}_z = \cos \theta \vec{u}_r - \sin \theta \vec{u}_\theta \quad \vec{u}_\varphi = \vec{u}_\varphi$

3 Dynamique

$\sum_i \vec{F}_i = m \vec{a} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \quad \vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$

3.1 Ressort

$\vec{F}_r = -k(x - l_0) \vec{u} \quad U = \frac{1}{2} k(x - l_0)^2$

3.2 Gravitation

$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1} \quad \vec{F} = m \vec{g}$

$U = -G \frac{Mm}{r} \quad U = mgh$

3.3 Electromagnétisme

$\vec{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r_{12}^2} \vec{u}_{2 \rightarrow 1}$   
 $\vec{F} = q \vec{E} \quad \vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$

$q_1 \bullet \leftarrow \vec{u}_{2 \rightarrow 1} \bullet q_2 \quad m_1 \bullet \leftarrow \vec{u}_{2 \rightarrow 1} \bullet m_2$

3.4 Frottement

3.4.1 Frottement visqueux

$\vec{F}_{fr} = -f(\|\vec{v}_{rel}\|) \frac{\vec{v}_{rel}}{\|\vec{v}_{rel}\|}$   
Régime laminaire :  $f(\|\vec{v}_{rel}\|) = k\eta \|\vec{v}_{rel}\|$   
Régime turbulent :  $f(\|\vec{v}_{rel}\|) = \frac{1}{2} C_x \rho S \|\vec{v}_{rel}\|^2$

3.4.2 Frottement sec

Dépend des matériaux et de  $\|\vec{N}\|$ , pas de l'aire de la surface.  
Statique :

$\|\vec{F}_{fr}\| \leq F_{Max}^{fr} = F^{arr} = \mu_s \|\vec{N}\|$

Avec glissement :

$\vec{F} = -\mu_c \|\vec{N}\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$

4 Energie, quantité de mouvement, moments

4.1 Quantité de mouvement

$\vec{p} = m \vec{v}$   
 $\vec{p}_f - \vec{p}_i = \Delta \vec{p} = \vec{J} = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F} dt$

4.2 Moment cinétique et de force

$\vec{L}_0 = \overrightarrow{OP} \times \vec{p}$   
Théorème du moment cinétique :  
 $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \overrightarrow{OP} \times \vec{F} = \vec{M}_0$

4.3 Mouvement sous l'action d'une force centrale

Energie potentielle effective :  $V_{eff} = U + \frac{\vec{L}_0^2}{2mr^2}$

4.4 Travail et Energie

Travail :  
 $W = \vec{F}_1 \cdot d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \cdot d\vec{r}_2 + \dots = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i$

Energie cinétique :

$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m}$

Energie potentielle d'une force  $\vec{F}$  par rapport à un point  $P$  et un point de référence  $O$  :

$U(P) = - \int_O^P \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad W = K_B - K_A = \Delta K$

Énergie mécanique :

$E_m = K + \sum_i U_i$

Généralisation :

$K_B + \sum_i U_{iB} = K_A + \sum_i U_{iA} + \int_A^B \vec{F}^{NC} \cdot d\vec{r}$

$P$  est la puissance d'une energie  $E$ .  
 $P = \frac{dE}{dt} \quad \frac{dE_m}{dt} = \vec{F}^{NC} \cdot \vec{v}$

Si  $\vec{F}^{NC} \cdot \vec{v} \neq 0$  l'énergie n'est pas conservé, sinon oui.

Les forces conservatives sont tel que :  
 $\vec{F} = -\nabla U = -\frac{\partial U}{\partial x} \vec{u}_x - \frac{\partial U}{\partial y} \vec{u}_y - \frac{\partial U}{\partial z} \vec{u}_z$ .

Possibilité pour la conservation de l'énergie :

- Si  $\vec{F} \perp \vec{v}$ , elle ne travaille pas ( $P = 0$ ) et n'affecte ni  $E_m$  ni  $U$ .
- Si  $\vec{F} \parallel \vec{v}$  :
  - Si  $\vec{F}$  est conservative, elle contribue à  $U$ , donc à  $E_m$ .
  - Si  $\vec{F}$  est non-conservative, elle modifie  $E_m$  :  $\dot{E}_m = P^{NC} = \vec{F} \cdot \vec{v}$ .
- Si seules des forces conservatives ou des forces non-conservatives perpendiculaires à  $\vec{v}$  agissent,  $E_m$  est conservée ( $\dot{E}_m = 0$ ).
- Si une force non-conservative a une composante parallèle à  $\vec{v}$ ,  $E_m$  n'est pas conservée ( $\dot{E}_m = P^{NC} \neq 0$ ).

## 4.5 Méthode pour les position d'équilibres et variations

1.  $\sum \vec{F} = m\vec{a} = 0 \Big|_{x_{eq}} \Leftrightarrow x_{eq} = \dots$ 
  - $\left. \frac{d\vec{F}}{dx} \right|_{x_{eq}} > 0 \rightarrow$  équilibre stable
  - $\left. \frac{d\vec{F}}{dx} \right|_{x_{eq}} < 0 \rightarrow$  équilibre instable
2.  $\left. \frac{dU}{dx} \right|_{x_{eq}} = 0 \Leftrightarrow x_{eq} = \dots$ 
  - $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_{eq}} > 0 \rightarrow$  équilibre stable
  - $\left. \frac{d^2U}{dx^2} \right|_{x_{eq}} < 0 \rightarrow$  équilibre instable

## 5 Oscillations

- $\ddot{x} = -\omega_0^2 x$ 
  - $x = A \sin \omega_0 t + B \cos \omega_0 t$
  - $x = C \sin(\omega_0 t + \phi)$
  - $x = C \cos(\omega_0 t + \phi')$
- $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} = -\omega_0^2 x$ 
  - Mouvement oscillatoire sous-critique :  $\gamma^2 < \omega_0^2 \rightarrow x = Ce^{\gamma t} \cos(\omega t + \phi)$
  - Amortissement fort (surcritique) :  $\gamma^2 > \omega_0^2 \rightarrow x = e^{-\gamma t}(Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t})$
  - Amortissement critique :  $\gamma^2 = \omega_0^2 \rightarrow x = e^{-\gamma t}(A + Bt), \quad \omega^2 = |\gamma - \omega_0^2|$
- $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f \cos(\Omega t)$ 
  - $t \gg \frac{1}{\gamma} \rightarrow x \approx \frac{A(\Omega)}{f} \cos(\Omega t + \phi(\Omega))$
  - $A(\Omega) = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\gamma^2 \Omega^2}}$
  - Résonnance max :  $\Omega_{Max} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$
  - $\phi(\Omega) = \arctan\left(\frac{2\gamma\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\right)$
- Période pour une oscillation :  $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$  (avec  $\omega = \omega_0$  pour un oscillateur harmonique)

## 6 Referentiel non-absolu

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \left( \vec{u}_i \times \frac{d\vec{u}_i'}{dt} \right) \quad \frac{d\vec{u}_i'}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{u}_i'$$

$$\vec{v}_p = \vec{v}_p' + \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{O'P}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_p' + \overbrace{2\vec{\omega} \times \vec{v}_p'}^{\text{Coriolis}} + \overbrace{\vec{a}_{O'} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O'P})}^{\text{Centripète}} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{O'P}$$

$$m\vec{a}_p' = \sum \vec{F} - \underbrace{\vec{F}_i}_{m\vec{a}_i}$$

## 7 Système de particules et chocs

### 7.1 Systèmes de point matériels

$$\text{Moment cinétique : } \vec{L}_C = \sum_i \vec{CP}_i \times m_i \vec{v}_i$$

$$\text{Moment d'inertie, si } C \text{ fait partie d'un axe de symétrie du solide : } I_C = \sum_i m_i \left\| \vec{CP}_i \right\|^2$$

$$\text{Centre de Masse : } \vec{OG} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{OP}_i$$

Dans le référentiel du centre de masse (en **translation** par rapport au référentiel d'inertie) :

$$\sum_i m_i \vec{GP}_i = 0 \quad \sum_i m_i \vec{v}_i' = 0$$

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_G^2 + \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i'^2$$

$$\text{Théorème du centre de masse : } M \vec{a}_G = \vec{F}^{\text{ext}}$$

$$\text{Théorème du moment cinétique : } \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\text{Principe de conservations : } \vec{P}^{\text{in}} = \vec{P}^{\text{fin}} \quad \vec{L}_O^{\text{in}} = \vec{L}_O^{\text{fin}}$$

### 7.2 Chocs

$$\Delta K \stackrel{?}{=} \begin{cases} 0 \Rightarrow \text{choc élastique} \\ 0 \neq \Rightarrow \text{choc inélastique} \end{cases}$$

Il y a **choc mou** lorsque les deux masses se collent. La conservation de la quantité de mouvement est vérifiée mais  $\Delta K \neq 0$ .

#### 7.2.1 Choc 1-D, élastique

$$\begin{cases} m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \\ \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \end{cases}$$

Ce système a pour solutions :

$$\begin{cases} v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} \\ v_{2f} = \frac{(m_2 - m_1)v_{2i} + 2m_1 v_{1i}}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

#### 7.2.2 Choc inélastique

$$\Delta K \begin{cases} > 0 \Rightarrow \text{exo-énergétique} \\ < 0 \Rightarrow \text{endo-énergétique} \end{cases}$$

#### 7.2.3 Choc mou (parfaitement inélastique)

Les deux objet se collent ( $\vec{v}_{1f} = \vec{v}_{2f} = \vec{v}_{\text{mou}}$ ). Dans le cas particulier ou  $\vec{v}_{2i} = 0$ , la conservation de la quantité de mouvement nous dit que :

$$m_1 \vec{v}_{1i} = m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = (m_1 + m_2) \vec{v}_{\text{mou}}$$

$$\vec{v}_{\text{mou}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \vec{v}_{1i}$$

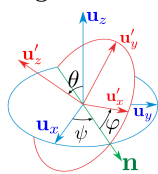
$$\Delta K = K^{\text{fin}} - K^{\text{in}} = -\frac{1}{2} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} v_{1i}^2 < 0$$

## 8 Corps solide

Un solide est défini comme un ensemble de points dont les distances entre chaque points est fixe.

### 8.1 Cinématique d'un solide

#### 8.1.1 Position : Angles d'Euler



Pour passer de  $\mathcal{R}$  à  $\mathcal{R}'$  :

1. Précession : rotation  $\psi$  autour de  $\vec{u}_z$  pour amener  $\vec{u}_x$  sur  $\vec{n}$
2. Nutation : rotation  $\theta$  autour de  $\vec{n}$ , amène  $\vec{u}_z$  sur  $\vec{u}_z'$
3. Rotation propre : rotation  $\varphi$  autour de  $\vec{u}_z'$ , amène  $\vec{n}$  sur  $\vec{u}_x'$

#### 8.1.2 Vitesse et accélération d'un point du solide

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{O'} + \vec{\omega} \times \vec{O'P}$$

$$\vec{a}_p = \vec{a}_{O'} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{O'P} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{O'P})$$

En utilisant un repère cylindrique on on peut dire que  $\vec{\omega} \times \vec{O'P} = r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta$

On remarque aussi que  $\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{u}_z + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\varphi} \vec{u}_z'$

### 8.2 Dynamique d'un corps solide

$$\text{Thm du moment cinétique sur } G : \frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

$$\text{Equation de l'énergie : } \Delta K = W^{\text{ext}}$$

#### 8.2.1 Rotation autour d'un axe de symétrie $\Delta G$

$$\exists \Delta G \Leftrightarrow \forall P_i, \exists P_i' \text{ tq. } \begin{cases} \vec{GP}_i = \vec{GP}_i' \\ \vec{GP}_i \perp \Delta G \end{cases}$$

Lorsque que le mouvement ce fait autour d'un axe de symétrie  $\Delta G$  on à les résultats suivant :

$$\text{Moment cinétique en } G : \vec{L}_G = I_{\Delta G} \vec{\omega}$$

$$\text{Énergie cinétique : } K = K_c + K_r = \frac{1}{2} M v_G^2 + \frac{1}{2} I_{\Delta G} \omega^2$$

#### 8.2.2 Rotation autour d'un axe instantané fixe (=sans vitesse) $\Delta \parallel \Delta G$

$O$  est la projection de  $G$  sur  $\Delta$ .

Théorème de Huygens-Steiner :

$$I_{\Delta} = M d^2 + I_{\Delta G} \quad \vec{L}_O = I_{\Delta} \vec{\omega}$$

**Roulement sans glissement** : vitesse instantané du point de contact est égale à celle de la surface (donc souvent 0), malgré le fait que le point de contact change (+ force de frottement statique).

### 8.3 Dynamique d'un solide quelconque

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$$

$$\vec{L}_G = \tilde{I}_G \vec{\omega}$$

$$\tilde{I}_{G,\alpha\beta} = \sum_i m_i \left[ \left\| \vec{GP}_i \right\|^2 \delta_{\alpha\beta} - GP_{i,\alpha} GP_{i,\beta} \right]$$

$$K_r = \frac{1}{2} M \left\| \vec{v}_G \right\|^2 + \frac{1}{2} \omega^\perp \tilde{I}_G \omega$$

$$\omega^\perp \tilde{I}_G \omega = \vec{L}_G \cdot \vec{\omega}$$

Théorème du transfert pour  $A$  et  $O$  quelconques :

$$\vec{L}_A = \vec{AO} \times m \vec{v}_G + \vec{L}_O$$

Si les axes sont parallèles à des axes de symétrie alors on a plus que des composantes sur la diagonale. Pour retrouver dans les coordonnées que l'on veut on prend nos axes tel que  $\tilde{I}_G$  soit diagonale et on compute  $\tilde{L}_G = \tilde{I}_G' \cdot \vec{\omega}'$ .

Puis on reprojette chaque axe sur ceux que l'on veut :  $\vec{L}_G = \left( \vec{L}_G' \cdot \vec{u}_x \right) \vec{u}_x + \left( \vec{L}_G' \cdot \vec{u}_y \right) \vec{u}_y + \left( \vec{L}_G' \cdot \vec{u}_z \right) \vec{u}_z$

### 8.4 Si $O$ ne bouge pas

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \frac{d\tilde{I}_O \vec{\omega}}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\tilde{I}_{O,\alpha\beta} = M \left[ \left\| \vec{OG} \right\|^2 \delta_{\alpha\beta} - OG_\alpha OG_\beta \right] + \tilde{I}_{G,\alpha\beta}$$

$$K = \frac{1}{2} \omega^\perp \tilde{I}_O \omega$$

### 8.5 Les formules utiles

$$K = \frac{1}{2} M \vec{v}_A^2 + M \vec{v}_A \cdot \left( \vec{\omega} \times \vec{AG} \right) + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \left( \tilde{I}_G \vec{\omega} \right)$$

$$x_G = \frac{1}{M} \int x \, dm$$

Énergie mécanique d'un solide : Toutes les forces qui sont au point de contact ne sont pas prises en compte dans  $E_m$  (travaillent pas parce que la vitesse au point d'application est nulle).

### 8.6 Les cas particulier

Pour une force d'inertie d'un solide entier il faut d'abord le faire pour une masse quelconque  $m$  sur le solide puis le généraliser. Exemple d'une tige : Soit  $\mu = \frac{M}{L}$  avec  $M$  la

masse d'un solide et  $L$  sa longueur. ON calcule la force d'inertie à une distance  $\rho$  du point pour une masse  $m$  quelconque :  $d\vec{F}_{ie} = \alpha(\theta, \rho) m$  avec  $\alpha(\theta, \rho)$  une fonction quelconque. Puis on remplace  $m = \mu \, d\rho$  puis on intègre :

$$\vec{F}_{ie} = \int_0^L d\vec{F}_{ie} = \int_0^L \alpha(\theta, \rho) \mu \, d\rho$$

## 9 Kepler

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\|\vec{L}_0\|}{2m} = \text{const} \quad \frac{a_B^3}{T_A^2} = \frac{a_B^3}{T_B^2} \quad \frac{T^2}{R^2} = \frac{4\pi^2}{G(M_s + M)}$$

$$a_A \approx R_A \text{ pour un cercle}$$

## 10 Système à masses variable

$$M(t) \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}^{\text{ext}} + \vec{v}_{\text{rel}} \frac{dM}{dt}$$

## 11 Moment d'inertie

$\Delta_C$  =axe du cylindre

Boule (pleine)	$I = \frac{2}{5} mR^2$
Sphère (creuse)	$I = \frac{2}{3} mR^2$
Anneau ( $\Delta_c$ )	$I = mR^2$
Anneau ( $\perp \Delta_c$ )	$I = \frac{1}{2} mR^2$
Anneau (épaisseur $\neq 0$ , $\Delta_c$ )	$I = \frac{1}{2} m(R_1^2 + R_2^2)$
Cylindre ( $\Delta_c$ )	$I = \frac{1}{2} mR^2$
Cylindre ( $\perp \Delta_c$ )	$I = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mL^2$

## 12 Lagrange

$$\mathcal{L} = K - U$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$$