Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова

Механико-математический факультет
Кафедра теории вероятностей

# Курсовая работа

## О слабой сходимости локального времени пребывания в нуле ветвящегося случайного блуждания по многомерным решеткам размерности $d \geq 3$.
## On the weak convergence of the local residence time at zero of a branching random walk on multidimensional lattices of dimension $d \geq 3$.

Выполнила студентка 3 курса

Саитова А.И.

Научный руководитель

д.ф.-м.н., проф. Яровая Е.Б.

Москва 2024

# Описание модели и вспомогательные результаты

Центральная задача теории случайных блужданий - изучение эволюции процессов в зависимости от структуры пространства. В представленной работе исследуется предельное поведение СБ на $d-$ мерной целочисленной решетке в ситуации, когда оно невозвратно.

Большое количество результатов, связанных с изучением случайных блужданий, были опубликованы в работах Ф. Спицер [2], П.Реверс[6], В.Филлер[4], Е.Яровая[1, 3], Г.Попов, А. Апарин[3] и многих других. При изученни одной из основных характеристик случайного блуждания, свойства возвратности, важно иметь представление о распределении времени пребывания процесса в произвольной области фазоваго пространства.

Проблему возвратности случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ без ограничения на симметричность поднимал в 1949г. В.Феллер в работе [4]. В 1951г. К.Джун и М.Кац доказали предельные теоремы для блуждания специального вида: шаг блуждания уже мог иметь нерешетчатую структуру, в связи с чем понятие возвратности интерпретировалось как попадание в некоторый симметричный относительно нуля интервал.
В задачах о времени пребывания блуждания в области особое внимание уделяется предельным теоремам, где важную роль играет сходимость распределений функционалов от случайного блуждания. Дж.Каллианпур и Г.Роббинс [7] в качестве таких функционалов рассматривали суммы индикаторов множеств.

В данной работе рассматривается симметричное случайное блуждание по многомерной решетке $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$, с непрерывным временем.

Особое внимание уделяется изучению распределения времени пребывания случайного блуждания в точке решетки, из которой начался процесс.

## 1.1.Описание модели

Объектом изучения является случайное блуждание по $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$, с непрерывным временем и матрицей переходных интенсивностей $A = (a(x,y))_{x,y\in\mathbb{Z}^d}$, удовлетворяющей следующим условиям:

1. $a(x,y) \geq 0$ при $x \neq y$ и $a(x,x) < 0$
2. $\sum\limits_{y\in\mathbb{Z}^d} a(x,y) = 0$
3. $\sup_{x\in\mathbb{Z}^d}|a(x,y)| < \infty$

**Определение 1.** Пусть $\nu$-некоторая вероятностная мера на $\mathbb{Z}^d$. Тогда случайный процесс $X_t = \{X_t, t \geq 0\}$ с непрерывным временем, пространством состояний $\mathbb{Z}^d$, начальным распределением $\nu$ и генератором $A$ называется *стохастическим блужданием.*

Будем преполагать также, что случайное блуждание:

1. симметрично, т.е. $a(x,y) = a(y,x)$
2. пространственно однородно, т.е. $a(x,y) = a(0, y-x)$
3. неприводимо, т.е. все точки $y \in \mathbb{Z}^d$ достижимы
4. однородно по времени.

Такое блуждание является марковской цепью с непрерывным временем и бесконечным числом состояний.

**Определение 2.** Через $p(t,x,y)$ обозначим *переходную вероятность* случайного блуждания, т.е. вероятность того, что в момент $t \geq 0$ частица находится в точке $y$, при условии, что в момент времени $t = 0$ она находилась в точке $x$.Тогда асимптотически при $h \downarrow 0$ имеет место представление:

$$p(h,x,y) = a(x,y)h + o(h) \text{ при } x \neq y$$
$$p(h,x,x) = 1 + a(x,x)h + o(h)$$

**Определение 3.** Пусть $\xi_t$ - случайная величина, равная *времени пребывания* случайного блуждания *в начале координат* до момента $t \geq 0$.

**Определение 4.** Обозначим через $S := S(\omega) = \{s : X_s = 0, s > 0\}$ множество *моментов попадания* траектории стахостического блуждания в $\mathbf{0}$.

Обозначим через $I_0(X_s) = \begin{cases} 1, s \in S \\ 0, s \notin S \end{cases}$

Тогда величина $\xi_t$ будет иметь следующее представление:

$$\xi_t := \xi_t(\omega) = \int_0^t I_0(X_s)ds$$

**Определение 5.** Величину

$$G_\lambda(x, y) := \lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-\lambda u} p(u, x, y) du$$

являющуюся, по определению, преобразование Лапласа переходной вероятности $p(t, x, y)$, будем называть *функцией Грина.*

Функция Грина $G_\lambda(x, y)$ при $\lambda = 0$ соотвествует среднему времени пребывания частицы в $y \in \mathbb{Z}^d$ при $t \to \infty$ при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ частица ходилась в точке $x \in \mathbb{Z}^d$.

Далее будем использовать следующие обозначения

$$p(t) := p(t, 0, 0) \qquad\qquad G(t) := \int_0^t p(s)ds$$

Через $E\xi_t$ обозначим среднее время пребывание траектории случайного блуждания в начале координат за время $t \geq 0$, при условии что в момент времени $t = 0$ процесс находился в начале координат.

Покажем, что величина $G(t)$ будет совпадать с $E\xi_t$:

$$G(t) = \int_0^t p(s)ds = \int_0^t EI_0(X_s)ds = E\left[\int_0^t I_0(X_s)ds\right] = E\xi_t$$

Третье равенство выполнено в силу теоремы Фубини.

**Определение 6.** Случайное блуждание называют *возвратным*, если $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} G(t) = \infty$, и *невозвратным*, если $\lim\limits_{t\longrightarrow\infty} G(t) < \infty$

Особое внимание в работе уделяется времени пребывания $\xi_t$ блуждания в начале координат и его среднему $E\xi_t$, а также предельному распределению случайной величины $\frac{\xi_t}{E\xi_t}$ в зависимости от размерности (и как следствие, от возвратности случайного блуждания).

**Определение 7.** Будем говорить, что случайное блуждание имеет *конечную дисперсию* скачков, если

$$\sum_{x\in\mathbb{Z}^d} ||x||^2 a(0,x) < \infty, \qquad (1)$$

где $||*||$- некоторая норма в $\mathbb{Z}^d$

Если в соотношении (1) неравенство заменить на равенство, то говорят что случайное блуждание имеет *бесконечную дисперсию* скачков.

Выполнение следующего условия влечет бесконечность дисперсии скачков (см. [5]):

$$\lim_{||x||\longrightarrow\infty} a(0,x)||x||^{d+\alpha} = H\left(\frac{x}{||x||}\right) \qquad (2)$$

где $\alpha \in (0,2), x \in \mathbb{Z}^d$ и $H : S^{d-1} \to \mathbb{R}, H(x) = H(-x), x \in S^{d-1}-$ непрерывная положительная функция , определенная на сфере $S^{d-1}$ размерности $d-1$.

## 1.2.Вспомогательные результаты.

**Теорема 1 (Достаточное условие Карлемана)** Пусть $m_{n,n\in N}$-последовательность моментов некоторой случайной величины $X \geq 0$, причем

$$\sum_{n=1}^{\infty} m_n^{-\frac{1}{2n}} = \infty \text{ (условие Карлемана)}$$

Тогда распределение случайной величины X однозначно определяется моментами.

При исследовании свойств моментов случайной величины $\frac{\xi_t}{E\xi_t}$ важную роль играют следующие леммы.

**Лемма 1.** ([3, лемма 3]) Моменты величины $\frac{\xi_t}{E\xi_t}$ допускают следующее представление:

$$E[\tfrac{\xi_t}{E\xi_t}]^k = \tfrac{k!}{(E\xi_t)^k} \int_0^t f_k(s_k), ds_k, \text{ где}$$

$$f_k(s_k) = \int_0^{s_k} ... \int_0^{s_2} p(s_k - s_{k-1})...p(s_2 - s_1)p(s_1), ds_1...ds_{k-1}$$

**Лемма 2.** ([3, лемма 4]) В обозначениях леммы 1.преобразование Лапласа величины $\int_0^t f_k(s_k)ds_k$ допускает следующие представление:

$$\omega(\lambda) = \left[ \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} p(t)dt \right]^k$$

В случае конечной дисперсии скачков функция переходной вероятности имеет слудующую асимптотику $p(t) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}}$ при $t \to \infty$(См. [1]).

**Лемма 3.** (См.[3, следствие 1]) При $t \to \infty$ верны слудующие равенства

$$G(t) = \begin{cases} 2\gamma_1 \sqrt{t}, & d = 1 \\ \gamma_2 \ln t, & d = 2 \\ C_d, & d \geq 3 \end{cases}$$

где константа $C_d > 0$ уменьшается с увеличением размерности решетки $\mathbb{Z}^d$.

В случае бесконечной дисперсии скачков функция переходной вероятности имеет асимптотику $p(t) \sim h_{\alpha,d} t^{-\frac{d}{\alpha}}$ при $t \to \infty$(См. [1]).

**Лемма 4.**(См.[3, следствие 2] При $t \to \infty$ верны следующие асимптотические равенства:

$$G(t) = \begin{cases} C_1^*, & d = 1, 0 < \alpha < 1 \\ h_{1,1} \ln t, & d = 1, \alpha = 1 \\ h_{\alpha,1} \frac{\alpha}{\alpha-1} t^{1-\frac{1}{\alpha}}, & d = 1, 1 < \alpha < 2 \\ C_d^*, & d \geq 2, 0 < \alpha < 2 \end{cases}$$

где $C_d^* > 0$- некоторые константы, зависящие от размерности d решетки $\mathbb{Z}^d$.

Случайное блуждание с конечной дисперсией скачков возвратно в размерностях $d = 1, 2$ и невозвратно $d \geq 3$.

Случайное блуждание с бесконечной дисперсией скачков возвратно для $d = 1$ при $\alpha \in [1, 2)$ и невозвратно для $d = 1$ при условии $\alpha \in (0, 1)$ или $d \geq 2$ при условии $0 < \alpha < 2$.

**Лемма 5.** (См.[1]) Пусть непрерывные функции $\phi(t), \chi(t) \geq 0, t \geq 0$, имеют асимптотики

$$\phi(t) \sim \phi_0 t^{\mu} (\ln t)^{\widetilde{\mu}}, \qquad \chi(t) \sim \chi_0 t^{\nu} (\ln t)^{\widetilde{\nu}} \text{ при } t \to \infty$$
$$\text{и пусть } W(t) := \int_0^t \phi(t-s)\chi(s)ds$$

Тогда при $\mu < -1, \nu < -1, \mu = \nu, \widetilde{\mu} = \widetilde{\nu} = 0$

$$W(t) \sim \phi_0 t^{\mu} (\ln t)^{\widetilde{\mu}} \int_0^{\infty} \chi(s)ds. \qquad \square$$

Данную лемму будем использовать напротяжении всего доказательства теоремы 3 вторым способом. Перейдем к доказательствам.

# 2.Основные результаты.

Для восстановления предельного распределения случайной величины $\frac{\xi_t}{E\xi_t}$ и доказательства выполнения условия Карлемана для моментов потребуется следующая тауберова теорема.

Пусть $U$- мера, сосредоточенная на полуоткрытом интервале $[0,\infty)$ и такая, что её преобразование Лапласа $\omega(\lambda) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}U\{dt\}$ существует при $\lambda > 0$. Исторически любое соотношение, описывающее асимптотическое поведение $U$ в терминах $\omega$, называется тауберовой теоремой.

**Теорема 2.**(*Тауберова теорема*)([4, т.2, гл. XIII, п. 5, теорема 2] Если функция $L$ медленно меняется на бесконечности и $0 \le \rho < \infty$, то при $\lambda \to 0$ и при $t \to \infty$ соответственно $\omega(\lambda) \sim \frac{1}{\lambda^\rho}L(\frac{1}{\lambda})$ тогда и только тогда, когда $U(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\rho+1)}t^\rho L(t)$.

Сформулируем основные результаты работы, которые описывают предельное распределение случайной величины $\frac{\xi_t}{E\xi_t}$. Случай размерностей $d = 1, 2$ был объектом исследования в работе [3, теорема 1] А. А. Апарина, Г. А. Попова, Е. Б. Яровой. Остановимся на старших размерностях.

**Теорема 3.** Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$, с конечной дисперсией скачков и носителем распределения $x \in \mathbb{R}_+$ при $t \to \infty$ имеют место соотношения:

$$\lim_{t\to\infty} P(\frac{\xi_t}{E\xi_t} \le x) = 1 - e^{-x} \qquad \text{при } d \ge 3.$$

*Доказательство:* Используем асимптотическое представление для функции $p(t) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}}$ при $t \to \infty$. Тогда согласно лемме 3 для $G(t) = E\xi_t$ выполнено асимптотическое равенство $G(t) \sim C_d$.

В старших размерностях преобразование Лапласа $\omega(\lambda)$ величины $\int_0^t f_k(s_k)ds_k$ допускает следующее представление:

$$\omega(\lambda) = \left[\int_0^\infty e^{-\lambda t}p(t)dt\right]^k \sim C_d^k \qquad \text{при } \lambda \to 0.$$

Используя тауберову теорему, где $\rho = 0, L(t) = C_d^k, U(t) = \int_0^t f_k(s_k)ds_k$ и $\Gamma(1) = 1$, получаем :

$$U(t) = \int_0^t f_k(s_k)ds_k \sim C_d^k \qquad \text{при } t \to \infty$$

Таким образом, в силу леммы 1 будет выполнено:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} E[\tfrac{\xi_t}{E\xi_t}]^k = \lim_{t\longrightarrow\infty} \tfrac{k!}{(E\xi_t)^k} \int_0^t f_k(s_k)ds_k =$$

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \tfrac{k!}{(E\xi_t)^k}(C_d)^{k-1} \int_0^t \gamma_d s_k^{-\frac{d}{2}} ds_k == \tfrac{k!}{(C_d)^k}(C_d)^k = k! = \int_0^\infty x^k e^{-x}dx$$

Такие моменты удовлетворяют условию Карлемана

$$\sum_{k=1}^\infty \tfrac{1}{(k!)^{\frac{1}{2k}}} \geq \sum_{k=1}^\infty \tfrac{1}{(k^k)^{\frac{1}{2k}}} = \sum_{k=1}^\infty \tfrac{1}{\sqrt{k}} = \infty.$$

Из теоремы 1 следует, что можно однозначно восстановить функцию распределения, по найденным моментам. Случайная величена, которой соответствуют такие моменты, имеет экспоненциальное распределение с параметром 1, т.е.:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} P\left[\tfrac{\xi_t}{E\xi_t} \leq x\right] = 1 - e^{-x}.$$

Теорема доказана. $\square$

Проведем доказательство теоремы вторым способом, убедимся в том, что предельные распределения случайной величины $\frac{\xi_t}{R\xi_t}$, полученные двумя разными способами, совпадают.

**Теорема 3.** Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}^d, d \in \mathbb{N}$, с конечной дисперсией скачков и носителем распределения $x \in \mathbb{R}_+$ при $t \to \infty$ имеют место соотношения:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} P(\tfrac{\xi_t}{E\xi_t} \leq x) = 1 - e^{-x} \qquad \text{при } d \geq 3.$$

*Доказательство:* В размерностях $d \geq 3$ согласно [1, теорема 2.1.1] ассимптотическое поведение переходной верояности имеет вид $p(t) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}}$ при $t \to \infty$. Тогда согласно лемме 3 для $G(t) = E\xi_t$ выполнено ассимптотическое равенство $G(t) \sim C_d$.

Заметим, что в терминах леммы 1 функция $f_k(s_k)$ допускает рекуррентную запись и, кроме того, $f_k(s_k)$ есть свертка функций $p(s_k)$ и $f_{k-1}(s_{k-1})$.

$$f_k(s_k) = \int_0^{s_k} p(s_k - s_{k-1}) f_{k-1}(s_{k-1}) ds_{k-1} = (p * f_{k-1})(s_{k-1})$$

Введем слудующие обозначения $G_t := G_t(0,0) = \int_0^t p(u,0,0)du$

$$p(u) := p(u,0,0)$$

$$C_d = \lim_{t \longrightarrow \infty} G_t = \int_0^\infty p(u)du$$

Рекуррентно выведем формулу для $f_k(s_k)$, используя представление функции в виде свертки $p(t)$ и $f_{k-1}(s_{k-1})$. В ходе доказательства будем использовать обозначения, введенные в лемме 5.

*Шаг 1.* При $k = 2$

$$f_2(s_2) = \int_0^{s_2} p(s_2 - s_1) p(s_1) ds_1$$

Воспользуемся асимптотическим представлением для переходной вероятности.

В качестве функций $\phi(t)$ и $\chi(t)$ возьмем $p(t)$.

$$\phi(t) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}}, \chi(t) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}}$$

Тогда, используя лемму 5, где $\mu = -\frac{d}{2}, \widetilde{\mu} = 0, \nu = -\frac{d}{2}, \widetilde{\nu} = 0$, получаем следующее асимптотическое представление для функции $f_2(s_2)$:

$$f_2(t) = W(t) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}} \int_0^\infty p(s)ds = \gamma_d C_d t^{-\frac{d}{2}}.$$

*Шаг 2.* При $k = 3$

$$f_3(s_3) = \int_0^{s_3} p(s_3 - s_2) f_2(s_2) ds_2$$

Снова воспользуемся этой же леммой, только теперь в качестве $\phi(t)$ и $\chi(t)$ возьмем:

$$\phi(t) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}}, f2(t) = \chi(t) \sim \gamma_d C_d t^{-\frac{d}{2}}$$

Таким образом, $f_3(s_3)$ будет иметь вид:

$$f_3(t) = W(t) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}} \int_0^\infty \gamma_d C_d s^{-\frac{d}{2}} ds = \gamma_d C_d t^{-\frac{d}{2}} \int_0^\infty \gamma_d s^{-\frac{d}{2}} ds = \gamma_d (C_d)^2 t^{-\frac{d}{2}}.$$

*Шаг 3.* Аналогично, при $k = 4$

$$f_4(s_4) = \int_0^{s_4} p(s_4 - s_3) f_3(s_3) ds_3$$

В качестве $\phi(t)$ и $\chi(t)$ возьмем:

$$\phi(t) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}}, f_3(t) = \chi(t) \sim \gamma_d (C_d)^2 t^{-\frac{d}{2}}$$

Итак,

$$f_4(t) = W(t) \sim \gamma_d t^{-\frac{d}{2}} \int_0^\infty \gamma_d (C_d) : 2 s^{-\frac{d}{2}} ds = \gamma_d (C_d)^2 t^{-\frac{d}{2}} \int_0^\infty \gamma_d s^{-\frac{d}{2}} ds =$$

$$= \gamma_d (C_d)^3 t^{-\frac{d}{2}}.$$

*Шаг $(k-1)$.* В результате получаем следующую рекуррентную формулу:

$$f_k(t) \sim (C_d)^{k-1} \gamma_d t^{-\frac{d}{2}}. \qquad (3)$$

Используя (3), асимптотику для $G(t) = E\xi_t$ из леммы 3 при $t \to \infty$, а также утверждение леммы 1, получаем следующее равенство:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} E[\tfrac{\xi_t}{E\xi_t}]^k = \lim_{t\longrightarrow\infty} \tfrac{k!}{(E\xi_t)^k} \int_0^t f_k(s_k) ds_k =$$

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} \tfrac{k!}{(E\xi_t)^k} (C_d)^{k-1} \int_0^t \gamma_d s_k^{-\frac{d}{2}} ds_k == \tfrac{k!}{(C_d)^k} (C_d)^k = k! = \int_0^\infty x^k e^{-x} dx$$

Такие моменты удовлетворяют условию Карлемана

$$\sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{(k!)^{\frac{1}{2k}}} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{(k^k)^{\frac{1}{2k}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \tfrac{1}{\sqrt{k}} = \infty.$$

и являются моментами экспоненциально распределенной случайной величины с параметром 1.. $\square$

Далее найдем предельное распределение для случайного блуждания с бесконечной дисперсии скачков в тех случаях, когда оно невозвратно.

**Теорема 4.** Пусть выполнено условие (2). Для симметричного, неприводимого и однородного по пространству стохастического блуждания по $\mathbb{Z}^d$ с носителем распределения $x \in \mathbb{R}_+$ при $t \to \infty$ имеют место соотношения:

$$\lim_{t\longrightarrow\infty} P(\tfrac{\xi_t}{E\xi_t} \leq x) = 1 - e^{-x} \qquad \text{при} \qquad \begin{matrix} d = 1, \alpha \in (0,1). \\ d \geq 2, \alpha \in (0,2) \end{matrix}$$

*Доказательство:* При $d = 1, \alpha \in (0,1)$ и $d \geq 2, \alpha \in (0,2)$ случайное блуждание невозвратно $E\xi_t = C_{\alpha,d}$. Доказательство в точности воспроизводит доказательства теоремы 3 для $d \geq 3$. При этом константы $C_{\alpha,d}$ зависят как от размерности, так и от значения параметра $\alpha$.
Теорема доказана. $\square$

# Список литературы

[1] Е. Б. Яровая, Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде, Центр прикл. исслед. при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 2007, 104 с.

[2] F. Spitzer, Principles of random walk, Cornell University, 196

[3] А. А. Апарин, Г. А. Попов, Е. Б. Яровая, “О распределении времени пребывания случайного блуждания в точке многомерной решетки”, Теория вероятн. и ее примен., 66:4 (2021), 657–675; Theory Probab. Appl., 66:4 (2022), 522–536

[4] В. Феллер, Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. I, II. М.: Мир, 198

[5] E. Yarovaya (2013), “Branching Random Walks with Heavy Tails”, Communications in Statistics - Theory and Methods, 42:16, 3001-3010, DOI: 10.1080/03610926.2012.703282

[6] P. Revesz, Random walk in random and non-random environments, second edition, 10.1142/5847, 200

[7]G. Kallianpur, H. Robbins, “The sequence of sums of independent random variables”, Duke Math. J., 21:2, 1954, pp. 285–307