UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CRISTINI KUERTEN

ALGUMAS APLICAÇÕES DE MATRIZES

Florianópolis
Abril – 2002

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO DE CIÊNCIAS FÍSICAS E MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
CRISTINI KUERTEN

ALGUMAS APLICAÇÕES DE MATRIZES

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Matemática.
Habilitação Licenciatura.
Departamento de Matemática.
Centro de Ciências Físicas e Matemáticas.

Orientadora: Profª Joana B. O. Quandt

Florianópolis
Abril - 2001

ALGUMAS APLICAÇÕES DE MATRIZES

Esta Monografia foi julgada adequada como **TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO** no Curso de Matemática – Habilitação Licenciatura e aprovada em sua forma final pela Banca Examinadora designada pela Portaria n° 15/SCG/02.

Nereu E. Burin

Prof. Nereu S. Burin
Professor responsável pela disciplina

Banca Examinadora:

Joana B. O. Quandt

Prof^a Joana B. de Oliveira Quandt
Orientadora

Prof^a Jane de Oliveira Crippa

Prof. Rubens Starke

DEDICATÓRIA

Dedico a vitória desta etapa de minha vida a toda minha família, especialmente para os meus pais, Luiz Kuerten e Marlene O. Kuerten, e para meu noivo, Dirlei Marcelino Maia, pelos esforços nunca poupados, buscando sempre me oferecer o melhor, pelo amor incondicional, presente em todas as horas e, principalmente, por terem sempre acreditado em mim. Merecedores de todo o meu amor, pelo que fazem e pelo que são: dignos, trabalhadores e vitoriosos.

AGRADECIMENTOS

À Deus, por ter me concedido a vida e a coragem. Tenho certeza de que sempre esteve ao meu lado.

Às pessoas especiais que sempre estiveram comigo e que, pela presença, pela palavra, pela atenção ou pelo simples sorriso, me deram coragem e determinação para traçar caminhos em busca de meus ideais.

À professora Joana B. de Oliveira Quandt, pelos esforços empenhados em me orientar sempre que possível e por sua disposição a cada encontro, fazendo de minhas dúvidas, certezas.

Ser mestre não é apenas lecionar.

Ensinar não é apenas transmitir conhecimentos.

Ser mestre é ser instrutor e amigo, guia e companheiro,

é caminhar com o aluno passo a passo,

é transmitir a estes o segredo da caminhada.

Ser mestre é ser exemplo.

Exemplo de dedicação, de doação, de dignidade

pessoal e sobretudo, amor.

INDÍCE

INTRODUÇÃO

A Matemática é uma ciência muito antiga, que desde os primórdios sempre esteve presente no dia-a-dia das pessoas.

Estudamos Matemática desde os primeiros anos escolares. Ao mesmo tempo em que dizemos que esta disciplina é muito importante em nossas vidas, devido a sua aplicabilidade, não mostramos muitas vezes suas aplicações. Por este motivo resolvi elaborar um trabalho, onde seu principal objetivo seria mostrar algumas aplicações de um determinado conteúdo matemático.

Dentre os inúmeros conteúdos que poderiam ser escolhidos, decidi trabalhar com Matrizes, pois este é um dos assuntos que não conhecemos bem suas aplicações.

O trabalho foi organizado da seguinte forma: o Capítulo 1 aborda uma visão geral do conteúdo de Matrizes. Já o Capítulo 2 é a parte essencial do trabalho, pois relata algumas de suas aplicações. Convém neste momento ressaltar que resolvi trabalhar com apenas três tipos de aplicações de matrizes: Matrizes e Criptografia, Matrizes e Modelos Populacionais e Cadeias de Markov. Outras aplicações que poderiam ser vistas são, por exemplo, Teoria de Grafos e o Problema de Alocação de Tarefas.

O trabalho que segue está longe de ser um estudo concluído ou terminado. O que se pretende realmente, é por o assunto em discussão.

CAPÍTULO 1

Definições e Propriedades Referentes à Álgebra Matricial

O objetivo deste capítulo é dar uma visão geral do conteúdo de matrizes, ou seja, pretende-se definir o que é uma matriz, alguns tipos de matrizes, suas operações aritméticas, como também estabelecer algumas de suas propriedades algébricas.

Não serão feitas demonstrações, pois estas são vistas nas disciplinas de Álgebra Linear.

1.1 INTRODUÇÃO

Definição: Uma ***matriz*** A é um agrupamento retangular de elementos dispostos em linhas (horizontais) e colunas (verticais), geralmente entre colchetes ou parênteses.

Os elementos de uma matriz podem ser números reais ou complexos ou até mesmo expressões algébricas, e são chamados de ***entradas*** da matriz.

Exemplos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} \cos(t) & -\operatorname{sen}(t) \\ \operatorname{sen}(t) & \cos(t) \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 3i & -i \end{bmatrix}$$

Uma matriz é real se os seus elementos são números reais ou expressões que assumem valores reais.

Neste trabalho vamos trabalhar apenas com matrizes reais.

Uma matriz A com m linhas e n colunas pode ser escrita da seguinte forma:

Definição: *Matriz Coluna*

Dizemos que A é uma *matriz coluna* quando A for de ordem $m \times 1$.

Exemplos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix} \quad , \quad A_2 = \begin{bmatrix} 12 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 2i \\ 1+i \\ 3 \\ -1-i \end{bmatrix}.$$

Definição: *Matriz Quadrada*

Seja A uma matriz $m \times n$. Se $m = n$, A é uma *matriz quadrada.* Ou seja, uma *matriz quadrada* é uma matriz que tem o mesmo número de linhas e de colunas. Os números $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$ formam a *diagonal principal* de A.

Exemplos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição: *Matriz Triangular Superior e Matriz Triangular Inferior*

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é dita *triangular superior* se $a_{ij} = 0$ quando $i > j$, ou seja, os elementos abaixo da diagonal principal são todos nulos.

Exemplos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ é dita *triangular inferior* se $a_{ij} = 0$ quando $i < j$, ou seja , os elementos acima da diagonal principal são nulos.

Exemplos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}.$$

Podemos também afirmar simplesmente que A é *triangular* se A for triangular superior ou inferior. Deve ser observado que uma matriz triangular pode ter zeros na diagonal.

Definição: *Matriz Diagonal*

Uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, é denominada *matriz diagonal.*

Exemplos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição: *Matriz Identidade*

Uma matriz de ordem n, $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos e os elementos da diagonal são todos iguais a um, isto é, $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$ e $a_{ij} = 1$ para $i = j$, é denominada *matriz identidade.*

Notação: I ou I_n.

Exemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Definição: *Matriz Escalar*

Uma matriz diagonal $A = [a_{ij}]$ em que todos os elementos da diagonal principal são iguais, isto é, $a_{ij} = c$ para $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, é denominada *matriz escalar.*

Exemplos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Definição: *Matriz Nula*

Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz de ordem $m \times n$. A é uma *matriz nula* se *todos os seus elementos são nulos*, isto é, se $a_{ij} = 0$, para $i = 1, \dots, m$ e $j = 1, \dots, n$.

Exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Neste trabalho, denotaremos a matriz nula por O .

1.3 IGUALDADE, ADIÇÃO, MULTIPLICAÇÃO POR UM ESCALAR E SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Definição: *Igualdade de Matrizes*

As matrizes A e B são chamadas *iguais* se e somente se:

(i) A e B têm o mesmo número de linhas e o mesmo número de colunas.

(ii) Todos os elementos correspondentes são iguais, isto é, $a_{ij} = b_{ij}$ para todos os i e j.

Definição: *Adição de Matrizes*

Duas matrizes podem ser somadas somente quando elas têm o mesmo número de linhas e o mesmo números de colunas. Neste caso, a *soma* de duas matrizes A e B de ordem $m \times n$ é a matriz C $m \times n$ tal que qualquer elemento de C é a soma dos elementos correspondentes de A e B, isto é, se

$$A = [a_{ij}], \qquad B = [b_{ij}] \qquad \text{e} \qquad C = [c_{ij}]$$

então:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \; (1 \leq i \leq m, \; 1 \leq j \leq n)$$

Como a soma de duas matrizes é formada simplesmente adicionando-se os elementos correspondentes, é claro que as regras válidas para a adição de matrizes reais são exatamente as que são válidas para a adição de números reais.

Propriedades: A *adição* matricial é *associativa* e *comutativa*. Sejam A, B e C matrizes de mesma ordem, então:

(i) $(A + B) + C = A + (B + C)$ (lei associativa)

(ii) $A + B = B + A$ (lei comutativa)

Estes resultados afirmam que a ordem em que as matrizes são somadas não é importante. Salientamos este fato porque, quando considerarmos a multiplicação de matrizes, veremos que a lei comutativa não é mais verdadeira, embora a lei associativa ainda seja válida. A ordem em que as matrizes são multiplicadas é extremamente importante.

Definição: *Multiplicação de uma matriz por um número real*

Se A é uma matriz e α é um número real, então o produto de α pela matriz A é denotado por αA; αA é a matriz obtida multiplicando-se cada elemento de A por α.

Por exemplo: se $A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 6 & 8 & 10 \end{bmatrix}$, então: $\frac{1}{2}A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ e $3A = \begin{bmatrix} 12 & 24 & 36 \\ 18 & 24 & 30 \end{bmatrix}$.

Propriedades: Se α e β são números reais e A e B são matrizes, então:

(i) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta) A$

(ii) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$

(iii) $\alpha (A + B) = \alpha A + \alpha B$

(iv) $1(A) = A$

(v) $(-1) A = -A$

Definição: *Subtração de Matrizes*

Sejam A e B matrizes $m \times n$.

A diferença entre A e B é denotada por $A - B$ e definida por :

$A - B = A + (-B) = [a_{ij}] + [-b_{ij}] = [c_{ij}]$, onde $[c_{ij}] = [a_{ij} - b_{ij}]$, $(1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n)$.

Exemplo:

Seja $\text{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $\text{B} = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

$$\text{A - B} = \begin{bmatrix} 2-4 & 4-5 \\ 3-2 & 1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

1.4 MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Produto de uma matriz linha (1 × n) por uma matriz coluna (n × 1).

Uma ***matriz linha*** pode ser multiplicada por uma ***matriz coluna***, nesta ordem, ***se e somente se*** ambas têm o mesmo número de elementos.

Definição: Se $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}_{1\times n}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$

Então AB é definida como sendo a seguinte matriz 1 × 1:

$$AB = [c_{ij}], \text{ onde } [c_{ij}] = [a_1 b_1 + \quad a_2 b_2 + \quad \cdots \quad + a_n b_n] = \left[\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right]$$

Exemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} = [4(2) + (-1)(1) + 3(-5)] = [-8]$$

Enunciaremos abaixo a regra geral para a multiplicação de duas matrizes.

Definição: *Multiplicação de Matrizes*

Se $A = [a_{ij}]$ é uma matriz $m \times p$ e $B = [b_{ij}]$ é uma matriz $p \times n$, então *o produto de A por B*, denotado por AB, é a matriz $C = [c_{ij}]$ de ordem $m \times n$ definida por:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj} \quad (1 \le i \le m \quad e \quad 1 \le j \le n) \qquad (1.4.1)$$

A igualdade *(1.4.1)* diz que o elemento da *linha i* e *coluna j* da *matriz produto C* é o *produto escalar* da linha i de A, linha $_i$ (A), pela coluna j de B, col $_j$ (B).

$$
\begin{array}{c}
\text{linha}_i\,(A)
\end{array}
\begin{bmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp}
\end{bmatrix}
\begin{array}{c}
\qquad\qquad\qquad \text{col}_j(B) \\
\begin{bmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
= \begin{bmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
\vdots & \vdots & c_{ij} & \vdots \\
c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn}
\end{bmatrix}
$$

$$\text{linha}_i\,(A) \cdot \text{col}_j(B) = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

Note que *o produto* de A por B está definido apenas quando *o número de linhas de B é exatamente igual ao número de colunas de A*, como indicado abaixo.

$$
\begin{array}{ccccc}
A & & B & = & AB \\
m \times p & & p \times n & & m \times n
\end{array}
$$

iguais

tamanho de AB

OBS: O produto AB não é definido se A é uma matriz $m \times p$ e B uma matriz $q \times n$, com $p \neq q$.

Exemplos de Multiplicação de Matrizes:

Seja $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & 6 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ então :

$$AB = \begin{bmatrix} (-2)\cdot 3+1\cdot 2+3\cdot 1 & (-2)\cdot(-2)+1\cdot 4+3\cdot(-3) \\ 4\cdot 3+1\cdot 2+6\cdot 1 & 4\cdot(-2)+1\cdot 4+6\cdot(-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 20 & -22 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 3\cdot(-2)-2\cdot 4 & 3\cdot 1-2\cdot 1 & 3\cdot 3-2\cdot 6 \\ 2\cdot(-2)+4\cdot 4 & 2\cdot 1+4\cdot 1 & 2\cdot 3+4\cdot 6 \\ 1\cdot(-2)-3\cdot 4 & 1\cdot 1-3\cdot 1 & 1\cdot 3-3\cdot 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 & 1 & -3 \\ 12 & 6 & 30 \\ -14 & -2 & -15 \end{bmatrix}$$

Os exemplos acima mostram que *a multiplicação de matrizes não é comutativa*; mesmo que os dois produtos AB e BA estejam definidos eles *não são necessariamente iguais*.

Seguem abaixo algumas propriedades de multiplicação de matrizes:

Propriedades: Sejam A, B e C matrizes com tamanhos(ordens) apropriados(as), então:

(i) A *lei comutativa* não é válida em geral: $AB \neq BA$.

(ii) A *lei distributiva* é verdadeira:

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(A + B)C = AC + BC$$

(iii) A *lei associativa* é verdadeira:

$$A(BC) = (AB)C$$

(iv) A *lei do cancelamento* não é verdadeira; em geral, $AB = O$ não implica necessariamente que $A = O$ ou $B = O$ e $AB = AC$ não acarreta necessariamente que $B = C$.

Exemplo 1 :

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$

Então, as matrizes A e B não são matrizes nulas, mas $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 2 :

Se $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}-2 & 7\\ 5 & -1\end{bmatrix}$.

Então :

$AB = AC = \begin{bmatrix}8 & 5\\ 16 & 10\end{bmatrix}$,

mas $B \neq C$.

Definição: *Produto de uma Matriz por uma Matriz Coluna*

Sejam A uma matriz $m \times n$ e C uma matriz $n \times 1$. Então o produto AC é uma matriz $m \times 1$, dada por:

$$AC=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2}\cdots & a_{mn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ \vdots\\ c_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}c_1+a_{12}c_2+\cdots+a_{1n}c_n\\ a_{21}c_1+a_{22}c_2+\cdots+a_{2n}c_n\\ \vdots\\ a_{m1}c_1+a_{m2}c_2+\cdots+a_{mn}c_n\end{bmatrix}.$$

O lado direito dessa expressão pode ser escrito da seguinte forma:

$$c_1\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}a_{12}\\ a_{22}\\ \vdots\\ a_{m2}\end{bmatrix}+\cdots+c_n\begin{bmatrix}a_{1n}\\ a_{2n}\\ \vdots\\ a_{mn}\end{bmatrix}=c_1col_1(A)+c_2col_2(A)+\cdots+c_ncol_n(A). \qquad (1.4.2)$$

A expressão em *(1.4.2)* é uma combinação linear das colunas de A. Portanto, o produto AC de uma matriz A de ordem $m \times n$ por uma matriz C de ordem $n \times 1$ pode ser escrito como uma combinação linear das colunas de A, e os coeficientes são os elementos correspondentes das linhas da matriz coluna C.

Exemplo:

Sejam $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & -3\\ 4 & 2 & -2\end{bmatrix}$ e $C=\begin{bmatrix}2\\ -3\\ 4\end{bmatrix}$. Então, o produto AC, escrito como uma combinação linear das colunas de A, é:

$$AC = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ -8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

Definição: *Multiplicação de Matrizes por Colunas*

Seja A uma matriz $m \times p$ e B uma matriz $p \times n$. A multiplicação de matrizes pode ser vista de uma outra forma: cada coluna da matriz AB é o produto da matriz A por uma coluna de B:

$$col_j AB = A \cdot col_j B.$$

Ou seja, a coluna j de AB é obtida pela multiplicação de A pela coluna j de B.

Sejam $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2p} \\ \vdots & \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots a_{mp} \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix}$.

È fácil ver que a 1ª coluna de AB é obtida pela multiplicação de A pela 1ª coluna de B e, de forma geral, a coluna j de AB é obtida pela multiplicação de A pela coluna j de B.

Se denotarmos a coluna j de B por b_j, onde $1 \leq j \leq n$, temos:

$$AB = \begin{bmatrix} Ab_1 & \cdots & Ab_n \\ \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}.$$

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 8 \\ 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

$AB = \begin{bmatrix} Ab_1 & Ab_2 \\ \downarrow & \downarrow \end{bmatrix}$, ou seja: $AB = \begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & A \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{bmatrix} \end{bmatrix}$

$$AB = \left[3\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}4\\6\\0\end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix}5\\8\\9\end{bmatrix} \qquad 2\begin{bmatrix}2\\2\\1\end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix}4\\6\\0\end{bmatrix} + 8\begin{bmatrix}5\\8\\9\end{bmatrix} \right]$$

1.5 A TRANSPOSTA DE UMA MATRIZ

Definição: Se A é uma matriz $m \times n$ qualquer, então a *transposta* de A, denotada por A^T, é definida como a *matriz* $n \times m$ que resulta da *permutação das linhas* com as *colunas de* A; ou seja, a primeira coluna de A^T é a primeira linha de A, a segunda coluna de A^T é a segunda linha de A, e assim por diante. Portanto, a transposta de A é obtida trocando-se as linhas de A por suas colunas e vice-versa.

Quando A é uma matriz quadrada os *elementos* da diagonal principal de A^T *são os mesmos* da matriz A, ou seja, a transposição não altera a diagonal principal da matriz.

São válidas as seguintes propriedades:

Propriedade: Sejam A e B matrizes de ordem $m \times n$ e $\alpha \in R$. *Então:*

(i) $(A + B)^T = A^T + B^T$

(ii) $(A^T)^T = A$

(iii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

(iv) $(AB)^T = B^T A^T$

OBS: Nota-se em (iv) que a transposta de um produto é o produto das transpostas, porém em ordem inversa.

Definição: *Matriz Simétrica e Matriz Anti-simétrica*

Uma matriz A $n \times n$ é dita *simétrica* se $A^T = A$, ou seja, A é simétrica se e somente se $a_{ij} = a_{ji}$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$.

Exemplo :

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ e $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}$; $A = A^T$, portanto A é uma matriz simétrica.

Uma matriz A $n \times n$ é dita *anti-simétrica* se $A^T = -A$, ou seja, A é anti-simétrica se e somente se $a_{ji} = -a_{ij}$, para todo $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, n$. Neste caso os elementos da diagonal principal são sempre nulos.

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ e $A^T = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \end{bmatrix}$, como $A^T = -A$, então A é uma matriz anti-simétrica.

Teorema: Se A é uma matriz de ordem n, então A pode ser escrita como *soma de uma matriz simétrica* e *uma matriz anti-simétrica* da seguinte forma:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T)$$

Prova :

a) $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ é simétrica, pois :

$$\left(\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T + \left(A^T\right)^T\right) = \frac{1}{2}\left(A^T + A\right) = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$$

b) $\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$ é anti - simétrica, pois :

$$\left(\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)\right)^T = \frac{1}{2}\left(A^T - \left(A^T\right)^T\right) = \frac{1}{2}\left(A^T - A\right) = -\frac{1}{2}\left(A - A^T\right)$$

Exemplo:

Seja $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}$, então $A^T=\begin{bmatrix}1 & 4\\2 & 3\end{bmatrix}$.

Assim:

$\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 6\\6 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}$, que é uma matriz simétrica.

$\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}$, que é uma matriz anti - simétrica, e

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\3 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}.$$

1.6 OPERAÇÕES ELEMENTARES POR LINHA

As operações elementares sobre as linhas de uma matriz são:

(i) Multiplicar uma linha por uma constante não nula.

(ii) Permutar duas linhas.

(iii) Substituir uma linha por sua soma com um múltiplo de outra linha.

Definição: Uma matriz A $m\times n$ é *equivalente por linhas* a uma matriz B $m\times n$ se B pode ser obtida aplicando-se uma seqüência finita de operações elementares nas linhas de A.

Exemplo:

A matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 3\\2 & 1 & 3 & 2\\1 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ é *equivalente por linhas* a $D=\begin{bmatrix}2 & 4 & 8 & 6\\1 & -1 & 2 & 3\\4 & -1 & 7 & 8\end{bmatrix}$, pois:

Somando-se 2 vezes a terceira linha de A à sua segunda linha, obtemos:

$$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 3\\4 & -1 & 7 & 8\\1 & -1 & 2 & 3\end{bmatrix}$$

Permutando as linhas 2 e 3 da matriz B, obtemos:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

Multiplicando a primeira linha de C por 2 obtemos D.

Propriedade: *(Propriedade referente a Matrizes Equivalentes por Linhas)*

(i) Se A é equivalente por linhas a B, então B é equivalente por linhas a A.

(ii) Se A é equivalente por linhas a B e B é equivalente por linhas a C, então A é equivalente por linhas a C.

1.7 MATRIZ NA FORMA ESCADA E NA FORMA ESCADA REDUZIDA POR LINHAS

Definição: Uma matriz está na *forma escada* se:

(i) o primeiro elemento não-nulo de cada linha é 1;

(ii) se a linha k não consiste apenas de zeros, o número de zeros no início da linha k+1 é maior que o número de zeros no início da linha k;

(iii) se existirem linhas com todos os elementos iguais a zero, elas ficam abaixo de todas as linhas não-nulas.

Sejam:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

As matrizes A_1, A_2 e A_3 satisfazem as três condições necessárias para uma matriz estar na forma escada, logo concluímos que elas estão na forma escada. Já as matrizes A_4 e A_5 não estão na forma escada, pois elas não satisfazem respectivamente a primeira e a segunda condição para uma matriz estar na forma escada.

Definição: Uma *matriz* está na *forma escada reduzida por linhas* se:

(i) a matriz está na forma escada;

(ii) o primeiro elemento não-nulo de cada linha é o único elemento diferente de zero na sua coluna.

Exemplos:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

OBS: Para colocar uma matriz A $m \times n$ na *forma escada* ou na *forma escada reduzida por linhas* utilizamos as operações elementares sobre as linhas da matriz A. Vejamos um exemplo para melhor compreensão:

Exemplo 1:

Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$, coloque a matriz A na forma escada.

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ Some (-3) vezes a primeira linha à segunda linha para obter:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -6 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ Some(-2) vezes a primeira linha à terceira linha para obter:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -7 & -6 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ Multiplique a segunda linha por $\left(-\frac{1}{7}\right)$ para obter:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6/7 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$ Some (1) vez a segunda linha à terceira linha para obter:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6/7 \\ 0 & 0 & -1/7 \end{bmatrix}$$ Multiplique a terceira linha por (-7) para obter:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 6/7 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Esta é a matriz na forma escada.

Continuando com a aplicação de operações elementares obtemos a forma escada reduzida.

1.8 A INVERSA DE UMA MATRIZ

Definição: Uma *matriz* A $n \times n$ é dita *inversível* ou *não-singular* se *existe uma matriz* B tal que:

$$AB = BA = I_n$$

A matriz B é uma inversa multiplicativa de A. Se *não existir* uma tal *matriz* B, dizemos que *A é singular* (*não-inversível*).

Vamos chamar a inversa multiplicativa de uma matriz não-singular A simplesmente de *inversa* de A. Vamos *denotar* a *inversa* de A, se existir,por A^{-1}.

Exemplo:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

$$BA = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como $BA = AB = I_2$, então a matriz B é a inversa de A, logo podemos concluir que A é inversível; denotando a inversa por A^{-1} temos:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

Teorema: Se uma matriz tem uma inversa, essa inversa é única.

Teorema: *(Propriedades da Inversa)*

(i) Se A é uma *matriz inversível*, então A^{-1} *é inversível* e

$$(A^{-1})^{-1} = A;$$

(ii) Se A e B são *matrizes inversíveis*, então AB *é inversível* e

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

lê-se: A inversa do produto é o produto das inversas em ordem contrária.

(iii) Se A é uma *matriz inversível*, então:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

Exemplos:

(ii) Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ e $AB = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$, sabendo que:

$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix}$, $(AB)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -9/2 & 7/2 \end{bmatrix}$.

e

Como $B^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -9/2 & 7/2 \end{bmatrix}$.

Concluímos que $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(iii) Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, fazendo os cálculos temos, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{bmatrix}$.

Assim :

$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$, $(A^{-1})^T = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$

e

$(A^T)^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3/2 \\ 1 & -1/2 \end{bmatrix}$.

Portanto podemos concluir que $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

1.9 MATRIZES ELEMENTARES E SUAS INVERSAS

Definição: *Matrizes Elementares*

Uma matriz obtida a partir da *matriz identidade* I por ***uma*** das operações elementares é chamada de *matriz elementar*.

Existem três tipos de matrizes elementares:

Tipo I:

Uma *matriz elementar* do *Tipo I* é obtida *trocando-se a ordem* de duas linhas de I.

Exemplo:

$E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, esta é uma matriz elementar do Tipo I, pois foi obtida trocando-se as duas primeiras linhas de I.

Seja A uma matriz de ordem 3.

$$E_1 A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$AE_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Multiplicar A à esquerda por E_1 equivale a efetuar uma operação elementar sobre as linhas de A efetuando uma troca das duas primeiras linhas de A.

Multiplicando A à direita por E_1, trocamos as duas primeiras colunas de A.

De forma geral, se multiplicarmos à esquerda de A uma matriz elementar E deste tipo, efetuamos em A a mesma troca de linhas que foi feita em I para obter E.

A *inversa de uma matriz elementar do Tipo I é a própria matriz*.

Vejamos:

Seja $E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$E.E^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Da mesma forma:

$$E^{-1}.E = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Tipo II:

Uma *matriz elementar do Tipo II* é uma matriz obtida *multiplicando-se uma linha de I por uma constante não nula k.*

Exemplo:

$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ é uma matriz elementar do *Tipo II*. Seja A uma matriz de ordem 3.

$$E_2A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\3a_{31}&3a_{32}&3a_{33}\end{bmatrix}$$

$$AE_2=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&3a_{13}\\a_{21}&a_{22}&3a_{23}\\a_{31}&a_{32}&3a_{33}\end{bmatrix}$$

A multiplicação à esquerda por E_2 efetua a operação elementar sobre as linhas que consiste em multiplicar a terceira linha por 3 (a mesma operação elementar efetuada em I para obter E_2), enquanto a multiplicação à direita por E_2 efetua a operação elementar sobre as colunas que consiste em multiplicar a terceira coluna por 3.

Resumindo, ao calcularmos EA com E deste tipo estaremos multiplicando por k a linha de A que corresponde à linha de I que foi multiplicada por k para obter E.

A *inversa de uma matriz elementar do Tipo II* é obtida de I *pela multiplicação da mesma linha por* $\frac{1}{k}$.

Vejamos:

Seja $E=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}$, pela definição acima podemos concluir que $E^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/5\end{bmatrix}$.

Para que E^{-1} seja a inversa multiplicativa de E temos que mostrar o seguinte resultado:

$$E.E^{-1}=E^{-1}.E=I.$$

Ou seja:

$$E.E^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1/5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=I$$

Da mesma forma mostramos que $E^{-1}.E=I$.

Tipo III:

Uma *matriz elementar do Tipo III* é uma matriz obtida de *I multiplicando uma linha por k e adicionando-se à outra linha.*

Exemplo:

$$E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ é uma matriz elementar do *Tipo III.*

Seja A uma matriz de ordem 3.

$$E_3 A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}+3a_{31} & a_{12}+3a_{32} & a_{13}+3a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$AE_3 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 3a_{11}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & 3a_{21}+a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 3a_{31}+a_{33} \end{bmatrix}$$

Multiplicando à esquerda por E_3 somamos 3 vezes a terceira linha à primeira. Multiplicando à direita por E_3 somamos 3 vezes a primeira coluna à terceira.

De forma geral, se E deste tipo é obtida de I pela substituição da linha i (L_i) pela soma da linha i com k vezes a linha j ($L_i + kL_j$), então calcular EA é equivalente a fazer a mesma operação citada acima, com as linhas de A.

A inversa de uma matriz elementar do tipo III é obtida substituindo k por –k.

Vejamos:

Seja $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, observe que E foi obtida de I pela operação elementar: a L_3 foi substituída por $L_3 + 4L_1$.

Pela definição acima podemos concluir que $E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, E^{-1} foi obtida de I pela operação elementar: a L_3 é substituída por L_3 - $4L_1$.

Observem que:

$$E.E^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Da mesma forma $E^{-1}.E = I$.

Em geral, suponha que E é uma matriz elementar $n \times n$. Podemos pensar em E como sendo obtida de I por *uma operação elementar* sobre as *linhas* ou sobre as *colunas*. Se A é uma matriz $n \times r$, multiplicar A por *E à esquerda* tem o *efeito de efetuar a mesma operação elementar sobre as linhas de A*. Se B é uma matriz $m \times \mathbf{n}$, multiplicar B por *E à direita equivale a efetuar a mesma operação elementar sobre as colunas de B*.

1.10 TIPOS ESPECIAIS DE *MATRIZES*

Definição: *Matriz Ortogonal*

Uma matriz real *A é ortogonal* se $AA^T = A^TA = I$. Nota-se que uma matriz ortogonal A é necessariamente quadrada e inversível, com inversa $A^{-1} = A^T$.

Exemplo: Seja $A = \begin{bmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix}$. Então:

$$AA^T = \begin{bmatrix} 1/9 & 8/9 & -4/9 \\ 4/9 & -4/9 & -7/9 \\ 8/9 & 1/9 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/9 & 4/9 & 8/9 \\ 8/9 & -4/9 & 1/9 \\ -4/9 & -7/9 & 4/9 \end{bmatrix} = \frac{1}{81} \begin{bmatrix} 1+64+16 & 4-32+28 & 8+8-16 \\ 4-32+28 & 16+16+49 & 32-4-28 \\ 8+8-16 & 32-4-28 & 64+1+16 \end{bmatrix} =$$

$$=\frac{1}{81}\begin{bmatrix}81 & 0 & 0\\ 0 & 81 & 0\\ 0 & 0 & 81\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

Isto significa que $AA^T=I$ e $A^T=A^{-1}$. Assim, A é ortogonal.

Definição: *Matriz de Permutação*

Uma *matriz de permutação* é uma matriz obtida *permutando-se as linhas (ou colunas) da matriz identidade.*

Exemplo:

$P_1=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$ é uma matriz de permutação, pois :

Dada $I=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$,trocando a linha 1 com a linha 2 da matriz identidade temos:

$\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, e agora trocando a linha 2 com a linha 3 dessa matriz teremos P_1.

Em geral, se P é uma matriz de permutação $n \times n$, B é uma matriz $n \times r$ e A é uma matriz $m \times n$, então a multiplicação PB efetua uma permutação nas linhas de B e a multiplicação AP efetua uma permutação nas colunas de A.

Exemplos:

1) Seja $B=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 2\\ 3 & 3\end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$. Então, $PB=\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 1\\ 2 & 2\end{bmatrix}$.

2) Seja $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ e $P=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$. Portanto, $AP=\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 3 & 1 & 2\end{bmatrix}$.

CAPÍTULO 2

Algumas Aplicações Simples de Matrizes

Este capítulo tem como objetivo mostrar algumas aplicações simples de matrizes. Matrizes são utilizadas em muitas áreas, como Economia, Física, Engenharia, Biologia, entre outras. Porém existem dois problemas que dificultam trabalhar com aplicações de matrizes:

1) para modelar certos problemas é necessário um maior conhecimento matemático;

2) mesmo nos problemas que são fáceis de modelar, suas soluções na maior parte das vezes exige conhecimento de teorias mais sofisticadas sobre matrizes.

2.1 MATRIZES E CRIPTOGRAFIA

Descrevemos abaixo um método bastante simples, para ***codificar*** e ***decodificar*** mensagens, que envolve apenas um par de matrizes de ordem n, A e A^{-1}, cujos elementos devem ser números inteiros.

Primeiramente ilustraremos o método utilizando uma matriz A e a sua inversa A^{-1}.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$.

A matriz A é apropriada, pois seus elementos são números inteiros, assim como os da matriz A^{-1}.

O remetente vai usar a matriz A para *codificar* a mensagem, e o destinatário vai usar a matriz A^{-1} para *decodifica-la*. O objetivo deste método é que a mensagem seja codificada utilizando pares de caracteres, de modo que tabelas de freqüência de letras e outras alternativas não ajudem em nada a um decodificador não-amigável.

Dada uma mensagem para ser codificada, o primeiro passo será convertê-la da forma alfabética para a forma numérica. Para isso usamos a seguinte correspondência entre letras e números:

A ou Ã	B	C ou Ç	D	E	F	G	H	I	J
01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
K	L	M	N	O ou Õ	P	Q	R	S	T
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
U	V	W	X	Y	Z	.	,	#	
21	22	23	24	25	26	27	28	29	

Qualquer outra numeração dos 29 símbolos tipográficos também seria possível, mas o remetente e o destinatário teriam que combiná-la previamente. Para maior clareza usamos o símbolo # para indicar inexistência de letras (espaços entre palavras, etc).

Exemplo 1: Suponha que " PLANO EM AÇÃO" é a mensagem a ser codificada e transmitida. Para convertê-la para a forma numérica, usamos a correspondência entre letras e números exibida acima:

P	L	A	N	O	#	E	M	#	A	Ç	Ã	O
16	12	01	14	15	29	05	13	29	01	03	01	15

Uma vez que a matriz codificadora A é uma matriz 2×2, arrumamos nossa seqüência de números como os elementos de uma matriz com duas linhas:

$$M = \begin{bmatrix} 16 & 12 & 01 & 14 & 15 & 29 & 05 \\ 13 & 29 & 01 & 03 & 01 & 15 & 29 \end{bmatrix}.$$

Como a mensagem tem um número ímpar de elementos, completamos o fim da segunda linha com o número 29 que está associado ao símbolo #.

Para codificação da mensagem, multiplicamos a matriz M à esquerda pela matriz codificadora A:

$$N = AM = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 & 12 & 01 & 14 & 15 & 29 & 05 \\ 13 & 29 & 01 & 03 & 01 & 15 & 29 \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$N = \begin{bmatrix} 61 & 65 & 04 & 45 & 46 & 102 & 44 \\ 45 & 53 & 03 & 31 & 31 & 73 & 39 \end{bmatrix}$$

Os elementos de $N = AM$ constituem a mensagem codificada, e utilizaremos vírgulas entre esses elementos para maior clareza:

61, 65, 04, 45, 46, 102, 44, 45, 53, 03, 31, 31, 73, 39.

Quando esta mensagem codificada chegar ao destinatário este deve utilizar a *matriz decodificadora* A^{-1} para reverter os passos acima, pois

$$A^{-1}N = A^{-1}AM = IM = M. \qquad (2.1.1)$$

Portanto, se o decodificador usar a mensagem codificada para construir uma matriz com duas linhas e depois multiplicar esta matriz à esquerda por A^{-1}, irá obter a matriz M do remetente.

Vejamos:

$$A^{-1}N = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 61 & 65 & 04 & 45 & 46 & 102 & 44 \\ 45 & 53 & 03 & 31 & 31 & 73 & 39 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 16 & 12 & 01 & 14 & 15 & 29 & 05 \\ 13 & 29 & 01 & 03 & 01 & 15 & 29 \end{bmatrix}.$$

Note que o produto é de fato a matriz M do remetente. O passo final de decodificação é:

16	12	01	14	15	29	05	13	29	01	03	01	15	29
P	L	A	N	O	#	E	M	#	A	Ç	Ã	O	#

Exemplo 2: Segue abaixo outro exemplo, agora utilizando uma matriz 3×3.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -9 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Suponhamos que a mensagem a ser transmitida e codificada seja "NEGATIVO, ENTROU AREIA". Primeiro, devemos converter as letras em números usando o mesmo esquema anterior, e então organizamos estes números em uma matriz com *três* linhas, pois as matrizes codificadora e decodificadora são de ordem *3*. Ou seja:

$$M = \begin{bmatrix} 14 & 05 & 07 & 01 & 20 & 09 & 22 & 15 \\ 28 & 29 & 05 & 14 & 20 & 18 & 15 & 21 \\ 29 & 01 & 18 & 05 & 09 & 01 & 29 & 29 \end{bmatrix}.$$

Para codificar a mensagem, multiplicamos M à esquerda por A para obter:

$$N = AM = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 14 & 05 & 07 & 01 & 20 & 09 & 22 & 15 \\ 28 & 29 & 05 & 14 & 20 & 18 & 15 & 21 \\ 29 & 01 & 18 & 05 & 09 & 01 & 29 & 29 \end{bmatrix}$$

$$N = \begin{bmatrix} 128 & 46 & 62 & 27 & 98 & 47 & 139 & 124 \\ 27 & 38 & 01 & 11 & 51 & 35 & 30 & 22 \\ 157 & 47 & 80 & 32 & 107 & 48 & 168 & 153 \end{bmatrix}$$

Portanto a mensagem codificada é:

128, 46, 62, 27, 96, 47, 139, 124, 27, 38, 01, 11, 51, 35, 30, 22, 101, 47, 80, 32, 107, 48, 168, 153.

Quando esta mensagem chegar ao decodificador o mesmo deve construir uma matriz com três linhas e depois multiplicar esta matriz à esquerda por A^{-1}, obtendo assim a matriz M do remetente. Ou seja,

$$A^{-1}N = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -3 \\ -9 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 128 & 46 & 62 & 27 & 98 & 47 & 139 & 124 \\ 27 & 38 & 01 & 11 & 51 & 35 & 30 & 22 \\ 157 & 47 & 80 & 32 & 107 & 48 & 168 & 153 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 05 & 07 & 01 & 20 & 09 & 22 & 15 \\ 28 & 29 & 05 & 14 & 20 & 18 & 15 & 21 \\ 29 & 01 & 18 & 05 & 09 & 01 & 29 & 29 \end{bmatrix} = M$$

Portanto a mensagem original é:

14	05	07	01	20	09	22	15	28	29	05	14	20	18	15	21	29	01	18	05	09	01	29	29
N	E	G	A	T	I	V	O	,	#	E	N	T	R	O	U	#	A	R	E	I	A	#	#

Em resumo, o remetente multiplica a mensagem original (na forma matricial numérica M) por A para obter a mensagem codificada. O destinatário multiplica a mensagem codificada (na forma matricial N) por A^{-1} para reconstruir a mensagem original. Como A e A^{-1} são matrizes inversas, a multiplicação por A^{-1} feita pelo destinatário desfaz o efeito da multiplicação por A feita pelo remetente.

O processo pode ser efetivado rápido e automaticamente por computador (aumentando, portanto, a sua segurança) mas, se for preciso, pode ser feito com lápis e papel apenas (realçando, portanto, sua utilidade). Tudo o que precisa ser secreto são as matrizes codificadora e decodificadora.

2.2 MATRIZES E MODELOS POPULACIONAIS

A Álgebra Matricial é um instrumento importante para a análise do crescimento populacional. Uma dada população de indivíduos pode ser subdividida em grupos etários ou raças diferentes, e assim buscaremos determinar como a população se modifica ano a ano.

O caso mais simples é o da população homogênea, com início no tempo $t = 0$, com P_0 indivíduos crescendo ou decrescendo a uma taxa anual constante. Ou seja, existe um número a tal que depois de 1 ano a população será $P_1 = aP_0$, depois de 2 anos será $P_2 = aP_1 = a^2 P_0$, e assim por diante. A população de um ano simplesmente é multiplicada por a para se definir a população do ano seguinte. Após n anos, população inicial P_0 foi multiplicada pelo fator a n vezes, e portanto, a população P_n será dada por

$$P_n = a^n P_0 .$$

No caso de uma população subdividida em grupos, a população P_n é substituída por um vetor $\mathbf{p}_n$ cujos elementos diferentes especificam os números de indivíduos nos diferentes grupos. O "número de transição" a é então substituído pela *matriz de transição* A tal que o vetor população de cada ano seja multiplicado pela matriz A para se obter o vetor população do ano seguinte.

Vejamos alguns exemplos:

Exemplo 1: A população total constante de 1 milhão de pessoas é dividida entre uma cidade e seus subúrbios. Seja C_n a população da cidade e S_n a população suburbana após n anos. A distribuição da população entre cidade e subúrbios depois de n anos é descrita pelo *vetor população*:

$$\mathbf{p_n} = \begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix}.$$

O nosso objetivo é analisar a modificação das populações urbanas e suburbanas a cada ano que passa.

Suponha que a cada ano 15% da população da cidade se mudem para os subúrbios, e que 10% da população dos subúrbios se mudem para a cidade. Então, a população da cidade no próximo ano, C_{n+1}, será igual a 85% da população da cidade deste ano C_n, mais 10% da população suburbana S_n deste ano, de modo que:

$$C_{n+1} = (0{,}85)C_n + (0{,}10)\, S_n \quad \text{para qualquer } n \geq 0. \qquad (2.2.1)$$

E a população dos subúrbios no próximo ano, S_{n+1}, será igual a 15% da população C_n deste ano, mais 90% da população suburbana S_n deste ano, de modo que:

$$S_{n+1} = (0{,}15)C_n + (0{,}90)\, S_n \quad \text{para qualquer } n \geq 0. \qquad (2.2.2)$$

Ao escrevermos as Equações *(2.2.1)* e *(2.2.2)* em forma matricial, obtemos:

$$\begin{bmatrix} C_{n+1} \\ S_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix}. \qquad (2.2.3)$$

A *matriz de transição* para este exemplo é

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}90 \end{bmatrix},$$

e a Equação *(2.2.3)* fica

$$\mathbf{p}_{n+1} = A\ \mathbf{p}_n\ .$$

Segue-se que

$$\mathbf{p}_1 = A\ \mathbf{p}_0\ , \qquad \mathbf{p}_2 = A\ \mathbf{p}_1 = A^2\ \mathbf{p}_0\ , \qquad \mathbf{p}_3 = A^2\ \mathbf{p}_0 = A^3\ \mathbf{p}_0\ ,$$

e geralmente

$$\mathbf{p}_n = A^n\ \mathbf{p}_0, \qquad \forall\ n \geq 1. \tag{2.2.4}$$

Agora suponha que as populações iniciais urbana e suburbana sejam (em milhares) $C_o = 700$ *e* $S_0 = 300$. Nosso objetivo será determinar a distribuição "a longo prazo" das populações da cidade e dos subúrbios resultante das taxas de migração dadas. Para os primeiros dois anos encontraremos que:

$$\begin{bmatrix} C_1 \\ S_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 700 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 625 \\ 375 \end{bmatrix}$$

e

$$\begin{bmatrix} C_2 \\ S_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 625 \\ 375 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 568{,}75 \\ 431{,}25 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a população da cidade está decrescendo e a dos subúrbios está aumentando durante este intervalo de tempo.

Para investigar a situação a longo prazo, vemos a partir da Equação *(2.2.4)* que precisamos determinar como a ***matriz potência*** A^n se modifica à medida que n cresce. Uma maneira de explorar esta questão é calcular as potências uma a uma:

$$\begin{aligned} A^2 &= AA, & A^{20} &= A^{10}A^{10}, \\ A^4 &= A^2A^2, & A^{30} &= A^{10}A^{20}, \\ A^8 &= A^4A^4, & A^{40} &= A^{10}A^{30}, \\ A^{10} &= A^2A^8, & A^{50} &= A^{10}A^{40}. \end{aligned} \tag{2.2.5}$$

Assim, com oito multiplicações de matrizes 2 × 2, podemos verificar nossas populações urbana e suburbana por 50 anos, a intervalos de 10 anos. Ao efetuarmos as multiplicações de matrizes em *(2.2.5)* mantendo três casas decimais nos resultados, obtemos

$$A^{10} = \begin{bmatrix} 0{,}434 & 0{,}377 \\ 0{,}566 & 0{,}623 \end{bmatrix}, \qquad A^{20} = \begin{bmatrix} 0{,}402 & 0{,}399 \\ 0{,}598 & 0{,}601 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{30} = A^{40} = A^{50} = \begin{bmatrix} 0{,}400 & 0{,}400 \\ 0{,}600 & 0{,}600 \end{bmatrix}.$$

Acontece um fato extraordinário: as potências da matriz A se "estabilizam" na matriz *constante*

$$A^{n} = \begin{bmatrix} 0{,}400 & 0{,}400 \\ 0{,}600 & 0{,}600 \end{bmatrix} \tag{2.2.6}$$

quando n é grande. Para verificar que *(2.2.6)* é válido par $n \geq 30$ (e não somente em intervalos de 10 anos), precisamos apenas da observação de que a matriz dada em *(2.2.6)* não se altera quando multiplicada por A. Por exemplo,

$$A^{51} = AA^{50} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}10 \\ 0{,}15 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}400 & 0{,}400 \\ 0{,}600 & 0{,}600 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}400 & 0{,}400 \\ 0{,}600 & 0{,}600 \end{bmatrix}.$$

Por fim, quando substituirmos *(2.2.6)* em *(2.2.4)*, encontraremos:

$$\begin{bmatrix} C_n \\ S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}400 & 0{,}400 \\ 0{,}600 & 0{,}600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 700 \\ 300 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 600 \end{bmatrix} \quad \forall\, n \geq 30.$$

Portanto, em trinta anos as populações urbana e suburbana atingiram uma situação estacionária, com 40% da população na cidade e 60% nos subúrbios.

Exemplo 2: Nossa população total agora é formada de raposas, [R], e coelhos, [C], numa floresta. Inicialmente há $R_0 = 100$ raposas e $C_0 = 100$ coelhos. Depois de n meses há R_n raposas e C_n coelhos, de modo que o vetor população é

$$\boldsymbol{p}_n = \begin{bmatrix} R_n \\ C_n \end{bmatrix}.$$

Os coelhos comem plantas na floresta e as raposas comem coelhos. Assumimos que a transição de um mês para o mês seguinte seja descrita pelas equações

$$R_{n+1} = (0,4)R_n + (0,3)C_n \qquad (2.2.7)$$

$$C_{n+1} = (-0,4)R_n + (1,2)C_n \qquad (2.2.8)$$

As equações *(2.2.7)* e *(2.2.8)* constituem o modelo matemático para a população coelho-raposa. É difícil obter-se um modelo deste tipo (principalmente se for um modelo real), mas não é difícil de se interpretar. O termo $(0,4)R_n$ em *(2.2.7)* indica que se não existissem coelhos, apenas 40% das raposas sobreviveriam a cada mês; o termo $(0,3)C_n$ representa o crescimento da população de raposas decorrente da oferta de coelhos como suprimento alimentar. O termo $(1,2)C_n$ em *(2.2.8)* indica que, na ausência de qualquer raposa, a população de coelhos cresceria 20% a cada mês; o termo $(-0,4)R_n$ representa o declínio na população de coelhos devido à ação predatória das raposas.

Quando escrevemos as equações *(2.2.7)* e *(2.2.8)* na forma matricial

$$\begin{bmatrix} R_{n+1} \\ C_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,4 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_n \\ C_n \end{bmatrix}, \qquad (2.2.9)$$

vemos que a matriz de transição é

$$A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,4 & 1,2 \end{bmatrix}.$$

Para investigar a situação a longo prazo, calculamos as potências da matriz A como nas equações *(2.2.5)* do primeiro exemplo. Mantendo a precisão de três casas decimais, obtemos:

$$A^{10} = \begin{bmatrix} -0,491 & 0,745 \\ -0,994 & 1,497 \end{bmatrix}$$

e

$$A^{20} = A^{30} = \begin{bmatrix} -0,500 & 0,750 \\ -1,000 & 1,500 \end{bmatrix}.$$

Segue-se que quando $n \geq 20$, as populações de raposas e coelhos são dadas por:

$$\begin{bmatrix} R_n \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,500 & 0,750 \\ -1,000 & 1,500 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 \\ 50 \end{bmatrix}.$$

Portanto, em 20 meses as populações de raposas e coelhos atingem um estado estacionário de 25 raposas e 50 coelhos.

2.3 CADEIAS DE MARKOV

Descrevemos aqui um modelo geral de um sistema que, em cada instante, está em apenas ***um*** entre um número finito de estados. Em seguida aplicamos o modelo à vários problemas concretos.

Suponha que um sistema físico ou matemático está sofrendo mudanças tais que a cada momento ele pode ocupar ***um*** dentre um número finitos de estados. Por exemplo, o tempo em determinada região pode estar chuvoso ou seco; uma pessoa pode ser fumante ou não-fumante; compramos um carro da marca Fiat, Ford ou de outra marca. Ao longo do tempo, o sistema pode mudar de um estado para outro; vamos supor que o estado do sistema é observado em períodos fixos de tempo (uma vez por dia, a cada hora, a cada semana, a cada mês e assim por diante). Em muitas aplicações conhecemos o estado atual do sistema e queremos prever o estado no próximo período de observação ou em algum período futuro. Podemos prever, muitas vezes, a probabilidade de o sistema estar em um determinado estado em um período futuro de observação a partir de sua história pregressa.

Definição: Uma ***cadeia de Markov*** ou ***processo de Markov*** é um processo no qual a probabilidade de um sistema estar em determinado estado em um dado período de observação depende apenas do estado no período de observação imediatamente anterior.

Denotemos por *1,2,...,k os k estados possíveis* de uma cadeia de Markov. *A* probabilidade de que estando o sistema no estado j em um determinado período de observação então ele estará no estado i no próximo período de observação é denotada por p_{ij} e é chamada de ***probabilidade de transição do estado j para o estado i.***

Como p_{ij} é uma probabilidade, temos que ter

$$0 \leq p_{ij} \leq 1 \qquad (1 \leq i,j \leq k)$$

Além disso, se o sistema está no estado j em um determinado período de observação, então ele tem que estar em um dos k estados possíveis (inclusive pode permanecer no estado j) no próximo período de observação. Logo:

$$p_{1j} + p_{2j} + p_{3j} + \ldots + p_{kj} = 1. \qquad (2.3.1)$$

É conveniente escrever as probabilidades de transição em uma matriz $n \times n$ $P = [p_{ij}]$, chamada de *matriz de transição* da cadeia de Markov. A matriz de transição também recebe outros nomes: *matriz de Markov*, *matriz estocástica* ou *matriz de probabilidade*. Os elementos da matriz P são não-negativos e a soma de suas colunas é sempre igual 1.

Por exemplo, em uma cadeia de Markov de três estados, a matriz de transição tem o seguinte formato:

$$\begin{array}{c} \text{Estado Precedente} \\ \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \text{ Novo Estado} \end{array}$$

Nesta matriz, p_{32} é a probabilidade do sistema mudar do estado 2 para o estado 3, p_{11} é a probabilidade do sistema continuar no estado 1 após ter sido observado no estado 1, e assim sucessivamente.

Exemplo 1: Um novo sistema de transporte coletivo vai começar a funcionar em Florianópolis no próximo ano. As autoridades deste município fizeram estudos que previram o percentual de pessoas que mudarão para esse novo sistema de coletivo (C) e das que continuarão a dirigir seus automóveis (A); foi obtida a seguinte matriz de transição:

$$\begin{array}{c} \text{Esse ano} \\ \begin{array}{cc} \text{C} & \text{A} \end{array} \end{array}$$
$$P = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}3 & 0{,}2 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \text{C} \\ \text{A} \end{array} \text{ Próximo ano}$$

Nesta matriz, $p_{12} = 0{,}8$ é a probabilidade que as pessoas mudarão de seus sistema de transporte atual (automóveis) para o novo sistema de transporte, $p_{22} = 0{,}2$ é a probabilidade que as pessoas vão continuar utilizando automóveis imediatamente depois de ter sido observado que elas já utilizavam automóveis, e assim por diante.

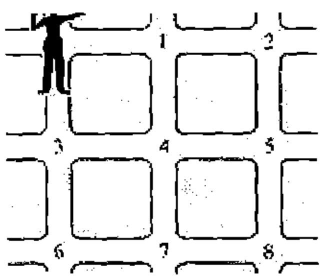
Exemplo 2: Suponha que o tempo em uma determinada cidade é chuvoso ou seco. Como resultado do grande número de registros existentes, determinou-se que a probabilidade de se ter um dia chuvoso logo após um dia seco é de 1/3, e a probabilidade de se ter um dia seco logo após um dia chuvoso é de 1/2. Se representarmos por S o estado de um dia seco e por C o de um dia chuvoso, então a matriz de transição dessa cadeia de Markov é:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \mathrm{S} & C \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{c} S \\ C \end{array} \end{array} \qquad \text{ou} \qquad P = \begin{bmatrix} 0{,}67 & 0{,}50 \\ 0{,}33 & 0{,}50 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3: Uma organização que faz pesquisa de mercado está analizando o comportamento de um grande grupo de compradores de café que compram um pacote por semana. Descobriu-se que 50 % dos que utilizam atualmente a marca A vão comprar novamente a marca A na próxima semana, enquanto 25% vão mudar para a marca B e 25% vão mudar para outra marca. Entre os que usam atualmente a marca B, 30% vão comprar a marca B na próxima semana, enquanto que 60% vão mudar para a marca A e 10% vão mudar para outra marca. Entre os que usam atualmente outras marcas, 30% vão continuar com essas marcas na próxima semana, 40% vão mudar para a marca A e 30% vão mudar para a marca B. Os estados A,B e O (outras) correspondem às marcas A,B e outras, respectivamente. Então, a matriz de transição dessa cadeia de Markov é:

$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \mathrm{A} & \mathrm{B} & \mathrm{O} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}30 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \mathrm{A} \\ \mathrm{B} \\ \mathrm{O} \end{array} \end{array}$$

Exemplo 4: Um guarda de transito é designado para controlar o tráfego nos oito cruzamentos indicados na figura abaixo.



Ele é instruído a permanecer em cada cruzamento por uma hora e, em seguida, ou permanecer no mesmo cruzamento ou seguir para um cruzamento adjacente. Para evitar que ele estabeleça um padrão, ele deve escolher o novo cruzamento de maneira aleatória, com qualquer escolha igualmente provável. Por exemplo, se ele está no cruzamento 5, seu próximo cruzamento pode ser 2,4 ,5 ou 8, cada um com probabilidade $\frac{1}{4}$. Cada dia ele começa no cruzamento em que parou no dia anterior. A matriz de transição desta cadeia de Markov é

Cruzamento Velho

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \quad \text{Cruzamento Novo}$$

Exemplo 5: Três companhias X,Y e Z introduzem simultaneamente um novo computador pessoal no mercado. No início das vendas cada uma delas detém $\frac{1}{3}$ do mercado. A cada mês a companhia X perde 5% de seus clientes para a companhia Y, 10% de seus clientes para a companhia Z, retendo os outros 85%. A companhia Y retém 75% de seus clientes a cada mês, mas perde 15% para a companhia X e 10% para a companhia Z. A companhia Z mantém 90% de seus cliente mas perde 5% para cada uma das duas outras companhias. Então, a matriz de transição dessa cadeia de Markov é:

$$\begin{array}{c} \text{Esse mês} \\ \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ P = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{array}{c} X \\ Y. \\ Z \end{array} \quad \text{Próximo mês} \end{array}$$

Convém ressaltar novamente que as matrizes de transição das cadeias de Markov têm a propriedade que suas entradas em qualquer coluna somam 1.

Em geral, não pode ser determinado com certeza o estado de um sistema em uma cadeia de Markov numa observação arbitrária. O melhor que podemos fazer é especificar probabilidades para cada um dos estados possíveis. Por exemplo, podemos descrever o estado possível do sistema em uma certa observação em uma cadeia de Markov com três estados, por um vetor coluna

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

no qual x_1 é a probabilidade do sistema estar no estado 1, x_2 é a probabilidade do sistema estar no estado 2 e x_3 é a probabilidade dele estar no estado 3. Isso será melhor formalizado a seguir.

Definição: O *vetor de estado* de uma observação de uma cadeia de Markov com k estados é um vetor coluna $\mathbf{x}$ cujo i-ésimo componente x_i é a probabilidade do sistema estar, naquela observação, no i-ésimo estado.

Suponhamos, que seja conhecido (dado) o vetor de estado $\mathbf{x}^{(0)}$ de uma cadeia de Markov em alguma observação inicial. A próxima definição vai nos permitir determinar os vetores-estados

$$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}, \ldots$$

nas observações subseqüentes.

Definição: Se P é a matriz de transição de uma cadeia de Markov e $\mathbf{x}^{(n)}$ é o vetor-estado da n-ésima observação, então:

$$\mathbf{x}^{(n+1)} = P\mathbf{x}^{(n)}.$$

Desta definição segue que:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x}^{(1)} &= P\boldsymbol{x}^{(0)} \\
\boldsymbol{x}^{(2)} &= P\boldsymbol{x}^{(1)} = P^2\boldsymbol{x}^{(0)} \\
\boldsymbol{x}^{(3)} &= P\boldsymbol{x}^{(2)} = P^3\boldsymbol{x}^{(0)} \\
&\vdots \\
\boldsymbol{x}^{(n)} &= P\boldsymbol{x}^{(n-1)} = P^n\boldsymbol{x}^{(0)}.
\end{aligned}$$

Desta maneira, o vetor-estado inicial $\mathbf{x}^{(0)}$ e a matriz de transição P determinam $\mathbf{x}^{(n)}$ para $n = 1,2, \ldots$.

Definição: O vetor $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ é chamado de *vetor de probabilidade* se

$x_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ e $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1$.

Exemplo 6: Considere o exemplo 2 novamente. Supondo agora que ao iniciar nossa observações (dia 0), o dia está seco, de modo que o vetor-estado inicial é

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Então, de acordo com a definição acima, o vetor de estado no dia 1 (o dia seguinte de nossas observações) é

$$\mathbf{x}^{(1)} = P\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}67 & 0{,}5 \\ 0{,}33 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}67 \\ 0{,}33 \end{bmatrix}.$$

Logo, a probabilidade de não chover no dia 1 é de 67% e a probabilidade de chover é 33%.

Analogamente, considerando três casas decimais, temos que:

$$x^{(2)} = Px^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}67 & 0{,}5 \\ 0{,}33 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}67 \\ 0{,}33 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}614 \\ 0{,}386 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = Px^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}67 & 0{,}5 \\ 0{,}33 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}614 \\ 0{,}386 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}604 \\ 0{,}394 \end{bmatrix}$$

$$x^{(4)} = Px^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}67 & 0{,}5 \\ 0{,}33 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}604 \\ 0{,}394 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}603 \\ 0{,}397 \end{bmatrix}$$

$$x^{(5)} = Px^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}67 & 0{,}5 \\ 0{,}33 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}603 \\ 0{,}397 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}603 \\ 0{,}397 \end{bmatrix}$$

$$x^{(6)} = Px^{(5)} = \begin{bmatrix} 0{,}67 & 0{,}5 \\ 0{,}33 & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0{,}603 \\ 0{,}397 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}603 \\ 0{,}397 \end{bmatrix}.$$

A partir do quarto dia, o vetor de estado do sistema é sempre o mesmo,

$$\begin{bmatrix} 0{,}603 \\ 0{,}397 \end{bmatrix}.$$

Isso significa que, a partir do quarto dia, fica seco aproximadamente 60 % do tempo e chove aproximadamente 40 % do tempo.

Exemplo 7: Considere novamente o exemplo 3. Suponha que, no início da pesquisa, verificamos que a marca A detém 20% do mercado, B detém 20% do mercado e as demais marcas ficam com 60% do mercado. Logo, o vetor de estado inicial é:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

O vetor de estado depois da primeira semana é:

$$\mathbf{x}^{(1)} = P\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}2 \\ 0{,}2 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}4600 \\ 0{,}2900 \\ 0{,}2500 \end{bmatrix}.$$

Analogamente,

$$\mathbf{x}^{(2)} = P\mathbf{x}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}4600 \\ 0{,}2900 \\ 0{,}2500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5040 \\ 0{,}2770 \\ 0{,}2190 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(3)} = P\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5040 \\ 0{,}2770 \\ 0{,}2190 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5058 \\ 0{,}2748 \\ 0{,}2194 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(4)} = P\mathbf{x}^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5058 \\ 0{,}2748 \\ 0{,}2194 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5055 \\ 0{,}2747 \\ 0{,}2198 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x}^{(5)} = P\mathbf{x}^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}5055 \\ 0{,}2747 \\ 0{,}2198 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5055 \\ 0{,}2747 \\ 0{,}2198 \end{bmatrix}.$$

Portanto, à medida que o tempo passa, o vetor de estado se aproxima do vetor fixo:

$$\begin{bmatrix} 0{,}5055 \\ 0{,}2747 \\ 0{,}2198 \end{bmatrix}.$$

Isso significa que depois de bastante tempo a marca A vai ter aproximadamente 51% do mercado, a marca B aproximadamente 27% e as outras marcas ficarão com aproximadamente 22% do mercado.

Exemplo 8: Considere o exemplo 5 novamente. Sabemos que neste exemplo o vetor de estado inicial é:

$$\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

O vetor de estado depois do primeiro mês é:

$$\mathbf{x}^{(1)} = P\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}283 \\ 0{,}367 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, considerando quatro casas decimais, temos:

$$x^{(2)} = Px^{(1)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}35 \\ 0{,}283 \\ 0{,}367 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3583 \\ 0{,}2481 \\ 0{,}3936 \end{bmatrix}$$

$$x^{(3)} = Px^{(2)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3583 \\ 0{,}2481 \\ 0{,}3936 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3614 \\ 0{,}2237 \\ 0{,}4149 \end{bmatrix}$$

$$x^{(4)} = Px^{(3)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3614 \\ 0{,}2237 \\ 0{,}4149 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3615 \\ 0{,}2066 \\ 0{,}4319 \end{bmatrix}$$

$$x^{(5)} = Px^{(4)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3615 \\ 0{,}2066 \\ 0{,}4319. \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3599 \\ 0{,}1946 \\ 0{,}4455 \end{bmatrix}$$

$$x^{(6)} = Px^{(5)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3599 \\ 0{,}1946 \\ 0{,}4455 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3574 \\ 0{,}1862 \\ 0{,}4564 \end{bmatrix}$$

$$x^{(7)} = Px^{(6)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3574 \\ 0{,}1862 \\ 0{,}4564 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3545 \\ 0{,}1804 \\ 0{,}4651 \end{bmatrix}$$

$$x^{(8)} = Px^{(7)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3545 \\ 0{,}1804 \\ 0{,}4651 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3516 \\ 0{,}1763 \\ 0{,}4721 \end{bmatrix}$$

$$x^{(9)} = Px^{(8)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3516 \\ 0{,}1763 \\ 0{,}4721 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3489 \\ 0{,}1734 \\ 0{,}4777 \end{bmatrix}$$

$$x^{(10)} = Px^{(9)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3489 \\ 0{,}1734 \\ 0{,}4777 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3464 \\ 0{,}1714 \\ 0{,}4822 \end{bmatrix}$$

$$x^{(11)} = Px^{(10)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3464 \\ 0{,}1714 \\ 0{,}4822 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3443 \\ 0{,}1699 \\ 0{,}4858 \end{bmatrix}$$

$$x^{(12)} = Px^{(11)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3443 \\ 0{,}1699 \\ 0{,}4858 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3424 \\ 0{,}1689 \\ 0{,}4887 \end{bmatrix}$$

$$x^{(13)} = Px^{(12)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3424 \\ 0{,}1689 \\ 0{,}4887 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3408 \\ 0{,}1682 \\ 0{,}4910 \end{bmatrix}$$

$$x^{(14)} = Px^{(13)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3408 \\ 0{,}1682 \\ 0{,}4910 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3395 \\ 0{,}1677 \\ 0{,}4928 \end{bmatrix}$$

$$x^{(15)} = Px^{(14)} = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0{,}3395 \\ 0{,}1677 \\ 0{,}4928 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}3383 \\ 0{,}1674 \\ 0{,}4943 \end{bmatrix}$$

$$x^{(16)} = Px^{(15)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3383 \\ 0,1674 \\ 0,4943 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3366 \\ 0,1671 \\ 0,4963 \end{bmatrix}$$

$$x^{(17)} = Px^{(16)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3366 \\ 0,1671 \\ 0,4963 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3360 \\ 0,1670 \\ 0,4970 \end{bmatrix}$$

$$x^{(18)} = Px^{(17)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3360 \\ 0,1670 \\ 0,4970 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3355 \\ 0,1669 \\ 0,4976 \end{bmatrix}$$

$$x^{(19)} = Px^{(18)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3355 \\ 0,1669 \\ 0,4976 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3351 \\ 0,1668 \\ 0,4981 \end{bmatrix}$$

$$x^{(20)} = Px^{(19)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3351 \\ 0,1668 \\ 0,4981 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3348 \\ 0,1667 \\ 0,4985 \end{bmatrix}$$

$$x^{(21)} = Px^{(20)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3348 \\ 0,1667 \\ 0,4985 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3345 \\ 0,1667 \\ 0,4988 \end{bmatrix}$$

$$x^{(22)} = Px^{(21)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3345 \\ 0,1667 \\ 0,4988 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3343 \\ 0,1667 \\ 0,4990 \end{bmatrix}$$

$$x^{(23)} = Px^{(22)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3343 \\ 0,1667 \\ 0,4990 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3341 \\ 0,1667 \\ 0,4992 \end{bmatrix}$$

$$x^{(24)} = Px^{(23)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3341 \\ 0,1667 \\ 0,4992 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3339 \\ 0,1667 \\ 0,4994 \end{bmatrix}$$

$$x^{(25)} = Px^{(24)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3339 \\ 0,1667 \\ 0,4994 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3338 \\ 0,1667 \\ 0,4995 \end{bmatrix}$$

$$x^{(26)} = Px^{(25)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3338 \\ 0,1667 \\ 0,4995 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3337 \\ 0,1667 \\ 0,4996 \end{bmatrix}$$

$$x^{(27)} = Px^{(26)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3337 \\ 0,1667 \\ 0,4996 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3336 \\ 0,1667 \\ 0,4997 \end{bmatrix}$$

$$x^{(28)} = Px^{(27)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3336 \\ 0,1667 \\ 0,4997 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3335 \\ 0,1667 \\ 0,4998 \end{bmatrix}$$

$$x^{(29)} = Px^{(28)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3335 \\ 0,1667 \\ 0,4998 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3334 \\ 0,1667 \\ 0,4999 \end{bmatrix}$$

$$x^{(30)} = Px^{(29)} = \begin{bmatrix} 0,85 & 0,15 & 0,05 \\ 0,05 & 0,75 & 0,05 \\ 0,10 & 0,10 & 0,90 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,3334 \\ 0,1667 \\ 0,4999 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3334 \\ 0,1667 \\ 0,4999 \end{bmatrix}$$

Portanto, à medida que o tempo passa, o vetor de estado se aproxima do vetor fixo:

$$\begin{bmatrix} 0,3334 \\ 0,1667 \\ 0,4999 \end{bmatrix}.$$

Isso significa que após 30 meses, a companhia X , Y e Z terão, respectivamente, aproximadamente 33%, 16 % e 50 % do mercado.

Nos nossos exemplos vimos que os vetores-estado convergem a um vetor fixo à medida que o número de observações cresce. Nesse caso dizemos que o processo de Markov atingiu o equilíbrio. O vetor fixo é chamado de *vetor de estado estacionário*.

Os processos de Markov em geral são usados para determinar o comportamento de um sistema depois de um longo período de tempo. Portanto, determinar se um processo de Markov atinge ou não o equilíbrio é de importância primordial. Mas será que os vetores-estado sempre irão convergir para um vetor fixo em uma cadeia de Markov? Um exemplo bem simples mostra que isto nem sempre ocorre.

Exemplo 9: Seja P a matriz de transição e $\mathbf{x}^{(0)}$ o vetor de estado inicial.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

Assim,

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P^3 = PP^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como $P^2 = I$ e $P^3 = P$, temos:

$$x^{(0)} = x^{(2)} = x^{(4)} = \ldots = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$$

e

$$x^{(1)} = x^{(3)} = x^{(5)} = \ldots = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

Em geral: $P^{2k} = I$ e $P^{2k+1} = P$, onde $k \in \mathbb{N}$.

Este sistema oscila indefinidamente entre os dois vetores-estado $\begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$, e portanto não converge a nenhum vetor fixo.

No entanto, se exigirmos que a matriz de transição de um processo de Markov satisfaça uma certa condição, mostraremos que o sistema se aproxima de um vetor fixo atingindo, portanto, o equilíbrio. Esta condição é descrita na definição abaixo.

Definição: Uma matriz de transição P é ***regular*** se todas as entradas de alguma potência de P são positivas.

Uma cadeia de Markov que é governada por uma matriz de transição regular é chamada *cadeia de Markov regular*. As cadeias de Markov dos exemplos 1 à 3 e do exemplo 5 são regulares, já que todas as entradas da própria matriz de transição são positivas. Poderíamos ter a falsa impressão de que a cadeia de Markov do exemplo 4 não é regular, mas calculando suas potências notamos que P^4 têm todas as entradas positivas. Portanto pela definição acima podemos concluir que a matriz de transição inicial é também uma matriz regular.

Veremos que qualquer cadeia de Markov regular possui um vetor-estado fixo $\boldsymbol{u}$ tal que, para qualquer escolha $x^{(0)}$, o vetor $P^n x^{(0)}$ converge a $\boldsymbol{u}$ quando n aumenta. Este resultado é da maior importância na teoria de cadeias de Markov e é baseado no próximo teorema.

Antes de enunciarmos esse teorema veremos algumas definições necessárias.

Definição: Considere uma seqüência infinita de matrizes de ordem r × s, $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots$, onde

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \cdots & a_{1s}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}^{(1)} & a_{r2}^{(1)} & \cdots & a_{rs}^{(1)} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \cdots & a_{1s}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}^{(2)} & a_{r2}^{(2)} & \cdots & a_{rs}^{(2)} \end{bmatrix}, \ldots, A_n = \begin{bmatrix} a_{11}^{(n)} & a_{12}^{(n)} & \cdots & a_{1s}^{(n)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{r1}^{(n)} & a_{r2}^{(n)} & \cdots & a_{rs}^{(n)} \end{bmatrix}, \ldots$$

com todos os $a_{ij}^{(k)}$ números reais. Representamos tal seqüência por $\{A_n\}n \in \mathrm{N}$.

Dizemos que a seqüência $\{A_n\}n \in \mathrm{N}$ de matrizes converge para a matriz $A=\{a_{ij}\}$ se os elementos das matrizes A_n se aproximam dos elementos correspondentes da matriz A, isto é,

$$\lim_{n \to \infty} a_{ij}^{(n)} = a_{ij} \quad \text{para} \begin{cases} i = 1, 2, \ldots, r \\ j = 1, 2, \ldots, s \end{cases}.$$

Neste caso, usaremos a notação

$$\lim_{n \to \infty} A_n = A \quad \text{ou} \quad A_n \to A.$$

Exemplo: Seja a seqüência $\{A_n\}n \in \mathrm{N}$ onde $A_n = \begin{bmatrix} \frac{1}{n} & 1+\frac{5}{n^2} \\ 3 & \frac{3n+1}{2n} \end{bmatrix}$, então:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{9}{4} \\ 3 & \frac{7}{4} \end{bmatrix}, \ldots, \text{ e } \lim_{n \to \infty} A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Definição: Seja A uma matriz $n \times n$. Um escalar λ é um autovalor de A se existe um vetor não-nulo $\mathbf{x}$ tal que $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$. O vetor $\mathbf{x}$ é um autovetor associado a λ.

Exemplo:

Sejam $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 3\mathbf{x}$$

Portanto $\lambda = 3$ é um autovalor de A e $\mathbf{x} = (2, 1)^T$ é um autovetor associado a λ.

Teorema: Se P é a matriz de transição de um processo de Markov regular, então:

(a) Quando $n \to \infty, P^n$ tende à matriz,

$$A = \begin{bmatrix} u_1 & u_1 & \cdots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_n & \cdots & u_n \end{bmatrix}$$

que tem todas as colunas iguais;

(b) todas as colunas

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

de A são vetores de probabilidade com todos os elementos positivos, Isto é,

$$u_i > 0 \ (1 \leq i \leq n) \qquad \text{e} \qquad u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1.$$

OBS: Este teorema não será demonstrado, pois envolve resultados mais elaborados de Álgebra Linear, como Forma de Jordan e resultados da Teoria de Matizes Positivas.

Teorema: Se P é uma matriz de transição regular e se A e $\mathbf{u}$ são como no teorema anterior, então:

(a) Qualquer que seja o vetor de probabilidade $\mathbf{x}$, temos que $P^n\mathbf{x} \to \mathbf{u}$ quando $n \to \infty$, de modo que $\mathbf{u}$ é um vetor de estado estacionário;

(b) O vetor de estado estacionário $\mathbf{u}$ é o único vetor de probabilidade que satisfaz a equação matricial $P\mathbf{u} = \mathbf{u}$, isto é, $\mathbf{u}$ é um autovetor de P associado ao autovalor $\lambda = 1$.

Demonstração:

(a) Seja

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

um vetor de probabilidade. Quando $n \to \infty$, $P^n \to A$. Logo $P^n\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$. Por outro lado,

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_1 & u_1 & \cdots & u_1 \\ u_2 & u_2 & \cdots & u_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_n & u_n & \cdots & u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1x_1 + u_1x_2 + \cdots + u_1x_n \\ u_2x_1 + u_2x_2 + \cdots + u_2x_n \\ \vdots \\ u_nx_1 + u_nx_2 + \cdots + u_nx_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_1(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ u_2(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \\ \vdots \\ u_n(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \text{ já que } x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1.$$

Como $P^n\mathbf{x} \to A\mathbf{x}$ e $A\mathbf{x} = \mathbf{u}$, então $P^n\mathbf{x} \to \mathbf{u}$.

(b) Como $P^n \to A$ também temos $P^{n+1} \to A$. No entanto, $P^{n+1} = PP^n$, de modo que $P^{n+1} \to PA$. Logo $PA = A$.

Sabemos que todas as colunas de A são iguais ao vetor de probabilidade $\mathbf{u}$. Ao Igualarmos as colunas correspondentes da equação matricial $PA = A$ (lembrar de multiplicação de matriz por colunas), temos: $PA = \begin{bmatrix} P\mathbf{u} & P\mathbf{u} & \cdots & P\mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}$ e

$A = \begin{bmatrix} \mathbf{u} & \mathbf{u} & \cdots & \mathbf{u} \\ \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow \end{bmatrix}$. Logo $P\mathbf{u} = \mathbf{u}$. Para mostrarmos que $\mathbf{u}$ é o único vetor de probabilidade que satisfaz esta equação, devemos supor, por absurdo, que existe um outro vetor de probabilidade $\mathbf{q}$ tal que $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$. Do item (a) deste mesmo teorema temos que $P^n\mathbf{q} \to \mathbf{u}$ e, como $P\mathbf{q} = \mathbf{q}$, temos $P^n\mathbf{q} = \mathbf{q}$ para todo n, assim $\mathbf{q} \to \mathbf{u}$. Portanto $\mathbf{q} = \mathbf{u}$.

c.q.d.

Da parte (b) deste teorema, podemos escrever,

$$P\mathbf{u} = \mathbf{u}$$

como:

$$P\mathbf{u} = I_n\mathbf{u} \qquad \text{ou} \qquad (I_n - P)\mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Mostramos que o sistema homogêneo acima tem uma única solução $\mathbf{u}$ que é um vetor de probabilidade, de modo que:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 1. \tag{2.3.2}$$

Nos exemplos 6, 7 e 8 calculamos vetores de estado estacionário calculando as potências $P^n\mathbf{x}$. Vamos descrever agora um outro modo de calcular o vetor de estado estacionário de uma matriz de transição utilizando o resultado do teorema acima.

Primeiramente devemos resolver o sistema homogêneo: $(I_n - P)\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Entre as infinitas soluções obtidas na primeira etapa, devemos escolher a única solução $\mathbf{u}$ cujos elementos satisfaçam a equação *(2.3.2)*. Vejamos:

Exemplo 10: No exemplo 2, a matriz de transição era:

$$P = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

O sistema linear $(I_n - P)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Isto leva à equação:

$$\frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{2}u_2 = 0; \text{ logo: } u_1 = \frac{3}{2}u_2.$$

Para satisfazer a equação *(2.3.2)* acima, temos: $\frac{3}{2}u_2 + u_2 = 1$.

Então, $\frac{5}{2}u_2 = 1$, e segue que : $u_2 = \frac{2}{5} = 0{,}4$.

Assim,

$$u_1 = \frac{3}{2}u_2 = \frac{3}{5} = 0{,}6.$$

Portanto, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$.

Isso significa que, a partir do quarto dia, fica seco aproximadamente 60% do tempo e chove aproximadamente 40% do tempo.

Exemplo 11: Considere a matriz de transição do exemplo 3:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}50 & 0{,}60 & 0{,}40 \\ 0{,}25 & 0{,}30 & 0{,}30 \\ 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}30 \end{bmatrix}$$

O sistema homogêneo $(I_n - P)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, é:

$$\begin{bmatrix} 0{,}50 & -0{,}60 & -0{,}40 \\ -0{,}25 & 0{,}70 & -0{,}30 \\ -0{,}25 & -0{,}10 & 0{,}70 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Devemos escalonar a matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0,50 & -0,60 & -0,40 & 0 \\ -0,25 & 0,70 & -0,30 & 0 \\ -0,25 & -0,10 & 0,70 & 0 \end{array}\right].$$

Resolveremos o sistema equivalente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2 & -0,8 & 0 \\ 0 & 2,8 & -1,2 & 0 \\ 0 & -0,4 & 2,8 & 0 \end{array}\right]$$

Escalonando, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2 & -0,8 & 0 \\ 0 & 2,8 & -1,2 & 0 \\ 0 & -0,4 & 2,8 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2 & -0,8 & 0 \\ 0 & 1,6 & -2,0 & 0 \\ 0 & -1,6 & 2,0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1,2 & -0,80 & 0 \\ 0 & 1 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2,30 & 0 \\ 0 & 1 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2,30 & 0 \\ 0 & 1 & -1,25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ Esta é a matriz aumentada na forma escada reduzida por linhas.

Portanto, as soluções são da forma:

$$\begin{aligned} u_1 &= 2,3r \\ u_2 &= 1,25r \\ u_3 &= r, \end{aligned}$$

De *(2.3.2)*, temos: $2,3r + 1,25r + r = 1$ ou $r = \dfrac{1}{4,55} \approx 0,2198.$

Logo podemos concluir que:

$$\begin{aligned} u_1 &= 0,5055 \\ u_2 &= 0,2747\,. \\ u_3 &= 0,2198 \end{aligned}$$

Consequentemente, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0{,}5057 \\ 0{,}2747 \\ 0{,}2198 \end{bmatrix}$ é o vetor de estado estacionário.

Isso significa que as vendas se estabilizarão com a marca A com aproximadamente 51% do mercado, a marca B com aproximadamente 27% e as outras marcas ficarão com 22% do mercado, como já tínhamos obtido anteriormente no exemplo 7.

Exemplo 12: Considere a matriz de transição do Exemplo 5:

$$P = \begin{bmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 & 0{,}05 \\ 0{,}05 & 0{,}75 & 0{,}05 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}90 \end{bmatrix}$$

O sistema homogêneo $(I_n - P)\mathbf{u} = \mathbf{0}$, é:

$$\begin{bmatrix} 0{,}15 & -0{,}15 & -0{,}05 \\ -0{,}05 & 0{,}25 & -0{,}05 \\ -0{,}10 & -0{,}10 & 0{,}10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Devemos escalonar a matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0{,}15 & -0{,}15 & -0{,}05 & 0 \\ -0{,}05 & 0{,}25 & -0{,}05 & 0 \\ -0{,}10 & -0{,}10 & 0{,}10 & 0 \end{array}\right].$$

Escalonando, temos:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0{,}15 & -0{,}15 & -0{,}05 & 0 \\ -0{,}05 & 0{,}25 & -0{,}05 & 0 \\ -0{,}10 & -0{,}10 & 0{,}10 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -0{,}10 & -0{,}10 & 0{,}10 & 0 \\ -0{,}05 & 0{,}25 & -0{,}05 & 0 \\ 0{,}15 & -0{,}15 & -0{,}05 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1{,}00 & 1{,}00 & -1{,}00 & 0 \\ -0{,}05 & 0{,}25 & -0{,}05 & 0 \\ -0{,}10 & -0{,}10 & 0{,}10 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1{,}0 & -1{,}0 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & -0{,}1 & 0 \\ 0 & -0{,}3 & 0{,}1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & -0{,}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A última matriz aumentada já está na forma escada reduzida por linhas.

Logo, as soluções são da forma:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{2}{3}r \\ u_2 &= \frac{1}{3}r \\ u_3 &= r, \end{aligned}$$

De *(2.3.2)*, temos: $\frac{2}{3}r + \frac{1}{3}r + r = 1$ ou $r = \frac{1}{2}$.

Portanto podemos concluir que:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{3} \\ u_2 &= \frac{1}{6}. \\ u_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Conseqüentemente, $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0{,}3334 \\ 0{,}1666 \\ 0{,}5000 \end{bmatrix}$ é o vetor de estado estacionário.

Isso significa que após 30 meses, a companhia X, Y e Z terão respectivamente 33%, 16 % e 50 % do mercado, como já vimos anteriormente no exemplo 8.

CONCLUSÃO

Através deste trabalho procuramos mostrar algumas das muitas aplicações de Matrizes. Durante o seu desenvolvimento notamos que são poucas as aplicações que podem ser feitas sem exigir maior conhecimento matemático, como por exemplo, Criptografia e Modelos Populacionais. Já o estudo de Cadeias de Markov para ser feito de forma mais completa, exige o estudo de assuntos mais elaborados, como Forma de Jordam e propriedades das Matrizes Positivas. Por esses motivos muitas vezes estas aplicações não são vistas em determinados momentos de nosso estudo, isto pois, não temos ferramentas matemáticas o suficiente para conhecermos este tipo de aplicações de Matrizes.

BIBLIOGRAFIA

(1) NOBLE, Ben DANIEL, W. James. Álgebra Linear Aplicada. 2° edição. Rio de Janeiro: Editora Prentice – Hall do Brasil Ltda. – PHD .1986.

(2) LIPSCHUTZ Seymour – Coleção SCHAUM. Álgebra Linear. 3° edição. São Paulo: Editora Makron Books do Brasil Ltda -1994.

(3) KOLMAN Bernard. Introdução à Álgebra Linear com Aplicações. 6° edição. Rio de Janeiro: Editora Prentice – Hall do Brasil Ltda..– PHD 1998.

(4) LEON J. Steven. Álgebra Linear Com Aplicações. 4° edição. Editora: Livros Técnicos e Científicos Editora AS. – LTC. Rio de Janeiro, 1999.

(5) ANTON Howard, RORRES Chris. Álgebra liner com Aplicações. 8° edição. Porto Alegre: Bookman, 2001.

(6) BOLDRINI, José Luiz et al. Álgebra Linear. 3ª edição. São Paulo: Hapes & Row do Brasil, 1980.

(7) EDWARDS C. H. Jr., PENNEY David E. Introdução à Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Prentice-Hall do Brasil Ltda., 1998.