Albert Ratschinski (5154309)

| Aufgabe: | 1 | 2 | 3 | $\sum$ |
|---|---|---|---|---|
| Punkte: | | | | |

# Exercise Sheet Nr. 2

(Deadline - Freitag bis 12 Uhr)

## Aufgabe 1

### (a)

Gegeben sind:

- 52 Buchstaben (Groß- und Kleinschreibung)
- 10 Ziffern (0 bis 9)

Der Nutzername hat eine Länge von 5 Zeichen. Die Verteilung von Buchstaben und Ziffern kann folgende Formen annehmen:

- 1 Buchstabe und 4 Ziffern
- 2 Buchstaben und 3 Ziffern
- 3 Buchstaben und 2 Ziffern
- 4 Buchstaben und 1 Ziffer

Da keine Ziffer vor einem Buchstaben stehen darf, kommen die Ziffern immer nach den Buchstaben. Die Anzahl der Möglichkeiten für jede Konfiguration lässt sich mit der Formel berechnen:

$$\text{Gesamtzahl} = \sum_{k=1}^{4} \binom{5}{k} \cdot 52^k \cdot 10^{5-k}$$

Dabei ist $k$ die Anzahl der Buchstaben. Der Ausdruck $\binom{5}{k}$ ist der Binomialkoeffizient, der die Anzahl der Möglichkeiten angibt, $k$ Buchstabenpositionen aus 5 auszuwählen. $52^k$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, $k$ Buchstaben auszuwählen, und $10^{5-k}$ ist die Anzahl der Möglichkeiten, $5-k$ Ziffern auszuwählen.

Die einzelnen Terme lauten somit:

$$\begin{aligned}
\text{Ein Buchstabe, vier Ziffern:} \quad & \binom{5}{1} \cdot 52^1 \cdot 10^4, \\
\text{Zwei Buchstaben, drei Ziffern:} \quad & \binom{5}{2} \cdot 52^2 \cdot 10^3, \\
\text{Drei Buchstaben, zwei Ziffern:} \quad & \binom{5}{3} \cdot 52^3 \cdot 10^2, \\
\text{Vier Buchstaben, eine Ziffer:} \quad & \binom{5}{4} \cdot 52^4 \cdot 10^1.
\end{aligned}$$

Addieren wir diese Werte, erhalten wir die Gesamtzahl der möglichen Nutzernamen unter den gegebenen Einschränkungen.

$$\text{Gesamtzahl} = \binom{5}{1} \cdot 52^1 \cdot 10^4 + \binom{5}{2} \cdot 52^2 \cdot 10^3 + \binom{5}{3} \cdot 52^3 \cdot 10^2 + \binom{5}{4} \cdot 52^4 \cdot 10^1 = 535.828.800 \text{ Möglichkeiten}$$

### (b)

Gegeben sind:

- 52 Buchstaben (Groß- und Kleinschreibung)
- 10 Ziffern (0 bis 9)
- 8 Sonderzeichen

Die ersten drei Zeichen des Passworts müssen sich von denen des Nutzernamens unterscheiden. Daher gibt es genau $70 - 1$ Optionen für jedes der ersten drei Zeichen des Passworts, da sie nicht mit den entsprechenden Zeichen des Nutzernamens übereinstimmen dürfen. Für die verbleibenden fünf Zeichen des Passworts gibt es keine solchen Einschränkungen. Daher gibt es für jedes dieser Zeichen 70 mögliche Optionen. Somit haben wir:

$$\text{Gesamtzahl} = 69 \cdot 69 \cdot 69 \cdot 70 \cdot 70 = 1.609.694.100 \text{ Möglichkeiten}$$

### (c)

Die Gesamtzahl der Paare (Nutzername, Passwort) ist das Produkt der Anzahl der möglichen Nutzernamen und der Anzahl der möglichen Passwörter. Somit:

$$\text{Gesamtzahl} = 535.828.800 \cdot 1.609.694.100 = 8,6252045797008e + 17$$

## Aufgabe 2

Der Grundraum $\Omega$ umfasst alle möglichen Positionen auf dem Schachbrett. Da es sich um ein 8x8-Schachbrett handelt und jeder Figur 64 Positionen einnehmen kann, gibt es:

$$|\Omega| = 64 \cdot 64 = 4096 \text{ mögliche Positionen}$$

### (a)

Wir definieren die Menge A als die Menge der Positionen, die von einem Turm eingenommen werden können. Ein Turm kann sich in einer Zeile oder Spalte bewegen, daher gibt es 8 mögliche Positionen in einer Zeile und 8 mögliche Positionen in einer Spalte. Da der Turm sich nur in einer Zeile oder Spalte bewegen kann, gibt es insgesamt 16 mögliche Positionen, die der Turm einnehmen kann. Somit:

$$A = \{(x, y) \in \Omega | row(x) = row(y) \text{ oder } col(x) = col(y)\}$$

Es folgt:

$$|A| = 8 \cdot 64 + 8 \cdot 64 - 64 = 960.$$

(-64 für die Position, in der beide Türme gleichzeitig in der gleichen Zeile oder Spalte sind.) und somit:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{960}{4096} = \frac{15}{64}$$

### (b)

Wir definieren die Menge B als die Menge der Positionen, die von einem Läufer eingenommen werden können. Ein Läufer kann sich entlang einer Diagonale bewegen, daher gibt es 8 mögliche Positionen entlang einer Diagonale.

$$S = \{(x, y) \in \Omega | Farbe(x) = Frabe(y)\}$$

und

$$B = \{(x, y) \in S | diag(x) = diag(y)\}$$

Es folgt:

$$|B| = 2 \cdot (\binom{8}{2} + 2 \cdot \binom{7}{2} + 2 \cdot \binom{6}{2} + 2 \cdot \binom{5}{2} + 2 \cdot \binom{4}{2} + 2 \cdot \binom{3}{2} + 2 \cdot \binom{2}{2}) = 280.$$

$$P(B) = \frac{1}{2} \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} \frac{280}{32 * 32} =$$