Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Informatik“

Blatt 3

Abgabetermin: Freitag, 10.05.2024, bis 14:00 Uhr als PDF-Datei über ILIAS
(Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$, sowie $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$ und $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\phi(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n} v_i a_i$.

a) Zeigen Sie, dass die Abbildung ϕ linear ist.

b) Seien $m \in \mathbb{N}$ mit $m < n$ und $\{\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m}\} \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Familie von linear unabhängigen Vektoren. Es gelte $\phi(\boldsymbol{a_j}) = 0$ für alle $1 \leq j \leq m$. Zeigen Sie, dass dann entweder $v_1 = \ldots = v_n = 0$ oder $\{\boldsymbol{a_1}, \ldots, \boldsymbol{a_m}, \boldsymbol{v}\}$ eine linear unabhängige Familie bildet, wobei $\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass eine lineare Abbildung $\phi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\phi_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \phi_1\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi_1\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

existiert.

b) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von ϕ_1 bezüglich der geordneten Standardbasis $(\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2})$ von $\mathbb{R}^2$

c) Zeigen Sie, dass keine lineare Abbildung $\phi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\phi_2\left(\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \phi_2\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \phi_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

existiert.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen sind linear?

a) $\phi_1 : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$, definiert durch $\phi_1(\boldsymbol{v})_1 = 2v_1 - v_2 - v_5$, $\phi_1(\boldsymbol{v})_5 = 2v_5 - v_1 - v_4$ und $\phi_1(\boldsymbol{v})_i = 2v_i - v_{i+1} - v_{i-1}$ für $i = 2, 3, 4$.

b) $\phi_2 : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $\phi_2(\boldsymbol{v})_1 = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{3} i v_{2i-1}$ und $\phi_2(\boldsymbol{v})_2 = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6}(6-i)v_i$.

c) $\phi_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definiert durch $\phi_3(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} v_2 - 1 \\ v_1 + 1 \end{pmatrix}$.

d) $\phi_4 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch $\phi_4(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} -v_1 \\ 2v_1 - v_2 \\ 3v_1 + 2v_2 \end{pmatrix}$

e) $\phi_5 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, definiert durch $\phi_5(\boldsymbol{v}) = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_1 v_2 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix}$

Begründen Sie Ihre Antworten und bestimmen Sie gegebenenfalls die Abbildungsmatrizen der linearen Abbildungen bezüglich der Standardbasen des $\mathbb{R}^n$, $n = 2, 3, 5, 6$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei die (3×3)-Matrix $\boldsymbol{M}$ über $\mathbb{R}$ gegeben durch

$$\boldsymbol{M} := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ Werte $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ existieren, so dass

$$\boldsymbol{M}^n = a_n \cdot \boldsymbol{M} + b_n \cdot \boldsymbol{I_3},$$

wobei $\boldsymbol{I_3}$ die Einheitsmatrix (s. Definition 2.44) bezeichne. Bestimmen Sie a_n und b_n explizit.

Hinweis: Zeigen Sie die Behauptung mittels vollständiger Induktion.

(bitte wenden)

Verständnisfragen zum Nachdenken und zur Vertiefung für Interessierte:

- Gibt es einen $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphismus $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{C}^3$? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Gibt es Werte $n, m \in \mathbb{N}$, für die ein $\mathbb{R}$-Vektorraumisomorphsimus $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}^m$ existiert? Welcher Zusammenhang zwischen n und m ist ggf. nötig/ausreichend?
- Sei V ein (n-dimensionaler) Vektorraum, $\phi : V \to V$ eine lineare Abbildung und $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_j}\} \subseteq V$ linear abhängig. Zeigen Sie, dass dann auch $\{\phi(\boldsymbol{v_1}), \ldots \phi(\boldsymbol{v_j})\}$ linear abhängig ist.
  Gilt eine analoge Aussage auch für den Fall, dass $\{\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_j}\} \subseteq V$ linear unabhängig ist?
- Für welche $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2$ ist die Abbildung $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{v} \mapsto \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ linear? Begründen Sie Ihre Antwort.
- Sei $\mathbb{R}[x]_2$ der Vektorraum aller Polynome vom Grad kleiner oder gleich 2 und $f_i(x) = x^i$ für $i = 0, 1, 2$, sowie $g(x) = (1 - x)(1 + x)$ gegeben. Gilt $f_1 \in \text{span}\{f_0, f_2, g\}$?
- Wie viele der Gleichungen in Aufgabe 2c) muss man mindestens herausstreichen, um die Existenz einer linearen Abbildung zu sichern, die die verbleibenden Gleichungen erfüllt? Kann man diese Gleichungen zum Herausstreichen zur Sicherung der Existenz einer linearen Abbildung hier frei wählen oder muss es sich um spezielle Gleichungen handeln? Begründen Sie Ihre Antworten.