Übungen zur Vorlesung "Stochastik für Studierende der Informatik"

Blatt 3

Abgabetermin: Freitag, 10.05.2024, bis 12:00 Uhr in Ilias in Ihrer jeweiligen Übungsgruppe hochladen
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu dritt abgeben.)

Aufgabe 1 (4+1 Bonuspunkte)

Eine Münze wird unendlich oft geworfen. Dieses Zufallsexperiment wird durch den Ergebnisraum $\Omega = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß P mit folgender Eigenschaft beschrieben: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $j_1, \ldots, j_n \in \{0,1\}$ gilt

$$P(\omega \in \Omega : \ \omega_i = j_i \text{ für alle } 1 \le i \le n) = 2^{-n}.$$

(a) Sei $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots)$ mit $\omega_i \in \{0,1\}$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Ereignis $\{\omega\}$ Wahrscheinlichkeit 0 hat.

(b) Es gilt $P(\Omega) = 1$ und $\Omega = \bigcup_{\omega \in \Omega} \{\omega\}$. Warum ist dies kein Widerspruch zur Additivität des Wahrscheinlichkeitsmaßes?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Ein fairer Würfel wird dreimal geworfen. Sei T das Produkt der Augenzahlen. Definieren Sie T als Zufallsvariable auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und bestimmen Sie $P(T = 6)$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Auf einer Urne mit Kugeln der Aufschrift $1, 2, \ldots, N$ wird n mal gezogen und es sei X die höchste gezogene Nummer. Definieren Sie X als Zufallsvariable auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und bestimmen Sie ihre Verteilung, falls

a) mit Zurücklegen

b) ohne Zurücklegen

gezogen wird.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Für welche Konstanten c definieren die folgenden Ausdrücke Zähldichten:

a) $f(k) = c\frac{(-1)^{k-1}}{k}, \qquad k \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$

b) $f(k) = c\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \qquad k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}, p \in [0,1],$

c) $f(k) = c\frac{\lambda^k}{k!}, \qquad \lambda > 0, k \in \mathbb{N},$

d) $f(k) = c(1-p)^{k-1}, \qquad p \in (0,1], k \in \mathbb{N}.$