Albert Ratschinski (5154309)

Exercise Sheet Nr. 2

(Deadline - Freitag bis 12 Uhr)

Aufgabe 1

(a)

Gegeben sind:

- 52 Buchstaben (Groß- und Kleinschreibung)
- 10 Ziffern (0 bis 9)

Der Nutzername hat eine Länge von 5 Zeichen. Die Verteilung von Buchstaben und Ziffern kann folgende Formen annehmen:

- 1 Buchstabe und 4 Ziffern
- 2 Buchstaben und 3 Ziffern
- 3 Buchstaben und 2 Ziffern
- 4 Buchstaben und 1 Ziffer

Da keine Ziffer vor einem Buchstaben stehen darf, kommen die Ziffern immer nach den Buchstaben. Die Anzahl der Möglichkeiten für jede Konfiguration lässt sich mit der Formel berechnen:

$$\text{Gesamtzahl} = \sum_{k=1}^{4} \binom{5}{k} \cdot 52^k \cdot 10^{5-k}$$

Dabei ist k die Anzahl der Buchstaben. Der Ausdruck $\binom{5}{k}$ ist der Binomialkoeffizient, der die Anzahl der Möglichkeiten angibt, k Buchstabenpositionen aus 5 auszuwählen. 52^k ist die Anzahl der Möglichkeiten, k Buchstaben auszuwählen, und 10^{5-k} ist die Anzahl der Möglichkeiten, $5 - k$ Ziffern auszuwählen.

Die einzelnen Terme lauten somit:

$$\begin{aligned}
\text{Ein Buchstabe, vier Ziffern:} &\quad \binom{5}{1} \cdot 52^1 \cdot 10^4,\\
\text{Zwei Buchstaben, drei Ziffern:} &\quad \binom{5}{2} \cdot 52^2 \cdot 10^3,\\
\text{Drei Buchstaben, zwei Ziffern:} &\quad \binom{5}{3} \cdot 52^3 \cdot 10^2,\\
\text{Vier Buchstaben, eine Ziffer:} &\quad \binom{5}{4} \cdot 52^4 \cdot 10^1.
\end{aligned}$$

Addieren wir diese Werte, erhalten wir die Gesamtzahl der möglichen Nutzernamen unter den gegebenen Einschränkungen.

$$\text{Gesamtzahl} = \binom{5}{1}\cdot 52^1 \cdot 10^4 + \binom{5}{2}\cdot 52^2 \cdot 10^3 + \binom{5}{3}\cdot 52^3 \cdot 10^2 + \binom{5}{4}\cdot 52^4 \cdot 10^1 = 535.828.800 \text{ Möglichkeiten}$$

(b)

Gegeben sind:

- 52 Buchstaben (Groß- und Kleinschreibung)
- 10 Ziffern (0 bis 9)
- 8 Sonderzeichen

Die ersten drei Zeichen des Passworts müssen sich von denen des Nutzernamens unterscheiden. Daher gibt es genau $70-1$ Optionen für jedes der ersten drei Zeichen des Passworts, da sie nicht mit den entsprechenden Zeichen des Nutzernamens übereinstimmen dürfen. Für die verbleibenden fünf Zeichen des Passworts gibt es keine solchen Einschränkungen. Daher gibt es für jedes dieser Zeichen 70 mögliche Optionen. Somit haben wir:

$$\text{Gesamtzahl} = 69 \cdot 69 \cdot 69 \cdot 70 \cdot 70 = 1.609.694.100 \text{ Möglichkeiten}$$

(c)

Die Gesamtzahl der Paare (Nutzername, Passwort) ist das Produkt der Anzahl der möglichen Nutzernamen und der Anzahl der möglichen Passwörter. Somit:

$$\text{Gesamtzahl} = 535.828.800 \cdot 1.609.694.100 = 8,6252045797008e + 17$$

Deine Herangehensweise ist größtenteils korrekt, aber es gibt einige kleine Fehler und Unklarheiten. Hier ist eine überarbeitete Version:

Aufgabe 2

Der Grundraum Ω umfasst alle möglichen Positionen auf dem Schachbrett. Da es sich um ein 8x8-Schachbrett handelt und jede Figur 64 Positionen einnehmen kann, gibt es:

$$|\Omega| = 64 \times 64 = 4096 \text{ mögliche Positionen}$$

(a)

Wir definieren die Menge A als die Menge der Positionen, die von einem Turm eingenommen werden können. Ein Turm kann sich entlang einer Zeile oder Spalte bewegen, daher gibt es 8 mögliche Positionen in einer Zeile und 8 mögliche Positionen in einer Spalte. Die Anzahl der Positionen, die ein Turm einnehmen kann, beträgt daher:

$$|A| = 8 \times 64 + 8 \times 64 - 64 = 960$$

Die Subtraktion von 64 ist notwendig, um die doppelte Zählung der Positionen zu korrigieren, bei denen sich beide Türme in derselben Zeile oder Spalte befinden. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei Türme schlagen können:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{960}{4096} = \frac{15}{64} \approx 0.2344$$

(b)

Wir definieren die Menge B als die Menge der Positionen, die von einem Läufer eingenommen werden können. Ein Läufer kann sich entlang einer Diagonale bewegen, daher gibt es 8 mögliche Positionen entlang einer Diagonale. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, dass sich zwei Läufer schlagen können, müssen wir berücksichtigen, dass sie sich auf Feldern derselben Farbe befinden müssen. Daher ist die Anzahl der möglichen Positionen, die von zwei Läufern eingenommen werden können:

$$|B| = 2 \cdot \left(\binom{8}{2} + 2 \cdot \binom{7}{2} + 2 \cdot \binom{6}{2} + 2 \cdot \binom{5}{2} + 2 \cdot \binom{4}{2} + 2 \cdot \binom{3}{2} + 2 \cdot \binom{2}{2} \right) = 280$$

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei Läufer schlagen können:

$$P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{1}{2} \cdot \frac{280}{32 \times 32} \approx 0.1367$$

Die Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ berücksichtigt, dass die Läufer sich auf Feldern derselben Farbe befinden müssen.

(c)

Da Damen sowohl Türme als auch Läufer sind, können sie sich sowohl horizontal und vertikal als auch entlang einer Diagonale bewegen. Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei Damen schlagen können, die Vereinigung der Wahrscheinlichkeiten, dass sich zwei Türme schlagen können und dass sich zwei Läufer schlagen können, abzüglich der Positionen, die von beiden Figuren eingenommen werden können (da sich Türme und Läufer nicht schlagen können).

Formell:

$$P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Da sich Türme und Läufer nicht schlagen können, ist $A \cap B = \emptyset$, also $P(A \cap B) = 0$.

Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich zwei Damen schlagen können:

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{15}{64} + \frac{1}{2} \cdot \frac{280}{32 \times 32} \approx 0.3711$$

Aufgabe 3

Ich berechne zuerst die Wahrscheinlichkeit,

$$P(250 \text{ Tage lang keine Panne}) = 0.99^{250} \approx 0.0808$$

Nun berechne ich die Wahrscheinlichkeit, am letzten Arbeitstag die zehne Panne zu haben. Dafür berechne ich mit der Biniomialverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass genau 9 Pannen in 249 Tagen auftreten:

$$P(9 \text{ Pannen in 249 Tagen}) = \binom{249}{9} \cdot 0.01^9 \cdot 0.99^{240} \approx 0.1631$$

und multipliziere dies mit der Wahrscheinlichkeit, dass am letzten Tag eine Panne auftritt:

$$P(10 \text{ Pannen in 250 Tagen}) = P(9 \text{ Pannen in 249 Tagen}) \cdot 0.01 \approx 0.0016$$