Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende der Informatik“

Blatt 2

Abgabetermin: Freitag, 03.05.2024, bis 14:00 Uhr als PDF-Datei über ILIAS
(Sie dürfen maximal zu zweit abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Z}_4$ mit den modulo-Operationen $+_4$ und $\cdot_4$ kein Körper ist.

b) Zeigen Sie, dass ein Körper mit 4 Elementen existiert. Bestimmen Sie hierfür die entsprechenden Verknüpfungen für eine Körperstruktur auf der vierelementigen Menge $\mathbb{F}_4 := \{0, 1, a, b\}$.

HINWEIS: Erinnern Sie sich an die Eigenschaften in Definition 1.35, die die Verküpfungen in einem Körper erfüllen müssen.

$+$	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

$\cdot$	0	1	a	b
0				
1				
a				
b				

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Entscheiden Sie, ob $\left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \middle| \, a, b, c, \in \mathbb{Q} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Entscheiden Sie, ob $\left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

c) Entscheiden Sie, ob $\left\{ \alpha \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

d) Sei $V = \mathbb{F}_2^\infty$ der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum der unendlichen $\{0, 1\}$-Folgen und $W \subseteq V$ die Teilmenge aller periodischen Folgen, d. h. für jedes $\boldsymbol{w} \in W$ existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass $\boldsymbol{w}$ durch Wiederholung einer endlichen $\{0, 1\}$-Folge der Länge k entsteht.

Entscheiden Sie, ob W ein Untervektorraum von V ist.

(bitte wenden)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$U := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 2x_1 + 4x_2 = 1 \right\}.$$

Hat diese Menge eine $\mathbb{R}$-Vektorraumstruktur? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Es sei

$$V := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \,\middle|\, x_2 = x_1 - 2x_3 + x_4 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Zeigen Sie, dass V ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^4$ ist, der von den Vektoren

$$\boldsymbol{v_1} := \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_3} := \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannt wird.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Gegeben seien die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^4$:

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v_4} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Weiter sei $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \boldsymbol{v_4}\}$ ein Erzeugendensystem von $U \subseteq \mathbb{R}^4$.

a) Bestimmen Sie eine Teilmenge aus den obigen Vektoren, die eine Basis von U bilden. Wählen Sie die Teilmenge so aus, dass die Summe der Indizes der Vektoren minimal wird.

   Hinweis: Eine Linearkombination $k_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + k_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$ von Vektoren $\boldsymbol{0}, \boldsymbol{v_i} \in \mathbb{R}^m$ und $k_i \in \mathbb{R}$ entspricht einem homogenen linearen Gleichungssystem mit m Gleichungen und n Unbekannten $k_1, \ldots, k_n$, und die Vektoren $\boldsymbol{v_1}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ bilden die Spalten der Koeffizientenmatrix. Sind die Vektoren linear abhängig, hat das Gleichungssystem nach Satz 2.15 der Vorlesung nicht nur die triviale Lösung $k_1 = \cdots = k_n = 0$, sondern auch nicht triviale. Wenn Sie das homogene lineare Gleichungssystem für die vier obigen Vektoren aufstellen und mit den Methoden aus dem ersten Kapitel der Vorlesung lösen, sehen Sie schnell, ob nicht triviale Lösungen existieren, und welche Vektoren bzw. Spalten in der Koeffizientenmatrix man weglassen muss, damit die triviale Lösung die einzig mögliche ist.

b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \\ \alpha \end{pmatrix} \in U$? Bestimmen Sie die Komponenten von $\boldsymbol{w}$ bezüglich der in a) gefundenen Basis.

c) Berechnen Sie aus den in a) erhaltenen Basisvektoren eine neue Basis des nachstehenden Typs:

$$\boldsymbol{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \beta_3 \end{pmatrix}$$

   mit $\beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie die Komponenten von $\boldsymbol{w}$ bezüglich dieser Basis.

   Hinweis: Sie können wie in b) vorgehen und Zwischenergebnisse aus Ihren dortigen Rechnungen verwenden.

(bitte wenden)

Verständnisfragen zum Nachdenken und zur Vertiefung für Interessierte:

- Bestimmen Sie im $\mathbb{R}^4$, falls das möglich ist, eine Basis, welche die Vektoren $\boldsymbol{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\boldsymbol{v_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

- Begründen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Menge

$$V = \left\{ \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, v_1 + \cdots + v_n = 0 \right\}$$

  einen $\mathbb{R}$-Vektorraum bildet, und bestimmen Sie eine Basis und die Dimension von V.

- Gelten in einem Vektorraum V die folgenden Aussagen?
  (i) Ist eine Basis von V unendlich, so sind alle Basen von V unendlich.
  (ii) Hat V ein unendliches Erzeugendensystem, so sind alle Basen von V unendlich.
  (iii) Ist eine linear unabhängige Menge von V endlich, so ist es jede.

- Gegeben sei ein Untervektorraum U eines K-Vektorraumes V und Elemente $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig?
  (i) Sind $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ linear unabhängig, so sind auch $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}$ und $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}$ linear unabhängig.
  (ii) Sind $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \notin U$, so ist auch $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \notin U$.
  (iii) Sind $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \notin U$, so ist $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in U$.
  (iv) Ist $\boldsymbol{u} \in U$ und $\boldsymbol{v} \notin U$, so ist $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \notin U$.

- Entscheiden Sie, ob $\left\{ \begin{pmatrix} x+y \\ y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x, y \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist.

- Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch?
  (i) $\mathbb{F}_2$ ist ein $\mathbb{F}_2$-Untervektorraum von $\mathbb{R}$.
  (ii) $\mathbb{R}^2$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{R}^3$.
  (iii) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{R}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$.
  (iv) $\mathbb{R}$ ist ein $\mathbb{C}$-Untervektorraum von $\mathbb{C}$.