Übungen zur Vorlesung
“Stochastik für Studierende der Informatik“

Blatt 1

Abgabetermin: Freitag, 26.04.2024, bis 12:00 Uhr in Ilias in Ihrer jeweiligen Übungsgruppe hochladen
(Geben Sie auf jedem Lösungsblatt Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe an. Sie dürfen maximal zu dritt abgeben.)

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ein fairer Würfel wird viermal geworfen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass

(a) das Maximum der erhaltenen Augenzahlen kleiner oder gleich 4 ist,

(b) man eine strikt absteigende Folge würfelt.

Geben Sie dazu den Grundraum und die jeweiligen Ereignisse an.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sie wollen eine Person finden, deren Geburtstag mit Ihrem Geburtstag übereinstimmt (Annahme: Jahr mit 365 Tagen und die Geburten sind gleichverteilt auf das Jahr). Wie viele Personen müssen Sie mindestens befragen, um eine Wahrscheinlichkeit größer gleich 0,5 zu haben?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

In einer Urne liegen zwei rote und zwei schwarze (ansonsten nicht unterscheidbare) Kugeln. Es werden zwei Kugeln nacheinander (d.h. ohne Zurücklegen der ersten Kugel) rein zufällig gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit,

(a) dass die zweite gezogene Kugel rot ist?

(b) dass beide Kugeln die gleiche Farbe haben?

Hinweis: Nummerieren Sie die Kugeln durch und betrachten Sie dann für die Ziehung einen geeigneten Grundraum.

(bitte wenden)

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(a) Zeigen Sie die *Siebformel* für zwei Mengen $A, B \subset \Omega$, welche gegeben ist durch

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

(b) Folgern Sie durch vollständige Induktion die Siebformel für Mengen $A_1, \dots, A_n \subset \Omega$:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}} P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \right).$$

Hinweis: Dabei bedeutet $\sum_{\substack{I \subset \{1,\dots,n\} \\ |I|=k}}$, dass über alle k-elementigen Teilmengen I von $\{1, \dots, n\}$ summiert wird, d.h. man betrachtet alle möglichen Auswahlen von k Elementen aus $\{1, \dots, n\}$ und addiert dann die Wahrscheinlichkeiten der Schnitte der zugehörigen Ereignisse A_i mit i aus I. (In Teil (a) ist $n = 2$, und die Mengen $|I| = k = 1$ sind $\{1\}, \{2\}$ und für $k = 2$ ist $I = \{1, 2\}$.)