Albert Ratschinski (5154309)

Aufgabe:	1	2	3	4	$\sum$
Punkte:					

Exercise Sheet Nr. 1

(Deadline - Freitag bis 12 Uhr)

Aufgabe 1

Der Grundraum Ω ist wie folgt definiert:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4 | \omega_i \in \{1,2,3,4,5,6\}\} = \{1,2,3,4,5,6\}^4.$$

(a) Um das Maximum der erhaltenen Augenzahl zu bestimmen, welches kleiner oder gleich 4 ist, verwende ich (1.1.1) aus dem *Beispiel 1.3* und zeige:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = (\frac{4}{6})^4 = \frac{16}{81} \approx 0.1975.$$

(b) Die Summe der Kombinationen für strinkt absteigende Folgen lässt sich als:

$$|B| = \binom{6}{4} = \frac{6!}{4!(6-4)!} = 15$$

berechnen. Mit *1.1.1* folgt:

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{15}{6^4} = \frac{5}{432} \approx 0.01157.$$

Lösungsvorschlag:

(a)

(b) Es wird erwartet, dass Grundraum bei Stochastischen Experimenten angegeben wird.

$$A = \{\omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\} | \omega_1 > \omega_2 > \omega_3 > \omega_4\}$$

Aufgabe 2

Um die minimale Anzahl an Personen zu ermitteln, die befragt werden müssen, um eine Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.5 zu erreichen, dass zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben, stelle ich folgende Formel auf:

$$
\begin{aligned}
P(A) &\overset{\text{Gegenereignis}}{=} 1 - P(\bar{A}) \\
&= 1 - \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \ldots \cdot \frac{365-(k-1)}{365} \\
&= 1 - \prod_{i=0}^{k-1} (\frac{365-i}{365}) \overset{(1-x \geq e^{-x})}{\approx} 1 - \prod_{i=0}^{k-1} e^{-\frac{i}{365}} = 1 - e^{\sum_{j=1}^{k-1} - \frac{j}{365}} \\
&= 1 - e^{-\frac{1}{365} \sum_{j=1}^{k-1} j} = 1 - e^{-\frac{1}{365} \cdot \frac{k(k-1)}{2}} = 1 - e^{-\frac{k^2-k}{730}} \\
&\Leftrightarrow e^{-\frac{k^2-k}{730}} \geq 1 - P(A) \\
&\Leftrightarrow \frac{k^2-k}{730} \geq -\ln(1-P(A)) \\
&\Leftrightarrow k^2 - k \geq -730 \cdot \ln(\frac{1}{1-P(A)}) \\
&\Leftrightarrow k^2 - k + 730 \cdot \ln(\frac{1}{1-P(A)}) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow (k - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + 730 \cdot \ln(\frac{1}{1-P(A)}) \geq 0 \\
&\Leftrightarrow k \geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 730 * ln(1-P(A))}
\end{aligned}
$$

Ich setze nun für $P(A) = 0.5$ ein und erhalte:

$$
\begin{aligned}
k &\geq \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - 730 * ln(1-0.5)} \\
&\approx 23.
\end{aligned}
$$

Daher ist die Wahrscheinlichkeit, dass ich meinen Geburtstag mit einer anderen Person teile, größer als 0,5, wenn es 23 oder mehr Personen gibt.

Lösungsvorschlag:

Fehler: Du hast die Aufgabenstellung falsch gelesen. Kriterium, dass jemand am gleichen Tag wie ich Geburtstag hat. $\frac{1}{365}$ (hier wird nur genau eine Person befragt) Das Gegenereignis hat Wahrscheinlichkeit $1 - \frac{1}{365} = \frac{364}{365}$. Jetzt befrage ich n viele Personen:

$$
\begin{gathered}
1 - (\tfrac{364}{365})^n \geq 0.5 \\
\ldots \\
n = 253
\end{gathered}
$$

Aufgabe 3

Der Grundraum Ω für die Aufgabenstellung lässt sich definieren als:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2 | \omega_i \in \{Rot, Schwarz\}\} = \{RR, RS, SS, SR\}.$$

(a) Unter betrachtung des Grundraumes Ω folgere ich, dass es zwei Möglichkeiten gibt welche die Wahrscheinlichkeit:

$$P(A) = P(RR) + P(SR) = (\tfrac{2}{4} \cdot \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{2}{4} \cdot \tfrac{2}{3}) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{2}.$$

(b) Äquivalent zur vorherigen Aufgabe, gibt es zwei Möglichkeiten, die die Wahrscheinlichkeit:

$$P(B) = P(RR) + P(SS) = (\tfrac{2}{4} \cdot \tfrac{1}{3}) + (\tfrac{2}{4} \cdot \tfrac{1}{3}) = \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{3}.$$

Lösungsvorschlag:

Gebe den Grundraum an. z.B. $A = \{(a, b) \in \Omega | a = b\}$.

Aufgabe 4

(a) Wir zeigen durch Äquivalenzumformung, dass

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Sei X eine $\mathcal{F}$-wertige Zufallsvariable und $A, B \in \mathcal{F}$, dann gilt:

$$\begin{aligned} P(X \in A \cup B) &= P((X \in A) + P(x \in B \backslash (A \cap B))) \\ &= P(X \in A) + P(X \in B) - P(X \in A \cap B) \end{aligned}$$

folgt, da $A \cap B$ und $B \backslash (A \cap B)$ disjunkt sind.

Lösungsvorschlag:

$$\mathcal{ZZ}.P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \qquad \text{für } A, B \in \Omega \text{ beliebig}$$

Beweis: Es gilt:

$$\begin{aligned} A \setminus B &\overset{(i)}{=} A \setminus (A \cup B) \\ P(D \setminus C) &\overset{(ii)}{=} P(D) - P(C) \quad \text{für } C \subseteq D \\ P(A \cap B) &= P(B \overset{\text{disjunkt}}{\cup} (A \setminus B)) = P(B) + P(A \setminus B) \\ &\overset{(i)}{=} P(B) + A \setminus (A \cap B) \\ &\overset{(ii)}{=} P(B) + P(A) - P(A \cap B) \end{aligned}$$