Università "Sapienza" di Roma
Facoltà di Informatica

Algebra

Appunti integrati con il libro "Geometria analitica con elementi di Algebra lineare", M. Abate, C. De Fabritiis

Author
Simone Bianco

8 maggio 2023

Indice

0 Introduzione **1**

1 Strutture algebriche principali **2**
1.1 Richiami di insiemistica . . . 2
1.2 Operazioni binarie, Assiomi e Proprietà . . . 4
1.3 Semigruppi, Monoidi e Gruppi . . . 6
1.4 Anelli e Campi . . . 7
1.5 Sottogruppi ed Ideali . . . 9

2 Numeri Complessi **12**
2.1 Il campo dei numeri complessi . . . 13
2.2 Forma polare dei numeri complessi . . . 15
2.3 Teorema fondamentale dell'algebra . . . 17

3 Relazioni e Induzione **19**
3.1 Classi di equivalenza . . . 21
3.2 Relazione di Divisore . . . 24
3.3 Relazione di Congruenza . . . 25
3.4 Teorema della divisione con resto euclidea . . . 26
3.5 Relazione di Coniugio . . . 27
3.6 Induzione matematica . . . 28

4 Elementi di Teoria degli Anelli **31**
4.1 Classi laterali sinistre . . . 31
4.1.1 Teorema di Lagrange . . . 33
4.2 L'anello commutativo $\mathbb{Z}_n$ . . . 34
4.3 Invertibili e Divisori dello zero . . . 36
4.4 Elementi irriducibili e primi . . . 39
4.5 Massimo comun divisore . . . 42
4.5.1 Algoritmo di Euclide . . . 45
4.5.2 Approfondimento sull'Identità di Bezout . . . 49
4.5.3 Criteri di divisibilità . . . 50
4.6 Minimo comune multiplo . . . 51
4.6.1 Teorema fondamentale dell'aritmetica . . . 52
4.7 Teorema cinese dei resti . . . 54
4.8 Piccolo teorema di Fermat . . . 60
4.9 Funzione totiente di Eulero . . . 63
4.10 Ordine di un elemento di un gruppo . . . 65

5 Gruppo Simmetrico **73**
5.1 Ordine di una permutazione . . . 76
5.2 Segno delle permutazioni . . . 79

6 Morfismi **86**
6.1 Isomorfismi, Endomorfismi ed Automorfismi . . . 87
6.2 Nucleo ed Immagine di un morfismo . . . 90
6.3 Teorema fondamentale di isomorfismo . . . 91
6.4 Sottogruppi normali . . . 93
6.5 Gruppi diedrali . . . 100
6.6 Gruppo di Klein e Teorema di Cauchy . . . 104

7 Polinomi **108**
7.1 Divisione con resto di polinomi . . . 110
7.1.1 Regola di Ruffini . . . 112
7.2 Proprietà dell'anello polinomiale . . . 114
7.3 Polinomi in $\mathbb{Z}_p$ . . . 122

8 Spazi vettoriali **125**
8.1 Span, Generatori e Indipendenza lineare . . . 127
8.2 Base e Dimensione . . . 131
8.2.1 Formula di Grassman . . . 135
8.3 Trasformazioni lineari . . . 137
8.3.1 Teorema del Rango . . . 140
8.4 Spazi affini, Sottospazi affini e Giacitura . . . 141
8.5 Prodotto scalare e Spazio ortogonale . . . 142

9 Matrici **145**
9.1 Rango di una matrice . . . 148
9.1.1 Riduzione a scala di una matrice . . . 151
9.2 Teorema di Rouché-Capelli . . . 154
9.2.1 Equazioni parametriche . . . 157
9.3 Determinante di una matrice . . . 158
9.3.1 Formula di Leibniz e Regola di Sarrus . . . 160
9.3.2 Determinante tramite riduzione a scala . . . 162
9.3.3 Sviluppo di Laplace . . . 164
9.3.4 Regola di Cramer . . . 166
9.4 Matrici inverse . . . 167
9.5 Teorema degli orlati . . . 173
9.6 Matrici simili . . . 179
9.6.1 Invarianti per similitudine . . . 180
9.6.2 Diagonalizzazione di una matrice . . . 185
9.7 Matrice di una trasformazione lineare . . . 190
9.8 Matrici ortogonali . . . 196

10 Algoritmi di crittografia **200**
10.1 Algoritmo RSA . . . 200
10.2 Interpolazione di Lagrange e Algoritmo SSS . . . 202

Capitolo 0

Introduzione

Il seguente corso mira all'apprendimento dei principali elementi di Algebra Elementare, Algebra Lineare e Teoria dei Gruppi, incentrandosi principalmente su:

- **Insiemi**, partizioni, applicazioni, **relazioni** d'equivalenza e d'ordine, permutazioni. I numeri naturali e il **principio di induzione**. Il teorema binomiale.
- **Strutture algebriche**: Gruppi, anelli e campi, reticoli, sottostrutture, omomorfismi . Anelli di polinomi. L'algoritmo di Euclide. Classi resto modulo un intero. Congruenze ed equazioni in Z/n. Il teorema di Eulero-Fermat.
- **Sistemi di equazioni lineari**: algoritmo di Gauss, determinante di una matrice quadrata. Matrice inversa. Rango di una matrice: Il teorema di Cramer ed il teorema di Rouche-Capelli. Risoluzione di sistemi lineari omogenei.
- **Spazi vettoriali**: dipendenza e indipendenza lineare, basi. Matrici. Applicazioni lineari e loro rappresentazione: cambiamenti di base, diagonalizzazione di un operatore lineare. Polinomio caratteristico e relativa invarianza.
- **Elementi di teoria dei gruppi**: Gruppi ciclici, periodo di un elemento di un gruppo. Classificazione dei gruppi ciclici. Classi laterali modulo un sottogruppo. Il teorema di Lagrange e le sue conseguenze, sottogruppi normali. Il teorema fondamentale di omomorfismo tra gruppi.

Prima di approcciarsi al seguente corso, è consigliato avere una conoscenza sufficiente dei concetti espressi nel corso di ***Metodi Matematici per l'Informatica***.

Capitolo 1

Strutture algebriche principali

1.1 Richiami di insiemistica

Definiamo **insieme** una collezione di elementi su cui vengono svolte delle **operazioni algebriche**.

$$S : \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

In questo corso tratteremo molto le proprietà e le operazioni applicabili sulle varie **strutture algebriche** rappresentate tramite insiemi, pertanto effettuiamo un breve ripasso di **teoria degli insiemi**:

- Dati due insiemi A, B, definiamo l'**insieme unione** $A \cup B$ come l'insieme dove

$$A \cup B : \{x \in A \vee x \in B\}$$

- Definiamo invece come **insieme intersezione** $A \cap B$ l'insieme dove

$$A \cap B : \{x \in A \wedge x \in B\}$$

- Considerato un insieme B, affermiamo che l'insieme B è **sottoinsieme** dell'insieme A (denotato come $B \subseteq A$) se si verifica che

$$B \subseteq A \iff x \in B \implies x \in A$$

- Considerato un insieme X e un insieme A tale che $A \subseteq X$, denotiamo l'**insieme complementare** di A su X come

$$X - A = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

- La **legge di De Morgan** afferma che

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$$

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$$

- Dato un insieme di partenza detto **dominio** ed un insieme di arrivo detto **codominio**, definiamo come **funzione** la relazione che associa ogni elemento del dominio ad un elemento del codominio

$$f : X \to Y : x \mapsto y$$

- Definiamo come **immagine della funzione** l'insieme di tutti gli elementi del codominio raggiungibili da un elemento del dominio

$$Im(f) = \{y \in Y \mid f(x) = y, \exists x \in X\}$$

- Una funzione viene detta **iniettiva** se <u>ogni</u> elemento del dominio è associato ad un elemento diverso del codominio

$$\texttt{Iniettività} : \forall x_1, x_2 \in X \mid x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Una funzione viene detta **suriettiva** se <u>ogni</u> elemento del codominio è raggiungibile da almeno un elemento del dominio

$$\texttt{Suriettività} : \forall y \in Y, \exists x \in X \mid f(x) = y$$

  In alternativa, potremmo affermare che una funzione è suriettiva se la sua immagine coincide con il suo codominio

$$\texttt{Suriettività} : Im(f) = Y$$

- Una funzione viene detta **biettiva** (o biunivoca) se è sia iniettiva sia suriettiva. Se esiste una funzione biettiva tra due insiemi X ed Y, allora tali insiemi possiedono la **stessa cardinalità**

$$\exists f : X \to Y \mid f \text{ è biettiva} \implies |X| = |Y|$$

- Definiamo come **prodotto cartesiano** di due insiemi X e Y l'insieme contenente tutte le coppie (x, y) dove $x \in X$ e $y \in Y$

$$X \times Y : \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

- Date due funzioni f, g, la loro **funzione composta** è una funzione che associa un elemento del dominio di f ad un elemento del codominio di g

$$f : X \to Y : x \mapsto f(x)$$
$$g : Y \to Z : x \mapsto g(x)$$
$$g \circ f : X \to Z : x \mapsto g(f(x)) : x \mapsto (g \circ f)(x)$$

1.2 Operazioni binarie, Assiomi e Proprietà

Definition 1. Operazione binaria

Dato un insieme S, definiamo **operazione binaria** una funzione che manda ogni coppia di elementi appartenenti ad S in S stesso.

Tale proprietà viene anche detta **assioma di chiusura**.

$$m : S \times S \to S : (x, y) \mapsto m(x, y)$$

Attenzione: per comodità di scrittura, d'ora in poi indicheremo l'applicazione di un'operazione binaria generica $m(x, y)$ come xy.

Tuttavia, tale scrittura non corrisponde all'operazione prodotto (a meno che non sia specificato), bensì corrisponde ad un semplice "segnaposto" per una qualsiasi operazione binaria.

Esempio:

- Sull'insieme $\mathbb{R}$ l'**operazione additiva**, indicata come

  $$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$$

  e l'**operazione moltiplicativa**, indicata come

  $$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$$

  sono entrambe operazioni binarie
- Sull'insieme $X = \{f : A \to A : a \mapsto a\}$ la **composizione tra funzioni** corrisponde ad un'operazione binaria:

  $$\circ : X \times X \to X : (g, f) \to g \circ f$$

Definition 2. Assioma di Associatività

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$, tale operazione rispetta l'**assioma di associatività** se l'ordine di applicazione di tale operazione binaria non influenza il risultato:

$$x(yz) = (xy)z = xyz, \forall x, y, z \in S$$

Esempi:

- Operazione additiva: $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z, \forall x, y, z \in S$
- Operazione prodotto: $(xy)z = x(yz) = xyz, \forall x, y, z \in S$

Definition 3. Assioma di esistenza dell'Elemento neutro

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$, tale operazione rispetta l'**assioma di esistenza dell'elemento neutro** se esiste un unico elemento $e \in S$, detto neutro, tale che:

$$xe = ex = x, \forall x \in S$$

Dimostrazione unicità:

- Supponiamo che

$$\exists e_1, e_2 \in S \mid e_1 x = x e_1 = x \wedge e_2 x = x e_2 = x, \forall x \in S$$

- Di conseguenza, si ha che

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2 \iff e_1 = e_2$$

$\square$

Esempi:

- Operazione additiva: $x + 0 = x, \forall x \in S$
- Operazione prodotto: $x \cdot 1 = x, \forall x \in S$

Definition 4. Assioma di esistenza dell'Elemento inverso

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$, tale operazione rispetta l'**assioma di esistenza dell'elemento inverso** se esiste un unico elemento $x^{-1} \in S$, detto inverso, tale che:

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e, \forall x \in S$$

Attenzione: con la scrittura x^{-1} indichiamo l'elemento inverso di x rispetto all'operazione binaria definita, <u>non</u> il "classico" inverso del prodotto (ossia $\frac{1}{x}$)

Dimostrazione unicità:

- Supponiamo che

$$\exists x_1^{-1}, x_2^{-1} \in S \mid x x_1^{-1} = x_1^{-1} x = e \wedge x x_2^{-1} = x_2^{-1} x = e, \forall x \in S$$

- Di conseguenza, si ha che

$$x_1^{-1} x = e = x_2^{-1} x \iff x_1^{-1} x = x_2^{-1} x \iff x_1^{-1} = x_2^{-1}$$

$\square$

Esempi:

- Operazione additiva: $x + (-x) = 0, \forall x \in S$
- Operazione prodotto: $x \cdot \frac{1}{x} = 1, \forall x \in S$

Definition 5. Assioma di Commutatività

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$, tale operazione rispetta l'**assioma di commutatività** se l'ordine degli elementi su cui viene applicata tale operazione non influenza il risultato:

$$xy = yx, \forall x, y \in S$$

Esempi:

- Operazione additiva: $x + y = y + x, \forall x \in S$
- Operazione prodotto: $xy = yx, \forall x \in S$

1.3 Semigruppi, Monoidi e Gruppi

Una volta definiti i quattro assiomi principali delle operazioni binarie, possiamo definire le seguenti quattro **strutture algebriche**:

Definition 6. Strutture algebriche semplici

Data la coppia (S, m) dove S è un **insieme** e m l'**operazione binaria** applicata su di esso, diciamo che tale **struttura algebrica** è un:

- Un **semigruppo** se vale l'assioma di associatività
- Un **monoide** se valgono gli assiomi di d'associatività e di elemento neutro
- Un **gruppo** se valgono gli assiomi di associatività, elemento neutro e elemento inverso
- Un **gruppo abeliano** (o commutativo) se valgono gli assiomi di associatività, elemento neutro, elemento inverso e commutatività

Esempi:

- $(\mathbb{N} - \{0\}, +)$ è un **semigruppo**
- $(\mathbb{N}, +)$ è un **monoide** commutativo
- $(\mathbb{R}, \cdot)$ è un **gruppo abeliano**
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ è un **monoide** commutativo
- Dati due insiemi X, Y, denotiamo con Y^X l'insieme composto da tutte le funzioni da X in Y

  $$Y^X : \{f : X \to Y\}$$

  Allora, la coppia $(X^X, \circ)$ è un monoide, poiché si ha:

  - **Associatività**:

    $$f, g, h \in X^X \implies h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

– **Elemento neutro**:

$$\exists \mathtt{id} \in X^X \mid \forall f \in X^X, f \circ \mathtt{id} = \mathtt{id} \circ f = f$$

dove $\mathtt{id}$ è la funzione identità, ossia $\mathtt{id}(x) = x, \forall x \in X$.

1.4 Anelli e Campi

Definition 7. Anello

Date le due operazioni binarie di somma e prodotto, definite come:

$$+ : A \times A \to A : (x, y) \mapsto xy$$

$$\cdot : A \times A \to A : (x, y) \mapsto x + y$$

Definiamo una struttura algebrica $(A, +, \cdot)$ come **anello** se:

- $(A, +)$ è un **gruppo abeliano**
- $(A, \cdot)$ è un **monoide**
- Vale la **relazione distributiva**, definita come:

$$a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in A$$

$$(b + c)a = ba + ca, \forall a, b, c \in A$$

Inoltre, definiamo tale struttura come **anello commutativo** se nella coppia $(A, \cdot)$ vale anche l'assioma **commutativo**:

$$ab = ba, \forall a, b \in A$$

Observation 1

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello. Dato l'elemento neutro della somma $0 \in A$, si ha che:

$$a \cdot 0 = 0, \forall a \in A$$

Dimostrazione:

- Dato un elemento $a \in A$ si ha che:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (0 + 1) = a \cdot 0 + a \cdot 1 = a \cdot 0 + a \iff$$

$$\iff a = a \cdot 0 + a \iff a + (-a) = a \cdot 0 + a + (-a) \iff 0 = a \cdot 0$$

□

Observation 2

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello. Dati due elementi $x, y \in A$, si ha che:

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, \forall a \in A$$

Dimostrazione:

- Dati due elementi $x, y \in A$ si ha che:

$$(xy)^{-1}(xy) = 1 \iff (xy)^{-1}xy = 1 \iff (xy)^{-1}xyy^{-1} = y^{-1} \iff$$
$$\iff (xy)^{-1}x = y^{-1} \iff (xy)^{-1}xx^{-1} = y^{-1}x^{-1} \iff (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$$

$\square$

Corollary 1

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo. Dati due elementi $x, y \in A$, si ha che:

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}, \forall a \in A$$

Definition 8. Campo

Definiamo una struttura algebrica $(K, +, \cdot)$ come **campo** se:

- $(K, +)$ è un **gruppo abeliano**
- $(K - \{0\}, \cdot)$ è un **gruppo abeliano**

Esempi:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un **anello commutativo**
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un **campo**
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un **campo**

1.5 Sottogruppi ed Ideali

Definition 9. Sottogruppo

Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Definiamo $(H, \cdot)$ come **sottogruppo** di G, indicato come $H \leqslant G$, se:

- $e \in H$, dove e è l'elemento neutro di G
- $x, y \in H \implies xy \in H$
- $x \in H \implies x^{-1} \in H$

Attenzione: ricordiamo che con $\cdot$ intendiamo una qualsiasi operazione binaria

Esempi:

- $(\mathbb{Z}, +) \leqslant (\mathbb{Q}, +) \leqslant (\mathbb{R}, +) \leqslant (\mathbb{C}, +)$
- $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot) \nleqslant (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot) \leqslant (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$

Definition 10. Ideale

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello. Definiamo $(I, +, \cdot)$ come **ideale** di A, indicato come $I \triangleleft A$, se:

- $(I, +) \leqslant (A, +)$
- $AI, IA \subseteq I$, dove $AI : \{ax \mid x \in I, a \in A\}$ e $IA : \{yb \mid y \in I, b \in A\}$

Attenzione: generalmente, si ha che $AI \neq IA$

Observation 3

Se A è un anello **commutativo**, anche $I \triangleleft A$ è **commutativo**. In particolare, in tal caso si ha che $AI = IA$.

Definition 11. Ideale generato da elementi

Sia A un anello commutativo e siano $a_1, \ldots, a_n \in A$. Definiamo $I(a_1, \ldots, a_n) \triangleleft A$ come **ideale generato da** $a_1, \ldots, a_n$, dove

$$I(a_1, \ldots, a_n) : \{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \mid b_1, \ldots, b_n \in A\}$$

Dimostrazione:

- Verifichiamo che l'elemento neutro della somma sia in $I(a_1, \ldots, a_n)$:

$$0 = a_1 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 \in I(a_1, \ldots, a_n)$$

- Verifichiamo che $I(a_1, \dots, a_n)$ sia chiuso rispetto alla somma:

$$x, y \in I(a_1, \dots, a_2) \iff x = a_1b_1 + \dots + a_nb_n, y = a_1c_1 + \dots + a_nc_n \iff$$

$$\iff x + y = a_1(b_1 + c_1) + \dots + a_n(b_n + c_n) \implies x + y \in I(a_1, \dots, a_n)$$

- Verifichiamo che $I(a_1, \dots, a_n)$ sia chiuso rispetto agli inversi della somma:

$$x \in I(a_1, \dots, a_2) \iff x = a_1b_1 + \dots + a_n + b_n \iff$$

$$\iff -x = -a_1b_1 - \dots - a_nb_n = a_1(-b_1) - \dots - a_n(-b_n) \implies -x \in I(a_1, \dots, a_n)$$

- Verifichiamo che $I(a_1, \dots, a_n)$ sia chiuso rispetto al prodotto:

$$x \in I(a_1, \dots, a_2) \iff x = a_1b_1 + \dots + a_nb_n \implies c \in A \mid cx = c(a_1b_1 + \dots + a_nb_n)$$

$$\implies cx = c(a_1b_1 + \dots + a_nb_n) = a_1(b_1c) + \dots + a_n(b_nc) \implies cx \in I(a_1, \dots, a_n)$$

$\square$

Definition 12. Ideale principale

Sia A un anello commutativo. Definiamo $I(a) \triangleleft A$ come **ideale principale di** A **generato da** a, dove

$$I(a) = \{ax \mid x \in A\}$$

(dimostrazione analoga alla precedente)

Proposition 1. Somma tra ideali

Dato un anello commutativo A e due suoi ideali $I, J \triangleleft A$, la loro somma corrisponde a:

$$I + J : \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$$

inoltre, si ha che $I + J \triangleleft A$

Dimostrazione:

- $I + J \leqslant A$ poiché:
  - $0 \in I, 0 \in J \implies 0 = 0 + 0 \in I + J$
  - $x, y \in I + J \iff x + y = (i_1 + j_1) + (i_2 + j_2) = (i_1 + i_2) + (j_1 + j_2) \implies x + y \in I + J$
  - $x = i + j \in I + J \iff -x = -(i + y) = (-i) + (-j), -i \in I, -j \in J \implies -x \in I + J$
- $a \in A, x \in I + J \implies ax \in I + J$, poiché:

$$a \in A \mid ai \in I, aj \in J \implies ai + aj = a(i + j) \in I + J$$

$\square$

Proposition 2. Intersezioni tra ideali

Dato un anello commutativo A e due suoi ideali $I, J \triangleleft A$, la loro intersezione corrisponde a:

$$I \cap J : \{h \mid h \in I \land h \in J\}$$

inoltre, si ha che $I \cap J \triangleleft A$

Dimostrazione:

- $I \cap J \leqslant A$ poiché:
  - $0 \in I \land 0 \in J \implies 0 \in I \cap J$
  - $x, y \in I \cap J \implies x, y \in I \land x, y \in J \implies x+y \in I \land x+y \in J \implies x+y \in I \cap J$
  - $x \in I \land x \in J \implies -x \in I \land -x \in J \implies -x \in I \cap J$
- $a \in A, x \in I \cap J \implies ax \in I \cap J$, poiché:

$$a \in A, x \in I \cap J \implies ax \in I \land ax \in J \implies ax \in I \cap J$$

□

Proposition 3. Prodotto tra ideali

Dato un anello commutativo A e due suoi ideali $I, J \triangleleft A$, la loro prodotto corrisponde a:

$$I \cdot J : \{i_1 j_1 + i_2 j_2 + \ldots + i_n j_n \mid i_k \in I, j_h \in J\}$$

inoltre, si ha che $I \cdot J \triangleleft A$

Dimostrazione:

- $I \cdot J \leqslant A$, poiché:
  - $0 \in I \land 0 \in J \implies 0 = 0 + 0 \in I \cdot J$
  - $x = i_1 j_1 + i_2 j_2 + \ldots + i_n j_n \in I \cdot J, , y = i'_1 j'_1 + i'_2 j'_2 + \ldots + i'_n j'_n \in I \cdot J \implies x + y = i_1 j_1 + i'_1 j'_1 + \ldots + i_n j_n + i'_n j'_n \in I \cdot J$
  - $x \in I \cdot J \implies -x = x = (-i_1) j_1 + (-i_2) j_2 + \ldots + (-i_n) j_n \mid -i_k \in I, j_h \in J \implies -x \in I \cdot J$
- $a \in A, x \in I \cdot J \implies ax \in I \cdot J$, poiché:

$$a \in A, x \in I \cdot J \implies ax = (ai_1) j_1 + (ai_2) j_2 + \ldots + (ai_n) j_n \implies ax \in I \cdot J$$

□

Capitolo 2

Numeri Complessi

Introduciamo il simbolo i con cui indichiamo l'**unità immaginaria**, avente la seguente proprietà: $i^2 = -1$. Definiamo l'insieme dei **numeri complessi** come

$$\mathbb{C} : \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

ossia l'insieme delle espressioni $z = a + ib$ composte dalla somma di una **parte reale**, indicata con $Re(z) = a$, ed una **parte immaginaria**, indicata con $Im(z) = b$.

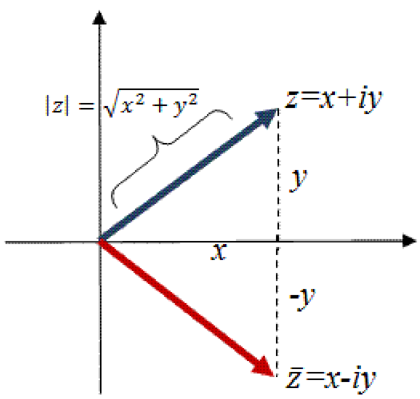
Ovviamente, da tale definizione di insieme dei numeri complessi ne segue che $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, poiché $\forall a \in \mathbb{R} \implies \exists z \in \mathbb{C} \mid z = a + i \cdot 0 = a$. Inoltre, definiamo un **numero immaginario puro** come un numero nella forma $z \in \mathbb{C} \mid z = 0 + i \cdot b = ib$.

Definition 13. Coniugato di un numero complesso

Definiamo come **coniugato di** z (indicato come $\overline{z} \in \mathbb{C}$) il numero complesso avente come parte immaginaria il valore inverso della parte immaginaria di z:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists \overline{z} \in \mathbb{C} \mid Im(\overline{z}) = -Im(z) \implies z = a + ib, \overline{z} = a - ib$$

Poiché un numero complesso è determinato da una **coppia di valori** $a, b \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{C}, z = a + ib$, possiamo rappresentare tale numero graficamente attraverso il **piano di Gauss**, avente come ascisse la **parte reale** dei numeri complessi e come ordinate la **parte immaginaria**.



Per tale motivo, dato un elemento $z \in \mathbb{C}$, definiamo come suo **valore assoluto** il numero reale corrispondente alla distanza di z stesso dall'origine, facilmente ricavabile attraverso il **teorema di Pitagora**:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observation 4

Dati $z, w \in \mathbb{C} \mid z = a + ib, w = c + id$, la **somma dei loro coniugati** equivale al **coniugato della loro somma**

$$\overline{z} + \overline{w} = a - ib + c - id = (a - c) - i(b + d) = \overline{z + w}$$

Dati $z, w \in \mathbb{C} \mid z = a + ib, w = c + id$, il **prodotto dei loro coniugati** equivale al **coniugato del loro prodotto**

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc) = \overline{zw}$$

Dato $z \in \mathbb{C}$, il **prodotto** tra **esso** e il suo **coniugato** corrisponde al **quadrato del valore assoluto** di z

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

2.1 Il campo dei numeri complessi

Proposition 4

Dato insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$, si ha che $(C, +, \cdot)$ è un **campo**

Dimostrazione:

- Le operazioni binarie di somma e prodotto sono ben definite:

$$z, w \in C \implies z + w = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d) \implies z + w \in \mathbb{C}$$

$$z, w \in C \implies zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \implies zw \in \mathbb{C}$$

- Per costruzione di $\cdot$ e $+$, vale la **relazione distributiva**:

$$\forall z, w, q \in \mathbb{C} \mid z(w + q) = zw + zq$$

- È un gruppo abeliano nella somma:
  - **Associatività della somma**

$$z := a+bi, w := c+di, q := e+fi \in \mathbb{C} \implies (z+w)+q = (a+bi+c+di)+e+fi$$

$$= a + bi + c + di + e + fi = a + bi + (c + di + e + fi) = z + (w + q)$$

- **Elemento neutro della somma**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists! 0 \in \mathbb{C} \mid z + 0 = a + bi + 0 = a + bi = z$$

- **Elemento inverso della somma**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists! - z \in \mathbb{C} \mid z + (-z) = a + bi + (-a - bi) = 0$$

- **Commutatività della somma**

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \mid z + w = a + bi + c + di = c + di + a + bi = w + z$$

• È un gruppo abeliano nel prodotto (escludendo 0):

- **Associatività del prodotto**

$$\forall z := a+bi, w := c+di, q := e+fi \in \mathbb{C} \implies (zw)q = [(a+bi)\cdot(c+di)]\cdot(e+fi) =$$

$$= (a + bi) \cdot (c + di) \cdot (e + fi) = (a + bi) \cdot [(c + di) \cdot (e + fi)] = z(wq)$$

- **Elemento neutro del prodotto**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists! 1 \in \mathbb{C} \mid z \cdot 1 = (a + bi) \cdot 1 = a + bi = z$$

- **Elemento inverso del prodotto**: l'inverso $z^{-1} = \frac{1}{a+ib}$ non risulta apparire nella forma $c + id \mid c, d \in \mathbb{R}$. Riscriviamo quindi z^{-1} come:

$$z = a + ib \implies z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

Ponendo $c := \frac{a}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$ e $d := \frac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$, otteniamo che $z^{-1} = c + id \in \mathbb{C}$. Quindi l'assioma è verificato per:

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists! z^{-1} := \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} \mid z \cdot z^{-1} = 1$$

- **Commutatività del prodotto**

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \mid z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (c + di)(a + bi) = w \cdot' z$$

□

2.2 Forma polare dei numeri complessi

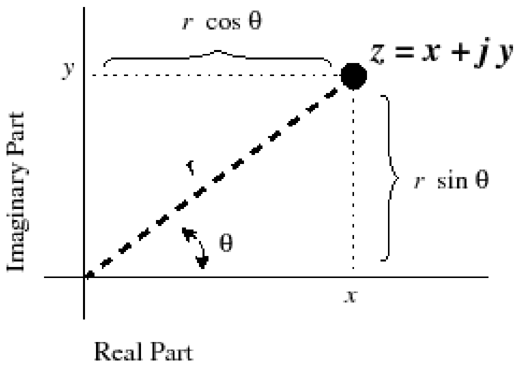
Inoltre, abbiamo visto come un numero complesso possa essere espresso come un punto sul piano gaussiano tramite una **coppia di valori**, descrivendo la distanza di tale punto dall'origine del piano $(0, 0)$ come $|z|$.

Possiamo quindi descrivere una **circonferenza di raggio** $r = |z|$ rappresentante tutti i numeri complessi aventi la stessa distanza dall'origine, dove θ corrisponde all'**arco in radianti** descritto dal **vettore** costruito attraverso le due coordinate gaussiane rappresentate da z.

Dunque, se $r = |z|$, abbiamo che:

$$r = |z| \implies \begin{cases} a = r \cdot \cos(\theta) \\ b = r \cdot \sin(\theta) \end{cases} \implies \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{r} = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Graficamente, ciò corrisponde a dire che:



Tuttavia, ricordando le proprietà delle funzioni seno e coseno, notiamo come il sistema imposto ammetta **infinite soluzioni**, poiché se θ è una soluzione allora anche $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ è soluzione del sistema.

Per tale motivo, ogni soluzione valida viene detta **argomento di z** e, in particolare, esiste **un solo argomento principale** tale che $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Definiamo quindi come $arg(z)$ l'insieme contenente tutti gli argomenti di z, mentre definiamo come $Arg(z)$ l'argomento principale di z.

Definition 14. Forma polare dei numeri complessi

Dato un numero complesso $z := a + ib \in \mathbb{C}$, definiamo come **forma polare** di tale numero come:

$$z = r(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$$

dove $r = |z|$ e $\theta = Arg(z)$.

Utilizziamo anche la **notazione contratta**:

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$$

dunque:

$$z = re^{i\theta}$$

Giustificazione per la notazione contratta:

- Matematicamente, tramite le proprietà degli esponenti abbiamo che

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

- Svolgiamo ora tale calcolo tramite la notazione esplicita

$$(\cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1)) \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)) =$$

$$[\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2)] + i \cdot [\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2)] =$$

- Tramite le proprietà trigonometriche, in particolare $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, riscriviamo tale espressione come:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

- Riscrivendo il risultato nella forma contratta, otteniamo che i due calcoli matematici risultano essere equivalenti tra di loro:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

L'uso di tale notazione ci permette di svolgere in modo rapido operazioni tra numeri complessi, in particolare tramite la **formula di De Moivre**:

Definition 15. Formula di De Moivre

Dato $z \in \mathbb{C}$, si ha che:

$$z = re^{i\theta} \implies z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Esempi:

1. Dato $z = -i$, calcolare z^4.
    - Calcoliamo l'argomento principale di z:

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{0}{1} = 0 \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases} \implies Arg(z) = \frac{3}{2}\pi \implies arg(z) = Arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

    - Quindi, riscriviamo z come

$$z = re^{Arg(z)\cdot i} = e^{\frac{3}{2}\pi \cdot i}$$

    - A questo punto, z^4 corrisponderà a:

$$z^4 = e^{4\cdot\frac{3}{2}\pi\cdot i} = e^{6\pi\cdot i} = e^{0\cdot i} = 1$$

2. Dato $z = 1 - i$, calcolare z^{10}.
    - Calcoliamo l'argomento principale di z:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies Arg(z) = \frac{7}{4}\pi \implies arg(z) = Arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

    - Quindi, riscriviamo z come

$$z = re^{Arg(z)\cdot i} = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi\cdot i}$$

    - A questo punto, z^{10} corrisponderà a:

$$z^{10} = (\sqrt{2})^{10}e^{10\cdot\frac{7}{4}\pi\cdot i} = 2^5e^{\frac{35}{2}\pi\cdot i} = 2^5e^{(16\pi+\frac{3}{2}\pi)\cdot i} = 2^5e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

    - Siccome abbiamo visto che $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$, allora riscriviamo z^{10} come:

$$z^{10} = 2^5e^{\frac{3}{2}\pi i} = -2^5 i$$

2.3 Teorema fondamentale dell'algebra

Considerati due numeri z e n dove $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ci chiediamo quante siano le **soluzioni complesse dell'equazione** $x^n = z$. Nel caso in cui $z = 0$, l'unica soluzione risulta essere $x = 0$. Nel caso in cui $z \neq 0$, invece, esistono n **distinte soluzioni**.

Utilizzando la formula di De Moivre, possiamo riscrivere tale espressione come:

$$x^n = z \iff x = \sqrt[n]{z} \iff x = z^{\frac{1}{n}} \iff$$
$$\iff x = r^{\frac{1}{n}}e^{\frac{1}{n}\theta i}$$

Abbiamo quindi trovato **una soluzione valida** per l'equazione. Tuttavia, ricordando che un numero complesso z possiede **infiniti argomenti**, riscriviamo x come:

$$x = r^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n})}$$

A questo punto, al variare di $k = 0, 1, \ldots, n-1$ otteniamo le n **soluzioni all'equazione**. Difatti, quando $k = n$, riotteniamo la prima soluzione dell'equazione, mentre quando $k = n + 1$ otteniamo la seconda, e così via.

Esempio:

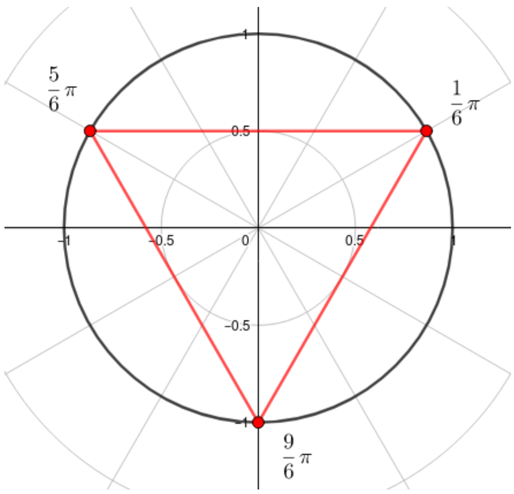
- Dato $z = i$, vogliamo sapere le soluzioni dell'equazione $x^3 = z$.

$$x^3 = i \iff x^3 = e^{\frac{1}{2}\pi i} \iff x = e^{i(\frac{1}{2\cdot3}\pi+\frac{2k\pi}{3})}$$

- Se $k = 0$
$$x_1 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi)} = e^{\frac{1}{6}\pi i}$$
- Se $k = 1$
$$x_2 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{2\pi}{3})} = e^{\frac{5}{6}\pi i}$$
- Se $k = 2$
$$x_3 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{4\pi}{3})} = e^{\frac{9}{6}\pi i} = e^{\frac{3}{2}\pi i}$$
- Se $k = 3$
$$x_4 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{6\pi}{3})} = e^{i(\frac{1}{6}\pi + 2\pi)} = e^{\frac{1}{6}\pi i} \implies x_4 = x_1$$
- Se $k = 4$
$$x_5 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{8\pi}{3})} = e^{i(\frac{1}{6}\pi + \frac{2\pi}{3} + 2\pi)} = e^{\frac{5}{6}\pi i} \implies x_5 = x_2$$
- ...

Notiamo quindi che nonostante esistano **infiniti argomenti di z**, le soluzioni risultano essere cicliche tra di loro, risultando in solo 3 **soluzioni valide per l'equazione**.

Inoltre, graficando sul piano di Gauss le tre radici soluzioni dell'equazione, notiamo come ognuna di esse corrisponda al vertice di un triangolo equilatero iscritto in una circonferenza di raggio 1:



Observation 5

Le n radici n-esime di un numero complesso corrispondono ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio $|z|^{\frac{1}{n}}$.

Theorem 5. Teorema fondamentale dell'algebra

Dato un polinomio $p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$ dove $a_i \in \mathbb{C}, n \geq 1, a_n \neq 0$, **esistono sempre** n **radici complesse** di $p(x)$:

$$\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C} \mid p(x_i) = 0, \forall i \in [1, n]$$

Capitolo 3

Relazioni e Induzione

Definition 16. Relazione

Dato un insieme X, definiamo come **relazione** R su X un **sottoinsieme del prodotto cartesiano** $X \times X$:

$$R \subseteq X \times X \iff R \subseteq \{(x, y) \mid x, y \in X\}$$

Data una coppia (x, y), se essa appartiene alla relazione R allora affermiamo ciò con la notazione $x \sim y$ (oppure con $R(x, y)$), altrimenti affermiamo che essa non appartiene alla relazione con la notazione $x \not\sim y$ (oppure con $\not R\,(x, y)$).

$$x \sim y \iff (x, y) \in R \qquad\qquad x \not\sim y \iff (x, y) \notin R$$

Definition 17. Relazione di equivalenza

Una relazione $\sim$ viene detta **relazione di equivalenza** se su di essa valgono le seguenti proprietà:

- **Riflessività**:
$$x \sim x, \forall x \in X$$
- **Simmetria**:
$$x \sim y \implies y \sim x, \forall x, y \in X$$
- **Transitività**:
$$x \sim y \land y \sim z \implies x \sim z, \forall x, y, z \in X$$

Esempi:

- La relazione di eguaglianza $a \sim b \iff a = b$ è una relazione di equivalenza
- Dato l'insieme X corrispondente ad un insieme di automobili, la relazione $a \sim b \iff$ `a ha lo stesso colore di b` è una relazione di equivalenza

Definition 18. Relazione d'ordine totale e parziale

Una relazione $\prec$ viene detta **relazione d'ordine totale** se su di essa valgono le seguenti proprietà:

- **Riflessività**:
$$x \prec x, \forall x \in X$$
- **Anti-simmetria**:
$$x \prec y, y \prec x \implies x = y, \forall x, y \in X$$
- **Transitività**:
$$x \prec y, y \prec z \implies x \prec z, \forall x, y, z \in X$$
- **Totalità**:
$$x \prec y \lor y \prec x, \forall x, y \in X$$

Se $\prec$ è una relazione che soddisfa la riflessività, l'anti-simmetria, la transitività ma non la totalità, allora tale relazione viene detta **relazione d'ordine parziale**

Esempi:

- La relazione di minor-eguaglianza $a \leq b$ è una relazione d'ordine
- Dato un insieme X, definiamo come $\mathcal{P}(X)$ l'insieme contenente tutte le parti di X (ossia i suoi sottoinsiemi)
$$\mathcal{P}(X) = \{X' \mid X' \subseteq X\}$$
La relazione $\subseteq$ su $\mathcal{P}(X)$ risulta essere una relazione d'ordine parziale, poiché:
  - Ogni sottoinsieme A è sottoinsieme di se stesso (riflessività):
  $$A \subseteq A, \forall A \in \mathcal{P}(X)$$
  - Se un sottoinsieme A è sottoinsieme di B e B è sottoinsieme di A, allora ciò è possibile solo se A e B sono lo stesso sottoinsieme (anti-simmetria):
  $$A \subseteq B \land B \subseteq A \implies A = B$$
  - Se un sottoinsieme A è sottoinsieme di B e B è sottoinsieme di C, allora anche A è sottoinsieme di C (transitività):
  $$A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$$
  - Non tutti i sottoinsiemi sono confrontabili tra loro (ordine non totale). Ad esempio, se $X = \{a, b, c\}$ si ha che:
  $$\{a\}, \{b, c\} \in \mathcal{P}(X) \implies \{a\} \not\subseteq \{b, c\} \land \{b, c\} \not\subseteq \{a\}$$

3.1 Classi di equivalenza

Definition 19. Classe di equivalenza

Sia $\sim$ relazione d'equivalenza definita su un insieme X. Dato un elemento $x \in X$, denotiamo come $[x]$ la sua **classe di equivalenza su** $\sim$, ossia l'insieme di tutti gli elementi in relazione con x:

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

Observation 6

Sia $\sim$ relazione d'equivalenza definita su un insieme X. Dato un elemento $x \in X$, per riflessività della relazione $\sim$ si ha che:

$$x \sim x \iff x \in [x]$$

dunque un elemento è sempre nella sua classe di equivalenza

Definition 20. Insieme quoziente

Sia $\sim$ relazione d'equivalenza definita su un insieme X. Definiamo come **insieme quoziente di X su** $\sim$ l'insieme di tutte le classi di equivalenza indotte dalla relazione:

$$X/\sim: \{[x] \mid x \in X\}$$

Definition 21. Partizione di un insieme

Dato un insieme X, definiamo come **partizione di** X l'insieme $\{X_1, \dots, X_n\}$ delle sue **parti**, ossia i suoi sottoinsiemi disgiunti tra loro la cui unione corrisponde ad X:

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i$$

dove $\bigsqcup$ corrisponde al simbolo di **unione disgiunta**, equivalente a:

$$X = \bigcup_{1 \leq i,j \leq n} X_i \text{ dove } X_i \cap X_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

Observation 7

Data una relazione d'equivalenza $\sim$ definita su un insieme X, si verifica che:

$$x \sim y \iff [x] = [y] \qquad\qquad x \not\sim y \iff [x] \cap [y] = \emptyset$$

Dunque, **tutte le classi di equivalenza** indotte da $\sim$ sono **disgiunte tra loro**.

Dimostrazione:

- $x \sim y \implies [x] = [y]$
  - Se $x \sim y$, allora si ha che:
    $$z \in [x] \iff z \sim x \implies z \sim x, x \sim y \implies z \sim y \iff z \in [y] \implies [x] \subseteq [y]$$
  - Viceversa, siccome $x \sim y \iff y \sim x$, si ha che:
    $$w \in [y] \iff w \sim y \implies w \sim y, y \sim x \implies w \sim x \iff w \in [x] \implies [y] \subseteq [x]$$
- $[x] = [y] \implies x \sim y$
  - Se $[x] = [y]$, allora si ha che:
    $$z \in [x] = [y] \iff z \sim x, z \sim y \iff x \sim z, z \sim y \implies x \sim y$$
- $x \not\sim y \implies [x] \cap [y] = \emptyset$
  - Supponiamo per assurdo che $x \not\sim y$ e che $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Dunque, si ha che:
    $$[x] \cap [y] \neq \emptyset \iff \exists z \in [x] \cap [y] \iff z \in [x] \land z \in [y] \iff$$
    $$\iff z \sim x, z \sim y \iff x \sim z, z \sim y \implies x \sim y$$
    contraddicendo l'ipotesi iniziale, dunque $x \not\sim y \implies [x] \cap [y] = \emptyset$
- $[x] \cap [y] = \emptyset \implies x \not\sim y$
  - Supponiamo per assurdo che $[x] \cap [y] = \emptyset$ e che $x \sim y$. Dunque, si ha che:
    $$x \sim y \iff x \in [x] = [y] \implies [x] \cap [y] = [x] = [y] \neq \emptyset$$
    contraddicendo l'ipotesi iniziale, dunque $[x] \cap [y] = \emptyset \implies x \not\sim y$

□

Corollary 2

Data una relazione d'equivalenza $\sim$ definita su un insieme X, l'**insieme quoziente** $X/\sim$ è una **partizione** di X:
$$X = \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x]$$

Dimostrazione:

- Poiché tutte le classi di equivalenza appartenenti a $X/\sim$ sono disgiunte tra loro, si ha che:
  $$\bigcup_{[x] \in X/\sim} [x] = \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x]$$
- Dato $x \in X$, si ha che:
  $$x \in X \iff x \sim x \iff x \in [x] \implies x \in \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x]$$

- Viceversa, si ha che:

$$z \in \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x] \implies \exists [x] \in X/\sim \mid z \in [x] \iff z \sim x \implies z \in X$$

$\square$

Proposition 6

Dato un insieme X, una partizione $P := \{X_1, \ldots, X_n\}$ di X **induce una relazione di equivalenza** sull'insieme X

Dimostrazione:

- Definiamo la relazione $x \sim y \iff x, y \in X_i$, dove $X_i \in P$, indicante che due elementi sono in relazione se e solo se appartengono alla stessa parte della partizione.
- Verifichiamo che si tratti di una relazione di equivalenza:
  - Riflessività:
  $$\forall x \in X, \exists X_i \in P \mid x \in X_i \implies x \sim x$$
  - Simmetria:
  $$x \sim y \iff x, y \in X_i, \exists X_i \in X \implies y \sim x$$
  - Transitività:
  $$x \sim y, y \sim z \iff x, y \in X_i \land y, z \in X_j, \exists X_i, X_j \in P \implies y \in X_i \cap X_j$$
  Poiché tutte le parti sono per definizione disgiunte tra loro, abbiamo che $y \in X_i \cap X_j \iff X_i = X_j$, dunque si ha che:
  $$x \sim y, y \sim z \implies x, y \in X_i \land y, z \cap X_j \iff x, y, z \in X_i = X_j \implies x \sim z$$

$\square$

Proposition 7. Proiezione canonica al quoziente

Una relazione di equivalenza $\sim$ su un insieme X induce una funzione suriettiva detta **proiezione canonica al quoziente** la quale mappa ogni elemento $x \in X$ alla propria classe di equivalenza su $\sim$:

$$\pi : X \to X/\sim : x \mapsto [x]$$

Dimostrazione:

- Poiché per riflessività si ha che $x \sim x \iff x \in [x]$, la funzione di proiezione π risulta essere evidentemente suriettiva:

$$x \in [x] \implies \forall [x] \in X/\sim, \exists x \in X \mid \pi(x) = [x]$$

$\square$

3.2 Relazione di Divisore

Definition 22. Relazione di divisore

Dati due numeri naturali $m, n \in \mathbb{Z}$, definiamo la relazione "m è divisore di n", indicato come $m \mid n$, se esiste un elemento $q \in \mathbb{Z} \mid n = mq$:

$$m \mid n \iff \exists q \in \mathbb{Z} \mid n = mq$$

Attenzione: $m \mid n$ non è il simbolo matematico "tale che"

Observation 8

Dati $m, n \in \mathbb{Z}$, la relazione di divisore $m \mid n$ è una relazione **riflessiva** e **transitiva**

Dimostrazione:

- Soddisfa la **riflessività**:

$$\forall n \in Z, n = n \cdot 1 \iff n \mid n \cdot 1 \iff n \mid n$$

- Soddisfa la **transitività**:

$$m \mid n, n \mid d \iff \exists p, q \in Z \mid n = mp, d = nq \implies d = (mp)q = m(pq) \implies m \mid d$$

- Non soddisfa l'**anti-simmetria**:

$$m \mid n, n \mid m \iff \exists p, q \in Z \mid n = mp, m = nq \implies n = mp = (np)q = n(pq)$$

  A questo punto, si verificano due casi:

  – Se $n = 0$ allora

$$n = 0 \implies m = nq = 0 \cdot q = 0 \implies m = 0 \implies n = m = 0$$

  – Se $n \neq 0$ allora

$$n \neq 0 \implies n = n(pq) \implies qp = 1 \implies p = q = \pm 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} n = m & \text{se } p = q = 1 \\ n = -m & \text{se } p = q = -1 \end{cases}$$

  Dunque, non in tutti i casi la relazione è anti-simmetrica.

□

Corollary 3

Dati $m, n \in \mathbb{N}$, la relazione di divisore $m \mid n$ è una **relazione d'ordine**

Dimostrazione:

- Ovviamente, poiché $m, n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, se segue che la relazione di divisore sia riflessiva e transitiva
- Procedendo analogamente alla dimostrazione precedente, il caso in cui $p = q = -1$ verrebbe scartato poiché $-1 \notin \mathbb{N}$, rendendo quindi $m = n$ l'unica possibilità

$$m \mid n, n \mid m, m, n \in \mathbb{N} \implies m = n$$

□

3.3 Relazione di Congruenza

Definition 23. Relazione di congruenza

Dato $a, b \in \mathbb{Z}$ e dato $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, definiamo la relazione "a è congruente a b in modulo n", denotata come con $a \equiv b(\mathsf{mod}\ n)$, se e solo se $n \mid b - a$

$$a \equiv b(\mathsf{mod}\ n) \iff n \mid (b - a)$$

Esempi:

- $7 \equiv 22(\mathsf{mod}\ 5) \implies n \mid b - a \implies 5 \mid (22 - 7) \implies 5 \mid 15$
- $7 \equiv 2(\mathsf{mod}\ 5) \implies n \mid b - a \implies 5 \mid (2 - 7) \implies 5 \mid -5$

Observation 9

La relazione di congruenza $a \equiv b(\mathsf{mod}\ n)$ è una **relazione di equivalenza**.

Dimostrazione:

- **Riflessiva**:

$$a = a \iff a = n \cdot 0 + a \iff a - a = n \cdot 0 \iff n \mid a - a \iff a \equiv a(\mathsf{mod}\ n)$$

- **Simmetrica**:

$$a \equiv b(\mathsf{mod}\ n) \iff n \mid b - a \iff \exists p \in \mathbb{Z} \mid b - a = np \iff$$
$$\iff a - b = n(-p) \iff n \mid a - b \iff b \equiv a(\mathsf{mod}\ n)$$

- **Transitiva**:

$$a \equiv b(\mathsf{mod}\ n), b \equiv c(\mathsf{mod}\ \mathsf{n}) \iff \exists p, q \in \mathbb{Z} \mid b - a = np, c - b = nq \implies$$
$$\implies c - a = (c - b) + (b - a) = qn + pn = n(q + p) \iff n \mid c - a \iff a \equiv c(\mathsf{mod}\ n)$$

3.4 Teorema della divisione con resto euclidea

Theorem 8. Teorema della divisione con resto euclidea

Dati due interi $m, n \in \mathbb{Z}$ dove $n > 0$, si ha che:

$$\exists! q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n \mid m = nq + r$$

dove q viene definito come **quoziente** e r come **resto** della divisione

Dimostrazione dell'esistenza:

- Dato $[m] : \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv m (\text{mod } n)\}$, si ha che:

  $a \in [m] \iff a \equiv m(\text{mod } n) \iff n \mid m-a \iff \exists p \in \mathbb{Z} \mid m-a = np \iff a = m-np$

- Consideriamo quindi $[m]_{\geq 0} : \{a \in [m] \mid a \in \mathbb{N}\}$. Poiché $[m]_{\geq 0} \subseteq \mathbb{N}$, per il **principio del buon ordinamento** si ha che:

$$\exists r \in [m]_{\geq 0} \mid r \text{ è il minimo di } [m]_{\geq 0} \implies \exists q \in \mathbb{Z} \mid r = m - nq$$

- Supponiamo per assurdo che $r \geq n$, da cui ne segue che $r - n \geq 0 \implies r - n \in \mathbb{N}$. Dunque, abbiamo che:

$$r - n = (m - nq) - n \iff r - n = m - n(q + 1) \iff r - n \in [m]_{\geq 0}$$

- Poiché $r - n \leq r$, l'ipotesi per cui r sia il minimo di $m_{\geq 0}$ viene contraddetta, dunque l'unica possibilità è che $r < n$
- Dunque, concludiamo che

$$\exists q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n \mid r = m - nq \implies m = nq + r$$

□

Dimostrazione dell'unicità:

- Supponiamo che q ed r non siano unici. Allora, ne segue che:

$$\exists q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}, 0 \leq r_1, r_2 < n \mid nq_1 + r_1 = m = nq_2 + r_2 \implies$$
$$\implies nq_1 + r_1 = nq_2 + r_2 \implies r_2 - r_1 = n(q_1 - q_2) \iff n \mid r_2 - r_1$$

- Siccome $0 \leq r_1, r_2 < n \implies -n < r_2 - r_1 < n$ e siccome $n \mid r_2 - r_1$, allora $r_2 - r_1$ deve necessariamente essere un multiplo di n compreso tra $-n$ ed n stesso.
- Poiché l'unico numero rispettante tali caratteristiche è 0, ne segue che:

$$\begin{cases} -n < r_2 - r_1 < n \\ n \mid r_2 - r_1 \iff \exists b \in \mathbb{Z} \mid r_2 - r_1 = nb \end{cases} \iff r_2 - r_1 = 0 \iff r_2 = r_1$$

- A questo punto, poiché $n > 0$,si ha che:

$$nq_1 + r_1 = nq_2 + r_2 \iff nq_1 + 0 = nq_2 + 0 \iff n(q_1 - nq_2) = 0 \iff q_1 = q_2$$

□

3.5 Relazione di Coniugio

Definition 24. Relazione di coniugio

Dato un gruppo G e dati $g, h \in G$, definiamo la relazione "g è coniugato di h" se si verifica che:

$$g \sim h \iff \exists a \in G \mid h = aga^{-1}$$

Observation 10

Se G è un gruppo abeliano, allora si ha che:

$$g \sim h \iff h = aga^{-1} = aa^{-1}g = g$$

Observation 11

La relazione di coniugio è una **relazione di equivalenza**.

Dimostrazione:

- **Riflessività**:
$$g = 1 \cdot g \cdot 1^{-1} \implies g \sim g$$
- **Simmetria**:
$$g \sim h \implies h = aga^{-1} \implies a^{-1}ha = a^{-1}aga^{-1}a \implies a^{-1}ha = g$$
ponendo $b := a^{-1}$, si ha che:
$$bhb^{-1} = g \implies h \sim g$$
- **Transitività**:
$$g \sim h \wedge h \sim k \implies h = aga^{-1}, k = bhb^{-1} \implies k = b(aga^{-1})b^{-1} = (ba)g(a^{-1}b^{-1})$$
ponendo $c := ba$, si ha che:
$$k = cgc^{-1} \implies g \sim k$$

□

3.6 Induzione matematica

Vogliamo dimostrare una successione di n proposizioni, etichettate come $p_1), p_2), \ldots, p_n)$. Supponiamo di aver dimostrato la proposizione $p_1)$, che denominiamo come **caso base**. Se le prime $p_1), \ldots, p_n)$ sono vere, allora anche la proposizione $p_{n+1})$ è vera (**passo induttivo**).

Per esprimere tale concetto matematicamente, possiamo dire che:

Theorem 9. Principio di induzione

Data una successione di proposizioni $p_1), \ldots, p_n)$, si ha che:

$$p_1) \implies p_2)$$

$$p_1), p_2) \implies p_3)$$

$$\ldots$$

$$p_1), \ldots, p_n) \implies p_{n+1})$$

Esempi:

1. - Vogliamo verificare che la proposizione seguente proposizione sia vera $\forall n \geq 1$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   - Verifichiamo quindi il **caso base** $p_1)$, ossia $n = 1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2}$$

   che risulta essere vero

   - A questo punto, assumiamo per **ipotesi induttiva** che $p_n)$ sia vera.
   - Impostiamo quindi il **passo induttivo**, ossia $p_{n+1})$:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

   - Notiamo come il **passo induttivo contenga al suo interno l'ipotesi induttiva stessa**, che abbiamo affermato essere vera:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + n}_{\text{Ipotesi induttiva}} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \iff$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \iff \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\iff \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dunque, anche il passo induttivo risulta essere vero, concludendo che **la proposizione $p_n)$ sia valida** $\forall n \geq 1$

2. • La funzione di Fibonacci è definita come:

$$\begin{cases} F_0 = 0 & \text{se } n = 0 \\ F_1 = 1 & \text{se } n = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

• Le costanti φ e ψ, corrispondenti alle soluzioni dell'equazione $x^2 = x + 1$, sono definite come:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

• Vogliamo verificare per induzione che la seguente proposizione sia vera $\forall n$:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

• Verifichiamo quindi $p_0)$ e p_1:

$$F_0 = \frac{\varphi^0 - \psi^0}{\varphi - \psi} = \frac{1-1}{\varphi - \psi} = 0$$

$$F_1 = \frac{\varphi^1 - \psi^1}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi - \psi}{\varphi - \psi} = 1$$

• Assumiamo quindi per ipotesi induttiva che $p_{n-1})$ sia vera e verifichiamo il passo induttivo p_n, utilizzando però la definizione originale di F_n:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{n-2} - \psi^{n-2}}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^{n-2}(\varphi + 1) - \psi^{n-2}(\psi + 1)}{\varphi - \psi}$$

• Siccome per definizione stessa $\varphi^2 = \varphi + 1$ e $\psi^2 = \psi + 1$, allora abbiamo che:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} = \frac{\varphi^{n-2}\varphi^2 - \psi^{n-2}\psi^2}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

verificando quindi la validità del passo induttivo

3. • Vogliamo dimostrare per induzione l'identità binomiale di Newton, definita come:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

dove il coefficiente binomiale è definito come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

- Verifichiamo quindi il caso base:

$$1 = (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$$

- A questo punto effettuiamo il passo induttivo:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = (a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n =$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

- Trasliamo di -1 l'indice della prima sommatoria e portiamo fuori il suo ultimo termine:

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

- Nella seconda sommatoria, invece, portiamo fuori il primo termine, in modo che gli indici di entrambe le sommatorie coincidano:

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n-0+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} =$$

- A questo punto uniamo nuovamente le due sommatorie:

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} =$$

- Per le proprietà dei coefficienti binomiali (facilmente verificabili) si ha che $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, dunque riscriviamo la sommatoria come:

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

- A questo punto, poiché $\binom{n}{0} = \binom{n}{n+1} = 1$, riscriviamo i due termini esterni alla sommatoria in modo da poterli reinserire in essa, ottenendo il risultato cercato:

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Capitolo 4

Elementi di Teoria degli Anelli

4.1 Classi laterali sinistre

Proposition 10

Sia G un gruppo e sia $H \leqslant G$ sottogruppo. Definiamo la seguente **relazione d'equivalenza**:

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in H$$

Dimostrazione:

- **Riflessività**:
$$x \sim x \implies x^{-1}x = 1 \in H$$
- **Simmetria**:
$$x \sim y \implies h := x^{-1}y \in H \implies h^{-1} := y^{-1}x \in H \implies y \sim x$$
- **Transitività**:
$$x \sim y, y \sim z \implies h := x^{-1}y, k := y^{-1}z \in H \implies$$
$$\implies hk = x^{-1}yy^{-1}z = x^{-1}z \implies x^{-1}z \in H$$

□

Definition 25. Classi laterali sinistre

Sia G un gruppo e sia $H \leqslant G$. Definiamo come **classi laterali sinistre di H di G** le classi d'equivalenza generate dalla relazione d'equivalenza $x \sim y \iff x^{-1}y \in H$:

$$x \in G, [x] = \{y \in G \mid x \sim y\}$$

Denotiamo come G/H (letto "G modulo H") l'**insieme quoziente di tutte le classi laterali sinistre** di H in G.

Esempio:

- L'ideale principale $I(3) \triangleleft \mathbb{Z}$, genera una partizione di $\mathbb{Z}$ in tre classi laterali sinistre:

$$\mathbb{Z}/I(3) : \{[0], [1], [2]\}$$

- In particolare, notiamo che:
  - $0 \in [0]$, poiché $0 \sim 0 \iff -0 + 0 = 0 = 3 \cdot 0 \in I(3)$
  - $1 \in [1]$, poiché $1 \sim 1 \iff -1 + 1 = 0 = 3 \cdot 0 \in I(3)$
  - $2 \in [2]$, poiché $2 \sim 2 \iff -2 + 2 = 0 = 3 \cdot 0 \in I(3)$
  - $3 \in [3]$, poiché $3 \sim 3 \iff -3 + 3 = 0 = 3 \cdot 0 \in I(3)$
  - $4 \in [1]$, poiché $4 \sim 1 \iff -4 + 1 = -3 = 3 \cdot (-1) \in I(3)$
  - $5 \in [2]$, poiché $5 \sim 2 \iff -5 + 2 = -3 = 3 \cdot (-1) \in I(3)$
  - $6 \in [3]$, poiché $6 \sim 3 \iff -6 + 3 = -3 = 3 \cdot (-1) \in I(3)$
  - $7 \in [1]$, poiché $7 \sim 1 \iff -7 + 1 = -6 = 3 \cdot (-2) \in I(3)$
  - $8 \in [2]$, poiché $8 \sim 2 \iff -8 + 2 = -6 = 3 \cdot (-2) \in I(3)$
  - $9 \in [3]$, poiché $9 \sim 3 \iff -9 + 3 = -6 = 3 \cdot (-2) \in I(3)$
  - ...
- Più in generale, si verifica che:

$$\mathbb{Z}/I(n) : \{[0], \dots, [n-1]\}$$

Definition 26. Insieme quoziente $\mathbb{Z}_n$

Dato $(I(n), +) \leqslant (\mathbb{Z}, +)$, l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/I(n)$ **coincide** con l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\equiv$.

Tale particolare insieme quoziente viene detto **insieme quoziente $\mathbf{Z_n}$**

$$\mathbb{Z}_n := \{[0], \dots, [n-1]\} = \mathbb{Z}/I(n) = \mathbb{Z}/\equiv$$

Dimostrazione:

- Come dimostrato precedentemente, si ha che $(I(n), +) \leqslant (\mathbb{Z}, +)$.
- Considerando la relazione $a \sim b \iff (-a) + b \in I(n)$ (poiché a^{-1} nell'operazione somma corrisponde a $-a$), otteniamo che:

$$a \sim b \iff -a + b = b - a \in I(n) \iff -a + b = nk, \exists k \in \mathbb{Z} \iff$$
$$\iff n \mid b - a \iff a \equiv b (\texttt{mod}\ n)$$

dunque si ha che $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/I(n) = \mathbb{Z}/\equiv$

□

Observation 12

Dato un gruppo G e $H \leqslant G$, per ogni $[x] \in G/H$ si ha che:

$$[x] = xH := \{xh \mid h \in H\}$$

Dimostrazione:

- Dimostriamo che $[x] = xH$:

$$y \in [x] \iff x \sim y \iff h := x^{-1}y \in H \iff h = x^{-1}y \iff$$
$$\iff xh = xx^{-1}y \iff xh = y \in xH$$

□

4.1.1 Teorema di Lagrange

Observation 13

Dato un gruppo G e $H \leqslant G$, per ogni $[x] = xH \in G/H$ si ha che:

$$|[x]| = |xH| = |H|$$

Dimostrazione:

- Dato $x \in G$ consideriamo la funzione $\varphi : H \to xH : h \mapsto xh$
- La funzione risulta essere iniettiva poiché:

$$h, k \in H \mid \varphi(h) \neq \varphi(k) \iff xh \neq xk \iff h \neq k$$

- La funzione risulta essere suriettiva poiché per costruzione di xH si ha che:

$$\forall xh \in xH, \exists h \in H \mid \varphi(h) = xh$$

- Poiché esiste una funzione biettiva $\varphi : H \to xH$, ne segue che $|H| = |xH|$

□

Theorem 11. Teorema di Lagrange

Sia G un **gruppo finito** e sia $H \leqslant G$. In tal caso, si ha che:

$$|G| = |H| \cdot |G/H|$$

Inoltre, definiamo $[G : H] := |G/H|$ come l'**indice di H in G**

Dimostrazione:

- Poiché G/H è una partizione di G e poiché $\forall [x] \in G/H, |[x]| = |H|$:

$$G = \bigsqcup_{[x]\in G/H} [x] \implies |G| = |H| \cdot |G/H|$$

□

4.2 L'anello commutativo $\mathbb{Z}_n$

Proposition 12. Gruppo quoziente G/H

Dato il gruppo abeliano $(G, +)$ e $H \leqslant G$, si ha che $(G/H, +)$ è un **gruppo abeliano**.

Dimostrazione:

- Dimostriamo prima che l'operazione somma intesa come $[x] + [y] = [x + y]$ sia ben definita, ossia che $[x] = [x'], [y] = [y'] \implies [x + y] = [x' + y']$:

$$[x] = [x'], [y] = [y'] \iff x \sim x', y \sim y' \iff x' - x, y' - y \in H$$

Poiché $h_1 := x' - x, h_2 := y' - y \in H$, per chiusura nella somma di H si ha che:

$$h_1 + h_2 \in H \implies (x' - x) + (y' - y) = x' - x + y' - y = x' + y' - (x + y) \in H \iff$$

$$x' + y' \sim x + y \iff [x + y] = [x' + y']$$

- Successivamente, verifichiamo gli assiomi di gruppo abeliano:
  - **Associatività**:

$$([x] + [y]) + [z] = [x + y] + [z] = [x + y + z] = [x] + [y + z] = [x] + ([y] + [z])$$

  - **Elemento neutro**:

$$[x] + [0] = [x + 0] = [x]$$

  - **Elemento inverso**:

$$[x] + [-x] = [x + (-x)] = [0]$$

  - **Commutatività**:

$$[x] + [y] = [x + y] = [y + x] = [y] + [x]$$

□

Corollary 4. Gruppo quoziente $\mathbb{Z}_n$

Poiché $\mathbb{Z}$ è un anello commutativo, $(\mathbb{Z}_n, +)$ è un **gruppo abeliano**

Esempi:

Operando nel gruppo $\mathbb{Z}_{11}$ si avrà che:

- $[9] + [8] = [17] = [6]$, poiché $17 \equiv 6 (\bmod\ 11)$
- $[4] + [3] = [7]$
- $[5] - [6] = [-1] = [10]$, poiché $-1 \equiv 10 (\bmod\ 11)$

Proposition 13. Anello quoziente G/H

Dato l'anello commutativo A e $I \lhd A$, si ha che $(A/I, +, \cdot)$ è un **anello commutativo**.

Dimostrazione:

- Poiché $I \leqslant A$, per dimostrazione precedente si ha che $(A/I, +)$ è gruppo abeliano
- Dimostriamo prima che l'operazione prodotto intesa come $[x][y] = [xy]$ sia ben definita, ossia che $[x] = [x'], [y] = [y'] \implies [xy] = [x'y']$:

$$[x] = [x'], [y] = [y'] \iff x \sim x', y \sim y' \iff x' - x, y' - y \in I$$

  Poiché $i_1 := x' - x, i_2 := y' - y \in I$, per chiusura nel prodotto di I si ha che:

$$i_1, i_2 \in I \implies i_1 y', x i_2 \in I \implies i_1 y' + x i_2 \in I \implies$$

$$i_1 y' + x i_2 = (x' - x)y' + x(y' - y) = x'y' - xy' + xy' - xy = x'y' - xy \in I \iff$$
$$\iff x'y' \sim xy \iff [x'y'] = [xy]$$

- Successivamente, verifichiamo i rimanenti assiomi di anello commutativo
  - **Associatività nel prodotto**:
  $$([x][y])[z] = [xy][z] = [xyz] = [x][yz] = [x]([y][z])$$
  - **Elemento neutro nel prodotto**:
  $$[x][1] = [x \cdot 1] = [x]$$
  - **Commutatività nel prodotto**:
  $$[x][y] = [xy] = [yx] = [y][x]$$
  - **Distributività**:
  $$[x]([y] + [z]) = [x][y + z] = [x(y + z)] = [xy + xz] = [xy] + [xz] = [x][y] + [x][z]$$

$\square$

Corollary 5. Anello quoziente $\mathbb{Z}_n$

Poiché $\mathbb{Z}$ è un anello commutativo, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ è un **anello commutativo**

Esempi:

Operando nell'anello $\mathbb{Z}_4$ avremo che:

- $[2][3] = [6] = [2]$, poiché $6 \equiv 2 (\texttt{mod}\ 4)$
- $[2][3]^{-1} = [2][3] = [4]$, poiché $[3]$ è l'inverso di $[3]$ in $\mathbb{Z}_4$ in quanto $[3][3] = [9] = [1]$

4.3 Invertibili e Divisori dello zero

Definition 27. Invertibile e Divisore dello zero

Dato un anello commutativo A e un elemento $a \in A$, definiamo a come **elemento invertibile** se e solo se

$$\exists a^{-1} \in A \mid aa^{-1} a^{-1} a = 1$$

Definiamo invece a come **divisore dello zero** se e solo se:

$$a \mid 0 \iff \exists c \neq 0 \in A \mid 0 = ac$$

Definition 28. Gruppo degli invertibili

Dato un anello commutativo $(A, +, \cdot)$, definiamo l'**insieme degli invertibili di** A come:

$$A^* := \{a \in A \mid \exists a^{-1} \in A\}$$

Inoltre, $(A^*, \cdot)$ è un **gruppo**

Dimostrazione:

- **Chiusura:**
$$x, y \in A^* \implies (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \implies xy \in A^*$$
- **Associatività:**
$$x, y, z \in A^* \implies x(yz) = xyz = (xy)z$$
- **Elemento neutro:**
$$1 = 1^{-1} \in A \mid 1 \cdot 1^{-1} = 1 \cdot 1 = 1 \implies 1 \in A^* \mid a \cdot 1 = a, \forall a \in A^*$$
- **Elemento inverso:**
$$x \in A^* \implies x = (x^{-1})^{-1} \implies x^{-1} \in A^*$$

□

Observation 14

Dato un anello commutativo A e un elemento $a \in A$, se a è un **divisore dello zero** allora esso **non è invertibile**:

$$a \mid 0 \implies a \notin A^*$$

Dunque, per contronominale di tale implicazione, se a è **invertibile** allora esso **non è un divisore dello zero**:

$$a \in A^* \implies a \nmid 0$$

Dimostrazione per assurdo:

- Supponiamo che per assurdo che $a \mid 0$ e che $a \in A^*$. Allora, si ha che:

  $$a \mid 0 \iff \exists b \neq 0 \in A \mid 0 = ab \implies a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}ab \implies 0 = b$$

  contraddicendo quindi l'ipotesi iniziale $b \neq 0$, dunque l'unica possibilità è che $a \notin A^*$

$\square$

Definition 29. Dominio di integrità

Sia A un anello commutativo. Definiamo A come **dominio di integità** se $0 \in A$ è l'unico divisore dello zero:

$$\nexists a \neq 0 \in A \text{ t.c. } a \mid 0 \iff a \nmid 0, \forall a \neq 0 \in A$$

Observation 15

Un anello commutativo A è un dominio di integrità se e solo se vale la **legge di annullamento del prodotto**:

$$\forall x, y \in A \mid xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$$

Dimostrazione:

- Supponiamo per assurdo che A sia un dominio di integrità e che $\exists x, y \neq 0 \in A \mid xy = 0$, implicando che non valga la legge di annullamento del prodotto. Dunque, si ha che:

  $$xy = 0 \implies x^{-1}xy = x^{-1}0 \implies y = 0$$

  contraddicendo l'ipotesi per cui $y \neq 0$, dunque l'unica possibilità è che valga la legge di annullamento del prodotto

- Supponiamo ora per assurdo che valga la legge di annullamento del prodotto e che A non sia un dominio di integrità. Dunque, si ha che:

  $$\exists a \neq 0 \in A \text{ t.c } a \mid 0 \implies ab = 0, \exists b \neq 0$$

  Poiché vale la legge di annullamento del prodotto, si ha che

  $$ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$$

Tuttavia, poiché $b \neq 0$, l'unica possibilità è che $a = 0$, contraddicendo l'ipotesi per cui $a \neq 0$. Di conseguenza, A è un dominio di integrità

$\square$

Corollary 6

L'anello commutativo $\mathbb{Z}$ è un **dominio di integrità** poiché in esso vale la **legge di annullamento del prodotto**

Observation 16

Se K è un **campo**, allora esso è un **dominio di integrità** poiché $K^* = K - \{0\}$

Dimostrazione:

- Se K è un campo, allora

$$\forall a \neq 0 \in K, \exists a^{-1} \in K \mid aa^{-1} = 1 \iff K^* = K - \{0\}$$

- Inoltre, siccome tutti gli elementi di K escluso zero sono invertibili, si ha che:

$$\forall a \neq 0 \in K, a \in K^* \implies a \nmid 0, \forall a \neq 0 \in K$$

$\square$

Proposition 14

Dato un **dominio di integrità** A e dati $a, b \in A$, si ha che:

$$I(a) = I(b) \iff a = bc, \exists c \in A^*$$

Dimostrazione:

- $a = bc, \exists c \in A^* \implies I(a) = I(b)$

$$a = bc, \exists c \in A^* \implies ac^{-1} = b \implies \begin{cases} a = bc \implies a \in I(b) \implies I(a) \subseteq I(b) \\ b = ac^{-1} \implies b \in I(a) \implies I(b) \subseteq I(a) \end{cases}$$

- $I(a) = I(b) \implies a = bc, \exists c \in A^*$

$$I(a) = I(b) \implies \begin{cases} a \in I(a) = I(b) \implies a = bc, \exists c \in A \\ b \in I(b) = I(a) \implies b = ad, \exists d \in A \end{cases}$$

Dunque si verifica che:

$$a = bc = adc \implies a = adc \implies a(1 - dc) = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} a = 0 \implies b = ad = 0 \implies a = bc = 0 \\ 1 - dc = 0 \implies dc = 1 \implies c = d^{-1} \implies c \in A^* \end{cases}$$

$\square$

Corollary 7

Dato il dominio di integrità $\mathbb{Z}$ e dati $a, b \in \mathbb{Z}$, si verifica che:

$$I(a) = I(b) \iff a = \pm b$$

Dimostrazione:

- Poiché $\mathbb{Z}$ è un dominio di integrità, dati $a, b \in \mathbb{Z}$ si ha che:

$$I(a) = I(b) \iff a = bc, \exists c \in \mathbb{Z}^*$$

- Tuttavia, siccome $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, si ha che:

$$I(a) = I(b) \iff a = bc, c = 1 \vee c = -1 \iff a = \pm b$$

□

4.4 Elementi irriducibili e primi

Definition 30. Elementi irriducibili e primi

Dato un anello commutativo A e un elemento $a \in A$, definiamo a come **elemento irriducibile** se e solo se:

$$a \neq 0, a \notin A^*, a = bc \implies b \in A^* \vee c \in A^*$$

Definiamo invece a come **elemento primo** se e solo se:

$$a \neq 0, a \notin A^*, a \mid bc \implies a \mid b \vee a \mid c$$

Attenzione: la definizione di elemento primo <u>non coincide</u> con la "normale" definizione di numero primo

Definition 31. Insieme dei numeri interi primi

Definiamo come **insieme dei numeri interi primi** l'insieme:

$$\mathbb{P} : \{p \in \mathbb{N}_{>1} \mid \nexists y \in \mathbb{N} - \{1, p\} \text{ t.c } y \mid a\}$$

Attenzione: gli elementi appartenenti a tale insieme <u>coincidono</u> con la "normale" definizione di **numero primo**

Observation 17

Dati un elemento $p \in \mathbb{P}$, si verifica che

$$p \in \mathbb{P} \implies p \text{ elemento primo}$$

Dimostrazione:

- Poiché $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, allora $p \in \mathbb{P} \implies p \in \mathbb{Z}$
- Supponiamo che $p \mid ab$, dove $ab \in \mathbb{Z}$, dunque necessariamente p apparterrà alla fattorizzazione di ab, implicando che $p \mid a \vee p \mid b$

□

Observation 18

Dato un dominio di integrità A ed un elemento $a \in A$, si verifica che

$$a \text{ elemento primo} \implies a \text{ elemento irriducibile}$$

Dimostrazione:

- Se $a \in A$ è primo, allora per definizione si ha che $a \neq 0, a \notin A^*$.
- Se $a = bc$, allora si ha che $a \mid a \implies a \mid bc \implies a \mid b \vee a \mid c$
- A questo punto, si ha che:

$$a \mid b \implies b = ad, \exists d \in A \implies a = bc = adc \implies a = adc \implies a(1 - cd) = 0$$

- Siccome $a \neq 0$, allora:

$$a(1 - cd) = 0, a \neq 0 \implies 1 - cd = 0 \implies cd = 1 \implies c = d^{-1} \implies c \in A^*$$

- Analogamente, dimostriamo che $a \mid c \implies b \in A^*$
- Dunque, concludiamo che se a è primo allora esso è anche irriducibile:

$$a \text{ primo} \mid a = bc \implies a \mid b \vee a \mid c \implies b \in A^* \vee c \in A^*$$

□

Proposition 15

Dato il dominio di integrità $\mathbb{Z}$ e un elemento $p \in \mathbb{Z} \mid p \geq 2$, le seguenti condizioni sono **equivalenti**:

- $p \in \mathbb{P}$
- p è un elemento primo
- p è un elemento irriducibile

Dimostrazione:

- Per dimostrazione precedente, sappiamo che

$$p \in \mathbb{P} \implies p \text{ elemento primo} \implies p \text{ elemento irriducibile}$$

- Supponiamo che $p \geq 2 \in \mathbb{Z}$ sia irriducibile e che esistano $a, b \in \mathbb{N}$, tali che:

$$p = ab \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \implies a \in \mathbb{Z}^* \vee b \in \mathbb{Z}^*$$

- Poiché $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$ e poiché $a, b \in \mathbb{N}$, allora ne segue che:

$$a \in \mathbb{Z}^* \vee b \in \mathbb{Z}^* \implies a = 1 \vee b = 1$$

  - Se $a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^*$, allora

$$a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^* \implies a = 1, b = 1 \implies p = 1$$

    contraddicendo l'ipotesi per cui $p \geq 2$, dunque si tratta di un caso impossibile

  - Se $a \in \mathbb{Z}^*, b \notin \mathbb{Z}^*$, allora

$$a \in \mathbb{Z}^* \implies a = 1 \implies p = b \implies b \mid p \vee 1 \mid p, b = p$$

  - Se $a \notin \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^*$, allora

$$b \in \mathbb{Z}^* \implies b = 1 \implies p = a \implies a \mid p \vee 1 \mid p, a = p$$

- Dunque, in entrambi i casi possibili si ottiene che

$$p \text{ elemento irriducibile} \implies p \in \mathbb{P}$$

□

Proposition 16. Dominio di integrità $\mathbb{Z}_p$

Dato l'anello commutativo $\mathbb{Z}_n$, si ha che

$$\mathbb{Z}_n \text{ dominio di integrità} \iff n \in \mathbb{P}$$

Nel caso in cui $n \in \mathbb{P}$, per comodità utilizziamo la **notazione** $\mathbb{Z}_p$.

Dimostrazione:

- Supponiamo per assurdo che $\mathbb{Z}_n$ sia dominio di integrità e che $n \notin \mathbb{P}$, implicando che:

$$n \notin \mathbb{P} \implies ab = n, \exists a, b \notin \mathbb{Z}^*, 0 < a, b < n \implies$$
$$\implies [ab] = [n] = [0] \in \mathbb{Z}_n \implies [a][b] = [0] \implies [a] = [0] \vee [b] = [0]$$

  Tuttavia, per ipotesi si ha che $a, b > 0 \implies [a] \neq 0, [b] \neq 0$, creando una contraddizione, dunque l'unica possibilità è che $n \in \mathbb{P}$

- Supponiamo per assurdo che $n \in \mathbb{P}$ e che $\mathbb{Z}_n$ non sia dominio di integrità, implicando che:
$$\exists [a] \neq [0] \in \mathbb{Z}_n \text{ t.c. } [a] \mid [0] \implies [0] = [a][b], \exists [b] \neq [0] \in \mathbb{Z}_n \implies$$
$$\implies [0] = [ab] \iff ab \equiv 0 (\text{mod } n) \iff n \mid ab - 0$$
Poiché $n \in \mathbb{P}$, si ha che:
$$n \mid ab \implies n \mid a \vee n \mid b \implies a \equiv 0 (\texttt{mod } n) \vee b \equiv 0 (\texttt{mod } n) \implies$$
$$\implies [a] = [n] = [0] \vee [b] = [n] = [0]$$
Tuttavia, per ipotesi si ha che $a, b \neq 0 \implies [a], [b] \neq [0]$, creando una contraddizione, dunque l'unica possibilità è che $\mathbb{Z}_n$ sia dominio di integrità

□

4.5 Massimo comun divisore

Definition 32. Dominio ad ideali principali

Dato un dominio di integrità A, definiamo A come **dominio ad ideali principali** se e solo se considerato un qualsiasi $I \lhd A$ si ha che:
$$\exists d \in I \mid I = I(d)$$
In altre parole, ogni ideale coincide esattamente con un ideale principale

Proposition 17

Il dominio di integrità $\mathbb{Z}$ è un **dominio ad ideali principali**

Dimostrazione:

- Supponiamo che esista $I \lhd \mathbb{Z}$ tale che $I = \{0\}$. In tal caso, si ha che $I = I(0)$
- Supponiamo quindi che $I \neq \{0\}$, implicando che per definizione stessa di ideale si abbia che:
$$\forall n \in I \implies -n \in I$$
Dunque, possiamo considerare direttamente il sottoinsieme $I_{>0}$, poiché per i numeri negativi basterebbe considerare il loro opposto.
- Siccome $I_{>0} \subseteq \mathbb{N}$, per il principio del buon ordinamento si ha che
$$\exists d \in I_{>0} \mid d \text{ è il minimo di } I_{>0}$$

- Dimostriamo quindi che $I = I(d)$:
  - Dato $x \in I(d)$, si ha che:

$$x \in I(d) \implies \exists y \in \mathbb{Z} \mid x = dy$$

  - Siccome $d \in I_{>0} \subseteq I$, allora $x = dy \in I$
  - Dato $x \in I$, per il teorema della divisione con resto euclidea si ha che:

$$\exists! q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r, d \mid x = dq + r \implies r = x - dq \in I$$

  - Assumiamo per assurdo che $r \neq 0$, implicando che $r > 0$ e dunque che $r \in I_{>0}$. Tuttavia,poiché $r < d$, allora ne seguirebbe che d non sia il minimo di $I_{>0}$.
  - Dunque, l'unica possibilità è che $r = 0$, implicando che:

$$x = dq + r = dq + 0 = dq \implies x = dq \implies x \in I(d)$$

□

Proposition 18. Massimo comun divisore (MCD)

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e degli elementi $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, si ha che:

$$\exists! d \in \mathbb{N} \mid I(a_1, \ldots, a_n) = I(d)$$

dove $d := MCD(a_1, \ldots, a_n)$, ossia è il **massimo comun divisore di** $a_1, \ldots, a_n$

In altre parole, si ha che:

$$\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z} \mid a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = d$$

che definiamo come **identità di Bezout**.

Dimostrazione:

- Per ogni divisore comune di $a_1, \ldots, a_n$, ossia $\forall k \in \mathbb{Z}$ tali che $k \mid a_i, \forall i \in [1, n]$, si ha che:

$$k \mid a_i, \forall i \in [1, n] \implies a_i = k b_i, \exists b_i \in \mathbb{Z}$$

- Dunque, si verifica facilmente che:

$$d \in I(d) = I(a_1, \ldots, a_n) \implies \exists x_1, \ldots, x_n \mid \underbrace{d = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}_{\text{Identità di Bezout}} \implies$$

$$\implies d = (k b_1) x_1 + \ldots + (k b_n) x_n = k(b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n) \implies k \mid d$$

- Dunque, poiché ogni divisore in comune di $a_1, \ldots, a_n$ divide anche d, si ha che d è il massimo comun divisore di $a_1, \ldots, a_n$

□

Proposition 19

Dato l'anello commutativo $\mathbb{Z}_n$ e dato $0 < a < n$ si ha che:

$$[a] \in \mathbb{Z}_n^* \iff MCD(a, n) = 1$$

Dimostrazione:

- Se $[a] \in \mathbb{Z}_n^*$ si ha che:

  $$\exists 0 < b < n \mid [a][b] = 1 \iff ab \equiv 1 (\bmod\ n) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid 1 = ab + nk$$

  Posto $d := MCD(a, n) > 0$, si ha che:

  $$1 = ab + nk \in I(a, n) = I(d) \implies 1 \in I(d) \implies \exists p \in \mathbb{Z} \mid 1 = dp \implies d = p = \pm 1$$

  Poiché $d > 0$, l'unico caso possibile è $d = 1$

- Viceversa, supponendo che $MCD(a, n) = 1$ si ha che:

  $$I(d) = I(a, n) \implies d \in I(a, n) \implies \exists b, k \in \mathbb{Z} \mid d = ab + nk \implies$$
  $$\implies [1] = [ab + nk] \in \mathbb{Z}_n \implies [a][b] + [n][k] = [a][b] + [0][k] = [a][b]$$
  $$\implies [b] = [a]^{-1} \implies [a] \in \mathbb{Z}_n^*$$

$\square$

Corollary 8. Campo $\mathbb{Z}_p$

Dato $p \in \mathbb{P}$, il dominio di integrità $\mathbb{Z}_p$ è un **campo**

Dimostrazione:

- Poiché $\nexists y \in \mathbb{Z} - \{1, p\}$ tale che $y \mid p$, allora:

  $$MCD(a, p) = 1, \forall 0 < a < p \iff [a] \in \mathbb{Z}_n^*, \forall 0 < a < p \implies \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{0\}$$

$\square$

Theorem 20

Dato l'anello commutativo $\mathbb{Z}_n$ e data la seguente equazione:

$$ax \equiv b (\bmod\ n)$$

Posto $d := MCD(a, n)$ si verifica che:

- Se $d \nmid b$, allora $\nexists x \in \mathbb{Z}_n \mid ax = b (\bmod\ n)$ (**non esistono soluzioni**)
- Se $d \mid b$, allora posti $p := \frac{a}{d}, q := \frac{b}{d}, m := \frac{n}{d}$, l'equazione è **equivalente** a:

  $$ax \equiv b (\bmod\ n) \iff px \equiv q (\bmod\ m)$$

Dimostrazione:

- Prima di tutto, affermiamo che se l'equazione ammette una soluzione $x \in \mathbb{Z}$, allora

$$ax \equiv b (\bmod\ n) \iff ax = b + nk, \exists k \in \mathbb{Z} \iff ax - nk = b$$

- Poiché $d := MCD(a, n)$, si ha che

$$d \mid a, d \mid n \implies d \mid ax, d \mid nk \implies d \mid ax - nk = b$$

- Viceversa, ciò dimostra che se $d \nmid b$, allora tale equazione non potrebbe ammettere soluzioni.
- Supponiamo quindi che $d \mid b$ e poniamo $p := \frac{a}{d}, q := \frac{b}{d}, m := \frac{n}{d}$ (implicando quindi che $a = pd, b = qd, n = md$. Dunque si verifica che:

$$ax \equiv b (\bmod\ n) \iff pdx \equiv qd (\bmod\ md) \iff$$

$$\iff dpx = dq + dmk, \exists k \in \mathbb{Z} \iff px = q + mk \iff px \equiv q (\bmod\ m)$$

□

4.5.1 Algoritmo di Euclide

Lemma 21

Dati tre elementi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si ha che:

$$a \mid b, a \mid c \implies a \mid z, \forall z \in I(b, c)$$

Dimostrazione:

- Se $a \mid b$ e che $a \mid c$, si ha che:

$$z \in I(b, c) \iff z = bx + cy, \exists x, y \in \mathbb{Z} \implies z = (ak)x + (ah)c, \exists k, h \in \mathbb{Z} \implies$$

$$\implies z = a(kx) + a(hc) = a(kx + hc) \implies a \mid z$$

□

Method 1. Algoritmo di Euclide

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ e sia $d := MCD(a, b)$. Il seguente **algoritmo di Euclide** permette di calcolare d:

1. Assumiamo $0 < a \leq b$ poniamo $r_0 := b$ e $r_1 := a$
2. Poniamo $r_{i+1} := r_{i-1} (\bmod\ r_i)$ ad ogni iterazione, da cui ne segue che $r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1}$, ripetendo tale operazione fino a quando $r_{i+1} = 0$
3. All'n-esima iterazione, ossia quando $r_{n+1} = 0$, si ha che $MCD(a, b) = r_n$

Dimostrazione correttezza algoritmo:

- Poiché $I(a,b) = I(-a,b) = I(a,-b) = I(-a,-b)$, assumiamo che $0 < a, b$.
- Inoltre, poiché $I(a,b) = I(b,a)$, $MCD(0,b) = 0$ e $MCD(a,0) = 0$, assumiamo che $0 < a \leq b$.
- Siccome $r_0 := b, r_1 := a \in I(a,b)$, si ha che:

$$r_2 \equiv r_0 (\text{mod } r_1) \iff r_0 = r_1 q_1 + r_2 \iff r_2 = r_0 - r_1 q_1 \in I(a,b) = I(d)$$

- Supponiamo per ipotesi induttiva che $r_i \in I(a,b) = I(d), \forall i \in [0,n]$.

  Dimostriamo quindi il passo induttivo:

$$r_{i+1} \equiv r_{i-1} (\text{mod } r_i) \iff r_{i-1} = r_i q_1 + r_{i+1} \iff r_{i+1} = r_{i-1} - r_i q_i \in I(a,b) = I(d)$$

- Di conseguenza, $\forall i \in [0,n]$ si ha che

$$r_i \in I(a,b) = I(d) \iff r_i = dp, \exists p \in \mathbb{Z} \iff d \mid r_i \forall i \in [0,n] \implies d \mid r_n$$

- Poiché l'algoritmo termina quando $r_{n+1} = 0$, ne segue che:

$$r_{n+1} \equiv r_{n-1} (\text{mod } r_n) \iff 0 \equiv r_{n-1} (\text{mod } r_n) \iff r_{n-1} = r_n q_n \iff r_n \mid r_{n-1}$$

- Siccome $r_n \mid r_n$ e $r_n \mid r_{n-1}$, per il lemma precedente si ha che:

$$r_n \equiv r_{n-2} (\text{mod } r_{n-1}) \iff r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \in I(r_{n-1}, r_n)$$

- Dunque, poiché $r_n, r_{n-1}, r_{n-2} \in I(r_{n-1}, r_n) \subseteq \mathbb{Z}$, per il lemma precedente si ha che:

$$r_n \mid r_n, r_n \mid r_{n-1} \implies r_n \mid r_{n-2}$$

- A questo punto, procedendo analogamente si ha che

$$r_n \mid r_n, r_n \mid r_{n-1} \implies r_n \mid r_{n-2}$$
$$r_n \mid r_{n-1}, r_n \mid r_{n-2} \implies r_n \mid r_{n-3}$$
$$\ldots$$
$$r_n \mid r_2, r_n \mid r_1 \implies r_n \mid r_0$$

- Dunque, poiché $d := MCD(a,b)$ e dati $r_1 := a, r_0 := b$, si ha che:

$$r_n \mid a, r_n \mid b \implies r_n \mid d$$

- Infine, siccome $d, r_n \in \mathbb{N}$ (sezione 3.2) si ha che:

$$d \mid r_n, r_n \mid d \implies d = r_n$$

□

Esempi:

- Vogliamo calcolare $MCD(448, 216)$. Poniamo quindi inizialmente $r_0 = 448$ e $r_1 = 216$. Applicando l'algoritmo abbiamo quindi che:

$$r_0 = r_1 \cdot q_1 + r_2$$

$$448 = 216 \cdot 2 + 16$$

$$216 = 16 \cdot 13 + 8$$

$$16 = 8 \cdot 2 + 0$$

  Dunque, otteniamo che $MCD(448, 216) = 8$

- Vogliamo calcolare l'**identità di Bezout** per $b = 216$ e $a = 448$ ossia i due valori x e y tali che:

$$x, y \in \mathbb{Z} \mid MCD(488, 216) = 216x + 448y$$

  Tramite l'**algoritmo di Euclide** utilizzato nell'esercizio precedente, sappiamo che $MCD(488, 216) = 8$. Poniamo quindi:

$$216x + 448y = 8$$

  A questo punto, ripercorrendo al contrario i calcoli dell'algoritmo di Euclide, otteniamo che:

$$216x + 448y = 8$$

$$216x + 448y = 216 - 16 \cdot 13$$

$$216x + 448y = 216 - (448 - 216 \cdot 2) \cdot 13$$

$$216x + 448y = 216(1 + 13 \cdot 2) - 448 \cdot 13$$

$$216x + 448y = 216(27) + 448(-13)$$

  Otteniamo quindi che $x = 27$ e $y = -13$

- Vogliamo calcolare l'identità di Bezout e MCD per $a = 1470, b = 8316$ e $c = 12600$:

$$MCD(a, b, c) = MCD(a, MCD(b, c)) = MCD(MCD(a, b), c)$$

  - $d := MCD(b, c) = MCD(8316, 12600)$

$$12600 := 8316 \cdot 1 + 4284$$

$$8316 := 4284 \cdot 1 + 4032$$

$$4284 := 4032 \cdot 1 + 252$$

$$4032 := 252 \cdot 16 + 0$$

    dunque $d = 252$

– L'identità di Bezout per $MCD(8316, 12600) = 252 = 8316x + 12600y$ corrisponde a:

$$8316x + 12600y = 252$$

$$8316x + 12600y = 4284 - 4032$$

$$8316x + 12600y = (12600 - 8316) - (8316 - 4284)$$

$$8316x + 12600y = (12600 - 8316) - (8316 - (12600 - 8316))$$

$$8316x + 12600y = 12600 - 8316 - 8316 + 12600 - 8316$$

$$8316x + 12600y = 12600(2) + 8316(-3)$$

dunque $x = -3, y = 2$

– $p := MCD(a, d) = MCD(1470, 252)$

$$1470 = 252 \cdot 5 + 210$$

$$252 = 210 \cdot 1 + 42$$

$$210 = 42 \cdot 5 + 0$$

dunque $p = 42$

– L'identità di Bezout per $MCD(1470, 252) = 42 = 1470x + 252y$ corrisponde a:

$$1470z + 252w = 42$$

$$1470z + 252w = 252 - 210$$

$$1470z + 252w = 252 - (1470 - 252 \cdot 5)$$

$$1470z + 252w = 1470(-1) + 252(6)$$

dunque $x = -1, y = 6$

– L'identità di Bezout per $MCD(1470, 8316, 12600) = 42 = 1470x + 8316y + 12600z$ corrisponde a:

$$1470x + 8316y + 12600z = 42$$

$$1470x + 8316y + 12600z = 1470(-1) + (12600(2) + 8316(-3))(6)$$

$$1470x + 8316y + 12600z = 1470(-1) + 12600(12) + 8316 \cdot (-18)$$

dunque $x = -1, y = 12, z = -18$

4.5.2 Approfondimento sull'Identità di Bezout

Grazie all'algoritmo di Euclide, possiamo trovare due **soluzioni particolari** all'equazione dell'**identità di Bezout**, ossia $ax + by = MCD(a, b)$, per poi trovare tutte le soluzioni in grado di risolvere l'equazione:

Proposition 22

Data l'equazione $ax + by = d$, dove $d := MCD(a, b)$, e date x_0 e y_0 due soluzioni particolari dell'equazione, la soluzione ammette **infinite soluzioni** nella seguente forma:

$$x = x_0 + \frac{m}{a}k, \forall k \in \mathbb{Z} \qquad y = y_0 - \frac{m}{b}k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

dove $m := mcm(a, b)$, ossia il minimo comune multiplo tra a e b

Dimostrazione:

- Innanzitutto, verifichiamo che le soluzioni possibili siano effettivamente valide:

$$a(x_0 + \frac{m}{a}k) + b(y_0 - \frac{m}{b}k) = d$$

$$ax_0 + mk + by_0 - mk = d$$

$$ax_0 + by_0 = d$$

- A questo punto, verifichiamo che tali soluzioni appaiano solo nella forma indicata:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = d \\ ax_1 + by_1 = d \end{cases} \implies (ax_1 + by_1) - (ax_0 + by_0) = d - d \implies$$

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 + y_0) = 0 \implies a(x_1 - x_0) = -b(y_1 - y_0) \implies$$

$$\implies a(x_1 - x_0) = b(y_0 + y_1)$$

- Posto $N := a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$, si ha che $a \mid N$ e $b \mid N$, implicando che N sia un multiplo di $m := mcm(a, b)$. Dunque si ha che $\exists k \in \mathbb{Z} \mid N = mk$:

$$\begin{cases} a(x_1 - x_0) = N = mk \\ b(y_0 - y_1) = N = mk \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - x_0 = \frac{m}{a}k \\ y_0 - y_1 = \frac{m}{b}k \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{m}{a}k \\ y_1 = y_0 - \frac{m}{b}k \end{cases}$$

$\square$

4.5.3 Criteri di divisibilità

Sia $a \in \mathbb{Z}$ con la sua **rappresentazione decimale**:

$$a = a_k \cdot 10^k + \ldots + a_0 \cdot 10^0 = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \text{ dove } a_i \in \{0, \ldots, 9\}$$

Osserviamo che:

- $10 \equiv 1 (\bmod\ 3) \implies 10x \equiv x (\bmod\ 3)$
- $10 \equiv 1 (\bmod\ 9) \implies 10x \equiv x (\bmod\ 9)$
- $10 \equiv -1 (\bmod\ 11) \implies 10x \equiv -x (\bmod\ 11)$

Quindi:

- In $\mathbb{Z}_3$ si ha che
$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \equiv \left[\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (1)^i \right] (\bmod\ 3)$$
- In $\mathbb{Z}_9$ si ha che
$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \equiv \left[\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (1)^i \right] (\bmod\ 9)$$
- In $\mathbb{Z}_{11}$ si ha che
$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \equiv \left[\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (-1)^i \right] (\bmod\ 11)$$

Observation 19

Dati $x, y, k \in \mathbb{Z}_n$, si ha che:

$$x \equiv y (\bmod\ n), k \mid n \implies x \equiv y (\bmod\ k)$$

Dimostrazione:

$$x \equiv y (\bmod\ n) \iff y - x = nq = (kp)q = k(pq) \in I(k) \implies x \equiv y (\bmod\ k)$$

□

Esempi:

- Vogliamo sapere se $3 \mid 129383716$. Siccome siamo in $\mathbb{Z}_3$ abbiamo che:

  $$129383716 \equiv [6 + 1 + 7 + 3 + 8 + 3 + 9 + 2 + 1] (\bmod\ 3) \implies 129383716 \equiv 40 (\bmod\ 3)$$

  Tuttavia, siccome $3 \nmid 40$, ne segue che $3 \nmid 129383716$

- Vogliamo sapere se $11 \mid 129383716$. Siccome siamo in $\mathbb{Z}_{11}$ abbiamo che:

  $129383716 \equiv [6-1+7-3+8-3+9-2+1] \pmod{11} \implies 129383716 \equiv 22 \pmod{11}$

  Dunque, siccome $11 \mid 22$, ne segue che $11 \mid 129383716$

4.6 Minimo comune multiplo

Proposition 23. Minimo comune multiplo (mcm)

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e degli elementi $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, si ha che:

$$\exists! m \in \mathbb{N} \mid I(m) = I(a_1) \cap I(a_2) \cap \dots \cap I(a_n)$$

dove $m := mcm(a_1, \dots, a_n)$, ossia il **minimo comune multiplo di** $a_1, \dots, a_n$

Dimostrazione:

- Poiché $m \in I(m)$ si ha che:

  $m \in I(m) = I(a_1) \cap I(a_2) \cap \dots \cap I(a_n) \iff m = a_i k_1, \exists k_1 \in \mathbb{Z}, \forall i \in [0, n] \implies a_i \mid m$

  dunque m è un multiplo in comune di $a_1, \dots, a_n$
- Per ogni multiplo comune di $a_1, \dots, a_n$, ossia $\forall k \in \mathbb{Z}$ tali che $a_i \mid k, \forall i \in [1, n]$, si ha che:

$$a_i \mid k, \forall i \in [1, n] \implies k = a_i b_i, \exists b_i \in \mathbb{Z} \implies$$
$$\implies k \in I(a_i), \forall i \in [1, n] \implies k \in I(a_1) \cap \dots \cap I(a_n) = I(m) \implies$$
$$\implies k \in I(m) \implies k = mh, \exists h \in \mathbb{Z} \implies m \mid k$$

- Dunque, poiché ogni multiplo in comune di $a_1, \dots, a_m$ è multiplo anche di d, si ha che m è il minimo comune multiplo di $a_1, \dots, a_n$

$\square$

Observation 20

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e dati $I_1, \dots I_n \triangleleft A$ ideali, $\exists! a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ tali che :

- $I_1 + \dots + I_n = I(a_1, \dots, a_n) = I(d)$, dove $d := MCD(a_1, \dots, a_n)$
- $I_1 \cdot \dots \cdot I_n = I(a_1) \cdot \dots \cdot I(a_n) = I(a_1 \cdot \dots \cdot a_n)$
- $I_1 \cap \dots \cap I_n = I(a_1) \cap \dots \cap I(a_n) = I(m)$, dove $m := mcm(a_1, \dots, a_n)$

Dimostrazione:

- Poiché $\mathbb{Z}$ è un dominio ad ideali principali si ha che
$$I_i = I(a_i), \exists! a_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [i, n]$$
- Di conseguenza, si ha che:
$$I_1 + \ldots + I_n = I(a_1) + \ldots + I(a_n) = \{b_1 + \ldots + b_n \mid b_i \in I(a_i), \forall i \in [0,1]\} =$$
$$= \{b_1 + \ldots + b_n \mid b_i = a_i x_i, \exists x_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [0,1]\} = \{a_i x_i + \ldots + a_n x_n \mid x_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [0,1]\} =$$
$$= I(a_1, \ldots, a_n) = I(d)$$
dove $d : MCD(a_1, \ldots, a_n)$
- Preso $x \in I_1 \cdot \ldots \cdot I_n$, si ha che:
$$x \in I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = I(a_1) \cdot \ldots \cdot I(a_n) \implies$$
$$\implies \exists b_{j_{a_i}} \in I(a_i), \forall i, j \in [1, 0] \mid x = a_1 b_{1_{a_1}} \cdot \ldots \cdot a_n b_{1_{a_n}} + \ldots + a_1 b_{n_{a_1}} \cdot \ldots \cdot a_n b_{n_{a_n}} \implies$$
$$\implies x = a_1 \cdot \ldots a_n (b_{1_{a_1}} \cdot \ldots b_{1_{a_n}} + \ldots + b_{n_{a_1}} \cdot \ldots \cdot b_{n_{a_n}}) \implies x \in I(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$$
- Viceversa, si ha che
$$x \in I(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \implies x = a_1 \ldots a_n k, \exists k \in \mathbb{Z} \implies$$
$$\implies x = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}(a_n k) \mid a_n k \in I(a_n), a_i \in I(a_i), \forall i \in [1, n-1] \implies$$
$$\implies x \in I(a_1) \cdot \ldots \cdot I(a_n) = I_1 \cdot \ldots \cdot I_n$$
Dunque, si ha che $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = I(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$
- Infine, per dimostrazione precedente si ha che:
$$I_1 \cap \ldots \cap I_n = I(a_1) \cap \ldots \cap I(a_n) = I(m)$$
dove $m := mcm(a_1, \ldots, a_n)$

□

4.6.1 Teorema fondamentale dell'aritmetica

Theorem 24. Teorema fondamentale dell'aritmetica

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e dati $a, b \in \mathbb{N}$, si ha che:
$$mcm(a, b) \cdot MCD(a, b) = ab$$

Attenzione: dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \mid n > 2 \in \mathbb{N}$, si ha che:
$$mcm(a_1, .., a_n) \cdot MCD(a_1, \ldots, a_n) \neq a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$
dunque tale teorema vale se e solo se $n = 2$

Dimostrazione:

- Se $a = 0 \vee b = 0$, allora:

$$mcm(a,b) = 0 \implies mcm(a,b) \cdot MCD(a,b) = 0 \cdot MCD(a,b) = 0 = ab$$

- Siano quindi $a, b > 0$. Considerando $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, tale numero può essere scritto come una **fattorizzazione in numeri interi primi**, ossia:

$$\exists! n_2, n_3, n_5, \ldots, n_p, \ldots \text{ dove } p \in \mathbb{P}, n_p \in \mathbb{N} \mid n = 2^{n_2} \cdot 3^{n_3} \cdot \ldots \cdot p^{n_p} \cdot \ldots = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p}$$

  dove $p \nmid n \implies n_p = 0$

- Riscriviamo quindi a e b come:

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \qquad b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p}$$

- Poniamo inoltre $d := MCD(a,b)$ e $m := mcm(a,b)$, che per loro definizione corrispondono a:

$$d = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{min(a_p, b_p)} \qquad m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{max(a_p, b_p)}$$

- A questo punto, osserviamo che:

$$min(a_p, b_p) = a_p \iff max(a_p, b_p) = b_p$$

- Quindi, il prodotto tra d e m corrisponde a:

$$dm = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{min(a_p, b_p)} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{max(a_p, b_p)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p + b_p} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p} = ab$$

$\square$

Corollary 9. Calcolo del mcm

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e dati $a, b \in \mathbb{N}$, per il teorema fondamentale dell'aritmetica si ha che:

$$mcm(a,b) = \frac{ab}{MCD(a,b)}$$

4.7 Teorema cinese dei resti

Lemma 25. Numeri coprimi ed mcm

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e dati $a_1, \ldots, a_n \geq 2 \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$MCD(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j \in \mathbb{N} \implies mcm(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Inoltre, due elementi $a, b \in \mathbb{N} \mid MCD(a, b) = 1$, definiamo tali elementi come **coprimi**

Dimostrazione:

- Consideriamo la fattorizzazione in primi di $a_1, \ldots, a_n$:

$$a_1 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{1,p}}, \quad a_2 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{2,p}}, \quad \ldots, \quad a_n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{n,p}}$$

- Poiché $a_1, \ldots, a_n$ sono coprimi tra loro, si ha che

$$MCD(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j \in \mathbb{N} \implies \forall p \in \mathbb{P}, p \mid a_i \implies p \nmid a_j, \forall i \neq j \in \mathbb{N}$$

- Di conseguenza, per ogni esponente $a_{i,p} > 0$ si ha che $a_{j,p} = 0, \forall j \neq i$, da cui ne segue che:

$$\forall p \in \mathbb{P}, \exists ! a_{k,p} > 0 \mid a_{1,p} + \ldots + a_{n,p} = a_{k,p} = max(a_{1,p}, \ldots, a_{n,p})$$

- Ponendo $m := mcm(a_1, \ldots, a_n)$ abbiamo che:

$$m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{max(a_{1,p}, \ldots, a_{n,p})} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{1,p} + \ldots + a_{n,p}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_1} \cdots \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_n} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

$\square$

Lemma 26

Consideriamo la notazione $x (\text{mod } q)$, indicante la classe $[x] \in \mathbb{Z}_q$, dove $q \in \mathbb{N}$.

Dati $a_1, \ldots, a_n \geq 2$ e posto $m := mcm(a_1, \ldots, a_n)$, la seguente funzione è **ben definita** ed **iniettiva**

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_m} : x (\text{mod } m) \mapsto (x (\text{mod } a_1), \ldots, x (\text{mod } a_n))$$

Dimostrazione:

$$x \equiv x' (\text{mod } m) \iff x' - x \in I(m) = I(a_1) \cap \ldots \cap I(a_n) \iff$$

$$\iff x' - x \in I(a_i), \forall i \in [1, n] \iff \begin{cases} x' - x \in I(a_1) \\ x' - x \in I(a_2) \\ \vdots \\ x' - x \in I(a_n) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv x' (\text{mod } a_1) \\ x \equiv x' (\text{mod } a_2) \\ \vdots \\ x \equiv x' (\text{mod } a_n) \end{cases}$$

$\square$

Theorem 27. Teorema cinese dei resti

Dati $a_1, \ldots, a_n \geq 2 \in \mathbb{N}$ **coprimi tra loro**, dunque tali che $MCD(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j$ e dati $0 \leq b_i < a_i \in \mathbb{N}, \forall i \in [1, n]$, il seguente sistema di congruenze (se compatibile) ammette un'**unica soluzione**

$$\exists! x (\text{mod } m) \mid \begin{cases} x \equiv b_1 (\text{mod } a_1) \\ x \equiv b_2 (\text{mod } a_2) \\ \vdots \\ x \equiv b_3 (\text{mod } a_n) \end{cases}$$

dove $m := mcm(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ e dove $x (\text{mod } m)$ indica la classe $[x] \in \mathbb{Z}_m$

Dimostrazione:

- Per il lemma precedente, la seguente funzione è ben definita ed iniettiva

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_m} : x (\text{mod } m) \mapsto (x (\text{mod } a_1), \ldots, x (\text{mod } a_n))$$

- Inoltre, posto $m := mcm(a_1, \ldots, a_n)$, per il lemma precedente si ha che:

$$MCD(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j \implies m = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

- A questo punto, notiamo che:

$$|\mathbb{Z}_{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_n}| = |\mathbb{Z}_{a_1}| \cdot \ldots \cdot |\mathbb{Z}_{a_n}| = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = m = |\mathbb{Z}_m|$$

- Di conseguenza, poiché $|\mathbb{Z}_{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_n}| = |\mathbb{Z}_m|$ e poiché φ è iniettiva, ne segue che φ possa essere iniettiva se e solo se è suriettiva.
- Poiché φ è biettiva, concludiamo quindi che $\exists! x \texttt{ mod m}$ tale che

$$\varphi(x \texttt{ mod m}) = (b_1 \texttt{ mod } a_1, \ldots, b_n \texttt{ mod } a_n)$$

implicando che $x \texttt{ mod m}$ sia l'unica soluzione del sistema.

□

Esempi:

1. - Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 2 (\text{mod } 3) \\ x \equiv 3 (\text{mod } 5) \\ x \equiv 2 (\text{mod } 7) \end{cases}$$

   - Poiché $x \equiv 2 (\text{mod } 3) \iff x = 2 + 3a, \exists a \in \mathbb{Z}$, sostituendo $x = 2 + 3a$ dentro $x \equiv 3 (\text{mod } 5)$ otteniamo che:

$$2 + 3a \equiv 3 (\text{mod } 5)$$

- Impostiamo la seguente equazione, dove le seguenti classi di congruenza appartengono tutte a $\mathbb{Z}_5$:

$$[2+3a]=[3] \iff [2]+[3][a]=[3] \iff$$
$$\iff [3][a]=[3]-[2] \iff [a]=[1][3]^{-1} \iff$$
$$\iff [a]=[1][2] \iff [a]=[2]$$

- Quindi si ha che $[a]=[2]\in\mathbb{Z}_5 \iff a\equiv 2 (\text{mod } 5) \iff a=2+5b, \exists b\in\mathbb{Z}$
- Sostituendo $x=2+3(2+5b)=8+15b$ dentro $x\equiv 2(\text{mod } 7)$, otteniamo che:

$$8+15b\equiv 2(\text{mod } 5)$$

- Ripetiamo quindi i passaggi analoghi a prima, stavolta lavorando in $\mathbb{Z}_7$:

$$[8+15b]=[2] \iff [8]+[15][b]=[2] \iff$$
$$\iff [15][b]=[2]-[8] \iff [1][b]=[2]-[1] \iff [b]=[1]$$

- Quindi si ha che $[b]=[1]\in\mathbb{Z}_7 \iff b\equiv 1(\text{mod } 7) \iff b=1+7c, \exists c\in\mathbb{Z}$
- Infine, otteniamo che

$$x=8+15(1+7c)=23+105c, \exists c\in\mathbb{Z} \iff x\equiv 23(\text{mod } 105)$$

- Notiamo come $mcm(3,5,7)=105$. Difatti, $x\equiv 23(\text{mod } 105)$ è l'unica soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 23\equiv 2(\text{mod } 3)\\ 23\equiv 3(\text{mod } 5)\\ 23\equiv 2(\text{mod } 7)\end{cases}$$

2. - Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x\equiv 6(\text{mod } 15)\\ x\equiv 9(\text{mod } 20)\end{cases}$$

- Poiché 15 e 20 non sono fattori primi, scomponiamo le due congruenze utilizzando il **teorema cinese dei resti**, in particolare la funzione φ:

$$x\equiv 6(\text{mod } 15) \iff \begin{cases} x\equiv 0(\text{mod } 3)\\ x\equiv 1(\text{mod } 5)\end{cases}$$

$$x\equiv 9(\text{mod } 20) \iff \begin{cases} x\equiv 1(\text{mod } 4)\\ x\equiv 4(\text{mod } 5)\end{cases}$$

- Il sistema iniziale, quindi, è equivalente a:

$$\begin{cases} x \equiv 6 (\texttt{mod}\ 15) \\ x \equiv 9 (\texttt{mod}\ 20) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0 (\texttt{mod}\ 3) \\ x \equiv 1 (\texttt{mod}\ 5) \\ x \equiv 1 (\texttt{mod}\ 4) \\ x \equiv 4 (\texttt{mod}\ 5) \end{cases}$$

- Notiamo come il sistema sia **incompatibile**, poiché

$$x \equiv 1 (\texttt{mod}\ 5) \iff x \not\equiv 4 (\texttt{mod}\ 5)$$

dunque il sistema **non ammette alcuna soluzione**

3. - Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 6 (\texttt{mod}\ 15) \\ x \equiv 11 (\texttt{mod}\ 20) \\ x \equiv 15 (\texttt{mod}\ 21) \end{cases}$$

- Scomponendo in fattori primi si ha che:

$$x \equiv 6 (\texttt{mod}\ 15) \iff \begin{cases} x \equiv 0 (\texttt{mod}\ 3) \\ x \equiv 1 (\texttt{mod}\ 5) \end{cases}$$

$$x \equiv 11 (\texttt{mod}\ 20) \iff \begin{cases} x \equiv 3 (\texttt{mod}\ 4) \\ x \equiv 1 (\texttt{mod}\ 5) \end{cases}$$

$$x \equiv 15 (\texttt{mod}\ 21) \iff \begin{cases} x \equiv 0 (\texttt{mod}\ 3) \\ x \equiv 1 (\texttt{mod}\ 7) \end{cases}$$

- Il sistema iniziale, quindi, è equivalente a:

$$\begin{cases} x \equiv 6 (\texttt{mod}\ 15) \\ x \equiv 11 (\texttt{mod}\ 20) \\ x \equiv 15 (\texttt{mod}\ 21) \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv 0 (\texttt{mod}\ 3) \\ x \equiv 1 (\texttt{mod}\ 5) \\ x \equiv 3 (\texttt{mod}\ 4) \\ x \equiv 1 (\texttt{mod}\ 7) \end{cases}$$

- Poiché $x \equiv 0 (\texttt{mod}\ 3) \iff x = 0 + 3a, \exists a \in \mathbb{Z}$, sostituendo nella seconda congruenza otteniamo che $3a \equiv 1 (\texttt{mod}\ 5)$. Lavorando in $\mathbb{Z}_5$ quindi si ha che:

$$[3a] = [1] \iff [3][a] = [1] \iff$$

$$\iff [a] = [1][3]^{-1} \iff [a] = [2]$$

- Dunque $[a] = [2] \in \mathbb{Z}_5 \iff a \equiv 2 (\texttt{mod}\ 5) \iff a = 2 + 5b, \exists b \in \mathbb{Z}$.

- Sostituendo nella terza congruenza otteniamo $x = 3(2+5b) = 6+15b \iff 6+15b \equiv 3(\texttt{mod}\ 4)$. Lavorando in $\mathbb{Z}_4$ si ha che:

$$[6+15b] = [3] \iff [6]+[15][b] = [3] \iff$$
$$\iff [2]+[3][b] = [3] \iff [3][b] = [3]-[2] \iff$$
$$\iff [b] = [1][3]^{-1} \iff [b] = [3]$$

- Dunque $[b] = [3] \in \mathbb{Z}_4 \iff b \equiv 3(\texttt{mod}\ 4) \iff b = 3+4c, \exists c \in \mathbb{Z}$
- Sostituendo nella quarta congruenza otteniamo $x = 6+15(3+4c) = 51+60c \iff 51+60c \equiv 1(\texttt{mod}\ 7)$. Lavorando in $\mathbb{Z}_7$ quindi si ha che:

$$[51+60c] = [1] \iff [2]+[4][c] = [1] \iff [2]+[4][c] = [1] \iff$$
$$\iff [4][c] = [1]-[2] \iff [4][c] = [-1] \iff [c] = [6][4]^{-1} \iff$$
$$\iff [c] = [6][2] \iff [c] = [12] \iff [c] = [5]$$

- Dunque $[c] = [2] \iff c \equiv 5(\texttt{mod}\ 7) \implies c = 5+7d, \exists d \in \mathbb{Z}$.
- Infine, otteniamo che

$$x = 51+60(5+7d) = 351+420d \implies x \equiv 351(\texttt{mod}\ 420)$$

che risulta essere l'unica soluzione del sistema. Difatti verifichiamo che:

$$\begin{cases} 351 \equiv 6(\texttt{mod}\ 15) \\ 351 \equiv 11(\texttt{mod}\ 20) \\ 351 \equiv 15(\texttt{mod}\ 21) \end{cases} \implies \begin{cases} 351 \equiv 0(\texttt{mod}\ 3) \\ 351 \equiv 1(\texttt{mod}\ 5) \\ 351 \equiv 3(\texttt{mod}\ 4) \\ 351 \equiv 1(\texttt{mod}\ 7) \end{cases}$$

4. - Vogliamo calcolare le ultime due cifre di 37^{37}. Poniamo quindi $x := 37^{37}$ e calcoliamo la classe di equivalenza $x\ \texttt{mod}\ 100$.
   - Scomponiamo quindi $100 = 4 \cdot 25$ in modo da poter applicare il teorema cinese dei resti:
     - Calcoliamo la classe di equivalenza di x in $\mathbb{Z}_4$

$$[x] = [37^{37}] = [37]^{37} = [1]^{37} = [1]$$

     - Calcoliamo la classe di equivalenza di x in $\mathbb{Z}_{25}$

$$[x] = [37^{37}] = [37]^{37} = [12]^{37} = [12][12]^{36} = [12][(12)^2]^{18} = [12][144]^{18} =$$
$$= [12][19]^{18} = [12][-6]^{18} = [12][(-6)^2]^9 = [12][36]^9 = [12][11]^9 =$$
$$= [12][11][(11)^2]^4 = [12][11][121]^4 = [12][11][-4]^4 = [12][11][6] = [792] = [17]$$

- Impostiamo quindi il seguente sistema e procediamo applicando il teorema cinese:
$$\begin{cases} x \equiv 1 (\text{mod } 4) \\ x \equiv 17 (\text{mod } 25) \end{cases}$$
- Abbiamo quindi che $x = 1 + 4k \implies 1 + 4k \equiv 17 (\text{mod } 25)$:
$$[1] + [4][k] = [17] \iff [4][k] = [16] \iff [k] = [16][4]^{-1} \iff$$
$$\iff [k] = [16][19] \iff [k] = [304] \iff [k] = [4]$$
- Dunque $k \equiv 4 (\text{mod } 25) \implies k = 4 + 25j \implies x = 1 + 4(4 + 25j) = 17 + 100j$
- Quindi concludiamo che $x \equiv 17 (\text{mod } 100)$ e quindi che le ultime cifre di 37^{37} corrispondono a 17

5.
- Vogliamo calcolare l'inverso di 193 in $\mathbb{Z}_{240}$. Per definizione, ciò equivale a calcolare $193x \equiv 1 (\text{mod } 240)$
- Scomponiamo $240 = 24 \cdot 10$ e osserviamo che se $x \equiv y (\text{mod } n)$ e $d \mid n$ allora si ha che
$$x \equiv y (\text{mod } n) \iff y - x \in I(n) \iff y - x = nk = dhk, \exists h, k \in \mathbb{Z} \implies x \equiv y (\text{mod } d)$$
- Quindi, siccome $16 \mid 240, 3 \mid 240$ e $5 \mid 240$, impostiamo il seguente sistema
$$\begin{cases} 193x \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ 193x \equiv 1 (\text{mod } 5) \\ 193x \equiv 1 (\text{mod } 16) \end{cases}$$
- Riduciamo le classi di equivalenza del sistema:
  - Riduciamo $193x \equiv 1 (\text{mod } 3)$ in:
  $$[193][x] = [1] \implies [1][x] = [1] \implies [x] = [1]$$
  - Riduciamo $193x \equiv 1 (\text{mod } 5)$ in:
  $$[193][x] = [1] \implies [3][x] = [1] \implies [x] = [3]^{-1} \implies [x] = [2]$$
  - Riduciamo $193x \equiv 1 (\text{mod } 16)$ in:
  $$[193][x] = [1] \implies [1][x] = [1] \implies [x] = [1]$$
- Riconduciamo quindi il sistema iniziale ad una versione semplificata sulla quale possiamo applicare il teorema cinese:
$$\begin{cases} 193x \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ 193x \equiv 1 (\text{mod } 5) \\ 193x \equiv 1 (\text{mod } 16) \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv 1 (\text{mod } 3) \\ x \equiv 2 (\text{mod } 5) \\ x \equiv 1 (\text{mod } 16) \end{cases}$$

- Quindi si ha che $x = 1 + 16k \implies 1 + 16k \equiv 1 (\bmod 3)$:

$$[1] + [16][k] = [1] \iff [k] = [0][16]^{-1} \iff [k] = [0]$$

- Dunque $k = 0+3j \implies x = 1+16(0+3j) = 1+48j \implies 1+48j \equiv 2 (\bmod 5)$:

$$[1] + [48][j] = [2] \iff [j] = [1][3]^{-1} \iff [j] = [2]$$

- Infine $j = 2 + 5h \implies x = 1 + 48(2 + 5h) = 97 + 240h \implies x \equiv 97 (\bmod 240)$
- Dunque $[197]^{-1} = [97] \in \mathbb{Z}_{240}$. Difatti, in $\mathbb{Z}_{240}$ si ha che $[193][97] = [1]$

4.8 Piccolo teorema di Fermat

Lemma 28

Dato $p \in \mathbb{P}$ e dato $0 < k < p$ si ha che:

$$p \,\Big|\, \binom{p}{k}$$

Dimostrazione:

- Poiché $p \in \mathbb{P}$, allora esso non potrà essere semplificato dal denominatore, dunque si ha che:
$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{k! \cdot (p-k)!} = ph \iff p \,\Big|\, \binom{p}{k}$$
dove $h := \frac{(p-1)!}{k! \cdot (p-k)!} \in \mathbb{Z}$ per definizione di coefficiente binomiale

$\square$

Esempio:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 \implies 7 \,\Big|\, \binom{7}{3}$$

Corollary 10

Dato $p \in \mathbb{P}$, dato dato $0 < k < p$ e dato $[a] \in \mathbb{Z}_p$, si ha che:

$$\binom{p}{k} \cdot [a] = [0]$$

Dimostrazione:

- Per il lemma precedente si ha che

$$p \,\Big|\, \binom{p}{k} \iff \binom{p}{k} = ph, \exists h \in \mathbb{Z}$$

- Di conseguenza, si ha che:

$$\binom{p}{k} \cdot [a] = ph \cdot [a] = [p][h][a] = [0][h][a] = [0], \exists h \in \mathbb{Z}$$

□

Lemma 29

Dato $p \in \mathbb{P}$ e dati $[a], [b] \in \mathbb{Z}_p$ si ha che:

$$([a] + [b])^p = [a]^p + [b]^p$$

Dimostrazione:

- Dato il **binomio di Newton** (dimostrato nella sezione 3.6), sappiamo che:

$$([a] + [b])^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} [a]^k [b]^{p-k}$$

- Se $k = 0 \lor k = p$, si ha che:

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$$

- Se invece $0 < k < p$, per il corollario precedente sappiamo dato $[x] \in \mathbb{Z}_p$ si ha che:

$$p \;\Bigg|\; \binom{p}{k} \implies \binom{p}{k} \cdot [x] = 0$$

- Di conseguenza, ogni termine della sommatoria, escluso il primo e l'ultimo, può essere ricondotto alla classe $[0]$:

$$([a] + [b])^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} [a]^k [b]^{p-k} = \binom{p}{0} [b]^p + \binom{p}{p} [a]^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} [a]^k [b]^{p-k} =$$

$$= [b]^p + [a]^p + \sum_{k=1}^{p-1} [0] = [b]^p + [a]^p$$

□

Corollary 11

Dato $p \in \mathbb{P}$ e dati $[a_1], \dots, [a_n] \in \mathbb{Z}_p \mid n \in \mathbb{N}$ si ha che:

$$([a_1] + \ldots + [a_n])^p = [a_1]^p + \ldots + [a_n]^p$$

Dimostrazione:

- Caso base (n=1):

$$[a_1]^p = [a_1]^p$$

- Caso base (n=2):
$$([a_1] + [a_2])^p = [a_1]^p + [a_2]^p$$
- Ipotesi induttiva:
$$([a_1] + \ldots + [a_n])^p = [a_1]^p + \ldots + [a_n]^p \mid n \in \mathbb{N}$$
- Passo induttivo:
$$([a_1] + \ldots + [a_n] + [a_{n+1}])^p = (([a_1] + \ldots + [a_n]) + [a_{n+1}])^p =$$
$$= ([a_1] + \ldots + [a_n])^p + [a_{n+1}]^p = [a_1]^p + \ldots + [a_n]^p + [a_{n+1}]^p$$

□

Theorem 30. Piccolo teorema di Fermat

Dato il campo $\mathbb{Z}_p$ dove $p \in \mathbb{P}$, dato $[a] \in \mathbb{Z}_p$ si ha che:
$$a^p \equiv a \pmod{p}$$

Dimostrazione:

- Caso base (a=0):
$$[0]^p = [0]$$
- Ipotesi induttiva:
$$[a]^p = [a]$$
- Passo induttivo:
$$[a+1]^p = ([a] + [1])^p = [a]^p + [1]^p = [a]^p + [1] = [a] + [1] = [a+1]$$

□

Corollary 12

Dato il campo $\mathbb{Z}_p$ dove $p \in \mathbb{P}$, dato $[a] \in \mathbb{Z}_p$ si ha che:
$$a^{p+k} \equiv a^{k+1} \pmod{p}$$

In particolare, se $k = -2$, si ha che:
$$a^{p-2} \equiv a^{-1} \pmod{p}$$

dunque è sempre possibile calcolare comodamente $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$

Dimostrazione:

- Per il piccolo teorema di Fermat, si ha che:

$$[a]^p = [a] \iff [a]^k[a]^p = [a][a]^k \iff [a]^{p+k} = [a][a]^{k+1-1} \iff$$
$$\iff [a]^{p+k} = [a][a]^{-1}[a]^{k+1} \iff [a]^{p+k} = [1][a]^{k+1} \iff [a]^{p+k} = [a]^{k+1}$$

□

Esempio:

- Vogliamo trovare $[4]^{-1} \in \mathbb{Z}_{13}$. Per il corollario appena mostrato, si ha che:

$$4^{-1} \equiv 4^{13-2} (\bmod\ 13) \iff [4]^{-1} = [4]^{11} = [4][4]^{10} = [4][4^2]^5 = [4][16]^5 =$$
$$= [4][3]^5 = [4][3]^2[3]^3 = [4][9][27] = [4][9][1] = [36] = [10]$$

4.9 Funzione totiente di Eulero

Definition 33. Funzione totiente di Eulero

Dato $n \in \mathbb{N}$, definiamo come $\varphi(n)$ come **funzione totiente di Eulero**, dove:

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto |\mathbb{Z}_n|$$

Lemma 31

Dati i due anelli commutativi $\mathbb{Z}_m$ e $\mathbb{Z}_n$, dove $MCD(m, n) = 1$, si ha che:

$$[a] \in \mathbb{Z}^*_{mn} \iff [a] \in \mathbb{Z}^*_m, [a] \in \mathbb{Z}^*_n$$

Dimostrazione:

- Supponiamo che $[a] \in \mathbb{Z}^*_{mn}$, da cui ricaviamo che:

$$[a] \in \mathbb{Z}^*_{mn} \iff \exists x \in \mathbb{Z}_{mn} \mid ax \equiv 1 (\bmod\ mn)$$

- Poiché $MCD(m, n) = 1 \implies mcm(m, n) = mn$, per il teorema cinese dei resti si ha che:

$$ax \equiv 1 (\bmod\ mn) \iff \begin{cases} ax \equiv 1 (\bmod\ m) \\ ax \equiv 1 (\bmod\ n) \end{cases} \iff [a] \in \mathbb{Z}^*_m, [a] \in \mathbb{Z}^*_n$$

□

Observation 21

Dati $m, n \in \mathbb{N}$ dove $MCD(m, n) = 1$, si ha che:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

Dimostrazione:

- Per il lemma precedente, la seguente funzione $f : \mathbb{Z}^*_{mn} \to \mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}^*_n$ risulta essere biettiva, implicando che:

$$\varphi(mn) = |\mathbb{Z}^*_{mn}| = |\mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}^*_n| = |\mathbb{Z}^*_m| \cdot |\mathbb{Z}^*_n| = \varphi(m)\varphi(n)$$

□

Observation 22

Dati $p \in \mathbb{P}$ e $k \neq 0 \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$$

Dimostrazione:

- Per dimostrazione precedente, per ogni $0 < a < p^k$, si ha che:

$$[a] \in \mathbb{Z}^*_{p^k} \iff MCD(a, p^k) = 1$$

- Inoltre, poiché $p \in \mathbb{P}$, si ha che:

$$MCD(a, p^k) = 1 \iff p \nmid a \iff \nexists n \in \mathbb{Z} \mid a = np$$

- Simmetricamente, quindi, si ha che:

$$[a] \notin \mathbb{Z}^*_{p^k} \iff MCD(a, p^k) \neq 1 \iff p \mid a \iff \exists n \in \mathbb{Z} \mid a = np$$

- Consideriamo quindi i multipli di p compresi tra 0 e p^k (escluso):

$$0 \leq np < p^k \implies 0 \leq n \leq p^{k-1}$$

da cui traiamo che la cardinalità degli elementi non invertibili in $\mathbb{Z}_{p^k}$ corrisponde a:

$$H := \{[a] \in \mathbb{Z}_{p^k} \mid [a] \notin \mathbb{Z}^*_{p^k}\} \implies |H| = p^{k-1}$$

- Infine, quindi, concludiamo che:

$$\varphi(p^l) = \left|\mathbb{Z}_{p^k}\right| = \left|\mathbb{Z}^*_{p^k}\right| - |H| = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$$

□

Proposition 32

Dato $n \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Dimostrazione:

- Consideriamo la fattorizzazione in primi di n, ossia:

$$\exists p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}, i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}_{>0} \mid n = p_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k}$$

- Poiché tali fattori sono tutti coprimi tra loro, si ha che:

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{i_1}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_k^{i_k}) = p_1^{i_1-1}(p_i - 1) \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k-1}(p_k - 1) =$$

$$= \frac{p_1^{i_1}(p_1 - 1)}{p_1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{k_1}(p_k - 1)}{p_k} = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

$\square$

4.10 Ordine di un elemento di un gruppo

Definition 34. Sottogruppo ciclico ed Ideale d'ordine

Sia G un gruppo. Dato $g \in G$, definiamo il **sottogruppo ciclico** $H(g) \leqslant G$ e l'**ideale d'ordine** $I(g) \lhd \mathbb{Z}$ come:

$$H(g) : \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$I(g) : \{n \in \mathbb{Z} \mid g^n = e\}$$

Dimostrazioni:

- $H \leqslant G$
  - $g^0 = e \implies e \in H(g)$
  - $g^n, g^m \in H(g) \implies g^n \cdot g^m = g^{n+m} \implies g^{n+m} \in H(g)$
  - $g^n \in H(g) \implies (g^n)^{-1} = g^{-n} \implies g^{-n} \in H(g)$
- $I(g) \lhd \mathbb{Z}$
  - $g^0 = e \implies 0 \in H(g)$
  - $n, m \in I(g) \implies g^n = g^m = e \implies g^{n+m} = g^n \cdot g^m = e \implies n + m \in I(g)$
  - $n \in I(g) \implies g^{-n} = (g^n)^{-1} = e^{-1} = e \implies -n \in I(g)$
  - $n \in I(g), k \in \mathbb{Z} \implies g^{nk} = (g^n)^k = e^k = e \implies kn \in I(g)$

$\square$

Definition 35. Ordine di un elemento

Sia G un gruppo. Dato $g \in G$, definiamo l'**ordine di** g come:

$$o(g) := |H(g)|$$

Proposition 33

Sia G un gruppo. Dato $g \in G$, si ha che $\exists! d \in \mathbb{N} \mid I(g) = I(d)$ tale che

- $d = 0 \implies o(g) = +\infty$
- $d > 0 \implies o(g) = d$

Dunque, $o(g)$ corrisponde al **più piccolo esponente** d tale che $g^d = e$

Dimostrazione:

- Poiché $I(g) \lhd \mathbb{Z}$ e poiché $\mathbb{Z}$ è un dominio ad ideali principali, si ha che $\exists! d \in \mathbb{N} \mid I(g) = I(d)$.
- Di conseguenza, si ha che:

$$n, m \in I(g) \iff g^n = g^m \iff g^{-n} \cdot g^n = g^m \cdot g^{-n} \iff e = g^{m-n} \iff$$

$$\iff m - n \in I(g) = I(d) \iff m - n = dh, \exists h \in \mathbb{Z} \iff d \mid m - n$$

- Consideriamo la funzione $f : \mathbb{Z} \to H(g) : n \mapsto g^n$, la quale risulta essere suriettiva per definizione stessa di $H(g)$
- Nel caso in cui $d = 0$, si ha che:

$$g^n = g^m \iff d \mid m - n \iff 0 \mid m - n \iff$$

$$\iff m - n = 0k, \exists k \in \mathbb{Z} \iff m - n = 0 \iff m = n$$

di conseguenza, si ha che $f(n) = f(m) \iff m = n, \forall m, n \in \mathbb{Z}$, implicando che f sia anche iniettiva. Dunque, siccome f sarebbe una funzione biettiva, ne segue che

$$o(g) := |H(g)| = |Z| = +\infty$$

- Nel caso in cui $d > 0$, invece, si ha che $d \in I(d) = I(g) \iff g^d = e$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists! q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < d \mid n = dq + r \implies$$

$$\implies g^n = g^{dq+r} = g^{dq} g^r = (g^d)^q g^r = e^q g^r = g^r$$

- Poiché $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists r \in [0, d) \mid g^n = g^r$ ne segue che possano esistere al massimo d potenze di g, implicando che $|H(g)| \leq d$
- Consideriamo ora invece la seguente restrizione di f, ossia $g : \{0, \ldots, d - 1\} \to H(g) : n \mapsto g^n$

- Considerando ancora il caso in cui $d > 0$ e presi $0 \leq m, n < d$, da cui traiamo che $-d < m - n < d$, si ha che:

$$g^n = g^m \iff g^n g^{-m} = g^m g^{-n} \iff g^{m-n} = e \iff$$

$$\iff m - n \in I(g) = I(d) \iff m - n = dp, \exists p \in \mathbb{Z}$$

- Tuttavia, poiché $-d < m - n < d$, l'unica possibilità è $m - n = 0$, implicando che $m = n$. Di conseguenza, si ha che $g(n) = g(m) \iff n = m, \forall 0 \leq m, n < d$, implicando che g sia iniettiva, implicando a sua volta che:

$$o(g) := |H(g)| \leq |\{0, \dots, d-1\}| = d$$

- Infine, quindi, otteniamo che $d \geq |H(g)| \leq d \implies |H(g)| = d$, implicando quindi che g possa essere iniettiva se e solo se è suriettiva, da cui concludiamo che $g(x) = g^x \in H(g), \forall 0 \leq x < d$:

$$H(g) = \{g^0, \dots, g^{d-1}\}$$

□

Observation 23

Sia G un gruppo con cardinalità finita. Dato $g \in G$ si ha che

$$o(g) := |H(g)| \leq |G| < +\infty \implies o(g) \mid |G| \implies g^{|G|} = e$$

Attenzione: se $o(g) = +\infty$ allora $o(g) \nleq |G|$

Dimostrazione:

- Dato $d := o(g) := |H(g)| \leq |G| < +\infty$, per il teorema di Lagrange si ha che:

$$o(g) \mid |G| \implies d \mid |G| \implies |G| = dk, \exists k \in \mathbb{Z} \implies g^{|G|} = g^{dk} = (g^d)^k = e^k = e$$

□

Corollary 13. Piccolo teorema di Fermat (seconda dimostrazione)

Dato il campo $\mathbb{Z}_p$ dove $p \in \mathbb{P}$, dato $[a] \in \mathbb{Z}_p$ si ha che:

$$a^p \equiv a (\texttt{mod}\ p)$$

Dimostrazione:

- Se $[a] = [0]$, allora abbiamo che $[a]^p = [0]$
- Poiché $\mathbb{Z}_p$ è un campo, si ha che $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{0\}$, implicando che $\left|\mathbb{Z}_p^*\right| = p - 1$.
- Di conseguenza, dato $[a] \neq [0] \in \mathbb{Z}_p^*$ si ha che:

$$o(a) \mid \left|Z_p^*\right| \implies [a]^{\left|\mathbb{Z}_p^*\right|} = [1] \implies [a]^{p-1} = [1] \implies [a]^p [a]^{-1} = [1] \implies [a]^p = [a]$$

□

Theorem 34. Teorema di Eulero

Dati $a, n \in \mathbb{N}$ tali che $MCD(a,n) = 1$, si ha che:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 (\texttt{mod}\ \ n)$$

dove $\varphi(n)$ è la funzione totiente di Eulero

Dimostrazione:

- Per dimostrazione precedente, si ha che:

$$MCD(a,n) = 1 \iff [a] \in \mathbb{Z}_n^*$$

- Di conseguenza, si ha che:

$$o(a) \mid |Z_n^*| \implies [a]^{|\mathbb{Z}_n^*|} = [1] \implies [a]^{\varphi(n)} = [1]$$

$\square$

Proposition 35. Gruppo ciclico

Sia G un gruppo con cardinalità finita. Dato $g \in G$ si ha che

$$o(g) := |H(g)| = |G| \iff H(g) = G$$

In tal caso definiamo G come **gruppo ciclico**

Dimostrazione:

- Poiché $H(g) \leqslant G \implies H(g) \subseteq G$, per definizione stessa di insieme improprio si ha

$$|H(g)| = |G| \iff H(g) = G$$

$\square$

Corollary 14

Sia G un gruppo. Dato $g \in G$, si ha che:

$$g \in G^* \implies g^{o(g)-1} = g^{-1}$$

Dimostrazione:

- Siccome $g \in \mathbb{G}^* \iff \exists g^{-1} \in \mathbb{G}$, allora:

$$g^{o(g)} = 1 \iff g^{o(g)}g^{-1} = g^{-1} \iff g^{o(g)-1} = g^{-1}$$

$\square$

Lemma 36

Sia G un gruppo. Dato $g \in G$, si ha che:

$$g \in g^{-1} \implies o(g) = o(g^{-1})$$

Dimostrazione:

- Siccome $g \in \mathbb{G}^* \iff \exists g^{-1} \in \mathbb{G}$, allora:

$$(g^{-1})^n \in H(g^{-1}) \implies (g^{-1})^n = g^{-n} \in H(g)$$

- Analogamente, si ha che:

$$g^n \in \mathbb{H}(\eth) \implies g^n = (g^-1)^{-n} \in H(g^-1)$$

- Di conseguenza, si verifica che $H(g) = H^{-g} \implies o(g) = o(g^{-1})$ □

Lemma 37

Sia G un gruppo finito e $k \in \mathbb{Z}$, per ogni $g \in G$ si verifica che:

$$o(g^k) \mid o(g)$$

Dimostrazione:

- Dimostriamo che $H(g^k) \leqslant H(g)$
  - $(g^k)^n \in H(g^k) \implies (g^k)^n = g^{kn} \in H(g) \implies H(g^k) \subseteq H(g)$
  - $(g^k)^0 = g^0 = e \in H(g^k)$
  - $(g^k)^n, (g^k)^m \in H(g) \implies (g^k)^n(g^k)^m = g^{kn}g^{km} = g^{kn+km} = g^{k(n+m)} = (g^k)^{n+m} \in H(g)$
  - $(g^k)^n \in H(g^k) \implies ((g^k)^n)^{-1} = (g^k)^{-n} \in H(g^k)$
- Di conseguenza, per il teorema di Lagrange si ha che

$$\left|H(g^k)\right| \mid |H(g)| \iff o(g^k) \mid o(g)$$

□

Lemma 38

Sia G un gruppo finito. Dati $g, h \in G \mid gh = hg$, si ha che:

$$\frac{m}{d} \mid o(gh) \qquad \text{e} \qquad o(gh) \mid m$$

dove $m := mcm(o(g), o(h))$ e $d := MCD(o(g), o(h))$.

In particolare, se $d = 1$, allora $o(gh) = o(g)o(h)$.

Dimostrazione:

- Per definizione stessa di $m := mcm(o(g), o(h))$, si ha che

$$o(g) \mid m, o(h) \mid m \iff o(g) \cdot p = m = o(h) \cdot q, \exists p, q \in \mathbb{Z}$$

- Siccome per ipotesi $gh = hg$, si ha che:

$$(gh)^m = \underbrace{gh \cdot \ldots \cdot gh}_{m \text{ volte}} = g^m h^m = g^{o(g) \cdot p} h^{o(h) \cdot q} = (g^{o(g)})^p (h^{o(h)})^q = e^p e^q = e \implies$$

$$\implies m \in I(gh) = I(o(gh)) \implies o(gh) \mid m$$

- Inoltre, abbiamo che

$$e = (gh)^{o(gh)} = \underbrace{gh \cdot \ldots \cdot gh}_{o(gh) \text{ volte}} = g^{o(gh)} h^{o(gh)} \implies e = g^{o(gh)} h^{o(gh)} \iff g^{o(gh)} = h^{-o(gh)}$$

- Per il lemma precedente, abbiamo che

$$o(g^{o(gh)}) \mid o(g), o(h^{-o(gh)}) \mid o(h)$$

  e dato che $g^{o(gh)} = h^{-o(gh)}$, otteniamo che

$$o(g^{o(gh)}) \mid o(g), o(h^{-o(gh)}) \mid o(h) \iff o(g^{o(gh)}) \mid o(g), o(g^{o(gh)}) \mid o(h) \implies o(g^{o(gh)}) \mid d$$

  dove $d = MCD(o(g), o(h))$

- A questo punto, notiamo che:

$$\frac{m}{d} \cdot \frac{d}{o(g^{o(gh)})} = \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \implies \frac{m}{d} \mid \frac{m}{o(g^{o(gh)})}$$

- Inoltre, ponendo $k := g^{o(gh)}$ abbiamo che

$$g^{o(g^{o(gh)})o(gh)} = g^{k \cdot o(gh)} = (g^{o(gh)})^k = k^{o(k)} = e \implies o(g) \mid o(g^{o(gh)})o(gh)$$

  e analogamente che:

$$h^{-o(g^{o(gh)})o(gh)} = (h^{-o(gh)})^{o(g^{o(gh)})} = (g^{o(gh)})^{o(g^{o(gh)})} = k^{o(k)} = e \implies$$

$$\implies o(h) \mid -o(g^{o(gh)})o(gh) \implies o(h) \mid o(g^{o(gh)})o(gh)$$

  di conseguenza si ha che $m \mid o(g^{o(gh)})o(gh)$

- Quindi, $\exists j \in \mathbb{Z}$ tale che:

$$o(g^{o(gh)})o(gh) = mj \implies o(gh) = \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \cdot j \implies \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \mid o(gh)$$

- Infine, per transitività si ha che:

$$\frac{m}{d} \mid \frac{m}{o(g^{o(gh)})}, \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \mid o(gh) \implies \frac{m}{d} \mid o(gh)$$

- Per l'ultima affermazione notiamo che se $d = 1$, allora:

$$\frac{m}{d} \mid o(gh) \implies m \mid o(gh)$$

di conseguenza, poiché $m, d \in \mathbb{N}$, per anti-simmetria (sezione 3.2) si ha che:

$$m \mid o(gh), o(gh) \mid m \iff m = o(gh)$$

- Dunque, per il teorema fondamentale dell'algebra, se $d = 1$ si ha che:

$$o(g)(h) = m = o(g)o(h)$$

□

Proposition 39

Siano $n_1, \dots, n_k \neq 0 \in \mathbb{N} \mid MCD(a_i, a_j) \iff i \neq j$ e sia $N := mcm(n_1, \dots, n_k) = n_1 \cdot \dots \cdot n_k$.

Dato $[a] \in \mathbb{Z}_{\gtrdot}{}^*$, dove $m := mcm(o_1, \dots, o_k)$ e dove $o_h := o([a])$ nel gruppo $\mathbb{Z}_{\ltimes_{\approx}}{}^*, \forall 0 < h < k$, posto $o := o([a])$ nel gruppo $\mathbb{Z}_{\gtrdot}^*$ si ha che:

$$o = m := mcm(o_1, \dots, o_k)$$

Dimostrazione:

- Per il teorema cinese dei resti, abbiamo che:

$$a^o \equiv 1 (\bmod\ N) \iff \begin{cases} a^o \equiv 1 (\bmod\ n_1) \\ \vdots \\ a^o \equiv 1 (\bmod\ n_k) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} o_1 \mid o \\ \vdots \\ o_k \mid o \end{cases} \iff m := mcm(o_1, \dots, o_k) \mid o$$

- Inoltre, poiché $m := mcm(o_1, \dots, o_k)$, abbiamo che:

$$\begin{cases} o_1 \mid m \\ \vdots \\ o_k \mid m \end{cases} \iff \begin{cases} a^m \equiv 1 (\bmod\ n_1) \\ \vdots \\ a^m \equiv 1 (\bmod\ n_k) \end{cases} \iff a^m \equiv 1 (\bmod\ N) \implies o \mid m$$

- Poiché $o, m \in \mathbb{N}$, per anti-simmetria (sezione 3.2) si ha che:

$$o \mid m, m \mid o \iff o = m)$$

□

Esempio:

- Vogliamo trovare tutti gli inversi di $\mathbb{Z}_{21}$ e il loro ordine, determinando se $\mathbb{Z}_{21}$ sia un gruppo ciclico
- Dato $g \in \mathbb{Z}_{21}$, sappiamo che $g \in \mathbb{Z}_{21}^* \iff MCD(a, 21) = 1$ (sezione 4.5). Dunque abbiamo che:

$$\mathbb{Z}_{21}^* : \{[1], [2], [4], [5], [8], [10], [11], [13], [16], [17], [19], [20]\} \implies |\mathbb{Z}_{21}^*| = 12$$

- Dato $g \in \mathbb{Z}_{21}^*$, per Lagrange abbiamo che $o(g)$ può essere solo un divisore di $|\mathbb{Z}_{21}^*|$, riducendo i tentativi necessari a trovare l'ordine di ogni elemento da 21 a 6:

$$o(g) \mid |\mathbb{Z}_{21}^*| \implies o(g) \mid 12 \implies o(g) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

- Calcoliamo quindi gli ordini dei vari invertibili in $\mathbb{Z}_{21}$ trovati:
  - $[1]^1 = 1 \implies \begin{cases} o([1]) = 1 \\ [1]^{-1} = [1]^0 = [1] \end{cases}$
  - $[2]^6 = [64] = [1] \implies \begin{cases} o([2]) = 6 \\ [2]^{-1} = [2]^5 = [11] \end{cases} \implies \begin{cases} o([11]) = 6 \\ [11]^{-1} = [2] \end{cases}$
  - $[4]^3 = [2]^6 = [64] = [1] \implies \begin{cases} o([4]) = 3 \\ [4]^{-1} = [4]^2 = [16] \end{cases} \implies \begin{cases} o([16]) = 3 \\ [16]^{-1} = [4] \end{cases}$
  - $[5]^6 = [5^2]^3 = [4]^3 = [1] \implies \begin{cases} o([5]) = 6 \\ [5]^{-1} = [5]^5 = [17] \end{cases} \implies \begin{cases} o([17]) = 6 \\ [17]^{-1} = [5] \end{cases}$
  - $[8]^2 = [2]^6 = [1] \implies \begin{cases} o([8]) = 2 \\ [8]^{-1} = [8] \end{cases}$
  - $[10]^6 = [10^3]^2 = [13]^2 = [1] \implies \begin{cases} o([10]) = 6 \\ [10]^{-1} = [10]^5 = [19] \end{cases} \implies \begin{cases} o([19]) = 6 \\ [19]^{-1} = [10] \end{cases}$
  - $[13]^2 = [1] \implies \begin{cases} o([13]) = 2 \\ [13]^{-1} = [13]^1 = [13] \end{cases}$
  - $[20]^2 = [1] \implies \begin{cases} o([20]) = 2 \\ [20]^{-1} = [20]^1 = [20] \end{cases}$
- Poiché $\nexists g \in \mathbb{Z}_{21}^* \mid o(g) = |\mathbb{Z}_{21}^*|$, concludiamo che $\mathbb{Z}_{21}^*$ non è un gruppo ciclico

Capitolo 5

Gruppo Simmetrico

Observation 24

Una funzione $f : X \to Y : x \to f(x)$ è essere invertibile se e solo se f è biettiva.

$$f \texttt{ invertibile} \iff f \texttt{ biettiva}$$

dove l'essere invertibile equivale a dire che $\exists f^{-1} : Y \to X : f(x) \mapsto x$

Dimostrazione:

- Sia $f : X \to Y : x \mapsto f(x)$
- Se $\exists f^{-1} : Y \to X : f(x) \mapsto x$, ossia f è invertibile, allora

  $$f(x) = f(y) \implies f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(g)) \implies x = y$$

  dunque f è iniettiva
- Analogamente, si ha che

  $$\forall y \in Y, \exists x \in X \mid y = f(x) = f(f^{-1}(y))$$

  dunque f è anche suriettiva, implicando che essa sia biettiva
- Inoltre, poiché $f = (f^{-1})^{-1}$, anche f^{-1} è invertibile e di conseguenza biettiva
- Se invece f è biettiva, allora

  $$\forall x \in X, \exists! y \in Y \mid f(x) = y \implies f(f^{-1}(y)) = y$$

  di conseguenza, f è invertibile

□

Definition 36. Gruppo simmetrico

Dato un insieme X, denotiamo come $\mathcal{S}_X$ l'insieme:

$$\mathcal{S}_X : \{f : X \to X \mid f \texttt{ è biettiva}\}$$

Inoltre, si ha che $(\mathcal{S}_X, \circ)$ è un gruppo.

Dimostrazione:

- Per natura stessa della composizione tra funzione si ha che

$$f, g, h \in \mathcal{S}_X \implies h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f$$

- La funzione identità $\texttt{id} : X \to X : x \mapsto x$ è biettiva, dunque

$$\exists \texttt{id} \in \mathcal{S}_X \mid \forall f \in \mathcal{S}_X, f \circ \texttt{id} = \texttt{id} \circ f = f$$

- Poiché una funzione è biettiva se e solo se è invertibile, ne segue che

$$\forall f \in \mathcal{S}_X, \exists f^{-1} \in \mathcal{S}_X \mid f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \texttt{id}$$

□

Observation 25

Dato il gruppo simmetrico $\mathcal{S}_X$, ogni $f \in \mathcal{S}_X$ corrisponde ad una **permutazione** del dominio X, poiché $f : X \to X$ è biettiva. Dunque, è possibile definire impropriamente $\mathcal{S}_X$ come il "**gruppo delle permutazioni di** X".

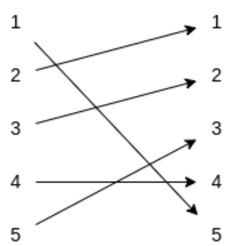
In particolare, se $|X| = n$ dove $n \in \mathbb{N}$, ogni $f \in \mathcal{S}_X$ corrisponderà ad una permutazione di n elementi. In tal caso, denotiamo come $\mathcal{S}_n$ il **gruppo simmetrico di ordine** n, la cui cardinalità corrisponde a $|\mathcal{S}_n| = n!$

Esempio:

- Data la permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_5$, possiamo utilizzare due **notazioni** per poterne descrivere il comportamento:

Tramite grafo

σ



Tramite matrice

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Observation 26

Per comodità di scrittura, definiamo l'operazione binaria **prodotto tra permutazioni** come:

$$\cdot : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n : (\sigma, \tau) \mapsto \tau \circ \sigma$$

In altre parole, si ha che $\sigma\tau := \sigma \circ \tau = \sigma(\tau(x)), \forall x$.

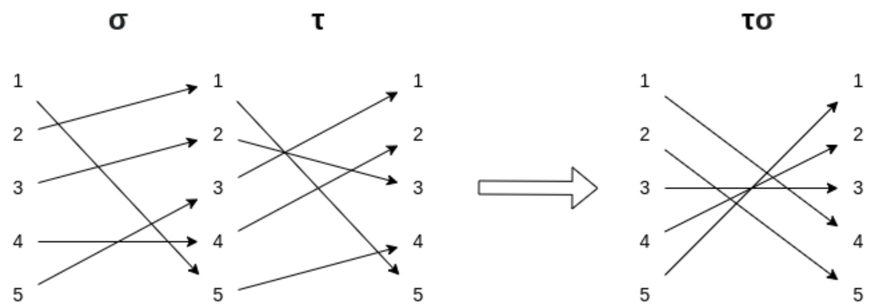
Ovviamente, $(\mathcal{S}_n, \cdot)$ risulta essere un **gruppo** (non abeliano poiché per natura stessa della composizione si ha che $\sigma\tau \neq \tau\sigma$))

Esempio:

- Siano $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_5$ tali che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Per calcolare il prodotto tra le due permutazioni (dunque la loro composizione), utilizziamo due metodi:
  - Tramite **grafo**, considerando la composizione delle frecce rappresentanti le due permutazioni



  - Tramite **matrici**, dove ci basta "allineare" gli elementi in input della seconda permutazione con gli elementi in output della seconda. Il risultato del prodotto sarà costituito dagli **elementi in input della prima** e gli **elementi in output della seconda**.

$$\begin{matrix} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix} \implies \begin{matrix} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \tau = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \implies \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.1 Ordine di una permutazione

Definition 37. Ciclo di una permutazione

Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Definiamo come **ciclo di** σ una sequenza di interi $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n$ tutti distinti tra loro tali che:

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_n) = i_1$$

Definiamo come **lunghezza del ciclo** il numero di elementi appartenenti al ciclo.

Esempio:

- Consideriamo la seguente permutazione in $\sigma \in \mathcal{S}_9$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Notiamo la presenza di tre cicli all'interno di tale permutazione:
  - $1 \to 5 \to 2 \to 7 \to 1$ che abbreviamo come (1587)
  - $3 \to 6 \to 3$ che abbreviamo come (36)
  - $4 \to 9 \to 8 \to 4$ che abbreviamo come (498)

Definition 38. Decomposizione in cicli

Data $\sigma \in \mathcal{S}_n$ composta da k cicli, definiamo la sua **decomposizione in cicli** come:

$$\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k$$

dove γ_i è un ciclo di σ

Esempio:

- Considerando ancora l'esempio precedente, possiamo riscrivere σ tramite la sua decomposizione in cicli:

$$\sigma \in \mathcal{S}_9 \mid \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \implies \sigma = (1587)(36)(498)$$

- Ovviamente, tramite una decomposizione in cicli è possibile ricostruire la permutazione associata:

$$\tau \in \mathcal{S}_8 \mid \tau = (235)(1874)(6) \implies \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Definition 39

Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Dati $1 \leq i \leq n$, definiamo:

$$I(\sigma, i) : \{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n(i) = i\}$$

$$I(\sigma) : \{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n = \mathtt{id}\}$$

dove:

- $\mathtt{id}$ è la permutazione identica, dunque $\mathtt{id} = (1)(2)\ldots(n-1)(n)$
- $(I(\sigma(i)), +) \lhd (\mathbb{Z}, +)$
- $(I(\sigma), +) \lhd (\mathbb{Z}, +)$

Dimostrazione:

- $I(\sigma, i) \lhd \mathbb{Z}$:
  - $\sigma^0(i) = \mathtt{id}(i) = i \implies 0 \in I(\sigma, i)$
  - $m, n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^n(i) = i = \sigma^m(i) \implies \sigma^{n+m}(i) = \sigma^n(\sigma^m(i)) = \sigma^n(i) = i \implies m + n \in I(\sigma, i)$
  - $n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^{-n}(i) = (\sigma^n)^{-1}(i) = i \implies -n \in I(\sigma, i)$
  - $n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^{nk}(i) = (\sigma^n)^k(i) = i, \forall k \in \mathbb{Z} \implies nk \in I(\sigma, i), \forall k \in \mathbb{Z}$
  - Per gli ultimi due punti è necessario osservare che poiché $\sigma^n(i) = i$, allora $(\sigma^n)^k(i) = i, \forall k \in \mathbb{Z}$, poiché i viene sempre mandato in se stesso
- Viene omessa la dimostrazione di $I(\sigma) \lhd \mathbb{Z}$ poiché analoga a quella di $I(\sigma, i) \lhd \mathbb{Z}$

□

Lemma 40

Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e sia $\gamma_1 \ldots \gamma_k$ la sua decomposizione in cicli. Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e dato $i \in \gamma_j \mid j \in [1, k]$ si ha che:

$$I(\sigma, i) = I(d_j)$$

dove d_j è la lunghezza di γ_j

Dimostrazione:

- Poiché $\mathbb{Z}$ è un dominio ad ideali principali e poiché $I(\sigma, i) \lhd \mathbb{Z}$, si ha che:

  $$\exists! h \in \mathbb{N} \mid I(\sigma, i) = I(h)$$

  dove $h := min(I(\sigma, i)_{>0})$
- Sia $i \in (i_1 i_2 \ldots i_{d_j})$, dunque appartenente ad un ciclo di lunghezza d_j. Per comodità, supponiamo che $i = i_1$, poiché scorrere l'ordine degli elementi del ciclo non ne cambia le proprietà (ad esempio: $(2783) = (7832) = (8327) = \ldots$)

- Se $0 < h < d_j$, si ha che:

$$0 < h < d_j \implies \sigma^h(i) = \sigma(\sigma^{h-1}(i)) = \sigma(i_h) = i_{h+1} \implies h \notin I(\sigma, i)$$

- Nel caso in cui invece $h = d$, si verifica che:

$$h = d_j \implies \sigma^h(i) = \sigma^{d_j}(i) = \sigma(\sigma^{d_j-1}(i)) = \sigma(i_{d_j}) = i_1 = i \implies h \in I(\sigma, i)$$

- Di conseguenza, affinché $I(\sigma, i) = I(h)$, ne segue necessariamente che $h = d_j$

□

Proposition 41. Ordine di una permutazione

Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e sia $\gamma_1 \dots \gamma_k$ la sua decomposizione in cicli. Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$, si ha che:

$$I(\sigma) = I(m) \implies o(\sigma) = m$$

dove $m := mcm(d_1, \dots, d_k)$ e dove $d_1, \dots, d_k$ sono rispettivamente le lunghezze di $\gamma_1 \dots \gamma_k$.

Dunque, $o(\sigma)$ corrisponde al **minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli di σ**

Dimostrazione:

- Per definizione stessa di $I(\sigma)$ e $I(\sigma, i)$, si ha che:

$$n \in I(\sigma) \iff \sigma^n = \mathtt{id} \iff \sigma^n(i) = i, \forall i \in [1, n] \iff$$

$$\iff n \in I(\sigma, i), \forall i \in [1, n] \iff n \in I(\sigma, 1) \cap \dots \cap I(\sigma, n)$$

  implicando quindi che $I(\sigma) = I(\sigma, 1) \cap \dots \cap I(\sigma, n)$

- Poiché $\mathbb{Z}$ è un dominio ad ideali principali e poiché $I(\sigma) \triangleleft \mathbb{Z}$, per il lemma precedente si ha che:

$$I(\sigma) = I(\sigma, 1) \cap \dots \cap I(\sigma, n) = I(d_1) \cap \dots \cap I(d_k) = I(m)$$

  dove $m := mcm(d_1, \dots, d_k)$

□

Esempi:

- Data $\sigma \in S_7$ tale che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (13526)(47)$$

  L'ordine di tale permutazione risulta essere:

$$o(\sigma) = mcm(5, 2) = 10$$

- Data $\sigma \in S_{15}$ tale che:

$$\sigma = (1\ 2\ 10\ 8\ 3)(11\ 7)(4\ 12\ 14\ 6)(13)(5\ 15\ 9)$$

L'ordine di tale permutazione risulta essere:

$$o(\sigma) = mcm(5, 2, 4, 1, 3) = 60$$

5.2 Segno delle permutazioni

Definition 40. Segno di una permutazione

Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Definiamo il **segno di** σ come:

$$sgn(\sigma) = (-1)^{|Inv(\sigma)|} = \begin{cases} +1 & \text{se } |Inv(\sigma)| \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } |Inv(\sigma)| \text{ è dipari} \end{cases}$$

Dove $Inv(\sigma)$ è l'**insieme delle sue inversioni**:

$$Inv(\sigma) : \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

Definiamo σ come **pari** se $sgn(\sigma) = +1$, mentre come **dispari** $sgn(\sigma) = -1$

Esempio:

- Sia $\sigma \in \mathcal{S}_5$ tale che

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- L'insieme delle sue inversioni sarà:

$$Inv(\sigma) : \{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4)\}$$

da cui otteniamo che $sgn(\sigma) = -1$

Definition 41. Trasposizione e Trasposizione adiacente

Definiamo $\tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$, dove $1 \leq i < j \leq n$, come **trasposizione** se:

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} j & \text{se } k = i \\ i & \text{se } k = j \\ k & \text{se } k \neq i, k \neq j \end{cases}$$

In particolare, definiamo come $\tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$ come **trasposizione adiacente** se $j = i + 1$, dunque avente l'effetto di scambiare due elementi adiacenti tra loro.

Lemma 42

Data $\sigma \in \mathcal{S}_n$, si ha che:

$$\exists 1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq n \mid \sigma = \tau_{i_1,i_1+1} \cdot \ldots \cdot \tau_{i_k,i_k+1}$$

In altre parole, σ può essere espressa come il **prodotto di k trasposizioni adiacenti**

Dimostrazione tramite esempio:

- Prima di tutto, osserviamo che dati $\sigma, \tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$ tali che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(j) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ 1 & \ldots & j & \ldots & i & \ldots & n \end{pmatrix}$$

  si ha che:

$$\sigma\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & \ldots & j & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(j) & \ldots & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Dunque, data $\sigma \in S_3$ tale che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  abbiamo che:

$$\sigma \cdot \tau_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \implies \sigma \cdot \tau_{3,4} \cdot \tau_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \sigma \cdot \tau_{3,4} \cdot \tau_{2,3} \cdot \tau_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \implies \sigma \cdot \tau_{3,4} \cdot \tau_{2,3} \cdot \tau_{1,2} \cdot \tau_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathtt{id}$$

- Di conseguenza, si ha che:

$$\sigma(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4}) = \mathtt{id} \iff$$

$$\iff \sigma(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})^{-1} = \mathtt{id}(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})^{-1} \iff$$

$$\iff \sigma = (\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})^{-1} \iff \sigma = \tau_{3,4}\tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{3,4}$$

$\square$

Proposition 43

Data $\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k$, dove $\tau_i := \tau_{i,i+1} \in \mathcal{S}_n$, si ha che:

$$sgn(\sigma) = (-1)^k$$

dove k è il numero di trasposizioni adiacenti che compongono σ

Dimostrazione:

- Sia $\tau_i = \tau_{i,i+1}$. Allora si ha che:

$$\sigma\tau_i = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & i+1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Lo scambio effettuato genera una di due situazioni possibili: viene **creata una nuova inversione** oppure viene **risolta un'inversione pre-esistente**:

$$Inv(\sigma\tau_i) = \begin{cases} Inv(\sigma) \cup \{(i, i+1)\} & \text{se } (i, i+1) \notin Inv(\sigma) \\ Inv(\sigma) - \{(i, i+1)\} & \text{se } (i, i+1) \in Inv(\sigma) \end{cases}$$

- Di conseguenza, si ha che

$$|Inv(\sigma\tau_i)| = |Inv(\sigma)| \pm 1 \implies sgn(\sigma\tau_i) = \begin{cases} -1 & \text{se } sgn(\sigma) = +1 \\ +1 & \text{se } sgn(\sigma) = -1 \end{cases} \implies$$

$$\implies sgn(\sigma\tau) = -sgn(\sigma)$$

- Di conseguenza, se $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k$, si ha che:

$$\sigma(\tau_i \cdot \ldots \cdot \tau_k)^{-1} = (\tau_i \cdot \ldots \cdot \tau_k)(\tau_i \cdot \ldots \cdot \tau_k)^{-1} = \mathtt{id}$$

- Poiché per definizione stessa di $\mathtt{id}$ si ha che $|Inv(\mathtt{id})| = 0 \implies sgn(\mathtt{id}) = 1$, ne segue che:

$$1 = sgn(\mathtt{id}) = sgn(\sigma(\tau_i \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \ldots \cdot \tau_k)^{-1}) = sgn(\sigma \cdot \tau_k \cdot \ldots \cdot \tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1) =$$

$$= -sgn(\sigma \cdot \tau_k \cdot \ldots \cdot \tau_3 \cdot \tau_2) = sgn(\sigma \cdot \tau_k \cdot \ldots \cdot \tau_3) = \ldots = (-1)^k \cdot sgn(\sigma)$$

- Quindi, otteniamo che:

$$1 = (-1)^k \cdot sgn(\sigma) \implies sgn(\sigma) = (-1)^k$$

□

Corollary 15

Date $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, si verifica che:

$$sgn(\sigma\sigma') = sgn(\sigma) \cdot sgn(\sigma')$$

□

Dimostrazione:

- Data $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k$ e $\sigma' = \tau_1' \cdot \ldots \cdot \tau_k'$, si ha che:

  $$sgn(\sigma\sigma') = sgn(\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k \cdot \tau_1' \cdot \ldots \cdot \tau_k') = (-1)^{k+j} = (-1)^k(-1)^j = sgn(\sigma) \cdot sgn(\sigma')$$

Corollary 16

Data $\sigma \in \mathcal{S}_n$,si verifica che:
$$sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$$

Dimostrazione:

$$1 = sgn(\mathtt{id}) = sgn(\sigma\sigma^{-1}) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\sigma^{-1}) \implies$$

$$\implies 1 = sgn(\sigma) \cdot sgn(\sigma^{-1}) \iff sgn(\sigma) = \pm 1 = sgn(\sigma^{-1})$$

$\square$

Definition 42

Dato il gruppo $\mathcal{S}_n$, definiamo $\mathcal{A}_n \leqslant \mathcal{S}_n$ come il **sottogruppo alterno di ordine** n:

$$\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid sgn(\sigma) = +1\}$$

Dimostrazione:

- $sgn(\mathtt{id}) = 1 \implies \mathtt{id} \in \mathcal{A}_n$
- $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n \implies sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)sgn(\tau) = 1 \cdot 1 = 1 \implies \sigma\tau \in \mathcal{A}_n$
- $\sigma \in \mathcal{A}_n \implies sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma) = 1 \implies \sigma^{-1} \in \mathcal{A}_n$

$\square$

Observation 27

Dato $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n \leqslant \mathcal{S}_n$, si ha che:

- $|\mathcal{A}_n| = \frac{n!}{2}$
- $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$

Dimostrazione:

- Date $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, si ha che:

  $$\sigma \sim \sigma' \iff \sigma^{-1}\sigma' \in \mathcal{A}_n \iff sgn(\sigma^{-1}\sigma') = 1 \iff$$

  $$\iff sgn(\sigma^{-1})sgn(\sigma') = 1 \iff sgn(\sigma) = sgn(\sigma')$$

- Di conseguenza, poiché $sgn(\sigma) = \pm 1, \forall \sigma \in \mathcal{S}_n$ e poiché $sgn(\texttt{id}) = +1$, esistono solo due classi laterali sinistre:
  - La classe $[+1] : \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma \sim \texttt{id}\}$
  - La classe $[-1] : \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma \not\sim \texttt{id}\}$

  dunque si ha che $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$
- Infine, per il teorema di Lagrange, concludiamo che:

$$|A_n| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n]} = \frac{n!}{2}$$

□

Proposition 44

Sia $\sim$ la **relazione di coniugio** (sezione 3.5) e siano $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, tali che:

- $\gamma_1 \dots \gamma_k$ è la decomposizione in cicli di σ e $d_1, \dots d_k$ sono le lunghezze rispettive dei cicli
- $\gamma'_1 \dots \gamma'_k$ è la decomposizione in cicli di σ' e $d'_1, \dots d'_k$ sono le lunghezze rispettive dei cicli

In tal caso, si ha che:

$$\sigma \sim \sigma' \iff \begin{cases} k = h \\ d_1 = d'_1 \\ \dots \\ d_k = d'_h \end{cases}$$

Dimostrazione:

- Supponiamo che $\sigma \sim \sigma'$, dunque $\exists \alpha \in \mathcal{S}_n \mid \sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$
- Sia $\gamma_j = (i_1 \dots i_d) \mid j \in [1, k]$ un ciclo di σ. Allora, $\forall i_q \in \gamma_j \mid q \in [1, d]$ si ha che:

$$\sigma'(i_q) = \alpha\sigma\alpha^{-1}(i_q) \iff \sigma'\alpha(i_q) = \alpha\sigma\alpha^{-1}\alpha(i_q) \iff \sigma'\alpha(iq) = \alpha\sigma(i_q) \implies$$

$$\implies \sigma'\alpha(iq) = \alpha\sigma(i_q) = \begin{cases} \alpha(i_{q+1}) & \text{se } q < d \\ \alpha(i_1) & \text{se } q = d \end{cases}$$

- Di conseguenza, σ' possiede un ciclo nella forma $(\alpha(i_1), \dots, \alpha(i_d))$. Applicando lo stesso ragionamento con gli altri σ, possiamo creare una corrispondenza biunivoca tra i cicli di σ e i cicli di σ', da cui otteniamo che $h = k$ e che $d_p = d'_p, \forall p \in [1, k]$
- Viceversa, supponiamo che σ e σ' abbiano lo stesso numero di cicli e le stesse lunghezze per ogni ciclo, dunque tali che:

$$\sigma = (i_1 \dots i_{d_1}) \dots (j_1 \dots j_{d_k}) \qquad \sigma' = (a_1 \dots a_{d_1}) \dots (b_1 \dots b_{d_k})$$

- Presa $\alpha \in \mathcal{S}_n$ tale che:

$$\alpha(i_1) = a_1, \dots, \alpha(i_{d_1}) = a_{d_1}, \alpha(j_1) = b_1, \dots, \alpha(j_{d_k}) = b_{d_k}$$

dunque tale che:

$$\begin{array}{rccccccc} \sigma = & (i_1 & \dots & i_{d_1}) & \dots & (j_1 & \dots & j_{d_k}) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \sigma' = & (a_1 & \dots & a_{d_1}) & \dots & (b_1 & \dots & j_{b_k}) \end{array}$$

- Dato $t \in [1, n]$ e dato $j \in [1, k]$, quindi, si ha che:

$$\alpha\sigma\alpha^{-1}(a_t) = \alpha\sigma(i_t) = \begin{cases} \alpha(i_{k+1}) & \text{se } t < d_j \\ \alpha(i_1) & \text{se } t = d_j \end{cases} = \begin{cases} a_{k+1} & \text{se } k < d_j \\ a_1 & \text{se } k = d_j \end{cases} \implies$$

$$\alpha\sigma\alpha^{-1}(a_t) = \sigma'(a_t) \implies \sigma \sim \sigma'$$

□

Esempi:

1. Date le seguenti permutazioni $\sigma, \sigma' \in S_6$, trovare $\alpha \in S_6$ tale che $\sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$:

$$\begin{array}{r} \sigma = (13)(254)(876) \\ \sigma' = (25)(184)(376) \end{array} \implies \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 8 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Date le seguenti permutazioni $\sigma, \sigma' \in S_7$, trovare $\alpha \in S_7$ tale che $\sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$:

$$\begin{array}{l} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (4)(13)(2675) \\ \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (7)(56)(1234) \end{array} \implies \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 7 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Observation 28

Sia $\sim$ la relazione di coniugio. Date $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, si ha che:

$$\sigma \sim \sigma' \implies sgn(\sigma) = sgn(\sigma)'$$

Dimostrazione:

- Se $\sigma \sim \sigma'$, allora

$$\exists \alpha \in \mathbb{S}_n \mid \sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1} \implies sgn(\sigma') = sgn(\alpha\sigma\alpha^{-1}) = sgn(\alpha)sgn(\sigma)sgn(\alpha^{-1})$$

- Dunque, poiché $sgn(\alpha) = sgn(\alpha^{-1}) = \pm 1 \implies sgn(\alpha)sgn(\alpha^{-1}) = 1$, se segue che:

$$sgn(\sigma') = sgn(\alpha)sgn(\sigma)sgn(\alpha^{-1}) \implies$$

$$\implies sgn(\sigma') = \begin{cases} 1 \cdot sgn(\sigma) \cdot 1 = sgn(\sigma) & \text{se } sgn(\alpha) = 1 \\ (-1) \cdot sgn(\sigma) \cdot (-1) = sgn(\sigma) & \text{se } sgn(\alpha) = -1 \end{cases} \implies$$

$$\implies sgn(\sigma') = sgn(\sigma)$$

□

Proposition 45

Data $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e data la sua scomposizione in cicli $\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_k$, si ha che:

$$sgn(\sigma) = (-1)^{n-k}$$

dove k è il numero di cicli

Dimostrazione:

- Sia $\sigma \in \mathbb{S}_n$ tale che

$$\sigma = (i_1 \ \dots \ i_{d_1})(i_{d_1+1} \ \dots \ i_{d_2}) \ \dots \ (j_1 \ \dots \ j_{d_k})$$

- Consideriamo una permutazione $\sigma' \in \mathcal{S}_n$ definita come:

$$\sigma' = (1, \dots, d_1)(d_1+1, \dots, d_1+d_2)) \ \dots \ (n-d_k+1, n-d_k+2, \ \dots \ , n-1, n) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d_1 & d_1+1 & \dots & d_1+d_2 & \dots & \dots & n-d_k+1 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 & d_1+2 & \dots & d_1+1 & \dots & \dots & n-d_k+2 & \dots & n-d_k+1 \end{pmatrix}$$

- Poiché σ e σ' hanno la stessa quantità di cicli ognuno avente la stessa lunghezza del ciclo corrispondente, ne segue che $\sigma \sim \sigma'$. Di conseguenza, si ha che

$$\sigma \sim \sigma' \implies sgn(\sigma) = sgn(\sigma')$$

dunque, ci basterà trovare il segno di σ' per ottenere il segno di σ

- A questo punto, le seguenti $d_1 - 1$ trasposizioni otteniamo che:

$$\sigma \cdot \tau_{d_1-1,d_1} \cdot \tau_{d_1-2,d_1-1} \cdot \dots \cdot \tau_{2,3} \cdot \tau_{1,2} =$$

$$= (1)(2)\dots(d_1-1)(d_1)(d_1+1, \dots, d_1+d_2)) \ \dots \ (n-d_k+1, n-d_k+2, \ \dots \ , n-1, n) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d_1 & d_1+1 & \dots & d_1+d_2 & \dots & \dots & n-(d_k+1) & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & d_1 & d_1+2 & \dots & d_1+1 & \dots & \dots & n-(d_k+1)+1 & \dots & n-(d_k+1) \end{pmatrix}$$

- Ripetendo tale procedimento per ogni ciclo di σ', otteniamo la permutazione identica.

- Di conseguenza, il numero di trasposizioni componenti σ' corrisponde a:

$$\sum_{j=1}^{k} d_j - 1 = \sum_{j=1}^{k} d_j - \sum_{j=1}^{k} 1 = n - k$$

poiché la somma di tutte le lunghezze dei cicli corrisponde ad n.

- Dunque, poiché σ' è composta da $n-k$ trasposizioni adiacenti, concludiamo che:

$$sgn(\sigma) = sgn(\sigma') = (-1)^{n-k}$$

□

Capitolo 6

Morfismi

Definition 43. Morfismo

Date due strutture algebriche $(G, \cdot)$ e $(H, \odot)$ dello stesso tipo (dunque entrambe monoidi, gruppi, anelli, ...), definiamo come **morfismo** una funzione $f : G \to H$ tale che:

$$f(g \cdot h) = f(g) \odot f(h), \forall g, h \in G$$

Attenzione: se le strutture algebriche presentano più operazioni binarie, è necessario che la condizione di morfismo sia valida per ognuna di esse

Esempi:

- Dati i due gruppi $(G, \cdot)$ e $(H, \cdot)$, la funzione $f : G \to H$ è un morfismo tra gruppi se e solo se:
$$f(gh) = f(g)f(h), \forall g, h \in G$$
- Dati i due gruppi $(G, \cdot)$ e $(H, +)$, la funzione $f : G \to H$ è un morfismo tra gruppi se e solo se:
$$f(gh) = f(g) + f(h), \forall g, h \in G$$
- Dati i due anelli $(A, +, \cdot)$ e $(B, +, \cdot)$, la funzione $f : A \to B$ è un morfismo tra anelli se e solo se:
$$f(a + b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in A$$
$$f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in A$$

Observation 29

Dati due gruppi G ed H e un morfismo $f : G \to H$, si ha che:

1. $f(1_G) = 1_H$
2. $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}, \forall g \in G$

dove 1_G ed 1_H sono rispettivamente l'elemento neutro di G ed H

Dimostrazione:

1. Dato $g \in G$, per le proprietà del morfismo f ne segue che:

$$f(g) = f(1_G \cdot g) = f(1_G)f(g) \implies f(g)f(g)^{-1} = f(1_G)f(g)f(g)^{-1} \implies$$
$$\implies 1_H = f(1_G) \cdot 1_H \implies f(1_G) = 1_H$$

2. Dato $g \in G$, per le proprietà del morfismo f ne segue che:

$$f(1_G) = 1_H \implies f(g \cdot g^{-1}) = 1_H \implies f(g)f(g^{-1}) = 1_H \implies$$
$$\implies f(g^{-1}) = 1_H \cdot f(g)^{-1} \implies f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$$

□

6.1 Isomorfismi, Endomorfismi ed Automorfismi

Definition 44. Isomorfismo, Endomorfismo ed Automorfismo

Date due strutture algebriche G, H ed una funzione $f : G \to H$, definiamo f come:

- **Isomorfismo** se è un **morfismo** ed è **biettiva**
- **Endomorfismo** se è un morfismo e $G = H$, ossia è un **morfismo sullo stesso gruppo**
- **Automorfismo** se è un **isomorfismo** e un **endomorfismo**

Observation 30

Se $f : G \to H$ è un isomorfismo, esiste sempre l'isomorfismo inverso $f^{-1} : H \to G$

Dimostrazione:

- Se $f : G \to H$ è un isomorfismo, dunque è biettiva, allora $\exists f^{-1} : H \to G$ poiché una funzione è biettiva se e solo se è invertibile. Inoltre, poiché $(f^{-1})^{-1} = f$, anche f^{-1} è invertibile e dunque biettiva
- Dati $g, h \in H$, mostriamo che f^{-1} sia anche un morfismo:

$$gh = f(f^{-1}(g))f(f^{-1}(h)) \implies gh = f((f^{-1}(g)(f^{-1}(g)) \implies$$
$$\implies f^{-1}(gh) = f^{-1}(f((f^{-1}(g)(f^{-1}(g))) \implies f^{-1}(gh) = f^{-1}(g)f^{-1}(h)$$

□

Observation 31

Se $f : G \to H$ e $g : H \to K$ sono due isomorfismi, la loro composta $g \circ f : G \to K$ è un isomorfismo

Dimostrazione:

- Poiché la composizione di due funzioni biettive è anch'essa biettiva, si ha che

$$h := g \circ f : G \to K \text{ biettiva}$$

- Dati $x, y \in G$, mostriamo che h sia anche un morfismo:

$$h(xy) = g(f(xy) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) = h(x)h(y)$$

□

Definition 45. Relazione di isomorfismo

Date due strutture algebriche G ed H, definiamo la **relazione di equivalenza** "G è **isomorfo** ad H", indicato come $G \cong H$, se e solo se esiste un isomorfismo $f : G \to H$.

$$G \cong H \iff \exists f : G \to H \text{ isomorfismo}$$

Dimostrazione:

- Per ogni gruppo G esiste l'automorfismo $\mathtt{id} : G \to G : g \to g$

$$\mathtt{id}(gh) = gh = \mathtt{id}(g)\mathtt{id}(h), \forall g, h \in G \implies G \cong G$$

- Se $G \cong H$ allora:

$$G \cong H \implies \exists f : G \to H \text{ isomorfismo} \iff$$

$$\iff \exists f^{-1} : H \to G \text{ isomorfismo inverso} \implies H \cong G$$

- Se $G \cong H, H \cong K$ allora:

$$G \cong H, H \cong K \implies \exists f : G \to H \text{ isomorfismo}, \exists g : H \to K \text{ isomorfismo} \implies$$

$$\implies g \circ f : G \to K \text{ isomorfismo} \implies G \cong K$$

□

Esempi:

1. - Dato $n \in \mathbb{Z}$, definiamo come **radice n-esima dell'unità**, ossia il numero 1, un elemento $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^n = 1$.
   - Come già visto nella sezione 2.3, l'equazione $z^n = 1$ dove $z \in \mathbb{C}$ ammette n radici. Di conseguenza, esistono n radici n-esime $(z_0, \ldots, z_{n-1})$ tali che $z_k^n = 1$, dove $z_k := e^{i \cdot \frac{2\pi k}{n}}$.
   - Inoltre, poiché tutte le z_k differiscono solo di k all'esponente, denotiamo $\zeta := e^{i \cdot \frac{2\pi}{n}}$, ottenendo quindi che $\zeta^k = z_k$ (tale operazione risulta essere più comoda poiché ci permette di utilizzare le proprietà delle potenze)

- Definiamo quindi il seguente insieme:

$$H^n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\zeta^0, \dots, \zeta^{n-1}\}$$

  e dimostriamo che $(H^n, \cdot) \leqslant (\mathbb{C}^*, \cdot)$:
  - $1 = \zeta^0 \implies 1 \in H^n$
  - $z, w \in H^n \iff z^n = w^n = 1 \implies 1 = z^n w^n = (zw)^n \implies zw \in H^n$
  - $z \in H^n \iff z^n = 1 \implies (z^{-1})^n = (z^n)^{-1} = 1^{-1} = 1 \implies z^{-1} \in H^n$
- Definiamo inoltre la seguente funzione

$$f : (\mathbb{Z}_n, +) \to (H^n, \cdot) : [k] \mapsto \zeta^k$$

  la quale risulta essere biettiva poiché $|\mathbb{Z}_n| = |H^n|$.
- Posto $[k] := [i] + [j]$ dove $[i], [j] \in \mathbb{Z}_n$, si ha che:

$$[k] = [i] + [j] \iff i + j = k + nh, \exists h \in \mathbb{Z} \iff i + j - nh = k$$

- Verifichiamo quindi che f sia anche un morfismo:

$$f([i]+[j]) = f([k]) = \zeta^k = \zeta^{i+j-nh} = \zeta^i\zeta^j\zeta^{-nh} = \zeta^i\zeta^j(\zeta^n)^{-h} = \zeta^i\zeta^j = f([i])f([j]$$

- Dunque, si ha che $Z_n \cong H^n$

2. - Sia G un gruppo e sia $g \in G$. La funzione $f : (\mathbb{Z}, +) \to (G, \cdot) : n \to g^n$ è un morfismo:

$$f(n + m) = g^{n+m} = g^n g^m = f(n)f(m)$$

   - Supponiamo per assurdo che f non sia iniettiva e che $o(g) = +\infty$, implicando che:

$$\exists n \neq m \mid f(n) = f(m) \implies g^n = g^m \implies$$
$$\implies 1_G = g^0 = g^{n-n} = g^{m-n} \implies \exists m-n \neq 0 \mid g^{m-n} = 1_G \implies m-n \neq 0 \in I(g)$$

   - Tuttavia, come dimostrato nella sezione 4.10, abbiamo che $o(g) = +\infty \iff I(g) = I(0)$ e poiché $m - n \neq 0 \implies m - n \notin I(d) = I(0)$, siamo giunti ad una contraddizione. Dunque, l'unica possibilità è che $o(g) < +\infty$
   - Dunque, concludiamo che f non iniettiva $\implies o(g) = +\infty$ e di conseguenza che $o(g) < +\infty \implies f$ iniettiva

3. Dato il gruppo $(G, \cdot)$ e $g \in G$, la funzione $f_g : G \to G : h \mapsto ghg^{-1}$ è un endomorfismo:

$$f_g(h)f_g(h') = (ghg^{-1})(gh'g^{-1}) = ghh'g^{-1} = f_g(hh')$$

Observation 32

La proiezione canonica al quoziente $\pi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_n, +, \cdot) : x \to [x]$ è un **morfismo suriettivo** di anelli

Dimostrazione:

- Sappiamo già che π sia suriettiva. Verifichiamo quindi che sia un morfismo di anelli:

$$\pi(x + y) = [x + y] = [x] + [y] = \pi(x) + \pi(y)$$

$$\pi(xy) = [xy] = [x][y] = \pi(x)\pi(y)$$

□

6.2 Nucleo ed Immagine di un morfismo

Proposition 46. Nucleo ed Immagine di un morfismo

Dato un morfismo $f : G \to H$, viene sempre generato $Ker(f) \leqslant G$, detto **nucleo di** f, e $Im(f) \leqslant H$, detto **immagine di** f, dove:

$$Ker(f) : \{g \in G \mid f(g) = 1_H\}$$

$$Im(f) : \{y \in H \mid f(x) = y, \exists x \in G\}$$

Dimostrazione:

- $Ker(f) \leqslant G$:
  - $f(1_G) = 1_H \implies 1_G \in Ker(f)$
  - $x, y \in Ker(f) \implies f(x) = f(y) = 1_H \implies f(xy) = f(x)f(y) = 1_H \cdot 1_H = 1_H \implies xy \in Ker(f)$
  - $x \in Ker(f) \implies f(x) = 1_H \implies 1_H = 1_H^{-1} = f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \implies x^{-1} \in Ker(f)$
- $Im(f) \leqslant H$:
  - $f(1_G) = 1_H \implies 1_H \in Im(f)$
  - $x, y \in Im(f) \implies x = f(g), y = f(h) \implies xy = f(g)f(h) = f(gh) \implies xy \in Im(f)$
  - $x \in Im(f) \implies x = f(g) \implies x^{-1} = f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \implies x^{-1} \in Im(f)$

□

Observation 33

Un morfismo è **iniettivo** se e solo se il nucleo è **semplice**, ossia $Ker(f) = \{1_G\}$

Dimostrazione:

- Poiché $Ker(f) \leqslant G \implies 1_G \in Ker(f)$, supponiamo per assurdo che f iniettiva e che $\exists x \neq 1_G \in Ker(f)$:

$$g \neq 1_G \in Ker(f) \implies f(g) = 1_H = f(1_G)$$

contraddicendo l'ipotesi per cui f sia iniettiva, dunque l'unica possibilità è che

$$\nexists g \neq 1_G \in Ker(f) \implies Ker(f) = \{1_G\}$$

- Supponiamo invece che $Ker(f) = \{1_G\}$. In tal caso, si ha che:

$$\forall g, g' \in G, f(g) = f(g') \iff f(g^{-1})f(g) = f^{-1}(g)f(g') \iff$$

$$\iff 1_H = f^{-1}(g)f(g') \iff 1_H = f(g^{-1}g)$$

Tuttavia, poiché $Ker(f) = \{1_G\}$, si ha che $f(x) = 1_H, \forall x \in G \iff x = 1_G$, allora

$$1_H = f(g^{-1}g) \iff 1_G = g^{-1}g' \iff g = g'$$

dunque, f risulta essere iniettiva

□

Observation 34

Se $f : A \to B$ è un morfismo di anelli, allora:

$$Ker(f) : \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$$

$$Im(f) : \{b \in B \mid f(a) = b, \exists a \in A\}$$

6.3 Teorema fondamentale di isomorfismo

Definition 46. Sottoanello

Sia A un anello. Definiamo $(B, +, \cdot) \leqslant (A, +, \cdot)$ come **sottoanello** se:

- $(B, +) \leqslant (A, +)$
- $x, y \in B \implies xy \in B$

Observation 35

Se $f : A \to B$ è un morfismo di anelli, allora

- $Ker(f) \lhd A$
- $Im(f) \leqslant B$ sottoanello

Dimostrazione:

- Abbiamo già dimostrato che $Ker(f) \leqslant G$ e $Im(f) \leqslant B$.
- $x \in Ker(f), y \in A \implies f(xy) = f(x)f(y) = 0_B \cdot f(y) = 0_B \implies xy \in Ker(f)$
- $x, y \in Im(f) \iff x = f(a), y = f(b), \exists a, b \in A \implies xy = f(a)f(b) = f(ab) \implies xy \in Im(f)$

$\square$

Theorem 47. Teorema fondamentale di isomorfismo

Se $f : A \to B$ è un morfismo tra anelli, allora

$$A/Ker(f) \cong Im(f)$$

Dimostrazione:

- Mostriamo che esiste $\varphi : A/Ker(f) \to Im(f) : [a] \mapsto f(a)$ e che è **ben definita**, ossia che $[a], [b] \in A/Ker(f) \mid [a] = [b] \implies f(a) = f(b)$:

$$[a] = [b] \iff a \equiv b(\mathtt{mod}\ \ Ker(f)) \iff b - a \in Ker(f) \iff$$
$$\iff 0_B = f(b - a) = f(b) - f(a) \iff f(a) = f(b)$$

- Mostriamo che φ è un **morfismo** sia un morfismo di anelli:

$$\varphi([a]) + \varphi([b]) = f(a) + f(b) = f(a + b) = \varphi([a + b])$$
$$\varphi([a])\varphi([b]) = f(a)f(b) = f(ab) = \varphi([ab])$$

- Mostriamo che φ è **iniettiva** poiché il suo nucleo è semplice:

$$[x] \in Ker(\varphi) \iff \varphi([x]) = 0_B \iff f(x) = 0_B \iff$$
$$\implies x \in Ker(f) \iff x \in [0_A] \iff [x] = [0_A] \implies Ker(\varphi) = \{[0_A]\}$$

- Mostriamo che φ è **suriettiva** poiché il suo codominio, ossia $Im(f)$, coincide con la sua immagine, ossia $Im(\varphi)$:

$$y \in Im(\varphi) \iff \exists [a] \in A/Ker(f) \mid \varphi([a]) = y \iff$$
$$\iff \exists a \in A \mid f(a) = y \iff y \in Im(f)$$

- Concludiamo quindi che $\varphi : A/Ker(f) \to Im(f)$ è un **isomorfismo** e dunque che

$$A/Ker(f) \cong Im(f)$$

$\square$

6.4 Sottogruppi normali

Definition 47. Classi laterali sinistre e destre

Dati G gruppo e $H \leqslant G$, definiamo le seguenti due relazioni di equivalenza:

$$x \sim_{sx} y \iff x^{-1}y \in H \qquad\qquad x \sim_{dx} y \iff xy^{-1} \in H$$

Definiamo come **classi laterali sinistre** le classi di equivalenza generate da $\sim_{sx}$ e come **classi laterali destre** le classi di equivalenza generate da $\sim_{dx}$.

$$[x]_{sx} : \{y \in G \mid x \sim_S y\} \qquad\qquad [x]_{dx} : \{y \in G \mid x \sim_D y\}$$

(*dimostrazione equivalenza analoga alla sezione* 4.1)

Definition 48. Insieme quoziente sinistro e destro

Dati G gruppo e $H \leqslant G$, denotiamo come G/H_{sx} l'**insieme quoziente** generato da $\sim_{sx}$ e come G/H_{dx} l'**insieme quoziente** generato da $\sim_{dx}$.

Nel caso in cui non sia specificato il pedice, ossia G/H, verrà sottointeso che si tratti di uno qualsiasi dei due insiemi quozienti, poiché irrilevante

Observation 36

Dati G gruppo, $H \leqslant G$ e le due relazioni $\sim_{sx}$ e $\sim_{dx}$, si ha che:

$$[x]_{sx} = xH = \{xh \mid h \in H\} \qquad\qquad [x]_{dx} = Hx = \{hx \mid h \in H\}$$

Inoltre, si ha che:

$$|xH| = |H| = |Hx|$$

(*dimostrazioni analoghe alla sezione* 4.1)

Observation 37

Dati G gruppo finito e $H \leqslant G$, si ha che:

$$[G : H] := |G/H_{sx}| = |G/H_{dx}|$$

Dimostrazione:

- Poiché sia G/H_{sx} sia G/H_{dx} sono partizioni di G le cui classi laterali possiedono tutte la stessa cardinalità di H, si ha che:

$$|G/H_{sx}| = \frac{|G|}{|H|} = |G/H_{dx}|$$

□

Observation 38

La **classe neutra**, ossia generata dall'elemento neutro di G, è sia una classe laterale **sinistra** sia una classe laterale **destra**:

$$[1_G]_{sx} = 1_G \cdot H = H = H \cdot 1_G = [1_G]_{dx}$$

Definition 49. Sottogruppo normale

Sia G un gruppo. Definiamo H come **sottogruppo normale** di G, indicato come $H \trianglelefteq G$, se:

- $H \leqslant G$
- $\forall x \in G$ si ha che $xH = Hx$, ossia la classe laterale sinistra di ogni elemento coincide con la classe laterale destra dell'elemento stesso

  Attenzione: tale condizione non implica che valga la commutatività tra elementi di G ed elementi di H (ossia che valga $gh = hg, \forall g \in G, \forall h \in H$)

Proposition 48

Sia G un gruppo. Le seguenti condizioni sono **equivalenti**:

1. $H \trianglelefteq G$
2. $\forall g \in G, h \in H$ si ha che $ghg^{-1} \in H$
3. $\forall g \in G, h \in H, \exists k \in H \mid gh = kg$

Dimostrazione:

- 1) $\implies$ 3)

  $$g \in G, h \in G \implies gh \in gH = Hg = \{kg \mid k \in H\} \implies \exists k \in H \mid gh = kg$$

- 3) $\implies$ 2)

  $$g \in G, h \in H, \exists k \in H \mid gh = kg \implies ghg^{-1} = kgg^{-1} \implies ghg^{-1} = k \in H$$

- 2) $\implies$ 1)
  - Dato $g \in G$, si ha che:

    $$gh \in gH \implies g \in G, h \in H \implies x := ghg^{-1} \in H \implies$$
    $$\implies xg = ghg^{-1}g \in Hg \implies xg = gh \implies gh \in Hg \implies gH \subseteq Hg$$

  - Analogamente, si ha che:

    $$kg \in Hg \implies g \in G, h \in H \implies \exists g^{-1} \in G \implies y := g^{-1}k(g^{-1})^{-1} = g^{-1}kg \in H$$
    $$\implies gy = gg^{-1}kg \in gH \implies gy = kg \in gH \implies kg \in gH \implies Hg \subseteq gH$$

– Dunque, poiché $\forall g \in G$ si ha che $gh = Hg$, ne segue che $H \trianglelefteq G$

$\square$

Observation 39

Se G un **gruppo abeliano** e $H \leqslant G$, allora $H \trianglelefteq G$

Dimostrazione:

- Poiché G è abeliano e poiché $k \in H \implies k \in G$, ne segue che:

$$\forall g \in G, h \in H, \exists h \in H \mid gh = hg$$

dunque $H \trianglelefteq G$

$\square$

Proposition 49

Se $(G, \cdot)$ è un gruppo e $H \trianglelefteq G$, allora $(G/H, \cdot)$ è un **gruppo**

Dimostrazione:

- Dimostriamo che il prodotto $[x][y] = [xy]$ sia ben definito, ossia che $[x] = [x'], [y] = [y'] \implies [xy] = [x'y']$
  - Poiché $H \trianglelefteq G$ e poiché $[x] = [x'], [y] = [y']$, si ha che:

$$xH = Hx = [x] = [x'] = x'H = Hx'$$

$$yH = Hy = [y] = [y'] = y'H = Hy'$$

  - Di conseguenza, otteniamo che:

$$x'y'h \in x'y'H = [x'y'] \implies \exists k, j \in H \mid x'y'h = x(ky') =$$

$$= (xk)y' = (jx)y = jxy \implies x'y'h \in Hxy = [xy]$$

e che:

$$xyb \in xyH = [xy] \implies \exists d, q \in H \mid xyb = x(dy') = (xd)y' =$$

$$= (qx')y' = qx'y' \implies xyb \in Hx'y' = [x'y']$$

dunque il prodotto è ben definito

- Dimostriamo quindi che $(G/H, \cdot)$ sia un gruppo
  - $([x][y])[z] = [xy][z] = [xyz] = [x][yz] = [x]([y][z])$
  - $\forall [x] \in G/H, \exists [1_G] \in G/H \mid [x][1_G] = [x \cdot 1_G] = [x]$
  - $\forall [x] \in G/H, \exists [x]^{-1} \in G/H \mid [x][x]^{-1} = [x][x^{-1}] = [xx^{-1}][1_G]$

$\square$

Corollary 17

Se $(G, \cdot)$ è un gruppo abeliano e $H \trianglelefteq G$, allora $(G/H, \cdot)$ è un **gruppo abeliano**

Dimostrazione:

- Sappiamo già che $(G/H, \cdot)$ è un gruppo, dunque verifichiamo che valga la commutatività:
$$[x], [y] \in G/H \implies [x][y] = [xy] = [yx] = [y][x]$$

$\square$

Observation 40

Dato G gruppo e $H \leqslant G$, si ha che:

$$[G : H] = 2 \implies H \trianglelefteq G$$

Dimostrazione:

- Supponiamo che $[G : H] = 2$, implicando che esistano solo due classi laterali sinistre e due classi laterali destre. Poiché la classe neutra $[1_G]_{sx} = H = [1_G]_{dx}$ è condivisa da entrambi gli insiemi quozienti, ne segue che:
$$G/H_{sx} = \{[1_G], [x]\}$$
$$G/H_{dx} = \{[1_G], [y]\}$$
- Poiché G/H è una partizione di G, ne segue che:
$$z \in [x] \iff z \notin [1_G]_{sx} = [1_G]_{dx} \iff z \in [y]$$
implicando quindi che $[x] = [y]$ e di conseguenza che $H \trianglelefteq G$
- In particolare, si ha che:
$$G/H_{sx} = \{H, G - H\}$$
$$G/H_{dx} = \{H, G - H\}$$

$\square$

Corollary 18

Dato $\mathcal{S}_n$, si ha che $\mathcal{A}_n \trianglelefteq \mathcal{S}_n$

Dimostrazione:

- Poiché $\mathcal{A}_n \leqslant \mathcal{S}_n$ e poiché $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$ (sezione 5.2), ne segue che $\mathcal{A}_n \trianglelefteq \mathcal{S}_n$

$\square$

Observation 41

Se $f : G \to H$ è un morfismo di gruppi, allora $Ker(f) \trianglelefteq G$ e $Im(f) \leqslant H$

Dimostrazione:

- Sappiamo già che $Ker(f) \leqslant G$ e $Im(f) \leqslant H$
- Verifichiamo quindi che $Ker(f) \trianglelefteq G$

$$g \in G, h \in Ker(f) \implies f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1} = f(g) \cdot 1_H \cdot f(g)^{-1} =$$

$$= f(g)f(g)^{-1}) = 1_H \implies ghg^{-1} \in Ker(f) \implies Ker(f) \trianglelefteq G$$

□

Corollary 19. Teorema fondamentale di isomorfismo

Se $f : G \to H$ è un morfismo tra gruppi, allora:

$$G/Ker(f) \cong Im(f)$$

Dimostrazione:

- Poiché $Ker(f) \trianglelefteq G$, sappiamo che $(G/Ker(f), \cdot)$ sia un gruppo con l'operazione di prodotto ben definita. A questo punto, la dimostrazione risulta essere analoga a quella vista nel caso degli anelli (sezione 6.3)

□

Proposition 50

Sia gruppo G e sia $g \in G$. Posto $d := o(g)$, si ha che:

$$H(g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } d = 0 \\ \mathbb{Z}_d & \text{se } d > 0 \end{cases}$$

Dimostrazione:

- Riprendiamo il seguente morfismo di gruppi $f : \mathbb{Z} \to G : n \to g^n$, già visto negli esempi precedenti

$$f(n+m) = g^{n+m} = g^n g^m = f(n)f(m)$$

- Di conseguenza, per il teorema fondamentale di isomorfismo si ha che:

$$\mathbb{Z}/Ker(f) \cong Im(f)$$

- Tuttavia, notiamo che:

$$Im(f) = \{f(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = H(g)$$

$$Ker(f) = \{n \in \mathbb{Z} \mid g^n = 1_G\} = I(g)$$

- Dunque, si ha che:

$$\mathbb{Z}/I(g) = \mathbb{Z}/Ker(f) \cong Im(f) = H(g)$$

- Poiché in $\mathbb{Z}$ si ha che: $\exists! d \geq 0 \mid I(g) = I(d)$ tale che:
  - $d = 0 \implies o(g) := |H(g)| = +\infty$
  - $d > 0 \implies o(g) := |H(g)| = d$

  ne segue che:

$$\mathbb{Z}_d := \mathbb{Z}/I(d) = \mathbb{Z}/I(g) = \mathbb{Z}/Ker(f) \cong Im(f) = H(g)$$

- In particolare, se $d = 0$, per ogni $[x] \in \mathbb{Z}_0$, si ha che:

$$[y] = [x] \iff x \sim y \iff y - x \in I(0) \iff$$
$$\iff x - y = 0k, \exists k \in \mathbb{Z} \iff x - y = 0 \iff x = y$$

- Di conseguenza, ne segue che proiezione canonica al quoziente $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_0 : x \mapsto [x]$, la quale sappiamo già essere un morfismo suriettivo, sia anche iniettiva, risultando quindi in un isomorfismo

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \mid x \neq y \implies [x] \neq [y] \implies \pi(x) \neq \pi(y)$$

  da cui concludiamo che:

$$H(g) \cong \mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_0 \cong \mathbb{Z} \implies H(g) \cong \mathbb{Z}$$

- In definitiva, concludiamo che:

$$H(g) = Im(f) \cong \mathbb{Z}/Ker(f) = \mathbb{Z}/I(g) = \mathbb{Z}/I(d) = \begin{cases} \mathbb{Z}_0 \cong \mathbb{Z} & \text{se } d = 0 \\ \mathbb{Z}_d & \text{se } d > 0 \end{cases}$$

□

Corollary 20

Dato G un gruppo finito dove $|G| = n$, con $n \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$\exists g \in G \mid o(g) = n \implies G \cong \mathbb{Z}_n$$

Dimostrazione:

- Supponiamo che $\exists g \in G \mid o(g) = n$. In tal caso, per la proposizione precedente, si ha che:

$$o(g) = n \implies H(g) \cong \mathbb{Z}_n$$

- Siccome $H(g) \leqslant G \implies H(g) \subseteq G$ e $|H|(g) = |G|$, allora ne segue che $G = H(g)$, implicando quindi che:

$$G = H(g) \cong \mathbb{Z}_n$$

□

Corollary 21

Se G è un gruppo finito e $|G| = p$ dove $p \in \mathbb{P}$, allora

$$G \cong \mathbb{Z}_p$$

Dimostrazione:

- Poiché $|G| = p$ ne segue che $\exists g \in G \mid g \neq 1_G$.
- Dato $H(g) \leqslant G$, per il teorema di Lagrange, si ha che

$$|H(g)| \mid |G| = p \implies |H(g)| = \begin{cases} 1 \\ p \end{cases}$$

- Poiché $g \neq 1_G \implies |H(g)| > 1$, ne segue che l'unica possibilità sia $o(p) := |H(g)| = p$.
- Di conseguenza, per il corollario precedente, ne segue che:

$$o(g) = p \implies G = H(g) \cong \mathbb{Z}_p$$

$\square$

Observation 42

Sia G un gruppo. Se $H \trianglelefteq G$ allora la proiezione canonica al quoziente $\pi : (G, \cdot) \to (G/H, \cdot) : x \to [x]$ è un morfismo suriettivo e $Ker(\pi) = H$

Dimostrazione:

- Sappiamo già che $\pi : (G, \cdot) \to (G/H, \cdot) : x \to [x]$ sia un morfismo suriettivo
- Verifichiamo quindi che $Ker(f) = H$:

$$g \in Ker(\pi) \iff \pi(g) = [1_G] \iff [g] = [1_G] = H \iff g \in [g] = H$$

$\square$

Esempio:

- La funzione $sgn : \mathcal{S}_n \to \{+1, -1\}$ è un morfismo

$$sgn(\sigma\sigma') = sgn(\sigma)sgn(\sigma')$$

- Dunque, per il teorema fondamentale di isomorfismo, si ha che:

$$\mathcal{S}_n / Ker(sgn) \cong Im(sgn)$$

- Inoltre, si ha che:

$$Ker(sgn) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid sgn(\sigma) = +1\} = \mathcal{A}_n \trianglelefteq \mathcal{S}_n \implies$$
$$\implies [\mathcal{S}_n : Ker(sgn)] = [\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2 \implies |Im(sgn)| = 2 \implies Im(sgn) = \{+1, -1\}$$

6.5 Gruppi diedrali

Definition 50. Gruppo diedrale

Definiamo come **gruppo diedrale** $\mathcal{D}_n$ il gruppo delle **simmetrie di un poligono regolare di** n **lati**, dove con simmetrie intendiamo tutte le azioni che mantengono la figura simmetrica, ossia:

- Rotazioni di un angolo giro (ossia $\frac{2\pi}{n}$) in senso antiorario (o orario, vista come l'inverso di una rotazione antioraria)

$$\rho: \texttt{ rotazione antioraria di } \frac{2\pi}{n}$$

- Riflessioni a specchio rispetto agli assi di simmetria del poligono (ogni poligono regolare possiede n assi di simmetria)

$$\sigma_i: \texttt{ riflessione rispetto all'asse di simmetria } r_i$$

Attenzione: il prodotto è dato dalla composizione (dunque viene trattato come nel caso delle permutazioni), ossia $\rho\sigma(i) = \rho(\sigma(i))$

Observation 43

Dato $\mathcal{D}_n$, effettuare n volte una rotazione riporta il poligono allo stato iniziale (poiché $n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi$), dunque

$$\rho^n = \rho^0 = 1 \implies \rho^{n+k} = \rho^n\rho^k = \rho^0\rho^k = \rho^k$$

Analogamente, poiché un poligono regolare di n lati possiede solo n assi di simmetria, si ha che:

$$\sigma_n = \sigma_0 \implies \sigma_{n+k} = \sigma_k$$

Observation 44

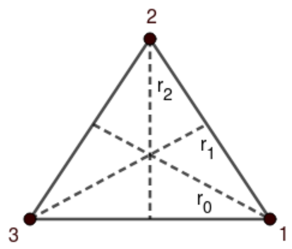
Per definizione stessa, ogni riflessione a specchio è uguale alla sua inversa.

Dunque, riflettere due volte rispetto allo stesso asse corrisponde alla simmetria neutra, ossia $\rho^0 = 1$

$$\sigma_i = \sigma_i^{-1} \implies \sigma_i^2 = 1$$

Esempi:

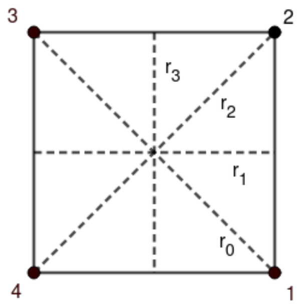
- Consideriamo il gruppo $\mathcal{D}_3$, corrispondente alle simmetrie di un triangolo equilatero.



In tal caso, abbiamo che:

$$\mathcal{D}_3 : \{1, \rho, \rho^2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$$

- Consideriamo il gruppo $\mathcal{D}_4$, corrispondente alle simmetrie di un quadrato.

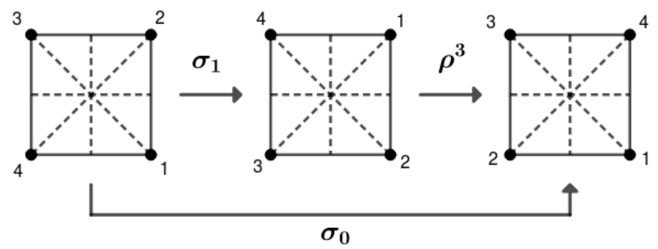


In tal caso, abbiamo che:

$$\mathcal{D}_4 : \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

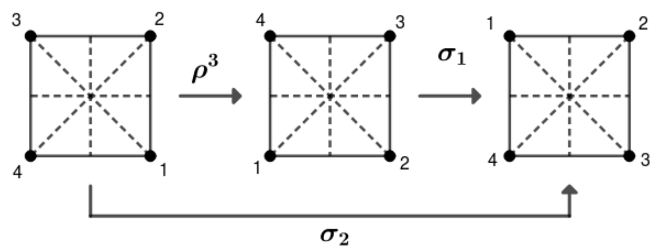
Notiamo inoltre come in $\mathcal{D}_4$ si ha:

$$\rho^3\sigma_1 = \sigma_0$$



E che:

$$\sigma_1\rho^3 = \sigma_2$$



Dunque, concludiamo che il prodotto non sia commutativo:

$$\rho^3\sigma_1 \neq \sigma_1\rho^3$$

Observation 45

Dato il gruppo $\mathcal{D}_n$, si ha che:

- $\rho^i\rho^j = \rho^{i+j (\text{mod } n)}$
- $\sigma_i\sigma_j = \rho^{i-j (\text{mod } n)}$
- $\rho^i\sigma_j = \sigma_{i+j (\text{mod } n)}$
- $\sigma_i\rho^j = \sigma_{i-j (\text{mod } n)}$

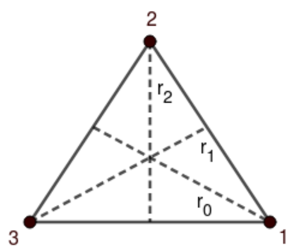
Proposition 51

Numerando i vertici del poligono, ogni simmetria **corrisponde** ad una permutazione dei vertici, dunque si verifica che $\mathcal{D}_n$ è **iniettivamente incluso** in $\mathcal{S}_n$.

In generale, se $\alpha \in \mathcal{D}_n$, ovvero una simmetria del poligono regolare di n lati, manda il vertice i nel vertice j, allora la corrispondente permutazione $\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_n$ manderà anch'essa i in j

Esempio:

- Considériamo il gruppo $\mathcal{D}_3$, numerando i vertici del triangolo corrispondente



In tal caso abbiamo che:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Corollary 22

Dato il gruppo $\mathcal{D}_n$ e dato $H_n \subseteq \mathcal{S}_n$ dove:

$$H : \{\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_n \mid \sigma_\alpha = \alpha, \exists \alpha \in \mathcal{D}_n\}$$

si ha che:

$$\mathcal{D}_n \cong H \leqslant \mathcal{S}_n$$

Dimostrazione:

- Posto $H_n : \{\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_n \mid \sigma_\alpha = \alpha, \exists \alpha \in \mathcal{D}_n\}$, ogni simmetria in $\mathcal{D}_n$ corrisponde ad una permutazione in $H \leqslant \mathcal{S}_n$, dunque si ha che:

$$\begin{cases} \alpha = \sigma_\alpha : i \mapsto j \\ \beta = \sigma_\beta : j \mapsto k \end{cases} \implies \beta\alpha = \sigma_\beta\sigma_\alpha : i \mapsto k$$

- Inoltre, si ha che:

$$\beta\alpha \in \mathcal{D}_n \implies \exists \sigma_{\beta\alpha} \in H_n \mid \sigma_{\beta\alpha} = \beta\alpha = \sigma_\beta\sigma_\alpha$$

- Definiamo quindi la funzione $f : (\mathcal{D}_n, \cdot) \to (H_n, \cdot) : \alpha \mapsto \sigma_\alpha$, la quale risulta essere un morfismo poiché:

$$f(\beta\alpha) = \sigma_{\beta\alpha} = \sigma_\beta\sigma_\alpha = f(\beta)f(\alpha)$$

- In particolare, f risulta essere suriettiva poiché

$$\forall \sigma_\alpha \in H_n, \exists \alpha \in \mathcal{D}_n \mid f(\alpha) = \sigma_\alpha$$

- Infine, poiché $|\mathcal{D}_n| = |H, n|$, ne segue che f possa essere suriettiva se e solo se è anche iniettiva, dunque f è un isomorfismo

$\square$

6.6 Gruppo di Klein e Teorema di Cauchy

Definition 51. Gruppo di Klein

Definiamo come **gruppo di Klein** (o gruppo quadrinomio) il più piccolo gruppo non ciclico:

$$\mathcal{K}_4 : \{1, a, b, c\}$$

dove si verifica che:

- $a^2 = b^2 = c^2 = 1 \implies o(a) = o(b) = o(c) = 2$
- $ab = ba = c$
- $bc = cb = a$
- $ac = ca = b$

Esempio:

- Consideriamo il gruppo $\mathcal{D}_2 : \{1, \rho, \sigma_0, \sigma_1\}$. Notiamo come:
  - $\rho^2 = \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = 1$
  - $\rho\sigma_0 = \sigma_0\rho = \sigma_1$
  - $\rho\sigma_1 = \sigma_1\rho = \sigma_0$
  - $\sigma_1\sigma_0 = \sigma_0\sigma_1 = \rho$

  Dunque, concludiamo facilmente che $\mathcal{D}_2 \cong \mathcal{K}_4$

Proposition 52

Se G è un gruppo finito dove $|G| = 4$, si verifica che:

$$G \cong \mathbb{Z}_4 \text{ oppure } G \cong \mathcal{K}_4$$

Dimostrazione:

- Sia $\neq 1 \in G$. Per Lagrange, sappiamo che $o(a) \mid |G| = 4 \iff o(a) \in \{1, 2, 4\}$
- Come visto nella sezione 6.4, sappiamo che è G è cicliclo se:

$$\exists a \in G \mid o(a) = 4 \implies G \cong \mathbb{Z}_4$$

- Ipotizziamo ora che non sia ciclico, dunque che $\exists a \in G \mid o(a) = 4$, implicando quindi che $G = \{1, a, b, c\}$, dove $o(a) = o(b) = o(c) = 2$. Verifichiamo che in tal caso $ab = c$:
  - Supponiamo per assurdo che $ab = 1$

  $$ab = 1 \implies b = a^{-1} = a$$

  il che è impossibile

- Supponiamo per assurdo che $ab = a$

$$ab = a \implies a^{-1}ab = a^{-1}a \implies b = 1$$

il che è impossibile

- Supponiamo per assurdo che $ab = b$

$$ab = b \implies abb^{-1} = bb^{-1} \implies a = 1$$

il che è impossibile

- Siccome $ab \neq 1$, $ab \neq a$ e $ab \neq c$, allora l'unica possibilità affinché valga la chiusura del gruppo è $ab = c$

- Analogamente, dimostriamo che $ac = b$ e $bc = a$, concludendo quindi che:

$$G \cong \mathcal{K}_4$$

□

Theorem 53. Teorema di Cauchy

Sia G un gruppo finito. Dato un numero primo $p \in \mathbb{P}$, si verifica che:

$$p \mid |G| \implies \exists g \in G \mid o(g) = p$$

In particolare, se $|G| = q \in \mathbb{P}$, allora G è ciclico poiché

$$\exists g \in G \mid o(g) = q \implies |G| = o(g) \implies G = H(g)$$

Proposition 54

Se G è un gruppo finito dove $|G| = 6$, si verifica che:

$$G \cong \mathbb{Z}_6 \text{ oppure } G \cong \mathcal{S}_3$$

Dimostrazione:

- Come già visto, se $\exists g \in G \mid o(g) = 6$, allora $G \cong \mathbb{Z}_6$
- Ipotizziamo quindi che G non sia ciclico, dunque che $\nexists g \in G \mid o(g) = 6$. Per il teorema di Cauchy sappiamo che
  - $\exists \alpha \in G \mid o(\alpha) = 3 \implies o(\alpha^k) \mid o(\alpha) = 3, k \neq 0 \implies o(\alpha^3) = 3$
  - $\exists \beta \in G \mid o(\beta) = 2 \implies \beta^{-1} = \beta$
- Notiamo che:

$$\alpha^i\beta = \alpha^j\beta \iff \alpha^i = \alpha^j \iff 1 = \alpha^j\alpha^{-i} = \alpha^{j-i} \iff 0 = j - i \iff j = i$$

e che

$$\alpha^i = \alpha^j\beta \iff \alpha^{i-j} = \beta$$

- Tuttavia, l'ultima affermazione risulta essere assurda poiché:

$$o(\beta) = 2 \qquad o(p^{i-j}) = \begin{cases} o(1) = 1 & \text{se } i = j \\ o(p^k) = 3 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

  di conseguenza si ha che $\beta \neq \alpha^{i-j}$.

- Mostriamo inoltre che $\beta\alpha = \alpha^2\beta$:
  - Supponiamo per assurdo che $\beta\alpha = 1$

$$\beta\alpha = 1 \implies \alpha = \beta^{-1} \implies \alpha = \beta$$

    il che è impossibile
  - Supponiamo per assurdo che $\beta\alpha = \alpha$

$$\beta\alpha = \alpha \implies \beta = 1$$

    il che è impossibile
  - Supponiamo per assurdo che $\beta\alpha = \alpha^2$

$$\beta\alpha = \alpha^2 \implies \beta = \alpha$$

    il che è impossibile
  - Supponiamo per assurdo che $\beta\alpha = \beta$

$$\beta\alpha = \beta \implies \alpha = 1$$

    il che è impossibile
  - Supponiamo per assurdo che $\beta\alpha = \alpha\beta$, implicando che $o(\beta\alpha) = o(\alpha\beta)$:
    * $(\alpha\beta)^1 = \alpha\beta$
    * $(\alpha\beta)^2 = (\beta\alpha)(\beta\alpha) = \beta\beta\alpha\alpha = \beta^2\alpha^2 = \alpha^2$
    * $(\alpha\beta)^3 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^2 = (\alpha\beta)\alpha^2 = \alpha^3\beta = \beta$
    * $(\alpha\beta)^4 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^3 = (\alpha\beta)\beta = \alpha\beta^2 = \alpha$
    * $(\alpha\beta)^5 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^4 = (\alpha\beta)\alpha = \alpha^2\beta$
    * $(\alpha\beta)^6 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^5 = (\alpha\beta)\alpha^2\beta = \beta^2\alpha^3 = 1$

    dunque $o(\alpha\beta) = 6 \implies o(\alpha\beta) = |G| \implies G = H(\beta\alpha)$, ossia che il gruppo sia ciclico, contro l'ipotesi che invece esso non lo sia.
  - Quindi l'unica possibilità è che $\beta\alpha = \alpha^2\beta$

- Concludiamo quindi che:

$$G = \{1, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$$

- A questo punto, possiamo stendere una **tavola di Cayley**, ossia una tavola moltiplicativa:

	1	α	α^2	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$
1	1	α	α^2	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$
α	α	α^2	1	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$	β
α^2	α^2	1	α	$\alpha^2\beta$	β	$\alpha\beta$
β	β	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	1	α^2	α
$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	β	$\alpha^2\beta$	α	1	α^2
$\alpha^2\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	β	α^2	α	1

- Ricordando le proprietà dei prodotti dei gruppi diedrali (sezione 6.5), si ottiene una mappatura univoca $\alpha^i \mapsto \rho^i$ e analogamente $\alpha^i\beta \mapsto \sigma_i$. Ciò implica quindi che:

$$G \cong \mathcal{D}_3$$

- Inoltre, abbiamo visto che $\mathcal{D}_3 \cong H_3 \leqslant \mathcal{S}_3$ dove

$$H_3 : \{\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_3 \mid \sigma_\alpha = \alpha, \alpha \in \mathcal{D}_3\}$$

  e dove $|\mathcal{D}_3| = 2 \cdot 3 = 6$ e $|\mathcal{S}_n| = 3! = 6$.

- Affinché l'isomorfismo esista si ha necessariamente che $|H| = |\mathcal{D}_3| = 6$, implicando quindi che

$$H_3 \leqslant \mathbb{S}_3, |H_3| = |\mathcal{S}_3| \implies G \cong \mathcal{D}_3 \cong H = \mathcal{S}_3$$

$\square$

Capitolo 7

Polinomi

Definition 52. Anello polinomiale

Dato un anello commutativo A, definiamo l'**insieme dei polinomi** aventi come coefficienti elementi in A come:

$$A[x] : \{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \mid a_0, \ldots, a_n \in A, a_n \neq 0\}$$

Inoltre, $A[x]$ risulta essere un **anello commutativo**

Dimostrazione:

- Dati due polinomi $p(x), q(x) \in A[x]$, dunque definiti come

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

  abbiamo che:

- Nell'anello la somma è definita come:

$$p(x), q(x) \in A[x] \implies p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{max(n,m)} (a_i + b_i) x^i$$

- Nell'anello il prodotto è definita come:

$$p(x), q(x) \in A[x] \implies p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} \right)$$

- Gli assiomi di associatività e commutatività possono essere facilmente verificati tramite la definizione stessa della somma
- L'elemento neutro nella somma è il polinomio neutro $e(x) = 0$, mentre nel prodotto è il polinomio costante $d(x) = 1$
- L'elemento inverso nella somma è:

$$\forall p(x) \in A[x], \exists -p(x) \in A[x] \mid p(x) + (-p(x)) = 0$$

- Per via della definizione data di polinomio, non esiste un inverso moltiplicativo.

  Si pensi ad esempio a $p(x) = x + 3$. Tale polinomio non ammette inverso moltiplicativo poiché $\frac{1}{x+3} \notin A[x]$.

  Di conseguenza, $A[x]$ non può essere un campo.

$\square$

Observation 46

Se K è un campo, allora $K[x]$ è un anello commutativo, poiché non ammette comunque l'esistenza dell'inverso nel prodotto

Definition 53. Grado di un polinomio

Dato $p(x) \in A[x]$ indichiamo il **grado del polinomio** come $deg(p(x))$, dove:

- $p(x) = 0 \iff deg(p(x)) = -\infty$ (polinomio nullo)
- $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \neq 0, a_n \neq 0 \implies deg(p(x)) = n$

Definition 54. Coefficienti direttori

Dato $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \neq 0 \in A[x]$, definiamo a_n come **coefficiente direttore** del polinomio

Proposition 55

Ogni elemento $a \in A$ può essere visto come un **polinomio costante**, ossia di grado 0:

$$\forall a \in A, \exists a(x) \in A[x] \mid a(x) = a \iff deg(a(x)) = 0$$

Dunque, si ha che $A \leqslant A[x]$ sottoanello

Observation 47

Siano $p(x), q(x) \in A[x]$. Si verifica che:

$$deg(p(x)q(x)) = deg(p(x)) + deg(q(x))$$

Dimostrazione:

- Poiché il prodotto è definito come

  $$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_ib_jx^{i+j} \right) = a_0b_0 + a_0b_1x^1 + \ldots + a_nb_mx^{n+m}$$

  allora $deg(p(x)q(x)) = deg(p(x)) + deg(q(x)) = n + m$

$\square$

Proposition 56

Dato l'anello commutativo $K[x]$, si ha che:

$$K[x]^* = K^* = K - \{0\}$$

dunque gli unici elementi invertibili di $K[x]$ sono i **polinomi costanti**

Dimostrazione:

- Supponiamo per assurdo che $\exists a(x) \neq 0 \in K[x] \mid deg(a(x)) \geq 1$ e che $\exists a(x)^{-1} \neq 0 \in K[x] \mid deg(a(x)^{-1}) \geq 0$, da cui otteniamo che:

  $$deg(1) = deg(a(x)a(x)^{-1}) = deg(a(x)) + deg(a(x)^{-1}) \geq 1$$

  giungendo quindi ad una contraddizione, poiché $1 \in K \implies deg(1) = 0$. Dunque, l'unica possibilità è:

  $$deg(a(x)) \geq 1 \implies a(x) \neq 0 \notin K[x]^*$$

  da cui ricaviamo che

  $$a(x) \neq 0 \in K[x]^* \implies deg(a(x)) = 0$$

- Supponiamo invece che $deg(a(x)) = 0$, implicando che

  $$\exists a_0 \neq 0 \in K \mid a(x) = a_0 \implies \exists a_0^{-1} \in K \mid a_0 a_0^{-1} = 1 \implies$$

  da cui concludiamo che:

  $$deg(a(x)) = 0 \implies a(x) \neq 0 \in K[x]^*$$

$\square$

7.1 Divisione con resto di polinomi

Theorem 57. Divisione con resto di polinomi

Dati $a(x), b(x) \in K[x]$ con $b(x) \neq 0$ allora

$$\exists! q(x), r(x) \in K[x] \mid a(x) = b(x)q(x) + r(x)$$

dove $deg(r(x)) < deg(b(x))$

Dimostrazione unicità (esistenza omessa)

- Supponiamo che

$$b(x)q_1(x) + r_1(x) = a(x) = b(x)q_2(x) + r_2(x)$$

dove $deg(r_1(x)), deg(r_2(x)) < deg(b(x))$, da cui otteniamo che:

$$deg(r_1(x)), deg(r_2(x)) < deg(b(x)) \implies deg(r_1(x) - r_2(x)) < deg(b(x)$$

- Dunque si ha che:

$$b(x)q_1(x) + r_1(x) = b(x)q_2(x) + r_2(x) \implies b(x)[q_1(x) - q_2(x)] = r_2(x) - r_1(x) \implies$$
$$\implies deg(r_2(x) - r_1(x)) = deg(b(x)) + deg(q_1(x) - q_2(x))$$

- Nel caso in cui $deg(q_1(x) - q_2(x)) \geq 0$, avremmo $deg(r_2(x) - r_1(x)) \geq deg(b(x))$, contraddicendo l'ipotesi. Di conseguenza, l'unica possibilità è

$$deg(q_1(x) - q_2(x)) = -\infty \iff q_1(x) - q_2(x) = 0 \iff q_1(x) = q_2(x)$$

- A questo punto, quindi, si ha che:

$$b(x)[q_1(x) - q_2(x)] = r_2(x) - r_1(x) \implies b(x) \cdot 0 = r_1(x) - r_1(x) \iff$$
$$\iff 0 = r_2(x) - r_1(x) \iff r_1(x) = r_2(x)$$

$\square$

Esempio:

- Calcolo della divisione con resto di $a(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 4$ e $b(x) = x^2 - x + 1$

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
+2x^4 & +3x^3 & -2x^2 & +x & -4 & +x^2 & -x & +1 \\ \cline{6-8}
-2x^4 & +2x^3 & -2x^2 & & & 2x^2 & +5x & +1 \\ \cline{1-5}
 & +5x^3 & -4x^2 & +x & -4 & & & \\
 & -5x^3 & +5x^2 & -5x & & & & \\ \cline{1-5}
 & & x^2 & -4x & -4 & & & \\
 & & -x^2 & +x & -1 & & & \\ \cline{1-5}
 & & & +3x & -5 & & &
\end{array}$$

Quindi concludiamo che:

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 4 = (x^2 - x + 1)(2x^2 + 5x + 1) + 3x - 5$$

7.1.1 Regola di Ruffini

Method 2. Regola di Ruffini

Dati $a(x), b(x) \in K[x]$ dove $b(x) = x - c, \exists c \in K$, è facile calcolare il quoziente $q(x) \in K[x]$ e il resto $r(x) = r_0 \in K$ della divisione di $a(x)$ per $b(x)$:

1. Sia $a(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ con $a_n \neq 0$
2. Poiché $deg(a(x)) = deg(b(x)) + deg(q(x)) = 1 + deg(q(x)) \implies deg(q(x)) = deg(a(x)) - 1$, allora
$$q(x) = q_0 + \ldots + q_{n-1}x^{n-1}$$
dove $q_0, \ldots, q_{n-1}$ sono dati da:
   - $q_{n-1} = a_n$
   - $q_{n-1-k} = cq_{n-k} + a_{n-k}$
   - $r_0 = cq_0 + a_0$
3. In formato grafico, riassumiamo tale concetto con:

$$\begin{array}{c|cccc|c} & a_n & a_{n-1} & \ldots & a_1 & a_0 \\ c & & cq_{n-1} & \ldots & cq_1 & cq_0 \\ \hline & q_{n-1} & q_{n-2} & \ldots & q_0 & r_0 \end{array}$$

Esempio:

- Calcolare la divisione tra $a(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5$ e $b(x) = x + 2$

$$\begin{array}{c|cccc|c} & 1 & -3 & 0 & 2 & -5 \\ -2 & & -2 & 10 & -20 & 36 \\ \hline & 1 & -5 & 10 & -18 & 31 \end{array}$$

Dunque si ha che:

$$x^4 - 3x^3 + 2x - 5 = (x + 2)(x^3 - 5x^2 + 10x - 18) + 31$$

Proposition 58. Teorema del fattore

Dato $p(x) \in K[x]$ e dato $c \in K$

$$p(c) = 0 \iff x - c \mid p(x)$$

in tal caso, c viene detta **radice (o zero) del polinomio**

Dimostrazione:

- $x - c \mid p(x) \implies p(c) = 0$

$$x - c \mid p(x) \implies p(x) = (x - c)q(c) \implies p(c) = (c - c)q(c) = 0$$

- $p(c) = 0 \implies x - c \mid p(x)$
  - Siano $q(x)$ e $r(x)$ il quoziente e il resto della divisione di $p(x)$ per $(x - c)$

$$p(x) = (x - c)q(x) + r(x)$$

  - Poiché per definizione stessa di divisione con resto tra polinomi si ha che $deg(r(x)) < deg(x - c)$, ne segue che:

$$deg(r(x)) < deg(x - c) \implies deg(r(x)) < 1 \implies r := r(x) \in K$$

  - Infine, per ipotesi si ha che

$$0 = p(c) = (c - c)q(c) + r \implies 0 = (c - c)q(c) + r \implies$$

$$\implies 0 = 0 + r \implies r = 0$$

    dunque, la divisione non ha resto, implicando che:

$$(x - c) \mid p(x)$$

□

Corollary 23

Dato $p(x) \in K[x] \mid deg(a(x)) = n$, allora $a(x)$ ha al massimo n radici

Inoltre, se $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, allora, per il teorema fondamentale dell'algebra, esistono esattamente n radici

Dimostrazione:

- Sia $deg(p(x)) = n$ e siano per assurdo $c_1, \ldots, c_m$ dove $m > n$ e $c_i \neq c_j \iff i \neq j$ tali che

$$p(c_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq m$$

- Poiché un polinomio può essere scritto come il prodotto di tutte le sue radici, si verifica che:

$$\begin{cases} x - c_1 \mid p(x) \\ \vdots \\ x - c_m \mid p(x) \end{cases} \implies \underbrace{(x - c_1) \cdot \ldots \cdot (x - c_m)}_{q(x)} \mid p(x)$$

- Poiché $deg(q(x)) = m$, tale divisione risulta essere impossibile, poiché un polinomio non può dividere un polinomio di grado minore

7.2 Proprietà dell'anello polinomiale

Proposition 59

L'anello commutativo $K[x]$ è un **dominio di integrità** poiché vale la **legge di annullamento del prodotto**

Corollary 24

Dato il dominio di integrità $K[x]$ e dati $p(x), q(x) \in K[x]$, si ha che:

$$I(p(x)) = I(q(x)) \iff p(x) = c \cdot q(x), \exists c \in K[x]^*$$

(*dimostrazione nella sezione* 4.3)

Theorem 60

L'anello commutativo $K[x]$ è un **dominio ad ideali principali**, dunque

$$\exists! p(x) \in I \mid I = I(p(x))$$

Dimostrazione esistenza:

- $I \subseteq I(p(x))$
  - Sia $p(x) \neq 0 \in I$ del più piccolo grado possibile.
  - Dato $a(x) \in I \mid a(x) = p(x)q(x) + r(x)$ si ha che $deg(r(x)) < deg(p(x))$, da cui ricaviamo che:

    $$a(x) = p(x)q(x) + r(x) \in I \implies r(x) = a(x) - p(x)q(x) \in I$$

  - Tuttavia, poiché $p(x)$ è il polinomio non nullo all'interno dell'ideale del più piccolo grado possibile e poiché $deg(r(x)) < deg(p(x))$, ne segue necessariamente che $r(x) = 0$.
  - Dunque, si ha che:

    $$a(x) = p(x)q(x) + r(x) \in I \implies a(x) = p(x)q(x) \implies a(x) \in I(p(x))$$

- $I(p(x)) \subseteq I$
  - Dato $p(x)) \neq 0 \in I$ del più piccolo grado possibile, si ha che:

    $$a(x) \in I(p(x)) \implies a(x) = p(x)b(x), \exists b(x) \in K[x] \implies a(x) \in I$$

    poiché $p(x) \in I$

Dimostrazione unicità:

- Se $I = \{0\}$, allora $I = I(0)$
- Sia invece $p(x) \neq 0 \in I$ del più piccolo grado possibile tale che $I = I(p(x))$, implicando che

$$\forall q(x) \in I \mid deg(q(x)) < deg(p(x)) \implies q(x) = 0$$

dunque non può esistere un polinomio in I con grado minore di $p(x)$

$\square$

Definition 55. Massimo comun divisore di polinomi

Dato il dominio ad ideali principali $K[x]$ e degli elementi $a_1(x), \dots, a_n(x) \in K[x]$, si ha che:

$$\exists! p(x) \in K[x] \mid I(a_1(x), \dots, a_n(x)) = I(d(x))$$

dove $d(x) := MCD(a_1(x), \dots, a_n(x))$

In particolare, individuiamo l'analogo dell'**identità di Bezout**:

$$\exists p_1(x), \dots, p_n(x) \in K[x] \mid a_1(x)p_1(x) + \dots + a_n(x)p_n(x) = d(x)$$

Definition 56. Minimo comune multiplo di polinomi

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e degli elementi $a_1(x), \dots, a_n(x) \in K[x]$, si ha che:

$$\exists! p(x) \in K[x] \mid I(a_1(x)) \cap \dots \cap I(a_n(x)) = I(m(x))$$

dove $m(x) := mcm(a_1(x), \dots, a_n(x))$

Observation 48

Poiché $K[x]$ è un dominio dominio di integrità, sappiamo che

$$I(p(x)) = I(q(x)) \iff p(x) = c \cdot q(x), \exists c \in K[x]^*$$

Dunque, dati $a_1(x), \dots, a_n(x) \in K[x]$, si ha che $d(x) := MCD(a_1(x), \dots, a_n(x))$ e $m(x) := mcm(a_1(x), \dots, a_n(x))$ possano essere ben definiti solo a meno di una costante moltiplicativa non nulla.

Affinché valga l'unicità, quindi, basta imporre che i polinomi $d(x)$ e $m(x)$ abbiano **coefficiente direttore** $a_n = 1$

Definition 57. Polinomio monico

Dato $a(x) = a_0 + \dots + a_n x^n \in K[x]$, definiamo $a(x)$ come **polinomio monico** se e solo se $a_n = 1$

Method 3

Dati $a(x), b(x) \in K[x]$, possiamo calcolare $d(x) := MCD(a(x), b(x))$ tramite l' **algoritmo di Euclide** e $m(x) := mcm(a(x), b(x))$ tramite il **teorema fondamentale dell'aritmetica**:

$$m(x) = \frac{a(x)b(x)}{d(x)}$$

Observation 49

Dati $a_1(x), \dots, a_n(x) \in K[x]$ data $c \in K$, si ha che:

$$a_1(c) = \dots = a_n(c) = 0 \iff d(c) = 0$$

dove $d(x) := MCD(a_1(x), \dots, a_n(x)) \in K[x]$.

In altre parole, le uniche radici in comune tra due polinomi sono le radici del loro MCD

Dimostrazione:

- Sia $c \in K$ tale che:

$$a_i(c) = 0, \forall i \in [1, n] \iff (x - c) \mid a_i(c), \forall i \in [1, n]$$

- Poiché $d(x) : MCD(a_1(x), \dots, a_n(x))$, per definizione stessa si ha che:

$$(x - c) \mid a_i(c), \forall i \in [1, n] \implies (x - c) \mid d(x) \iff d(c) = 0$$

- Viceversa, sempre per definizione stessa di $d(x)$ si ha che:

$$d(c) = 0 \implies (x - c) \mid d(x), d(x) \mid a_i(x), \forall i \in [1, n] \implies (x - c) \mid a_i(x), \forall i \in [1, n]$$

□

Proposition 61

Dato $p(x) \in K[x]$, si ha che:

$$p(x) \text{ elemento irriducibile } \iff p(x) \text{ elemento primo}$$

Dimostrazione:

- Sappiamo già che in un dominio di integrità si ha:

$$p(x) \ \texttt{primo} \implies p(x) \ \texttt{irriducibile}$$

(dimostrazione nella sezione 4.4)

- Dati $a(x), b(x) \in K[x]$, supponiamo che $p(x) \mid a(x)b(x)$:

$$p(x) \mid a(x)b(x) \iff a(x)b(x) = p(x)k(x), \exists k(x) \in K[x]$$

- Se $p(x) \nmid a(x)$, si ha che $d(x) := MCD(p(x), a(x)) = 1$. Dunque, tramite l'identità di Bezout otteniamo che:

$$\exists f(x), g(x) \in K[x] \mid d(x) = p(x)f(x) + a(x)g(x) \implies$$

$$\implies 1 = p(x)f(x) + a(x)g(x) \implies b(x) = p(x)b(x)f(x) + a(x)b(x)g(x) \implies$$

$$\implies b(x) = p(x)b(x)f(x) + [a(x)b(x)]g(x) \implies b(x) = p(x)b(x)f(x) + p(x)k(x)g(x) \implies$$

$$\implies b(x) = p(x)[q(x)f(x) + g(x)b(x)] \implies p(x) \mid b(x)$$

- Analogamente, se $p(x) \nmid b(x)$ si ha che $d(x) := MCD(p(x), b(x)) = 1$. Dunque, seguendo gli stessi passaggi otteniamo che $p(x) \mid a(x)$
- Concludiamo quindi che se $p(x)$ è irriducibile, allora:

$$p(x) \mid a(x)b(x) \implies p(x) \mid a(x) \vee p(x) \mid b(x)$$

$\square$

Lemma 62

Dato $p(x) \in K[x]$, si ha che:

$$deg(p(x)) = 1 \implies p(x) \text{ irriducibile}$$

Dimostrazione:

- Se $deg(p(x)) = 1$ allora

$$p(x) = a(x)b(x) \implies \begin{cases} deg(a(x)) = 0, deg(b(x)) = 1 \implies a(x) \in \mathbb{C}[x]^* \\ deg(a(x)) = 1, deg(b(x)) = 0 \implies b(x) \in \mathbb{C}[x]^* \end{cases}$$

  dunque $p(x)$ è irriducibile

$\square$

Proposition 63

Dato $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, si ha che:

$$p(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ irriducibile} \iff deg(p(x)) = 1$$

Dimostrazione:

- Sappiamo già che $deg(p(x)) = 1 \implies p(x)$ irriducibile
- Consideriamo quindi il caso in cui $deg(p(x)) = 0$, allora

$$deg(p(x)) = 0 \iff p(x) \in \mathbb{C}^*$$

  dunque $p(x)$ non può essere irriducibile per definizione stessa

- Sia invece $deg(p(x)) > 1$. Per il teorema fondamentale dell'algebra si ha che:

$$\exists z \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0 \iff x - z \mid p(x) \iff$$
$$\iff p(x) = (x-z)q(x), \exists q(x) \in \mathbb{C}[x] \implies$$
$$\implies deg(q(x)) = deg(p(x)) - 1 > 0 \implies q(x) \notin \mathbb{C}^* = \mathbb{C}[x]^*$$

dunque $p(x)$ non può essere irriducibile poiché $deg((x-z)) = 1 \implies (x-z) \notin \mathbb{C}[x]^*$ e $q(x) \notin \mathbb{C}[x]^*$.

- Dunque si ha che

$$deg(p(x)) \neq 1 \implies p(x) \text{ non irriducibile}$$

che per contronominale implica che

$$p(x) \text{ irriducibile} \implies deg(p(x)) = 1$$

□

Proposition 64

Dato $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, si ha che:

$$p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ irriducibile} \iff deg(p(x)) = 1 \text{ oppure } deg(p(x)) = 2, \Delta < 0$$

dove $deg(p(x)) = 2 \implies p(x) = ax^2 + bx + c, \Delta := b^2 - 4ac$

Dimostrazione:

- Poiché $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$, la dimostrazione in entrambi i lati dei casi con $deg(p(x)) = 1$ è analoga alla precedente
- Supponiamo quindi per assurdo che $deg(p(x)) = 2, \Delta < 0$ e che $p(x)$ non sia irriducibile, implicando che:

$$\exists a(x)b(x) \in \mathbb{R}[x] - \mathbb{R}[x]^* \mid p(x) = a(x)b(x) \wedge deg(p(x)) = 2$$
$$\implies deg(a(x)) = deg(b(x)) = 1 \implies$$
$$\implies \begin{cases} \exists c, d \in \mathbb{R} \mid a(x) = cx + d \implies a(-c^{-1}d) = 0 \iff (x + c^{-1}d) \mid a(x) \\ \exists f, g \in \mathbb{R} \mid b(x) = fx + g \implies b(-f^{-1}g) = 0 \iff (x + f^{-1}g) \mid b(x) \end{cases} \implies$$
$$\implies \begin{cases} (x + c^{-1}d) \mid a(x), a(x) \mid p(x) \implies (x + c^{-1}d) \mid p(x) \iff p(-c^{-1}d) = 0 \\ (x + f^{-1}g) \mid b(x), b(x) \mid p(x) \implies (x + f^{-1}g) \mid p(x) \iff p(-f^{-1}g) = 0 \end{cases}$$

dunque $x_1 := -c^{-1}d \in \mathbb{R}$ e $x_2 := -f^{-1}g \in \mathbb{R}$ sarebbero le radici di $p(x)$, contraddicendo l'ipotesi per cui $\Delta < 0 \implies x_1, x_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

Dunque, l'unica possibilità è:

$$deg(p(x)) = 2, \Delta < 0 \implies p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ irriducibile}$$

- Sia quindi $p(x) := a_0 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$ irriducibile con $deg(p(x)) > 1$. Per il teorema fondamentale dell'algebra, $\exists z := c + id \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0 \iff (x-z) \mid p(x)$

- Poiché $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, si ha che:

$$\forall j \in [1, n], \exists d_j \in \mathbb{R} \mid a_j := d_j + i \cdot 0 = d_j - i \cdot 0 =: \overline{a_j} \implies a_j = \overline{a_j}, \forall j \in [1, n]$$

dunque, per le proprietà dei complessi coniugati (sezione 2), ne segue che:

$$p(\overline{z}) = a_0 + \dots a_n \overline{z}^n = a_0 + \dots a_n \overline{z^n} = \overline{a_0} + \dots \overline{a_n}\,\overline{z^n} = \overline{a_0} + \dots \overline{a_n z^n} =$$

$$\overline{a_0 + \dots + a_n z^n} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0 \implies p(\overline{z}) = 0 \iff (x - \overline{z}) \mid p(x)$$

dove per definizione si ha $\overline{z} = c - id$

- Nel caso in cui $d = 0$, ne seguirebbe che $z = \overline{z}$, implicando che:

$$(x - z) \mid p \iff p(x) = q(x)(x - z), \exists q(x) \in \mathbb{R}[x] \implies$$

$$\implies deg(q(x)) + deg(x - z) = deg(p(x)) > 1 \implies$$

$$\implies deg(q(x)) + 1 > 1 \implies deg(q(x)) > 0 \implies q(x) \notin K^*$$

rendendo quindi tale caso è impossibile, poiché altrimenti si avrebbe che $p(x)$ non sia irriducibile in quanto $q(x), (x - z) \notin K^*$

- Sia quindi $d \neq 0$, implicando che $z \neq \overline{z}$:

$$(x - z) \mid p(x), (x - \overline{z}) \mid p(x) \implies (x - z)(x - \overline{z}) \mid p(x) \implies$$

$$\implies x^2 - \overline{z}x - zx + z \cdot \overline{z} \mid p(x) \implies x^2 - (\overline{z} + z)x + z \cdot \overline{z} \mid p(x) \implies$$

$$\implies x^2 - (c - id + c + id)x + (c + id)(c - id) \mid p(x) \implies x^2 - 2cx + c^2 + d^2 \mid p(x)$$

- Poiché $p(x)$ è irriducibile, l'unica possibilità è:

$$x^2 - 2cx + c^2 + d^2 \mid p(x) \implies p(x) = k(x^2 - 2cx + c^2 + d^2), \exists k \in \mathbb{R}[x]^* = \mathbb{R}^* \implies$$

$$\implies p(x) = kx^2 - 2kcx + kc^2 + kd^2 \implies \Delta = (-2kc)^2 - 4k^2(c^2 + d^2) \implies$$

$$\implies \Delta = 4k^2c^2 - 4k^2c^2 - 4k^2d^2 \implies \Delta = -4k^2d^2 < 0$$

$\square$

Theorem 65. Fattorizzazione in polinomi irriducibili e monici

Dato $p(x) \neq 0 \in K[x]$, si ha che:

$$\exists! q_1(x), \dots, q_k(x) \neq 0 \in K[x], \exists c \in K^* \mid p(x) = c \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_k(x)$$

dove $q_1(x), \dots, q_k(x)$ sono **polinomi monici** e **irriducibili**

Dimostrazione esistenza:

- Supponiamo che $deg(p(x)) = 1$, implicando che $p(x) = ax + b, \exists a, b \neq 0 \in K$

- Poiché $a, b \neq 0 \implies a, b \in K^* \implies \exists a^{-1}, b^{-1} \in K^*$, ne segue che

$$p(x) = ax + b \implies p(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right) \implies p(x) = a(x + ba^{-1})$$

dove a e $deg(x - ba^{-1}) = 1 \implies (x - ba^{-1})$ irriducibile, dunque esiste una fattorizzazione di $p(x)$ in polinomi monici ed irriducibili

- Sia quindi $p(x) \in K[x] \mid deg(p(x)) > 1$ dove

$$\exists a(x), b(x) \in K[x] \mid p(x) = d(x)f(x)$$

e supponiamo per ipotesi induttiva che $a(x)$ e $b(x)$ siano fattorizzabili in polinomi monici ed irriducibili:

$$\exists! q_1(x), \ldots, q_k(x) \in K[x], \exists c \in K^* \mid d(x) = c \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_k(x)$$
$$\exists! q_1'(x), \ldots, q_k'(x) \in K[x], \exists c' \in K^* \mid f(x) = c' \cdot q_1'(x) \cdot \ldots \cdot q_k'(x)$$

da cui ne segue che:

$$p(x) = d(x)f(x) = c \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_k(x) \cdot c' \cdot q_1'(x) \cdot \ldots \cdot q_k'(x) =$$
$$= (c \cdot c') \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_k(x) \cdot q_1'(x) \cdot \ldots \cdot q_k'(x)$$

dunque $p(x)$ è fattorizzabile in polinomi monici ed irriducibili

Dimostrazione unicità:

- Se $deg(p(x)) = 0$ allora $\exists! c \in K^* \mid p(x) = c$
- Sia quindi $deg(p(x)) > 0$. Notiamo inoltre che dato $p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, affinché la fattorizzazione possa essere in polinomi monici ed irriducibili ne segue necessariamente che $c = c' = a_n$.
- Supponiamo quindi che esistano due fattorizzazioni possibili in polinomi monici ed irriducibili per $p(x)$:

$$c \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot \cdot q_k(x) = p(x) = c' \cdot q_1'(x) \cdot \ldots \cdot q_j'(x) \implies$$
$$c \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot \cdot q_k(x) = c' \cdot q_1'(x) \cdot \ldots \cdot q_j'(x) \implies q_1(x) \mid q_1'(x) \cdot \ldots \cdot q_j'(x)$$

- Tuttavia, poiché $q_1(x)$ irriducibile se e solo se è primo, ne segue che:

$$q_1'(x) \cdot \ldots \cdot q_j'(x) \mid q_1'(x) \vee \ldots \vee q_1(x) \mid q_j'(x)$$

- Per comodità, assumiamo che $q_1'(x)$ il polinomio per cui $q_1(x) \mid q_1'(x)$:

$$q_1(x) \mid q_1'(x) \iff q_1'(x) = d \cdot q_1(x), \exists d \in K^* \implies$$
$$c \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot \cdot q_k(x) = c' \cdot d \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_j'(x) \implies$$
$$\implies c \cdot q_2(x) \cdot \ldots \cdot \cdot q_k(x) = \frac{p(x)}{q_1(x)} = c' \cdot d \cdot q_2'(x) \cdot \ldots \cdot q_j'(x)$$

- Poiché $deg\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) < deg(p(x))$ possiamo concludere che $k = k$ e, a meno di riordinare i fattori, possiamo assumere che $q_2(x) = q_2'(x), \ldots, q_k(x) = q_j'(x)$

□

Theorem 66

Sia $p(x) := a_0 + \ldots a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ dove $a_0, a_n \neq 0$. Se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ è radice di $p(x)$ e $MCD(a,b) = 1$, allora

$$p\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \implies a \mid a_0, b \mid a_n$$

e di conseguenza che:

$$a \nmid a_0 \vee b \nmid a_n \implies p\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$$

Dimostrazione:

- Supponendo che $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p\left(\frac{a}{b}\right) = 0, MCD(a,b) = 1$, ne segue che:

$$0 = p\left(\frac{a}{b}\right) = a_0 + a_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + \ldots + a_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n \implies$$

$$\implies b^n \cdot 0 = b^n \left(a_0 + a_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + \ldots + a_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n\right) \implies$$

$$\implies 0 = a_0 b^n + \ldots + a_{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b + a_n a^n \implies$$

$$\implies a_n a^n = -a_0 b^n - \ldots - a_{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b \implies$$

$$\implies a_n a^n \cdot \frac{1}{b} = -a_0 b^{n-1} - \ldots - a_{n-1} \cdot a^{n-1} \implies b \mid a_n a^n$$

- Poiché $MCD(a,b) = 1 \implies MCD(a^n, b) = 1$, allora

$$b \mid a_n a^n \implies b \mid a_n$$

- Analogamente, seguendo gli stessi passaggi arriviamo a dimostrare che $MCD(a,b) = 1 \implies MCD(a, b^n) = 1$ implica che

$$a \mid a_0 b^n \implies a \mid a_0$$

□

Esempi:

- Dato $p(x) = x^3 - 19x - 30$, se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ fosse soluzione, allora

$$p\left(\frac{a}{b}\right) \implies a \mid 30, b \mid 1$$

quindi le uniche soluzioni possibili di $p(x)$ possono essere:

$$x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$$

- Dato $p(x) = 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$, se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ fosse soluzione, allora

$$p\left(\frac{a}{b}\right) \implies a \mid -1, b \mid 6$$

quindi le uniche soluzioni possibili di $p(x)$ possono essere:

$$x = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{6}$$

7.3 Polinomi in $\mathbb{Z}_p$

Lemma 67

Dato $p \in \mathbb{P}$, si ha che:

$$\prod_{0<a<p} (x-a) \equiv x^{p-1} - 1 (\text{mod } p)$$

Dimostrazione:

- Sia $q(x) := x^{p-1} - [1] \in \mathbb{Z}_p$. Per il piccolo teorema di Fermat, dato $0 < a < p$ si ha che:

$$a^{p-1} \equiv 1 (\text{mod } p) \implies a^{p-1} - 1 \equiv 0 (\text{mod } p) \implies$$
$$\implies q([a]) \equiv 0 (\text{mod } p) \iff x - [a] \mid q(x)$$

- Dunque, si ha che:

$$x - [a] \mid q(x), \forall 0 < a < p \implies \prod_{0<a<p} (x - [a]) \mid q(x) \implies$$

$$\implies q(x) = k \cdot \prod_{0<a<p} (x - [a]), \exists k \in \mathbb{Z} \implies$$

ottenendo quindi una fattorizzazione in polinomi monici ed irriducibili

- Poiché il coefficiente direttore di $q(x)$ è 1, affinché la fattorizzazione sia valida ne segue necessariamente che $k = 1$, concludendo che:

$$\prod_{0<a<p} (x-a) \equiv x^{p-1} - 1 (\text{mod } p)$$

$\square$

Observation 50

Dato $p \in \mathbb{P}$, si ha che:

$$\prod_{0<a<p} (x-a) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k-1} \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} x^{k-1}$$

dove $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}$ è un numero di Stirling di prima specie senza segno, ossia il numero di permutazioni in $\mathcal{S}_p$ aventi k cicli

Esempio:

- Dato

$$S_3 : \{(1)(2)(3), (12)(3), (13)(2), (23)(1), (123), (132)\}$$

si ha che:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$$

Lemma 68

Dato $d \in \mathbb{N}$ tale che $d \mid p-1$, l'equazione $x^d \equiv 1(\text{mod } p)$ ammette d soluzioni distinte in $\mathbb{Z}_p$

Dimostrazione:

- Sia $d \in \mathbb{N}$ tale che $d \mid p-1$. Ne segue che:

$$d \mid p-1 \implies p-1 = dk, \exists k \in \mathbb{Z}$$

- Per dimostrazione precedente, si ha che:

$$\prod_{0<a<p}(x-a) \equiv x^{p-1} - 1(\text{mod } p) \implies \prod_{0<a<p}(x-a) \equiv x^{dk} - 1(\text{mod } p) \implies$$

$$\implies \prod_{0<a<p}(x-a) \equiv (x^d)^k - 1^k(\text{mod } p) \implies \prod_{0<a<p}(x-a) \equiv (x^d-1)^k(\text{mod } p) \implies$$

$$\implies \prod_{0<a<p}(x-a) \equiv (x^d-1)(x^d-1)^{k-1}(\text{mod } p)$$

- Posto $q(x) := (x^d-1)^{n-1}$, si ha che:

$$\prod_{0<a<p}(x-a) \equiv (x^d-1)q(x)(\text{mod } p)$$

$$\implies x-[a] \mid x^d-[1] \vee x-[a] \mid q(x), \forall 0 < a < p$$

- Dunque, sia $0 < b < p$ tale che $x-[b] \mid x^d-[1]$. Ne segue che:

$$\prod_{0<a<p, a\neq b}(x-a) \equiv q(x)(\text{mod } p)$$

- Per motivi di grado, ripetendo tale procedimento su $q(x)$ e i suoi fattori, otterremo esattamente d radici di $x^d-[1]$

$\square$

Lemma 69

Dato $d \in \mathbb{N}$ tale che $d \mid p-1$, allora

$$\exists [a] \in \mathbb{Z}_p \mid o([a]) = d$$

Dimostrazione:

- Se $d = 1$, allora $\exists 1 \in \mathbb{Z}_p^* \mid o([1]) = 1$
- Se invece $d = q^k$ dove $q \in \mathbb{P}$, allora per il lemma precedente si ha che:

$$d = q^k \implies q^k \mid p-1 \implies \begin{cases} x^{q^k} \equiv 1 (\texttt{mod}\ p) \text{ ha } q^k \text{ soluzioni} \\ x^{q^k - 1} \equiv 1 (\texttt{mod}\ p) \text{ ha } q^k - 1 \text{ soluzioni} \end{cases}$$

  dunque $\exists [a] \in \mathbb{Z}_p$ che è soluzione di $x^{q^k} = [1]$ ma non di $x^{q^k - 1} = [1]$, implicando che:

$$o([a]) \mid q^k, o([a]) \nmid q^{k-1} \implies o([a]) = q^k$$

- Supponiamo per ipotesi induttiva di aver verificato che per tutti gli n divisori di $p-1$ più piccoli di d che $\exists [b] \in \mathbb{Z}_p \mid o([b]) = n$
- Sia quindi $d = nq^k$ dove $q \in \mathbb{P} \mid MCD(n, q^k) = 1$. Per induzione, si ha che:

$$\exists [b], [c] \in \mathbb{Z}_p \mid o([b]) = n, o([c]) = q^k$$

- Infine, come visto nella sezione 4.10, poiché $MCD(o([b]), o([c])) = 1$ si ha che:

$$\exists a \in \mathbb{Z}_p \mid [a] = [bc] \implies o([a]) = nq^k = d$$

□

Proposition 70

Il gruppo $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$, dove $p \in \mathbb{P}$, è **sempre ciclico**

Dimostrazione:

- Per il lemma precedente, si ha che:

$$p-1 \mid p-1 \implies \exists [a] \in \mathbb{Z}_p^* \mid o([a]) = p-1 = \left|\mathbb{Z}_p^*\right| \implies \mathbb{Z}_p^* = H([a])$$

□

Capitolo 8

Spazi vettoriali

Definition 58. Spazio vettoriale

Dato un campo K, definiamo come **spazio vettoriale su** K una struttura algebrica $(V, +, \cdot)$, dove $+ : V \times V \to V : (u, v) \mapsto w$ e $\cdot : K \times V \to V : (\lambda, v) \mapsto w$, soddisfacente i seguenti assiomi:

- $(V, +)$ è un gruppo abeliano
- $\forall s, t \in K, v \in V \implies s(t \cdot v) = stv = (s \cdot t)v$ (**Associatività scalare**)
- $1 \in K, v \in V \implies 1 \cdot v = v$ (**Elemento neutro**)
- $\forall s, t \in K, v \in V \implies (s + t)v = sv + tv$ (**Distributività vettoriale**)
- $\forall s \in K, v, w \in V \implies s(v + w) = sv + sw$ (**Distributività scalare**)

Inoltre, definiamo $\lambda \in K$ come **scalare** e $v \in V$ come **vettore**.

Definition 59. Spazio di coordinate

Dato un campo K, definiamo come **insieme di coordinate** un insieme i cui elementi sono tuple di n elementi appartenenti a K:

$$K^n = K \times \ldots \times K = \{(t_1, \ldots, t_n) \mid t_1, \ldots, t_n \in K\}$$

Definendo l'operazione di somma come:

$$\begin{cases} v := (t_1, \ldots, t_n) \in K^n \\ w := (s_1, \ldots, s_n) \in K^n \end{cases} \implies v + w := (t_1 + s_1, \ldots, t_n + s_n) \in K^n$$

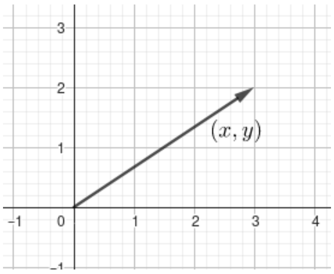
e l'operazione di prodotto per scalare come:

$$\lambda \in K, v := (t_1, \ldots, t_n) \in K^n \implies \lambda v = (\lambda t_1, \ldots, \lambda t_n) \in K^n$$

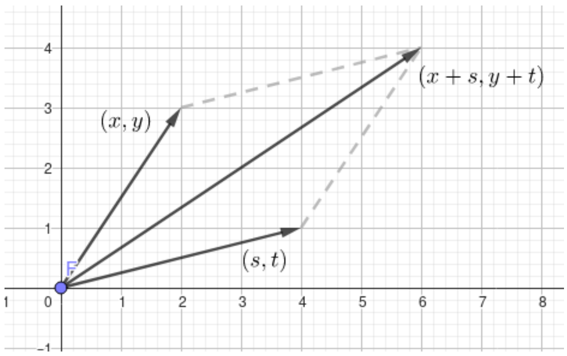
la struttura $(K^n, +, \dot{})$ è uno **spazio vettoriale** *(dimostrazione omessa)*

Interpretazione geometrica:

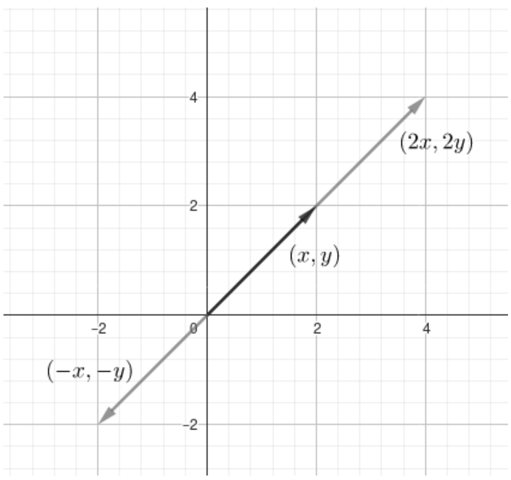
- Dato lo spazio di coordinate $\mathbb{R}^2$ e un vettore $v := (x, y) \in \mathbb{R}^2$, possiamo rappresentare tale vettore come:



- Preso $w := (s, t) \in \mathbb{R}^2$, la somma vettoriale $v + w$ corrisponde al classico *metodo del parallelogramma* utilizzato in fisica elementare:



- Preso $\lambda \in \mathbb{R}$, il prodotto per scalare $\lambda \cdot v$ ha la stessa direzione del vettore v, ma con lunghezza aumentata o diminuita e verso uguale o invertito



Observation 51

Dato uno spazio vettoriale V su un campo K, si ha che:

- $\forall \lambda \in K \implies \lambda \cdot 0_V = 0_V$
- $\forall v \in V \implies 0 \cdot v = 0_V$

Dato $0_V = (0, \ldots, 0) \in V$ è detto **vettore nullo**, ossia l'elemento neutro di V, e dove 0 è l'elemento neutro di K

Dimostrazione:

- Dato $\lambda \in K$, si ha che:

$$\lambda \cdot 0_V = (\lambda \cdot 0, \dots, \lambda \cdot 0) = (0, \dots, 0) = 0_V$$

- Dato $v = (t_1, \dots, t_n) \in V$, si ha che:

$$0 \cdot v = (0 \cdot t_1, \dots, 0 \cdot t_n) = (0, \dots, 0) = 0_V$$

□

Definition 60. Sottospazio vettoriale

Dato un spazio vettoriale V su K, definiamo $W \subseteq V$ come **sottospazio vettoriale** di V su K se:

- $(W, +) \leqslant (V, +)$
- $w \in W, \lambda \in K \implies \lambda w \in W$

Esempi:

- $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ poiché non vale la seconda condizione
- $\mathbb{R}^n_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}^n$ non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ poiché non vale nessuna delle due condizioni

8.1 Span, Generatori e Indipendenza lineare

Definition 61. Span

Dato uno spazio vettoriale V su K e dei vettori $v_1, \dots, v_n \in V$, definiamo **span** (o **sottospazio generato** da $v_1, \dots, v_n$) l'insieme di tutte le **combinazioni lineari** di tali vettori:

$$Span(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$$

Dimostrazione:

- $0_V = 0 \cdot v_1 + \ldots + 0 \cdot v_n \in Span(v_1, \dots, v_n)$
- $v, w \in Span(v_1, \dots, v_n) \implies v + w = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = (\lambda_1 + \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) v_n \implies v + w \in Span(v_1, \dots, v_n)$
- $v \in Span(v_1, \dots, v_n) \implies -v = (-\lambda_1) v_1 + \ldots + (-\lambda_n) v_n \in Span(v_1, \dots, v_n)$
- $v \in Span(v_1, \dots, v_n), c \in K \implies cv = (c\lambda_1) v_1 + \ldots + (c\lambda_n) v_n \in Span(v_1, \dots, v_n)$

□

Definition 62. Insieme di generatori

Dato uno spazio vettoriale V su K, definiamo i vettori $v_1, \dots, v_n \neq 0_V \in V$ come un **insieme di generatori di** V se e solo se ogni vettore di v può essere espresso come una combinazione lineare di $v_1, \dots, v_n$:

$$\forall v \in V, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid v = v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

o analogamente se e solo se:

$$V = Span(v_1, \dots, v_n)$$

Dimostrazione:

- Poiché $v_1, \dots, v_n \in V$, per definizione stessa si ha sempre che $Span(v_1, \dots, v_n) \subseteq V$
- Dunque, affinché le due definizioni siano equivalenti è sufficiente che:

$$\forall v \in V, \exists \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid v = v_1 + \dots + \lambda_n v_n \iff V \subseteq Span(v_1, \dots, v_n)$$

$\square$

Definition 63. Indipendenza lineare

Dato uno spazio vettoriale V su K, definiamo i vettori $v_1, \dots, v_n \neq 0_V \in V$ come **linearmente indipendenti** se e solo se:

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

In caso contrario, vengono detti **linearmente dipendenti**

Observation 52

Sia V uno spazio vettoriale. Dati i vettori $v_1, \dots, v_n \neq 0_V \in V$, si ha che:

$$v_1, \dots, v_n \text{ lin. ind.} \iff v_1, \dots, v_{n-1} \text{ lin. ind.} \land v_n \notin Span(v_1, \dots, v_{n-1})$$

Dimostrazione:

- Nel caso in cui $v_1, \dots, v_n$ siano linearmente indipendenti, si ha che:

  $$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n = 0_V \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$$

  da cui ne segue automaticamente che:

  $$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0_V \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_{n-1} = 0$$

  dunque anche $v_1, \dots, v_{n-1}$ sono linearmente indipendenti
- Supponiamo quindi che $v_n \in Span(v_1, \dots, v_{n-1})$, implicando che:

  $$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-1} v_{n-1} = v_n \iff \mu_1 v_1 + \dots + \mu_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0_V \iff$$

$$\iff \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{n-1} v_{n-1} + (-1) v_n = 0_V$$

dunque $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti. Per contronominale, quindi, si ha che:

$$v_1, \ldots, v_n \text{ lin. indipendenti } \implies v_n \notin Span(v_1, \ldots, v_{n-1})$$

- Viceversa, supponiamo per assurdo che $v_n \notin Span(v_1, \ldots, v_n)$ e che $\exists \lambda_n \neq 0 \mid \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V$. Ne segue che

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V \implies \lambda_n v_n = -\lambda_1 v_1 - \ldots - \lambda_{n-1} v_{n-1} \implies$$

$$\implies v_n = (-\lambda_n^{-1}\lambda_1) v_1 + \ldots + (-\lambda_n^{-1}\lambda_{n-1}) v_{n-1} \implies v_n \in Span(v_1, \ldots, v_{n-1})$$

contraddicendo quindi l'ipotesi $v_n \notin Span(v_1, \ldots, v_n)$, implicando quindi che l'unica possibilità sia $\lambda_n = 0$.

- Di conseguenza, nel caso in cui $v_1, \ldots, v_{n-1}$ siano linearmente indipendenti e $v_n \notin Span(v_1, \ldots, v_n)$, otteniamo che:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n = 0_V \iff \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + 0 \cdot v_n = 0_V \iff$$

$$\iff \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0_V \iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0 = \lambda_n$$

dunque $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti

□

Proposition 71. Estensione a generatore

Dati i vettori **linearmente indipendenti** $v_1, \ldots, v_k \in Span(w_1, \ldots, w_n)$, allora:

- $k \leq n$
- $\exists v_{k+1}, \ldots, v_n \in Span(w_1, \ldots, w_n) \mid Span(v_1, \ldots, v_n) = Span(w_1, \ldots, w_n)$ dove $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti

Dimostrazione:

- Dato $v_1 \neq 0 \in Span(w_1, \ldots, w_n)$, il quale è ovviamente linearmente indipendente con se stesso, si ha che:

$$\exists \lambda_i \neq 0 \in K, i \in [1, n] \mid v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n \neq 0_V$$

- A meno di riordinare i termini, assumiamo che $\lambda_1 \neq 0$

$$v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n \implies \lambda_1 w_1 = v - \lambda_2 w_2 - \ldots - \lambda_n w_n \implies$$

$$\implies w_1 = (\lambda_1^{-1}) v + (-\lambda_1^{-1}\lambda_2) w_2 - \ldots + (-\lambda_1^{-1}\lambda_n) w_n \implies w_1 \in Span(v_1, w_2, \ldots, w_n)$$

- Poiché $w_1 = \mu_1 v_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_n w_n \in Span(v_1, w_2, \ldots, w_n)$, ne segue che:

$$u \in Span(w_1, \ldots, w_n) \iff u = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n =$$

$$= \lambda_1(\mu_1 v_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_n w_n) + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n =$$

$$= (\lambda_1 \mu_1) v_1 + (\lambda_1 \lambda_2 \mu_2) w_2 + \ldots + (\lambda_1 \lambda_n \mu_n) w_n \iff u \in Span(v_1, w_2, \ldots, w_n)$$

dunque si ha che $Span(v_1, w_2, \ldots, w_n) = Span(w_1, \ldots, w_n)$

- Supponiamo quindi induttivamente che dati $v_1, \dots, v_i \in Span(w_1, \dots, w_n)$ linearmente indipendenti, dove $i \leq n$, si ha che:

$$Span(v_1, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n) = Span(w_1, \dots, w_n)$$

- Preso $v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \dots + \lambda_n w_n \in Span(v_1, \dots, v_i, w_{i+1}, \dots, w_n)$, supponiamo per assurdo che $\lambda_{i+1}, \dots, \lambda_n = 0$, implicando che:

$$v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \dots + \lambda_n w_n \implies$$

$$\implies v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + 0 \cdot w_{i+1} + \dots + 0 \cdot w_n \implies$$

$$\implies v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i \implies 0_V = (-1) v_{i+1} + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i$$

contraddicendo l'ipotesi per cui $v_1, \dots, v_k$ siano linearmente indipendenti, dunque l'unica possibilità è

$$\exists \lambda_j \neq 0, j \in [i+1, n] \mid v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \dots + \lambda_n w_n \neq 0_V \iff$$

- A meno di riordinare i termini, assumiamo che $\lambda_{i+1} \neq 0$

$$v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \dots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \dots + \lambda_n w_n \implies$$

$$\implies \lambda_{i+1} w_{i+1} = v_{i+1} - \mu_1 v_1 - \dots - \mu_i v_i - \lambda_{i+2} w_{i+2} - \dots - \lambda_n w_n \implies$$

$$w_{i+1} = (\lambda_{i+1}^{-1}) v_{i+1} + (-\lambda_{i+1}^{-1} \mu_1) v_1 + \dots + (-\lambda_{i+1}^{-1} \mu_i) v_i + (-\lambda_{i+1}^{-1} \lambda_{i+2}) w_{i+2} + \dots + (-\lambda_{i+1}^{-1} \lambda_n) w_n$$

$$\implies w_{i+1} \in Span(v_1, \dots, v_i, v_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_n)$$

- Poiché $w_{i+1} = \mu_1 v_1 + \dots \mu_{i+1} v_{i+1} + \mu_{i+2} w_{i+2} + \dots + \mu_n w_n \in Span(v_1, \dots, v_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_n)$, procedendo analogamente al caso base si ha che::

$$u \in Span(w_1, \dots, w_n) \iff u \in Span(v_1, \dots, v_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_n)$$

dunque si ha che $Span(w_1, \dots, w_n) = Span(v_1, \dots, v_{i+1}, w_{i+2}, \dots, w_n)$, implicando quindi per induzione che

$$Span(w_1, \dots, w_n) = Span(v_1, \dots, v_n)$$

- Supponiamo per assurdo che vi possano essere $k > n$ vettori linearmente indipendenti, dunque che $\exists v_{n+1} \in Span(w_1, \dots, w_n) \mid v_1, \dots, v_n, v_{n+1}$ linearmente indipendenti. Poiché $Span(w_1, \dots, w_n) = Span(v_1, \dots, v_n)$, ne segue che:

$$v_{n+1} \in Span(w_1, \dots, w_n) = Span(v_1, \dots, v_n)$$

contraddicendo l'ipotesi per cui $v_1, \dots, v_n, v_k$ siano indipendenti, dunque l'unica possibilità è che i vettori linearmente indipendenti siano $k \leq n$

$\square$

8.2 Base e Dimensione

Definition 64. Base

Dato uno spazio vettoriale V su K, definiamo i vettori $v_1, \ldots, v_n \neq 0_V \in V$ come una **base** se e solo se sono un **insieme di generatori** e **linearmente indipendenti**

Observation 53

Dato uno spazio vettoriale V, si ha che:

$$v_1, \ldots, v_n \text{ base di } V \iff \forall v \in V, \exists! \lambda_1, \ldots, \lambda_n \mid v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Inoltre, chiamiamo tali unici scalari come **coordinate di** v **in base** $v_1, \ldots, v_n$

Dimostrazione:

- Nel caso in cui $\forall v \in V, \exists! \lambda_1, \ldots, \lambda_n \mid v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$, per definizione stessa di vettori generatori si ha che $v_1, \ldots, v_n$ sono generatori di V
- Inoltre, poiché tali coordinate sono uniche, ne segue naturalmente che:
  $$\exists! \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \in K \mid \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V$$
  dunque $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti
- Viceversa, se $v_1, \ldots, v_n \in V$ sono una base di V, si ha che:
  $$V = Span(v_1, \ldots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K\}$$
- Dato $v \in V$, supponiamo per assurdo che esistano due combinazioni lineari di $v_1, \ldots, v_n$ tali che
  $$\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \implies \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \implies$$
  $$\implies \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n - \lambda_1 v_1 - \ldots - \lambda_n v_n = 0_V \implies (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0_V$$
- Poiché $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti, si ha che:
  $$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0_V \iff (\lambda_1 - \mu_1) = \ldots = (\lambda_n - \mu_n) = 0 \iff$$
  $$\iff \lambda_1 = \mu_1, \ldots, \lambda_n = \mu_n$$

$\square$

Observation 54. Base canonica

Dato uno spazio di coordinate K^n, definiamo i vettori $e_1, \ldots, e_n \in K^n$ come **base canonica di** K^n, dove:

$$e_i = (a_1, \ldots, a_n) \mid \begin{cases} a_j = 0 & \text{se } j \neq i \\ a_j = 1 & \text{se } j = i \end{cases}$$

Dimostrazione:

- Dati $e_1, \dots, e_n \in K^n$ definiti come:
  - $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0, 0)$
  - $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0, 0)$
  - $\vdots$
  - $e_n = (0, 0, 0, \dots, 0, 1)$
- Si ha che:

$$v = (t_1, \dots, t_n) \in K^n \iff v = (t_1, \dots, 0) + \dots + (0, \dots, t_n)$$

$$\iff v = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n \in Span(e_1, \dots, e_n)$$

  dunque tali vettori sono generatori poiché $K^n = Span(e_1, \dots, e_n)$
- Analogamente, si ha che:

$$\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n = (0, \dots, 0) \iff (\lambda_1, 0, \dots, 0) + \dots + (0, 0, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0) \iff \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

  dunque tali vettori sono anche linearmente indipendenti, costituendo quindi una base di K^n

$\square$

Proposition 72

Sia V uno spazio vettoriale. Se $v_1, \dots, v_n$ e $w_1, \dots, w_m$ sono due basi di V, si ha necessariamente che $n = m$.

Dunque tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno la **stessa cardinalità**

Dimostrazione:

- Poiché i due insiemi di vettori sono entrambi base di V, si ha che

$$Span(v_1, \dots, v_n) = V = Span(w_1, \dots, w_m)$$

- Di conseguenza, poiché i vettori $v_1, \dots, v_n \in V = Span(w_1, \dots, w_m)$ sono linearmente indipendenti, ne segue che $n \leq m$
- Analogamente, poiché i vettori $w_1, \dots, w_m \in V = Span(v_1, \dots, v_m)$ sono linearmente indipendenti, ne segue che $m \leq n$
- Dunque, l'unica possibilità è che $n = m$

$\square$

Definition 65. Dimensione di uno spazio vettoriale

Dato uno spazio vettoriale V, definiamo come **dimensione di** V, indicata come $dim(V)$ la **cardinalità di una sua qualsiasi base** (poiché ogni base di V ha la stessa cardinalità).

Nel caso in cui non esista un insieme finito di generatori di V, definiamo la sua dimensione come **infinita**.

Esempi:

- Lo spazio di coordinate K^n e la sua base canonica $e_1, \ldots, e_n$, si ha che:

$$dim(K^n) = n$$

- Lo spazio vettoriale $K[x]$ non può avere base finita: dati $p_1(x), \ldots, p_n(x) \in V$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ si ha che:

$$deg(\lambda_1 p_1(x) + \ldots + \lambda_n p_n(x) \leq max(deg(p_1(x)), \ldots, deg(p_n(x)))$$

  Infatti, in tale esempio la base è data dai monomi $1, x, x^2, \ldots$, dunque non esiste un insieme finito di generatori di $K[X]$

- Lo spazio vettoriale $K^S : \{f : S \to K\}$ ha dimensione finita se e solo se S ha cardinalità finita

Lemma 73. Estensione a base

Sia V uno spazio vettoriale dove $dim(V) = n$. Dati i vettori **linearmente indipendenti** $v_1, \ldots, v_k \in V$, dove $k < n$ allora:

$$\exists v_{k+1}, \ldots, v_n \in V \mid v_1, \ldots, v_n \text{ sono base di } V$$

Dimostrazione:

- Poiché $dim(V) = n$, sia $w_1, \ldots, w_n$ una base qualsiasi di V. Per dimostrazione precedente, dato $k < n$ si ha che:

$$\exists v_{k+1}, \ldots, v_n \in V \mid Span(v_1, \ldots, v_n) = Span(w_1, \ldots, w_n) = V$$

  dove $v_1, \ldots, v_n$ sono anche linearmente indipendenti, dunque costituiscono una base di V

□

Lemma 74. Riduzione a base

Sia V uno spazio vettoriale dove $dim(V) = n$. Dato l'**insieme di generatori** $v_1, \ldots, v_k$ di V, dove $k \geq n$ allora:

$$\exists v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \in \{v_1, \ldots, v_k\} \mid v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \text{ sono base di } V$$

Dimostrazione:

- Dati $v_1, \dots, v_m$ generatori di V, assumiamo che $\exists v_{k_1} \neq 0 \in \{v_1, \dots, v_m\}$, il quale è ovviamente linearmente indipendente con se stesso
- Poiché $Span(v_{i_1}) \subsetneqq Span(v_1, \dots, v_m) = W$, allora
$$\exists v_{i_2} \in \{v_1, \dots, v_m\} \mid v_{i_2} \notin Span(v_{i_1}) \iff v_{i_1}, v_{i_2} \text{ lin. ind.}$$
- Ripetendo tale procedimento n, estendiamo l'insieme $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ di vettori linearmente indipendenti fino a che essi non siano generatori di V:
$$Span(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) = Span(v_1, \dots, v_m) = V$$
dunque $v_{i_1}, \dots, v_{i_n}$ sono una base di V

□

Proposition 75

Sia V uno spazio vettoriale dove $dim(V) = n$. Dati i vettori $v_1, \dots, v_n \in V$, si ha che:
$$v_1, \dots, v_n \text{ lin. ind.} \iff v_1, \dots, v_n \text{ generatori}$$

Dimostrazioni:

- Supponiamo per assurdo che $v_1, \dots, v_n \in V$ siano linearmente indipendenti ma che non siano generatori di V, dunque $Span(v_1, \dots, v_n) \subsetneqq V$. Ne segue che:
$$\exists v_{n+1} \in W \mid v_{n+1} \notin Span(v_1, \dots, v_n) \implies v_1, \dots, v_{n+1} \text{ lin. ind.}$$
contraddicendo la condizione per cui $dim(V) = n$ implica che non possano esistere più di n vettori linearmente indipendenti (sezione 8.1), dunque l'unica possibilità è che $v_1, \dots, v_n$ siano anche generatori di V
- Viceversa, supponiamo per assurdo che $v_1, \dots, v_n$ siano generatori di V ma non linearmente indipendenti. Ne segue che:
$$\exists \lambda_i \neq 0 \in K, i \in [1, n] \mid \lambda_1 v_1 + \dots \lambda_i v_i + \dots + \lambda_n v_n = 0_V \implies$$
$$v_i = (\lambda_i^{-1}\lambda_1)v_1 + \dots + (\lambda_i^{-1}\lambda_n)v_n = 0_V \implies w_i \in Span(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$
dove $\hat{v}_i$ indica che tale elemento è escluso
- A questo punto, si ha che:
$$u \in Span(v_1, \dots, v_n) \iff u \in Span(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$
da cui otteniamo che:
$$W = Span(v_1, \dots, v_n) = Span(v_1, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n)$$
contraddicendo la condizione per cui $dim(V) = n$ implica che non possano esistere meno di n generatori di V, dunque l'unica possibilità è che $v_1, \dots, v_n$ siano anche linearmente indipendenti

□

8.2.1 Formula di Grassman

Theorem 76. Formula di Grassmann

Dato uno spazio vettoriale W su K e dati due sottospazi $U, V \subseteq W$, i seguenti insiemi:

$$U + V : \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

$$U \cap V : \{w \mid w \in U, w \in V\}$$

sono due sottospazi di W, dove:

$$dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$$

Dimostrazione:

- Dati: $k := dim(U \cap V), m := dim(U), n := dim(V)$, siano:
  - $w_1, \dots, w_k$ una base di $U \cap V$
  - $\mathcal{B}_1 := w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_m$ una base di U
  - $\mathcal{B}_2 := w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ una base di V
- Consideriamo quindi il seguente insieme di vettori:

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_m, v_{k+1}, \dots, v_n$$

- Dati $u \in Span(B_1) = U$ e $v \in Span(B_2) = V$, dove

$$u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i + \sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j u_j \qquad v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j v_j$$

  si ha che :

$$u + v \in U + V \iff u + v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i + \sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j u_j + \sum_{i=1}^{k} \mu_i w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j v_j \iff$$

$$\iff u + v = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) w_i + \sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j u_j + \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j v_j \iff u + v \in Span(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$$

  dunque $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sono generatori di $U + V$
- Consideriamo quindi $0_W \in U + V$ scritto come combinazione lineare di tale base

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i w_i + \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j + \sum_{h=k+1}^{n} \eta_h v_h = 0_W$$

- Posti:

$$a := \sum_{i=1}^{k} \beta_i w_i \qquad b := \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j \qquad c := \sum_{h=k+1}^{n} \eta_h v_h$$

si ha che:

$$a + b + c = 0_W \iff b = -a - c \implies b \in Span(\mathcal{B}_2) = V$$

inoltre, poiché $b \in Span(u_{k+1}, \ldots, u_m) \subsetneq U \implies b \in U$, ne segue che $b \in U \cap V$

- Di conseguenza, si ha che:

$$\begin{cases} b := \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j \\ b \in U \cap V \iff b = \sum_{t=0}^{k} \alpha_t w_t \end{cases} \implies \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j = \sum_{t=0}^{k} \alpha_t w_t \implies$$

$$\implies \sum_{t=0}^{k} \alpha_t w_t - \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j = 0_W$$

- Poiché $\mathcal{B}_1 = w_1, \ldots, w_k, u_{k+1}, \ldots, u_m$ è una base di U, dunque sono vettori linearmente indipendenti, ne segue che:

$$\sum_{t=0}^{k} \alpha_t w_t - \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j = 0_W \iff \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \gamma_{k+1} = \ldots = \gamma_m = 0$$

- In particolare, quindi, otteniamo che $\gamma_{k+1} = \ldots = \gamma_m = 0 \implies b = 0_W$, da cui traiamo che:

$$a + b + c = 0_W \implies a + 0_W + c = 0_W \implies a + c = 0_W$$

- A questo punto, poiché:

$$a + c = 0_W \implies \sum_{i=1}^{k} \beta_i w_i + \sum_{h=k+1}^{n} \eta_h v_h = 0_W$$

e poiché $\mathcal{B}_2 := w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ è una base di V, dunque sono vettori linearmente indipendenti, ne segue che:

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i w_i + \sum_{h=k+1}^{n} \eta_h v_h = 0_W \iff \beta_1 = \ldots = \beta_k = \eta_{k+1} = \ldots = \eta_n = 0$$

concludendo quindi che i vettori $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = w_1, \ldots, w_k, u_{k+1}, \ldots, u_m, v_{k+1}, \ldots, v_n$ siano anche linearmente indipendenti, costituendo quindi una base di $U + V$

- Infine, si ha che:

$$dim(U + V) = dim(Span(w_1, \ldots, w_k, u_{k+1}, \ldots, u_m, v_{k+1}, \ldots, v_n)) =$$

$$= k + (m - k) + (n - k) = m + n - k = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$$

$\square$

8.3 Trasformazioni lineari

Definition 66. Trasformazione lineare

Dati due spazi vettoriali V e W definiti sullo stesso campo K, la funzione $f : V \to W$ viene detta **trasformazione lineare** (o morfismo tra spazi vettoriali) se:

- $\forall v, v' \in V, f(v + v') = f(v) + f(v')$
- $\forall \lambda \in K, v \in V, f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Lemma 77

Dato uno spazio vettoriale V si ha che:

$$dim(V) = n \implies V \cong K^n$$

Dimostrazione:

- Dato $dim(V) = n$, sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V. Definiamo la funzione

  $$\varphi : K^n \to V : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1 v_1 + \ldots + t_n v_n)$$

  dunque φ mappa ogni vettore di K^n ad una combinazione lineare di V

- Poiché:

  $$v_1, \ldots, v_n \text{ base di } V \iff \forall v \in V, \exists! \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \mid v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

  e poiché $dim(K^n) = n$, la funzione φ risulta essere automaticamente biettiva:

  $$\forall v := \varphi(u) \in V, \exists! u := (t_1, \ldots, t_n) \in K^n \mid \varphi(u) = t_1 v_1 + \ldots + t_n v_n$$

- Dati quindi $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$, si ha che:

  $$\varphi(x+y) = (x_1+y_1)v_1+\ldots+(x_n+y_n)v_n = x_1v_1+\ldots+x_nv_n+y_1v_1+\ldots+y_nv_n = \varphi(x)+\varphi(y)$$

- Dato invece $\lambda \in K$, si ha che:

  $$\varphi(\lambda v) = \lambda x_1 v_1 + \ldots \lambda x_n v_n = \lambda(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = \lambda \varphi(x)$$

- Dunque, concludiamo che φ sia un isomorfismo e di conseguenza che:

  $$V \cong K^n$$

$\square$

Theorem 78

Dati due spazi vettoriali V e W definiti sullo stesso K, si ha che:

$$V \cong W \iff dim(V) = dim(W)$$

Dimostrazione:

- Nel caso in cui $dim(V) = dim(W) = n$ dove $n \in \mathbb{N}$, per il lemma precedente si ha che:
$$dim(V) = n, dim(W) = n \implies V \cong K^n, W \cong K^n \implies$$
$$\implies V \cong K^n, K^n \cong W \implies V \cong W$$

- Viceversa, supponiamo che $V \cong W$, dove f è l'isomorfismo che rende V isomorfo a W. Sia inoltre $v_1, \ldots, v_n$ la base di V.

- Poiché f è un morfismo suriettivo, si ha che:
$$\forall w \in W, \exists v \in V \mid w = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n) =$$
$$f(\lambda_1 v_1) + \ldots + f(\lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n)$$
dunque, poiché anche $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ sono vettori di W, ne segue che $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ siano generatori di W

- Inoltre, poiché f è iniettiva se e solo se $Ker(f) = \{0_V\}$ e poiché ne segue che:
$$\mu_1 f(v_1) + \ldots + \mu_n f(v_n) = 0_W \iff f(\mu_1 v_1) + \ldots + f(\mu_n v_n) = 0_W \iff$$
$$\iff f(\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n) = 0_W \iff \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_n v_n = 0_V \iff \mu_1 = \ldots = 0$$
dunque $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ sono anche linearmente indipendenti, costituendo quindi una base di W, implicando quindi che $dim(W) = n = dim(V)$

$\square$

Definition 67. Spazio quoziente

Dato uno spazio vettoriale V e un sottospazio $W \subseteq V$, la struttura $(V/W, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, detto **spazio quoziente**, dove la somma è definita come $[v] + [v'] = [v + v']$ e il prodotto per scalare è definito come $\lambda[x] = [\lambda x]$.

Dimostrazione:

- La dimostrazione della buona definizione della somma risulta analoga a quella del normale gruppo quoziente

- Dimostriamo quindi che il prodotto per scalare sia ben definito
$$[v] = [v'] \implies v' - v \in W \implies \lambda(v' - v) \in W \implies [\lambda v] = [\lambda v']$$

- La dimostrazione di $(V/W, +, \cdot)$ spazio vettoriale viene omessa poiché banale

$\square$

Theorem 79. Dimensione spazio quoziente

Dato uno spazio vettoriale V e un sottospazio $W \subseteq V$, si verifica che

$$dim(V/W) = dim(V) - dim(W)$$

Dimostrazione:

- Siano $n := dim(V)$, $k := dim(W)$ e $w_1, \dots, w_k$ una base di W.
- Poiché $k \leq n$, è possibile estendere con $n-k$ vettori di V l'insieme $w_1, \dots, w_k$ fino a formare una base di V:
$$\exists v_{k+1}, \dots, v_n \in V \mid w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n \text{ base di V}$$
- Dato $v \in V = Span(w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$, si ha che:
$$v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n \implies$$
$$\implies [v] = \lambda_1 [w_1] + \ldots + \lambda_k [w_k] + \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n]$$
- Poiché:
$$w_1, \dots, w_k \in W \iff w_1 \sim 0_V, \dots, w_k \sim 0_V \iff [0_V] = [w_1] = \ldots = [w_k]$$
si ha che:
$$[v] = \lambda_1 [w_1] + \ldots + \lambda_k [w_k] + \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n] \iff$$
$$\iff [v] = \lambda_1 [0_V] + \ldots + \lambda_k [0_V] + \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n] \iff$$
$$\iff [v] = \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n]$$
dunque, $[v_{k+1}], \dots, [v_n]$ sono generatori di V/K
- Preso $[0_V] \in V/W$, si ha che:
$$[0_V] = \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n] \iff [0_V] = [\lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n] \iff$$
$$\iff u := \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n \in W$$
- Poiché anche $w_1, \dots, w_k$ è base di W e poiché $u \in W$, si ha che:
$$u = \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k \iff$$
$$\iff \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k \iff$$
$$\iff \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k - \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V \iff$$
$$\iff \mu_1 = \ldots = \mu_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$
dato che $w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ sono base di V, dunque linearmente indipendenti.
- In particolare, quindi, dati $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ ne segue che:
$$[0_V] = \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n] \iff \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$
implicando che anche $[v_{k+1}], \dots, [v_n]$ siano linearmente indipendenti, costituendo quindi base di V/W, la cui dimensione risulta essere:
$$dim(V/W) = dim(Span([v_{k+1}], \dots, [v_n])) = n - k = dim(V) - dim(W)$$

□

8.3.1 Teorema del Rango

Proposition 80. Nucleo ed Immagine di una trasformazione lineare

Data una trasformazione lineare $f : V \to W$, il nucleo $Ker(f) \subseteq V$ e l'immagine $Im(f) \subseteq W$ di f corrispondono a:

$$Ker(f) : \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$$

$$Im(f) : \{w \in W \mid f(v) = w, \exists v \in V\}$$

dove entrambi sono sottospazi vettoriali rispettivamente di V e W

Dimostrazione:

- Sappiamo già $Ker(f) \trianglelefteq V$ e che $Im(f) \leqslant W$
- Verifichiamo quindi che siano chiusi nel prodotto per scalare

$$v \in Ker(f), \lambda \in K \implies f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda 0_W = 0_W \implies \lambda v \in Ker(f)$$

$$w = f(v) \in Im(f), \lambda \in K \implies \lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v) \implies \lambda v \in Im(f)$$

□

Observation 55. Teorema fondamentale di isomorfismo

Data una trasformazione lineare $f : V \to W$, si ha che

$$V/Ker(f) \cong Im(f)$$

(dimostrazione analoga agli altri casi del teorema)

Theorem 81. Teorema del Rango

Siano V e W due spazi vettoriali. Data una trasformazione lineare $f : V \to M$, definiamo come **rango di** f la dimensione della sua immagine, la quale equivale a:

$$rk(f) := dim(Im(f)) = dim(V) - dim(Ker(f))$$

Dimostrazione:

- Poiché $f : V \to W$ è una trasformazione lineare, per il teorema fondamentale di isomorfismo si ha che $V/Ker(f) \cong Im(f)$, da cui ne segue automaticamente che:

$$V/Ker(f) \cong Im(f) \iff dim(V/Ker(f)) = dim(Im(f)) \iff$$

$$\iff dim(V) - dim(Ker(f)) = dim(Im(f))$$

□

8.4 Spazi affini, Sottospazi affini e Giacitura

Definition 68. Spazio affine

Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$, definiamo come **spazio affine a** V la struttura (A, V, ϕ), dove:

- Gli elementi $P \in A$ vengono detti **punti**
- La funzione $\phi : A \times V \to A$ gode delle seguenti proprietà
  - **Associatività mista:**
  $$\forall P \in A, \forall v, w \in V, \phi(\phi(P, v), w) = \phi(P, (v + w))$$
  - **Elemento nullo destro:**
  $$\forall a \in A, \exists 0_V \in V \mid \phi(a, 0_V) = a$$
  - **Azione libera e transitiva:**
  $$\forall P \in A, \text{ la funzione } \phi_P : V \to A : v \to \phi(P, v) \text{ è biettiva}$$

Detto in parole molto povere (e poco esatte) uno spazio affine A è una **traslazione totale di uno spazio vettoriale** V dove ogni punto del primo corrisponde biunivocamente ad un punto dell'altro

Definition 69. Sottospazio affine e Giacitura

Dato uno spazio vettoriale V, un suo sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ e un vettore $v \in V$, definiamo come **sottospazio affine** l'insieme di **punti** generato da:

$$U = v + W : \{v + w \mid w \in W\}$$

dove W viene definito **giacitura** di U, indicato con $Giac(U)$ e dove:

$$dim(U) = dim(Giac(U)) = dim(W)$$

In altre parole, il sottospazio affine U corrisponde ad una **traslazione** del sottospazio W tramite il vettore v. Ogni sottospazio affine può essere visto come una **classe laterale di un sottospazio** (poiché l'operazione primaria è la somma).

8.5 Prodotto scalare e Spazio ortogonale

Definition 70. Prodotto scalare

Dato lo spazio di coordinate K^n, definiamo come **prodotto scalare** l'operazione:

$$\cdot : K^n \times K^n \to K : ((\lambda_1, \ldots, \lambda_n), (\mu_1, \ldots, \mu_n)) \mapsto v \cdot v' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$$

la quale gode delle seguenti proprietà:

- $u, v \in K^n \implies u \cdot v = v \cdot u$ (**Simmetria**)
- $u, v, w \in K^n \implies (v + w)u = u(v + m) = vu + vu$ (**Distributività**)
- $u, v \in K^n, \lambda \in K \implies (\lambda u)v = u(\lambda v) = \lambda uv$ (**Linearità per scalare**)

Attenzione: il prodotto scalare differisce dal prodotto **per** scalare

Definition 71. Norma di un vettore

Dato $v \in \mathbb{R}^n$, definiamo la **norma (o lunghezza)** di tale vettore come

$$||v|| := \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x_1^2 + \ldots x_n^2}$$

Theorem 82

Dati $u, v \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo $0 < \theta < \pi$ interno tra u e v, si ha che

$$\cos\theta = \frac{uv}{||u||\,||v||}$$

Inoltre, si verifica che:

- $\theta < \frac{\pi}{2} \iff uv > 0$
- $\theta = \frac{\pi}{2} \iff uv = 0$
- $\theta > \frac{\pi}{2} \iff uv < 0$

Dimostrazione:

- Tramite il Teorema del Coseno (normalmente utilizzato per calcolare la lunghezza di un lato di un triangolo qualsiasi sapendo la lunghezza degli altri due lati), si ha che:

$$||v - u||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2\,||u||\,||v|| \cos\theta \iff$$
$$\iff ||v - u||^2 - ||u||^2 - ||v||^2 = -2\,||u||\,||v|| \cos\theta \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2 - \sum_{j=1}^{n} x_n^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = -2\,||u||\,||v||\cos\theta \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2y_ix_i + x_i^2) - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = -2\,||u||\,||v||\cos\theta \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{h=1}^{n} y_hx_h + \sum_{t=1}^{n} +x_t^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = -2\,||u||\,||v||\cos\theta \iff$$

$$\iff \sum_{h=1}^{n} y_hx_h = ||u||\,||v||\cos\theta \iff \sum_{h=1}^{n} y_hx_h = ||u||\,||v||\cos\theta \iff$$

$$\iff uv = ||u||\,||v||\cos\theta \iff \frac{uv}{||u||\,||v||} = \cos\theta$$

□

Proposition 83. Relazione di ortogonalità

Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$. Il vettore u viene detto "**ortogonale a** v", indicato come $v \perp w$, se e solo se:

$$u \perp v \iff uv = 0$$

Nota: l'ortogonalità è una generalizzazione del concetto di perpendicolarità nell'ambito dell'algebra lineare

Dimostrazione:

- Per definizione stessa di perpendicolarità, l'essere perpendicolari implica che vi sia un angolo retto tra due linee. Generalizzando tale concetto all'ortogonalità tra vettori, dato l'angolo $0 < \theta < \pi$ interno a u e v, per il teorema precedente si ha che:

$$uv = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \iff \cos(\theta) = 1 \iff \text{angolo retto tra } u \text{ e } v$$

□

Definition 72. Sottospazio ortogonale

Dato il sottospazio vettoriale $V \subseteq K^n$, definiamo $V^\perp$ il **sottospazio ortogonale a** V come:

$$V^\perp = \{v \in K^n \mid vw = 0, \forall w \in V\}$$

dove in particolare si ha che:

$$dim(K^n) = dim(V) + dim(V^\perp)$$

Dimostrazione:

- $V^\perp \leqslant K^n$
  - $\forall v \in V, 0_{K^n} \cdot v = 0 \implies 0_{K^n} \in V^\perp$
  - $\forall v \in V, w_1, w_2 \in V^\perp \implies (w_1 + w_2)v = w_1v + w_2v = 0 + 0 = 0 \implies w_1 + w_2 \in V^\perp$
  - $\forall v \in V, w \in V^\perp \implies (-w)v = -(wv) = 0 \implies -w \in V^\perp$
- $\forall v \in V, w \in V^\perp, \lambda \in K \implies (\lambda w)v = \lambda(wv) = 0 \implies \lambda w \in V^\perp$
- Poiché $V \cap V^\perp = \{0_{K^n}\} \implies dim(V \cap V^\perp) = 0$ e poiché $K^n = V + V^\perp$, per la formula di Grassman ne segue che:

  $dim(K^n) = dim(V+V^\perp) = dim(V)+dim(V^\perp)-dim(V\cap V^\perp) = dim(V)+dim(V^\perp)$

$\square$

Capitolo 9

Matrici

Definition 73. Matrici

Dati $m, n \neq 0 \in \mathbb{N}$, una **matrice** $m \times n$ **a coefficienti in un campo** K è una griglia con m righe e n colonne, le cui entrate sono elementi in K

$$A \in Mat_{m\times n}(K) \implies A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

dove $Mat_{m\times n}(K) = \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{\text{m volte}} = \underbrace{K^m \times \ldots \times K^m}_{\text{n volte}}$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Definition 74. Vettori colonna e Vettori riga

Definiamo una matrice $1 \times n$ come **vettore riga**

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in Mat_{1\times n}(K) = K^n$$

e analogamente definiamo una matrice $m \times 1$ come **vettore colonna**

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in Mat_{m\times 1}(K) = K^m$$

Observation 56

Una matrice $m \times n$ può essere definita come un **vettore di** m **vettori riga aventi** n **elementi** (che vengono indicati con un pedice)

$$A_1, \dots, A_n \in K^m \implies A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

o come un **vettore di** n **vettori colonna aventi** m **elementi** (che vengono indicati con un apice)

$$A^1, \dots, A^m \in K^n \implies A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}$$

Observation 57

La struttura $(Mat_{m\times n}(K), +, \cdot)$ è uno **spazio vettoriale** di dimensione:

$$dim(Mat_{m\times n}(K)) = m \cdot n$$

e la cui **base canonica** è composta dalle matrici:

$$e_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \Bigg| \begin{cases} a_{k,h} = 0 & \text{se } k \neq i \vee h \neq j \\ a_{k,h} = 1 & \text{se } k = i, h = j \end{cases}$$

Dimostrazione:

- Date $A, B \in Mat_{m\times n}(K)$ e $\lambda \in K$, le operazioni di somma e prodotto sono definite come:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- Le dimostrazioni di $(Mat_{m\times n}(K), +, \cdot)$ spazio vettoriale e della base canonica vengono omesse poiché analoghe alle dimostrazioni per K^n

□

Esempio:

- La base canonica di $Mat_{2\times 2}(A)$ corrisponde a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observation 58

Dato lo spazio $Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

$$Mat_{m\times n}(K) \cong K^{m\cdot n}$$

Dimostrazione:

- Poiché $dim(Mat_{m\times n}(K)) = m\cdot n$ e $dim(K^{m\cdot n}) = m\cdot n$, per dimostrazione precedente si ha che:

$$dim(Mat_{m\times n}(K)) = dim(K^{m\cdot n}) \iff Mat_{m\times n}(K) \cong K^{m\cdot n}$$

$\square$

Definition 75. Prodotto tra matrici

Sia $A = (A_1, \dots, A_h) \in Mat_{h\times m}(K)$ e sia $B = (B^1, \dots, B^n) \in Mat_{m\times n}(K)$.

Definiamo come **prodotto tra matrici** la trasformazione lineare:

$$\cdot : Mat_{h\times m}(K) \times Mat_{m\times n}(K) \to Mat_{h\times n}(K) : (A, B) \mapsto AB$$

dove :

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B^1 & \cdots & A_1B^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_hB^1 & \cdots & A_hB^n \end{pmatrix}$$

Attenzione: affinché il prodotto sia ben definito è **necessario** che la quantità di colonne di A sia uguale alla quantità di righe di B

Esempi:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5 + 2\cdot 7 & 1\cdot 6 + 2\cdot 8 \\ 3\cdot 5 + 4\cdot 7 & 3\cdot 6 + 4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1 + 6\cdot 3 & 5\cdot 2 + 6\cdot 4 \\ 7\cdot 1 + 8\cdot 3 & 7\cdot 2 + 8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 32 & 46 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3 + 2\cdot(-2) & 1\cdot 6 + 2\cdot 0 & 1\cdot 7 + 2\cdot 8 \\ 4\cdot 3 + 5\cdot(-2) & 4\cdot 6 + 5\cdot 0 & 4\cdot 7 + 5\cdot 8 \end{pmatrix} =$
  $= \begin{pmatrix} -1 & 6 & 23 \\ 2 & 24 & 68 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \nexists$ poiché la quantità di colonne nella prima non corrisponde a quella delle righe della seconda

Observation 59

Date tre matrici A, B, C ed uno scalare λ, se i prodotti sono **ben definiti** si ha che:

- $(AB)C = ABC = A(BC)$
- $A(B+C) = AB + AC$
- $(A+B)C = AC + BC$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Corollary 25

Uno spazio vettoriale $Mat_{n\times n}(K)$ (anche detto spazio delle matrici quadrate di ordine n) è un **anello non commutativo**, dove l'elemento neutro è:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.1 Rango di una matrice

Definition 76. Trasformazione lineare di una matrice

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo la **trasformazione lineare associata ad** A come

$$L_A : K^n \to K^m : x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to Ax$$

dove:

$$L_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

Definition 77. Sistema lineare e Matrice completa

Data una **matrice di coefficienti** A ed un **vettore di incognite** b, definiti come:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

l'equazione $Ax = b$ corrisponde ad un **sistema lineare di equazioni cartesiane** nella forma:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

il quale è rappresentato fedelmente dalla seguente **matrice completa**:

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Dimostrazione:

- Si nota facilmente che:

$$Ax = b \iff \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_n \end{cases}$$

$\square$

Proposition 84

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

- $Im(L_A) = Span(A^1, \ldots, A^n)$
- $Ker(L_A) = Span(A_1, \ldots, A_m)^\perp$

Dimostrazione:

- Data $A \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

$$L_A(x) \in Im(L_A) \iff L_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 A^1 + \ldots x_n A^n \iff L_A(x) \in Span(A^1, \ldots, A^n)$$

dunque si ha che $Im(L_A) = Span(A^1, \ldots, A^n)$

- Inoltre, notiamo che:

$$Ker(L_A) = \{x \in K^n \mid L_A(x) = Ax = 0_{K^m}\} =$$

$$= \left\{ x \in K^n \mid \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} x = 0_{K^m} \right\} = Span(A_1, \ldots, A_m)^\perp$$

dunque $Ker(L_A)$ contiene tutte i vettori $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ che sono soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

□

Definition 78. Rango di una matrice

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **rango di** A il rango della sua trasformazione lineare associata:

$$rk(A) := rk(L_A)$$

Proposition 85

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

$$rk(A) = n - dim(Ker(L_A)) = dim(Span(A^1, \ldots, A^n)) = dim(Span(A_1, \ldots, A_m))$$

Dimostrazione:

- Poiché $rk(A) := rk(L_A)$ e poiché $L_A : K^n \to K^m$, per il teorema del rango si ha che:

$$rk(A) := rk(L_A) = dim(L_A) = dim(K^n) - dim(Ker(L_A)) = n - dim(Ker(L_A))$$

- Inoltre, per dimostrazioni precedenti si ha che:

$$dim(Span(A^1, \ldots, A^n)) = dim(Im(L_A)) = n - dim(Ker(L_A)) =$$

$$= n - dim(Span(A_1, \ldots, A_n)^\perp) = dim(Span(A_1, \ldots, A_m))$$

□

Corollary 26

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

$$0 \leq rk(A) \leq min(m, n)$$

9.1.1 Riduzione a scala di una matrice

Definition 79. Operazioni elementari su matrici

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **operazioni elementari** su righe e colonne le seguenti tre operazioni:

1. **Scambiare** due righe (o colonne) tra di loro
2. **Moltiplicare** una riga (o colonna) per $\lambda \in K^*$
3. **Sommare** ad una riga (o colonna) un multiplo di un'altra riga (o colonna)

Definition 80. Matrici equivalenti

Date due matrici $A, B \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo tali matrici come **equivalenti** se sono uguali se è possibile ottenere l'una partendo dall'altra utilizzando **solo operazioni elementari**.

In particolare, se vengono utilizzate solo operazioni su righe tali matrici vengono dette **equivalenti per righe**, mentre vengono dette **equivalenti per colonne** se vengono utilizzate solo operazioni su colonne.

Observation 60

Date due matrici $A, B \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

- Se A e B sono **equivalenti per righe**, allora

$$Ker(L_A) = Ker(L_B), Im(L_A) \neq Im(L_B)$$

- Se A e B sono **equivalenti per colonne**, allora

$$Ker(L_A) \neq Ker(L_B), Im(L_A) = Im(L_B)$$

In entrambi i casi si verifica che:

$$rk(A) = rk(B)$$

Dimostrazione:

- Basti pensare che effettuando solo operazioni su righe non si vadano ad alterare i vettori $x \in Ker(L_A)$ in grado di risolvere il sistema $Ax = 0$, dunque $Ker(L_A) = Ker(L_B)$, mentre i vettori $b \in Im(L_A)$ generati dal sistema $Ax = b$ vanno ad essere modificati, dunque $Im(L_A) \neq Im(L_B)$
- Analogamente, effettuando solo operazioni su colonne non si vanno ad alterare i vettori $b \in Im(L_A)$ generati dal sistema $Ax = b$, dunque $Im(L_A) = Im(L_B)$, mentre i vettori $x \in Ker(L_A)$ risolventi il sistema $Ax = b$ vanno ad essere modificati, dunque $Ker(L_A) \neq Ker(L_B)$
- Nel caso in cui il nucleo non venga alterato, si ha che:

$$rk(A) = dim(Im(L_A)) = n - dim(Ker(L_A)) =$$

$$= n - dim(Ker(L_B)) = dim(Im(L_B) = rk(B)$$

mentre nel caso in cui l'immagine non venga alterata si ha che:

$$rk(A) = dim(Im(L_A)) = dim(Im(L_B)) = rk(L_B)$$

□

Definition 81. Pivot e Matrice a scala

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **pivot** di una riga il primo elemento non nullo a partire da sinistra di tale riga.

Inoltre, la matrice A viene detta **matrice a scala** se $\forall i \in [i, m]$ si verifica che il pivot della riga A_i è più a sinistra pivot della riga A_{i+1}

Esempi:

- Le seguenti matrici sono a scala, i cui pivot sono cerchiati:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- Le seguenti matrici non sono a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Method 4. Algoritmo di Gauss-Jordan

Ogni matrice $A \in Mat_{n\times m}(K)$ può essere ridotta ad una **matrice a scala** $S \in Mat_{n\times m}(K)$ tramite il seguente algoritmo:

1. Sia A^j, dove $j \in [1, n]$ la prima colonna a partire da sinistra non nulla, ossia $\exists i[1, n] \mid c := a_{i,j} \neq 0$
2. Se $c \notin A_1$, allora la i-esima riga contenente c viene scambiata con A_1
3. Per $k = 2, \dots, m$, sottraiamo λA_1 alla riga A_k, dove λ è uno scalare scelto apposta in modo da annullare l'i-esimo elemento della
4. Se la matrice risultante non è ancora ridotta a scala, allora viene ripetuto ricorsivamente l'algoritmo su A_2, ignorando le prime i colonne, e così via

Theorem 86. Riduzione a scala

Sia $A = (A^1, \dots, A^n) \in Mat_{m\times n}(K)$ e sia $S = (S^1, \dots, S^n)$ la sua versione ridotta a scala.

Se $S^{j_1}, \dots, S^{j_h}$ sono le colonne di S contenenti i pivot della scala, allora $A^{j_1}, \dots, A^{j_h}$ sono una base di $Im(A) = Span(A^1, \dots, A^n)$, implicando che

$$h = rk(S) = rk(A)$$

Esempio:

- Consideriamo il seguente sistema e la matrice completa ad essa associata:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \implies A_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

  dove il vettore incognito b viene omesso dalla matrice completa in quanto $b = 0_{K^m}$

- Date le righe $R_1, \dots, R_3$ della matrice, procediamo quindi con l'algoritmo di Gauss-Jordan fino ad ottenere la versione a scala di tale matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 4R_1, R_3 - 7R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dunque, otteniamo che A^1 e A^2 sono una base di $Im(L_A) = Span(A^1, A^2, A^3)$ e il rango della matrice corrisponde a $rk(A) = 2$

- Riducendo ancora tale matrice (mantenendo la forma a scala), si ha che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dunque, il sistema di partenza risulta essere equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

- Poiché abbiamo svolto solo operazioni per riga, la matrice originale e la sua versione a scala risultano essere equivalenti per righe, implicando che il nucleo non sia stato alterato.
- Di conseguenza, risolvendo tale sistema in funzione di una variabile ausiliaria t, siamo in grado di ottenere una base di $Ker(L_A)$:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \implies \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Infine, quindi, concludiamo che:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ base di } Im(L_A) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ base di } Ker(L_A)$$

9.2 Teorema di Rouché-Capelli

Theorem 87. Teorema di Rouché-Capelli

Data una matrice di coefficienti $A \in Mat_{m\times n}(K)$ e un vettore di coefficienti $b \in K^m$, il sistema $Ax = b$ **ammette soluzioni** se e solo se $rk(A) = rk(A_b)$, dove A_b è la matrice completa associata al sistema.

$$\exists x \in K^n \mid Ax = b \iff rk(A) = rk(A_b)$$

Dimostrazione:

- Dato il sistema $Ax = b$, si verifica che:

$$\exists x \in K^n \mid Ax = b \iff \exists x_1, \dots, x_n \in K \mid x_1 A^1 + \dots + x_n A^n = b \iff$$

$$\iff b \in Span(A^1, \dots, A^n) \iff Span(A^1, \dots, A^n) = Span(A^1, \dots, A^n, b) \iff$$

$$\iff dim(Span(A^1, \dots, A^n)) = dim(Span(A^1, \dots, A^n, b)) \iff rk(A) = rk(A_b)$$

□

Proposition 88

Dato il sistema $Ax = b$, l'**insieme delle soluzioni** V (se esistenti) è un **sottospazio affine** di $Ker(L_A)$ di dimensione $dim(V) = n - rk(A)$, dove in particolare si ha che:

- Se $rk(A) = rk(A_b) = n$, la soluzione al sistema è **unica** e il sistema viene detto **determinato**

$$\exists! x \in K^n \mid Ax = b \iff rk(A) = rk(A_b) = n$$

- Se $rk(A) = rk(A_b) \neq n$, allora il sistema ammette **infinite soluzioni** e il sistema viene detto **indeterminato**

$$\exists x \in K^n \mid Ax = b \iff rk(A) = rk(A_b) \neq n$$

Dimostrazione:

- Dato $V = \{x \in K^n \mid Ax = b\}$ l'insieme delle soluzioni del sistema (ipotizzando che ne esista almeno una), si ha che:

$$x_0, x \in V \iff Ax_0 = b = Ax \iff Ax_0 = Ax \iff A(x - x_0) = 0$$

$$\iff x' - x_0 \in Ker(L_A) \iff x' \in x_0 + Ker(L_A)$$

  dunque V è un sottospazio affine a $Ker(L_A)$ traslato da una soluzione particolare x_0 del sistema

- In quanto sottospazio affine del nucleo, ne segue che:

$$dim(V) = dim(Ker(L_A)) = dim(K^n) - dim(Im(L_A)) = n - dim(Im(L_A)) =$$

$$= n - rk(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } rk(A) = n \\ > 1 & \text{se } rk(A) \neq n \end{cases}$$

- Dunque, nel caso in cui $rk(A) = n$ l'unica soluzione all'interno di V sarà x_0, altrimenti esisteranno infinite soluzioni generate dalla traslazione della base di $Ker(L_A)$

□

Esempi:

1. - Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} w + 2x + z = 1 \\ 2w + 4x + y = 3 \\ w + 2x + y - z = 2 \end{cases} \implies A_b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1, R_2 - 2R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_1, R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Dunque, poiché $rk(A) = rk(A_b) = 2 \neq 4$, il sistema ammette infinite soluzioni e le colonne A^1, A^3 sono base di $Im(L_A)$. Inoltre, il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} w + 2x + z = 1 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} w = 1 - 2x - z \\ y = 1 + 2z \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} w = 1 - 2t_1 - t_2 \\ x = t_1 \\ y = 1 + 2t_2 \\ z = t_1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. - Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 5z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \end{cases} \implies A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 + R_1}$$

$$\xrightarrow{R_2 + R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- Poiché $rk(A) \neq rk(A_b)$, il sistema non ammette soluzioni

3. - Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + ky = 4 - k \\ kx + 4y = 4 \end{cases} \implies A_b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 4 - k \\ k & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - kR_1}$$

$$\xrightarrow{R_2 - kR_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 4 - k \\ 0 & 4 - k^2 & 4 - 2k + k^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 4 - k \\ 0 & 4 - k^2 & (2 - k)^2 \end{array}\right)$$

- A questo punto, a seconda del valore di k si verificano tre casi:
  - Se $k \neq \pm 2$, ne segue che $4 - k^2 \neq 0$ e di conseguenza che $rk(A) = rk(A_b) = 2$, implicando che il sistema ammetta un'unica soluzione
  - Se $k = -2$, si ha che $rk(A) \neq rk(A_b)$, dunque il sistema non ammette soluzioni
  - Se $k = 2$, si ha che $rk(A) = rk(A_b) = 1 \neq 2$, dunque il sistema ammette infinite soluzioni

$$A_b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \{x + 2y = 2 \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

9.2.1 Equazioni parametriche

Proposition 89. Equazioni parametriche

Sia V un sottospazio e sia W un sottospazio affine al un sottospazio $Giac(W) \subseteq V$, dunque $\exists x_0 \in V \mid W = x_0 + Giac(W)$.

Data la base $g_1, \ldots, g_n$ di $Giac(W)$, si verifica che:

$$\forall x \in W, \exists! t_1, \ldots, t_n \in K \mid x = x_0 + t_1 g_1 + \ldots + t_n g_n$$

Definiamo l'insieme di tali equazioni come **equazioni parametriche** di W

Dimostrazione:

- Dato $x_0 \in V \mid W = x_0 + Giac(W)$ e data la base $g_1, \ldots, g_n$ di $Giac(W)$, si ha che:

$$x \in W \iff x - x_0 \in Giac(W) \iff$$
$$\iff \exists! t_1, \ldots, t_n \in K \mid x - x_0 = t_1 g_1 + \ldots + t_n g_n$$
$$\iff x = x_0 + t_1 g_1 + \ldots + t_n g_n$$

$\square$

Proposition 90

Dato uno spazio vettoriale V e un sottospazio affine W espresso come l'insieme delle sue equazioni parametriche:

$$W = \{x_0 + t_1 g_1 + \ldots + t_n g_n \mid t_1, \ldots, t_n \in K\}$$

dove $g_1, \ldots, g_n$ sono base di $Giac(W)$, si verifica che:

$$x \in W \iff rk(A_b) = dim(V)$$

dove $A_b := (g_1, \ldots, g_n, x - x_0) \in Mat_{n \times n}(K)$

Dimostrazione:

- Data la matrice $A_b := (g_1, \ldots, g_n, x - x_0)$, per il teorema di Rouché-Capelli, si ha che:

$$x \in W \iff x - x_0 \in Giac(W) = Span(g_1, \ldots, g_n) \iff$$
$$\iff Span(g_1, \ldots, g_n) = Span(g_1, \ldots, g_n, x - x_0) \iff$$
$$\iff dim(Span(g_1, \ldots, g_n)) = dim(Span(g_1, \ldots, g_n, x - x_0)) \iff$$
$$\iff dim(Giac(W)) = rk(A_b) \iff dim(W) = rk(A_b)$$

$\square$

Esempio:

- Consideriamo il seguente insieme di equazioni parametriche corrispondenti ad un sottospazio affine in $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- Poiché $dim(V) = 2$, si verifica che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff rk \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix} = 2$$

- Effettuando la riduzione a scala di tale matrice, si ha che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - 2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 0 & -3 & y-2x+2 \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 0 & -3 & y-2x+2 \\ 0 & -6 & z-3x+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 0 & -3 & y-2x+2 \\ 0 & 0 & z+x-2y \end{pmatrix}$$

- Affinché la riduzione in scala abbia solo 2 pivot, è necessario che l'ultima riga della matrice contenga tutti zeri, implicando quindi che:

$$rk(A) = 2 \iff z + x - 2y = 0$$

- L'insieme di equazioni parametriche dato, quindi, equivale al seguente sistema di equazioni cartesiane:

$$\left\{ x - 2y + z = 0 \right.$$

corrispondente ad una retta in $\mathbb{R}^3$

9.3 Determinante di una matrice

Definition 82. Trasformazione multilineare

Una trasformazione lineare del tipo

$$f : V_1 \times \ldots \times V_k \to W : (v_1, \ldots, v_k) \to f(v_1, \ldots, v_k)$$

viene detta **multilineare** se $\forall i \in [1, k]$ dati $\lambda, \mu \in K$ si verifica che:

$$f(v_1, \ldots, \lambda v_i' + \mu v_i'', \ldots, v_n) = \lambda f(v_1, \ldots, v', \ldots v_n) + \mu f(v_1, \ldots, v'', \ldots v_n)$$

Definition 83. Determinante di una matrice

Definiamo come **determinante** di una matrice l'unica trasformazione lineare

$$det : Mat_{n\times n}(K) \to K$$

che verifica le seguenti tre proprietà:

1. det è **multilineare** su righe e colonne della matrice
2. $A_1, \dots, A_n$ e $A^1, \dots, A^n$ sono **basi** di K^n se e solo se $det(A) \neq 0$
3. $det(I_n) = 1$, dove I_n è la matrice identità di ordine n

Observation 61

Data una matrice $A \in M_{n\times n}(K)$, si ha che:

- $\exists A_i, A_j \in A, i \neq j \mid A_i = A_j \implies det(A) = 0$
- $\exists A^i, A^j \in A, i \neq j \mid A^i = A^j \implies det(A) = 0$
- $\exists A_i \in A \mid A_i = 0_{K^n} \implies det(A) = 0$
- $\exists A^i \in A \mid A^i = 0_{K^n} \implies det(A) = 0$

Dimostrazione:

- Se esistono due righe $A_i, A_j \in A$ uguali, allora $Span(A_1, \dots, A_n)$ non è linearmente indipendente, dunque non può costituire base di K^n
- Se esiste una riga $A_h \in A$ uguale al vettore nullo, allora $Span(A_1, \dots, A_n)$ non è né linearmente indipendente né generatore di K^n, dunque non può costituire base di K^n
- Per le colonne vale il ragionamento analogo alle righe

□

Proposition 91. Determinante alternante su righe e colonne

Data una matrice $A = (A_1, \dots, A_i, \dots A_j, \dots, A_n) \in Mat_{n\times n}(K)$, si verifica che:

$$det(A_1, \dots, A_i, \dots A_j, \dots, A_n) = -det(A_1, \dots, A_j, \dots A_i, \dots, A_n)$$

dunque, scambiando due righe (o colonne) della matrice il **determinante cambia segno**

Dimostrazione:

- Data una matrice $A = (A_1, \dots, A_i + A_j, \dots A_i + A_j, \dots, A_n)$, per la proprietà 2) del determinante si ha che:

$$det(A_1, \dots, A_i + A_j, \dots A_i + A_j, \dots, A_n) = 0$$

- Per multilinearità del determinante, si ha che:

$$0 = det(A_1, \dots, A_i + A_j, \dots A_i + A_j, \dots, A_n) \implies$$

$$\implies 0 = det(A_1, \dots, A_i, \dots A_i + A_j, \dots, A_n) + det(A_1, \dots, A_j, \dots A_i + A_j, \dots, A_n) \implies$$

$$\implies 0 = det(A_1, \dots, A_i, \dots A_i, \dots, A_n) + det(A_1, \dots, A_i, \dots A_j, \dots, A_n) +$$

$$+ det(A_1, \dots, A_j, \dots A_i, \dots, A_n) + det(A_1, \dots, A_j, \dots A_j, \dots, A_n) \implies$$

$$\implies 0 = 0 + det(A_1, \dots, A_i, \dots A_j, \dots, A_n) + det(A_1, \dots, A_j, \dots A_i, \dots, A_n) + 0 \implies$$

$$\implies det(A_1, \dots, A_i, \dots A_j, \dots, A_n) = -det(A_1, \dots, A_j, \dots A_i, \dots, A_n)$$

□

Theorem 92. Teorema di Binet

Date due matrici $A, B \in Mat_{n \times n}$, si ha che:

$$det(AB) = det(A) \cdot det(B)$$

(dimostrazione omessa)

9.3.1 Formula di Leibniz e Regola di Sarrus

Definition 84. Formula di Leibniz

Tramite le sue proprietà 1), 3) e la sua alternanza su righe e colonne, il determinante di una matrice $A \in Mat_{n \times n}(K)$ può essere definito come:

$$det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \dots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

(dimostrazione omessa)

Corollary 27

Se $A \in Mat_{2 \times 2}(K)$, allora

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies det(A) = ad - bc$$

Dimostrazione:

- Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

- Dato $S_2 = \{(1)(2), (12)\}$, si verifica che:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_2} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = ad - bc$$

□

Corollary 28

Se $A \in Mat_{3\times 3}(K)$, allora

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \implies det(A) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

Dimostrazione:

- Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

- Dato $S_3 = \{(1)(2)(3), (12)(3), (1)(23), (13)(2), (123), (321)\}$, si verifica che:

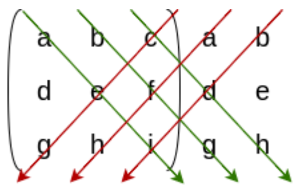
$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot a_{3,\sigma(3)} =$$

$$= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2} - a_{3,1} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} =$$
$$= aei - bdi - ceg - afh + bfg + cdh$$

□

Method 5. Regola di Sarrus

La **Regola di Sarrus** permette di ricordare facilmente il calcolo del determinante di una matrice quadrata di ordine 3, ricopiando a destra della matrice le sue prime due colonne, per poi **sommare le tre diagonali** e **sottrarre le tre anti-diagonali**:



$$A \in Mat_{3\times 3}(K) \implies det(A) = aei + bfg + cdh - afh - dfi - ceg$$

Esempi:

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

si ha che:

$$det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha che:

$$det(A) = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 27$$

9.3.2 Determinante tramite riduzione a scala

Definition 85. Matrice triangolare

Sia $A \in Mat_{n \times n}(K)$. Definiamo A come **triangolare superiore** se $\forall i > j$ si ha che $a_{i,j} = 0$, ossia se sotto la diagonale principale vi sono tutti zeri

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

o **triangolare inferiore** se $\forall i < j$ si ha che $a_{i,j} = 0$, ossia se sopra la diagonale principale vi sono tutti zeri

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Observation 62

Una **matrice a scala** è sempre **triangolare**.

Observation 63

Se $A \in Mat_{n \times n}(K)$ è una matrice triangolare, allora il suo determinante corrisponde al **prodotto della sua diagonale**

$$det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}$$

(dimostrazione omessa)

Method 6. Calcolo del determinante tramite riduzione a scala

Data una matrice $A \in Mat_{n \times n}(K)$, è possibile ricavare il suo determinante tramite la sua riduzione a scala, poiché:

1. Scambiare due righe (o colonne) **inverte il segno del determinante**
2. Moltiplicare una riga (o colonna) per uno scalare $\lambda \in K^*$ **moltiplica anche il determinante** per tale scalare
3. Sommare ad una riga (o colonna) un multiplo di un'altra riga (o colonna) **non altera il determinante**

Dunque, data la riduzione a scala S della matrice A, è possibile calcolare $det(A)$ tramite il calcolo di $det(S)$, per poi **invertire gli effetti subiti dal determinante** in base alle operazioni svolte durante la riduzione.

Dimostrazione:

- Sia $A = (A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \in Mat_{n \times n}(K)$
- Abbiamo già dimostrato come scambiare due righe o colonne implichi che il determinante cambi segno, dunque

$$det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = -det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$$

- Data $A' = (A_1, \ldots, \lambda A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \in Mat_{n \times n}(K)$, per multilinearità del determinante si ha che:

$$det(A') = det(A_1, \ldots, \lambda A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) =$$

$$= \lambda \cdot det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \lambda det(A)$$

- Data $A'' = (A_1, \ldots, A_i + \mu A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \in Mat_{n \times n}(K)$, per multilinearità del determinante si ha che:

$$det(A'') = det(A_1, \ldots, A_i + \mu A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) =$$

$$= det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + \mu \cdot det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) =$$

$$= det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + \mu \cdot 0 = det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = det(A)$$

$\square$

Esempio:

- Riprendiamo la matrice dell'esempio precedente, il cui determinante sappiamo già essere 27:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- Effettuiamo la riduzione a scala di tale matrice:
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-7R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$
$$\xrightarrow{R_2\cdot\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+6R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

- Poiché una matrice a scala è sempre triangolare, si ha che:
$$S := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \implies det(S) = 1 \cdot 1 \cdot (-9) = -9$$

- Tra i vari passaggi effettuati durante la riduzione a scala, l'unico ad influenzare il determinante è il terzo. Dunque, si ha che:
$$det(S) = -\frac{1}{3} \cdot det(A) \implies -9 = -\frac{1}{3} \cdot det(A) \implies det(A) = 27$$

9.3.3 Sviluppo di Laplace

Definition 86. Sottomatrice

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **sottomatrice di** A una matrice ottenuta cancellando un determinato numero di righe e/o colonne dalla matrice originale

Definition 87. Minore di una matrice

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **minori di** A tutte le sottomatrici quadrate ottenute da A.

Denotiamo come $M_{i,j}$ il minore ottenuto cancellando la riga i e la colonna j dalla matrice A.

Theorem 93. Sviluppo di Laplace

Data una matrice $A \in Mat_{n \times n}(K)$, lo **sviluppo di Laplace sulla i-esima riga di A** è definito come:

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} \cdot a_{i,k} \cdot det(M_{i,k}) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot cof_{i,k}(A)$$

dove $cof_{i,k}(A) = (-1)^{i+k} \cdot det(M_{i,k})$ viene detto il **cofattore (o complemento algebrico)** dell'entrata $a_{i,k}$.

Analogamente, lo sviluppo di Laplace sulla j-esima colonna di A è definito come:

$$det(A) = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} \cdot a_{h,j} \cdot det(M_{h,j}) = \sum_{h=1}^{n} a_{h,j} \cdot cof_{h,j}(A)$$

(dimostrazione omessa)

Esempi:

1.
   - Riprendiamo la matrice già vista in vari esempi precedenti, il cui determinante sappiamo già essere 27:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$
   - Effettuiamo lo sviluppo di Laplace su A_3:

$$det(A) = (-1)^{3+1} \cdot 7 \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3} \cdot 0 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= 7(2 \cdot 6 - 3 \cdot 5) - 8(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) + 0 = -21 + 48 = 27$$

2.
   - Calcoliamo il determinante della seguente matrice quadrata di ordine 4:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
   - Effettuiamo lo sviluppo di Laplace su A^3:

$$det(A) = 0 + (-1)^{2+3} \cdot 5 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} + 0 - 0 = -5 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- Il calcolo di $det(A)$ viene quindi ridotto al calcolo di $det(M_{2,3})$, il quale può essere facilmente calcolato tramite la regola di Sarrus o tramite un nuovo sviluppo di Laplace
- Utilizzando la regola di Sarrus, abbiamo che:

$$det(A) = -5 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} = -5(48 + 0 + (-7) - 168 - 0 - (-2)) = 625$$

- Utilizzando lo sviluppo di Laplace su $(M_{2,3})^1$, invece, abbiamo che:

$$det(A) = -5 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} = -5 \left[(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot det \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. +(-1)^{2+1} \cdot 7 \cdot det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \right] = -5[50 - 175] = 625$$

9.3.4 Regola di Cramer

Theorem 94. Regola di Cramer

Dato un sistema lineare $Ax = b$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

dove A è una matrice di coefficienti tale che $det(A) \neq 0$, allora il sistema ammette la seguente unica soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{det(A)} \cdot det(b, A^2, \ldots, A^{n-1}, A^n) \\ x_2 = \frac{1}{det(A)} \cdot det(A^1, b, \ldots, A^{n-1}, A^n) \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot det(A^1, A^2, \ldots, b, A^n) \\ x_n = \frac{1}{det(A)} \cdot det(A^1, A^2, \ldots, A^{n-1}, b) \end{cases}$$

(dimostrazione omessa)

Esempio:

- Consideriamo il sistema
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y = 0 \end{cases}$$
la cui matrice dei coefficienti corrisponde è
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$
dove $det(A) = 27$
- Per la regola di Cramer, si ha che:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{27} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \\ y = \frac{1}{27} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ z = \frac{1}{27} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{27} \cdot (-48) \\ y = \frac{1}{27} \cdot (42) \\ z = \frac{1}{27} \cdot (-3) \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{16}{9} \\ y = \frac{14}{9} \\ z = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

9.4 Matrici inverse

Definition 88. Gruppo generale lineare

Definiamo come **gruppo generale lineare** il gruppo $(GL(n, K), \cdot)$ contenente tutte le matrici invertibili dell'anello $Mat_{n \times n}(K)$:
$$GL(n, K) = \{A \in Mat_{n \times n}(K) \mid \exists A^{-1} \in Mat_{n \times n}(K)\}$$

Dimostrazione:

- $A, B, C \in GL(n, K), A(BC) = ABC = (AB)C$
- $\forall A \in GL(n, K), \exists! I_n \in GL(n, K) \mid AI_n = I_n A = A$
- $\forall A \in GL(n, K), \exists! A^{-1} \in GL(n, K) \mid AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

□

Theorem 95

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, le seguenti condizioni sono equivalenti tra loro:

1. $A \in GL(n, K)$
2. $rk(A) = n$
3. $det(A) \neq 0$
4. $A_1, \dots, A_n$ sono una base di K^n
5. $A^1, \dots, A^n$ sono una base di K^n
6. A è equivalente per righe e colonne a I_n

Dimostrazione:

- 3) $\iff$ 4), 5)
  - Per definizione stessa di determinante, si ha che:

$$det(A) \neq 0 \iff \begin{cases} A^1, \dots, A^n \text{ base di } K^n \\ A_1, \dots, A_n \text{ base di } K^n \end{cases}$$

- 2) $\iff$ 3), 4)
  - Poiché $dim(K^n) = n$ implica che n vettori possono essere generatori se e solo se sono anche linearmente indipendenti, si ha che:

$$rk(A) = n \iff dim(Span(A^1, \dots, A^n)) = dim(Span(A_1, \dots, A_n)) = n \iff$$

$$\iff \begin{cases} Span(A^1, \dots, A^n) = K^n \iff A^1, \dots, A^n \text{ sono base di } K^n \\ Span(A_1, \dots, A_n) = K^n \iff A_1, \dots, A_n \text{ sono base di } K^n \end{cases}$$

- 1) $\iff$ 2)
  - Supponiamo che $\exists ! B = (B^1, \dots, B^n) \in Mat_{n\times n}(K) \mid A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Per definizione di prodotto tra matrici ne segue che:

$$AB = I_n \iff AB^1 = e_1, AB^2 = e_2, \dots, AB^n = e_n \iff$$

$$\iff L_A(B^1) = e_1, L_A(B^2) = e_2, \dots, L_A(B^n) = e_n \iff$$

$$\iff e_1, e_2, \dots, e_n \in Im(L_A) \iff Im(L_A) = Span(e_1, \dots, e_n) = K^n \iff$$

$$\iff rk(A) = n$$

- 2) $\iff$ 6)
  - Se $rk(A) = n$, è possibile ridurre a scala A fino ad ottenere I_n
  - Viceversa, poiché $rk(I_n) = n$, se I_n è equivalente per righe e colonne ad A ne segue automaticamente che $rk(A) = n$

$\square$

Corollary 29

È possibile definire il **gruppo generale lineare** anche come:

$$GL(n,K) = \{A \in Mat_{n\times n}(K) \mid det(A) \neq 0\}$$

Observation 64

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, si ha che:

$$det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$$

Dimostrazione:

- Per il teorema di Binet, si ha che:

$$1 = det(I_n) = det(A \cdot A^{-1}) = det(A)det(A^{-1}) \implies det(A)^{-1} = det(A^{-1})$$

□

Definition 89. Gruppo speciale lineare

Dato il gruppo $(GL(n,K),\cdot)$, definiamo $SL(n,K) \trianglelefteq GL(n,K)$ come **gruppo speciale lineare**, dove

$$SL(n,K) = \{A \in GL(n,K) \mid det(A) = 1\}$$

Dimostrazione:

- $SL(n,K) \leqslant GL(n,K)$
  - $det(I_n) = 1 \implies I_n \in SL(n,K)$
  - $A, B \in SL(n,K) \implies det(AB) = det(A)det(B) = 1 \cdot 1 = 1 \implies AB \in SL(n,K)$
  - $A \in SL(n,K) \implies det(A^{-1}) = det(A)^{-1}) = 1 \implies A^{-1} \in SL(n,K)$
- Date le matrici $A, B \in SL(n,K)$, si ha che:

$$A \sim_L B \iff A^{-1}B \in SL(n,K) \iff det(A^{-1}B) = 1 \iff det(A^{-1})det(B) = 1 \iff$$

$$\iff det(A)^{-1}det(B) = 1 \iff det(A)^{-1} = det(B)^{-1} \iff det(A) = det(B)$$

$$A \sim_R B \iff AB^{-1} \in SL(n,K) \iff det(AB^{-1}) = 1 \iff det(A)det(B^{-1}) = 1 \iff$$

$$\iff det(A)det(B)^{-1} = 1 \iff det(B)^{-1} = det(A)^{-1} \iff det(B) = det(A)$$

dunque le classi laterali sinistre e destre coincidono, implicando che $SL(n,K) \trianglelefteq GL(n,K)$

□

Method 7. Inversione tramite algoritmo di Gauss-Jordan

Data una matrice $A \in GL(n, K)$, poiché è A invertibile se e solo se equivalente per righe e colonne a I_n, si ha che

$$(A \mid I_n), (I_n \mid B) \text{ equivalenti per righe} \iff B = A^{-1}$$

Esempi:

1. • Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
dove $det(A) = -2$, dunque A è invertibile

• Procedendo con l'algoritmo di Gauss-Jordan, si ha che:
$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1+=R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = (I_n \mid B)$$
$$\implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
dove $det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}$

2. • Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$
dove $det(A) = 27$, dunque A è invertibile

• Procedendo con l'algoritmo di Gauss-Jordan, si ha che:
$$(A \mid I_N) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3+=-7R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -21 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_2*=-\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{9}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1-2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1+R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies A^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dove $det(A^{-1}) = \frac{1}{27}$

Definition 90. Matrice trasposta

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **matrice trasposta** la matrice $A^T \in Mat_{n\times m}(K)$ avente come i-esima riga la i-esima colonna della matrice A e come j-esima colonna la j-esima colonna di A

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Esempio:

- Data la seguente matrice A, la sua trasposta corrisponde a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Observation 65

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, si verifica che:

- $det(A) = det(A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

(dimostrazioni omessa)

Definition 91. Matrice dei cofattori

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, definiamo come **matrice dei cofattori** la matrice $cof(A) \in Mat_{n\times n}(K)$ avente come entrate i cofattori di ogni entrata della matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \implies cof(A) = \begin{pmatrix} cof(A)_{1,1} & \cdots & cof(A)_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cof(A)_{n,1} & \cdots & cof(A)_{n,n} \end{pmatrix}$$

dove ricordiamo che

$$cof(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot det(M_{i,j})$$

Definition 92. Matrice aggiunta

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, definiamo come **matrice aggiunta** la trasposta della matrice dei cofattori di A:

$$adj(A) = (cof(A))^T$$

Theorem 96. Inversa di una matrice tramite aggiunta

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$ dove $det(A) \neq 0$, si verifica che:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$$

Dimostrazione:

- Come conseguenza dello sviluppo di Laplace, si verifica che:

$$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = det(A) \cdot I_n \implies adj(A) \cdot A = det(A) \cdot I_n \implies$$
$$\implies adj(A) = det(A) \cdot I_n \cdot A^{-1} \implies det(A)^{-1} adj(A) = A^{-1}$$

□

Esempio:

- Prendiamo ancora una volta la nostra solita matrice esempio, il cui determinante sappiamo essere $det(A) = 27$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- La sua matrice dei cofattori corrisponde a:

$$cof(A) = \begin{pmatrix} cof_{1,1}(A) & cof_{1,2}(A) & cof_{1,3}(A) \\ cof_{2,1}(A) & cof_{2,2}(A) & cof_{2,3}(A) \\ cof_{3,1}(A) & cof_{3,2}(A) & cof_{3,3}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

mentre la conseguente matrice aggiunta corrisponde a:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

- Dunque, la matrice inversa di A corrisponde a:

$$A^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Corollary 30

Data una matrice $A \in Mat_{2\times 2}(K)$, si verifica che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dimostrazione:

- Sia
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- La sua matrice aggiunta corrisponde a:

$$cof(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \implies adj(A) = (cof(A))^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

- Di conseguenza, la sua inversa sarà:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A) = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

9.5 Teorema degli orlati

Definition 93. Orlato di un minore

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$ e dati un suo minore M di ordine k e un minore M' di ordine $k+1$, definiamo M' come **orlato di** M se quest'ultimo è anche un minore di M'

Esempio:

- Consideriamo la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$
e il suo minore M di ordine 2 ottenuto eliminando le colonne 2 e 4 e la riga 3
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

- Gli orlati di M corrispondono a:
$$M_1' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix} \qquad M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Observation 66

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$ e un suo minore M di ordine k, esistono $(m-k)(n-k)$ orlati di M in A

Theorem 97. Teorema degli orlati (o di Kronecker)

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:
$$rk(A) = k \iff \exists M \text{ minore di } A \mid \begin{cases} \text{ordine di } M = k \\ det(M) \neq 0 \\ det(M') = 0, \forall M' \text{ orlato di } M \end{cases}$$

(dimostrazione omessa)

Esempi:

1. - Vogliamo discutere il comportamento di tale sistema al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$:
$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = b \end{cases} \implies A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right) \implies$$
$$\implies \begin{cases} rk(A_b) = rk(A) & \text{se } dim(A^1, \dots, A^n, b) = dim(A^1, \dots, A^n) \\ rk(A_b) = rk(A) + 1 & \text{se } dim(A^1, \dots, A^n, b) \neq dim(A^1, \dots, A^n) \end{cases}$$
   - Tramite la regola di Sarrus, otteniamo che il determinante corrisponde a:
$$det(A) = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 = (a+2)(a-1)^2$$

- Se $a \neq 1$ o $a \neq -2$ allora $det(A) \neq 0$, implicando che $rk(A) = 3$.

  Inoltre, siccome $rk(A_b) \leq min(3, 4) = 3$ e siccome $rk(A_b) = rk(A)$ oppure $rk(A_b) = rk(A) + 1$, allora ne segue necessariamente che $rk(A) = rk(A_b) = 3$.

  Per il teorema di Rouche-Capelli, lo spazio affine generato dalle soluzioni ha dimensione pari a 0, dunque il sistema è **determinato** ed esiste un'unica soluzione dipendente dai parametri assunti da a e b.

- Se $a = 1$, allora $det(A) = 0$, poiché radice del polinomio precedentemente trovato.

  Tuttavia, dalla riduzione a scala otteniamo che::

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 += -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 += -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 += -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 += b \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  implicando che $rk(A) = 1$ e $rk(A_b) = 2$, dunque il sistema **non ammette soluzioni**.

- Se $a = -2$, allora $det(A) = 0$, poiché radice del polinomio precedentemente trovato.

  Per il teorema degli orlati, si ha che l'unico orlato del minore $M_{3,3}$, dove $det(M_{3,3}) = 3$ è la matrice A stessa, che sappiamo avere determinante nullo, dunque $rk(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies rk(A) = 2$$

  Nel caso della matrice A_b, invece, consideriamo il seguente minore:

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & b \end{array}\right)$$

  Gli unici due orlati di tale minore sono:

$$\begin{cases} M'_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = A \implies det(M'_1) = det(A) = 0 \\ M'_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} \implies det(M'_2) = 4b + 0 + 1 + 2 - b = 3b + 3 \end{cases}$$

Dunque, si ha che:

$$rk(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = -2, b = -1 \implies rk(A) = rk(A_b) \implies \exists \text{ inf. soluzioni} \\ 3 & \text{se } a = -2, b \neq -1 \implies rk(A) \neq rk(A_b) \implies \nexists \text{ soluzioni} \end{cases}$$

- In particolare, se $a = -2$ e $b = -1$, possiamo trovare le infinite soluzioni del sistema in funzione di x:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} -2y + z = -x \\ y - 2z = 1 - x \end{cases}$$

applichiamo la regola di Cramer per trovare il valore di y in funzione di x, per poi sostituire il valore ottenuto nella seconda equazione, trovando il valore di z in funzione di x:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3} \cdot det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1-x & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(3x+1) = x + \frac{1}{3} \\ y - 2z = 1 - x \end{cases} \implies \begin{cases} y = x + \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} + x \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema indeterminato, quindi, appaiono nella forma:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dunque generanti una retta (difatti, la dimensione dello spazio affine generato è $n - rk(A) = 3 - 2 = 1$)

2. - Consideriamo il seguente insieme di equazioni parametriche corrispondenti ad un sottospazio affine in $\mathbb{R}^3$, già analizzato precedentemente:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- Siccome $dim(V) = 2$, si verifica che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff rk(A) = rk \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix} = 2$$

- Considerando il minore $M_{3,3}$, si ha che:

$$M_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \implies det(M_{3,3}) = 5 - 8 = -3 \neq 0$$

- Siccome la matrice iniziale stessa è l'unico orlato di $M_{3,3}$, per il teorema degli orlati si verifica che:

$$rk(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } det(A) = 0 \\ 3 & \text{se } det(A) \neq 0 \end{cases}$$

- Dunque, si ha che:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff rk(A) = 2 \iff det(A) = 0$$

- Utilizzando lo sviluppo di Laplace sulla terza colonna, si ha che:

$$det(A) = 0 \iff (x-1)\cdot det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - y\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (z-1)\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -3(x-1) + 6y - 3(z+1) \iff -3x + 6y - 3z = 0 \iff x - 2y + z = 0$$

- L'insieme di equazioni parametriche dato, quindi, equivale al seguente sistema di equazioni cartesiane:

$$\left\{ x - 2y + z = 0 \right.$$

corrispondente ad una retta in $\mathbb{R}^3$

3. - Dati la seguente retta r e il seguente piano π

$$r = \begin{cases} x = -2 + 3a \\ y = 1 - 2a \\ z = 5a \end{cases} \qquad \pi = \begin{cases} x = 4 - 2b + 5c \\ y = 3b - c \\ z = 1 + b - 2c \end{cases}$$

possiamo trovare l'intersezione $r \cap \pi$ in $\mathbb{R}^3$ nei seguenti tre modi:

(a) Troviamo i valori di a, b e c unendo i due sistemi:

$$\begin{cases} -2 + 3a = 4 - 2b + 5c \\ 1 - 2a = 3b - c \\ 5a = 1 + b - 2c \end{cases} = \begin{cases} 3a + 2b - 5c = 6 \\ 2a + 3b - c = 1 \\ 5a - b + 2c = 1 \end{cases} \implies A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Siccome $det(A) = 82$ *(calcolo omesso)*, possiamo applicare la regola di Cramer per trovare il valore di a, per poi sostituirlo nel sistema e trovare il valore di b e c:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{82} \cdot det\begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{82} \cdot 44 = \frac{22}{41} \\ c = 2a + 3b - 1 \\ b = 5a + 2c - 1 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} a = \frac{22}{41} \\ c = \frac{44}{41} + 3b - 1 = 3b + \frac{3}{41} \\ b = \frac{110}{41} + 2c - 1 = 2c + \frac{69}{41} \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{22}{41} \\ c = 3\left(2c + \frac{69}{41}\right) + \frac{3}{41} = 6c + \frac{210}{41} \\ b = 2c + \frac{69}{41} \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} a = \frac{22}{41} \\ c = -\frac{42}{41} \\ b = 2\left(-\frac{42}{41}\right) + \frac{69}{41} = -\frac{15}{41} \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 + 3a \\ y = 1 - 2a \\ z = 5a \end{cases} = \begin{cases} x = -\frac{16}{41} \\ y = -\frac{3}{41} \\ z = \frac{110}{41} \end{cases}$$

(b) Troviamo il sistema di equazioni cartesiane descriventi π:

$$\pi = \begin{cases} x = 4 - 2b + 5c \\ y = 3b - c \\ z = 1 + b - 2c \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x-4 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = b \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff rk \begin{pmatrix} -2 & 5 & x-4 \\ 3 & -1 & y \\ 1 & -2 & z-1 \end{pmatrix} = 2$$

Siccome $det(M_{3,3}) = -13 \neq 0$, per il teorema degli orlati, si ha che:

$$\iff rk \begin{pmatrix} -2 & 5 & x-4 \\ 3 & -1 & y \\ 1 & -2 & z-1 \end{pmatrix} = 2 \iff det \begin{pmatrix} -2 & 5 & x-4 \\ 3 & -1 & y \\ 1 & -2 & z-1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$(x-4)(-5) - y(-1) + (z-1)(-13) = 0 \iff 5x - y + 13z = 33$$

Siccome $x \in r \cap \pi \iff x \in r \wedge x \in \pi$, sostituendo i valori assunti da x, y e z nell'equazione cartesiana di π otteniamo che:

$$-5x + y - 13z = 33 \iff 5(-2+3a) - (1-2a) + 13(5a) = 33 \iff a = \frac{22}{41}$$

Una volta trovato il valore di a, procediamo analogamente al metodo precedente, sostituendo a nell'equazione parametrica di π e ricavando b e c per sostituzione.

(c) Troviamo il sistema di equazioni cartesiane descriventi π e il sistema di equazioni cartesiane descriventi r.

Sappiamo già che:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi \iff 5x - y + 13z = 33$$

dunque ricaviamo le equazioni cartesiane di r:

$$r = \begin{cases} x = -2 + 3a \\ y = 1 - 2a \\ z = 5a \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff rk \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ -2 & y-1 \\ 5 & z \end{pmatrix} = 1$$

Considerando il minore di ordine 1 corrispondente all'entrata $a_{1,1} = 3$, dove quindi $det(a_{1,1}) = 3$, per il teorema degli orlati si ha che:

$$rk \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ -2 & y-1 \\ 5 & z \end{pmatrix} = 1 \iff \begin{cases} det \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ -2 & y-1 \end{pmatrix} = 0 \\ det \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ 5 & z \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ -5x + 3z - 10 = 0 \end{cases}$$

Possiamo quindi costruire un nuovo sistema di equazioni cartesiane corrispondente a $r \cap \pi$ utilizzando le due equazioni cartesiane descriventi r e l'equazione cartesiana descrivente π:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in r \cap \pi \iff \begin{cases} 5x - y + 13z = 33 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \\ -5x + 3z - 10 = 0 \end{cases}$$

Poiché il determinante della matrice dei coefficienti associata a tale sistema è diverso da 0, è possibile ricavare i valori di x, y e z tramite la regola di Cramer, ottenendo una soluzione analoga agli altri due metodi

9.6 Matrici simili

Definition 94. Matrici simili

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, tali matrici vengono dette **simili** se si verifica che:

$$\exists C \in GL(n, K) \mid A = C^{-1}BC$$

Attenzione: tale condizione non è equivalente ad affermare che A è coniugato a B, poiché nella relazione di coniugio gli elementi C, C^{-1} dovrebbero essere presi in $Mat_{n\times n}(K)$ e non in $GL(n, K)$. Inoltre, ricordiamo che $GL(n, K) \not\leqslant Mat_{n\times n}(K)$.

9.6.1 Invarianti per similitudine

Proposition 98. Determinante invariante

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, se A è simile a B, allora

$$det(A) = det(B)$$

Dimostrazione:

- Sia $C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$. Siccome $det(C^{-1}) = det(C)^{-1}$, si verifica che:

$$det(B) = det(C^{-1}AC) = det(C^{-1})det(A)det(C) = det(C)^{-1}det(A)det(C) = det(A)$$

□

Definition 95. Traccia di una matrice

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, definiamo come **traccia** di A la somma delle entrate sulla diagonale principale:

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Lemma 99

Date $A \in Mat_{m\times n}(K)$ e $B \in Mat_{n\times m}(K)$, si verifica che:

$$tr(AB) = tr(BA)$$

Dimostrazione:

- Il risultato segue dalla definizione stessa di prodotto tra matrici:

$$tr(AB) = \sum_{k=1}^{n}(ab)_{k,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{k,j}b_{j,k} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{j,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}(ba)_{k,k} = tr(BA)$$

□

Proposition 100. Traccia invariante

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, se A è simile a B, allora

$$tr(A) = tr(B)$$

Dimostrazione:

- Se $\exists C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$, allora

$$tr(B) = tr(C^{-1}AC) = tr(C^{-1}CA) = tr(A)$$

□

Definition 96. Polinomio caratteristico

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, definiamo come **polinomio caratteristico** di A come:

$$p_A(x) := det(xI_n - A)$$

Esempio:

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{pmatrix} = x^2 - 5x - 2$$

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & +1 \\ -2 & x+3 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-3)(x^2-2x+2)$$

Proposition 101. Polinomio invariante

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, se A è simile a B, allora

$$p_A(x) = p_B(x)$$

Dimostrazione:

- Se $\exists C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$, allora

$$p_B(x) = det(xI_n - B) = det(xI_n - C^{-1}AC) = det(xC^{-1}C - C^{-1}AC) =$$
$$= det(C^{-1}xI_nC - C^{-1}AC) = det(C^{-1}(xI_n - A)C) = det(C^{-1})det(xI_n - A)det(C) =$$
$$= det(C)^{-1}det(xI_n - A)det(C) = det(xI_n - A) = p_A(x)$$

□

Observation 67

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, si verifica che:

$$p_A(x) = x^n - tr(A)x^{n-1} + \ldots + (-1)^n det(A)$$

(dimostrazione omessa)

Definition 97. Autovalori ed Autovettori

Data $A \in Mat_{n\times n}$ e uno scalare $\lambda \in K$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $p_A(\lambda) = 0$
2. $\exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid Av = \lambda v$

Dove λ viene detto **autovalore di** A, mentre v viene detto **autovettore relativo a** λ

Dimostrazione:

- Supponiamo quindi che esista $\exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid Av = \lambda v$:

$$\exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid (\lambda I_n - A)v = 0 \iff Ker(L_{(\lambda I_n - A)}) \neq \{0_{K^n}\} \iff$$

$$\iff dim(Ker(L_{(\lambda I_n - A)})) > 0 \iff rk(\lambda I_n - A) = n - dim(Ker(L_{(\lambda I_n - A)})) < n$$

$$\iff det(\lambda I_n - A) = 0 \iff p_A(\lambda) = 0$$

□

Observation 68

Data $A \in Mat_{n\times n}$ e uno scalare $\lambda \in K$, il vettore $v \neq 0_{K^n} \in K^n$ è un autovettore relativo a λ se e solo se:

$$(A - \lambda I_n)v = 0$$

o in alternativa

$$0 = (\lambda I_n - A)v$$

Dimostrazione:

- Notiamo facilmente che:

$$\exists v \neq 0 \in K^n \mid Av = \lambda v \iff \begin{cases} 0 = \lambda v - Av \iff 0 = (\lambda I_n - A)v \\ Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda I_n)v = 0 \end{cases}$$

□

Definition 98. Spettro e Autospazio relativo

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, definiamo come **spettro** di A l'insieme dei suoi autovalori

$$Sp(A) = \{\lambda \in K \mid p_A(\lambda) = 0\}$$

e come **autospazio relativo a** $\lambda \in Sp(A)$ il sottospazio di K^n generato dagli autovettori relativi a λ:

$$E_\lambda(A) = \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$$

Nota: affinché $E_\lambda(A)$ possa essere uno spazio vettoriale, viene ammesso anche 0_{K^n} come soluzione di $Av = \lambda v$

Proposition 102. Spettro invariante

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, se A è simile a B, allora

$$Sp(A) = Sp(B)$$

Inoltre, dato $\lambda \in Sp(A) = Sp(B)$ si ha che:

$$E_\lambda(A) = E_\lambda(B) \iff A = B$$

Dimostrazioni:

- Se $\exists C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$, allora $p_A(x) = p_B(x)$, dunque si ha che:

$$\mu \in Sp(A) \iff p_A(\mu) = p_B(\mu) = 0 \iff \mu \in Sp(B)$$

- Dato $\lambda \in Sp(A) = Sp(B)$, si ha che:

$$E_\lambda(A) = E_\lambda(B) \iff Av = \lambda v = Bv, \forall v \in E_\lambda(A) \iff A = B$$

$\square$

Esempio:

- Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -3 \\ -1 & x & 5 \\ 2 & 1 & x-2 \end{pmatrix} = x(x-1)(x-2)$$

dunque otteniamo che $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$

- Gli autovettori dell'autospazio $E_0(A)$ corrispondono a:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff (0 \cdot I_n - A)v = 0 \iff \begin{cases} -x - y - 3z = 0 \\ -x + 5z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 5t \\ y = -8t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori dell'autospazio $E_1(A)$ corrispondono a:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff (1 \cdot I_n - A)v = 0 \iff \begin{cases} -y - 3z = 0 \\ -x + y + 5z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori dell'autospazio $E_2(A)$ corrispondono a:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff (2 \cdot I_n - A)v = 0 \iff \begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition 99. Molteplicità algebrica e geometrica

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n(K)}$, per ogni autovalore $\lambda \in Sp(A)$ definiamo la sua:

- **Molteplicità algebrica** $\mu(\lambda)$, ossia la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico $p_A(x)$, corrispondente al più grande intero tale che:

$$\mu(\lambda) \in \mathbb{N}, (x - \lambda)^{\mu(\lambda)} \mid p_A(x)$$

- **Molteplicità geometrica** $\nu(\lambda)$, ossia la dimensione del suo autospazio relativo, corrispondente a:

$$\nu(\lambda) = dim(E_\lambda(A)) = n - rk(\lambda I_n - A)$$

Per ogni $\lambda \in Sp(A)$, si verifica che:

$$1 \leq \nu(\lambda) \leq \mu(\lambda)$$

Proposition 103. Molteplicità invarianti

Se $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$ sono matrici simili, allora $\forall \lambda \in Sp(A) = Sp(B)$ si ha che:

$$\mu_A(\lambda) = \mu_B(\lambda) \qquad \nu_A(\lambda) = \nu_B(\lambda)$$

(dimostrazione omessa)

9.6.2 Diagonalizzazione di una matrice

Definition 100. Matrice diagonale

Sia $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Tale matrice viene detta **diagonale** se $\forall i \neq j$ si ha che $a_{i,j} = 0$, ossia se sopra e sotto la diagonale principale vi sono tutti zeri

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Definition 101. Matrici triangolarizzabili e diagonalizzabili

Una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$ viene detta **triangolarizzabile** se simile ad una matrice triangolare $T \in Mat_{n\times n}(K)$, mentre viene detta **diagonalizzabile** se simile ad una matrice diagonale $D \in Mat_{n\times n}(K)$

Proposition 104

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. A è triangolarizzabile
2. La somma di tutte le sue molteplicità algebriche è n:
$$\sum_{\lambda\in Sp(A)} \mu(\lambda) = n = dim(K^n)$$
3. Il suo polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile:
$$p_A(x) = \prod_{\lambda\in Sp(A)} (x-\lambda)^{\mu(\lambda)}$$

(dimostrazione omessa)

Corollary 31

Per il teorema fondamentale dell'algebra, **ogni matrice** $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ è **triangolarizzabile**.

Analogamente, una matrice $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è **triangolarizzabile** se e solo se

$$\forall\lambda \in Sp(B), \lambda \in \mathbb{R} \iff Sp(B) \subseteq \mathbb{R}$$

Esempio:

- Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
il suo polinomio caratteristico corisponde a:
$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$
- Siccome $p_A(x) \in \mathbb{R}[x]$, $deg(p_A(x)) = 2$ e $\Delta_{p_A(x)} < 0$, tale polinomio non è fattorizzabile, dunque A non è triangolarizzabile
- Considerando invece la matrice $A' \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$ avente entrate coincidenti a quelle di A, otteniamo che:
$$p_{A'}(x) = (x - i)(x + i) \in \mathbb{C}[x] \implies Sp(A') = \{\pm i\} \subseteq \mathbb{C}$$
dunque A' è triangolarizzabile

Proposition 105

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. A è diagonalizzabile
2. La somma di tutte le sue molteplicità geometriche è n:
$$\sum_{\lambda \in Sp(A)} \nu(\lambda) = n = dim(K^n)$$
3. Esistono $B^1, \dots, B^n$ autovettori di A tali che:
$$B^1, \dots, B^n \text{ base di } K^n$$
4. Il suo spettro contiene n autovalori diversi tra loro:
$$|Sp(A)| = n$$

Observation 69

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, dati $\lambda, \mu \in Sp(A) \mid \lambda \neq \mu$ si ha che:
$$E_\lambda(A) \cap E_\mu(A) = \{0_{K^n}\}$$

Dimostrazione:

- Ovviamente, essendo sottospazi vettoriali, si ha che:
$$0_{K^n} \in E_\lambda(A), 0_{K^n} \in E_\mu(A) \implies 0_{K^n} \in E_\lambda(A) \cap E_\mu(A)$$

- Supponiamo quindi che $\exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid \lambda v = Av = \mu v$, dunque un autovettore relativo sia λ sia a μ, dove $\lambda \neq \mu$. Ne segue che:

$$\lambda v = Av = \mu v \implies \lambda v = \mu v \implies (\lambda - \mu)v = 0_{K^n}$$

- Poiché $\lambda \neq \mu \implies \lambda - \mu \neq 0$, si ha che:

$$(\lambda - \mu)v = 0_{K^n} \iff v = 0_{K^n}$$

contraddicendo quindi l'ipotesi iniziale, dunque l'unica possibilità è che:

$$\nexists v \neq 0_{K^n} \mid v \in E_\lambda(A), v \in E_\mu(A) \iff E_\lambda(A) \cap E_\mu(A) = \{0_{K^n}\}$$

□

Corollary 32

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$ e dati i vettori $v_1 \neq 0_{K^n} \in E_{\lambda_1}(A), \dots, v_k \neq 0_{K^n} \in E_{\lambda_k}(A)$, dove $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$, si ha che:

$$v_1, \dots, v_k \text{ linearmente indipendenti}$$

Dimostrazione:

- Poiché:

$$\lambda, \mu \in Sp(A) \mid \lambda \neq \mu \implies E_\lambda(A) \cap E_\mu(A) = \{0_{K^n}\}$$

ne segue automaticamente che:

$$v_i \neq 0_{K^n} \in E_{\lambda_i}(A) \implies v_i \neq 0_{K^n} \notin E_{\lambda_j}(A), \forall j \neq i$$

dunque $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti

□

Proposition 106. Matrice diagonalizzante

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, se esiste una base $B^1, \dots, B^i, \dots, B^j, \dots, B^n$ di K^n tale che:

- $B^1, \dots, B^i$ è base di $E_{\lambda_1}(A)$
- $\vdots$
- $B^j \dots, B^n$ è base di $E_{\lambda_n}(A)$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in Sp(A)$ e dove $i \neq j$ allora:

$$\exists B = (^1, \dots, B^i, \dots, B^j, \dots, B^n) \in GL(n, K) \mid D = B^{-1}AB$$

dove $D \in Mat_{n\times n}(K)$ è una matrice diagonale e dove B viene detta **matrice diagonalizzante**.

Esempio:

1. • Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 \\ 4 & -8 & 4 \\ 5 & -12 & 7 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

   • Il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x-5 & 8 & -3 \\ -4 & x+8 & -4 \\ -5 & 12 & x-7 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-5) det \begin{pmatrix} x+8 & -4 \\ 12 & x-7 \end{pmatrix} + 4 det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 12 & x-7 \end{pmatrix} - 5 det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ x+8 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-5)(x^2+x-8) + 4(8x-20) - 5(3x-8) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2$$

   dunque sappiamo che A è triangolarizzabile e che il suo spettro è $Sp(A) = \{0, 2\}$.

   • Siccome affinché A sia anche diagonalizzabile è necessario che $\nu(0) + \nu(2) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, notiamo come:

$$1 \leq \nu(0) \leq \mu(0) \iff 1 \leq \nu(0) \leq 1 \iff \nu(0) = 1$$

   di conseguenza, si ha che:

$$\nu(0) + \nu(2) = 3 \iff 1 + \nu(2) = 3 \iff \nu(2) = 2$$

   • Consideriamo quindi il sistema $(2 \cdot I_n - A)v = 0$:

$$\begin{cases} -3x + 8y - 3z = 0 \\ -4x + 10y - 4z = 0 \\ -5x + 12y - 5z = 0 \end{cases} \implies (2 \cdot I_n - A) = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -3 \\ -4 & 10 & -4 \\ -5 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

   Si ha che:

$$\nu(2) = 2 = dim(E_2(A)) = 3 - rk(2 \cdot I_n - A) = \iff rk(2 \cdot I_n - A) = 1$$

   • Tuttavia, considerando il minore $M_{3,3}$, per il teorema degli orlati si verifica che:

$$det \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} = -30 + 32 = 2 \neq 0 \implies rk(2 \cdot I_n - A) \geq 2$$

   Dunque si ha che $rk(2 \cdot I_n - A) \neq 1$, implicando quindi che A non sia diagonalizzabile.

- Difatti, si ha che:

$$1 \leq \nu(2) = 3 - rk(2 \cdot I_n - A) \leq 3 - 2 = 1 \iff \nu(2) = 1$$

e dunque che:

$$\nu(0) + \nu(2) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = dim(\mathbb{R}^3)$$

2. - Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & k-1 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

- Il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$\begin{aligned} p_A(x) = det \begin{pmatrix} x-1 & -k \\ -2 & x-k-1 \end{pmatrix} &= (x-1)(x-k-1) - 2k \\ &= x^2 - kx - k - 1 = (x+1)(x-k-1) \end{aligned}$$

dunque si ha che $Sp(A) = \{-1, k+1\}$

- Siccome $p_A(x)$ è completamente fattorizzabile indipendentemente dal valore assunto da k, allora A è sempre triangolarizzabile.
- Se $k = -2$, si ha che:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \implies p_A(x) = (x+1)^2 \implies Sp(A) = \{-1\}$$

Dunque A è diagonalizzabile se e solo se $\nu(-1) = 2$.

Tuttavia, considerando il sistema $(-1 \cdot I_n - A)v = 0$, notiamo che :

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \nu(-1) = dim(E_{-1}(A)) = 1$$

Dunque A non è diagonalizzabile se $k = -2$

- Se invece $k \neq -2$, si ha che:

$$p_A(x) = (x+1)(x-k-1) \implies Sp(A) = \{-1, k+1\}$$

Dunque A è diagonalizzabile, poiché vi sono 2 autovalori distinti.

- Difatti, notiamo come considerando il sistema $(-1 \cdot I_n - A)v = 0$ si ha che :

$$\begin{cases} -2x + ky = 0 \\ -2x + ky = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{k}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k}{2}t \end{pmatrix} \implies \nu(-1) = dim(E_{-1}(A)) = 1$$

mentre per il sistema $((k+1) \cdot I_n - A)v = 0$ si ha che :

$$\begin{cases} kx - ky = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \nu(-1) = dim(E_{-1}(A)) = 1$$

dunque si ha che $\nu(-1) + \nu(k+1) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$

- Inoltre, otteniamo che i due vettori trovati sono base della matrice diagonalizzante B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{k}{2} & 1 \end{pmatrix} \implies D = B^{-1}AB \implies D = \begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9.7 Matrice di una trasformazione lineare

Definition 102. Matrice di una trasformazione lineare

Siano V e W due spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ una trasformazione lineare.

Data una base $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$ di V, una base $\mathcal{C} = w_1, \dots, w_m$ di W e i seguenti due isomorfismi (sezione 8.3):

$$\varphi_{\mathcal{B}} : K^n \to V : (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1 v_1 + \dots + t_n v_n)$$

$$\varphi_{\mathcal{C}} : K^m \to W : (s_1, \dots, s_n) \mapsto (s_1 w_1 + \dots + s_n w_m)$$

Definiamo come **matrice di f nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$** l'unica matrice $M_f \in Mat_{m \times n}(K)$ tale che:

$$\exists! M_f \in Mat_{m \times n}(K) \mid f = \varphi_{\mathcal{C}} \circ L_{M_f} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}"'] & W \\ K^n \arrow[r, "L_{M_f}"'] & K^m \arrow[u, "\varphi_{\mathcal{C}}"'] \end{tikzcd}$$

- Sia $L_A : K^n \to K^m$ una trasformazione lineare tale che:

$$f = \varphi_{\mathcal{C}} \circ L_A \circ \varphi_{\mathcal{B}^{-1}}$$

dove per definizione stessa di L_A è associata ad un'unica matrice $A \in Mat_{n\times m}(K)$

- Data la base canonica $e_1, \dots, e_n$ di K^n, per ogni $i \in [1, n]$ si ha che:

$$\varphi_{\mathcal{B}}(e_i) = 0 \cdot v_1 + \ldots + 1 \cdot v_i + \ldots + 0 \cdot v_n = v_i \implies \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i) = e_i$$

- Inoltre, per ogni $i \in [1, n]$ si ha che:

$$L_A(e_i) = Ae_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix} = A^i$$

- Infine, dato il seguente isomorfismo:

$$\varphi_{\mathcal{C}} : K^m \to W : (s_1, \dots, s_n) \mapsto (s_1 v_1 + \ldots + s_n v_n)$$

per ogni $i \in [1, n]$ si ha che:

$$\varphi_{\mathcal{C}}(A^i) = a_{1,i} w_1 + \ldots + a_{m,i} w_m$$

- A questo punto, per ogni $i \in [1, n]$ si ha che:

$$f(v_i) = \varphi_{\mathcal{C}}(L_A(\varphi_{\mathcal{B}^{-1}}(v_i))) \iff$$
$$\iff f(v_i) = \varphi_{\mathcal{C}}(L_A(e_i)) \iff f(v_i) = \varphi_{\mathcal{C}}(A^i) \iff$$
$$f(v_i) = a_{1,i} w_1 + \ldots + a_{m,i} w_m$$

- Dunque, è possibile ricostruire la matrice A tramite le seguenti combinazioni lineari:

$$f(v_1) = a_{1,1} w_1 + \ldots + a_{m,1} w_m \implies A^1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{1,n} w_1 + \ldots + a_{m,n} w_m \implies A^n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$\square$

Esempi:

1. • Consideriamo i seguenti due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]$:

$$V := \mathbb{R}[x]_{\leq 4} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid deg(p(x)) \leq 4\}$$

$$W := \mathbb{R}[x]_{\leq 3} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid deg(p(x)) \leq 3\}$$

dove $\mathcal{B} : x^4, x^3, x^2, x, 1$ è base di V e $\mathcal{C} : x^4, x^3, x^2, x, 1$ è base di W, da cui ne segue che:

$$dim(V) = 5 = dim(\mathbb{R}^5) \iff V \cong \mathbb{R}^5$$

$$dim(V) = 4 = dim(\mathbb{R}^5) \iff V \cong \mathbb{R}^4$$

• Sia $f' : V \to W : p(x) \mapsto p'(x)$ la trasformazione lineare corrispondente alla derivata di un polinomio. La matrice di f' nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ corrisponde a:

$$\begin{cases} f'(x^4) = 4x^3 = 4x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\ f'(x^3) = 3x^2 = 0x^3 + 3x^2 + 0x + 0 \\ f'(x^2) = 2x = 0x^3 + 0x^2 + 2x + 0 \\ f'(x) = x = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ f'(1) = 0 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \end{cases} \implies M_f = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Consideriamo quindi i seguenti isomorfismi:

$$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} : V \to \mathbb{R}^5 : ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^4 \to W : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

• Dato il polinomio $p(x) := 4x^4 + 2x^3 + x + 5 \in V$, si ha che:

$$\varphi_{\mathbb{B}}^{-1}(p(x)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \implies L_{M_f}(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(p(x))) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \varphi_{\mathcal{C}} L_{M_f}(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(p(x)))) = 16x^3 + 6x^2 + 1$$

2. • Consideriamo ancora gli spazi $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ e $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.
   • Sia $\Delta : V \to W : p(x) \mapsto p(x+1) - p(x)$ la trasformazione lineare corrispondente all'operatore differenza (anche detta "derivata discreta")
   • La matrice di Δ nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ corrisponde a:

$$\begin{cases} \Delta(x^4) = (x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ \Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \\ \Delta(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 \\ \Delta(x) = (x+1) - x = 1 \\ \Delta(1) = (x+1)^0 - x^0 = 0 \end{cases} \implies M_\Delta = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. • Siano $V = W = \mathbb{R}^2$ e sia:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$$

   • Siano inoltre

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   rispettivamente la base di $V = \mathbb{R}^2$ e di $W = \mathbb{R}^2$
   • Consideriamo quindi la matrice M_f di f nelle basi $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

   • Le coordinate della colonna M_f^1 corrisponderanno a:

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a - 2c = 4 \\ 3a + 4c = 6 \end{cases} \implies$$

$$\implies \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{10}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \implies \begin{cases} a = \frac{14}{5} \\ c = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

   • Analogamente, le coordinate di M_f^2 saranno:

$$b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3(-1) \\ 2 + 4(-1) \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b - 2d = -2 \\ 3b + 4 = -2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 += -3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 *= \frac{1}{10}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1 += -2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right) \implies \begin{cases} b = -\frac{6}{5} \\ d = \frac{2}{5} \end{cases}$$

- Dunque, concludiamo la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sia:

$$M_f = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Proposition 107. Matrice di cambiamento di base)

Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$ e $\mathcal{C} = w_1, \dots, w_n$ due basi di V.

Dato il vettore $v \in V$ tale che:

$$v = a_1 v_1 + \ldots + a_n v_n = b_1 w_1 + \ldots + b_n w_n$$

e dati i suoi **vettori delle coordinate** in base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$:

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad v_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Definiamo come **matrice di cambiamento di base** l'unica matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in Mat_{n\times m}(K)$ tale che:

$$\exists! M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in Mat_{n\times m}(K) \mid M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{C}}$$

Dimostrazione:

- Consideriamo l'automorfismo $\mathtt{id} : V \to V : v \mapsto v$ e consideriamo l'endomorfismo $L_A : K^n \to K^n$ tale che

  $$\mathtt{id} = \varphi_{\mathcal{C}} \circ L_A \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

  dove

  $$\varphi_{\mathcal{B}} : K^n \to V : (t_1, \dots, t_n) \mapsto (t_1 v_1 + \ldots + t_n v_n)$$
  $$\varphi_{\mathcal{C}} : K^n \to V : (s_1, \dots, s_n) \mapsto (s_1 w_1 + \ldots + s_n w_n)$$

- Le colonne della matrice A corrisponderanno a:

$$\mathtt{id}(v_1) = a_{1,1}w_1 + \ldots + a_{m,1}w_n \implies v_1 = a_{1,1}w_1 + \ldots + a_{m,1}w_n \implies A^1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathtt{id}(v_n) = a_{1,n}w_1 + \ldots + a_{m,n}w_n \implies v_n = a_{1,n}w_1 + \ldots + a_{m,n}w_n \implies A^n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- Dato un vettore $v \in V$, poiché l'automorfismo $\mathtt{id} : V \to V : v \mapsto v$ ha alcun effetto primario, l'unico effetto secondario ottenuto applicando la matrice di $\mathtt{id}$ al vettore contenente le coordinate di v in base $\mathbb{B}$ sarà quello di restituire le coordinate di v in base $\mathcal{C}$

$\square$

Esempio:

- Consideriamo le seguenti due basi dello spazio $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- Consideriamo la matrice del cambiamento dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Le coordinate della matrice del cambiamento di base corrisponderanno a:

$$a\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 5a + 7c = 1 \\ 6a + 8c = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$b\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 5b + 7d = 3 \\ 6b + 8d = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} b = 2 \\ d = -1 \end{cases}$$

$$\implies M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Consideriamo quindi il seguente vettore e le sue coordinate in base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x + 4y = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

- Le sue coordinate in base $\mathcal{C}$ corrisponderanno a:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 6 \\ -8 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- Difatti, notiamo che:

$$6\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

9.8 Matrici ortogonali

Definition 103. Base ortogonale

Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tale base viene detta **ortogonale** se i vettori sono tutti **ortogonali** tra loro, dunque se

$$v_i v_j = 0, \forall i \neq j$$

Definition 104. Base ortonormale

Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tale base è detta **ortonormale** se i vettori sono tutti **ortogonali** tra loro e sono **versori**, ossia aventi norma pari ad 1, dunque se:

$$v_i v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} ||v_i|| = 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

dove δ_{ij} viene detto **delta di Kroneker**.

Observation 70

Le basi ortonormali possono essere ottenute da dalla base canonica $e_1, \ldots, e_n$ attraverso **rotazioni** e **riflessioni**

Observation 71

Data una base ortonormale $\mathcal{B} = v_1, \ldots, v_n$ di $\mathbb{R}^n$ e dato un vettore $w \in \mathbb{R}^n$, le coordinate di v nella base $\mathcal{B}$ corrispondono a:

$$w = (w \cdot v_1) \cdot v_1 + \ldots + (w \cdot v_1) \cdot v_n$$

Proposition 108. Matrice ortogonale

Data una matrice $A \in Mat_{n \times m}(\mathbb{R})$, tale matrice viene detta **matrice ortogonale** se si verifica una delle seguenti seguenti condizioni equivalenti:

- $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n \iff A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T$
- Le colonne $A^1, \ldots, A^n$ sono base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
- Le righe $A_1, \ldots, A_n$ sono base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
- $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è isometria, ossia non cambia la distanza tra i punti del piano

(dimostrazione omessa)

Definition 105. Gruppo ortogonale

Dato il gruppo $(GL(n, \mathbb{R}), \cdot)$, definiamo $O(n) \leqslant GL(n, K)$ come **gruppo ortogonale**, dove

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$$

Dimostrazione:

- $I_n^{-1} = I_n = I_n^T \implies I_n \in O(n)$
- $A, B \in O(n) \implies A^{-1} = A^T, B^{-1} = B^T \implies (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^T A^T = (AB)^T \implies AB \in O(n)$
- $A \in O(n) \implies A^{-1} = A^T \implies (A^{-1})^{-1} = A = (A^T)^T \implies (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^T \implies A^{-1} \in O(n)$

□

Proposition 109. Normalizzazione di un vettore

Dato uno spazio vettoriale V e un vettore $v \in V$, la **normalizzazione di** v corrisponde a:

$$w = \frac{v}{||v||}$$

Dimostrazione:

- Poiché la norma di v, ossia $||v||$, corrisponde alla lunghezza geometrica di v, si vede facilmente che il vettore w ottenuto corrisponde ad un vettore avente la stessa direzione di v ma norma pari ad 1

□

Proposition 110. Proiezione di un vettore

Dato uno spazio vettoriale V e due vettori $v, w \in V$, la **proiezione di** v **su** w corrisponde a:

$$proj_w(v) = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w$$

Dimostrazione:

- Consideriamo la normalizzazione u del vettore w:

$$u = \frac{w}{||w||}$$

- Sia $x := proj_w(v)$ il vettore corrispondente alla proiezione di v su w. Per definizione stessa di proiezione su vettore, tale vettore avrà la stessa direzione del vettore w e di conseguenza anche la stessa direzione del vettore u. Dunque, si ha che:

$$x = ||x|| \cdot u$$

- Consideriamo quindi l'angolo θ interno ai vettori v e x. Per definizione stessa di coseno, si ha che:

$$\cos(\theta) = \frac{||x||}{||v||}$$

- Poiché w ha la stessa direzione di x, l'angolo interno ai vettori v e w coincide con l'angolo θ. Come visto nella sezione 8.5, si ha che:

$$\cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{||v||\,||w||}$$

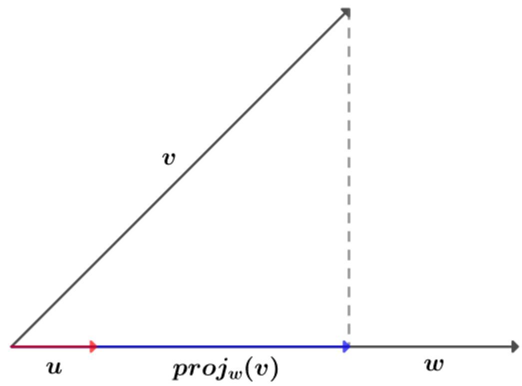
- Dunque, si ha che:

$$\frac{||x||}{||v||} = \cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{||v||\,||w||} \implies \frac{||x||}{||v||} = \frac{v \cdot w}{||w||}$$

- Infine, concludiamo che:

$$x = ||x|| \cdot u = \frac{v \cdot w}{||w||} \cdot \frac{w}{||w||} = \frac{v \cdot w}{||w||^2} w = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w$$

- Di seguito, vi è un'interpretazione grafica dei passaggi effettuati:



$\square$

Definition 106. Matrice simmetrica

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, tale matrice viene detta **simmetrica** se

$$A = A^T$$

Theorem 111. Teorema spettrale

Data una matrice simmetrica $S \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $Sp(S) \subset \mathbb{R}$
2. S è diagonalizzabile
3. Esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = B^1, \dots, B^n$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $B^i, \forall i \in [1, n]$ è autovettore di S
4. $\exists B \in O(n) \mid D = B^{-1}AB = B^TAB$ dove $D \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è una matrice diagonale

(dimostrazione omessa)

Method 8. Ortonormalizzazione di Gram-Schimdt

Sia V uno spazio vettoriale e sia $v_1, \dots, v_n$ una sua base. Il seguente algoritmo restituisce una base ortogonale $u_1, \dots, u_n$ di V e una base ortonormale $w_1, \dots, w_n$ di V:

1. Poniamo $u_1 := v_1$
2. Il vettore u_2 corrisponderà a: $u_2 = v_2 - proj_{u_1}(v_2)$
3. Difatti, notiamo che:
$$u_1 \cdot u_2 = u_1(v_2 - proj_{u_1}(v_2)) = u_1(v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{u_1 \cdot u_1})u_1 =$$
$$= u_1v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{||u_1||^2}||u_1|| = u_1v_2 - u_1v_2 = 0$$
dunque u_1 risulta essere ortogonale a u_2
4. In generale, il vettore u_k, dove $k \in [1, n]$, corrisponderà a:
$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} proj_{u_i}(v_k)$$
5. I vettori $u_1, \dots, u_k$ costituiscono una base ortogonale di V.
6. Per ottenere la base ortonormale $w_1, \dots, w_n$, basterà normalizzare ogni vettore della base ortogonale:
$$w_k = \frac{u_k}{||u_k||}, \forall k \in [1, n]$$

Capitolo 10

Algoritmi di crittografia

10.1 Algoritmo RSA

Method 9. Algoritmo di crittografia RSA

Siano:

- $p, q \in \mathbb{P} \mid p \neq q$ e sufficientemente grandi
- $n : pq$
- $\lambda(n) := mcm(p-1, q-1)$
- $e \in \mathbb{N} \mid \begin{cases} 1 < e < \lambda(n) \\ MCD(e, \lambda(n)) = 1 \end{cases}$
- $d := e{-}1(\texttt{mod}\ \lambda(n))$
- (e, n) una coppia detta **chiave pubblica**
- (d, n) una coppia detta **chiave privata**

Dato un **messaggio da cifrare** m tale che $MCD(m, n) = 1$, il **messaggio cifrato** c ottenuto tramite la **chiave pubblica** (e, n) corrisponde a:

$$m^e \equiv c(\texttt{mod}\ n)$$

Una volta ottenuto il messaggio cifrato, applicando la **chiave privata** (d, n) è possibile riottenere il messaggio m:

$$c^d \equiv m(\texttt{mod}\ n)$$

Poiché le due chiavi sono **l'una l'inversa dell'altra**, distribuendo la propria chiave pubblica (e, n) è possibile permettere ad un interlocutore di poterci inviare messaggi cifrati, per poi decifrarli tramite la propria chiave privata (d, n), la quale dovrà essere mantenuta **nascosta** al fine di non concedere ad altre persone di poter leggere il contenuto del messaggio m.

Dimostrazione:

- Poiché $\lambda(n) := mcm(p, q)$, si ha che:

$$\begin{cases} (p-1) \mid \lambda(n) \implies \exists k \in \mathbb{Z} \mid \lambda(n) = (p-1)k \\ (q-1) \mid \lambda(n) \implies \exists h \in \mathbb{Z} \mid \lambda(n) = (q-1)h \end{cases}$$

- Per il piccolo teorema di Fermat si ha che:

$$m^p \equiv m (\text{mod } p) \iff m^{p-1} \equiv 1((\text{mod } p) \implies$$

$$\implies m^{(p-1)k} \equiv 1(\text{mod } p) \iff m^{\lambda(n)} \equiv m(\text{mod } p)$$

e analogamente:

$$m^q \equiv m(\text{mod } q) \iff m^{q-1} \equiv 1(\text{mod } q) \implies$$

$$\implies m^{(q-1)h} \equiv 1(\text{mod } q) \iff m^{\lambda(n)} \equiv 1(\text{mod } q)$$

- Poiché $MCD(p, q) = 1$, per il teorema cinese dei resti si ha che:

$$\{m^{\lambda(n)} \equiv 1(\text{mod } p) m^{\lambda(n)} \equiv 1(\text{mod } q) \iff m^{\lambda n} \equiv 1(\text{mod } n)$$

- Inoltre, si ha che:

$$MCD(e, \lambda(n)) = 1 \iff [e] \in \mathbb{Z}^*_{\lambda(n)} \iff \exists [d] := [e]^{-1} \in \mathbb{Z}^*_{\lambda(n)} \iff$$

$$\iff ed \equiv 1(\text{mod } \lambda(n)) \iff ed = 1 + b\lambda(n), \exists b \in \mathbb{Z}$$

- Dunque, concludiamo che:

$$(m^e)^d \equiv m^{ed} \equiv m^{1+\lambda(n)j} \equiv m(m^{\lambda(n)})^j \equiv m(1)^j \equiv m(\text{mod } n)$$

$\square$

Observation 72

La condizione $MCD(m, n) = 1$ è **necessaria** affinché non vi sia una **perdita del messaggio** durante il processo di cifratura e de-cifratura. Difatti, tramite tale condizione si ha che:

$$MCD(m, n) = 1 \implies \begin{cases} n \nmid m \iff \nexists k \in \mathbb{Z} \mid m = nk \iff m \not\equiv 0(\text{mod } n) \\ p \nmid m \iff \nexists h \in \mathbb{Z} \mid m = ph \iff m \not\equiv 0(\text{mod } p) \\ q \nmid m \iff \nexists b \in \mathbb{Z} \mid m = qb \iff m \not\equiv 0(\text{mod } q) \end{cases}$$

Senza tale condizione, quindi, potrebbe verificarsi che $n \mid m \vee p \mid m \vee q \mid m$, portando ad una perdita del messaggio.

Observation 73

I due primi $p, q \in \mathbb{P}$ devono essere **sufficientemente grandi** poiché altrimenti sarebbe possibile ricavare gli interi componenti dell'algoritmo tramite essi, ottenendo quindi anche la **chiave privata** (d, n).

Difatti, poiché l'intero $n := pq$ è contenuto nella chiave pubblica (e, n), se p o q fossero due numeri piccoli si potrebbe ricavare l'uno dall'altro procedendo per **bruteforce**:

1. Preso $k \in \mathbb{P}$, se $k \mid n$ allora $k = p$ e $q = \frac{n}{k}$
2. Se invece $k \nmid n$, allora verrà ripetuto il passo precedente con il numero primo successivo
3. Una volta trovati p e q, basterà calcolare $[d] := [e]^{-1} (\text{mod } \lambda(n))$ per poter ottenere la chiave privata (d, n)

10.2 Interpolazione di Lagrange e Algoritmo SSS

Definition 107. Matrice di Vandermonde

Dati $x_0, \ldots, x_n \in K$, definiamo la seguente matrice $V \in Mat_{n \times n}(K)$ come **matrice di Vandermonde a coefficienti** $x_0, \ldots, x_n$:

$$V(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Proposition 112

Dati $x_0, \ldots, x_n \in K$, si ha che:

$$det(V(x^0, \ldots, x^n)) = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

Dimostrazione:

- Consideriamo il determinante di $V(x_0, \ldots, x_n)$:

$$det(V(x_0, x_1, \ldots, x_n)) = det \begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

- Poiché sottrarre un multiplo di una riga non ha effetti sul determinante, sottraendo la prima riga a tutte le altre si ha che:

$$det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \xrightarrow{R_i - R_1, \forall i>1} det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

- Eseguendo lo sviluppo di Laplace sulla prima colonna, si ha che:

$$det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix} = 1 \cdot det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

- Notiamo che $\forall i, k \in [1, n]$ si ha che:

$$x_i^k - x_0^k = (x_i - x_0)(x_i^{k-1} + x_i^{k-2}x_0 + \ldots + x_i x_0^{k-2} + x_0^{k-1})$$

  da cui ne segue che:

$$det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix} =$$

$$= det\begin{pmatrix} x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) & \cdots & (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \ldots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n + x_0) & \cdots & (x_n - x_0)(x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \ldots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \end{pmatrix}$$

- Per multilinearità del determinante, si ha che:

$$det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) & \cdots & (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \ldots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n + x_0) & \cdots & (x_n - x_0)(x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \ldots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \end{pmatrix} =$$

$$(x_1 - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_0) \cdot det\begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \ldots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \ldots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n}(x_j - x_0) \cdot det\begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \ldots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \ldots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \end{pmatrix}$$

- Sottraendo ad ogni colonna tutte le colonne precedenti moltiplicate per b_0, si ha che:

$$\prod_{j=1}^{n}(x_j-x_0)\cdot det\begin{pmatrix} 1 & x_1+x_0 & \cdots & x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_0+\ldots+x_1x_0^{n-2}+x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n+x_0 & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2}x_0+\ldots+x_nx_0^{n-2}+x_0^{n-1}\end{pmatrix} \xrightarrow{C^i-\sum_{j=1}^{n-1}x_0C^j,\forall i}$$

$$\prod_{j=1}^{n}(x_j-x_0)\cdot det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{n}(x_j-x_0)\cdot det(V(x_1,\ldots,x_n))$$

- Effettuando gli stessi passaggi ricorsivamente, concludiamo che:

$$det(V(x_0,\ldots,x_n)) = \prod_{j=1}^{n}(x_j-x_0)\cdot det(V(x_1,\ldots,x_n)) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n}(x_j-x_0)\cdot\prod_{h=2}^{n}(x_h-x_1)\cdot det(V(x_2,\ldots,x_n)) = \ldots = \prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

□

Lemma 113

Dati $x_0,\ldots,x_n \in K$, si ha che:

$$det(V(x_0,\ldots,x_n)) \neq 0 \iff x_i \neq x_j, \forall i \neq j$$

Dimostrazione:

- Poiché
$$det(V(x_0,\ldots,x_n)) = \prod_{0\le h<j\le n}(x_j-x_h)$$
si vede facilmente che:
$$\exists k,h \in [0,n] \mid x_k = x_h \implies x_k - x_h = 0 \implies det(V(x_0,\ldots,x_n)) = 0$$
da cui per contronominale otteniamo che:
$$det(V(x_0,\ldots,x_n)) \neq 0 \implies \nexists k,h \in [0,n] \mid x_k = x_h \implies x_k \neq x_h, \forall k,h \in [0,n]$$

- Viceversa, supponiamo per assurdo che $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ e che $det(V(x_0,\ldots,x_n)) = 0$. Ne segue che:
$$det(V(x_0,\ldots,x_n)) = 0 \iff \prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i) = 0$$

- Per la legge di annullamento del prodotto, ne segue che:

$$\prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_j - x_j) = 0 \implies (x_1 - x_0) = 0 \lor \ldots \lor (x_n - x_{n-1}) = 0 \implies$$

$$x_1 = x_0 \lor \ldots \lor x_n = x_{n-1}$$

contraddicendo quindi l'ipotesi per cui $x_k \neq x_j, \forall i \neq j$. Dunque, l'unica possibilità è che $det(V(x_0, \ldots, x_n)) \neq 0$

□

Proposition 114

Siano $x_0, \ldots, x_n \in K \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j$. Dati $y_0, \ldots, y_n \in K$, si ha che:

$$\exists! p(x) \in K[x]_{\leq n} \mid \begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ p(x_n) = y_n \end{cases}$$

Dimostrazione:

- Posto $p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in K[x]_{\leq n}$, si ha che:

$$\begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ p(x_n) = y_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

- Considerando $a_0, \ldots, a_n$ come le incognite del sistema, la matrice dei coefficienti associata a risulta essere una matrice di Vandermonde nella forma $V(x_0, \ldots, x_n)$. Di conseguenza, si ha che:

$$x_i \neq x_j, \forall i \neq j \iff det(V(x_0, \ldots, x_n)) \neq 0 \iff \exists! \text{ soluzione}$$

- Dunque, esiste può esistere un'unico polinomio $p(x) \in K_{\leq n} \mid p(x_0) = y_0, \ldots, p(x_n) = y_n$

□

Corollary 33

Dati $x_0, \ldots, x_n \in K \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, si ha che:

$$\exists! p_i(x) \in K[x]_{\leq n} \mid p_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

dove $\delta_{i,j}$ è il **delta di Kroneker** e dove $p_1, \ldots, p_n$ formano una base di $K[x]_{\leq n}$ detta **base di Lagrange**

Dimostrazione:

- Dato $i \in [0, n]$, si ha che:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \iff (x - x_j) \mid p_i(x), \forall j \neq i \in [0, n] \iff \begin{cases} p_i(x_1) = 0 \\ \vdots \\ p_i(x_i) = 1 \\ \vdots \\ p_i(x_n) = 0 \end{cases}$$

- Per la proposizione precedente, l'unica possibilità è che $p_0(x), \dots, p_n(x) \in K[x]_{\leq n}$ siano unici, poiché:

$$\exists! q(x) \in K[x]_{\leq n} \mid q(x_1) = 0, \dots, q(x_i) = 1, \dots, q(x_n) = 0$$

$\square$

- Di conseguenza, ne segue automaticamente che tali polinomi siano linearmente indipendenti tra loro, poiché nessuno di loro può essere espresso come combinazione lineare degli altri.
- Inoltre, poiché $dim(K[x]_{\leq n}) = n + 1$, sappiamo che $n + 1$ vettori possono essere linearmente indipendenti se e solo se sono anche generatori, di conseguenza $p_0, \dots, p_n$ sono una base di $K[x]_{\leq n}$

$\square$

Theorem 115. Interpolazione di Lagrange

Dati i seguenti **nodi dell'interpolazione** $(x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n)$, dove $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, e dati i seguenti polinomi $p_0, \dots, p_1 \in K[x]_{\neq n}$ tali che:

$$p_i(x) = \prod_{0 \leq j \leq n \mid j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

L'**unico polinomio** $p(x) \in K[x]_{\leq n}$ **passante per ogni nodo** corrisponde a:

$$p(x) = y_0 p_0(x) + \ldots + y_n p_n(x)$$

Dimostrazione:

- Consideriamo la base di Lagrange $p_0, \dots, p_n \in K[x]_{\leq n}$ dello spazio $K_{\leq n}$ vista nel corollario precedente:

$$\exists! p_i(x) \in K[x]_{\leq n} \mid p_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

- Per ogni polinomio della base si ha che:

$$p_i(x_j) = 0, \forall j \neq i \in [0, n] \iff (x - x_j) \mid p_i(x), \forall j \neq i \in [0, n] \implies$$

$$\implies (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \mid p_i(x) \iff$$
$$\iff p_i(x) = c_i(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n), \exists c_i \in K$$

- Poiché $p_i(x_i) = 1, \forall i \in [0, n]$, l'unica possibilità è che $c_i = 1, \forall i \in [0, n]$. Inoltre, poiché $p_i(x_i) = 1$, ne segue che:

$$p_i(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - i + 1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \implies$$
$$p_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - i + 1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{1} \implies$$
$$p_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - i + 1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{p_i(x_i)} \implies$$
$$p_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)} =$$
$$p_i(x) = \prod_{0 \le j \le n | j \ne i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Sia quindi $p(x) \in K[x]_{\le n}$ definito come:

$$p(x) := y_0 p_0(x) + \ldots + y_n p_n(n)$$

- Dunque, $\forall k \in [0, n]$ si ha che:

$$p(x_k) = y_0 p_0(x_k) + \ldots + y_k p_k(x_k) + \ldots + y_n p_n(x_k) \implies$$
$$p(x_k) = y_0 \cdot 0 + \ldots + y_k \cdot 1 + \ldots + y_n \cdot 0 = y_k \implies \begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ p(x_n) = y_n \end{cases}$$

- Per la proposizione precedente, concludiamo che $p(x)$ sia l'unico polinomio in $K[x]_{\le n}$ tale che $p(x_0) = y_0, \ldots, p(x_n) = y_n$

$\square$

Observation 74

Dati $n+1$ punti del piano cartesiano $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, è possibile utilizzare l'interpolazione di Lagrange per trovare l'unico polinomio di grado n, dunque $p(x) \in K[x]_{\le n}$, passante per tali tre punti

Method 10. Algoritmo SSS

Il seguente algoritmo permette di suddividere in $n+1$ **partizioni** un **segreto** $s \in K$, per poi ricostruire il quest'ultimo tramite le partizioni stesse:

1. Scelti casualmente i coefficienti $a_1, \dots, a_n \in K$, definiamo $p(x) \in K[x]_{\leq n}$ come:

$$p(x) = s + a_1 x + \ldots + a_n x_n$$

2. Scelti $n+1$ valori $x_0, \dots, x_n \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, costruiamo i nodi dell' **interpolazione di Lagrange** come $(x_0, p(x_0)), \dots, (x_n, p(x_n))$
3. Distribuiamo ogni nodo ad eventuali interlocutori
4. Una volta riottenuti gli $n+1$ nodi, tramite l'interpolazione di Lagrange è possibile ricostruire $p(x)$
5. Infine, poiché s è il termine noto di $p(x)$, è possibile riottenere il segreto tramite $p(0) = s$