SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

UNIVERSITÀ "SAPIENZA" DI ROMA
FACOLTÀ DI INFORMATICA

Algebra

Appunti integrati con il libro "Geometria analitica con elementi di Algebra lineare", M. Abate, C. De Fabritiis

Author
Simone Bianco

2 novembre 2022

Indice

Capitolo 0

Introduzione

Il seguente corso mira all'apprendimento dei principali elementi di Algebra Elementare, Algebra Lineare e Teoria dei Gruppi, incentrandosi principalmente su:

- **Insiemi**, partizioni, applicazioni, **relazioni** d'equivalenza e d'ordine, permutazioni. I numeri naturali e il **principio di induzione**. Il teorema binomiale.
- **Strutture algebriche**: Gruppi, anelli e campi, reticoli, sottostrutture, omomorfismi . Anelli di polinomi. L'algoritmo di Euclide. Classi resto modulo un intero. Congruenze ed equazioni in Z/n. Il teorema di Eulero-Fermat.
- **Sistemi di equazioni lineari**: algoritmo di Gauss, determinante di una matrice quadrata. Matrice inversa. Rango di una matrice: Il teorema di Cramer ed il teorema di Rouche-Capelli. Risoluzione di sistemi lineari omogenei.
- **Spazi vettoriali**: dipendenza e indipendenza lineare, basi. Matrici. Applicazioni lineari e loro rappresentazione: cambiamenti di base, diagonalizzazione di un operatore lineare. Polinomio caratteristico e relativa invarianza.
- **Elementi di teoria dei gruppi**: Gruppi ciclici, periodo di un elemento di un gruppo. Classificazione dei gruppi ciclici. Classi laterali modulo un sottogruppo. Il teorema di Lagrange e le sue conseguenze, sottogruppi normali. Il teorema fondamentale di omomorfismo tra gruppi.

Prima di approcciarsi al seguente corso, è consigliato avere una conoscenza sufficiente dei concetti espressi nel corso di ***Metodi Matematici per l'Informatica***

Capitolo 1

Algebra elementare

1.1 Richiami di insiemistica

Definiamo **insieme** una collezione di elementi su cui vengono svolte delle **operazioni algebriche**.

$$S : \{1, 2, 3, 4, ...\}$$

In questo corso tratteremo molto le proprietà e le operazioni applicabili sulle varie **strutture algebriche** rappresentate tramite insiemi, pertanto effettuiamo un breve ripasso di **teoria degli insiemi**:

- Dati due insiemi A, B, definiamo l'**insieme unione** $A \cup B$ come l'insieme dove

$$A \cup B : \{x \in A \vee x \in B\}$$

- Definiamo invece come **insieme intersezione** $A \cap B$ l'insieme dove

$$A \cap B : \{x \in A \wedge x \in B\}$$

- Considerato un insieme X, affermiamo che l'insieme A è **sottoinsieme** dell'insieme X (denotato come $A \subseteq X$) se si verifica che

$$A \subset S \iff x \in A \implies x \in X$$

- Considerato un insieme X e un insieme A tale che $A \subset X$, denotiamo l'**insieme complementare** di A su X come

$$X \setminus A = \{x \in X \,|\, x \notin A\}$$

- La **legge di De Morgan** afferma che

$$X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$$

$$X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$$

- Dato un insieme di partenza detto **dominio** ed un insieme di arrivo detto **codominio**, definiamo come **funzione** la relazione che associa ogni elemento del dominio ad un elemento del codominio

$$f : X \to Y : x \mapsto y$$

- Definiamo come **immagine della funzione** l'insieme di tutti gli elementi del codominio raggiungibili da un elemento del dominio

$$Im(f) = \{y \in Y, \exists x \in X \mid f(x) = y\}$$

- Una funzione viene detta **iniettiva** se ogni elemento del dominio è associato ad un elemento diverso del codominio

$$\texttt{Iniettività} : \forall x_1, x_2 \in X \mid x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Una funzione viene detta **suriettiva** se ogni elemento del codominio è raggiungibile da almeno un elemento del dominio

$$\texttt{Suriettività} : \forall y \in Y, \exists x \in X \mid f(x) = y$$

  In alternativa, potremmo affermare che una funzione è suriettiva se la sua immagine coincide con il suo codominio

$$\texttt{Suriettività} : Im(f) = Y$$

- Una funzione viene detta **biettiva** (o biunivoca) se è sia iniettiva sia suriettiva. Se esiste una funzione biettiva tra due insiemi X ed Y, allora tali insiemi possiedono la **stessa cardinalità**

$$\exists f : X \to Y \mid f \text{ è biettiva} \implies |X| = |Y|$$

- Definiamo come **prodotto cartesiano** di due insiemi X e Y l'insieme contenente tutte le coppie (x, y) dove $x \in X$ e $y \in Y$

$$X \times Y : \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

- Date due funzioni f, g, la loro **funzione composta** è una funzione che associa un elemento del dominio di f ad un elemento del codominio di g

$$f : X \to Y : x \mapsto f(x)$$
$$g : Y \to Z : x \mapsto g(x)$$
$$g \circ f : X \to Z : x \mapsto g(f(x)) : x \mapsto (g \circ f)(x)$$

- Definiamo come **insieme dei numeri naturali** l'insieme

$$\mathbb{N} : \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

- Definiamo come **insieme dei numeri interi** l'insieme

$$\mathbb{Z} : \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

- Definiamo come **insieme dei numeri razionali** l'insieme

$$\mathbb{Q} : \left\{ \frac{m}{n} \,|\, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

- Definiamo come **insieme dei numeri irrazionali** l'insieme

$$\mathbb{I} : \left\{ x \,|\, \nexists m, n \in \mathbb{Z} : x = \frac{m}{n} \right\}$$

- Definiamo come **insieme dei numeri reali** l'insieme

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$

1.2 Assiomi e Strutture algebriche

Una particolare categoria di funzioni che studieremo durante il corso corrisponde alle **operazioni binarie**:

Definition 1. Operazione binaria

Dato un insieme S, definiamo **operazione binaria** una funzione che presi due elementi di S in input, restituisce un elemento di S in output

$$m : S \times S \to S : (x, y) \mapsto m(x, y)$$

Ad esempio, sull'insieme $\mathbb{R}$ possiamo considerare l'**operazione binaria additiva**, indicata come

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$$

e l'**operazione binaria moltiplicativa**, indicata come

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$$

Inoltre, anche la composizione tra funzioni corrisponde ad un'operazione binaria:

$$\circ : X \times X \to X : (g, f) \to g \circ f$$

Tali operazioni binarie **possono** godere di alcune **proprietà algebriche**:

Definition 2. Associatività (Assioma 1)

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$ e tre elementi $x, y, z \in S$, l'ordine di applicazione di tale operazione binaria non influenza il risultato

$$m(m(x, y), z) = m(x, m(y, z)) \quad \forall x, y, z \in S$$

Esempi:

- Operazione additiva: $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z \quad \forall x, y, z \in S$
- Operazione moltiplicativa: $(xy)z = x(yz) = xyz \quad \forall x, y, z \in S$

Definition 3. Elemento neutro (Assioma 2)

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$, esiste un elemento neutro e tale che

$$m(x, e) = x \quad \forall x \in S$$

Esempi:

- Operazione additiva: $x + 0 = x \quad \forall x \in S$
- Operazione moltiplicativa: $x \cdot 1 = x \quad \forall x \in S$

Definition 4. Elemento inverso (Assioma 3)

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$, per ogni elemento $x \in S$, esiste un elemento inverso x^{-1} tale che

$$m(x, x^{-1}) = e$$

Tale assioma implica necessariamente l'esistenza dell'elemento neutro e

Esempi:

- Operazione additiva: $x + (-x) = 0 \quad \forall x \in S$
- Operazione moltiplicativa: $x \cdot \frac{1}{x} = 1 \quad \forall x \in S$

Definition 5. Commutatività (Assioma 4)

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$, l'ordine elementi non influenza il risultato

$$m(x, y) = m(y, x) \quad \forall x \in S$$

Esempi:

- Operazione additiva: $x + y = y + x \quad \forall x \in S$
- Operazione moltiplicativa: $xy = yx \quad \forall x \in S$

Osservazioni

1. Se valgono gli assiomi di **elemento neutro** e di **commutatività**, allora può esistere **un solo elemento neutro**:

$$e_1 = m(e_1, e_2) = m(e_2, e_1) = e_2 \implies e_1 = e_2$$

2. Se vale l'assioma di **elemento inverso**, allora può esistere **un solo elemento inverso**:

$$m(x, x_1^{-1}) = 1 = m(x, x_2^{-1}) \implies m(x, x_1^{-1}) = m(x, x_2^{-1}) \implies x_1^{-1} = x_2^{-1}$$

Una volta definiti i quattro assiomi principali delle operazioni binarie, possiamo definire le seguenti quattro **strutture algebriche**:

Definition 6. Strutture algebriche semplici

Data la coppia (S, m) dove S è un **insieme** e m l'**operazione binaria** applicata su di esso, diciamo che tale coppia è:

- Un **semigruppo** se vale l'assioma di associatività (assioma 1)
- Un **monoide** se valgono gli assiomi di d'associatività e di elemento neutro (assiomi 1 e 2)
- Un **gruppo** se valgono gli assiomi di associatività, elemento neutro e elemento inverso (assiomi 1, 2 e 3)
- Un **gruppo abeliano** (o commutativo) se valgono gli assiomi di associatività, elemento neutro, elemento inverso e commutatività (assiomi 1, 2, 3 e 4)

Esempi:

- $(\mathbb{N} - \{0\}, +)$ è un **semigruppo** (assioma 1)
- $(\mathbb{N}, +)$ è un **monoide** commutativo (assiomi 1, 2 e 4)
- $(\mathbb{Q}, \div)$ è un **gruppo** (assiomi 1, 2, 3 e 4)
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ è un **monoide** commutativo (assiomi 1, 2 e 4)
- Dati due insiemi X, Y, denotiamo con Y^X l'insieme composto da tutte le funzioni da X in Y

$$Y^X : \{f : X \to Y\}$$

  Allora, la coppia $(X^X, \circ)$ è un monoide, poiché si ha:

$$f, g, h : X \to X \implies h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \implies \texttt{Associatività}$$

$$f : X \to X : x \to f(x), \texttt{idt} : X \to X : x \to x \implies f \circ \texttt{idt} = f \implies \texttt{Elemento neutro}$$

  dove `idt` è la funzione identità, ossia $idt(x) = x$.

- Dato un insieme X, denotiamo con S_X il **gruppo simmetrico su X**, ossia l'insieme composto da tutte le funzioni biettive da X in se stesso.

$$S_X : \{f : X \to X \mid f \texttt{ è biettiva}\}$$

Allora, la coppia $(S_X, \circ)$ è un gruppo, poiché:

$$f, g, h : X \to X \implies h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \implies \texttt{Associatività}$$
$$f : X \to X : x \to f(x), \texttt{idt} : X \to X : x \to x \implies f \circ \texttt{idt} = f \implies \texttt{Elemento neutro}$$
$$\exists f^{-1} : X \to X \mid f \circ f^{-1} = \texttt{idt} \implies \texttt{Elemento inverso}$$

Osservazione:

Una funzione f può essere invertibile se e solo se f è biettiva.

$$f \texttt{ è invertibile} \iff f \texttt{ è biettiva}$$

Dimostrazione:

Se f è invertibile, allora:

- f è suriettiva poiché:
$$x = f(f^{-1}(x)), \forall x \in X$$
- f è iniettiva poiché:
$$f(x) = f(y) \implies x = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(y)) = y$$

Se f è biettiva, allora
$$\forall x \in X, \exists! y \mid f(y) = x$$

Ponendo $y = f^{-1}(x)$, il vincolo biettivo è rispettato e inoltre otteniamo che

$$\forall f \in S_X, \exists f^{-1} \in S_X \mid f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f$$

Approfondimento sul gruppo simmetrico

Avendo introdotto il gruppo simmetrico su X come

$$S_X : \{f : X \to X \mid f \texttt{ è biettiva}\}$$

Tale insieme presenta alcune caratteristiche:

- Trattandosi di funzioni biettive, ogni elemento del gruppo simmetrico corrisponde ad una **permutazione** del dominio X
- Se X è finito, ossia possiede un numero finito di elementi (dunque $|X| = n$), allora denotiamo il suo **gruppo simmetrico di ordine** n come S_n

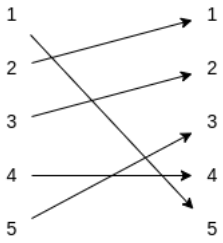
- Poiché tutte le permutazioni possibili di un insieme di n elementi corrispondono a $n!$, allora abbiamo che:

$$|X| = n \implies |S_n| = n!$$

Data una **permutazione** $\sigma \in S_n$, possiamo utilizzare due notazioni per poterne descrivere il comportamento:

Tramite grafo

σ



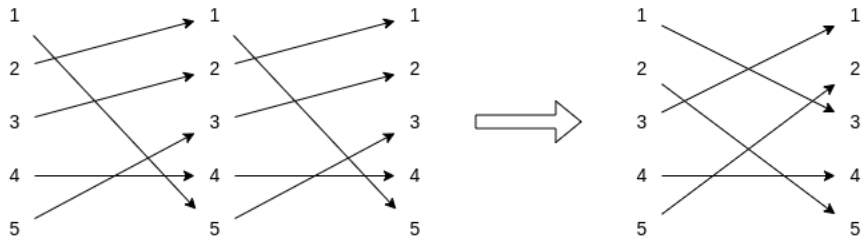
Tramite matrice

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Possiamo definire l'**operazione prodotto tra due permutazioni** come l'applicazione susseguita di entrambe le permutazioni. Ad esempio, consideriamo il prodotto $\sigma \cdot \sigma$, dove σ è la permutazione descritta nell'esempio precedente. In tal caso, si ha che:

- Per effettuare il prodotto tramite rappresentazione con grafo, ci basta considerare l'unione delle frecce appartenenti ad ognuna delle permutazioni:

σ **σ** **σσ**



- Per effettuare il prodotto tramite rappresentazione con matrici, ci basta far "scorrere" gli elementi iniziali della seconda permutazione affinché coincidano con quelli finali della prima permutazione. Il risultato del prodotto sarà costituito dagli elementi iniziali della prima e gli elementi finali della seconda:

$$\begin{matrix} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \sigma = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \end{matrix} \implies \sigma\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Attenzione: è necessario evidenziare come l'operazione prodotto tra due permutazioni **non sia commutativa** se le due permutazioni sono diverse tra loro, ad esempio:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix} \implies \sigma\tau \neq \tau\sigma$$

1.3 Anelli e Campi

Consideriamo un insieme A e due operazioni binarie su di esso, definite come:

$$+ : A \times A \to A$$

$$\cdot : A \times A \to A$$

Se tale struttura algebrica risulta essere un **gruppo abeliano** nell'operazione somma, un **monoide** nell'operazione prodotto **relazione distributiva** tra le due operazioni, allora definiamo tale struttura algebrica come **anello**.

Definition 7. Anello

Definiamo una struttura algebrica del tipo $(A, +, \cdot)$ come **anello** se:

- $(A, +)$ è un **gruppo abeliano**
- $(A, \cdot)$ è un **monoide**
- Vale la **relazione distributiva**, definita come:

$$a(b + c) = ab + ac \quad \forall a, b, c \in A$$

Inoltre, definiamo tale struttura come **anello commutativo** se nella coppia $(A, \cdot)$ vale anche l'assioma **commutativo**:

$$ab = ba \quad \forall a, b \in A$$

Osservazione:

In un anello $(A, +, \cdot)$ applicare l'operazione prodotto tra un qualsiasi elemento $a \in A$ e l'elemento neutro 0 dell'operazione somma, restituirà l'elemento neutro stesso come risultato:

$$a \cdot 0 = 0 \quad \forall a \in A$$

Dimostrazione:

Riscriviamo l'elemento $a \in A$ come:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (0 + 1) = a \cdot 0 + a \cdot 1 = a \cdot 0 + a$$

A questo punto, poniamo:

$$a = a \cdot 0 + a$$

$$a + (-a) = a \cdot 0 + a + (-a)$$

$$0 = a \cdot 0$$

Nel caso in cui si abbia un **anello commutativo** in cui viene rispettato l'assioma di **elemento inverso** nell'operazione prodotto, allora definiamo tale struttura algebrica come **campo**.

Definition 8. Campo

Definiamo una struttura algebrica del tipo $(A, +, \cdot)$ come **campo** se:

- $(A, +, \cdot)$ è un **anello commutativo**
- $(A, \cdot)$ ammette l'assioma di **elemento inverso**, ossia se:

$$\forall a \in A \setminus \{0\}, \exists a^{-1} \in A \,|\, a \cdot a^{-1} = 1$$

Dunque, in un campo si ha anche che $(A \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano

Esempi:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un **anello commutativo**
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un **campo**
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un **campo**
- Sia A un **anello commutativo**. Definiamo l'**insieme dei polinomi** aventi come coefficienti elementi dell'anello A come:

  $A[x] : \{\texttt{polinomi a coefficienti in } A\} : \{a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n \,|\, a_0, a_1, ..., a_n \in A\}$

  Dati due polinomi $p(x), q(x) \in A[x]$, dunque definiti come

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{n} b_i x^i$$

  abbiamo che:

  - L'**operazione somma** corrisponde a:

$$p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{+\infty} (a_i + b_i) x^i$$

    dove $a_i, b_i = 0$ per $i > n$

  - L'**operazione prodotto** corrisponde a:

$$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{n} a_i b_j x^{i+j} \right)$$

  - In $(A[x], +, \cdot)$ l'**elemento neutro** è il polinomio costante (ossia aventi solo grado zero), indicato col simbolo 1

- Poiché possiamo vedere ogni $a \in A$ come un **polinomio costante** in $A[x]$ (dunque un polinomio del tipo $p(x) = a_0 + a_1x^0 ... + a_nx^0 \in A[x] \,|\, a_0 \in A$), allora deduciamo che $A \subset A[x]$, implicando che $(A[x], +, \cdot)$ possa essere un anello commutativo se e solo se anche A lo è, fattore dato per vero come ipotesi iniziale.
- Tuttavia, l'anello commutativo $(A[x], +, \cdot)$ **non ammette elemento inverso nell'operazione prodotto**, poiché il grado dei polinomi è $0 \leq i \leq n$. Ad esempio, il polinomio $p(x) = x$ non ammette inversi, poiché $x^{-1} \notin A[x]$. Dunque, $(A, +, \cdot)$ **non è un campo**.

1.3.1 Numeri complessi

Introduciamo il simbolo i con cui indichiamo l'**unità immaginaria**, avente la seguente proprietà: $i^2 = -1$.

Definiamo l'insieme dei **numeri complessi** come

$$\mathbb{C} : \{a + ib \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

ossia l'insieme delle espressioni $z = a + ib$ composte dalla somma di una **parte reale**, indicata con $Re(z) = a$, ed una **parte immaginaria**, indicata con $Im(z) = b$.

Ovviamente, da tale definizione di insieme dei numeri complessi ne segue che $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, poiché $\forall a \in \mathbb{R} \implies z \in \mathbb{C} \,|\, z = a + i \cdot 0$. Inoltre, definiamo un **numero immaginario puro** come un numero nella forma $z \in \mathbb{C} \,|\, z = 0 + i \cdot b$.

In questa sezione, vedremo le varie **proprietà dei numeri complessi**, arrivando fino al provare che essi corrispondano ad un **campo**.

Partiamo dal definire le operazioni di somma e prodotto. Dati due numeri $z, w \in \mathbb{C}$, definiti come $z = a + ib$ e $w = c + id$, abbiamo che:

$$z + w = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d) \implies z + w \in \mathbb{C}$$

$$zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \implies zw \in \mathbb{C}$$

Verifichiamo facilmente che la struttura $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ risulta essere un **anello commutativo**:

- **Associatività della somma**

$$(z + w) + q = z + (w + q) = z + w + q, \quad \forall z, w, q$$

- **Elemento neutro della somma**

$$\exists! 0 \in \mathbb{C} \,|\, z + 0 = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- **Elemento inverso della somma**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists! - z \in \mathbb{C} \,|\, z + (-z) = 0$$

- **Commutatività della somma**

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \,|\, z + w = w + z$$

- **Associatività del prodotto**

$$(zw)q = z(wq) = zwq, \quad \forall z, w, q$$

- **Elemento neutro del prodotto**

$$\exists 1 \in \mathbb{C} \,|\, z \cdot 1 = z, \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- **Commutatività del prodotto**

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \,|\, zw = wz$$

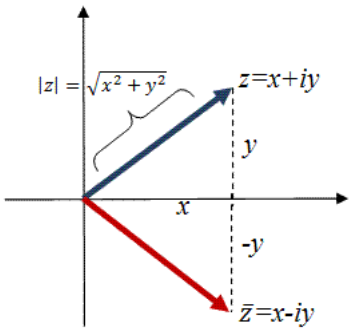
- **Relazione distributiva**

$$\forall z, w, q \in \mathbb{C} \,|\, z(w + q) = zw + zq$$

A questo punto, l'ultimo step da svolgere per poter definire $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ come un **campo**, ossia provare l'ammissione dell'**assioma di elemento inverso del prodotto**.

Poiché un numero complesso è determinato da una **coppia di valori** $a, b \in \mathbb{R} \,|\, z \in \mathbb{C}, z = a + ib$, possiamo rappresentare tale numero graficamente attraverso il **piano di Gauss**, avente come ascisse la **parte reale** dei numeri complessi e come ordinate la **parte immaginaria**.

Ad esempio, il numero $z = -3 - 3i$ viene rappresentato come:



Per tale motivo, dato un elemento $z \in \mathbb{C}$, definiamo come suo **valore assoluto** il numero reale corrispondente alla distanza di z stesso dall'origine, facilmente ricavabile attraverso il **teorema di Pitagora**:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Inoltre, definiamo come **numero coniugato di** z ($\overline{z} \in \mathbb{C}$) il numero complesso avente come parte immaginaria il valore inverso della parte immaginaria di z:

$$z = a + ib \implies \overline{z} = a - ib \implies Im(\overline{z}) = -Im(z)$$

Osservazioni:

- Dati $z, w \in \mathbb{C} \,|\, z = a + ib, w = c + id$, la **somma dei loro coniugati** equivale al **coniugato della loro somma**

$$\overline{z} + \overline{w} = a - ib + c - id = (a - c) - i(b + d) = \overline{z + w}$$

- Dati $z, w \in \mathbb{C} \,|\, z = a + ib, w = c + id$, il **prodotto dei loro coniugati** equivale al **coniugato del loro prodotto**

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc) = \overline{zw}$$

- Dato $z \in \mathbb{C}$, il **prodotto** tra **esso** e il suo **coniugato** corrisponde al **quadrato del valore assoluto** di z

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

A questo punto, proviamo a definire l'elemento inverso del prodotto come:

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \exists! z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a + ib} \,|\, z \cdot z^{-1} = 1$$

Tuttavia, il numero inverso $z^{-1} = \frac{1}{a+ib}$ non risulta apparire nella forma $c + id \,|\, c, d \in \mathbb{R}$ (poiché le parti reali e immaginarie dovrebbero essere al numeratore).

Decidiamo quindi di riscrivere z^{-1} come:

$$z = a + ib \implies z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2} \implies z^{-1} \in \mathbb{C}$$

A questo punto, ponendo $c = \frac{a}{a^2+b^2}$ e $d = \frac{-b}{a^2+b^2}$, otteniamo che $z^{-1} = c + id \implies z^{-1} \in \mathbb{C}$ è un numero complesso diverso da zero, rispettando il vincolo di dominio richiesto dalla condizione di validità dell'assioma di elemento inverso del prodotto.

Avendo provato quindi la validità dell'ultimo assioma richiesto, possiamo dichiarare i **numeri complessi** come un **campo**.

Approfondimento sui numeri complessi

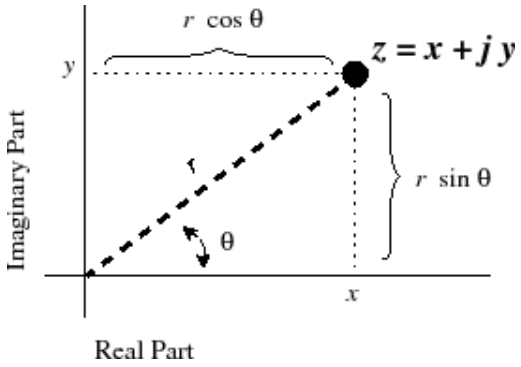
Abbiamo visto come un numero complesso possa essere espresso come un punto sul piano gaussiano tramite una **coppia di valori**, descrivendo la distanza di tale punto dall'origine del piano $(0, 0)$ come $|z|$.

Possiamo quindi descrivere una **circonferenza di raggio** $r = |z|$ rappresentante tutti i numeri complessi aventi la stessa distanza dall'origine, dove θ corrisponde all'**arco in radianti** descritto dal **vettore** costruito attraverso le due coordinate gaussiane rappresentate da z.

Dunque, se $r = |z|$, abbiamo che:

$$r = |z| \implies \begin{cases} a = r \cdot cos(\theta) \\ b = r \cdot sin(\theta) \end{cases} \implies \begin{cases} cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|} \\ sin(\theta) = \frac{b}{r} = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Graficamente, ciò corrisponde a dire che:



Tuttavia, ricordando le proprietà delle funzioni seno e coseno, notiamo come il sistema imposto ammetta **infinite soluzioni**, poiché se θ è una soluzione allora anche $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ è soluzione del sistema.

Per tale motivo, ogni soluzione valida viene detta **argomento di z** e, in particolare, esiste **un solo argomento principale** tale che $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Definiamo quindi come $arg(z)$ l'insieme contenente tutti gli argomenti di z, mentre definiamo come $Arg(z)$ l'argomento principale di z.

Considerato il sistema imposto, dato un numero $z = a + ib \in \mathbb{C}$, possiamo riscrivere tale numero complesso nella sua **forma polare**, ossia:

$$z = a + ib = r \cdot cos(\theta) + r \cdot i \cdot sin(\theta) = r \cdot (cos(\theta) + i \cdot sin(\theta))$$

Introduciamo ora la seguente **notazione contratta**:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)$$

Riscriviamo quindi la forma polare di z come:

$$z = r \cdot (cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)) = re^{i\theta}$$

Giustificazione:

Matematicamente, tramite le proprietà degli esponenti abbiamo che

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

Svolgiamo ora tale calcolo tramite la notazione esplicita

$$(cos(\theta_1) + i \cdot sin(\theta_1)) \cdot (cos(\theta_2) + i \cdot sin(\theta_2)) =$$

$$[cos(\theta_1) \cdot cos(\theta_2) - sin(\theta_1) \cdot sin(\theta_2)] + i \cdot [cos(\theta_1) \cdot cos(\theta_2) + sin(\theta_1) \cdot sin(\theta_2)] =$$

Tramite le proprietà trigonometriche, riscriviamo tale espressione come:

$$cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot sin(\theta_1 + \theta_2)$$

Riscrivendo il risultato nella forma contratta imposta, otteniamo che i due calcoli matematici risultano essere equivalenti tra di loro:

$$cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$$

L'uso di tale notazione ci permette di svolgere in modo rapido operazioni tra numeri complessi, in particolare tramite la **formula di De Moivre**:

$$z \in \mathbb{C}, z = re^{i\theta} \implies z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Esempi:

1. Dato $z = -i$, calcolare z^4.
   - Calcoliamo l'argomento principale di z: $|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$

$$\begin{cases} cos(\theta) = \frac{0}{1} = 0 \\ sin(\theta) = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases} \implies Arg(z) = \frac{3}{2}\pi \implies arg(z) = Arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

   - Quindi, riscriviamo z come

$$z = re^{Arg(z)\cdot i} = e^{\frac{3}{2}\pi \cdot i}$$

   - A questo punto, z^4 corrisponderà a:

$$z^4 = e^{4\cdot\frac{3}{2}\pi\cdot i} = e^{6\pi\cdot i} = e^{0\cdot i} = 1$$

2. Dato $z = 1 - i$, calcolare z^{10}.
   - Calcoliamo l'argomento principale di z: $|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\begin{cases} cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies Arg(z) = \frac{7}{4}\pi \implies arg(z) = Arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

   - Quindi, riscriviamo z come

$$z = re^{Arg(z)\cdot i} = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi\cdot i}$$

   - A questo punto, z^{10} corrisponderà a:

$$z^{10} = (\sqrt{2})^{10}e^{10\cdot\frac{7}{4}\pi\cdot i} = 2^5 e^{\frac{35}{2}\pi\cdot i} = 2^5 e^{(16\pi+\frac{3}{2}\pi)\cdot i} = 2^5 e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

   - Siccome abbiamo visto che $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$, allora riscriviamo z^10 come:

$$z^{10}2^5 e^{\frac{3}{2}\pi i} = -2^5 i$$

Teorema fondamentale dell'algebra

Considerati due numeri z e n dove $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ci chiediamo quante siano le **soluzioni complesse dell'equazione** $x^n = z$.

Nel caso in cui $z = 0$, l'unica soluzione risulta essere $x = 0$. Nel caso in cui $z \neq 0$, invece, esistono n **distinte soluzioni**.

Utilizzando la formula di De Moivre, possiamo riscrivere tale espressione come:

$$x^n = z$$

$$x = \sqrt[n]{z}$$

$$x = z^{\frac{1}{n}}$$

$$x = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{n}\theta i}$$

Abbiamo quindi trovato **una soluzione valida** per l'equazione. Tuttavia, ricordando che un numero complesso z possiede **infiniti argomenti**, riscriviamo x come:

$$x = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$$

A questo punto, al variare di $k = 0, 1, ..., n-1$ otteniamo le n **soluzioni all'equazione**. Difatti, quando $k = n$, riotteniamo la prima soluzione dell'equazione, mentre quando $k = n + 1$ otteniamo la seconda, e così via.

Esempio: Dato $z = i$, vogliamo sapere le soluzioni dell'equazione $x^3 = z$.

$$x^3 = i \implies x^3 = e^{\frac{1}{2}\pi i}$$

$$x = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{2k\pi}{3})}$$

- Se $k = 0$

$$x_1 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi)} = e^{\frac{1}{6}\pi i}$$

- Se $k = 1$

$$x_2 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{2\pi}{3})} = e^{\frac{5}{6}\pi i}$$

- Se $k = 2$

$$x_3 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{4\pi}{3})} = e^{\frac{9}{6}\pi i} = e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

- Se $k = 3$

$$x_4 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{6\pi}{3})} = e^{i(\frac{1}{6}\pi + 2\pi)} = e^{\frac{1}{6}\pi i} \implies x_4 = x_1$$

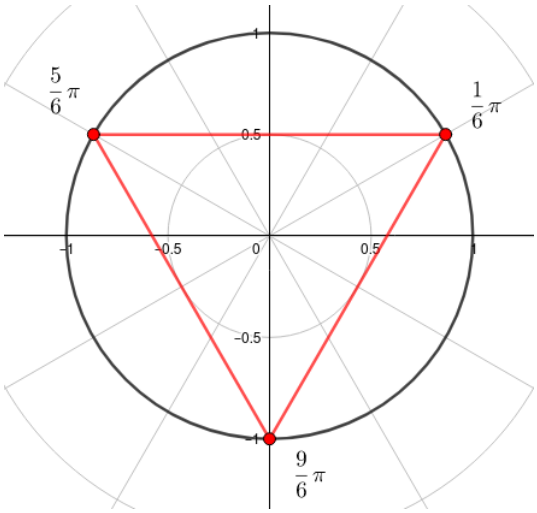
- Se $k = 4$

$$x_5 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{8\pi}{3})} = e^{i(\frac{1}{6}\pi + \frac{2\pi}{3} + 2\pi)} = e^{\frac{5}{6}\pi i} \implies x_5 = x_2$$

- ...

Notiamo quindi che nonostante esistano **infiniti argomenti di z**, le soluzioni risultano essere cicliche tra di loro, risultando in solo3 **soluzioni valide per l'equazione**.

Inoltre, graficando sul piano di Gauss le tre radici soluzioni dell'equazione, notiamo come ognuna di esse corrisponda al vertice di un triangolo equilatero iscritto in una circonferenza di raggio 1:



Osservazione:

Le n radici n-esime di un numero complesso sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio $|z|^{\frac{1}{n}}$.

Infine, concludiamo il nostro studio sui numeri complessi affermando il seguente **teorema fondamentale dell'algebra**

Definition 9. Teorema fondamentale dell'algebra

Data un'equazione del tipo:

$$(E) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

dove (E) indica una qualsiasi espressione e $a_i \in \mathbb{C}, n \geq 1, a_n \neq 0$, **esiste sempre almeno una soluzione complessa di** (E).

1.4 Relazioni

Dato un insieme S, definiamo come **relazione** R su S un **sottoinsieme del prodotto cartesiano** $S \times S$:

$$R \subseteq S \times S \implies R \subset \{(x, y) \,|\, x, y \in S\}$$

Data una coppia (x, y), se essa appartiene alla relazione R allora affermiamo ciò con la notazione xRy (oppure con $R(x, y)$), altrimenti affermiamo che essa non appartiene alla relazione con la notazione $x \not R\, y$ (oppure con $\not R\,(x, y)$).

$$xRy \implies (x, y) \in R$$
$$x \not R\, y \implies (x, y) \notin R$$

Tra le varie proprietà che possono essere soddisfatte da una relazione, in particolare evidenziamo:

- **Riflessività**:
$$xRx \quad \forall x \in S$$
- **Simmetria**:
$$xRy \implies yRx \quad \forall x, y \in S$$
- **Anti-simmetria**:
$$xRy \land yRx \implies x = y \quad \forall x, y \in S$$
- **Transitività**:
$$xRy \land yRz \implies xRz \quad \forall x, y, z \in S$$

Una relazione viene detta **relazione di equivalenza** se su di essa valgono le proprietà di riflessività, simmetria e transitività. L'esempio più banale tale relazione è la relazione di uguaglianza, indicata col simbolo $=$.

Una relazione viene detta **relazione d'ordine parziale** se su di essa valgono le proprietà di riflessività, anti-simmetria e transitività. L'esempio più banale tale relazione è la relazione di precedenza, indicata col simbolo $\prec$. Nel caso in cui tutti gli elementi di una relazione d'ordine parziale siano confrontabili tra di loro (ossia se $\forall x, y \in S$ vale $xRy \lor yRx$), definiamo tale relazione come **relazione d'ordine totale**.

Esempi:

- La relazione $\leq$ è un ordine totale
- Dato un insieme X, definiamo come $P(X)$ l'insieme contenente tutte le delle parti (ossia i sottoinsiemi) di X
$$P(X) = \{\texttt{tutti i sottoinsiemi di } X\}$$
La relazione $\subseteq$ su $P(X)$ risulta essere una relazione d'ordine parziale, poiché:
  - Ogni sottoinsieme A è sottoinsieme di se stesso (riflessività):
$$A \subseteq A \quad \forall A \in P(X)$$
  - Se un sottoinsieme A è sottoinsieme di B e B è sottoinsieme di A, allora ciò è possibile solo se A e B sono lo stesso sottoinsieme (anti-simmetria):
$$A \subseteq B \land B \subseteq A \implies A = B$$
  - Se un sottoinsieme A è sottoinsieme di B e B è sottoinsieme di C, allora anche A è sottoinsieme di C (transitività):
$$A \subseteq B \land B \subseteq C \implies A \subseteq C$$
  - Non tutti i sottoinsiemi sono confrontabili tra loro (ordine non totale), ad esempio $\{1\} \not\subseteq \{2\}$

- Dati due numeri naturali $m, n \in \mathbb{Z}$, affermiamo che m è divisore di n, indicato come $m \mid n$ (*Attenzione: non è il simbolo matematico "tale che"*), se esiste un elemento $p \in \mathbb{Z} \mid m \cdot p = n$:

$$\mid : \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{Z}, \exists p \in \mathbb{Z}, m \cdot p = n\}$$

  Analizziamo le proprietà della relazione definita:

  – Soddisfa la **riflessività**:

$$m \mid m \quad \forall m \in \mathbb{Z} \implies m \cdot 1 = m$$

  – Soddisfa la **transitività**:

$$d \mid m \implies \exists p \in \mathbb{Z}, d \cdot p = m$$

$$m \mid n \implies \exists q \in \mathbb{Z}, m \cdot q = n$$

$$d \mid m \wedge m \mid n \implies n = m \cdot q = d \cdot p \cdot q = d \cdot (pq) \implies d \mid n$$

  – Non soddisfa l'**anti-simmetria**:

$$m \mid n \implies \exists p \in \mathbb{Z}, m \cdot p = n$$

$$n \mid m \implies \exists q \in \mathbb{Z}, n \cdot q = m$$

$$m \mid n \wedge n \mid m \implies m = n \cdot q = m \cdot p \cdot q$$

    a questo punto, si hanno due casi:

    * $m = 0 \implies n = p = q = 0$
    * $m \neq 0 \implies p \cdot q = 1 \implies p = q = \pm 1$
      · Se $p = q = 1 \implies m = n$
      · Se $p = q = -1 \implies m = -n$

    Dunque, deduciamo che non in tutti i casi la relazione $\mid$ risulta essere anti-simmetrica. Nel caso in cui la relazione venisse applicata su $\mathbb{N}$ invece che $\mathbb{Z}$, il caso in cui $p = q = -1$ verrebbe scartato, poiché $-1 \notin \mathbb{N}$, rendendo quindi la relazione anti-simmetrica e, di conseguenza, anche una relazione d'ordine parziale.

1.4.1 Relazione di congruenza

Un particolare esempio di relazione di equivalenza è la **relazione di congruenza**: dato $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ e dati $a, b \in \mathbb{Z}$ denotiamo con $a \equiv b (\texttt{mod}\ n)$ la relazione "a è congruente b modulo n se vale n è divisore di $b - a$ ($n \mid b - a$).

Esempi:

- $7 \equiv 22 (\texttt{mod}\ 5) \implies b - a = 22 - 7 = 15\%5 = 0$
- $7 \equiv 13 (\texttt{mod}\ 5) \implies b - a = 13 - 7 = 6\%5 = 1$

La relazione definita risulta essere:

- **Riflessiva**:

$$0 = n \cdot 0 \implies n \,|\, 0 \implies n \,|\, a - a \implies a \equiv a (\mathsf{mod}\ n) \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

- **Simmetrica**:

$$a \equiv b (\mathsf{mod}\ n) \implies n \,|\, b - a \implies \exists p \in \mathbb{Z}, b - a = n \cdot p \implies$$
$$\implies a - b = n \cdot (-p) \implies n \,|\, a - b \implies b \equiv a (\mathsf{mod}\ n)$$

- **Transitiva**:

  Siccome:

$$a \equiv b (\mathsf{mod}\ n), b \equiv c (\mathsf{mod}\ \mathsf{n}) \implies b - a = n \cdot p, c - b = n \cdot q$$

  allora:

$$c - a = (c - b) + (b - a) = q \cdot n + p \cdot n = n(q + p) \implies n \,|\, c - a \implies a \equiv c (\mathsf{mod}\ n)$$

1.4.2 Teorema della divisione con resto euclidea

Theorem 1. Teorema della divisione con resto euclidea

Dati due interi $m, n \in \mathbb{Z}$ dove $n > 0$, allora

$$\exists! q, r \in \mathbb{Z} \,|\, m = n \cdot q + r, 0 \leq r < n$$

dove q viene definito come **quoziente** e r come **resto** della divisione

Dimostrazione dell'unicità:

Supponiamo che q ed r non siano unici. Allora, ne segue che:

$$nq_1 + r_1 = m = nq_2 + r_2 \implies r_2 - r_1 = n(q_1 - q_2) \implies n \,|\, r_2 - r_1$$

Siccome $0 \leq r_1, r_2 < n \implies -n < r_2 - r_1 < n$ e siccome $n \,|\, r_2 - r_1$, ciò significa che $r_2 - r_1$ deve essere un multiplo di n compreso tra $-n$ ed n stesso. Poiché l'unico numero rispettante tali caratteristiche è 0, ne segue che:

$$r_2 - r_1 = 0 \implies r_2 = r_1$$

Quindi, otteniamo che:

$$nq_1 + r_1 = nq_2 + r_2 \implies nq_1 = nq_2 \implies q_1 = q_2$$

Dimostrazione dell'esistenza:

Sia $[m]$ la **classe di congruenza** di $m(\mathtt{mod}\ n)$:

$$[m] : \{a \in \mathbb{Z} \,|\, a \equiv m(\mathtt{mod} n)\}$$

Allora, abbiamo che:

$$n \,|\, m - a \implies m - a = n \cdot p \implies a = m - np$$

Sia r il minimo valore tra le $a \in [m]$, dove $a > 0$. Quindi, vale che

$$\exists r \in \mathbb{Z} \,|\, r = m - nq \implies m = nq - r$$

Verifichiamo ora che $0 \leq r < n$. Assumiamo per assurdo che $r \geq n$, allora ne segue che $r - n \geq 0$. Quindi abbiamo che:

$$r-n = (m-nq)-n = m-(q+1)n \implies m-(q+1)n \in [m] \implies r \text{ non è il minimo valore}$$

1.4.3 Classi di equivalenza

Data una relazione d'equivalenza generica $\sim$ definita su un insieme S, denotiamo con $[x]$ la sua **classe di equivalenza**, dove $[x] \subseteq S$ e $x \in S$.

$$[x] = \{y \in S \,|\, x \sim y\}$$

Ogni classe di equivalenza possiede **almeno un elemento**, poiché $x \sim x, \forall x \in S$ per riflessività della relazione d'equivalenza. Inoltre, per transitività abbiamo che:

- Avendo $x \sim y$, se $z \in [x] \implies z \sim x$ allora $z \sim y \implies z \in [y]$, dunque $[x] \subseteq [y]$. Effettuando il ragionamento opposto, ne traiamo che $[y] \subseteq [x]$ e dunque che

$$x \sim y \implies [x] = [y]$$

- Supponiamo per assurdo che $z \in [x] \cap [y]$. Ciò significa che $z \in [x] \land z \in [y] \implies z \sim x \land z \sim y$, dunque per transitività si verifica che $x \sim y$. Dunque, concludiamo che:

$$x \nsim y \implies [x] \cap [y] = \emptyset$$

Definiamo come $S/\sim$ l'**insieme di tutte le classi di equivalenza** di una relazione d'equivalenza generica $\sim$. Ad esempio, se $S = \mathbb{Z}$ e $\sim$ è la relazione di congruenza ($a \sim b \implies a \equiv b(\mathtt{mod}\ n)$), allora denotiamo l'insieme delle classi di equivalenza di tale relazione come **insieme quoziente** $\mathbb{Z}_n$. Per via del teorema della divisione con resto euclidea, $\mathbb{Z}_n$ risulta essere un insieme finito:

$$\mathbb{Z}_n : \{[0], [1], ..., [n-1]\}$$

Dato un insieme X e un insieme I contenente degli indici, una **partizione di** X è un sottoinsieme di X disgiunto da tutte le altre partizioni di X:

$$X = \bigcup_{i \in I} X_i \text{ dove } i \neq j \implies X_i \cap X_j = \emptyset$$

Per comodità, denotiamo il partizionamento di un insieme X come

$$X = \coprod_{i \in I} X_i$$

In particolare, è opportuno puntualizzare come **applicare una relazione di equivalenza su un insieme equivale a partizionare tale insieme**, dove ogni classe di equivalenza corrisponde ad una partizione dell'insieme:

$$X = \coprod_{[x] \in S/\sim} [x]$$

Inoltre, dato un partizionamento di X, otteniamo una relazione di equivalenza $\sim$ su di esso:

- **Riflessività**:
$$\forall x \in X, \exists i \in I \,|\, x \in X_i \implies x \sim x$$
- **Simmetria**:
$$x \sim y, \exists i, j \in I \,|\, x, y \in X_i \implies x, y \in X_j \implies y \sim x$$
- **Transitività**:
$$x \sim y, y \sim z, \exists i, j \in I \,|\, x, y \in X_i, y, z \in X_j \implies y \in X_i \cap X_j$$

  Tuttavia, poiché le partizioni sono disgiunte tra loro, abbiamo che $i \neq j \implies X_i \cap X_j = \emptyset$, quindi si può verificare solo che $i = j \implies X_i = X_j$, dunque otteniamo che $x \sim z$.

Infine, affermiamo che applicare una relazione di equivalenza su un insieme equivale ad applicare una **funzione suriettiva** detta **"proiezione al quoziente"**:

$$p : X \to X/\sim : x \mapsto [x]$$

Capitolo 2

Elementi di teoria dei gruppi

2.1 Sottogruppi

Definition 10. Sottogruppo

Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Definiamo $H \subset G$ come **sottogruppo** di G se:

- $e \in H$, dove e è l'elemento neutro di G
- $x, y \in H \implies xy \in H$
- $x \in H \implies x^{-1} \in H$

Esempi:

- $(\mathbb{Z}, +) \subset (\mathbb{Q}, +) \subset (\mathbb{R}, +) \subset (\mathbb{C}, +)$
- $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot) \not\subset (\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot) \subset (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$
- Sia A un anello. Dato $a \in A$, definiamo come $I(a)$ l'**insieme dei multipli** di a:

  $$I(a) : \{ax \,|\, x \in A\}$$

  Verifichiamo che $(I(a), +) \subset (A, +)$, ricordando che $(A, +)$ è un gruppo abeliano poiché A è un anello:

  - $0 = a \cdot 0$, dunque $0 \in I(a)$
  - $x, y \in I(a) \implies \exists b, c \in A \,|\, x = ab, y = ac \implies x + y = ab + ac = a(b + c) \implies x + y \in I(a)$
  - $x \in I(a) \implies \exists b \in A \,|\, x = ab \implies -x = a(-b) \implies -x \in I(a)$
- Sia $(G, \cdot)$ un gruppo e sia $H \subset G$. Definiamo la seguente relazione $\sim$, verificando che essa sia una relazione di equivalenza:

  $$x \sim y \iff x^{-1}y \in H$$

  - **Riflessività**:

    $$x \sim x \implies x^{-1}x = 1 \in H$$

– **Simmetria**:

$$x \sim y \implies h := x^{-1}y \in H \implies h^{-1} := y^{-1}x \in H \implies y \sim x$$

– **Transitività**:

$$x \sim y, y \sim z \implies h := x^{-1}y, k := y^{-1}z \in H \implies$$
$$\implies hk = x^{-1}yy^{-1}z = x^{-1}z \implies x^{-1}z \in H$$

- Definiamo come **classi laterali sinistre** le classi di equivalenza di H in G:

$$[x] = \{y \in G \,|\, y \sim x\}$$

In questo caso, denotiamo l'insieme quoziente $G/\sim$, ossia insieme di tutte le classi di equivalenza di $\sim$, anche con la notazione G/H.

Sia $(\mathbb{Z}, +)$ un gruppo abeliano e sia $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Sia $I(n) : \{nk \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ dove $(I(n), +) \subset (\mathbb{Z}, +)$. Riprendendo la relazione di equivalenza dell'esempio precedente, abbiamo che:

$$a \sim b \implies (-a) + b = b - a \in I(n) \implies \exists k \in \mathbb{Z}, b - a = nk \implies$$
$$\implies n \,|\, b - a \implies a \equiv b (\mathtt{mod}\ n)$$

Osservazione: La classe laterale sinistra coincide anche con l'insieme di tutti i prodotti di x con un elemento di H

$$[x] = xH = \{xh \,|\, h \in H\}$$

Dimostrazione:

– Dimostriamo che $[x] \subset xH$:

$$y \in [x] \implies x \sim y \implies h := x^{-1}y \in H$$

Allora abbiamo che:

$$h = x^{-1}y$$
$$xh = x(x^{-1}y)$$
$$xh = y$$

Dunque, abbiamo che $y \in xH \implies [x] \subset xH$

– Dimostriamo che $xH \subset [x]$:

$$y \in xH \implies \exists h \in H, y = xh$$

Allora abbiamo che:

$$y = xh$$
$$x^{-1}y = x^{-1}(xh)$$
$$x^{-1}y = h$$

Dunque, abbiamo che $x^{-1}y = h \in H \implies x \sim y \implies y \in [x] \implies xH \subset [x]$

Osservazione:

Tutte le classi laterali sinistre di H su G hanno la **stessa cardinalità**, corrispondente a $|H|$.

Dimostrazione:

Tutte le classi laterali hanno la forma:

$$[x] = xH = \{xh \,|\, h \in H\}$$

Abbiamo che $h \neq k \iff xh \neq xk$. Quindi $\rho : H \to xH : h \mapsto xh$ è suriettiva per definizione di xH ed è iniettiva poiché $xh \neq xk$, dunque ϕ è una funzione biettiva.

Theorem 2. Teorema di Lagrange

Sia G un gruppo finito e sia $H \subset G$ (dunque anche H è finito). Partizionando l'insieme G in $|G/H|$ partizioni, ognuna corrispondente ad una classe laterale sinistra di H, si ha:

$$G = \coprod_{[x] \in G/H} [x]$$

Poiché la cardinalità di ogni classe laterale sinistra di H è $|H|$ e poiché abbiamo decomposto G in $|G/H|$ classi laterali, ne segue che:

$$|G| = |H| \cdot |G/H|$$

Esempi:

- Sia $(G, +)$ un gruppo abeliano e sia $(H, +) \subset (G, +)$, dove si ha che $x \sim y \implies y - x \in H$ e dove l'operazione $+$ è definita ancora come $[x] + [y] = [x + y]$.

  Vogliamo dimostrare che, in questo caso, $(G/H, +)$ sia un gruppo abeliano. Dimostriamo prima che $+ : G/H \times G/H \to G/H$ è ben definita, ossia che $[x] = [x'], [y] = [y'] \implies [x + y] = [x' + y']$:

$$[x] = [x'], [y] = [y'] \implies x \sim x', y \sim y' \implies x' - x, y' - y \in H \implies$$
$$\implies (x'-x)+(y'-y) = (x'+y')-(x+y) \in H \implies x+y \sim x'+y' \implies [x+y] = [x'+y']$$

  Verifichiamo quindi gli assiomi di gruppo abeliano:

  - **Associatività**:

$$([x] + [y]) + [z] = [x + y] + [z] = [x + y + z] = [x] + [y + z] = [x] + ([y] + [z])$$

  - **Elemento neutro**:

$$[x] + [0] = [x + 0] = [x]$$

  - **Elemento inverso**:

$$[x] + [-x] = [x + (-x)] = [0]$$

– **Commutatività**:

$$[x] + [y] = [x + y] = [y + x] = [y] + [x]$$

- Sia $(G, +) = (\mathbb{Z}, +)$ e sia $I(n) : \{nk \,|\, k \in \mathbb{Z}\}$ con $n \geq 2$, dove $(I(n), +) \subset (G, +)$. In tale caso, abbiamo che:

$$G/H = \mathbb{Z}/I(n) = \mathbb{Z}_n = \{[0], [1], ..., [n-1]\}$$

Dunque, concludiamo che $(\mathbb{Z}_n, +)$ sia un gruppo abeliano. Ad esempio, in Z_{11} abbiamo che:

– $[9] + [8] = [17] = [6]$

– $[4] + [3] = [7]$

– $[5] + [6] = [11] = [0]$

2.2 Ideali

Definition 11. Ideale

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo. Definiamo $I \subset A$ come l'**ideale** di A se si verifica che:

- $(I, +) \subset (A, +)$, ossia se è un sottogruppo dell'anello per la somma
- $x \in I, a \in A \implies ax \in I$ ossia se $AI \subset I$, dove $AI : \{ax \,|\, x \in I, a \in A\}$

Esempi:

- Sia $a \in A$, dove A è un anello commutativo, e sia $I(a) : \{ak \,|\, k \in Z\}$. In tal caso, definiamo $I(a)$ come **ideale principale di A generato da a**.

  Verifica delle condizioni per l'ideale

  – Abbiamo già verificato nella sezione 2.1 che $(I(a), +) \subset (A, +)$

  – Sappiamo già che $a \in A$, dunque verifichiamo che:

$$x \in I(a) \implies \exists c \in A, x = ac \implies b \in A \,|\, bx = bac = a(bc) \implies bx \in I(a)$$

- Siano $a_1, a_2 \in A$, dove A è un anello commutativo, e sia $I(a_1, a_2) : \{a_1b_1 + a_2b_2 \,|\, b_1, b_2 \in A\}$. Verifichiamo che $I(a_1, a_2) \subset A$ è ancora un ideale di A:

  – $0 = a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 \in I(a_1, a_2)$

  – $x, y \in I(a_1, a_2) \implies x = a_1b_1 + a_2b_2, y = a_1c_1 + a_2c_2 \implies x + y = a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) \implies x + y \in I(a_1, a_2)$

  – $x \in I(a_1, a_2) \implies x = a_1b_1 + a_2 + b_2 \implies -x = -a_1b_1 + a_2b_2 = a_1(-b_1) + a_2(-b_2) \implies -x \in I(a_1, a_2)$

  - $x \in I(a_1, a_2) \implies x = a_1b_1 + a_2b_2 \implies c \in A \,|\, cx = c(a_1b_1 + a_2b_2) = a_1(b_1c) + a_2(b_2c) \implies cx \in I(a_1, a_2)$

- Analogamente ai due casi precedenti, possiamo verificare che anche $I(a_1, ..., a_n)$ risulta essere un'ideale di A.
- Se $(A, +, \cdot)$ è un anello commutativo e $I \subset A$, allora in particolare abbiamo che $(I, +) \subset (A, +)$ induce una relazione di equivalenza che definiamo come **relazione di congruenza modulo I**:

$$x \sim y \implies y - x \in I \implies x \equiv y (\mathtt{mod}\ I)$$

  Se l'operazione $+$ è definita come $x \sim y \implies y - a \in H$ e si ha che $[x] + [y] = [x + y]$ e che $[x][y] = [xy]$, allora otteniamo che $(A/I, +, \cdot)$ è un anello commutativo.

  Dimostrazione:

  - Abbiamo già visto nella sezione 2.1 che $(A/I, +)$ sia un gruppo abeliano e che $+ : A/I \times A/I \to A/I$ è ben definita
  - Verifichiamo quindi che il prodotto sia ben definito, ossia che:

$$x \equiv x' (\mathtt{mod}\ I), y \equiv y' (\mathtt{mod}\ I) \implies i_1 := x' - x \in I, i_2 := y' - y \in I \implies$$

$$\implies x'y' - xy = x'y' + xy' - xy' - xy = (x' - x)y' + x(y' - y) = i_1y' + xi_2$$

    Siccome $i_1y', xi_2 \in I$ ne segue che $i_1y' + xi_2 \in I$

2.3 Invertibili e Divisori dello zero

Definition 12. Invertibili e Divisori dello zero

Dato un anello commutativo $(A, +, \cdot)$ e dato un elemento $a \in A$, affermiamo che tale elemento è un **invertibile** se $\exists a^{-1} \in A \,|\, aa^{-1} = a^{-1}a = 1$, mentre affermiamo che esso è un **divisore dello zero** se $a \,|\, 0 \implies \exists B \in A, 0 = ab$.

Denotiamo come $A^* \subset A$ l'**insieme di tutti gli invertibili di** A e affermiamo che A è un **dominio di integrità** se l'unico elemento divisore dello zero è lo zero stesso.

Osservazione 1:

L'essere un **invertibile** e l'essere un **divisore dello zero** sono due caratteristiche **mutualmente esclusive**: se un elemento è un invertibile, allora esso non può essere un divisore dello zero (lo stesso vale viceversa)

Dimostrazione per assurdo:

Supponiamo che $\exists a, b \in A^*, b \neq 0 \,|\, 0 = ab, aa^{-1} = 1$. Allora, abbiamo che:

$$b = 1 \cdot b = aa^{-1}b = a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0 = 0 \implies b = 0$$

contraddicendo quindi l'ipotesi iniziale, ossia $b \neq 0$

Osservazione 2:

A può essere un dominio di integrità se e solo se vale la **legge di annullamento del prodotto**, ossia

$$xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$$

Osservazione 3:

$(A^*, \cdot)$ è un gruppo, poiché:

- L'elemento neutro 1 è invertibile, infatti $1^{-1} = 1 \implies 1 \in A^*$
- $x, y \in A^* \implies xy \in A^* \implies (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$
- $x \in A^* \implies x^{-1} \in A^* \implies (x^{-1})^{-1} = x \in A^*$

Osservazione 4:

Se A è un **campo**, allora esso è **sempre un dominio di integrità**, poiché in tal caso si ha $A \setminus A^* = \{0\}$, dovuto al fatto che ogni elemento di A è invertibile e dunque 0 è l'unico divisore dello zero esistente.

Osservazione 5:

$\mathbb{Z}_n$ **è un dominio di integrità se e solo se** n **è un numero primo**. In tal caso, inoltre, usiamo la notazione Z_p per dire che si tratta dell'insieme quoziente di un numero primo.

Dimostrazione:

Supponiamo che n non sia primo. A questo punto abbiamo che n può essere espresso come il prodotto di due fattori ab:

$$\exists a, b, 0 < a, b < n \,|\, n = ab \implies [n] = [ab] = [a][b]$$

Tuttavia, in $\mathbb{Z}_n$ abbiamo che $[n] = [0]$, implicando che $[n] = [ab] = [0]$, andando in conflitto col fatto che $a, b > 0 \implies [a][b] \neq [0]$.

Di conseguenza, $[a], [b] \in \mathbb{Z}_n$ devono essere entrambi divisori dello zero, dunque $\mathbb{Z}_n$ non può essere un dominio di integrità.

Nel caso in cui invece si ha che solo $[a] \in \mathbb{Z}_n$ è un divisore dello zero, allora:

$$\exists 0 < b < n \in \mathbb{Z}_n \,|\, [a][b] = [0] = [ab] \implies n \,|\, ab \implies n \,|\, 2 \cup n \,|\, b \implies [a] = [0] \vee [b] = [0]$$

Tuttavia siccome per ipotesi $0 < b < n$, abbiamo $b \neq 0$, contraddicendo il risultato ottenuto.

Lemma 3. Numeri primi e fattorizzazioni

Se $p \in \mathbb{N}$, allora $p \,|\, ab \implies p \,|\, a \vee p \,|\, b$

2.4 Massimo comun divisore

Definition 13. Massimo comun divisore (MCD)

Sia I un ideale di $\mathbb{Z}$, allora esiste un **unico intero** $d \geq 0$ tale che $I = I(d)$ dove $I(d) : \{ad \,|\, a \in \mathbb{Z}\}$.

Sia $a, b \in \mathbb{Z}$. Allora si ha che:

$$I(a,b) : \{ax + by \,|\, x, y \in \mathbb{Z}\} \implies \exists! d \geq 0 \,|\, I(a,b) = I(d)$$

dove denotiamo $d := MCD(a,b)$, ossia il **minimo comun divisore**.

In particolare, si ha che:

$$\exists x, y \in \mathbb{Z} \,|\, ax + by = MCD(a,b)$$

che definiamo come **identità di Bezout**.

Dimostrazione:

Se $I : \{0\}$, allora $\{0\} = I(0)$. Nel caso contrario, si avrebbe che $I \cap Z_{>0} \neq 0$, infatti $\exists 0 \neq n \in I$ tale che:

- $n > 0 \implies n \in I$
- $n < 0 \implies -n > 0 \implies -n \in I$

Poniamo allora $d := min(I \cap Z_{>0})$ e mostriamo che $I = I(d)$:

- $I(d) \subseteq I$:
  - $x \in I(d) \implies \exists y \in \mathbb{Z} \,|\, x = yd$
  - Per l'assioma degli ideali $IA \subset I$, ne segue che $d \in I$
- $I \subseteq I(d)$:
  - $x \in I$
  - La divisione con resto di x per d, dove $d \neq 0$, equivale a :
    $$\exists! q \in Z, 0 \leq r < d \,|\, x = dq + r$$
  - Assumiamo per assurdo che $r \neq 0$. Allora abbiamo che:
    $$r \in I \cap \mathbb{Z}_{>0} \wedge r < d$$
    dunque contraddicendo la definizione $d := min(I \cap \mathbb{Z}_{>0}$
  - Dunque l'unica possibilità che $r = 0$:
    $$x = dq + r \implies r = x - dq \implies x \in I, dq \in I(d)$$
  - A questo punto, seguiamo la dimostrazione del punto precedente per verificare che $dq \in I(d) \implies dq \in I$

Alla luce di ciò, affermiamo che dati $a_1, ..., a_n \in \mathbb{Z}$, il loro $d := MCD(a_1, ..., a_n)$ è l'**unico intero** $d \geq 0 \,|\, I(d) = I(a_1, ..., a_n)$.

Osservazione:

Si verifica che $I(a) = I(b) \iff a = \pm b$

Dimostrazione:

- $a = \pm b \implies I(a) = I(b)$:

$$x \in I(a) \implies \exists y \in \mathbb{Z} \,|\, x = ay \implies$$

$$\implies -x = -(ay) = a(-y) \in I(a) \implies -x = -(ay) = (-a)y \in I(-a)$$

- $I(a) = I(b) \implies a = \pm b$:

$$I(a) = I(b) \implies a \in I(b), b \in I(a) \implies p, q \in \mathbb{Z} \,|\, a = bp, b = qa \implies$$

$$\implies a = (qa)a \implies pq = 1 \implies p = q = \pm 1$$

Quindi gli unici due casi possibili sono $p = q = 1 \implies a = b$ e $p = q = -1 \implies a = -b$

Osservazione:

Tale definizione di MCD coincide con la "classica" matematica, poiché:

$$d \,|\, x, \forall x \in I(d) = I(a_1, ..., a_n)$$

Dimostrazione:

Verifichiamo che $e \,|\, a_1, ..., e \,|\, a_n \implies e \,|\, d$, dove ricordiamo che e è l'elemento neutro e $e \,|\, a_i \implies \exists x \in \mathbb{Z}, a_i = ex_1$:

$$d \in I(a_1, ..., a_n) \implies \exists b_1, ..., b_n \,|\, \underbrace{d = a_1b_1 + ... + a_nb_n}_{\text{Identità di Bezout}} =$$

$$= (ex_1)b_1 + ... + (ex_n)b_n = e(xb_1 + ... + xb_n) \implies e \,|\, d$$

Proposition 4

Dato l'anello $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ e dato $0 < a < n$ abbiamo che:

$$[a] \in \mathbb{Z}_n^* \iff MCD(a, n) = 1$$

Dimostrazione:

- Verifichiamo che $[a] \in \mathbb{Z}_n^* \implies MCD(a, n) = 1$. Supponendo che $[a] \in \mathbb{Z}_n^*$ abbiamo che:

  $$\exists 0 < b < n \,|\, [a][b] = 1 \iff ab \equiv 1(\texttt{mod } n) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \implies 1 = ab + nk$$

  Sia $d := MCD(a, n) > 0$. Dunque abbiamo che:

  $$1 = ab + nk \in I(a, n) = I(d) \implies 1 \in I(d) \implies \exists p \in \mathbb{Z}, 1 = dp \implies d = p = \pm 1$$

  Poiché $d > 0$, il caso con $d = p = -1$ viene escluso, dunque l'unico caso possibile è $d = p = 1$

- Verifichiamo che $MCD(a, n) = 1 \implies [a] \in \mathbb{Z}_n^*$

  Supponendo che $MCD(a, n) = 1$ abbiamo che:

  $$I(d) = I(a, n) \implies d \in I(a, n) \implies \exists b, k, d = ab + nk$$

  Considerando le classi di congruenza modulo n, dove quindi $[n] = [0]$, otteniamo:

  $$[1] = [ab + nk] = [a][b] + [n][k] = [a][b] \implies [b] = [a]^{-1} \implies [a] \in \mathbb{Z}_n^*$$

Corollario 1:

Dato p un numero primo, Z_p **è un campo** poiché $MCD(a, p) = 1, \forall 0 < a < p \implies Z_p^* = Z_p \setminus \{0\}$

Corollario 2:

Dato un **campo** K e dato $a \in K, a \neq 0$, l'**equazione** $ax = b$ **ammette la soluzione** $x = ba^{-1}$

Esempio: Nel campo Z_7 risolviamo l'equazione $[3]x + [2] = [0]$:

$$[3]x + [2] = [0] \implies [3]x = -[2] \implies [3]x = [5] \implies$$

$$\implies x = [5][3]^{-1} \implies x = [5][5] \implies x = [25] \implies x = [4]$$

Attenzione: l'inverso nel prodotto $[3]^{-1}$ corrisponde a $[5]$ poiché $[3][5] = [15] = [1]$

2.4.1 Calcolo del MCD

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ e sia $d := MCD(a, b)$. Poiché $I(a, b) = I(-a, b) = I(a, -b) = I(-a, -b)$, possiamo supporre che $0 < a, b$. Inoltre, poiché $I(a, b) = I(b, a)$, $MCD(0, b) = b$ e $MCD(a, 0) = 0$, supponiamo che $0 < a \leq b$.

Definiamo quindi **due metodi** per poter calcolare il massimo comun divisore tra due numeri, uno standard ed uno algoritmico:

Method 1. Fattorizzazione standard

- Scomponiamo a e b in **fattori primi**
- La composizione in fattori primi di d equivale ai **fattori in comune col grado minimo tra le due scomposizioni** di a e b

Esempi:

$$MCD(448, 216) = MCD(2^6 \cdot 7, 2^3 \cdot 3^3) = 2^3 = 8$$

$$MCD(2^4 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7, 2^3 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 11) = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$$

Method 2. Algoritmo di Euclide

1. Assumiamo $0 < a \leq b$
2. Poniamo $r_0 := b$ e $r_1 := a$
3. Definiamo **ad ogni iterazione** $r_{i+1} := r_{i-1} (\texttt{mod}\ r_i)$, da cui ne segue che:
$$r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1}$$
4. Viene ripetuto il punto 3 finché $r_{i+1} \neq 0$
5. All'n-esima iterazione, ossia quando $r_{i+1} = 0$, si ha che $MCD(a, b) = r_n$

Dimostrazione:

Vogliamo verificare che $r_n = d := MCD(a, b)$, ossia che $r_n \mid d$ e $d \mid r_n$.

- Verifichiamo che $d \mid r_n$:

  $$d := MCD(a, b) \iff d \mid r_1 \wedge d \mid r_0 \text{ dove } r_1 := a \in I(a, b), r_0 := b \in I(a, b)$$

  Siccome $r_i \in I(a, b), \forall 0 \leq i \leq n$, otteniamo che:

  $$r_{i+1} = r_{i-1} - r_i q_i \implies r_{i+1} \in I(a, b) \implies d \mid r_{i+1}$$

  Di conseguenza, abbiamo che $d \mid r_n$

- Verifichiamo che $r_n \mid d$:

$$r_n \mid r_i, \forall 0 \leq i \leq n \implies i = n, r_n | r_n \wedge r_{n-1} = r_n q_n + 0 \implies r_n | r_{n-1}$$

Siccome $r_n \mid x, r_n \mid y \implies r_n \mid (cx + dy), \forall c, d \in \mathbb{Z}$, allora:

$$r_n \mid r_n \wedge r_n \mid r_{n-1} \implies r_n \mid r_{n-2}$$

$$r_n \mid r_{n-1} \wedge r_n \mid r_{n-2} \implies r_n \mid r_{n-3}$$

$$\dots$$

$$r_n \mid r_1 \wedge r_n \mid r_0 \implies r_n \mid d$$

dove $d := MCD(a, b)$

Esempi:

- Vogliamo calcolare $MCD(448, 216)$. Poniamo quindi inizialmente $r_0 = 448$ e $r_1 = 216$. Applicando l'algoritmo abbiamo quindi che:

$$r_0 = r_1 \cdot q_1 + r_2$$

$$448 = 216 \cdot 2 + 16$$

$$216 = 16 \cdot 13 + 8$$

$$16 = 8 \cdot 2 + 0$$

Dunque, otteniamo che $MCD(448, 216) = 8$

- Vogliamo calcolare l'**identità di Bezout** per $b = 216$ e $a = 448$ ossia i due valori x e y tali che:

$$x, y \in \mathbb{Z} \mid MCD(488, 216) = 216x + 448y$$

Tramite l'**algoritmo di Euclide** utilizzato nell'esercizio precedente, sappiamo che $MCD(488, 216) = 8$. Poniamo quindi:

$$216x + 448y = 8$$

A questo punto, ripercorrendo al contrario i calcoli dell'algoritmo di Euclide, otteniamo che:

$$216x + 448y = 8$$

$$216x + 448y = 216 - 16 \cdot 13$$

$$216x + 448y = 216 - (448 - 216 \cdot 2) \cdot 13$$

$$216x + 448y = 216(1 - 13 \cdot 2) - 448 \cdot 13$$

$$216x + 448y = 216(27) + 448(-13)$$

Otteniamo quindi che $x = 27$ e $y = -13$

- Vogliamo calcolare l'identità di Bezout e MCD per $a = 1470, b = 8316$ e $c = 12600$:

$$MCD(a, b, c) = MCD(a, MCD(b, c)) = MCD(MCD(a, b), c)$$

  - $d := MCD(b, c) = MCD(8316, 12600)$

$$12600 := 8316 \cdot 1 + 4284$$
$$8316 := 4284 \cdot 1 + 4032$$
$$4284 := 4032 \cdot 1 + 252$$
$$4032 := 252 \cdot 16 + 0$$

    dunque $d = 252$

  - L'identità di Bezout per $MCD(8316, 12600) = 252 = 8316x + 12600y$ corrisponde a:

$$8316x + 12600y = 252$$
$$8316x + 12600y = 4284 - 4032$$
$$8316x + 12600y = (12600 - 8316) - (8316 - 4284)$$
$$8316x + 12600y = (12600 - 8316) - (8316 - (12600 - 8316))$$
$$8316x + 12600y = 12600 - 8316 - 8316 + 12600 - 8316$$
$$8316x + 12600y = 12600(2) + 8316(-3)$$

    dunque $x = -3, y = 2$

  - $p := MCD(a, d) = MCD(1470, 252)$

$$1470 = 252 \cdot 5 + 210$$
$$252 = 210 \cdot 1 + 42$$
$$210 = 42 \cdot 5 + 0$$

    dunque $p = 42$

  - L'identità di Bezout per $MCD(1470, 252) = 42 = 1470x + 252y$ corrisponde a:

$$1470z + 252w = 42$$
$$1470z + 252w = 252 - 210$$
$$1470z + 252w = 252 - (1470 - 252 \cdot 5)$$
$$1470z + 252w = 1470(-1) + 252(6)$$

    dunque $x = -1, y = 6$

  - L'identità di Bezout per $MCD(1470, 8316, 12600) = 42 = 1470x + 8316y + 12600z$ corrisponde a:

$$1470x + 8316y + 12600z = 42$$
$$1470x + 8316y + 12600z = 1470(-1) + (12600(2) + 8316(-3))(6)$$
$$1470x + 8316y + 12600z = 1470(-1) + 12600(12) + 8316 \cdot (-18)$$

    dunque $x = -1, y = 12, z = -18$

Approfondimento sull'Identità di Bezout

Grazie all'algoritmo di Euclide, possiamo trovare le **soluzioni particolari**, denotate come x_0 e y_0, all'equazione dell'**identità di Bezout**:

$$ax + by = d$$

dove $d := MCD(a, b)$.

Per trovare tutte le altre soluzioni possibili dell'equazione, definiamo m come il **minimo comune multiplo** tra a e b (denotato come $m := mcm(a, b)$). Tutte le soluzioni possibili hanno la forma:

$$x = x_0 + \frac{m}{a}k, \forall k \in \mathbb{Z} \qquad y = y_0 - \frac{m}{b}k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

Dimostrazione:

Innanzitutto, verifichiamo che le soluzioni possibili siano effettivamente valide:

$$a(x_0 + \frac{m}{a}k) + b(y_0 - \frac{m}{b}k) = d$$

$$ax_0 + mk + by_0 - mk = d$$

$$ax_0 + by_0 = d$$

A questo punto, verifichiamo che tali soluzioni appaiano solo nella forma indicata:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = d \\ ax_1 + by_1 = d \end{cases} \implies (ax_1 + by_1) - (ax_0 + by_0) = d - d \implies$$

$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 + y_0) = 0 \implies a(x_1 - x_0) = -b(y_1 - y_0) \implies$$

$$\implies a(x_1 - x_0) = b(y_0 + y_1)$$

Poniamo $N := a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$. Dunque abbiamo che $a \mid N$ e $b \mid N$, implicando che N sia un multiplo di $m := mcm(a, b)$. Dunque si ha che $\exists k \in \mathbb{Z} \mid N = mk$:

$$\begin{cases} a(x_1 - x_0) = N = mk \\ b(y_0 - y_1) = N = mk \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - x_0 = \frac{m}{a}k \\ y_0 - y_1 = \frac{m}{b}k \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{m}{a}k \\ y_1 = y_0 - \frac{m}{b}k \end{cases}$$

2.4.2 Criteri di divisibilità

Sia $a \in \mathbb{Z}$ con la sua **rappresentazione decimale**:

$$a = a_k \cdot 10^k + ... + a_0 \cdot 10^0 = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \text{ dove } a_i \in \{0, ..., 9\}$$

Osserviamo che:

- $10 \equiv 1 (\mathsf{mod}\ 3)$
- $10 \equiv 1 (\mathsf{mod}\ 9)$
- $10 \equiv -1 (\mathsf{mod}\ 11)$

Quindi:

- In $\mathbb{Z}_3$ si ha che
$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \equiv \left[\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (1)^i \right] (\mathsf{mod}\ 3)$$
- In $\mathbb{Z}_9$ si ha che
$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \equiv \left[\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (1)^i \right] (\mathsf{mod}\ 9)$$
- In $\mathbb{Z}_{11}$ si ha che
$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \equiv \left[\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (-1)^i \right] (\mathsf{mod}\ 11)$$

Osserviamo inoltre che se $x \equiv y (\mathsf{mod}\ n)$ e $d \mid n$ allora si ha che

$$x \equiv y (\mathsf{mod}\ n) \implies y - x \in I(n) = y - x = n \cdot N = d(kN) \implies x \equiv y (\mathsf{mod}\ d)$$

Esempi:

- Vogliamo sapere se $3 \mid 129383716$. Siccome siamo in $\mathbb{Z}_3$ abbiamo che:

  $129383716 \equiv [6+1+7+3+8+3+9+2+1] (\mathsf{mod}\ 3) \implies 129383716 \equiv 40 (\mathsf{mod}\ 3)$

  Tuttavia, siccome $3 \nmid 40$, ne segue che $3 \nmid 129383716$
- Vogliamo sapere se $3 \mid 129383716$. Siccome siamo in $\mathbb{Z}_{11}$ abbiamo che:

  $129383716 \equiv [6-1+7-3+8-3+9-2+1] (\mathsf{mod}\ 3) \implies 129383716 \equiv 22 (\mathsf{mod}\ 3)$

  Tuttavia, siccome $11 \mid 22$, ne segue che $11 \mid 129383716$

2.5 Operazioni sugli ideali

Dato un anello commutativo A e due ideali $I, J \subset A$, definiamo le seguenti operazioni binarie su di essi:

- **Somma tra ideali**:
$$I + J : \{i + j \,|\, i \in I, j \in J\}$$
Se $I, J \subset A$ sono ideali di A, allora anche $I + J \subset A$ è ideale

Dimostrazione:

- $I + J$ è sottogruppo di A, poiché:
  - $0 \in I \land 0 \in J \implies 0 = 0 + 0 \in I + J$
  - $x, y \in I + J \implies x + y = (i_1 + j_1) + (i_2 + j_2) = (i_1 + i_2) + (j_1 + j_2) \in I + J$
  - $x = i + j \in I + J \implies -x = -(i + y) = (-i) + (-j), -i \in I, -j \in J \implies -x \in I + J$
- $a \in A, x \in I + J \implies ax \in I + J$, poiché:
$$a \in A \,|\, ai \in I, aj \in J \implies ai + aj = a(i + j) \in I + J$$

- **Intersezione tra ideali**:
$$I \cap J : \{i \,|\, i \in I \land i \in J\}$$
Se $I, J \subset A$ sono ideali di A, allora anche $I \cap J \subset A$ è ideale.

Dimostrazione:

- $I \cap J$ è sottogruppo di A, poiché:
  - $0 \in I \land 0 \in J \implies 0 \in I \cap J$
  - $x, y \in I \cap J \implies x, y \in I \land x, y \in J \implies x + y \in I \land x + y \in J \implies x + y \in I \cap J$
  - $x \in I \land x \in J \implies -x \in I \land -x \in J \implies -x \in I \cap J$
- $a \in A, x \in I \cap J \implies ax \in I \cap J$, poiché:
$$a \in A, x \in I \cap J \implies ax \in I, ax \in J \implies ax \in I \cap J$$

- **Prodotto tra ideali**:

$$I \cdot J : \{i_1 j_1 + i_2 j_2 + ... + i_n j_n \,|\, i_1, i_2 ..., i_n \in I, j_1, j_2 ..., j_n \in J\}$$

Se $I, J \subset A$ sono ideali di A, allora anche $I \cdot J \subset A$ è ideale.

Dimostrazione:

- $I \cap J$ è sottogruppo di A, poiché:
  - $0 \in I \wedge 0 \in J \implies 0 = 0 + 0 \in I \cdot J$
  - $x = i_1 j_1 + i_2 j_2 + ... + i_n j_n \in I \cdot J$

    $y = i'_1 j'_1 + i'_2 j'_2 + ... + i'_n j'_n \in I \cdot J$

    $\implies x + y = i_1 j_1 + i'_1 j'_1 + ... + i_n j_n + i'_n j'_n \in I \cdot J$
  - $x \in I \cdot J \implies -x = x = (-i_1) j_1 + (-i_2) j_2 + ... + (-i_n) j_n \,|\, -i_k \in I \implies -x \in I \cdot J$
- $a \in A, x \in I \cdot J \implies ax \in I \cdot J$, poiché:

$$a \in A, x \in I \cdot J \implies ax = (ai_1) j_1 + (ai_2) j_2 + ... + (ai_n) j_n \,|\, ai_k \in I, j_1 \in J \implies$$
$$\implies ax \in I \cdot J$$

Caso particolare in $\mathbb{Z}$

Ricordando che **in $\mathbb{Z}$ ogni ideale è principale**, i due ideali I e J appaiono nella forma $I(a)$ e $I(b)$. Da ciò nascono una serie di implicazioni riguardanti le tre operazioni sopra descritte:

- $I + J = I(a) + I(b) = I(d)$ dove $d := MCD(a, b)$

  Dimostrazione:

$$I+J = I(a)+I(b) = \{i+j \,|\, i \in I(a), j \in I(b)\}\} = \{i+j \,|\, x, y \in \mathbb{Z}, ax = i, by = j\} =$$
$$= \{ax + by \,|\, x, y \in \mathbb{Z}\} = I(a, b) = I(d)$$

- $I \cdot J = I(a) \cdot I(b) = I(ab)$

  Dimostrazione:
  - $I(a) \cdot I(b) \subseteq I(ab)$

$$x \in I(a) \cdot I(b) \implies x = (ax_1)(by_1) + (ax_2)(by_2) + ... + (ax_n)(by_n) =$$
$$= ab(x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n) \implies ab \,|\, x \implies x \in I(ab)$$

  - $I(ab) \subseteq I(a) \cdot I(b)$

$$x \in I(ab) \implies x = abk = a(bk) \,|\, a \in I(a), bk \in I(b) \implies x \in I(a) \cdot I(b)$$

- $I(a) \cap I(b) = I(m)$ dove $m := mcm(a, b)$, ossia il **minimo comune multiplo** tra a e b. (***Dimostrazione a seguire nella sezione 2.6***)

2.6 Minimo comune multiplo

Definition 14. Minimo comune multiplo (mcm)

Dati $I(a_1), I(a_2), ..., I(a_n)$, definiamo come $m := mcm(a_1, ..., a_n)$ l'unico intero $m \geq 0$ per cui si ha:

$$I(m) = I(a_1) \cap I(a_2) \cap ... \cap I(a_n)$$

Dunque, caratterizziamo m come il più piccolo tra i multipli in comune tra $a_1, a_2, ..., a_n$, avente le proprietà:

$$\{\ a_1 \,|\, m \wedge a_2 \,|\, m \wedge ... \wedge a_n \,|\, ma_1 \,|\, N \wedge a_2 \,|\, N \wedge ... \wedge a_n \,|\, N \implies m \,|\, N$$

Dimostrazione:

Abbiamo che:

$$m \in I(m) = I(a_1) \cap I(a_2) \cap ... \cap I(a_n) \implies a_1 \,|\, m \wedge ... \wedge a_n \,|\, m$$

Inoltre, siccome N è multiplo di $a_1, ..., a_n$:

$$a_1 \,|\, N \wedge ... \wedge a_n \,|\, N \implies N \in I(a_1) \cap I(a_2) \cap ... \cap I(a_n) = I(m) \implies m \,|\, N$$

2.6.1 Calcolo del mcm

Il **calcolo del mcm tra due numeri** a, b può essere **ridotto al calcolo del MCD**, tramite il **teorema fondamentale dell'aritmetica**:

Theorem 5. Teorema fondamentale dell'aritmetica

Dati due numeri a e b, si ha che:

$$mcm(a, b) \cdot MCD(a, b) = ab$$

Attenzione: vale solo se applicato tra due numeri, dunque non vale che $mcm(a_1, .., a_n) \cdot MCD(a1, ..., a_n) = a_1 \cdot ... \cdot a_n$

Dimostrazione:

- Se $a = 0 \vee b = 0$, allora:

$$mcm(a, b) = 0 \implies mcm(a, b) \cdot MCD(a, b) = 0 \cdot MCD(a, b) = 0$$

- Siano quindi $a, b > 0$. Denotiamo l'insieme di tutti i numeri primi come:

$$\mathbb{P} = \{2, 3, 5, 7, 11, ...\}$$

- Considerando $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, tale numero può essere scritto come una **fattorizzazione in primi**, ossia:

$$\exists! n_2, n_3, n_5, ..., n_p, ... \text{ dove } p \in \mathbb{P}, n_p \in \mathbb{N} \,|\, n = 2^{n_2} \cdot 3^{n_3} \cdot ... \cdot p^{n_p} \cdot ... = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{n_p}$$

  dove $p \not| n \implies n_p = 0$

- Riscriviamo quindi a e b come:

$$a = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a_p} \qquad\qquad b = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{b_p}$$

- Poniamo inoltre $d := MCD(a,b)$ e $m := mcm(a,b)$, che per loro definizione corrispondono a:

$$d = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{min(a_p,b_p)} \qquad\qquad m = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{max(a_p,b_p)}$$

- A questo punto, osserviamo che **se uno è il minimo tra i due, l'altro sarà il massimo**:

$$min(a_p, b_p) = a_p \iff max(a_p, b_p) = b_p$$

- Quindi, il prodotto tra d e m corrisponde a:

$$dm = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{min(a_p,b_p)} \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{max(a_p,b_p)} = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a_p+b_p} = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a_p} \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{b_p} = ab$$

2.7 Teorema cinese dei resti

Prima di procedere col teorema riguardante tale sezione, è necessario considerare i seguenti due lemmi:

Lemma 6. Numeri coprimi ed mcm

Dati interi $a_1, ..., a_n \geq 2$, se $MCD(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j$ (ossia sono tutti interi coprimi tra loro), allora $mcm(a_1, ..., a_n) = a_1 \cdot ... \cdot a_n$

Dimostrazione:

- Poiché $a_1, ..., a_n$ sono coprimi tra loro, si ha che

$$MCD(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j \implies \forall p \in \mathbb{P}, p \,|\, a_i \implies p \not| a_j, \forall j \neq i$$

- Consideriamo anche la loro fattorizzazione in primi:

$$a_1 = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a_{1,p}}, \quad a_2 = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a_{2,p}}, \quad ..., \quad a_n = \prod_{p\in\mathbb{P}} p^{a_{n,p}}$$

- Dati i due punti precedenti, si ha che:

$$a_{i,p} > 0 \implies a_{j,p} = 0, \forall j \neq i \implies \forall p \in \mathbb{P}, a_{1,p} + ... + a_{n,p} = max(a_{1,p}, ..., a_{n,p})$$

- Ponendo $m := mcm(a_1, ..., a_n)$, quindi, abbiamo che:

$$m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{max(a_1,...,a_n)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_1+...+a_n} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_1} \cdot ... \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_n} = a_1 \cdot ... \cdot a_n$$

Lemma 7. Funzione φ

Consideriamo la **notazione** $x \mod q$, indicante la classe di congruenza $[x]$ modulo q, dove $q \in \mathbb{N}$.

Dati $a_1, ..., a_n \geq 2$ e posto $m := mcm(a_1, ..., a_n)$, la funzione

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{a_1} \times \mathbb{Z}_{a_2} \times ... \times \mathbb{Z}_{a_n} : x \mod m \mapsto (x \mod a_1, ..., x \mod a_n)$$

è **ben definita ed iniettiva**

Dimostrazione:

- Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x \equiv x' (\mod a_1) \\ x \equiv x' (\mod a_2) \\ ... \\ x \equiv x' (\mod a_n) \end{cases} \iff \begin{cases} x' - x \in I(a_1) \\ x' - x \in I(a_2) \\ ... \\ x' - x \in I(a_n) \end{cases} \iff x' - x \in I(a_1) \cap ... \cap I(a_n)$$

- Poiché $I(a_1) \cap ... \cap I(a_n) = I(m)$, allora:

$$x' - x \in I(a_1) \cap ... \cap I(a_n) = I(m) \iff x \equiv x' (\mod m)$$

Theorem 8. Teorema cinese dei resti

Dati $a_1, ..., a_n \geq 2$ tali che $MCD(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j$ e dove $0 \leq b_i < a_i, 1 \leq i \leq n$, il **sistema di congruenze**

$$\begin{cases} x \equiv b_1 (\mod a_1) \\ x \equiv b_2 (\mod a_2) \\ ... \\ x \equiv b_3 (\mod a_n) \end{cases}$$

ammette un'unica soluzione $x \mod q$ dove $m = a_1 \cdot ... \cdot a_n$.

Dimostrazione:

- Sia φ la stessa funzione del primo lemma e sia $m := mcm(a_1, ..., a_n) = a_1 \cdot ... \cdot a_n$ per il secondo lemma.
- Ricordando che l'insieme quoziente in n è definito come $\mathbb{Z}_n : \{0, ..., n-1\}$, la sua cardinalità è $|\mathbb{Z}_n| = n$, calcolando la cardinalità del codominio della funzione φ otteniamo che:

$$|\mathbb{Z}_{a_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{a_n}| = |\mathbb{Z}_{a_1}| \cdot ... \cdot |\mathbb{Z}_{a_n}| = a_1 \cdot ... \cdot a_n = m = |\mathbb{Z}_m|$$

- Osserviamo che se il dominio e il codominio di una funzione $f : X \to Y$ hanno la stessa cardinalità finita, ossia $|X| = |Y| < +\infty$, allora essa può essere iniettiva se e solo se è anche suriettiva.
- Dunque, essendo $|\mathbb{Z}_{a_1} \times ... \times \mathbb{Z}_{a_n}| = |\mathbb{Z}_m|$ ed essendo φ una funzione iniettiva, allora essa deve essere obbligatoriamente anche suriettiva.
- Concludiamo quindi che dato $x \ \texttt{mod m} \in \mathbb{Z}_m$, abbiamo che

$$\phi(x \ \texttt{mod m}) = (b_1 \ \texttt{mod} \ a_1, ..., b_n \ \texttt{mod} \ a_n)$$

  equivale a dire che x è l'unica soluzione del sistema.

Esempi:

1. - Cerchiamo una soluzione per il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 2(\texttt{mod } 3) \\ x \equiv 3(\texttt{mod } 5) \\ x \equiv 2(\texttt{mod } 7) \end{cases}$$

   - Utilizzando la definizione di divisione con resto euclidea, $x \equiv 2(\texttt{mod } 3)$ corrisponde ad affermare che $x = 2 + 3a, \forall a \in \mathbb{Z}$ (in modulo 3)
   - Sostituendo $x = 2 + 3a$ dentro $x \equiv 3(\texttt{mod } 5)$, otteniamo che:

$$2 + 3a \equiv 3(\texttt{mod } 5)$$

   - Applicando la definizione di relazione di congruenza, impostiamo l'equazione (dove le classi di congruenza sono descritte appartengono tutte a $\mathbb{Z}_5$):

$$[2 + 3a] = [3]$$
$$[2] + [3][a] = [3]$$
$$[3][a] = [3] - [2]$$
$$[a] = [1][3]^{-1}$$
$$[a] = [1][2]$$
$$[a] = [2]$$

- Applicando inversamente la definizione di relazione di congruenza, otteniamo quindi che $[a] = [2] \implies a \equiv 2(\mathsf{mod}\ 5) \implies a = 2 + 5b, \forall b \in \mathbb{Z}$
- Sostituendo $x = 2 + 3(2 + 5b) = 8 + 15b$ dentro $x \equiv 2(\mathsf{mod}\ 7)$, otteniamo che:

$$8 + 15b \equiv 2(\mathsf{mod}\ 5)$$

- Seguiamo quindi i passaggi analoghi a prima, stavolta lavorando in $\mathbb{Z}_7$:

$$[8 + 15b] = [2]$$
$$[8] + [15][b] = [2]$$
$$[15][b] = [2] - [8]$$
$$[1][b] = [2] - [1]$$
$$[b] = [1]$$

- Quindi abbiamo che $[b] = [1] \implies b \equiv 1(\mathsf{mod}\ 7) \implies b = 1 + 7c, \forall c \in \mathbb{Z}$
- Infine, otteniamo che

$$x = 8 + 15(1 + 7c) = 23 + 105c, \forall c \in \mathbb{Z} \implies x \equiv 23(\mathsf{mod}\ 105)$$

- Notiamo come $105 = mcm(3, 5, 7,)$, dunque $x \equiv 23(\mathsf{mod}\ 105)$ è l'unica soluzione del sistema. Difatti, verifichiamo che:

$$\begin{cases} 23 \equiv 2(\mathsf{mod}\ 3) \\ 23 \equiv 3(\mathsf{mod}\ 5) \\ 23 \equiv 2(\mathsf{mod}\ 7) \end{cases}$$

2. - Cerchiamo una soluzione per il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\mathsf{mod}\ 15) \\ x \equiv 9(\mathsf{mod}\ 20) \end{cases}$$

- Poiché 15 e 20 non sono fattori primi, scomponiamo le due congruenze utilizzando il **teorema cinese dei resti**, in particolare la funzione φ:

$$x \equiv 6(\mathsf{mod}\ 15) \implies \begin{cases} x \equiv 0(\mathsf{mod}\ 3) \\ x \equiv 1(\mathsf{mod}\ 5) \end{cases}$$

$$x \equiv 9(\mathsf{mod}\ 20) \implies \begin{cases} x \equiv 1(\mathsf{mod}\ 4) \\ x \equiv 4(\mathsf{mod}\ 5) \end{cases}$$

- Il nuovo sistema sarà quindi:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\mathsf{mod}\ 15) \\ x \equiv 9(\mathsf{mod}\ 20) \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv 0(\mathsf{mod}\ 3) \\ x \equiv 1(\mathsf{mod}\ 5) \\ x \equiv 1(\mathsf{mod}\ 4) \\ x \equiv 4(\mathsf{mod}\ 5) \end{cases}$$

- Notiamo come la seconda e la quarta relazione di congruenza risultino in un'**incompatibilità del sistema**, poiché $1(\mathsf{mod}\ 5) \not\equiv 4(\mathsf{mod}\ 5)$, dunque **il sistema non può avere soluzioni**

3.
- Cerchiamo una soluzione per il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\mathsf{mod}\ 15) \\ x \equiv 11(\mathsf{mod}\ 20) \\ x \equiv 15(\mathsf{mod}\ 21) \end{cases}$$

- Scomponendo in fattori primi si ha che:

$$x \equiv 6(\mathsf{mod}\ 15) \implies \begin{cases} x \equiv 0(\mathsf{mod}\ 3) \\ x \equiv 1(\mathsf{mod}\ 5) \end{cases}$$

$$x \equiv 11(\mathsf{mod}\ 20) \implies \begin{cases} x \equiv 3(\mathsf{mod}\ 4) \\ x \equiv 1(\mathsf{mod}\ 5) \end{cases}$$

$$x \equiv 15(\mathsf{mod}\ 21) \implies \begin{cases} x \equiv 0(\mathsf{mod}\ 3) \\ x \equiv 1(\mathsf{mod}\ 7) \end{cases}$$

- Il nuovo sistema sarà quindi:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\mathsf{mod}\ 15) \\ x \equiv 11(\mathsf{mod}\ 20) \\ x \equiv 15(\mathsf{mod}\ 21) \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv 0(\mathsf{mod}\ 3) \\ x \equiv 1(\mathsf{mod}\ 5) \\ x \equiv 3(\mathsf{mod}\ 4) \\ x \equiv 1(\mathsf{mod}\ 7) \end{cases}$$

- Abbiamo quindi che $x \equiv 0(\mathsf{mod}\ 3) \implies x = 0 + 3a, \forall a \in \mathbb{Z}$. Sostituendo nella seconda congruenza, otteniamo che $3a \equiv 1(\mathsf{mod}\ 5)$. Lavorando in $\mathbb{Z}_5$ quindi si ha che:

$$[3a] = [1]$$
$$[3][a] = [1]$$
$$[a] = [1][3]^{-1}$$
$$[a] = [2]$$

- Dunque $[a] = [2] \implies a \equiv 2(\mathsf{mod}\ 5) \implies a = 2 + 5b, \forall b \in \mathbb{Z}$.
- Sostituendo nella terza congruenza otteniamo $x = 3(2 + 5b) = 6 + 15b \implies 6 + 15b \equiv 3(\mathsf{mod}\ 4)$. Lavorando in $\mathbb{Z}_4$ quindi si ha che:

$$[6 + 15b] = [3]$$
$$[6] + [15][b] = [3]$$
$$[2] + [3][b] = [3]$$

$$[3][b] = [3] - [2]$$
$$[b] = [1][3]^{-1}$$
$$[b] = [3]$$

- Dunque $[b] = [3] \implies b \equiv 3(\mathtt{mod}\ 4) \implies b = 3 + 4c, \forall c \in \mathbb{Z}$
- Sostituendo nella quarta congruenza otteniamo $x = 6 + 15(3 + 4c) = 51 + 60c \implies 51 + 60c \equiv 1(\mathtt{mod}\ 7)$. Lavorando in $\mathbb{Z}_7$ quindi si ha che:

$$[51 + 60c] = [1]$$
$$[2] + [4][c] = [1]$$
$$[2] + [4][c] = [1]$$
$$[4][c] = [1] - [2]$$
$$[4][c] = [-1]$$
$$[c] = [6][4]^{-1}$$
$$[c] = [6][2]$$
$$[c] = [12]$$
$$[c] = [5]$$

- Dunque $[c] = [2] \implies c \equiv 5(\mathtt{mod}\ 7) \implies c = 5 + 7d, \forall d \in \mathbb{Z}$.
- Infine, otteniamo che

$$x = 51 + 60(5 + 7d) = 351 + 420d \implies x \equiv 351(\mathtt{mod}\ 420)$$

che risulta essere l'unica soluzione del sistema. Difatti verifichiamo che:

$$\begin{cases} 351 \equiv 6(\mathtt{mod}\ 15) \\ 351 \equiv 11(\mathtt{mod}\ 20) \\ 351 \equiv 15(\mathtt{mod}\ 21) \end{cases} \implies \begin{cases} 351 \equiv 0(\mathtt{mod}\ 3) \\ 351 \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5) \\ 351 \equiv 3(\mathtt{mod}\ 4) \\ 351 \equiv 1(\mathtt{mod}\ 7) \end{cases}$$

4. - Vogliamo calcolare le ultime due cifre di 37^{37}. Poniamo quindi $x := 37^{37}$ e calcoliamo la classe di equivalenza $x \ \mathtt{mod}\ 100$.
   - Scomponiamo quindi $100 = 4 \cdot 25$ in modo da poter applicare il teorema cinese dei resti:
     - Calcoliamo la classe di equivalenza di x in $\mathbb{Z}_4$

$$[x] = [37^{37}] = [37]^{37} = [1]^{37} = [1]$$

     - Calcoliamo la classe di equivalenza di x in $\mathbb{Z}_{25}$

$$[x] = [37^{37}] = [37]^{37} = [12]^{37} = [12][12]^{36} = [12][(12)^2]^{18} = [12][144]^{18} =$$
$$= [12][19]^{18} = [12][-6]^{18} = [12][(-6)^2]^9 = [12][36]^9 = [12][11]^9 =$$
$$= [12][11][(11)^2]^4 = [12][11][121]^4 = [12][11][-4]^4 = [12][11][6] = [792] = [17]$$

- Impostiamo quindi il seguente sistema e procediamo applicando il teorema cinese:
$$\begin{cases} x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 4) \\ x \equiv 17(\mathtt{mod}\ 25) \end{cases}$$
- Abbiamo quindi che $x = 1 + 4k \implies 1 + 4k \equiv 17(\mathtt{mod}\ 25)$:
$$[1] + [4][k] = [17]$$
$$[4][k] = [16]$$
$$[k] = [16][4]^{-1}$$
$$[k] = [16][19]$$
$$[k] = [304]$$
$$[k] = [4]$$
- Dunque $k \equiv 4(\mathtt{mod}\ 25) \implies k = 4 + 25j \implies x = 1 + 4(4 + 25j) = 17 + 100j$
- Quindi concludiamo che $x \equiv 17(\mathtt{mod}\ 100)$ e quindi che le ultime cifre di 37^{37} corrispondono a 17

5. - Vogliamo calcolare l'inverso di 193 in $\mathbb{Z}_{240}$. Per definizione, ciò equivale a calcolare $193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 240)$
- Scomponiamo $240 = 24 \cdot 10$ e osserviamo che se $x \equiv y(\mathtt{mod}\ n)$ e $d \mid n$ allora si ha che
$$x \equiv y(\mathtt{mod}\ n) \implies y - x \in I(n) = y - x = n \cdot N = d(kN) \implies x \equiv y(\mathtt{mod}\ d)$$
- Quindi, siccome $16 \mid 240, 3 \mid 240$ e $5 \mid 240,$, impostiamo il seguente sistema
$$\begin{cases} 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 3) \\ 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5) \\ 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 16) \end{cases}$$
- Riduciamo le classi di equivalenza del sistema:
  - Riduciamo $193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 3)$ in:
$$[193][x] = [1] \implies [1][x] = [1] \implies [x] = [1]$$
  - Riduciamo $193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5)$ in:
$$[193][x] = [1] \implies [3][x] = [1] \implies [x] = [3]^{-1} \implies [x] = [2]$$
  - Riduciamo $193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 16)$ in:
$$[193][x] = [1] \implies [1][x] = [1] \implies [x] = [1]$$

- Riconduciamo quindi il sistema iniziale ad una versione semplificata sulla quale possiamo applicare il teorema cinese:

$$\begin{cases} 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 3) \\ 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5) \\ 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 16) \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 3) \\ x \equiv 2(\mathtt{mod}\ 5) \\ x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 16) \end{cases}$$

- Quindi si ha che $x = 1 + 16k \implies 1 + 16k \equiv 1(\mathtt{mod}\ 3)$:

$$[1] + [16][k] = [1]$$

$$[k] = [0][16]^{-1}$$

$$[k] = [0]$$

- Dunque $k = 0+3j \implies x = 1+16(0+3j) = 1+48j \implies 1+48j \equiv 2(\mathtt{mod}\ 5)$:

$$[1] + [48][j] = [2]$$

$$[j] = [1][3]^{-1}$$

$$[j] = [2]$$

- Infine $j = 2 + 5h \implies x = 1 + 48(2 + 5h) = 97 + 240h \implies x \equiv 97(\mathtt{mod}\ 240)$
- Infatti in $\mathbb{Z}_{240}$ si ha che $[193][97] = [1]$

2.8 Induzione matematica

Vogliamo dimostrare una successione di n proposizioni, etichettate come $p_1), p_2), ..., p_n)$. Supponiamo di aver dimostrato la proposizione $p_1)$, che denominiamo come **caso base**. Se le prime $p_1), ..., p_n)$ sono vere, allora anche la proposizione $p_{n+1})$ è vera (**passo induttivo**).

Per esprimere tale concetto matematicamente, possiamo dire che:

Definition 15. Principio di induzione

Data una successione di proposizioni $p_1), ..., p_n)$, si ha che:

$$p_1) \implies p_2)$$

$$p_1), p_2) \implies p_3)$$

$$...$$

$$p_1), ..., p_n) \implies p_{n+1}$$

Esempi:

1. • Vogliamo verificare che la proposizione seguente proposizione sia vera $\forall n \geq 1$:

$$1 + 2 + 3 + ... + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

• Verifichiamo quindi il **caso base** p_1), ossia $n = 1$

$$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2}$$

che risulta essere vero

• A questo punto, assumiamo per **ipotesi induttiva** che p_n) sia vera.

• Impostiamo quindi il **passo induttivo**, ossia p_{n+1}):

$$1 + 2 + 3 + ... + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

• Notiamo come il **passo induttivo contenga al suo interno l'ipotesi induttiva stessa**, che abbiamo affermato essere vera:

$$\underbrace{1 + 2 + 3 + ... + n}_{\text{Ipotesi induttiva}} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

$$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

dunque anche il passo induttivo risulta essere vero, concludendo che **la proposizione** p_n) **sia valida** $\forall n \geq 1$

2. • La funzione di Fibonacci è definita come:

$$\begin{cases} F_0 = 0 & \text{se } n = 0 \\ F_1 = 1 & \text{se } n = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n+2} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

• Le costanti φ e ψ, corrispondenti alle soluzioni dell'equazione $x^2 = x + 1$, sono definite come:

$$\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \qquad \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

- Vogliamo verificare per induzione che la seguente proposizione sia vera $\forall n$:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

- Verifichiamo quindi p_0) e p_1:

$$F_0 = \frac{\varphi^0 - \psi^0}{\varphi - \psi} = \frac{1-1}{\varphi - \psi} = 0$$

$$F_1 = \frac{\varphi^1 - \psi^1}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi - \psi}{\varphi - \psi} = 1$$

- Assumiamo quindi per ipotesi induttiva che p_{n-1}) sia vera e verifichiamo il passo induttivo p_n, utilizzando però la definizione originale di F_n:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n+2} = \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{n-2} - \psi^{n-2}}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^{n-2}(\varphi + 1) - \psi^{n-2}(\psi + 1)}{\varphi - \psi}$$

- Siccome per definizione stessa $\varphi^2 = \varphi + 1$ e $\psi^2 = \psi + 1$, allora abbiamo che:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n+2} = \frac{\varphi^{n-2}\varphi^2 - \psi^{n-2}\psi^2}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

verificando quindi la validità del passo induttivo

3. - Vogliamo dimostrare per induzione l'identità binomiale di Newton, definita come:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

dove il coefficiente binomiale è definito come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

- Verifichiamo quindi il caso base:

$$1 = (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$$

- A questo punto effettuiamo il passo induttivo:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = (a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n =$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

- Trasliamo di -1 l'indice della prima sommatoria e portiamo fuori il suo ultimo termine:

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

- Nella seconda sommatoria, invece, portiamo fuori il primo termine, in modo che gli indici di entrambe le sommatorie coincidano:

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n-0+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} =$$

- A questo punto uniamo nuovamente le due sommatorie:

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} =$$

- Per le proprietà dei coefficienti binomiali (facilmente verificabili) si ha che $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, dunque riscriviamo la sommatoria come:

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

- A questo punto, poiché $\binom{n}{0} = \binom{n}{n+1} = 1$, riscriviamo i due termini esterni alla sommatoria in modo da poterli reinserire in essa, ottenendo il risultato cercato:

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

L'induzione matematica sarà alla base di alcune dimostrazioni che vedremo in seguito, come il **piccolo teorema di Fermat** mostrato nella sezione successiva.

2.9 Piccolo teorema di Fermat

Prima di enunciare e dimostrare il teorema, affermiamo il seguenti due lemmi:

Lemma 9

Dato $p \in \mathbb{P}$ e dato $0 < k < p$ si ha che:

$$p \,\Big|\, \binom{p}{k}$$

Dimostrazione:

- Dato che per sua definizione stessa il calcolo del coefficiente binomiale corrisponde ad un numero intero (si consiglia di leggere questa dimostrazione), il numeratore e il denominatore si semplificano tra di loro, tuttavia senza mai semplificare p, poiché esso è primo e i valori al denominatore sono minori di esso.

  Di conseguenza, si ha che:

  $$\binom{p}{k} = n \cdot p, \exists n \in \mathbb{Z} \implies p \,\Big|\, \binom{p}{k}$$

  Esempio:
  $$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 \implies 7 \,\Big|\, \binom{7}{3}$$

Da tale lemma, quindi, traiamo che in $\mathbb{Z}_p$ si ha:

$$\binom{p}{k} \cdot [a] = 0$$

Inoltre, possiamo generalizzare tale casistica del caso in cui dato $n \in \mathbb{Z}$ dove $p \,|\, n$, in $\mathbb{Z}_p$ si ha:

$$n \cdot [a] = 0$$

Difatti, dato $p \,|\, n$, poiché siamo in $\mathbb{Z}_p$ si ha che:

$$n \cdot [a] = [na] = [pka] = [0]$$

Lemma 10

In $\mathbb{Z}_p$ si ha che:

$$([a] + [b])^p = [a]^p + [b]^p$$

Dimostrazione:

- Dato il binomio di Newton, sappiamo che:

$$([a] + [b])^p = \sum_{k=0}^{p} [a]^k [b]^{p-k}$$

- Se $k = 0$ o $k = p$, si ha che:

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$$

- Se invece $0 < k < p$, per il lemma precedente sappiamo che in $\mathbb{Z}_p$:

$$p \,\Big|\, \binom{p}{k} \implies \binom{p}{k} \cdot [a] = 0$$

- Di conseguenza, ogni termine della sommatoria, escluso il primo e l'ultimo, può essere ricondotto alla classe [0]:

$$([a]+[b])^p = \sum_{k=0}^{p} [a]^k [b]^{p-k} = \binom{p}{0}[b]^p + \binom{p}{1}[a][b]^{p-1} + ... + \binom{p}{p-1}[a]^{p-1} + \binom{p}{p}[a]^p =$$

$$= \binom{p}{0}[b]^p + [0] + ... + [0] + \binom{p}{p}[a]^p = [b]^p + [a]^p$$

Tale lemma, inoltre, può essere esteso a n fattori:

$$([a_1] + ... + [a_n])^p = [a_1]^p + ... + [a_n]^p$$

Dimostrazione:

- Caso base (n=1):

$$([a] + [b])^1 = [a] + [b] = [a]^1 + [b]^1$$

- Caso base (n=2): coincide con il lemma appena enunciato
- Passo induttivo:

$$([a_1]+...+[a_n]+[a_{n+1}])^p = ([[a_1]+...+[a_n]]+[a_{n+1}])^p = ([a_1]+...+[a_n])^p+[a_{n+1}]^p =$$

$$= ([a_1] + ... + [a_{n-1}])^p + [a_n]^p + [a_{n+1}]^p = ... = [a_1]^p + ... + [a_{n+1}]^p$$

Theorem 11. Piccolo teorema di Fermat

In $\mathbb{Z}_p$ si ha che $\forall p \in \mathbb{P}, \forall a \in \mathbb{Z}$ vale:

$$a^p \equiv a(\mathsf{mod}\ p)$$

Dimostrazione:

- Caso base (a=0):
$$[0]^p = [0]$$
- Ipotesi induttiva:
$$[a]^p = [a]$$
- Passo induttivo:
$$[a+1]^p = ([a]+[1])^p = [a]^p + [1]^p = [a]^p + [1] = [a] + [1] = [a+1]$$

Tramite tale teorema, inoltre, possiamo dimostrare che:

$$[a]^p = [a]$$
$$[a]^k[a]^p = [a][a]^k$$
$$[a]^{p+k} = [a][a]^{k+1-1}$$
$$[a]^{p+k} = [a][a]^{-1}[a]^{k+1}$$
$$[a]^{p+k} = [1][a]^{k+1}$$
$$[a]^{p+k} = [a]^{k+1}$$

Ad esempio, abbiamo che $a^{p-3} \equiv a^{-2}(\mathsf{mod}\ p)$ e che $5^7 \equiv 5^5 \equiv 5^3 \equiv 5 \equiv 2(\mathsf{mod}\ 3)$.

2.10 Ordine di un elemento di un gruppo

Consideriamo un gruppo G non per forza abeliano e sia $g \in G$. Definiamo il sottogruppo $H(g) \subset G$ e l'ideale $I(g) \subset \mathbb{Z}$ come:

$$H(g) : \{g^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$$

$$I(g) : \{n \in \mathbb{Z} \,|\, g^n = e\}$$

dove e è l'elemento neutro della moltiplicazione e g^n è definita come:

$$g^n = \begin{cases} \prod_{i=0}^{n} g & \text{se } n > 0 \\ e & \text{se } n = 0 \\ \prod_{i=0}^{n} g^{-1} & \text{se } n < 0 \end{cases}$$

Prima di tutto, dimostriamo che essi siano rispettivamente un sottogruppo di G ed un ideale di $\mathbb{Z}$:

- $(H(g), \cdot) \subset (G, \cdot)$
  - $g^0 = e \implies e \in H(g)$
  - $g^n, g^m \in H(g) \implies g^n \cdot g^m = g^{n+m} \implies g^{n+m} \in H(g)$
  - $g^n \in H(g) \implies (g^n)^{-1} = g^{-n} \implies g^{-n} \in H(g)$
- $(I(g), +) \subset (\mathbb{Z}, +)$
  - $g^0 = e \implies 0 \in H(g)$
  - $n, m \in I(g) \implies g^n = g^m = e \implies g^{n+m} = g^n \cdot g^m = e \implies n + m \in I(g)$
  - $n \in I(g) \implies g^{-n} = (g^n)^{-1} = e^{-1} = e \implies -n \in I(g)$
  - $n \in I(g), k \in \mathbb{Z} \implies g^{nk} = (g^n)^k = e^k = e \implies kn \in I(g)$

A questo punto, diamo una definizione di ordine di un elemento di un gruppo:

Definition 16. Ordine di un elemento di un gruppo

Sia G un gruppo e sia $g \in G$. Dato $H(g) : \{g^n \,|\, n \in \mathbb{Z}\}$, definiamo l'**ordine di** g come:

$$o(g) := |H(g)|$$

Affermiamo, inoltre, la seguente proposizione:

Proposition 12

Dato $g \in G$ e dato $I(g) : \{n \in \mathbb{Z} \,|\, g^n = e\}$, allora $\exists! d \geq 0 \,|\, I(g) = I(d)$ dove:

- $d = 0 \implies o(g) = \mathbb{Z} = \text{"} + \infty\text{"}$
- $d > 0 \implies o(g) = d$

Dimostrazione:

- Supponendo $I(g) = I(d)$, abbiamo che:

$$n, m \in I(g) \implies g^n = g^m \implies g^{-n} \cdot g^n = g^m \cdot g^{-n} \implies e = g^{m-n} \implies$$
$$\implies m - n \in I(g) = I(d) \implies d \,|\, m - n$$

- Se $d = 0$, si ha:
  - Siccome $d \,|\, m - n$, allora

$$0 \,|\, m - n \implies m - n = 0 \implies m = n$$

  concludendo che $n \neq m \implies g^n \neq g^m$

  - Di conseguenza, la funzione descrivente il sottogruppo $H(g)$

$$f : \mathbb{Z} \to H(g) : n \mapsto g^n$$

    è biettiva, associando quindi ogni $n \in \mathbb{Z}$ ad un diverso $g^n \in H(g)$.
  - Tuttavia, poiché $|\mathbb{Z}| = " + \infty"$, ne segue che anche $|H(g)| = " + \infty"$ affinché la funzione possa rimanere biettiva, implicando quindi che:

$$o(g) := |H(g)| = |\mathbb{Z}| = " + \infty"$$

- Se invece $d > 0$, si ha:
  - Poiché $I(g) = I(d) \implies g^d = e$, esiste $n \in \mathbb{Z}$ tale che:

$$n = qd + r, 0 \leq r < d \implies g^n = g^{qd+r} = (g^d)^q \cdot g^r = e^q \cdot g^r = g^r$$

    concludendo che $H(g)$ possa contenere al massimo d elementi, dunque $o(g) := |H(g)| \leq d$
  - Mostriamo ora che poiché $0 \leq m, n < d \implies -d < m, n < d$ e poiché $g^n = g^m \implies d \,|\, m - n$, l'unico numero $m - n$ in grado di soddisfare entrambe le condizioni è l'unico multiplo di d compreso tra $-d$ e d, ossia 0
  - Dunque, si ha che $m - n = 0 \implies m = n$, implicando quindi che

$$H(g) : \{e = x^0 \text{ dove } x = g^1, ..., g^{d-1}\}$$

    e di conseguenza che $o(g) := |H(g)| = d$

Proposition 13

Se G è un gruppo con cardinalità finita, allora per $g \in G$ si ha che:

$$o(g) := |H(g)| \leq |G| < +\infty$$

Inoltre, per il **teorema di Lagrange** si ha che:

$$o(g) \,|\, |G| \implies g^{|G|} = e$$

Dimostrazione:

- Dato $d := o(g)$, allora

$$o(g) \,|\, |G| \implies d \,|\, |G| \implies |G| = dk, \exists k \in \mathbb{Z} \implies g^{|G|} = g^{dk} = (g^d)^k = e^k = e$$

Inoltre, tramite tale proposizione possiamo trovare una **seconda dimostrazione del piccolo teorema di Fermat**:

2° Dimostrazione del PTF:

- Se $[a] = [0]$, allora abbiamo che $[a]^p = [0]$
- Per $[a] \neq [0]$, ricordiamo che $\mathbb{Z}_p$, dove $p \in \mathbb{P}$, corrisponde ad un campo, dunque tutti i suoi elementi, tranne lo zero, sono invertibili. Dunque si ha che $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{0\}$, implicando che $\left|\mathbb{Z}_p^*\right| = p - 1$.
- Di conseguenza, per via della proposizione precedente, dato $[a] \in \mathbb{Z}_|^*$ si ha che:

$$[a]^{\left|\mathbb{Z}_p^*\right|} = [1] \implies [a]^{p-1} = [1] \implies [a]^p = [a]$$

2.10.1 Ordine di una permutazione

Un caso particolare di ordine di un elemento appartenente ad un gruppo è quello delle permutazioni.

Dato $\sigma \in S_n$, definiamo come **ciclo di** σ una sequenza di interi $1 \leq i_1, ..., i_n \leq n$ tutti distinti tra loro tali che:

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, ..., \sigma(i_n) = i_1$$

Ad esempio, consideriamo la seguente permutazione in S_9:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

Notiamo la presenza di tre cicli all'interno di tale permutazione:

- $1 \to 5 \to 2 \to 7 \to 1$
- $3 \to 6 \to 3$
- $4 \to 9 \to 8 \to 4$

Definiamo come **lunghezza di un ciclo** il numero di elementi appartenenti a tale ciclo. Nel nostro esempio, quindi, abbiamo tre cicli di lunghezza rispettiva 4, 2 e 3. In particolare, utilizziamo la seguente notazione per descrivere la **decomposizione in cicli** della permutazione:

$$\sigma = (1587)(36)(498)$$

Notiamo, inoltre, la possibilità di **ricostruire una permutazione** qualsiasi tramite la sua decomposizione in cicli. Ad esempio, in S_8 si ha che:

$$\sigma = (235)(1874)(6) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Dato $\sigma \in S_n$ e dato $1 \leq i \leq n$, definiamo i seguenti due ideali di $(\mathbb{Z}, +)$:

$$I(\sigma, i) : \{n \in \mathbb{Z} \,|\, \sigma^n(i) = i\}$$

$$I(\sigma) : \{n \in \mathbb{Z} \,|\, \sigma^n = \mathtt{id}\}$$

dove $\mathtt{id}$ rappresenta la **permutazione identica**, ossia quella che manda ogni elemento in se stesso. Dimostriamo quindi che si tratta di due ideali (la dimostrazione per il secondo ideale è analoga a quella del primo, dunque verrà omessa):

- $\sigma^0(i) = \mathtt{id}(i) = i \implies 0 \in I(\sigma, i)$
- $m, n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^n(i) = \sigma^n(i) = i \implies \sigma^{n+m}(i) = (\sigma^n)^m(i) = \sigma^m(i) = i \implies m + n \in I(\sigma, i)$
- $n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^{-n}(i) = (\sigma^n)^{-1}(i) = i \implies -n \in I(\sigma, i)$
- $n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^{nk}(i) = (\sigma^n)^k(i) = i, \forall k \in \mathbb{Z} \implies nk \in I(\sigma, i), \forall k \in \mathbb{Z}$

Per gli ultimi due punti è necessario osservare che data una permutazione $\sigma \in S_n$ dove $\sigma(i) = i$, dunque i viene sempre mandato in se stesso, allora $\sigma^k(i) = i, \forall k \in \mathbb{Z}$.

Lemma 14

Se $i \leq i \leq n$ è un elemento appartenente ad un ciclo di σ di lunghezza d, allora

$$I(\sigma, i) = I(d)$$

Dimostrazione:

- Per dimostrare il lemma, ci basta verificare che se $d \in I(\sigma, i)$ e $0 < k < d$, allora $k \notin I(\sigma, i)$.
- Sia quindi $i \in (i_1 i_2 ... i_d)$, ossia appartenente ad un ciclo di lunghezza d. Per comodità, supponiamo che $i = i_1$, poiché scorrere l'ordine degli elementi del ciclo non ne cambia le proprietà (ad esempio: $(2783) = (7832)$)
- Si verifica quindi che:
  - $\sigma(i_1) = i_2 \neq i_1$
  - $\sigma^2(i_1) = \sigma(\sigma(i_1)) = \sigma(i_2) = i_3 \neq i_1$
  - ...
- Più in generale, quindi, affermiamo che

$$0 < k < d \implies \sigma^k(i) = \sigma(\sigma^{k-1}(i)) = \sigma(i_k) = i_{k+1}$$

- Nel caso in cui invece $k = d$, si verifica che:

$$\sigma^d(i) = \sigma(i_d) = i_1$$

- Di conseguenza, **la più piccola potenza di σ che manda i in se stesso è** d, dove d è la lunghezza del ciclo.

Lemma 15. Ordine di una permutazione

Dato $\sigma \in S_n$ e data la sua decomposizione in cicli $\sigma = \gamma_1\gamma_2...\gamma_k$, si verifica che

$$o(\sigma) = mcm(d_1, ..., d_k)$$

dove d_i è la lunghezza del ciclo γ_i

Dimostrazione:

- Per definizione stessa dei due ideali $I(\sigma)$ e $I(\sigma, i)$, si ha che:

$$n \in I(\sigma) \iff \sigma^n = \texttt{id} \iff \sigma^n(i) = i, \forall 1 \leq i \leq n \iff$$

$$\iff n \in I(\sigma, i), \forall 1 \leq i \leq n \iff n \in I(\sigma, 1) \cap ... \cap I(\sigma, n)$$

- Di conseguenza, dato $d := o(\sigma)$ e $m := mcm(d_1, ..., d_n))$, per via delle proprietà degli ideali si verifica che:

$$I(d) = I(\sigma) = I(\sigma, 1) \cap ... \cap I(\sigma, n) = I(d_1) \cap ... \cap I(d_n) = I(m)$$

Esempi:

- Dato $\sigma \in S_7$ tale che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (13526)(47)$$

  L'ordine di tale permutazione risulta essere:

$$o(\sigma) = mcm(5, 2) = 10$$

- Dato $\sigma \in S_{15}$ tale che:

$$\sigma = (1\ 2\ 10\ 8\ 3)(11\ 7)(4\ 12\ 14\ 6)(13)(5\ 15\ 9)$$

  L'ordine di tale permutazione risulta essere:

$$o(\sigma) = mcm(5, 2, 4, 1, 3) = 60$$

Segno delle permutazioni

Dato $\sigma \in S_n$, definiamo come **inversione di** σ una coppia di valori (i, j) dove $1 \leq i, j \leq n$ tale che $\sigma(i) > \sigma(j)$. Denotiamo quindi l'insieme delle inversioni di σ come:

$$Inv(\sigma) : \{1 \leq i, j \leq n \,|\, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

Ad esempio, data la permutazione

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

l'insieme delle sue inversioni sarà:

$$Inv(\sigma) : \{(1,4),(2,3),(2,4),(2,5),(3,4)\}$$

Definiamo inoltre il **segno di** σ come:

$$sgn(\sigma) = (-1)^{|Inv(\sigma)|} = \begin{cases} +1 & \text{se } |Inv(\sigma)| \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } |Inv(\sigma)| \text{ è dipari} \end{cases}$$

Di conseguenza, affermiamo che σ è pari se il suo segno è $+1$, mentre è dispari se il suo segno è -1.

In seguito mostreremo che se $\sigma \in S_n$ ha una decomposizione in cicli del tipo $\sigma = \gamma_1\gamma_2...\gamma_k$ allora $sgn(\sigma) = (-1)^{n-k}$