Università "Sapienza" di Roma
Facoltà di Informatica

Calcolo delle Probabilità

Appunti integrati con il libro "The Probability Tutoring Book", Carol Ash

Author
Simone Bianco

30 settembre 2022

Indice

Capitolo 0

Introduzione

Capitolo 1

Esiti ed Eventi

Prima di poter parlare di probabilità, è necessario definire ciò di cui essa si occupa. Il **calcolo di una probabilità** corrisponde allo studio di un fenomeno osservabile esclusivamente dal punto di vista della possibilità o meno del suo verificarsi.

Consideriamo ad esempio il lancio di una moneta. Tale fenomeno può avere **solo due esiti**, ossia testa o croce. Possiamo rappresentare tale fenomeno sottoforma di insieme, dove i suoi elementi sono tutti gli esiti possibili:

$$S : \{T, C\}$$

Effettuando un esperimento su tale insieme, ossia un lancio, il risultato di tale esperimento rientrerà in un **numero finito di esiti**, rappresentabili tramite un insieme. Tale esperimento viene detto **aleatorio**, mentre l'insieme di tutti gli esiti possibili viene detto **insieme ambiente (o spazio campionario)**.

Consideriamo ora il lancio di un dado. Anche in questo caso, il numero di esiti risulta essere finito: può uscire solo una faccia avente da uno a sei pallini. **Enumeriamo** quindi tutti gli esiti possibili associando un numero ad ogni esito:

$$S : \{\cdot,\ \cdot\cdot,\ \cdot\cdot\cdot,\ \cdot\cdot\cdot\cdot,\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot,\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\} \quad \longrightarrow \quad S : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Analogamente, possiamo enumerare gli esiti del lancio di una moneta:

$$S : \{T, C\} \quad \longrightarrow \quad S : \{0, 1\}$$

Consideriamo ora l'**insieme** A contenente le facce di un dado aventi un numero di pallini inferiore o uguale a tre. Possiamo rappresentare tale insieme in **tre modi**:

- Per **enumerazione**, ossia $A : \{1, 2, 3\}$
- Per **proprietà descrittiva**, ossia $A : \{\texttt{facce di un dado il cui valore è massimo 3}\}$
- Per **notazione matematica**, ossia $A : \{x \in S \mid x \leq 3\}$

Abbiamo quindi definito gli elementi di A come appartenenti ad S ($x \in S$), dove S è l'insieme ambiente contenente tutti gli esiti possibili del lancio di un dado. Dunque, ne segue che $A \subset S$ (dunque che $x \in B \implies x \in S$), ossia è un **sottoinsieme dell'insieme ambiente**, che definiamo come **evento**. L'insieme A, quindi, corrisponde all'evento in cui esce una faccia minore o uguale a tre.

Definition 1. Evento

Un **evento** corrisponde ad un **sottoinsieme dell'insieme ambiente**, ossia dell'insieme contenente tutti i possibili esiti di un fenomeno.

1.1 Proprietà degli eventi

Consideriamo l'evento in cui esce una faccia pari. Definiamo tale evento come:

$$A : \{x \in S \,|\, x\%2 = 0\} : \{2, 4, 6\}$$

Riprendiamo anche l'evento già visto in cui esce una faccia minore o uguale a 3:

$$B : \{x \in S \,|\, x \leq 3\} : \{1, 2, 3\}$$

Definiti questi due eventi, possiamo prendere in considerazione l'**evento unione** tra i due, ossia l'evento in cui esce una faccia pari **oppure** minore o uguale a 3:

$$C : A \cup B : \{1, 2, 3, 4, 6\} \text{ dove } x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

Analogamente, possiamo prendere in considerazione l'**evento intersezione** tra i due, ossia l'evento in cui esce una faccia pari **e anche** minore o uguale a 3:

$$D : A \cap B : \{2\} \text{ dove } x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

Notiamo come quest'ultimo evento corrisponda ad un **singleton** (o singoletto), ossia un insieme di un solo elemento. Tale evento viene detto **evento elementare**.

Immaginiamo ora di voler descrivere l'evento in cui esce una faccia dispari. Come sappiamo, un numero dispari non è altro che un numero non pari. Definiamo quindi tale evento come **evento complementare** dell'evento in cui escono facce pari:

$$A^c : \{x \in S \,|\, x \notin A\}$$

Attenzione: è necessario sottolineare come non basti definire l'evento delle facce dispari come l'evento contenente tutti gli esiti che non sono nell'evento delle facce pari (dunque $A^c \neq \{x \notin A\}$), poiché ciò includerebbe anche gli esiti esterni all'insieme ambiente. Dunque, quando si parla di **evento complementare**, tale evento deve sempre essere **rapportato all'insieme ambiente** (dunque $x \in A^c \implies x \in S$).

Ovviamente, da tale definizione di evento complementare ne segue che l'**evento complementare dell'evento complementare di A** sia l'evento A stesso:

$$(A^c)^c = A$$

Un ulteriore modo per poter definire un evento complementare è tramite l'**esclusione**: eliminando tutti gli esiti appartenenti all'evento A dall'insieme ambiente S, otteniamo l'evento complementare di A:

$$A^c : S \setminus A$$

Volendo rappresentare l'evento contenente le facce minori o uguali a tre e non pari, possiamo definire tale evento in **due modi**:

- L'intersezione tra l'evento delle facce minori o uguali a tre e l'evento delle facce dispari (ossia il complementare delle facce pari)
$$E : B \cap A^c$$
- L'evento contenente gli esiti minori o uguali a tre esclusi gli esiti contenuti nell'evento delle facce pari
$$E : B \setminus A$$

Dunque, ne traiamo che:

$$B \setminus A = B \cap A^c$$

Trattandosi sostanzialmente di insiemi, gli eventi godono anche delle altre proprietà ad essi legati:

- **Proprietà disgiuntiva**
$$A \cap A^c = \emptyset$$
- **Proprietà associativa**
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{e} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
- **Proprietà distributiva**
$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{e} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
- **Legge di De Morgan**
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{e} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Dimostrazione:

Ricordiamo che, nell'ambito dell'insiemistica, la notazione $A = B$ indica che l'insieme A coincide esattamente con l'insieme B. Tale affermazione può essere ricondotta alla condizione $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$, poiché l'unico caso possibili in cui A è sottoinsieme proprio di B e B è sottoinsieme proprio di A è quando A e B coincidono.

Dunque, per dimostrare che $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, è sufficiente dimostrare che:

- $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$
- $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

Consideriamo la seguente unione:

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Se un elemento x appartiene al complementare di tale unione, allora ne segue che esso non appartenga all'unione in se

$$x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c \implies x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

A sua volta, ciò è possibile solo se l'elemento x appartenga al complementare di qualsiasi insieme appartenente a tale unione:

$$x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i \iff \forall A_i \text{ si ha che } x \in (A_i)^c$$

Quest'ultima condizione, infine, implica che:

$$\forall A_i \text{ si ha che } x \in (A_i)^c \implies x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c$$

Dunque, concludiamo che:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c$$

La stessa condizione, tuttavia, implica che non esiste un indice i tale che l'elemento x possa essere in A_i

$$\forall A_i \text{ si ha che } x \in (A_i)^c \implies \nexists i \,|\, x \in A_i$$

Dunque, considerando l'unione di tutte gli A_i insiemi, l'elemento x non può trovarsi in essa, dunque esso sarà necessariamente situato nel complementare di tale unione:

$$\nexists i \,|\, x \in A_i \implies x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c$$

Dunque, concludiamo che:

$$\bigcap_{i=1}^{n}(A_i)^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Poiché entrambe le condizioni sono verificate, otteniamo che:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n}(A_i)^c\right) \wedge \left(\bigcap_{i=1}^{n}(A_i)^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \Longleftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i)^c$$

- **Esclusione disgiuntiva (XOR)**

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Dimostrazione:

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B)$$
$$(A \cup B) \cap (A \cap B)^c$$
$$[(A \cap (A \cap B)^c] \cup [B \cap (A \cap B)^c]$$
$$[(A \cap (A^c \cup B^c)] \cup [B \cap (A^c \cup B^c)]$$
$$[(A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)] \cup [(B \cap A^c) \cup (B \cap B^c)]$$
$$[\emptyset \cup (A \cap B^c)] \cup [(B \cap A^c) \cup \emptyset]$$
$$[A \cap B^c] \cup [B \cap A^c]$$
$$[A \setminus B] \cup [B \setminus A]$$