Università "Sapienza" di Roma
Facoltà di Informatica

Calcolo Integrale

Appunti integrati con il libro
"Calculus: A Complete Course" - R.Adams, C.Essex

Author
Simone Bianco

23 febbraio 2022

Indice

Capitolo 0

Introduzione

Il corso di Calcolo Integrale si pone come un continuo degli argomenti trattati nel corso di Calcolo Differenziale. Le nozione precedentemente apprese verranno nuovamente accennate in alcuni casi, ma in linea di massima essi verranno considerati come già assodati.

Il corso verterà principalmente su tre macro-argomenti:

- **Serie Numeriche**, dove viene analizzata la somma di un numero infinito di termini, definita con l'operazione di limite tendente ad infinito, discutendone le proprietà fino ai polinomi di grado infinito (Serie di Potenze).
- **Integrali**, partendo dal problema del calcolo delle aree, definendo il concetto di integrale definito, fino all'applicazione di esso come strumento matematico inverso all'operazione di derivazione.
- **Equazioni Differenziali**, ossia equazioni in cui le incognite sono funzioni e le relazioni riguardano la funzione e le sue derivate.

Capitolo 1

Serie Numeriche

1.1 Successioni e Tipologie di Serie Numeriche

In matematica, con il termine **successione** viene semplicemente indicato l'insieme dei valori assunti da una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. Tale insieme, andrebbe quindi scritto come $a = \{a(1), a(2), a(3), ..., a(n)\}$. Tuttavia, per questioni di praticità, è molto più comodo usare la notazione $a_n = a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, dove il numero in pedice (ossia sotto) viene detto **indice della successione**.

Esempi di successioni:

- Se $a_n = 2n$ allora $a_n = 2, 4, 6, 8, 10, ..., 2n$
- Se $a_n = 2^n$ allora $a_n = 2, 4, 8, 16, 32..., 2^n$
- Se $a_n = \frac{1}{n}$ allora $a_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}$

Immaginiamo di voler calcolare la somma dei numeri reali. Essa è ben definita dalle seguenti proprietà:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$$

E l'insieme dei termini da sommare fosse **illimitato**? Come possiamo sapere il risultato finale della somma? Introduciamo quindi quello che è il concetto di **serie numerica**.

Definition 1. Serie Numerica

Data una **successione** di termine generico a_k, si dice serie numerica la **"somma infinita"** dei suoi termini.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

1.1.1 Serie Convergenti e Divergenti

Abbiamo quindi dato una definizione di **serie numerica**. Tuttavia, dobbiamo ancora analizzare le **proprietà** che tali serie possono assumere. Vediamo qualche esempio:

1. Consideriamo le seguente successione: se $a_n = 0$, allora

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 0$$

   Cosa accade a questa serie considerando $n \to +\infty$? Poiché si tratta di una funzione costante, indipendentemente dal valore assunto da n, il risultato della somma sarà **sempre 0**, dunque

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$

2. Consideriamo ora invece la successione

$$a_n = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$$

   Analizziamo prima cosa accade alla serie per piccoli valori di k

   - $S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$
   - $S_2 = a_1 + a_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}$
   - $S_3 = a_1 + a_3 = 1 - (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4}$
   - ...

   Notiamo che le **serie parziali** seguono uno **schema**: una serie di indice k, darà come risultato $S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$. Possiamo quindi generalizzare la serie in

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

   Dunque, il limite per $n \to +\infty$ di questa serie, sarà

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

In entrambi gli esempi mostrati, per $n \to +\infty$, le due serie **tendono ad un valore finito** (dunque hanno limite in ℓ). In questi casi si parla di **serie convergenti**.

Definition 2. Serie Convergente

Se la successione delle somme parziali S_n converge ad un valore ℓ, allora si dice che la serie numerica è **convergente** e la sua somma finale è ℓ

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \ell$$

Analizziamo ora le ulteriori due serie:

1. Sia data la successione costante $a_n = 1$. Vediamo il comportamento delle sue prime serie parziali.
   - $S_1 = 1$
   - $S_2 = 1 + 1 = 2$
   - $S_3 = 1 + 1 + 1 = 3$
   - ...

   Notiamo facilmente che
   $$S_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$$
   Applicando il limite su tale successione, dunque, otteniamo che
   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} n = +\infty$$

2. Determinare se la seguente successione ammette limite a $+\infty$:
   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{16} + ...$$
   Notiamo facilmente che la serie può essere riscritta nel seguente modo applicando banali proprietà matematiche
   $$1 + \frac{1}{2} + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(8 \cdot \frac{1}{16}\right) + ...$$
   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = 1 + 1 + 1 + ...$$
   La serie, dunque, corrisponde in realtà ad una somma di una determinata quantità di 1. È facile quindi concludere che la serie **non ammetta limite finito**, poiché essa tende a $+\infty$. Inoltre, per chi fosse interessato, la serie può essere riscritta in modo più formale come
   $$1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{2^{k+1}}\right) = 1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} 1 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+1} 1$$

Definition 3. Serie Divergente

Se la successione delle somme parziali S_n diverge ad un valore $+\infty$, allora si dice che la serie numerica è **divergente**
$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty$$

ATTENZIONE: è necessario puntualizzare che se una serie non converge, **non è detto che essa sia divergente**.

Dimostrazione: Consideriamo la serie della seguente successione $a_n = (-1)^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

- $S_0 = 1$
- $S_1 = 1 - 1 = 0$
- $S_2 = 1 - 1 + 1 = 1$
- $S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$
- ...

Notiamo quindi che

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque tale serie per $n \to +\infty$ non è **né convergente** ad un limite finito ℓ **né divergente** a $+\infty$.