Sapienza
Università di Roma

Università "Sapienza" di Roma
Facoltà di Informatica

Calcolo Integrale

Appunti integrati con il libro
"Calculus: A Complete Course" - R.Adams, C.Essex

Author
Simone Bianco

10 marzo 2022

Indice

Capitolo 0

Introduzione

Il corso di Calcolo Integrale si pone come un continuo degli argomenti trattati nel corso di Calcolo Differenziale. Le nozione precedentemente apprese verranno nuovamente accennate in alcuni casi, ma in linea di massima essi verranno considerati come già assodati.

Il corso verterà principalmente su tre macro-argomenti:

- **Serie Numeriche**, dove viene analizzata la somma di un numero infinito di termini, definita con l'operazione di limite tendente ad infinito, discutendone le proprietà fino ai polinomi di grado infinito (Serie di Potenze).
- **Integrali**, partendo dal problema del calcolo delle aree, definendo il concetto di integrale definito, fino all'applicazione di esso come strumento matematico inverso all'operazione di derivazione.
- **Equazioni Differenziali**, ossia equazioni in cui le incognite sono funzioni e le relazioni riguardano la funzione e le sue derivate.

Capitolo 1

Serie Numeriche

1.1 Successioni e Tipologie di Serie Numeriche

In matematica, con il termine **successione** viene semplicemente indicato l'insieme dei valori assunti da una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. Tale insieme, andrebbe quindi scritto come $a = \{a(1), a(2), a(3), ..., a(n)\}$. Tuttavia, per questioni di praticità, è molto più comodo usare la notazione $a_n = a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, dove il numero in pedice (ossia sotto) viene detto **indice della successione**.

Esempi di successioni:

- Se $a_n = 2n$ allora $a_n = 2, 4, 6, 8, 10, ..., 2n$
- Se $a_n = 2^n$ allora $a_n = 2, 4, 8, 16, 32..., 2^n$
- Se $a_n = \frac{1}{n}$ allora $a_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}$

Immaginiamo di voler calcolare la somma dei numeri reali. Essa è ben definita dalle seguenti proprietà:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$$

E l'insieme dei termini da sommare fosse **illimitato**? Come possiamo sapere il risultato finale della somma? Introduciamo quindi quello che è il concetto di **serie numerica**.

Definition 1. Serie Numerica

Data una **successione** di termine generico a_k, si dice serie numerica la **"somma infinita"** dei suoi termini.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

1.1.1 Serie Convergenti e Divergenti

Abbiamo quindi dato una definizione di **serie numerica**. Tuttavia, dobbiamo ancora analizzare le **proprietà** che tali serie possono assumere. Vediamo qualche esempio:

1. Consideriamo le seguente successione: se $a_n = 0$, allora

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 0$$

Cosa accade a questa serie considerando $n \to +\infty$? Poiché si tratta di una funzione costante, indipendentemente dal valore assunto da n, il risultato della somma sarà **sempre 0**, dunque

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$

2. Consideriamo ora invece la successione

$$a_n = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$$

Analizziamo prima cosa accade alla serie per piccoli valori di k

- $S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$
- $S_2 = a_1 + a_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}$
- $S_3 = a_1 + a_3 = 1 - (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4}$
- ...

Notiamo che le **serie parziali** seguono uno **schema**: una serie di indice k, darà come risultato $S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$. Possiamo quindi generalizzare la serie in

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Dunque, il limite per $n \to +\infty$ di questa serie, sarà

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

In entrambi gli esempi mostrati, per $n \to +\infty$, le due serie **tendono ad un valore finito** (dunque hanno limite in ℓ). In questi casi si parla di **serie convergenti**.

Definition 2. Serie Convergente

Se la successione delle somme parziali S_n converge ad un valore ℓ, allora si dice che la serie numerica è **convergente** e la sua somma finale è ℓ

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$$

Analizziamo ora le ulteriori due serie:

1. Sia data la successione costante $a_n = 1$. Vediamo il comportamento delle sue prime serie parziali.
   - $S_0 = 1$
   - $S_1 = 1 + 1 = 2$
   - $S_2 = 1 + 1 + 1 = 3$
   - ...

   Notiamo facilmente che
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n$$
   Applicando il limite su tale successione, dunque, otteniamo che
   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$$

2. Determinare se la seguente successione ammette limite a $+\infty$:
   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{16} + ...$$
   Notiamo facilmente che la serie può essere riscritta nel seguente modo applicando banali proprietà matematiche
   $$1 + \frac{1}{2} + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(8 \cdot \frac{1}{16}\right) + ...$$
   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = 1 + 1 + 1 + ...$$
   La serie, dunque, corrisponde in realtà ad una somma di una determinata quantità di 1. È facile quindi concludere che la serie **non ammetta limite finito**, poiché essa tende a $+\infty$. Inoltre, per chi fosse interessato, la serie può essere riscritta in modo più formale come
   $$1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{2^{k+1}}\right) = 1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} 1 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+1} 1$$

   Definition 3. Serie Divergente

   Se la successione delle somme parziali S_n diverge ad un valore $+\infty$ (o $-\infty$), allora si dice che la serie numerica è **divergente**
   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty(-\infty)$$

ATTENZIONE: è necessario puntualizzare che se una serie non converge, **non è detto che essa sia divergente**.

Dimostrazione: Consideriamo la serie della seguente successione $a_n = (-1)^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

- $S_0 = 1$
- $S_1 = 1 - 1 = 0$
- $S_2 = 1 - 1 + 1 = 1$
- $S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$
- ...

Notiamo quindi che

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque tale serie per $n \to +\infty$ non è **né convergente** ad un limite finito ℓ **né divergente** a $+\infty$.

Errori nel calcolo di somme infinite

Nell'esempio precedente, siamo in grado di arrivare a tale conclusione solo perché, ai tempi moderni, siamo a conoscenza del **concetto di limite**. In passato, molti matematici hanno provato a rispondere al quesito posto dalla serie numerica $(-1)^n$, giungendo a **tre conclusioni errate**:

Partendo dalla serie $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ...$ posso aggiungere delle parentesi in tre modi:

- $S_n = (1-1)+(1-1)+(1-...$, in questo modo otterremo che $S_n = 0+0+0+... = 0$
- $S_n = 1+(-1+1)+(-1+1)+...$, in questo modo otterremo che $S_n = 1+0+0+... = 1$
- $S_n = 1 - (1 + 1 - 1 + 1 - ...$, in questo modo otterremo che $S_n = 1 - S_n$. A questo punto possiamo risolvere l'equazione, ottenendo che $S_n = \frac{1}{2}$

Abbiamo già accennato che tutte e tre le conclusioni siano errate. Il motivo è semplice: **non si può trattare una somma infinita come una somma finita**. Esempio evidente di ciò è la terza conclusione: non ha alcun senso aprire una parentesi senza mai chiuderla alla fine.

Tale problema, tuttavia, può essere "aggirato" dal concetto di limite: immaginando una **serie finita** fino ad a_n, possiamo applicare le normali proprietà matematiche su di essa, per **poi** estenderne il risultato per $n \to +\infty$.

In questo caso, quindi, abbiamo già detto che:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \implies \lim_{n \to +\infty} S_n = \text{ Non Esiste}$$

1.1.2 Serie geometrica

Prendiamo in considerazione la seguente successione:

$$\text{Sia } q \in \mathbb{R}, \quad a_k = q^k = 1, q, q^2, q^3, \dots, q^k$$

Tale successione viene chiamata **progressione geometrica** (per via di alcune proprietà matematiche che non analizzeremo). Vediamo cosa accade ad una serie che implementa tale successione:

- Se $q = 1$, allora
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$$
- Se $q \neq 1$, allora:
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + q^n$$
$$q \cdot S_n = q \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = q + q^2 + \dots + q^n + q^{n+1}$$
$$S_n - q \cdot S_n = 1 - q^{n+1}$$
$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$
$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Quindi, possiamo concludere che

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

Per vedere cosa accade alla **serie geometrica** per $n \to +\infty$, dobbiamo prima analizzare cosa accade a $a_n = q^n$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Unendo le due definizioni, quindi, otteniamo che per $n \to +\infty$ il comportamento della **serie geometrica** risulta in:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Definition 4. Serie geometrica

La **Serie geometrica** è definita come

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Esempi di calcolo con serie geometrica

- Esempio diretto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = +\infty, \text{ poiché abbiamo } q \geq 1$$

- Esempio con proprietà degli esponenziali:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}, \text{ poiché abbiamo } -1 < q < 1$$

- Esempio con costanti moltiplicative:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2^k} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2 = 6, \text{ poiché abbiamo } -1 < q < 1$$

- Esempio partendo da $k > 0$:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=5}^{\infty} 3^{k-5+5} = \sum_{k=5}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^h = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 2 = \frac{1}{16}$$

Dall'ultimo esempio proposto, quindi possiamo notare la seguente **proprietà delle serie**:

$$\sum_{k=k_0}^{n} q^k = q^{k_0} \cdot \sum_{h=0}^{n-5} q^h$$

1.1.3 Serie armonica

Prendiamo in considerazione la seguente successione:

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Tale successione viene chiamata **successione armonica** (per via di alcune proprietà legate alla musica che non analizzeremo). La serie finita di tale successione corrisponde a:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}$$

Per vedere se tale serie **converga** o **diverga**, è necessario chiedersi cosa accade per S_{n+1}:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1}$$

Dunque, per definizione stessa, abbiamo che $\forall n$

$$S_n + \frac{1}{n+1} > S_n$$

e quindi possiamo concludere che per $n \to +\infty$ la **serie armonica sia divergente**.

Serie armonica generalizzata

Vediamo ora cosa accade alla serie armonica una volta **generalizzata**:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}$$

Analizziamo cosa accade alla serie in base al valore di α:

- Se $\alpha < 1$ abbiamo:

  $$\frac{1}{k^\alpha} > \frac{1}{k}$$

  dunque obbligatoriamente segue che

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} > +\infty$$

  Come dimostrato prima, sappiamo che la serie armonica normale è **divergente**. Di conseguenza, poiché la **serie armonica generalizzata** per $\alpha < 1$ è **maggiore di una serie divergente**, ne consegue che anche essa sia **divergente**.

- Se $\alpha > 1$ abbiamo:

$$\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{k}$$

dunque obbligatoriamente segue che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$$

Analogamente all'esempio al caso con $\alpha < 1$, confrontiamo la serie generalizzata con quella normale: poiché la **serie armonica generalizzata** per $\alpha > 1$ è **minore di una serie divergente**, ne consegue che essa sia **convergente** (poiché solo un valore finito può essere minore di $+\infty$).

Ovviamente, è necessario sottolineare che da tale dimostrazione **non** siamo in grado di dedurre quale sia il **valore a cui converga la serie**, ma solo che essa converga. Per questo motivo, indichiamo ciò con la scrittura impropria $< +\infty$.

Definition 5. Serie armonica generalizzata

La **Serie armonica generalizzata** è definita come

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

dove $< +\infty$ indica la convergenza ad un valore indefinito

1.2 Condizioni, Teoremi e Criteri di Convergenza

In questa sezione vedremo una serie di **condizioni**, **teoremi**, **criteri** e altre **regole** che ci permettono di stabilire facilmente e senza dover effettuare alcun calcolo se una serie **converga** o **diverga**.

1.2.1 Condizioni necessarie per la convergenza di una serie

Prendiamo in considerazione la seguente **serie convergente**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

come sappiamo, tale espressione si traduce in

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Per definizione stessa della sommatoria, sappiamo che la **differenza** tra S_{n+1} e S_n risulta in:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1}$$

Tuttavia, abbiamo già stabilito che per $n \to +\infty \implies S_n \to \ell$. Di conseguenza, lo stesso deve valere anche per S_{n+1}, dunque $n \to +\infty \implies S_{n+1} \to \ell$.

Possiamo quindi dire che

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} S_n = a_{n+1}$$

$$0 - 0 = a_{n+1}$$

$$a_{n+1} = 0$$

Riformuliamo il tutto nel seguente teorema:

Theorem 1. Condizione di convergenza

Se una serie è convergente per $n \to +\infty$, **allora** $a_k \to 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty \implies a_k \to 0$$

ATTENZIONE: è necessario sottolineare che la condizione **Se ... allora** impone che **solo se la prima condizione è vera allora anche la seconda deve esserlo** e non il contrario.

Il tipico esempio di ciò è la **serie armonica** vista precedentemente: nonostante per $n \to +\infty$ abbiamo che $\frac{1}{k} \to 0$, non è vero che la serie converga. Infatti, come sappiamo, essa **diverge positivamente**. Dunque, se $a_k \to 0$, **non è detto che la serie converga**.

Negazione del precedente teorema

Se la seconda condizione è negata (ossia a_k non tende a 0), **allora anche la prima** è necessario che lo sia. Per capire meglio, consideriamo la seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

Possiamo facilmente calcolare il limite di a_k per $\to +\infty$:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k(1+\frac{1}{k})} = 1$$

Poiché il limite di a_k non è zero, è **impossibile che la serie converga**.

Ciò ci permette di formulare il seguente ulteriore teorema:

Theorem 2. Negazione della condizione di convergenza

Se per $n \to +\infty$ si verifica che $a_k \nrightarrow 0$ (ossia a_k non tende a 0), allora la serie **non può essere convergente**

$$a_k \nrightarrow 0 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ non è convergente}$$

ATTENZIONE: ricordiamo che se una serie **non converge**, non è detto che essa **diverga** (sezione 1.1.1)

1.2.2 Serie a termini di segno costante

Consideriamo una **Serie a termini positivi**, ossia rispettante la condizione

$$a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Abbiamo già visto come dalla definizione stessa di serie abbiamo che

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Unendo le due condizioni abbiamo che

$$S_{n+1} - S_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$S_{n+1} \geq S_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La seguente serie, quindi, è **crescente** e di conseguenza può avere solo due possibilità: **convergere** ad un valore finito oppure **divergere positivamente**.

Theorem 3. Serie a termini di segno costante

Se $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, allora

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} < +\infty \\ +\infty \end{cases}$$

Se $a_k \leq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, allora

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} < -\infty \\ -\infty \end{cases}$$

Esempio di applicazione dei teoremi

Consideriamo la seguente serie già parzialmente analizzata in precedenza:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$$

Possiamo stabilire se la seguente serie **converga**, **diverga** o **nessuna delle due cose** senza effettuare alcun calcolo:

- Sappiamo che si tratta di una **serie a termini positivi**, poiché $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, dunque questa serie può solo **convergere o divergere**
- Sappiamo inoltre che il limite di a_k per $n \to +\infty$ corrisponde a 1 (come analizzato nella sezione 1.2.1), dunque sappiamo che questa serie **non può convergere**
- **Unendo le due condizioni imposte**, possiamo dire con certezza che tale serie **diverge**

1.2.3 Criterio del confronto

Proviamo ora ad analizzare una serie più complessa rispetto a quelle già viste:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

- Vediamo facilmente che si tratta di una **serie a termini positivi**, poiché $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, dunque la serie è convergente o divergente
- Il limite di a_k per $n \to +\infty$ è 0

  $$\lim_{k \to +\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) = \lim_{y \to 0} sin\,(y) = 0$$

  dunque non siamo in grado di dire se la serie non sia convergente, dunque abbiamo ancora il dubbio tra **convergenza e divergenza**
- Proviamo a **confrontare la serie con altre due serie** di cui è più facile stabilire la convergenza

  $$\sum_{k=1}^{\infty} 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

  Ovviamente, la serie più a sinistra è **convergente a 0**. La serie più a destra, invece, si tratta di una **serie armonica generalizzata** con $\alpha > 1$, dunque sappiamo che **anche essa è convergente**.

  $$\text{Convergente } \leq \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \text{ Convergente}$$

Poiché la nostra serie iniziale è **sia maggiore** di una serie convergente, **sia minore** di un'altra serie convergente, ne consegue che **anche essa sia convergente**.

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) < +\infty$$

Possiamo quindi formulare il seguente teorema:

Theorem 4. Criterio del confronto

Siano $0 \leq a_k \leq b_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

- Se $S(b_k)$ **converge**, allora anche $S(a_k)$ **converge**

$$\text{Se } \sum_{k=0} b_k < +\infty \implies \sum_{k=0} b_k < +\infty$$

- Se $S(a_k)$ **diverge**, allora anche $S(b_k)$ **diverge**

$$\text{Se } \sum_{k=0} a_k = \infty \implies \sum_{k=0} b_k = \infty$$

1.2.4 Criterio del confronto asintotico

Vediamo ora una serie simile alla precedente, ma profondamente diversa:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

- Vediamo facilmente che si tratta di una **serie a termini positivi**, poiché $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, dunque la serie è convergente o divergente
- Il limite di a_k per $n \to +\infty$ è 0

$$\lim_{k \to +\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{y \to 0} sin\,(y) = 0$$

dunque abbiamo ancora il dubbio tra **convergenza e divergenza**

- Proviamo ad applicare il **criterio del confronto**

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0 < \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

A differenza dell'esempio visto nella sezione precedente, la seconda serie corrisponde ad una **serie armonica normale**, che sappiamo essere **divergente**

$$\text{Convergente } \leq \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \text{ Divergente}$$

Ancora una volta, quindi, non siamo in grado di stabilire se la serie sia **convergente o divergente**

- Proviamo ad analizzare nel dettaglio cosa accade per $n \to +\infty$ ai termini di entrambe le serie

$$\lim_{k\to+\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{y\to 0} sin(y) \leq \lim_{y\to 0} y$$

Prima di procedere è necessario ricordare un **teorema fondamentale dell'analisi matematica**: per $x \to 0$ abbiamo $sin(x) \sim x$ (letto come $sin(x)$ **segue** x):

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

- Per **minuscoli valori** di $\frac{1}{k}$, dunque, **la funzione** $sin(\frac{1}{k})$ **si comporta esattamente come** $\frac{1}{k}$. Applicando tale teorema alle nostre due serie, quindi, otteniamo che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Poiché la seconda serie è **divergente positivamente** e la prima serie **segue il suo comportamento**, concludiamo che **anche essa diverge positivamente**.

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) = +\infty$$

Possiamo quindi formulare l'ulteriore seguente teorema:

Theorem 5. Criterio del confronto asintotico

Siano $0 \leq a_k, b_k$ tali che

$$\lim_{k\to+\infty} = \frac{a_k}{b_k} = 1$$

allora:

- $S(a_k)$ converge **se e solo se** $S(b_k)$ converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty$$

- $S(a_k)$ diverge **se e solo se** $S(b_k)$ diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$$

Esercizi svolti

1. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k = \text{ Serie Geometrica con } q \geq 1 \ = \textbf{Diverge a } +\infty$$

2. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = \text{ Serie armonica con } \alpha > 1 \ = \textbf{Converge}$$

3. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \text{ Serie armonica con } \alpha \leq 1 \ = \textbf{Diverge a } +\infty$$

$$\text{quindi } \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1 = \textbf{Diverge a } +\infty$$

4. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{sin^2\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\frac{1}{k}\right)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{sin^2(y)}{y^2} = \frac{sin(y) \cdot sin(y)}{x \cdot x} = 1 \cdot 1 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2 = \text{ Serie armonica con } \alpha > 1 \ = \textbf{Converge}$$

$$\text{quindi } \sum_{k=1}^{\infty} sin^2 \left(\frac{1}{k}\right) = \textbf{Converge}$$

5. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 2 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - 1 \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 2}{\frac{1}{k} - 1} = \lim_{y\to0} \frac{e^y - 2}{y} = \lim_{y\to0} \frac{e^y - 1 - 1}{y - 1} = \lim_{y\to0} \frac{e^y - 1}{y - 1} - \frac{1}{y - 1} =$$

$$= \lim_{y\to0} \frac{e^y - 1}{y - 1} \cdot \frac{y}{y} - \frac{1}{y - 1} = \lim_{y\to0} \frac{y}{y - 1} - \frac{1}{y - 1} = 0 + 1 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - 1 =?$$

- È una serie a termini negativi, dunque può o convergere o divergere a -∞
- Non può convergere, poiché

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} - 1 = -1$$

- Dunque **Diverge a -∞**

$$\text{quindi } \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 2 = \textbf{ Diverge a -}\infty$$

6. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\left(cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\left(cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2k} \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k\left(cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right)}{-\frac{1}{2k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{-\left(1 - cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)}{-\frac{1}{2k^2}} = \lim_{y\to0} \frac{-(1 - cos(y))}{-\frac{1}{2} \cdot y^2} = \lim_{y\to0} \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2k} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = -\frac{1}{2} \cdot +\infty = \textbf{Diverge a -}\boldsymbol{\infty}$$

$$\text{quindi } \sum_{k=0}^{\infty} k \left(cos \left(\frac{1}{k} \right) - 1 \right) = \textbf{Diverge a -}\boldsymbol{\infty}$$

1.2.5 Criterio del Rapporto e Criterio della Radice

Una volta enunciati i precedenti criteri, possiamo analizzare i seguenti due criteri, estremamente simili tra loro:

Theorem 6. Criterio del Rapporto

Sia $a_k \geq 0$. Se si verifica che

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$$

allora se

- $\ell < 1$ la serie **converge**
- $\ell > 1$ la serie **diverge**
- $\ell = 1$ **non sappiamo** se la serie converga o diverga

Theorem 7. Criterio della Radice

Sia $a_k \geq 0$. Se si verifica che

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell$$

allora se

- $\ell < 1$ la serie **converge**
- $\ell > 1$ la serie **diverge**
- $\ell = 1$ **non sappiamo** se la serie converga o diverga

Come possiamo notare, i criteri risultano **simili** e, in base al valore di ℓ, ci permettono di raggiungere le **stesse conclusioni**. Inoltre, spesso applicando entrambi criteri sulla stessa serie si ottiene lo **stesso valore** di ℓ.

Tuttavia, vi è chiaramente una **preferenza situazionale nella scelta del criterio** da applicare: se la serie a_k presenta un termine del tipo $k!$ allora conviene utilizzare il **Criterio del Rapporto**, mentre se presenta un termine del tipo x^k, $x \in \mathbb{R}$ allora conviene utilizzare il **Criterio della Radice**. Per esempio, nella seguente serie scegliamo di applicare il criterio del rapporto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^2} \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^2}}{\frac{k!}{k^2}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{k!} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k^2}{k+1} = +\infty \Rightarrow \ell > 1 \Rightarrow \textbf{Diverge}$$

1.2.6 Accorgimenti per i Criteri e Formula di Stirling

Poiché abbiamo introdotto il Criterio della Radice, è necessario ricordare l'esistenza di un **limite notevole nel quale ci si imbatte spesso** nell'applicare tale criterio, ossia

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

Inoltre, per calcolare alcuni limiti può essere utile ricordare gli **ordini di grandezza delle successioni**, in modo da decretare quale termine vinca rispetto ad un altro:

$$1 \prec log^a(n) \prec \sqrt[b]{n} \prec n^c \prec d^n \prec n! \prec n^n$$

Infine, per alcuni casi può risultare utile introdurre la **Formula di Stirner**, descrivente il comportamento asintotico della seguenti due funzioni:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}} = 1$$

dunque per $k \to +\infty$ abbiamo

$$k! \sim k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}$$

Esercizi svolti

1. Decretare se la seguente serie converge o diverge usando il Criterio della Radice

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[k]{k^2}}{2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(\sqrt[k]{k})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

2. Decretare se la seguente serie converge o diverge usando il Criterio del Rapporto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2+2k+1}{2k^2} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

3. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

Bonus: un occhio più allenato potrebbe essere in grado di riconoscere che tale serie corrisponde al **Polinomio di Taylor di grado infinitesimo di** e^k. Dunque, l'intera serie converge esattamente a e^k.

4. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cdot 2^k}{k!} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{(k+1)^2 \cdot 2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^2 \cdot 2^k}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2 \cdot 2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^2 \cdot 2^k} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2 \cdot 2 \cdot 2^k}{(k+1) \cdot k!} \cdot \frac{k!}{k^2 \cdot 2^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2(k+1)}{k^2} = 0 < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

5. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1) \cdot k!}{(k+1)^k \cdot (k+1)} \cdot \frac{k^k}{k!} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{e} < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

NB: nell'ultimo passaggio è stato usato un limite notevole

6. Decretare se la seguente serie converge o diverge usando il Criterio del Confronto Asintotico

Suggerimento: usare la Formula di Stirling dove possibile

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \sim \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k} \quad \text{poiché} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[2k]{2\pi k}}{e} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[2k]{2\pi}\sqrt{\sqrt[k]{k}}}{e} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2k}}}{e} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{e} < 0 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

$$\text{quindi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} = \textbf{Converge}$$

7. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{k^k}{e^k \cdot k!}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!} \cdot \sqrt{2\pi k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}}{k!} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot +\infty = \textbf{Diverge}$$

$$\text{quindi } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!} = \textbf{Diverge}$$

1.2.7 Criterio di Leibniz

Fino ad ora abbiamo trattato tipologie di serie in cui il segno rimane **costante** (serie a termini positivi e serie a termini negativi), fatta eccezione per la serie $a_k = (-1)^k$, che abbiamo decretato come **nè convergente nè divergente**. Rimane però il dubbio per le serie in cui $(-1)^k$ costituisce **solo parte di** a_k e non la sua totalità. Il **Criterio di Leibniz** è in grado di determinare se una serie di questo tipo sia in grado di convergere oppure no in base a **tre requisiti**:

Theorem 8. Criterio di Leibniz

Sia $a_k = (-1)^k \cdot b_k$. Se b_k soddisfa le seguenti **tre condizioni**, allora la serie di termine generico a_k è **convergente**:

- b_k è una successione a termini di segno costante
- $b_{k+1} \leq b_k$ per ogni k, ossia è una successione decrescente
- $b_k \to 0$ per $n \to +\infty$

Esempio

Consideriamo la seguente serie, cercando di determinarne la convergenza:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Notiamo facilmente che non possiamo applicare nessuno dei criteri visti precedentemente. Vediamo quindi se essa rispetta le tre condizioni del **Criterio di Leibniz**.

Prima di tutto, mettiamo in evidenza b_k ricordando che $a_k = (-1)^k \cdot b_k$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$$

Successivamente, verifichiamo le condizioni

- $b_k = \frac{1}{k}$ è a **termini positivi**
- $b_{k+1} \leq b_k \Longrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$ è vero per ogni k, dunque è **decrescente**
- $b_k \to 0$ per $k \to +\infty$

Tutte e tre le condizioni sono soddisfatte, dunque si tratta di una serie **convergente**

1.2.8 Convergenza Assoluta

Nonostante il Criterio di Leibniz riesca a trattare anche le serie a segno alterno, esso è strettamente dipendente da una caratteristica: l'**alternanza tra i segni deve essere regolare**, ossia deve ricorrere dopo ogni termine. Ma cosa accade se l'alternanza non è regolare?

Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(k)}{k^2}$$

In questa situazione, abbiamo che ogni termine compreso tra $0 \leq k \leq \pi$ è positivo, mentre quelli tra $\pi \leq k \leq 2\pi$ sono negativi, dunque il Criterio di Leibniz non è applicabile.

In questo caso, possiamo applicare quella che viene chiamata **Condizione di Convergenza Assoluta**:

Theorem 9. Convergenza Assoluta

La serie di termine generico a_k si dice **convergente assolutamente** se e solo se la serie di termine generico $|a_k|$ è **convergente**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge assolutamente solo se } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

Se la serie di termine generico a_k **converge assolutamente**, allora essa **converge anche semplicemente**.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$$

Tornando alla nostra serie, quindi, proviamo a vedere se essa converge assolutamente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(k)}{k^2} \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{sin(k)}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|sin(k)|}{k^2}$$

Notiamo che l'unico criterio utilizzabile sulla nuova serie ottenuta è il **Criterio del Confronto** (non asintotico)

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|sin(k)|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$Convergente \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|sin(k)|}{k^2} \leq Convergente$$

Poiché si trova tra due serie convergenti, ne consegue che anche la **serie assoluta sia convergente**. Dunque, la nostra serie iniziale **converge assolutamente** e di conseguenza **converge semplicemente**.

ATTENZIONE: così come abbiamo fatto per la condizione necessaria di convergenza, è necessario sottolineare che l'**ordine della condizione** sia importantissimo. Dunque, se una serie converge semplicemente, **non è detto** che essa converga assolutamente.

Per esempio, abbiamo già stabilito che la seguente serie sia **convergente** per via del Criterio di Leibniz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} < +\infty$$

ma essa **non converge assolutamente** (ed anzi, diverge assolutamente)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Riordinamento dei termini della serie

Tuttavia, nel caso in cui una serie converga semplicemente ma non assolutamente, è possibile trovare un **riordinamento** dei termini della serie tale che

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_{S(h)} = \ell$$

Tutto ciò è possibile poiché ricordiamo che le somme godono della proprietà commutativa, dunque al cambiare dell'ordine degli addendi il risultato non cambia. Perciò, in realtà, tale riordinamento <u>non rende la serie convergente</u> nel caso in cui essa non lo sia già, poiché si tratta solo di una "forzatura snaturata".

Prendiamo ancora una volta come esempio la seguente serie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} < +\infty$$

All'interno di tale serie, i segni si alternano ad ogni termine, dunque è possibile individuare **due sotto-serie** all'interno della serie di partenza

- Se $a_k > 0$ (che si verifica solo quando k è pari) allora tale termine a_k è anche dentro la serie
$$S_+ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2h}, \quad h \in \mathbb{N}$$
- Se $a_k < 0$ (che si verifica solo quando k è dispari) allora tale termine a_k è anche dentro la serie
$$S_- = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2h+1}, \quad h \in \mathbb{N}$$

Entrambe le due sotto-serie sono divergenti. Possiamo però scegliere un **valore arbitrario** di ℓ a cui far convergere la serie di partenza, seguendo un semplice algoritmo:

1. Scegliere un arbitrario valore di ℓ
2. Se la somma dei termini S è minore di ℓ, allora aggiungere alla somma il successivo termine di S_+
3. Altrimenti, se la somma dei termini S è maggiore di ℓ, allora sottrarre alla somma il successivo termine di S_-
4. Tornare al punto 2 e ripetere l'algoritmo all'infinito

In questo modo, una volta superato il valore di ℓ, il riordinamento dei termini permetterà alla serie di rimanere sempre poco sopra o poco sotto tale valore, convergendo quindi ad ℓ.

Esempio di applicazione dell'algoritmo

Consideriamo la serie
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

1. Scegliamo $\ell = \frac{3}{2}$ e poniamo $S = 0$, poiché non abbiamo ancora sommato nessun termine.
2. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il primo termine della serie S_+, ossia 1 (dunque $S = 1$)
3. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il secondo termine della serie S_+, ossia $\frac{1}{3}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$)
4. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il terzo termine della serie S_+, ossia $\frac{1}{5}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15}$)
5. $S > \ell$, dunque sottraiamo il primo termine della serie S_-, ossia $-\frac{1}{2}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{31}{30}$)

6. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il quarto termine della serie S_+, ossia $\frac{1}{7}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{247}{210}$)
7. Ripetendo l'algoritmo all'infinito, otteniamo che $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + ... \approx \frac{3}{2}$

Esempio già svolto

Se invece volessimo far convergere la serie a $\frac{1}{\pi}$, i primi 50 termini di essa sarebbero:

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} + \frac{1}{11} - \frac{1}{24} - \frac{1}{26} + \frac{1}{13} - \frac{1}{28} -$$
$$- \frac{1}{30} + \frac{1}{15} - \frac{1}{32} - \frac{1}{34} + \frac{1}{17} - \frac{1}{36} - \frac{1}{38} + \frac{1}{19} - \frac{1}{40} - \frac{1}{42} + \frac{1}{21} - \frac{1}{44} - \frac{1}{46} + \frac{1}{23} - \frac{1}{48} - \frac{1}{50} + \frac{1}{25} - \frac{1}{52} - \frac{1}{54} -$$
$$- \frac{1}{56} + \frac{1}{27} - \frac{1}{58} - \frac{1}{60} + \frac{1}{29} - \frac{1}{62} - \frac{1}{64} + \frac{1}{31} - \frac{1}{66} - \frac{1}{68} \approx \frac{1}{\pi}$$

1.3 Serie di Taylor

1.3.1 Polinomio di Taylor

Prima di parlare delle **Serie di Taylor**, è necessario effettuare un breve ripasso sul **Polinomio di Taylor**:

Definition 6. Polinomio di Taylor

Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a,b)$. Si definisce come Polinomio di Taylor di ordine n in x_0 di f il polinomio $T(x;x_0)$, ossia il **miglior polinomio di grado $\leq n$ che approssima f in un intorno** x_0, e dove $R(x,x_0)$ rappresenta la **differenza (resto) infinitesimale di approssimazione** tra $f(x_0)$ e $T(x;x_0)$.

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

$$f(x_0) = T(x;x_0) + R(x;x_0) \Longrightarrow R(x;x_0) = f(x_0) - T(x;x_0)$$

La **forma generica del Polinomio di Taylor** può essere riscritta come

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

mentre il **resto infinitesimale** equivale a

$$R(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

dove $\xi \in (x, x_0)$

Dunque, se volessimo approssimare il valore di $f(x) = e^x$ nel punto $x_0 = 0$ con un Polinomio di Taylor di ordine n, otterremmo

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{f(0)}{0!}x^0 + \frac{f'(0)}{1!}x^1 + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Tuttavia, poiché sappiamo che la **derivata di** $f(x) = e^x$ **coincide con se stessa**, abbiamo che

- $f(0) = e^0 = 1$
- $f'(0) = e^0 = 1$
- $f''(0) = e^0 = 1$
- $f'''(0) = e^0 = 1$
- ...
- $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Dunque, calcolando i valori della sommatoria otteniamo che

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

In questo caso, utilizziamo il segno di approssimazione ($\approx$) poiché non abbiamo considerato il **resto infinitesimale** della differenza tra $f(x)$ e $T(x; x_0)$. Il vero valore di e^x, quindi, coincide con

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Il motivo per cui non è stato considerato il resto è semplice: nel nostro caso, parleremo del **Polinomio di Taylor di ordine** ∞. Difatti, per definizione stessa del Polinomio di Taylor e del resto infinitesimale possiamo affermare che per $n \to +\infty$, la **Serie di Taylor coincide esattamente con il valore di** $f(x)$.

Calcolando il limite per $n \to +\infty$ del **resto infinitesimale**, ci rendiamo conto che esso tende a 0, dunque è completamente trascurabile

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \lim_{n \to +\infty} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = f^{(n+1)}(\xi) \cdot 0 = 0$$

Definition 7. Serie di Taylor

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Si definisce come Serie di Taylor il **Polinomio di Taylor** $T(x; x_0)$ **di ordine** n **per** $n \to +\infty$ che coincide esattamente con il valore di $f(x_0)$

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

1.3.2 Serie di Taylor Notevoli

Una volta data la loro definizione, vedremo una lista di Serie di Taylor notevoli che sarà comodo ricordare e che verranno date per assunte per il resto del corso.

Attenzione: il procedimento con cui vengono ricavate le serie notevoli è analogo all'esempio fatto con la serie di e^x nella sezione precedente. Per questioni di comodità verranno omessi.

- Serie di Taylor di $f(x) = e^x$ valida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = cos(x)$ valida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = sin(x)$ valida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = \frac{1}{1-x}$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

  (già vista nell'ambito delle serie geometriche)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

- Serie di Taylor di $f(x) = \frac{1}{1+x}$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

- Serie di Taylor di $f(x) = ln(1+x)$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

$$ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = arctg(x)$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

$$arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1!}$$

1.3.3 Principio di Sostituzione e Calcolo delle Derivate

Prima di procedere, è necessario sottolineare che, così come avviene all'interno del Polinomio di Taylor, anche per le Serie di Taylor vale in **Principio di Sostituzione**: se volessimo calcolare la Serie di Taylor di $f(x) = e^{x^2}$, ci basterebbe porre $y = x^2$ per **trasformare** la funzione in $f(x) = e^y$.

A questo punto, siamo già in grado di calcolare la sommatoria di questa nuova funzione:

$$e^{x^2} = e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

Inoltre, è necessario ricordare che, poiché il Polinomio di Taylor viene calcolato utilizzando le derivate stesse della funzione, è possibile **calcolare il valore della derivata k-esima** nel punto $x_0 = 0$, ossia $f^{(k)}(0)$, semplicemente calcolando il prodotto tra il termine a_k della serie e $k!$

$$f^{(k)}(0) = a_k \cdot k!$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 \cdot sin(x^3)$. Applicando il **principio di sostituzione**, otteniamo che

$$x^3 \cdot sin(x^3) = y \cdot sin(y) = y \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+2}}{(2k+1)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^3)^{2k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{6k+6}}{(2k+1)!}$$

Estendendo la serie calcolata, otteniamo

$$x^3 \cdot sin(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{6k+6}}{(2k+1)!} = \frac{x^6}{1!} - \frac{x^{12}}{3!} + \frac{x^{18}}{5!} - \frac{x^{24}}{7!} + ... = a_6 - a_{12} + a_{18} - a_{24} + ...$$

Proviamo a calcolare i seguenti valori assunti dalle derivate k-esime di $f(x)$:

- **Valore di** $f''(0)$: il termine di grado 2 **non esiste all'interno della serie**, dunque
$$f''(0) = a_2 \cdot 2! = 0 \cdot 2! = 0$$
- **Valore di** $f^{(6)}(0)$: il termine di grado 6 **esiste all'interno della serie**, dunque
$$f^{(6)}(0) = a_6 \cdot 6! = \frac{1}{1!} \cdot 6! = 6!$$
- **Valore di** $f^{(24)}(0)$: il termine di grado 24 **esiste all'interno della serie**, dunque
$$f^{(24)}(0) = a_24 \cdot 24! = -\frac{1}{7!} \cdot 27! = -\frac{24!}{7!}$$

Esercizi svolti

1. Si consideri la funzione $f(x) = cos(x^2)$
   - Se ne calcoli la corrispondente Serie di Taylor

$$cos(x^2) = cos(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!}$$

   - Si calcoli il valore di $f'''(0)$

$$f'''(0) = a_3 \cdot 3! = 0 \cdot 3! = 0$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(4)}(0)$

$$f^{(4)}(0) = a_4 \cdot 4! = -\frac{1}{2!} \cdot 4! = -\frac{24}{2} = -12$$

2. Si consideri la funzione $f(x) = x \cdot ln(1 + x^2)$
   - Se ne calcoli la corrispondente Serie di Taylor

$$x \cdot ln(1 + x^2) = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+3}}{k+1}$$

   - Si calcoli il valore di $f'''(0)$

$$f'''(0) = a_3 \cdot 3! = \frac{1}{0!} \cdot 3! = 3! = 6$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(4)}(0)$

$$f^{(4)}(0) = a_4 \cdot 4! = 0 \cdot 4! = 0$$

3. Si consideri la funzione $f(x) = x^5 \cdot e^{x^2}$
   - Se ne calcoli la corrispondente Serie di Taylor

$$x^5 \cdot e^{x^2} = x^5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+5}}{k!}$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(6)}(0)$

$$f^{(6)}(0) = a_6 \cdot 6! = 0 \cdot 6! = 0$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(7)}(0)$

$$f^{(7)}(0) = a_7 \cdot 7! = \frac{1}{1!} \cdot 7! = 7! = 5040$$