SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

UNIVERSITÀ "SAPIENZA" DI ROMA
FACOLTÀ DI INFORMATICA

Introduzione agli Algoritmi

Author
Simone Bianco

24 febbraio 2022

Indice

Capitolo 0

Introduzione

Si può facilmente osservare che al giorno d'oggi l'informatica **permea la nostra vita quotidiana**, sia quando essa è direttamente percepibile, sia quando è invisibile.

L'informatica viene spesso erroneamente considerata una mera attività pratica, per svolgere la quale è sufficiente un approccio dilettantistico e per cui non è necessaria una vera professionalità. Nulla di più inesatto: in realtà l'informatica è una **disciplina scientifica**.

Essa non può essere considerata una sorta di "scienza dei calcolatori", poiché **i calcolatori** (o elaboratori) ne **sono solo uno strumento**: l'informatico può anche lavorare solamente con carta e penna. In realtà, l'informatica, intesa come disciplina scientifica, non coincide con alcuna delle sue applicazioni.

In questo corso verranno date le definizioni di **algoritmo, strutture dati, efficienza, problemi computazionali** ed **ottimizzazione** di essi. Viene inoltre fornito un **modello teorico di calcolatore** che consentirà di paragonare tra loro algoritmi diversi che risolvono lo stesso problema.

Capitolo 1

Algoritmi, Efficienza e RAM

1.1 Algoritmi e Strutture Dati

La definizione di informatica proposta dall'**ACM (Association for Computing Machinery)**, nonché una delle principali organizzazioni scientifiche di informatici di tutto il mondo, è la seguente: *"**L'informatica è la scienza degli algoritmi** che descrivono e trasformano l'informazione: la loro teoria, analisi, progetto, efficienza, realizzazione e applicazione."*

Gli **algoritmi**, dunque, sono un concetto fondamentale per l'informatica, fino ad esserne il fulcro. Ma cosa intendiamo per algoritmo?

Definition 1. Algoritmo

Un **algoritmo** è "**una sequenza di comandi elementari** ed univoci che terminano in un **tempo finito** ed operano su **strutture dati**".

Un comando viene definito **elementare** quando **non può essere scomposto** in comandi più semplici. I comandi elementari sono quindi **univoci** e possono essere interpretati in un solo modo.

Se un algoritmo è **ben specificato**, chi (o ciò che) lo esegue non ha bisogno di pensare, deve solo eseguire con precisione i passi elencati nell'algoritmo nella sequenza in cui appaiono. Se un calcolatore esegue un algoritmo e l'output è errato, **la colpa non è del calcolatore, ma del progettista**.

Prima di poter risolvere un problema abbiamo, ovviamente, bisogno di pensare ad un modo per poter **gestire i dati** che vengono utilizzati dall'algoritmo stesso. A tal fine, sarà necessario definire le opportune **strutture dati** su cui opererà l'algoritmo, ossia gli strumenti necessari per **organizzare** e **memorizzare** i dati veri e propri, semplificandone l'accesso e la modifica.

È importante sottolineare che **non esiste una struttura dati che sia adeguata per ogni problema**, dunque è necessario conoscere proprietà, vantaggi e svantaggi delle principali strutture dati in modo da poter scegliere di volta in volta quale sia quella **più adatta al problema**.

La scelta della struttura dati da adottare nella soluzione di un problema è un **aspetto fondamentale** per la risoluzione del problema stesso, al pari del progetto dell'algoritmo stesso. Per questa ragione, gli algoritmi e le strutture dati fondamentali vengono sempre studiati e illustrati assieme.

1.2 Efficienza di un algoritmo

Un aspetto fondamentale che va affrontato nello studio degli algoritmi è la loro **efficienza**, cioè la quantificazione delle loro **esigenze in termini di tempo e di spazio**, ossia tempo di esecuzione e quantità di memoria richiesta.

La scelta di un algoritmo rispetto ad altro, nel caso i due algoritmi portino allo stesso risultato, è molto importante:

- I calcolatori sono molto veloci, ma non infinitamente veloci
- La memoria è economica e abbondante, ma non è né gratuita né illimitata.

Un parametro fondamentale per la scelta dell'algoritmo è proprio la quantità di risorse spazio-tempo utilizzate. Nelle sezioni successive vedremo il concetto di **costo computazionale** degli algoritmi in termini di numero di operazioni elementari e quantità di spazio di memoria necessario in funzione della dimensione dell'input.

Esempio di valutazione dell'efficienza

Immaginiamo di voler risolvere il seguente problema: vogliamo **ordinare una lista di $n = 10^6$ numeri interi.** Vista l'enorme quantità di numeri, decidiamo di far svolgere questo compito ad un elaboratore. A nostra disposizione abbiamo **due calcolatori**:

- Un **calcolatore veloce**, che chiameremo **V**, in grado di svolgere 10^9 operazioni/sec
- Un **calcolatore lento**, che chiameremo **L**, in grado di svolgere 10^7 operazioni/sec

Immaginiamo di essere in grado di saper sviluppare solo **due algoritmi di ordinamento** (di cui per ora non vedremo il funzionamento, ma solo le specifiche temporali):

- L'algoritmo **Insertion Sort**, richiedente $2n^2$ operazioni **(più lento)**
- L'algoritmo **Merge Sort**, richiedente $50n \cdot log(n)$ operazioni **(più veloce)**

Ci chiediamo se la maggior velocità del calcolatore V sia in grado di **contro-bilanciare** la maggior lentezza dell'algoritmo IS. Proviamo quindi a calcolare il costo temporale di entrambe le scelte (**ATTENZIONE:** con *log* intendiamo il **logaritmo in base 2**):

$$V(IS) = \frac{2 \cdot (10^6)^2 \text{ operazioni}}{10^9 \text{ operazioni/sec}} = 2000 \text{ sec} \approx 33 \text{ min}$$

$$L(MS) = \frac{50 \cdot 10^6 \cdot log(10^6) \text{ operazioni}}{10^7 \text{ operazioni/sec}} \approx 100 \text{ sec} \approx 1.5 \text{ min}$$

Notiamo quindi che, nonostante la differenza di caratteristiche hardware, **la scelta dell'algoritmo è cruciale per l'efficienza**.

Per ricalcare maggiormente il concetto, proviamo ad aumentare l'input a $n = 10^7$

$$V(IS) = \frac{2 \cdot (10^7)^2 \text{ operazioni}}{10^9 \text{ operazioni/sec}} \approx 55.5 \text{ ore} \approx 2.3 \text{ giorni}$$

$$L(MS) = \frac{50 \cdot 10^7 \cdot log(10^7) \text{ operazioni}}{10^7 \text{ operazioni/sec}} \approx 19.5 \text{ min}$$

Aumentando l'input di un solo ordine di grandezza, la **differenza** in termini di costi temporali dei due algoritmi è **abissale**.

1.2.1 Random Access Machine (RAM)

Nell'esempio precedentemente visto, abbiamo considerato **due macchine diverse**, dove una era più performante dell'altra. Ciò non è un fattore da ignorare, poiché ovviamente le caratteristiche hardware dell'elaboratore **influiscono** direttamente sulle **performance dell'algoritmo**: se nell'esempio precedente calcolassimo $V(MS)$ con $n = 10^6$, il tempo impiegato dall'algoritmo sarebbe circa **1 secondo**, rispetto ai 1**00 secondi** impiegati da L(MS).

Per poter valutare la **vera efficienza** di un algoritmo, dunque, è necessario quantificare le risorse che esso richiede per la sua esecuzione senza che tale analisi sia **influenzata da una specifica tecnologia** che, inevitabilmente, col tempo **diviene obsoleta**. Dunque, è necessario valutare l'algoritmo come se venisse eseguito da una **macchina astratta** rispettante queste caratteristiche, ossia la **Random Access Machine** (anche chiamata **Modello RAM**).

Definition 2. Random Access Machine

La **Random Access Machine (RAM)** è una macchina astratta, la cui validità e potenza concettuale risiede nel fatto che **non diventa obsoleta** con il progredire della tecnologia.

Le caratteristiche del modello RAM sono:

- Un **singolo processore** che esegue le operazioni **sequenzialmente**
- Esistono **solo operazioni elementari** e l'esecuzione di ciascuna delle quali richiede per definizione un **tempo costante** (es.: operazioni aritmetiche, letture, scritture, salto condizionato, ecc.)
- Esiste un **limite alla dimensione** di ogni valore memorizzato ed al numero complessivo di valori utilizzati, dipendente dalle dimensioni delle word in memoria

1.2.2 Misura di Costo Uniforme

Sia d la **dimensione di bit di ogni parola** contenuta in memoria. Se è soddisfatta l'ipotesi che ogni dato in input sia un valore **minore** di 2^d, ciascuna operazione elementare sui dati del problema verrà eseguita in un **tempo costante**. In tal caso si parla di **misura di costo uniforme**.

Tale criterio **non è sempre realistico**: se un dato del problema non rispetta tale ipotesi, esso dovrà essere comunque memorizzato. In tal caso, sarà necessario usare **più parole di memoria** e, di conseguenza, anche le operazioni elementari su di esso dovranno essere reiterate per tutte le parole di memoria che lo contengono, richiedendo quindi un tempo non più costante. Per questo motivo, in ambito scientifico viene utilizzata la **misura di costo logaritmica**, più realistica rispetto a quella uniforme. Tuttavia, in questo corso essa **non verrà analizzata**.

Esempio di costo uniforme

Analizziamo il seguente codice:

```
def PotenzaDi2(n)
    x = 1
    for i in range(n):
        x = x*2
    return x
```

Il tempo di esecuzione totale è **proporzionale ad n**, poiché si tratta di un **ciclo eseguito** n **volte**, dove ad ogni iterazione vengono compiute tre operazioni, ciascuna di **costo unitario**:

- Viene incrementato il contatore relativo al ciclo for
- Viene calcolato $x \cdot 2$
- Viene assegnato il risultato del calcolo ad x

Capitolo 2

Notazione Asintotica

2.1 Notazione O grande, Omega e Teta

Come abbiamo accennato nel capitolo precedente, per poter **valutare l'efficienza** di un algoritmo, così da poterlo confrontare con algoritmi diversi che risolvono lo stesso problema, bisogna essere in grado di valutarne il suo **costo computazionale**, ovvero il suo tempo di esecuzione e/o le sue necessità in termini di memoria.

Questo tipo di valutazione, se effettuata nel dettaglio, risulta molto complessa e spesso contiene dettagli superflui. Per questo motivo, ci limiteremo a dare una visione più **astratta** e valutare solo quello che informalmente possiamo chiamare **tasso di crescita**, cioè la velocità con cui il tempo di esecuzione cresce all'aumentare della dimensione dell'input.

Tuttavia, poiché per piccole dimensioni dell'input il tempo impiegato è comunque poco indipendentemente dall'algoritmo, tale valutazione risulta più efficace quando la dimensione dell'input è **sufficientemente grande**. Per questo motivo, parleremo di **efficienza asintotica degli algoritmi**.

Definition 3. Notazione Asintotica

In matematica la **notazione asintotica** permette di confrontare il **tasso di crescita** (comportamento asintotico) di una funzione nei confronti di un'altra.

Il calcolo asintotico è utilizzato per analizzare la **complessità di un algoritmo**, stimandone in particolar modo, l'aumentare del **tempo di esecuzione** al crescere della **dimensione** n dell'input.

In particolare, esistono **tre tipologie di notazione asintotica**:

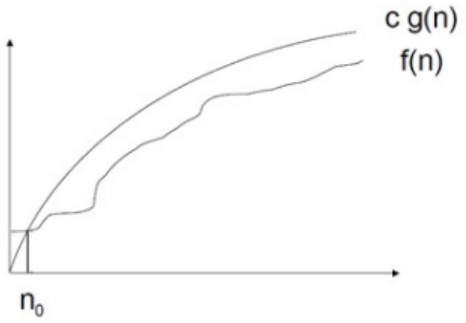
- **Notazione asintotica O grande**: definisce il limite superiore asintotico
- **Notazione asintotica** Ω: definisce il limite inferiore asintotico
- **Notazione asintotica** Θ: definisce il limite asintotico stretto

2.1.1 Notazione O grande

Per poter comprendere cosa si intende con **notazione O grande**, partiamo direttamente dalla sua definizione

Definition 4. O grande

Date due funzioni $f(n), g(n) \geq 0$ si dice che ***f(n)* è in *O(g(n))*** se esistono due costanti c ed n_0 tali che $0 \leq f(n) \leq c \cdot g(n)$ per ogni $n \geq n_0$



In $O(g(n))$, dunque, troviamo **tutte** le funzioni **«dominate»** dalla funzione $g(n)$

La notazione **O grande**, dunque, definisce quello che è il **limite superiore asintotico** della funzione $f(n)$: una volta superato un certo valore n_0 (dove $n \to +\infty$) l'andamento della funzione $f(n)$ viene **limitato** dalla funzione $c \cdot g(n)$, rimanendo sempre **al di sotto di essa** (dunque viene «dominata» da essa).

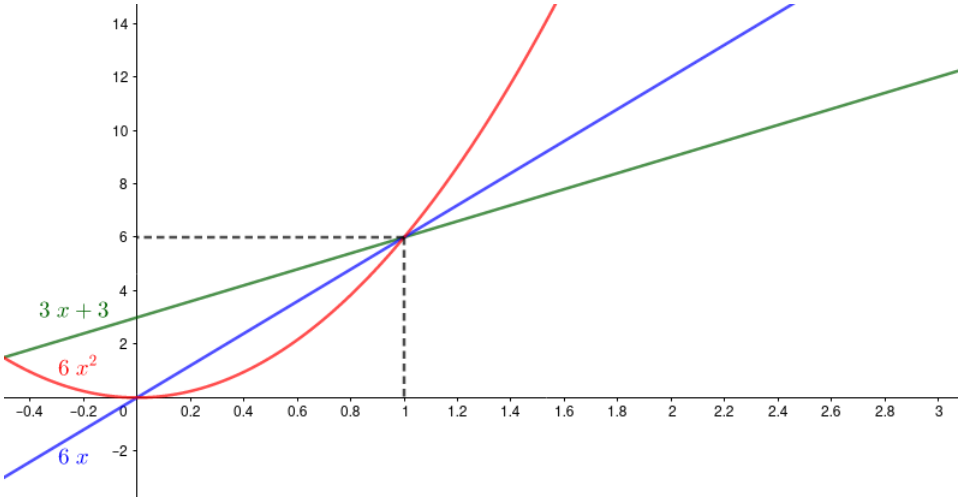
Esempi sull'O grande

- Sia $f(n) = 3n+3$. Possiamo dire che ***f(n)* è in *O(n^2)***, in quanto esiste una almeno una c (ossia $c = 6$) per cui :

$$3n + 3 \leq c \cdot n^2, \quad \forall n \geq n_0, \quad c = 6, \quad n_0 = 1$$

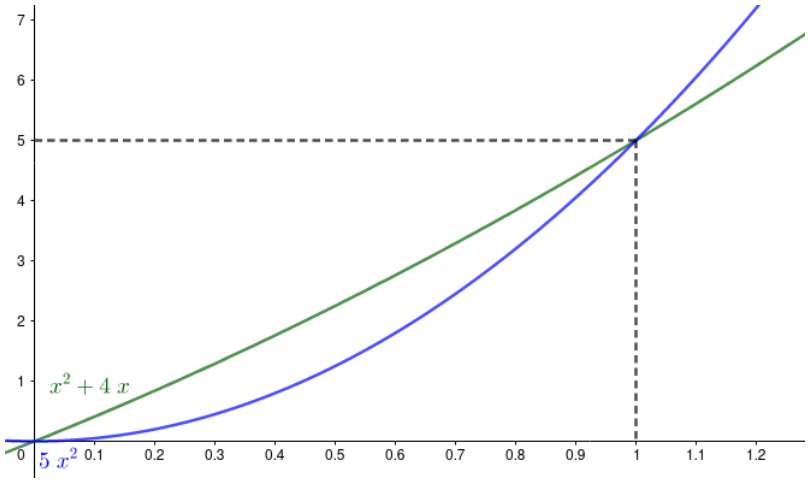
Tuttavia, possiamo anche dire che **f(n) è in O(n)**, in quanto:

$$3n + 3 \leq c \cdot n, \quad \forall n \geq n_0, \quad c \geq 6, \quad n_0 = 1$$



- Sia $f(n) = n^2 + 4n$. Tale ***f(n)* è in $O(n^2)$** in quanto:

$$n^2 + 4n \leq c \cdot n^2, \quad \forall n \geq n_0, \quad c \geq 5, \quad n_0 = 1$$



Notiamo come nel primo esempio abbiamo concluso che un **polinomio di primo grado** sia in $O(n)$, mentre nel secondo esempio abbiamo concluso che un **polinomio di secondo grado sia** in $O(n^2)$. Possiamo generalizzare la cosa nel seguente teorema:

Theorem 1

Sia $f(n)$ un **polinomio** di grado m, definito matematicamente come

$$f(n) = \sum_{i=0}^{m} a_i n^i = a_0 + a_1 n + a_2 n^2 + ... + a_m n^m$$

allora possiamo concludere che ***f(n)* è in $O(n^m)$**

Dimostrazione per induzione

- **Caso base**: Abbiamo $m = 0$, per cui $f(n) = a_0 \cdot n^0$, dunque è una funzione costante e di conseguenza è in $O(1)$, che coincide con $O(n^0)$
- **Ipotesi induttiva**: Affermiamo che

$$\sum_{i=0}^{k} a_i n^i$$

  è un $O(n^k)$ per ogni $k < m$, cioè esiste una costante c' tale che

$$\sum_{i=0}^{k} a_i n^i \leq c' \cdot n^k$$

- **Passo induttivo**: Dobbiamo dimostrare che

$$f(n) = \sum_{i=0}^{m} a_i n^i \leq c' \cdot n^m$$

Si osservi che, mettendo in evidenza l'ipotesi induttiva, $f(n)$ può essere riscritto come

$$f(n) = \sum_{i=0}^{m} a_i n^i = a_m n^m + \sum_{i=0}^{k} a_i n^i$$

per ogni $k < m$. Inoltre, per ipotesi induttiva, sappiamo che

$$\sum_{i=0}^{k} a_i n^i \leq c' \cdot n^k$$

dunque possiamo formulare la seguente catena di disuguaglianze

$$f(n) = a_m n^m + \sum_{i=0}^{k} a_i n^i \leq a_m n^m + c' \cdot n^k \leq a_m n^m + c' \cdot n^m$$

riscrivendo $a_m n^m + c' \cdot n^m$ come $(a_m + c') \cdot n^m$ e ponendo $c'' = a_m + c'$ otteniamo che

$$f(n) \leq c'' \cdot n^m$$

che per ipotesi sappiamo essere vera, dunque concludiamo che $f(n)$ è in $O(n^m)$

Esempi con ordini di grandezza

- Sia $f(n) = log(n)$. Allora $f(n)$ è in $O(\sqrt{n})$.

  Più in generale, abbiamo che $log^a(n) = O(\sqrt[b]{n})$ per ogni $a, b \geq 1$. Dunque, possiamo dire che **un poli-logaritmo è dominato da qualunque radice**.

- Sia $f(n) = \sqrt[a]{n}$. Allora $f(n)$ è in $O(n)$.

  Più in generale, abbiamo che $\sqrt[a]{n} = O(n^b)$ per ogni $a, b \geq 1$. Dunque, possiamo dire che **una radice è dominata da qualunque polinomio**.

- Sia $f(n) = n^a$. Allora $f(n)$ è in $O(2^n)$.

  Più in generale, abbiamo che $n^a = O(b^n)$ per ogni $a \geq 1$ ed ogni $b \geq 2$. Dunque, possiamo dire che **un polinomio è dominato da qualunque esponenziale**.

In termini generali, notiamo come la nostra scala di O grandi segua la scala degli **ordini di grandezza** delle successioni numeriche (per $n \to +\infty$):

$$1 \prec log^a(n) \prec \sqrt[b]{n} \prec n^c \prec d^n \prec n^n \prec n!$$

2.1.2 Notazione Omega

Work in progress