SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

Università "Sapienza" di Roma
Facoltà di Informatica

# Calcolo Integrale

Appunti integrati con il libro
"Calculus: A Complete Course" - R.Adams, C.Essex

*Author*
Simone Bianco

2 aprile 2022

# Indice

# Capitolo 0

# Introduzione

Il corso di Calcolo Integrale si pone come un continuo degli argomenti trattati nel corso di Calcolo Differenziale. Le nozione precedentemente apprese verranno nuovamente accennate in alcuni casi, ma in linea di massima essi verranno considerati come già assodati.

Il corso verterà principalmente su tre macro-argomenti:

- **Serie Numeriche**, dove viene analizzata la somma di un numero infinito di termini, definita con l'operazione di limite tendente ad infinito, discutendone le proprietà fino ai polinomi di grado infinito (Serie di Potenze).
- **Integrali**, partendo dal problema del calcolo delle aree, definendo il concetto di integrale definito, fino all'applicazione di esso come strumento matematico inverso all'operazione di derivazione.
- **Equazioni Differenziali**, ossia equazioni in cui le incognite sono funzioni e le relazioni riguardano la funzione e le sue derivate.

# Capitolo 1

# Serie Numeriche

## 1.1 Successioni e Tipologie di Serie Numeriche

In matematica, con il termine **successione** viene semplicemente indicato l'insieme dei valori assunti da una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. Tale insieme, andrebbe quindi scritto come $a = \{a(1), a(2), a(3), ..., a(n)\}$. Tuttavia, per questioni di praticità, è molto più comodo usare la notazione $a_n = a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, dove il numero in pedice (ossia sotto) viene detto **indice della successione**.

Esempi di successioni:

- Se $a_n = 2n$ allora $a_n = 2, 4, 6, 8, 10, ..., 2n$
- Se $a_n = 2^n$ allora $a_n = 2, 4, 8, 16, 32..., 2^n$
- Se $a_n = \frac{1}{n}$ allora $a_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}$

Immaginiamo di voler calcolare la somma dei numeri reali. Essa è ben definita dalle seguenti proprietà:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$$

E l'insieme dei termini da sommare fosse **illimitato**? Come possiamo sapere il risultato finale della somma? Introduciamo quindi quello che è il concetto di **serie numerica**.

**Definition 1. Serie Numerica**

Data una **successione** di termine generico $a_k$, si dice serie numerica la **"somma infinita"** dei suoi termini.

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

### 1.1.1 Serie Convergenti e Divergenti

Abbiamo quindi dato una definizione di **serie numerica**. Tuttavia, dobbiamo ancora analizzare le **proprietà** che tali serie possono assumere. Vediamo qualche esempio:

1. Consideriamo le seguente successione: se $a_n = 0$, allora

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 0$$

   Cosa accade a questa serie considerando $n \to +\infty$? Poiché si tratta di una funzione costante, indipendentemente dal valore assunto da $n$, il risultato della somma sarà **sempre 0**, dunque

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$

2. Consideriamo ora invece la successione

$$a_n = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$$

   Analizziamo prima cosa accade alla serie per piccoli valori di k

   - $S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$
   - $S_2 = a_1 + a_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}$
   - $S_3 = a_1 + a_3 = 1 - (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4}$
   - ...

   Notiamo che le **serie parziali** seguono uno **schema**: una serie di indice $k$, darà come risultato $S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$. Possiamo quindi generalizzare la serie in

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

   Dunque, il limite per $n \to +\infty$ di questa serie, sarà

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

In entrambi gli esempi mostrati, per $n \to +\infty$, le due serie **tendono ad un valore finito** (dunque hanno limite in $\ell$). In questi casi si parla di **serie convergenti**.

**Definition 2. Serie Convergente**

Se la successione delle somme parziali $S_n$ converge ad un valore $\ell$, allora si dice che la serie numerica è **convergente** e la sua somma finale è $\ell$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$$

Analizziamo ora le ulteriori due serie:

1. Sia data la successione costante $a_n = 1$. Vediamo il comportamento delle sue prime serie parziali.
   - $S_0 = 1$
   - $S_1 = 1 + 1 = 2$
   - $S_2 = 1 + 1 + 1 = 3$
   - ...

   Notiamo facilmente che

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n$$

   Applicando il limite su tale successione, dunque, otteniamo che

   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$$

2. Determinare se la seguente successione ammette limite a $+\infty$:

   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{16} + ...$$

   Notiamo facilmente che la serie può essere riscritta nel seguente modo applicando banali proprietà matematiche

   $$1 + \frac{1}{2} + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(8 \cdot \frac{1}{16}\right) + ...$$
   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = 1 + 1 + 1 + ...$$

   La serie, dunque, corrisponde in realtà ad una somma di una determinata quantità di 1. È facile quindi concludere che la serie **non ammetta limite finito**, poiché essa tende a $+\infty$. Inoltre, per chi fosse interessato, la serie può essere riscritta in modo più formale come

   $$1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{2^{k+1}}\right) = 1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} 1 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+1} 1$$

**Definition 3. Serie Divergente**

Se la successione delle somme parziali $S_n$ diverge ad un valore $+\infty$ (o $-\infty$), allora si dice che la serie numerica è **divergente**

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty(-\infty)$$

**ATTENZIONE:** è necessario puntualizzare che se una serie non converge, **non è detto che essa sia divergente**.

**Dimostrazione**: Consideriamo la serie della seguente successione $a_n = (-1)^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

- $S_0 = 1$
- $S_1 = 1 - 1 = 0$
- $S_2 = 1 - 1 + 1 = 1$
- $S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$
- ...

Notiamo quindi che

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque tale serie per $n \to +\infty$ non è **né convergente** ad un limite finito $\ell$ **né divergente** a $+\infty$.

### Errori nel calcolo di somme infinite

Nell'esempio precedente, siamo in grado di arrivare a tale conclusione solo perché, ai tempi moderni, siamo a conoscenza del **concetto di limite**. In passato, molti matematici hanno provato a rispondere al quesito posto dalla serie numerica $(-1)^n$, giungendo a **tre conclusioni errate**:

Partendo dalla serie $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ...$ posso aggiungere delle parentesi in tre modi:

- $S_n = (1-1)+(1-1)+(1-...$, in questo modo otterremo che $S_n = 0+0+0+... = 0$
- $S_n = 1+(-1+1)+(-1+1)+...$, in questo modo otterremo che $S_n = 1+0+0+... = 1$
- $S_n = 1 - (1 + 1 - 1 + 1 - ...$, in questo modo otterremo che $S_n = 1 - S_n$. A questo punto possiamo risolvere l'equazione, ottenendo che $S_n = \frac{1}{2}$

Abbiamo già accennato che tutte e tre le conclusioni siano errate. Il motivo è semplice: **non si può trattare una somma infinita come una somma finita**. Esempio evidente di ciò è la terza conclusione: non ha alcun senso aprire una parentesi senza mai chiuderla alla fine.

Tale problema, tuttavia, può essere "aggirato" dal concetto di limite: immaginando una **serie finita** fino ad $a_n$, possiamo applicare le normali proprietà matematiche su di essa, per **poi** estenderne il risultato per $n \to +\infty$.

In questo caso, quindi, abbiamo già detto che:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \implies \lim_{n\to+\infty} S_n = \text{ Non Esiste}$$

### 1.1.2 Serie geometrica

Prendiamo in considerazione la seguente successione:

$$\text{Sia } q \in \mathbb{R}, \quad a_k = q^k = 1, q, q^2, q^3, ..., q^k$$

Tale successione viene chiamata **progressione geometrica** (per via di alcune proprietà matematiche che non analizzeremo). Vediamo cosa accade ad una serie che implementa tale successione:

- Se $q = 1$, allora

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = n + 1$$

- Se $q \neq 1$, allora:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n$$

$$q \cdot S_n = q \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}$$

$$S_n - q \cdot S_n = 1 - q^{n+1}$$
$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$

$$S_n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

Quindi, possiamo concludere che

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

Per vedere cosa accade alla **serie geometrica** per $n \to +\infty$, dobbiamo prima analizzare cosa accade a $a_n = q^n$:

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Unendo le due definizioni, quindi, otteniamo che per $n \to +\infty$ il comportamento della **serie geometrica** risulta in:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

**Definition 4. Serie geometrica**

La **Serie geometrica** è definita come

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

**Esempi di calcolo con serie geometrica**

- Esempio diretto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = +\infty, \text{ poiché abbiamo } q \geq 1$$

- Esempio con proprietà degli esponenziali:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}, \text{ poiché abbiamo } -1 < q < 1$$

- Esempio con costanti moltiplicative:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2^k} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2 = 6, \text{ poiché abbiamo } -1 < q < 1$$

- Esempio partendo da $k > 0$:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=5}^{\infty} 3^{k-5+5} = \sum_{k=5}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^h = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 2 = \frac{1}{16}$$

Dall'ultimo esempio proposto, quindi possiamo notare la seguente **proprietà delle serie**:

$$\sum_{k=k_0}^{n} q^k = q^{k_0} \cdot \sum_{h=0}^{n-5} q^h$$

### 1.1.3 Serie armonica

Prendiamo in considerazione la seguente successione:

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Tale successione viene chiamata **successione armonica** (per via di alcune proprietà legate alla musica che non analizzeremo). La serie finita di tale successione corrisponde a:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}$$

Per vedere se tale serie **converga** o **diverga**, è necessario chiedersi cosa accade per $S_{n+1}$:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1}$$

Dunque, per definizione stessa, abbiamo che $\forall n$

$$S_n + \frac{1}{n+1} > S_n$$

e quindi possiamo concludere che per $n \to +\infty$ la **serie armonica sia divergente**.

#### Serie armonica generalizzata

Vediamo ora cosa accade alla serie armonica una volta **generalizzata**:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}$$

Analizziamo cosa accade alla serie in base al valore di $\alpha$:

- Se $\alpha < 1$ abbiamo:

  $$\frac{1}{k^\alpha} > \frac{1}{k}$$

  dunque obbligatoriamente segue che

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} > +\infty$$

  Come dimostrato prima, sappiamo che la serie armonica normale è **divergente**. Di conseguenza, poiché la **serie armonica generalizzata** per $\alpha < 1$ è **maggiore di una serie divergente**, ne consegue che anche essa sia **divergente**.

- Se $\alpha > 1$ abbiamo:

$$\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{k}$$

dunque obbligatoriamente segue che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$$

Analogamente all'esempio al caso con $\alpha < 1$, confrontiamo la serie generalizzata con quella normale: poiché la **serie armonica generalizzata** per $\alpha > 1$ è **minore di una serie divergente**, ne consegue che essa sia **convergente** (poiché solo un valore finito può essere minore di $+\infty$).

Ovviamente, è necessario sottolineare che da tale dimostrazione **non** siamo in grado di dedurre quale sia il **valore a cui converga la serie**, ma solo che essa converga. Per questo motivo, indichiamo ciò con la scrittura impropria $< +\infty$.

**Definition 5. Serie armonica generalizzata**

La **Serie armonica generalizzata** è definita come

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

dove $< +\infty$ indica la convergenza ad un valore indefinito

## 1.2 Condizioni, Teoremi e Criteri di Convergenza

In questa sezione vedremo una serie di **condizioni**, **teoremi**, **criteri** e altre **regole** che ci permettono di stabilire facilmente e senza dover effettuare alcun calcolo se una serie **converga** o **diverga**.

### 1.2.1 Condizioni necessarie per la convergenza di una serie

Prendiamo in considerazione la seguente **serie convergente**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

come sappiamo, tale espressione si traduce in

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Per definizione stessa della sommatoria, sappiamo che la **differenza** tra $S_{n+1}$ e $S_n$ risulta in:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1}$$

Tuttavia, abbiamo già stabilito che per $n \to +\infty \implies S_n \to \ell$. Di conseguenza, lo stesso deve valere anche per $S_{n+1}$, dunque $n \to +\infty \implies S_{n+1} \to \ell$.

Possiamo quindi dire che

$$\lim_{n \to +\infty} S_{n+1} - \lim_{n \to +\infty} S_n = a_{n+1}$$
$$0 - 0 = a_{n+1}$$
$$a_{n+1} = 0$$

Riformuliamo il tutto nel seguente teorema:

**Theorem 1. Condizione di convergenza**

**Se una serie è convergente** per $n \to +\infty$, **allora** $a_k \to 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty \implies a_k \to 0$$

**ATTENZIONE**: è necessario sottolineare che la condizione **Se ... allora** impone che **solo se la prima condizione è vera allora anche la seconda deve esserlo** e non il contrario.

Il tipico esempio di ciò è la **serie armonica** vista precedentemente: nonostante per $n \to +\infty$ abbiamo che $\frac{1}{k} \to 0$, non è vero che la serie converga. Infatti, come sappiamo, essa **diverge positivamente**. Dunque, se $a_k \to 0$, **non è detto che la serie converga**.

#### Negazione del precedente teorema

**Se la seconda condizione è negata** (ossia $a_k$ non tende a 0), **allora anche la prima** è necessario che lo sia. Per capire meglio, consideriamo la seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

Possiamo facilmente calcolare il limite di $a_k$ per $\to +\infty$:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k}{k(1+\frac{1}{k})} = 1$$

Poiché il limite di $a_k$ non è zero, è **impossibile che la serie converga**.

Ciò ci permette di formulare il seguente ulteriore teorema:

**Theorem 2. Negazione della condizione di convergenza**

Se per $n \to +\infty$ si verifica che $a_k \nrightarrow 0$ (ossia $a_k$ non tende a 0), allora la serie **non può essere convergente**

$$a_k \nrightarrow 0 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ non è convergente}$$

**ATTENZIONE**: ricordiamo che se una serie **non converge**, non è detto che essa **diverga** (sezione 1.1.1)

### 1.2.2 Serie a termini di segno costante

Consideriamo una **Serie a termini positivi**, ossia rispettante la condizione

$$a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Abbiamo già visto come dalla definizione stessa di serie abbiamo che

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Unendo le due condizioni abbiamo che

$$S_{n+1} - S_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$S_{n+1} \geq S_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La seguente serie, quindi, è **crescente** e di conseguenza può avere solo due possibilità: **convergere** ad un valore finito oppure **divergere positivamente**.

**Theorem 3. Serie a termini di segno costante**

Se $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, allora la serie **converge** oppure **diverge positivamente**

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} < +\infty \\ +\infty \end{cases}$$

Se $a_k \leq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, allora la serie **converge** oppure **diverge negativamente**

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} < -\infty \\ -\infty \end{cases}$$

**Esempio di applicazione dei teoremi**

Consideriamo la seguente serie già parzialmente analizzata in precedenza:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

Possiamo stabilire se la seguente serie **converga**, **diverga** o **nessuna delle due cose** senza effettuare alcun calcolo:

- Sappiamo che si tratta di una **serie a termini positivi**, poiché $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, dunque questa serie può solo **convergere o divergere**
- Sappiamo inoltre che il limite di $a_k$ per $n \to +\infty$ corrisponde a 1 (come analizzato nella sezione 1.2.1), dunque sappiamo che questa serie **non può convergere**
- **Unendo le due condizioni imposte**, possiamo dire con certezza che tale serie **diverge**

### 1.2.3 Criterio del confronto

Proviamo ora ad analizzare una serie più complessa rispetto a quelle già viste:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

- Vediamo facilmente che si tratta di una **serie a termini positivi**, poiché $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, dunque la serie è convergente o divergente
- Il limite di $a_k$ per $n \to +\infty$ è 0

  $$\lim_{k\to+\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) = \lim_{y\to 0} sin\left(y\right) = 0$$

  dunque non siamo in grado di dire se la serie non sia convergente, dunque abbiamo ancora il dubbio tra **convergenza e divergenza**
- Proviamo a **confrontare la serie con altre due serie** di cui è più facile stabilire la convergenza

  $$\sum_{k=1}^{\infty} 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

  Ovviamente, la serie più a sinistra è **convergente a 0**. La serie più a destra, invece, si tratta di una **serie armonica generalizzata** con $\alpha > 1$, dunque sappiamo che **anche essa è convergente**.

  $$\text{Convergente } \leq \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \text{ Convergente}$$

Poiché la nostra serie iniziale è **sia maggiore** di una serie convergente, **sia minore** di un'altra serie convergente, ne consegue che **anche essa sia convergente**.

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) < +\infty$$

Possiamo quindi formulare il seguente teorema:

**Theorem 4. Criterio del confronto**

Siano $0 \leq a_k \leq b_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

- Se $S(b_k)$ **converge**, allora anche $S(a_k)$ **converge**

$$\text{Se } \sum_{k=0} b_k < +\infty \Longrightarrow \sum_{k=0} b_k < +\infty$$

- Se $S(a_k)$ **diverge**, allora anche $S(b_k)$ **diverge**

$$\text{Se } \sum_{k=0} a_k = \infty \Longrightarrow \sum_{k=0} b_k = \infty$$

### 1.2.4 Criterio del confronto asintotico

Vediamo ora una serie simile alla precedente, ma profondamente diversa:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

- Vediamo facilmente che si tratta di una **serie a termini positivi**, poiché $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, dunque la serie è convergente o divergente
- Il limite di $a_k$ per $n \to +\infty$ è 0

$$\lim_{k \to +\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{y \to 0} sin\,(y) = 0$$

dunque abbiamo ancora il dubbio tra **convergenza e divergenza**

- Proviamo ad applicare il **criterio del confronto**

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0 < \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

A differenza dell'esempio visto nella sezione precedente, la seconda serie corrisponde ad una **serie armonica normale**, che sappiamo essere **divergente**

$$\text{Convergente } \leq \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \text{ Divergente}$$

Ancora una volta, quindi, non siamo in grado di stabilire se la serie sia **convergente o divergente**

- Proviamo ad analizzare nel dettaglio cosa accade per $n \to +\infty$ ai termini di entrambe le serie

$$\lim_{k\to+\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{y\to 0} sin(y) \leq \lim_{y\to 0} y$$

Prima di procedere è necessario ricordare un **teorema fondamentale dell'analisi matematica**: per $x \to 0$ abbiamo $sin(x) \sim x$ (letto come $sin(x)$ **segue** $x$):

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

- Per **minuscoli valori** di $\frac{1}{k}$, dunque, **la funzione** $sin(\frac{1}{k})$ **si comporta esattamente come** $\frac{1}{k}$. Applicando tale teorema alle nostre due serie, quindi, otteniamo che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Poiché la seconda serie è **divergente positivamente** e la prima serie **segue il suo comportamento**, concludiamo che **anche essa diverge positivamente**.

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) = +\infty$$

Possiamo quindi formulare l'ulteriore seguente teorema:

**Theorem 5. Criterio del confronto asintotico**

Siano $0 \leq a_k, b_k$ tali che

$$\lim_{k\to+\infty} = \frac{a_k}{b_k} = 1$$

allora:

- $S(a_k)$ converge **se e solo se** $S(b_k)$ converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty$$

- $S(a_k)$ diverge **se e solo se** $S(b_k)$ diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \Longleftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$$

**Esercizi svolti**

1. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k = \text{ Serie Geometrica con } q \geq 1 \ = \textbf{Diverge a } +\infty$$

2. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = \text{ Serie armonica con } \alpha > 1 \ = \textbf{Converge}$$

3. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \text{ Serie armonica con } \alpha \leq 1 \ = \textbf{Diverge a } +\infty$$

$$\text{quindi } \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1 = \textbf{Diverge a } +\infty$$

4. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{sin^2\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\frac{1}{k}\right)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{sin^2(y)}{y^2} = \frac{sin(y)\cdot sin(y)}{x\cdot x} = 1\cdot 1 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^2 = \text{ Serie armonica con } \alpha > 1 \ = \textbf{Converge}$$

$$\text{quindi } \sum_{k=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{k}\right) = \textbf{Converge}$$

5. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 2 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - 1 \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 2}{\frac{1}{k} - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 2}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1 - 1}{y - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y - 1} - \frac{1}{y - 1} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y - 1} \cdot \frac{y}{y} - \frac{1}{y - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y - 1} - \frac{1}{y - 1} = 0 + 1 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - 1 = ?$$

- È una serie a termini negativi, dunque può o convergere o divergere a -$\infty$
- Non può convergere, poiché

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} - 1 = -1$$

- Dunque **Diverge a -$\infty$**

$$\text{quindi } \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 2 = \ \textbf{Diverge a -}\infty$$

6. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\left(cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\left(cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2k} \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k\left(cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right)}{-\frac{1}{2k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{-\left(1 - cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)}{-\frac{1}{2k^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{-(1 - cos(y))}{-\frac{1}{2} \cdot y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2k} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = -\frac{1}{2} \cdot +\infty = \textbf{Diverge a -}\boldsymbol{\infty}$$

$$\text{quindi } \sum_{k=0}^{\infty} k \left( cos \left( \frac{1}{k} \right) - 1 \right) = \textbf{Diverge a -}\boldsymbol{\infty}$$

### 1.2.5 Criterio del Rapporto e Criterio della Radice

Una volta enunciati i precedenti criteri, possiamo analizzare i seguenti due criteri, estremamente simili tra loro:

**Theorem 6. Criterio del Rapporto**

Sia $a_k \geq 0$. Se si verifica che

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$$

allora se

- $\ell < 1$ la serie **converge**
- $\ell > 1$ la serie **diverge**
- $\ell = 1$ **non sappiamo** se la serie converga o diverga

**Theorem 7. Criterio della Radice**

Sia $a_k \geq 0$. Se si verifica che

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell$$

allora se

- $\ell < 1$ la serie **converge**
- $\ell > 1$ la serie **diverge**
- $\ell = 1$ **non sappiamo** se la serie converga o diverga

Come possiamo notare, i criteri risultano **simili** e, in base al valore di $\ell$, ci permettono di raggiungere le **stesse conclusioni**. Inoltre, spesso applicando entrambi criteri sulla stessa serie si ottiene lo **stesso valore** di $\ell$.

Tuttavia, vi è chiaramente una **preferenza situazionale nella scelta del criterio** da applicare: se la serie $a_k$ presenta un termine del tipo $k!$ allora conviene utilizzare il **Criterio del Rapporto**, mentre se presenta un termine del tipo $x^k$, $x \in \mathbb{R}$ allora conviene utilizzare il **Criterio della Radice**. Per esempio, nella seguente serie scegliamo di applicare il criterio del rapporto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^2} \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^2}}{\frac{k!}{k^2}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{k!} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k^2}{k+1} = +\infty \Rightarrow \ell > 1 \Rightarrow \textbf{Diverge}$$

### 1.2.6 Accorgimenti per i Criteri e Formula di Stirling

Poiché abbiamo introdotto il Criterio della Radice, è necessario ricordare l'esistenza di un **limite notevole nel quale ci si imbatte spesso** nell'applicare tale criterio, ossia

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

Inoltre, per calcolare alcuni limiti può essere utile ricordare gli **ordini di grandezza delle successioni**, in modo da decretare quale termine vinca rispetto ad un altro:

$$1 \prec log^a(n) \prec \sqrt[b]{n} \prec n^c \prec d^n \prec n! \prec n^n$$

Infine, per alcuni casi può risultare utile introdurre la **Formula di Stirner**, descrivente il comportamento asintotico della seguenti due funzioni:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}} = 1$$

dunque per $k \to +\infty$ abbiamo

$$k! \sim k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}$$

**Esercizi svolti**

1. Decretare se la seguente serie converge o diverge usando il Criterio della Radice

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[k]{k^2}}{2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(\sqrt[k]{k})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

2. Decretare se la seguente serie converge o diverge usando il Criterio del Rapporto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2+2k+1}{2k^2} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

3. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

**Bonus:** un occhio più allenato potrebbe essere in grado di riconoscere che tale serie corrisponde al **Polinomio di Taylor di grado infinitesimo di** $e^k$. Dunque, l'intera serie converge esattamente a $e^k$.

4. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cdot 2^k}{k!} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{(k+1)^2 \cdot 2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^2 \cdot 2^k}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2 \cdot 2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^2 \cdot 2^k} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2 \cdot 2 \cdot 2^k}{(k+1) \cdot k!} \cdot \frac{k!}{k^2 \cdot 2^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2(k+1)}{k^2} = 0 < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

5. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1) \cdot k!}{(k+1)^k \cdot (k+1)} \cdot \frac{k^k}{k!} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{e} < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

**NB**: nell'ultimo passaggio è stato usato un limite notevole

6. Decretare se la seguente serie converge o diverge usando il Criterio del Confronto Asintotico

*Suggerimento: usare la Formula di Stirling dove possibile*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \sim \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k} \quad \text{poiché} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[2k]{2\pi k}}{e} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[2k]{2\pi}\sqrt{\sqrt[k]{k}}}{e} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2k}}}{e} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{e} < 0 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

$$\text{quindi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} = \textbf{Converge}$$

7. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{k^k}{e^k \cdot k!}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!} \cdot \sqrt{2\pi k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}}{k!} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot +\infty = \textbf{Diverge}$$

$$\text{quindi } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!} = \textbf{Diverge}$$

### 1.2.7 Criterio di Leibniz

Fino ad ora abbiamo trattato tipologie di serie in cui il segno rimane **costante** (serie a termini positivi e serie a termini negativi), fatta eccezione per la serie $a_k = (-1)^k$, che abbiamo decretato come **nè convergente nè divergente**. Rimane però il dubbio per le serie in cui $(-1)^k$ costituisce **solo parte di** $a_k$ e non la sua totalità. Il **Criterio di Leibniz** è in grado di determinare se una serie di questo tipo sia in grado di convergere oppure no in base a **tre requisiti**:

**Theorem 8. Criterio di Leibniz**

Sia $a_k = (-1)^k \cdot b_k$. Se $b_k$ soddisfa le seguenti **tre condizioni**, allora la serie di termine generico $a_k$ è **convergente**:

- $b_k$ è una successione a termini di segno costante
- $b_{k+1} \leq b_k$ per ogni $k$, ossia è una successione decrescente
- $b_k \to 0$ per $n \to +\infty$

**Esempio**

Consideriamo la seguente serie, cercando di determinarne la convergenza:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Notiamo facilmente che non possiamo applicare nessuno dei criteri visti precedentemente. Vediamo quindi se essa rispetta le tre condizioni del **Criterio di Leibniz**.

Prima di tutto, mettiamo in evidenza $b_k$ ricordando che $a_k = (-1)^k \cdot b_k$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$$

Successivamente, verifichiamo le condizioni

- $b_k = \frac{1}{k}$ è a **termini positivi**
- $b_{k+1} \leq b_k \Longrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$ è vero per ogni $k$, dunque è **decrescente**
- $b_k \to 0$ per $k \to +\infty$

Tutte e tre le condizioni sono soddisfatte, dunque si tratta di una serie **convergente**

### 1.2.8 Convergenza Assoluta

Nonostante il Criterio di Leibniz riesca a trattare anche le serie a segno alterno, esso è strettamente dipendente da una caratteristica: l'**alternanza tra i segni deve essere regolare**, ossia deve ricorrere dopo ogni termine. Ma cosa accade se l'alternanza non è regolare?

Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(k)}{k^2}$$

In questa situazione, abbiamo che ogni termine compreso tra $0 \leq k \leq \pi$ è positivo, mentre quelli tra $\pi \leq k \leq 2\pi$ sono negativi, dunque il Criterio di Leibniz non è applicabile.

In questo caso, possiamo applicare quella che viene chiamata **Condizione di Convergenza Assoluta**:

**Theorem 9. Convergenza Assoluta**

La serie di termine generico $a_k$ si dice **convergente assolutamente** se e solo se la serie di termine generico $|a_k|$ è **convergente**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge assolutamente solo se } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

Se la serie di termine generico $a_k$ **converge assolutamente**, allora essa **converge anche semplicemente**.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$$

Tornando alla nostra serie, quindi, proviamo a vedere se essa converge assolutamente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(k)}{k^2} \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{sin(k)}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|sin(k)|}{k^2}$$

Notiamo che l'unico criterio utilizzabile sulla nuova serie ottenuta è il **Criterio del Confronto** (non asintotico)

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|sin(k)|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$Convergente \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|sin(k)|}{k^2} \leq Convergente$$

Poiché si trova tra due serie convergenti, ne consegue che anche la **serie assoluta sia convergente**. Dunque, la nostra serie iniziale **converge assolutamente** e di conseguenza **converge semplicemente**.

**ATTENZIONE**: così come abbiamo fatto per la condizione necessaria di convergenza, è necessario sottolineare che l'**ordine della condizione** sia importantissimo. Dunque, se una serie converge semplicemente, **non è detto** che essa converga assolutamente.

Per esempio, abbiamo già stabilito che la seguente serie sia **convergente** per via del Criterio di Leibniz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} < +\infty$$

ma essa **non converge assolutamente** (ed anzi, diverge assolutamente)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

### Riordinamento dei termini della serie

Tuttavia, nel caso in cui una serie converga semplicemente ma non assolutamente, è possibile trovare un **riordinamento** dei termini della serie tale che

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_{S(h)} = \ell$$

Tutto ciò è possibile poiché ricordiamo che le somme godono della proprietà commutativa, dunque al cambiare dell'ordine degli addendi il risultato non cambia. Perciò, in realtà, tale riordinamento <u>non rende la serie convergente</u> nel caso in cui essa non lo sia già, poiché si tratta solo di una "forzatura snaturata".

Prendiamo ancora una volta come esempio la seguente serie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} < +\infty$$

All'interno di tale serie, i segni si alternano ad ogni termine, dunque è possibile individuare **due sotto-serie** all'interno della serie di partenza

- Se $a_k > 0$ (che si verifica solo quando $k$ è pari) allora tale termine $a_k$ è anche dentro la serie
$$S_+ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2h}, \quad h \in \mathbb{N}$$
- Se $a_k < 0$ (che si verifica solo quando $k$ è dispari) allora tale termine $a_k$ è anche dentro la serie
$$S_- = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2h+1}, \quad h \in \mathbb{N}$$

Entrambe le due sotto-serie sono divergenti. Possiamo però scegliere un **valore arbitrario** di $\ell$ a cui far convergere la serie di partenza, seguendo un semplice algoritmo:

1. Scegliere un arbitrario valore di $\ell$
2. Se la somma dei termini S è minore di $\ell$, allora aggiungere alla somma il successivo termine di $S_+$
3. Altrimenti, se la somma dei termini S è maggiore di $\ell$, allora sottrarre alla somma il successivo termine di $S_-$
4. Tornare al punto 2 e ripetere l'algoritmo all'infinito

In questo modo, una volta superato il valore di $\ell$, il riordinamento dei termini permetterà alla serie di rimanere sempre poco sopra o poco sotto tale valore, convergendo quindi ad $\ell$.

**Esempio di applicazione dell'algoritmo**

Consideriamo la serie
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

1. Scegliamo $\ell = \frac{3}{2}$ e poniamo $S = 0$, poiché non abbiamo ancora sommato nessun termine.
2. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il primo termine della serie $S_+$, ossia 1 (dunque $S = 1$)
3. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il secondo termine della serie $S_+$, ossia $\frac{1}{3}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$)
4. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il terzo termine della serie $S_+$, ossia $\frac{1}{5}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15}$)
5. $S > \ell$, dunque sottraiamo il primo termine della serie $S_-$, ossia $-\frac{1}{2}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{31}{30}$)

6. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il quarto termine della serie $S_+$, ossia $\frac{1}{7}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{247}{210}$)
7. Ripetendo l'algoritmo all'infinito, otteniamo che $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + ... \approx \frac{3}{2}$

**Esempio già svolto**

Se invece volessimo far convergere la serie a $\frac{1}{\pi}$, i primi 50 termini di essa sarebbero:

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} + \frac{1}{11} - \frac{1}{24} - \frac{1}{26} + \frac{1}{13} - \frac{1}{28} -$$
$$- \frac{1}{30} + \frac{1}{15} - \frac{1}{32} - \frac{1}{34} + \frac{1}{17} - \frac{1}{36} - \frac{1}{38} + \frac{1}{19} - \frac{1}{40} - \frac{1}{42} + \frac{1}{21} - \frac{1}{44} - \frac{1}{46} + \frac{1}{23} - \frac{1}{48} - \frac{1}{50} + \frac{1}{25} - \frac{1}{52} - \frac{1}{54} -$$
$$- \frac{1}{56} + \frac{1}{27} - \frac{1}{58} - \frac{1}{60} + \frac{1}{29} - \frac{1}{62} - \frac{1}{64} + \frac{1}{31} - \frac{1}{66} - \frac{1}{68} \approx \frac{1}{\pi}$$

# 1.3 Serie di Taylor

## 1.3.1 Polinomio di Taylor

Prima di parlare delle **Serie di Taylor**, è necessario effettuare un breve ripasso sul **Polinomio di Taylor**:

**Definition 6. Polinomio di Taylor**

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Si definisce come Polinomio di Taylor di ordine $n$ in $x_0$ di $f$ il polinomio $T(x; x_0)$, ossia il **miglior polinomio di grado $\leq n$ che approssima $f$ in un intorno** $x_0$, e dove $R(x, x_0)$ rappresenta la **differenza (resto) infinitesimale di approssimazione** tra $f(x_0)$ e $T(x; x_0)$.

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

$$f(x_0) = T(x; x_0) + R(x; x_0) \Longrightarrow R(x; x_0) = f(x_0) - T(x; x_0)$$

La **forma generica del Polinomio di Taylor** può essere riscritta come

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

mentre il **resto infinitesimale** equivale a

$$R(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

dove $\xi \in (x, x_0)$

Dunque, se volessimo approssimare il valore di $f(x) = e^x$ nel punto $x_0 = 0$ con un Polinomio di Taylor di ordine $n$, otterremmo

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{f(0)}{0!}x^0+\frac{f'(0)}{1!}x^1+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Tuttavia, poiché sappiamo che la **derivata di** $f(x) = e^x$ **coincide con se stessa**, abbiamo che

- $f(0) = e^0 = 1$
- $f'(0) = e^0 = 1$
- $f''(0) = e^0 = 1$
- $f'''(0) = e^0 = 1$
- ...
- $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Dunque, calcolando i valori della sommatoria otteniamo che

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

In questo caso, utilizziamo il segno di approssimazione ($\approx$) poiché non abbiamo considerato il **resto infinitesimale** della differenza tra $f(x)$ e $T(x; x_0)$. Il vero valore di $e^x$, quindi, coincide con

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Il motivo per cui non è stato considerato il resto è semplice: nel nostro caso, parleremo del **Polinomio di Taylor di ordine** $\infty$. Difatti, per definizione stessa del Polinomio di Taylor e del resto infinitesimale possiamo affermare che per $n \to +\infty$, la **Serie di Taylor coincide esattamente con il valore di** $f(x)$.

Calcolando il limite per $n \to +\infty$ del **resto infinitesimale**, ci rendiamo conto che esso tende a 0, dunque è completamente trascurabile

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = f^{(n+1)}(\xi) \cdot 0 = 0$$

**Definition 7. Serie di Taylor**

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Si definisce come Serie di Taylor il **Polinomio di Taylor** $T(x; x_0)$ **di ordine** $n$ **per** $n \to +\infty$ che coincide esattamente con il valore di $f(x_0)$

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

### 1.3.2 Serie di Taylor Notevoli

Una volta data la loro definizione, vedremo una lista di Serie di Taylor notevoli che sarà comodo ricordare e che verranno date per assunte per il resto del corso.

*Attenzione: il procedimento con cui vengono ricavate le serie notevoli è analogo all'esempio fatto con la serie di $e^x$ nella sezione precedente. Per questioni di comodità verranno omessi.*

- Serie di Taylor di $f(x) = e^x$ valida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = cos(x)$ valida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = sin(x)$ valida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = \frac{1}{1-x}$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

  *(già vista nell'ambito delle serie geometriche)*

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

- Serie di Taylor di $f(x) = \frac{1}{1+x}$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

- Serie di Taylor di $f(x) = ln(1 + x)$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

$$ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = arctg(x)$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

$$arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1!}$$

### 1.3.3 Principio di Sostituzione e Calcolo delle Derivate

Prima di procedere, è necessario sottolineare che, così come avviene all'interno del Polinomio di Taylor, anche per le Serie di Taylor vale in **Principio di Sostituzione**: se volessimo calcolare la Serie di Taylor di $f(x) = e^{x^2}$, ci basterebbe porre $y = x^2$ per **trasformare** la funzione in $f(x) = e^y$.

A questo punto, siamo già in grado di calcolare la sommatoria di questa nuova funzione:

$$e^{x^2} = e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

Inoltre, è necessario ricordare che, poiché il Polinomio di Taylor viene calcolato utilizzando le derivate stesse della funzione, è possibile **calcolare il valore della derivata k-esima** nel punto $x_0 = 0$, ossia $f^{(k)}(0)$, semplicemente calcolando il prodotto tra il termine $a_k$ della serie e $k!$

$$f^{(k)}(0) = a_k \cdot k!$$

**Esempio**

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 \cdot sin(x^3)$. Applicando il **principio di sostituzione**, otteniamo che

$$x^3 \cdot sin(x^3) = y \cdot sin(y) = y \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+2}}{(2k+1)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^3)^{2k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{6k+6}}{(2k+1)!}$$

Estendendo la serie calcolata, otteniamo

$$x^3 \cdot sin(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{6k+6}}{(2k+1)!} = \frac{x^6}{1!} - \frac{x^{12}}{3!} + \frac{x^{18}}{5!} - \frac{x^{24}}{7!} + ... = a_6 - a_{12} + a_{18} - a_{24} + ...$$

Proviamo a calcolare i seguenti valori assunti dalle derivate k-esime di $f(x)$:

- **Valore di** $f''(0)$: il termine di grado 2 **non esiste all'interno della serie**, dunque
$$f''(0) = a_2 \cdot 2! = 0 \cdot 2! = 0$$
- **Valore di** $f^{(6)}(0)$: il termine di grado 6 **esiste all'interno della serie**, dunque
$$f^{(6)}(0) = a_6 \cdot 6! = \frac{1}{1!} \cdot 6! = 6!$$
- **Valore di** $f^{(24)}(0)$: il termine di grado 24 **esiste all'interno della serie**, dunque
$$f^{(24)}(0) = a_{24} \cdot 24! = -\frac{1}{7!} \cdot 24! = -\frac{24!}{7!}$$

**Esercizi svolti**

1. Si consideri la funzione $f(x) = cos(x^2)$
   - Se ne calcoli la corrispondente Serie di Taylor

$$cos(x^2) = cos(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!}$$

   - Si calcoli il valore di $f'''(0)$

$$f'''(0) = a_3 \cdot 3! = 0 \cdot 3! = 0$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(4)}(0)$

$$f^{(4)}(0) = a_4 \cdot 4! = -\frac{1}{2!} \cdot 4! = -\frac{24}{2} = -12$$

2. Si consideri la funzione $f(x) = x \cdot ln(1 + x^2)$
   - Se ne calcoli la corrispondente Serie di Taylor

$$x \cdot ln(1 + x^2) = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+3}}{k+1}$$

   - Si calcoli il valore di $f'''(0)$

$$f'''(0) = a_3 \cdot 3! = \frac{1}{0!} \cdot 3! = 3! = 6$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(4)}(0)$

$$f^{(4)}(0) = a_4 \cdot 4! = 0 \cdot 4! = 0$$

3. Si consideri la funzione $f(x) = x^5 \cdot e^{x^2}$
   - Se ne calcoli la corrispondente Serie di Taylor

$$x^5 \cdot e^{x^2} = x^5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+5}}{k!}$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(6)}(0)$

$$f^{(6)}(0) = a_6 \cdot 6! = 0 \cdot 6! = 0$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(7)}(0)$

$$f^{(7)}(0) = a_7 \cdot 7! = \frac{1}{1!} \cdot 7! = 7! = 5040$$

## 1.4 Serie di Numeri Complessi e Formula di Eulero

In questa sezione accenneremo alcuni argomenti che verranno ripresi nel capitolo del corso relativo alle **Equazioni Differenziali**.

In particolare, parleremo dei **numeri complessi**, della **formula di Eulero** e del **legame tra esponenziale, seno e coseno**.

### 1.4.1 Numeri complessi

Con il termine **numeri complessi** (indicati in insiemistica come $\mathbb{C}$), si intende **un'estensione "immaginaria" dei numeri reali**.

Come da matematica elementare, sappiamo che **la radice** di esponente pari di un **numero negativo non esiste**. Ad esempio, non esiste alcun numero equivalente a $\sqrt{-1}$, poiché nessun numero elevato al quadrato può dare come risultato $-1$:

- Ipotizzando che tale numero esista e che sia un numero positivo, allora il prodotto di tale numero con se stesso dovrebbe dare vita ad un **numero positivo**, poiché avremmo un **prodotto tra due numeri positivi**, mentre $-1$ è **negativo**
- Ipotizzando che tale numero esista e che sia un **numero negativo**, allora il prodotto di tale numero con se stesso dovrebbe dare vita ad un **numero positivo**, poiché avremmo un **prodotto tra due numeri negativi**, mentre $-1$ è **negativo**

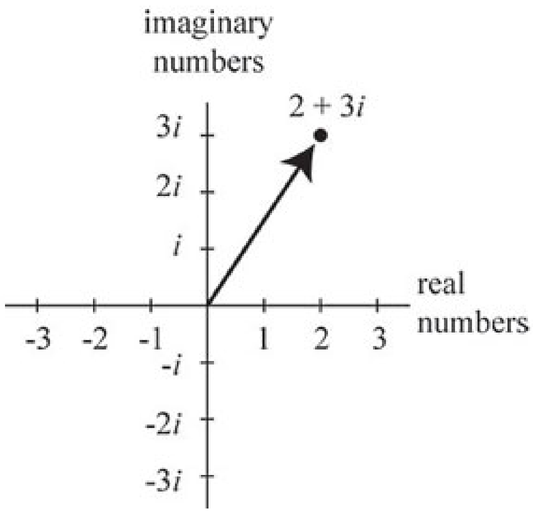
Tuttavia, possiamo effettuare un salto della fede e dare per valida l'esistenza di tale numero. Come abbiamo visto, tale numero **non può essere un numero reale** e per tale motivo viene definito col termine di **numero "immaginario"**, venendo indicato con l'**unità immaginaria** $i$, dove $i = \sqrt{-1}$.

L'insieme dei **numeri complessi** $\mathbb{C}$, come già accennato, corrisponde ad un'estensione "immaginaria" dei numeri reali e vengono rappresentati nella seguente forma:

$$z = x + iy$$

dove $z \in \mathbb{C}$ e $x, y \in \mathbb{R}$

**Graficamente**, i numeri complessi possono essere interpretati nella seguente forma:



L'utilizzo di tali numeri apre molte porte all'interno della matematica, ad esempio la **fattorizzazione** di alcuni numeri primi che, per loro definizione stessa, normalmente non sarebbero fattorizzabili:

$$5 = (2+i)(2-i) = 4 - 2i + 2i - i^2 = 4 - (-1) = 5$$

*Attenzione: ricordiamo che poiché* $i = \sqrt{-1}$, *ne segue che* $i^2 = -1$ *e che* $-i \cdot i = +1$

### 1.4.2 Formula di Eulero

Nel nostro caso, parleremo dei numeri complessi in ambito della Formula di Eulero:

**Lemma 10. Formula di Eulero**

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ vale la seguente equivalenza:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)$$

In particolare, è famosa in ambito matematico la così detta *"equazione perfetta"*, poiché contenente tutte le 5 costanti fondamentali della matematica

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

che deriva da

$$e^{i\pi} + 1 = cos(\pi) + i \cdot sin(\pi) + 1 = -1 + 0 + 1 = 0$$

Ma cosa c'entra tutto ciò con le **serie numeriche**? Il motivo è semplice: possiamo provare tale formula anche attraverso le **Serie di Taylor** dell'esponenziale, del coseno e del seno:

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \theta^k}{k!}$$

Prima di procedere, osserviamo il **comportamento** di $i^k$ al crescere di $k$:

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | ... |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i^k$ | 1 | $i$ | $-1$ | $-i$ | 1 | $i$ | $-1$ | ... |

dunque, affermiamo che:

$$i^k = \begin{cases} (-1)^h & \text{con } k = 2h \\ (-1)^h \cdot i & \text{con } k = 2h+1 \end{cases}$$

Successivamente, **separiamo** la precedente sommatoria in due sommatorie, una contenente i **termini pari** ed una contenente i **termini dispari**:

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \theta^k}{k!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{i^{2h}\theta^{2h}}{(2h)!} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{i^{2h+1}\theta^{2h+1}}{(2h+1)!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \theta^{2h}}{(2h)!} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \cdot i \cdot \theta^{2h+1}}{(2h+1)!}$$

Infine, notiamo che possiamo mettere in evidenza le **Serie di Taylor del seno e del coseno**, ottenendo esattamente l'identità affermata dalla **Formula di Eulero**:

$$e^{i\theta} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \theta^{2h}}{(2h)!} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \cdot i \cdot \theta^{2h+1}}{(2h+1)!} = \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \theta^{2h}}{(2h)!}}_{cos(\theta)} + i \cdot \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \cdot \theta^{2h+1}}{(2h+1)!}}_{sin(\theta)} = cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)$$

## 1.5 Serie di Potenze

Le **Serie di Potenze** corrispondono ad una **generalizzazione** del concetto precedentemente visto in ambito delle **Serie di Taylor**

**Definition 8. Serie di Potenze**

Con il termine **Serie di Potenze**, ci riferiamo ad una serie che assume la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

dove $\{a_k\}$ è una successione di numeri reali, chiamata **successione di coefficienti**, e $x_0 \in \mathbb{R}$, chiamato **centro della serie**.

Per comprendere meglio, vediamo alcuni esempi con alcune serie già analizzate:

- Indicare la successione di coefficienti ed il centro della seguente serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$
  - **Successione**: $a_k = \frac{1}{k!}$
  - **Centro**: $x_0 = 0$ (dovuto dal fatto che $x^k = (x - x_0)^k \iff x_0 = 0$)
- Indicare la successione di coefficienti ed il centro della seguente serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k}}{(2k)!} x^{6k+2}$$
  - **Successione**:
$$a_h = \begin{cases} 0 & h \neq 6k+2 \\ \frac{(-1)^k 3^{2k}}{(2k)!} & h = 6k+2 \end{cases}$$
  - **Centro**: $x_0 = 0$
- Indicare la successione di coefficienti ed il centro della seguente serie
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^2+1}$$
  - **Successione**: $a_k = \frac{1}{k^2+1}$
  - **Centro**: $x_0 = 3$

### 1.5.1 Insieme di convergenza

Una volta data definizione di serie di potenze, possiamo andare a descriverne le proprietà. In particolare, le sue proprietà in ambito di **convergenza**.

Consideriamo il seguente insieme contenente **tutti valori di $x$ a cui la serie converge**

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{la serie converge in } x\}$$

Notiamo facilmente come tale insieme **non possa essere vuoto**, poiché considerando $x = x_0$ otteniamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 0^k = a_0 \cdot 0^0 + a_1 \cdot 0^1 + a_2 \cdot 0^2 + ... = a_0$$

*Attenzione: ricordiamo che in algebra si ha $0^0 = 1$, mentre $0^x = 0$, $\forall x \neq 0$*

Dunque, ne segue che, obbligatoriamente, $x_0 \in E$, dunque $E \neq \emptyset$. Quindi, **ogni serie di potenze converge nel suo centro**.

Inoltre, questa **proprietà** ci permette di formulare il seguente teorema:

**Theorem 11. Intervallo di convergenza**

Sia $P$ una serie di potenze e sia $x_0$ il suo centro.

- Se $P$ **converge** in $x_1$, dove $x_1 \neq x_0$, allora essa **converge** $\forall x \in [x_0, x_1]$
- Se $P$ **non converge** in $x_1$, dove $x_1 \neq x_0$, allora essa **non converge** $\forall x > x_1$

Ne segue, quindi, che l'insieme di convergenza E sia un **intervallo**.

Una volta affermate le proprietà che ci permettono di definire l'**intervallo di convergenza** di una serie di potenze, possiamo dare una definizione di **raggio di convergenza della serie**:

**Definition 9. Raggio di convergenza della serie**

Sia $P$ una serie di potenze e sia $x_0$ il suo centro. Esiste un valore $R$ chiamato **raggio di convergenza della serie** per cui vale che

- $P$ **converge** se $|x - x_0| < R$
- $P$ **non converge** se $|x - x_0| > R$
- La convergenza di $P$ è **ignota** se $|x - x_0| = R$, dunque è necessario analizzarla separatamente

dove $R$ può essere 0, $+\infty$ o un valore in $(0, +\infty)$

**Esempi**

- Si consideri la seguente serie e se ne indichi il centro e l'intervallo di convergenza

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

  - **Centro**: $x_0 = 0$
  - **Raggio**: $R = +\infty$
  - **Intervallo di Convergenza**: $E = \mathbb{R}$

- Si consideri la seguente serie e se ne indichi il centro e l'intervallo di convergenza

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

  - **Centro**: $x_0 = 0$
  - **Raggio**: $R = 1$ (poiché sappiamo che essa converge per $x \in (-1, 1)$
  - **Convergenza a** 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = +\infty = \text{Non converge}$$

  - **Convergenza a** $-1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \text{Non converge}$$

  - **Intervallo di Convergenza**: $E = (-1, 1)$

- Si consideri la seguente serie e se ne indichi il centro e l'intervallo di convergenza

$$arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

  - **Centro**: $x_0 = 0$
  - **Raggio**: $R = 1$ (poiché sappiamo che essa converge per $x \in (-1, 1)$
  - **Convergenza a** 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 1^{2k+1}}{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1} =< +\infty = \text{Converge}$$

  - **Convergenza a** $-1$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1)^{2k+1}}{2k+1} = \frac{(-1)^{3k+1}}{2k+1} =< +\infty = \text{Converge}$$

  - **Intervallo di Convergenza**: $E = [-1, 1]$

Negli esempi precedenti, il valore del raggio $R$ è ricavabile facilmente poiché si tratta di serie notevoli di cui conosciamo già il comportamento. Ma come possiamo calcolare il valore di $R$ di una serie qualsiasi?

**Theorem 12. Calcolo del raggio di convergenza**

Sia $P$ una serie di potenze. Esiste un valore $\ell$ equivalente a

$$\ell = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

tale che

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

In forma impropria, quindi, potremmo dire che $R = \frac{1}{\ell}$

**Esempi**

- Si consideri la seguente serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{(k+1)(k+2)}$$

  - **Centro della serie**: $x_0 = 2$
  - **Raggio della serie**:

$$L = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k \to +\infty} \left| \frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+2)} \right| = \lim_{k \to +\infty} \frac{(k+3)}{(k+1)} = 1$$

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$$

  - **Convergenza per** $x = x_0 - R = 2$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-2)^k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} = \text{Converge per Leibniz}$$

  - **Convergenza per** $x = x_0 + R = 3$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3-2)^k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \text{Converge}$$

  - **Intervallo di Convergenza**: $E = [1, 3]$

- Si consideri la seguente serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(2x-1)^k}{k!}$$

  – **Riscrittura in forma di serie di potenze**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(2x-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(2(x-\frac{1}{2}))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k(x-\frac{1}{2})^k}{k!} =$$

  – **Centro della serie**: $x_0 = \frac{1}{2}$

  – **Raggio della serie**:

$$L = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{6^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{6^k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{6}{k+1} = 0$$

$$L = 0 \Longrightarrow R = +\infty$$

  – **Intervallo di Convergenza**: $E = \mathbb{R}$ (converge $\forall x \in \mathbb{R}$)

  – **Analisi ulteriore della serie**: possiamo riscrivere la serie nella seguente forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(2x-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6x-3)^k}{k!} = [\textbf{Pongo } y = 6x-3] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = e^y = e^{6x-3}$$

### 1.5.2 Derivazione di una serie di potenze

Consideriamo la **serie di potenze generica**, già definita come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

Come sappiamo, in matematica le **funzioni** godono di alcune proprietà, come la **continuità** in un intervallo o la **derivabilità**.

Poiché abbiamo già affermato che le funzioni possano essere espresse anche in termini di serie di potenze, ne consegue che anche quest'ultime godano delle stesse proprietà, in particolare la **derivabilità**: se una funzione può essere espressa sotto forma di una somma infinita di termini, ne segue logicamente che la derivata di tale funzione possa essere espressa sotto forma di una **somma infinita delle derivate di ogni termine originale**.

- La funzione $f(x)$ viene definita come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

- La derivata prima della funzione $f(x)$, ossia $f'(x)$, viene definita come

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

- La derivata seconda della funzione $f(x)$, ossia $f''(x)$, viene definita come

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot (x - x_0)^{k-2}$$

- ...

Come notiamo, per derivare i termini che compongono la serie di potenze è necessario applicare le semplici regole delle derivazioni, in particolare la **regola della potenza**.

$$f(x) = x^\alpha \implies f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \implies f''(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot x^{\alpha-2} \implies ...$$

Inoltre, possiamo notare come la serie originale e la serie derivata mantengano lo **stesso centro** e lo stesso **intervallo di convergenza**: riscriviamo $f'(x)$ nella seguente forma

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1} = [\textbf{Pongo } h = k-1] \sum_{h=0}^{\infty} a_{h+1} \cdot (h+1) \cdot (x - x_0)^h$$

A questo punto, ci rendiamo conto che il **centro della serie** sia rimasto invariato (è sempre $x_0$), mentre la **successione di convergenza** di $f'(x)$ equivale a

$$b_h = a_{h+1} \cdot (h+1)$$

$$\text{Il limite di } a_k \text{ equivale a } L_{f(x)} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$$\text{Il limite di } b_h \text{ equivale a } L_{f'(x)} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|b_h|} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_{h+1} \cdot (h+1)|} =$$
$$= \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_{h+1}} \cdot \sqrt[k]{h+1} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\text{Tende a 1}} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Dunque, otteniamo che le due serie possiedono lo stesso valore $L$ e di conseguenza avranno lo stesso **raggio di convergenza**

$$L_{f(x)} = L_{f'(x)} \Longrightarrow R_{f(x)} = R_{f'(x)}$$

**Theorem 13. Derivabilità di una serie**

Sia $f(x)$ una funzione tale che $\forall x \in |x - x_0| < R$ vale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

allora, ne segue che

- $f$ è **derivabile infinite volte**
- La **derivata j-esima** di $f$ equivale a

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-j+1) \cdot a_k (x - x_o)^{k-j}$$

**Esempi**

- Si calcoli la **derivata prima** della seguente serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1) \cdot x^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Dunque, $f(x)$ è una **funzione ignota** la cui derivata equivale a $f'(x) = \frac{1}{1-x}$. Con gli strumenti attuali, non siamo in grado di calcolare a cosa corrisponda la funzione $f(x)$, tuttavia, andando ad intuito, possiamo concludere che $f(x) = -ln(1-x)$.

- Si calcoli la **derivata prima** della seguente serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k (x - \frac{1}{2})^k}{k!} = e^{6x-3}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot 6^k (x - \frac{1}{2})^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k (x - \frac{1}{2})^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 6^{k-1} (x - \frac{1}{2})^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= 6 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^{k-1} (x - \frac{1}{2})^{k-1}}{(k-1)!} = [\textbf{Pongo } h = k-1] = 6 \cdot \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{6^h (x - \frac{1}{2})^h}{h!}}_{\text{Corrisponde a } f(x)} = 6 \cdot f(x)$$

Dunque, $f(x)$ è una funzione la cui derivata equivale a $f'(x) = 6 \cdot f(x)$. Inoltre, siamo in grado di **verificare** tale conto, poiché sappiamo che $f(x) = e^{6x-3}$.

$$f'(x) = [e^{6x-3}]' = [6x-3]' \cdot e^{6x-3} = 6 \cdot e^{6x-3}$$

- Si calcoli la **derivata prima** e la **derivata seconda** della seguente serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k \cdot (k-1)}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (x+2)^{k-1}}{k \cdot (k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{k-1}}{k-1} = [\textbf{Pongo } h = k-1] = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x+2)^h}{h}$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \cdot (k-1) \cdot (x+2)^{k-2}}{k \cdot (k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} (x+2)^{k-2} = [\textbf{Pongo } h = k-2] =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} (x+2)^h = \frac{1}{1-(x+2)} = -\frac{1}{1+x}$$

Una volta calcolato il valore a cui la serie converge, notiamo come la derivata seconda $f''(x)$ sia **riscrivibile** anche nella seguente forma

$$f''(x) = -\frac{1}{1+x} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

Dunque, possiamo formulare la seguente **eguaglianza**

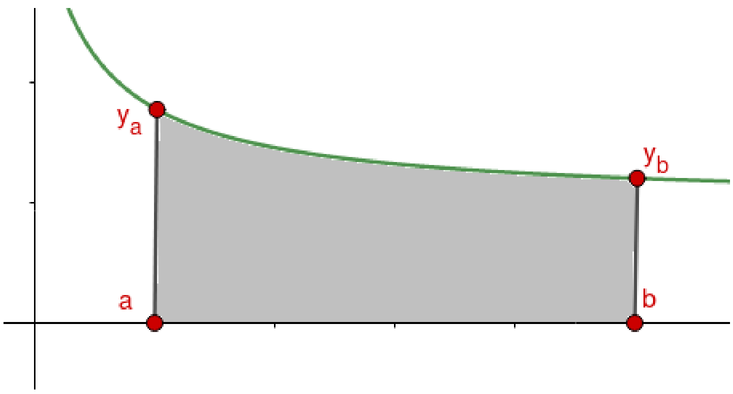
$$\sum_{h=0}^{\infty} (x+2)^h = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

# Capitolo 2

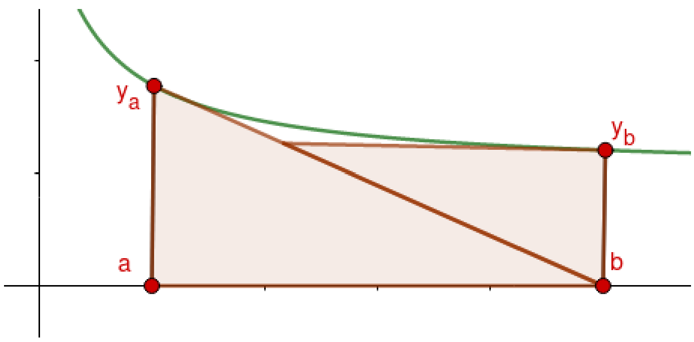
# Integrali

## 2.1 Definizione geometrica

Per introdurre il concetto di **integrale di una funzione**, vediamone prima la sua definizione in **ambito geometrico**. Immaginiamo di trovarci nella seguente situazione: vogliamo calcolare l'**area della figura sottostante alla funzione** $f(x)$ **nell'intervallo** $[a, b]$

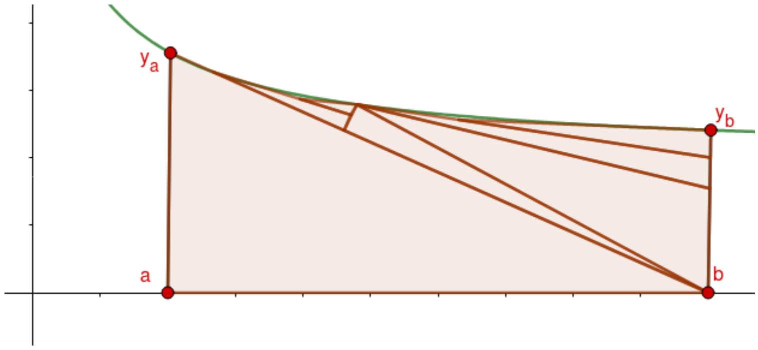



Notiamo però che tale figura **non corrisponde ad un poligono,** ne tanto meno ad una figura geometricamente nota. Come possiamo dunque calcolarne l'area senza poter applicare una formula precisa? Potremmo pensare di **scomporre la figura in dei poligoni** di cui possiamo effettivamente calcolare l'area, per poi **sommare tutte le aree calcolate** ed ottenere l'area della figura. Proviamo quindi a scomporre l'area in **due triangoli**.



Essendo il lato superiore della figura **curvilineo**, non siamo in grado di trovare una **scomposizione perfetta** della figura che possa coprire l'area originale nel suo totale.

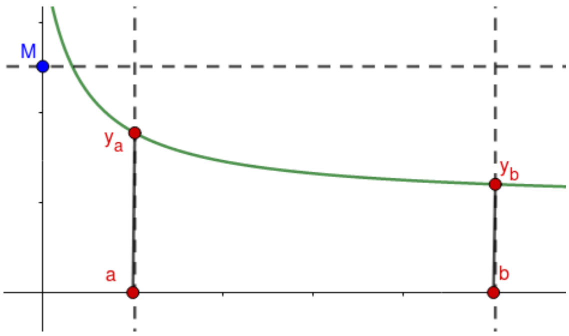
L'unica via, quindi, è stimare l'area della figura tramite una **serie di approssimazioni**: se scomponessimo l'area in una **quantità elevata di triangolini** potremmo arrivare a lasciare scoperta una minuscolissima parte della figura, rendendo la somma delle aree **estremamente vicina all'area effettiva** della figura.




Rimane tuttavia un problema fondamentale, ossia il *come calcolare* tali aree dei triangoli. Notiamo come non è presente un **rigore matematico** in tale approccio, poiché ogni triangolo è estremamente diverso dall'altro, risultando anche nella presenza di alcuni rettangoli non retti. Stimare l'area della figura utilizzando dei triangoli, quindi, risulta estremamente **inefficiente** e di **difficoltà pari** (se non superiore) **al problema originale**.

Proviamo un nuovo approccio: proviamo a scomporre la figura in una **serie di rettangoli**, ossia la figura geometrica la cui area è la **più semplice da calcolare**. Cerchiamo inoltre di seguire un approccio **più rigoroso** rispetto alla stima precedente.

Aggiungiamo al piano la seguente retta $r(x) = M$.



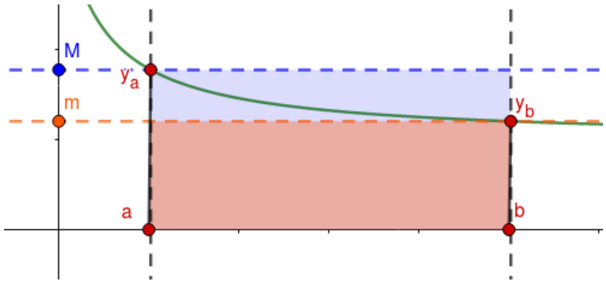

Consideriamo quindi il rettangolo di base $(b-a)$ e di altezza $M$. Tale rettangolo ha sicuramente un'area **maggiore** rispetto all'area che stiamo cercando. Consideriamo inoltre il rettangolo di base $(b-a)$ e di altezza 0. Tale rettangolo ha sicuramente un'area **minore** dell'area che stiamo cercando. Possiamo quindi definire la seguente disequazione:

$$0 \cdot (b-a) \leq A \leq M \cdot (b-a)$$

dove $A$ è l'**area della figura**.

Attualmente, la stima dell'area della figura risulta estremamente incorretta. Proviamo quindi ad affinare la nostra stima.

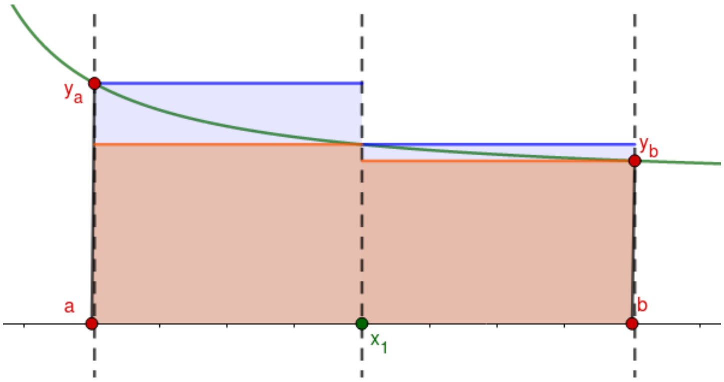
Aggiungiamo al piano una seconda retta $r(x) = m$, dove $m = min(y_a, y_b)$. Inoltre, "aggiorniamo" la retta precedente, ponendo $M = max(y_a, y_b)$.




Analogamente a prima, stimiamo il valore di A confrontandolo con un'**area maggiore** (ossia $M \cdot (b - a)$) e con un'**area minore** (ossia $m \cdot (b - a)$):

$$m \cdot (b - a) \leq A \leq M \cdot (b - a)$$

Notiamo però come la stima risulti ancora troppo imprecisa. Decidiamo quindi di **scomporre il problema in due figure**, raddoppiando il numero di rettangoli.




Una volta scomposto in due figure il problema, notiamo come possiamo individuare un **valore** $M$ ed un **valore** $m$ per ognuna delle **due figure**, corrispondenti ai **punti di massimo e di minimo dei due intervalli** definiti dalla scomposizione, ossia $[a, x_1]$ e $[x_1, b]$, dove $x_1$ corrisponde al **punto medio tra** $a$ **e** $b$.

- $x_1 = \frac{b-a}{2}$
- $M_0 = max_{[a,x_1]} f(x)$
- $m_0 = min_{[a,x_1]} f(x)$
- $M_1 = max_{[x_1,b]} f(x)$
- $m_1 = min_{[x_1,b]} f(x)$

A questo punto, riscriviamo nuovamente la stima di $A$, utilizzando la somma dei rettangoli minori e la somma dei rettangoli maggiori.

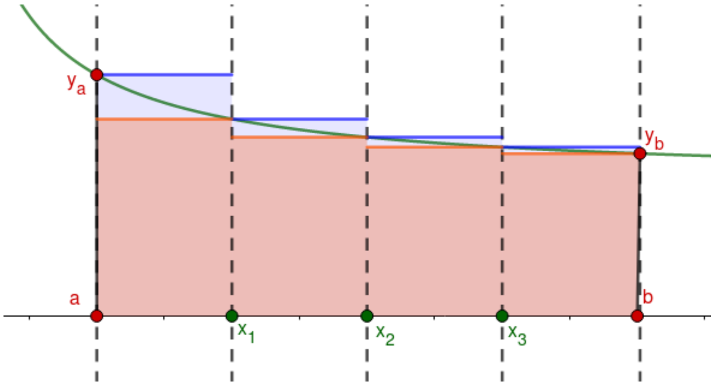
$$m_0 \cdot (b - a) + m_1 \cdot (b - a) \leq A \leq M_0 \cdot (b - a) + M_1 \cdot (b - a)$$

A questo punto, possiamo fare alcuni accorgimenti:

- Le basi dei quattro rettangoli equivalgono tutte a $\frac{b-a}{2}$, poiché non abbiamo fatto altro che dividere l'intervallo $[a, b]$ in due
- Per via della proprietà distributiva, possiamo riscrivere ognuna delle due somme come il prodotto tra la **somma delle altezze dei rettangoli** e la **base**

$$m_0 \cdot \frac{b-a}{2} + m_1 \cdot \frac{b-a}{2} \leq A \leq M_0 \cdot \frac{b-a}{2} + M_1 \cdot \frac{b-a}{2}$$
$$\frac{b-a}{2}(m_0 + m_1) \leq A \leq \frac{b-a}{2}(M_0 + M_1)$$

L'approssimazione risulta quindi **più accurata** rispetto alla precedente. Procediamo quindi sulla stessa riga, questa volta **dividendo l'intervallo in quattro**.




A questo punto, è facile rendersi conto che questa volta la stima corrisponderà a

$$\frac{b-a}{4}(m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \leq A \leq \frac{b-a}{4}(M_0 + M_1 + M_2 + M_3)$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{b-a}{2^2} \cdot \sum_{k=0}^{2^2-1} m_k \leq A \leq \frac{b-a}{2^2} \cdot \sum_{k=0}^{2^2-1} M_k$$

ricordando che $M_k$ e $m_k$ corrispondono rispettivamente al **massimo e al minimo dell'k-esimo intervallo**.

Possiamo quindi definire la seguente **forma generalizzata**:

$$\frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k,x_{k+1}]} f(x) \leq A \leq \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k,x_{k+1}]} f(x)$$

dove $n$ corrisponde al **numero di suddivisioni** e ogni $x_k$ corrisponde a

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{2}$$

Facciamo ora alcune osservazioni: dando un rapido sguardo ai grafici delle ultime tre approssimazioni, notiamo come all'aumentare del numero degli intervalli la **somma dei rettangoli maggiori**, che d'ora in poi chiameremo $\overline{S_n}$, vada man mano a **diminuire**, mentre la **somma dei rettangoli minori**, che d'ora in poi chiameremo $\underline{S_n}$, vada man mano ad **aumentare**.

$$\underline{S_n} \leq \underline{S_{n+1}} \leq ... \leq A \leq ... \leq \overline{S_{n+1}} \leq \overline{S_n}$$

Immaginiamo ora di suddividere la figura un numero infinito di volte. Intuitivamente, riusciamo a concludere che l'**errore nella stima** si riduca ad un valore **infinitesimale**, così come la **differenza tra $\underline{S_n}$ e $\overline{S_n}$**.

$$\lim_{n\to+\infty} \underline{S_n} = \underline{S}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \overline{S_n} = \overline{S}$$

$$\underline{S} = A = \overline{S}$$

Dunque, possiamo concludere che effettuando il limite per $n \to +\infty$, le somme $\underline{S_n}$ e $\overline{S_n}$ **convergano al valore dell'area** $A$. Se $f(x)$ è una funzione su cui può essere applicato tale concetto, allora si dice che $f$ è **integrabile secondo Riemann**.

**Definition 10. Integrazione secondo Riemann**

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si dice che $f$ è **integrabile secondo Riemann** se dati

- Il limite per $n \to +\infty$ della somma $\underline{S_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = \underline{S}$$

- Il limite per $n \to +\infty$ della somma $\overline{S_n}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = \overline{S}$$

si verifica che

$$\underline{S} = \overline{S}$$

L'**integrale definito nell'intervallo** $[a, b]$ **di** $f(x)$ viene denominato con

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

### Esempi

Vediamo ora alcuni esempi di calcolo di un integrale utilizzando la sua definizione geometrica:

1. Si calcoli l'integrale definito in $[0, 1]$ di $f(x) = 2$

$$\int_0^1 2\ dx$$

   - Prima di tutto, è necessario individuare il massimo e il minimo di ogni intervallo in cui andremo a suddividere la figura. Ovviamente, trattandosi di una funzione costante, il **massimo** e il **minimo** avranno sempre valore 2 indipendentemente dall'intervallo.

$$min_{[x_k,x_{k+1}]}f(x) = 2$$
$$max_{[x_k,x_{k+1}]}f(x) = 2$$

   - Calcoliamo ora i valori di $\overline{S}$ e $\underline{S}$

$$\underline{S} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k,x_{k+1}]}f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-0}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} 2 =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2(2^n - 1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^+1 - 2}{2^n} = 2$$

$$\overline{S} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k,x_{k+1}]}f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-0}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} 2 =$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2(2^n - 1) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^+1 - 2}{2^n} = 2$$

   - Concludiamo quindi che

$$\int_0^1 2\ dx = 2$$

   - Ovviamente, tale calcolo risulta corretto, poiché l'area richiesta corrisponde esattamente ad un rettangolo di base pari ad 1 ed altezza pari a 2.

2. Si calcoli l'integrale definito in $[0,1]$ di $f(x)=x$

$$\int_0^1 x\ dx$$

- Poiché la funzione $f(x)=x$ è una funzione **monotona crescente**, il minimo dell'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ corrisponde sempre al valore assunto dalla funzione nel suo estremo sinistro, ossia $f(x_k)$, mentre il massimo dell'intervallo corrisponderà sempre al valore assunto nel suo estremo destro, ossia $f(x_{k+1})$.

$$min_{[x_k,x_{k+1}]}f(x)=f(x_k)=a+k\frac{b-a}{2^n}=\frac{k}{2^n}$$
$$max_{[x_k,x_{k+1}]}f(x)=f(x_{k+1})=a+(k+1)\frac{b-a}{2^n}=\frac{k+1}{2^n}$$

- Calcoliamo ora i valori di $\overline{S}$ e $\underline{S}$

$$\underline{S}=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}min_{[x_k,x_{k+1}]}f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-0}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{k}{2^n}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}k=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{(2^n-1)\cdot 2^n}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}-2^n}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2}$$

$$\overline{S}=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}max_{[x_k,x_{k+1}]}f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-0}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{k+1}{2^n}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}(k+1)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{2^n\cdot(2^n+1)}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}+2^n}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2}$$

- Concludiamo quindi che

$$\int_0^1 x\ dx=\frac{1}{2}$$

- Ovviamente, tale calcolo risulta corretto, poiché l'area richiesta corrisponde esattamente ad un triangolo di base pari ad 1 ed altezza pari a 1.

*Nota: all'interno dei calcoli è stato omesso il calcolo della sommatoria poiché è stata usata seguente la sommatoria notevole*

$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

3. Si calcoli l'integrale definito in $[0,2]$ di $f(x) = x^2$

$$\int_0^2 x^2 \, dx$$

- Poiché la funzione $f(x) = x^2$ è una funzione **monotona crescente**, il minimo dell'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ corrisponde sempre al valore assunto dalla funzione nel suo estremo sinistro, ossia $f(x_k)$, mentre il massimo dell'intervallo corrisponderà sempre al valore assunto nel suo estremo destro, ossia $f(x_{k+1})$.

$$min_{[x_k,x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = \left(a + k\frac{b-a}{2^n}\right)^2 = \frac{4k^2}{2^{2n}}$$

$$min_{[x_k,x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = \left(a + (k+1)\frac{b-a}{2^n}\right)^2 = \frac{4(k+1)^2}{2^{2n}}$$

- Calcoliamo ora i valori di $\overline{S}$ e $\underline{S}$

$$\underline{S} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k,x_{k+1}]} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{4k^2}{2^{2n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8}{2^{3n}} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} k^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{2^{3n}} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}(2^n-1)(2^{n+1}-1) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8}{3} \cdot \frac{2^{3n} - 2^{2n-1} - 2^{2n} + 2^{n-1}}{2^{3n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{3} \cdot \frac{2^{3n}}{2^{3n}} = \frac{8}{3}$$

$$\overline{S} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k,x_{k+1}]} f(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{4(k+1)^2}{2^{2n}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8}{2^{3n}} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} (k+1)^2 = \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{2^{3n}} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}(2^n+1)(2^{n+1}+1) =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{8}{3} \cdot \frac{2^{3n} + 2^{2n-1} + 2^{2n} + 2^{n-1}}{2^{3n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{8}{3} \cdot \frac{2^{3n}}{2^{3n}} = \frac{8}{3}$$

- Concludiamo quindi che

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \frac{8}{3}$$

*Nota: all'interno dei calcoli è stato omesso il calcolo della sommatoria poiché è stata usata seguente la sommatoria notevole*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1)$$

## 2.2 Proprietà delle funzioni integrabili

Una volta appreso il concetto di integrale, resta da chiedersi quali siano le **tipologie di funzioni integrabili** e le **proprietà** che esse possiedono.

Dopo aver visto la definizione geometrica di integrale, è facile ragionare su quali siano le tipologie di funzioni integrabili, ossia qualsiasi funzione **continua** o **monotona** (anche monotona discontinua) nell'intervallo $[a, b]$.

Come sappiamo, le funzioni che non rispettano tali caratteristiche sono poche. Infatti, sostanzialmente le uniche **funzioni non integrabili** sono delle funzioni di cui è **difficile calcolare il valore** assunto dalla funzione stessa. Esempio tipico di ciò è la **funzione di Dirichlet**, che assume valore 1 nel caso in cui $x$ sia un numero razionale e valore 0 nel caso in cui sia un numero irrazionale. Tale funzione risulta difficile da integrare poiché all'interno di un intervallo vi sono infiniti numeri razionali ed infiniti numeri irrazionali.

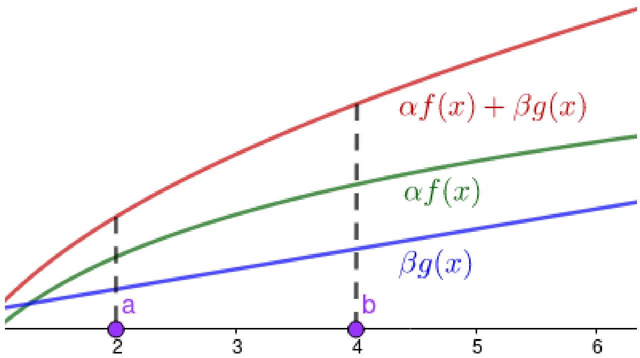
#### Proprietà degli integrali

Tenendo a mente la definizione geometrica di integrale, dunque del fatto che corrisponda esattamente all'area della funzione in un intervallo specifico, possiamo formulare alcune **proprietà** che essi rispettano in qualsiasi caso:

**Theorem 14. Linearità dell'integrale**

Date **due funzioni** $f$ **e** $g$ **integrabili** nell'intervallo $[a, b]$, la funzione $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile nell'intervallo $[a, b]$ e l'integrale equivale alla **somma dell'integrale di** $\alpha f(x)$ **e di** $\beta g(x)$ **nell'intervallo** $[a, b]$:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

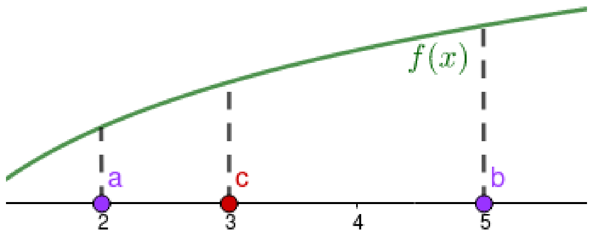



*Notiamo facilmente come la somma delle aree di $\alpha f(x)$ e $\beta g(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ corrispondano all'area di $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ nello stesso intervallo*

**Theorem 15. Additività dell'integrale**

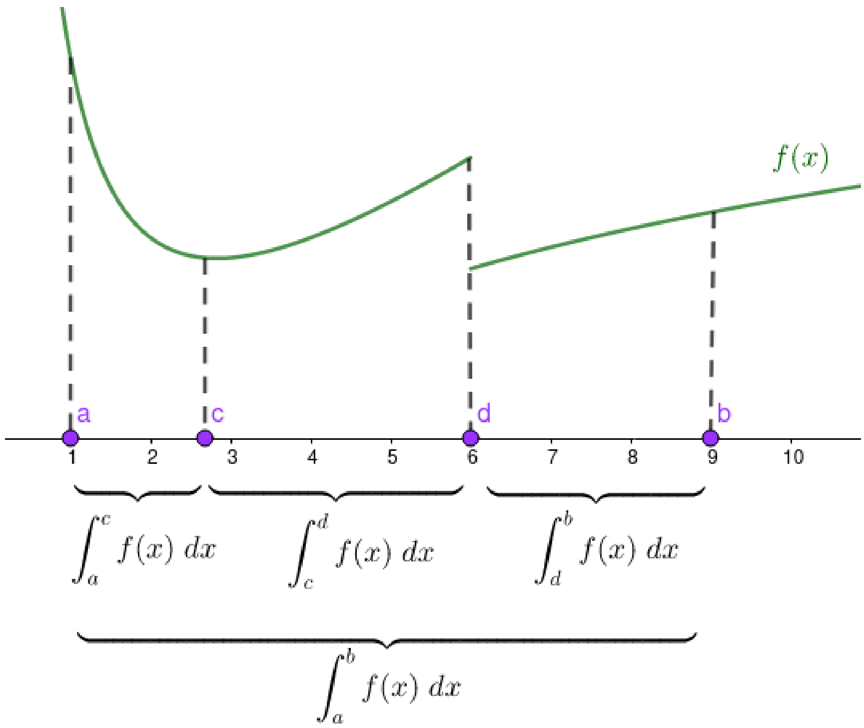
Sia $[a, b] = [a, c] \cup [c, b]$, dove $c \in [a, b]$, e sia $f$ una funzione **integrabile in** $[a, c]$ **e in** $[c, b]$. In tal caso, $f$ è integrabile in $[a, b]$ ed l'integrale equivale alla **somma tra l'integrale in** $[a, c]$ **e l'integrale in** $[c, b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$




*Tale proprietà risulta essere banale, poiché sfruttata anche nella definizione geometrica stessa di integrale*

Seppur semplice, tale proprietà ci permette di fare delle **assunzioni aggiuntive**. Immaginiamo di voler calcolare l'integrale in $[a, b]$ di una **funzione discontinua e non strettamente monotona**.




A primo impatto, ci sembra impossibile stabilire il valore assunto dall'integrale in $[a, b]$. Tuttavia, sfruttare la proprietà dell'additività dell'integrale, **spezzando il singolo integrale nella somma tra tre integrali**: uno nell'intervallo $[a, c]$, dove la funzione è

**strettamente decrescente**, uno nell'intervallo $[c, d]$, dove la funzione è **strettamente crescente**, ed uno in $[d, b]$, dove la funzione è **discontinua**.

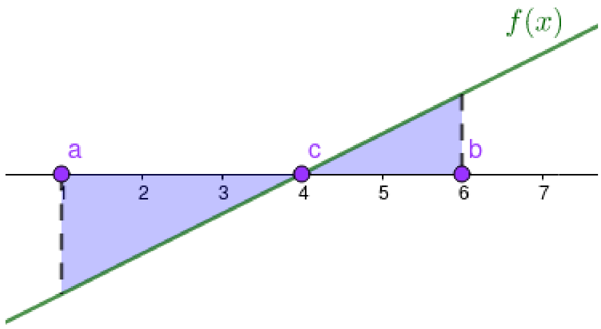
A questo punto, utilizzando il **metodo di Rienmann**, ci risulta facile calcolare i tre singoli integrali, per poi sommarli ed ottenere il valore dell'integrale in $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^d f(x)\,dx + \int_d^b f(x)\,dx$$

**Proposition 16. Integrabilità di una funzione**

Una funzione $f$ è integrabile in un intervallo $[a, b]$ se all'interno di tale intervallo presenta un **numero finito di cambi di monotonia e un numero finito di discontinuità**.

Inoltre, tale proprietà ci permette di calcolare integrali in cui la funzione **non assume valori strettamente positivi** in un intervallo.




In questo caso, l'integrale in $[a, b]$ può essere comodamente spezzato nella **somma tra l'integrale in** $[a, c]$ **e l'integrale in** $[c, b]$. Tuttavia, notiamo come nell'intervallo $[a, c]$ la funzione assuma **valori negativi**, rendendo **negativo** il risultato di tale integrale.

Di conseguenza, l'integrale in $[a, b]$ corrisponderebbe alla **somma tra un'area negativa ed un'area positiva**, risultando in un calcolo errato. Dunque, è necessario **negare l'integrale in** $[a, c]$, in modo da ottenere la somma effettiva tra le due aree.

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

**Proposition 17. Integrale con valori negativi**

Se una funzione $f$ assume **valori negativi** $\forall x \in [x_1, x_2]$ e viene integrata in tale intervallo, allora è necessario **negare il risultato** dell'integrale.

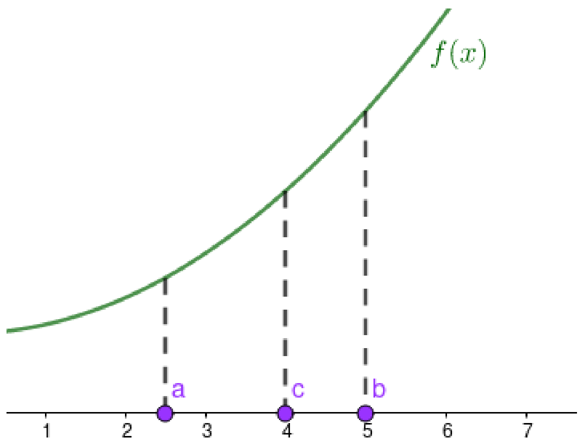
Fino ad ora abbiamo visto solo casi in cui abbiamo integrato una funzione in un intervallo $[a, b]$ dove $a < b$. Ma cosa accade se **invertiamo i due estremi** di un integrale? A livello quantitativo, il risultato non cambierà, poiché la **quantità di area** sottostante alla funzione sarà sempre la stessa. Tuttavia, ciò che **cambierà sarà il segno del risultato**, ottenendo una versione negata dell'integrale originale.

**Theorem 18. Inversione dell'intervallo di integrazione**

Se $f$ è una funzione integrabile in $[a, b]$ dove $a < b$, allora vale che

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Infine, l'ultima proprietà degli integrali prevede il **calcolo di un'area tramite la differenza tra due aree**. Consideriamo la seguente situazione: vogliamo calcolare l'integrale in $[c, b]$ della seguente funzione




In questo caso, ci viene naturale affermare che l'integrale in $[c, b]$ corrisponde esattamente alla **differenza tra l'integrale in** $[a, b]$ **e l'integrale in** $[a, c]$.

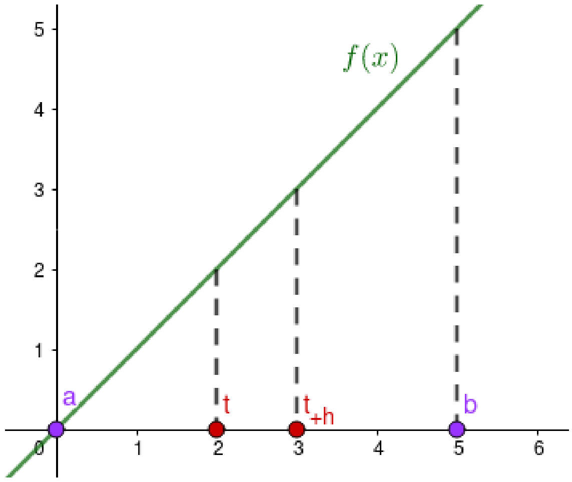
**Theorem 19. Differenza tra integrali**

Sia $[a, b]$ un intervallo e sia $c \in [a, b]$. Se $f$ è una funzione integrabile in $[a, b]$, allora l'integrale di $f$ in $[c, b]$ è esprimibile come

$$\int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^c f(x)\,dx$$

## 2.3 Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Riprendiamo ora il discorso del calcolo dell'integrale della funzione $f(x) = x$.




Vogliamo calcolare l'integrale di $f$ nell'intervallo $[t, t+h]$. Scegliamo quindi di utilizzare l'ultima proprietà degli integrali discussa nella sezione precedente, ossia la**differenza tra integrali**.

$$\int_t^{t+h} x \; dx = \int_0^{t+h} x \; dx - \int_0^t x \; dx$$

Poiché le aree al di sotto di $f(x) = x$ corrispondono a dei **triangoli**, possiamo *"barare"* e calcolarci velocemente tali aree:

$$\int_t^{t+h} x \; dx = \int_0^{t+h} x \; dx - \int_0^t x \; dx = \frac{(t+h)\cdot(t+h)}{2} - \frac{t \cdot t}{2}$$

Notiamo come le aree calcolate corrispondono sono valide per qualsiasi valore di $t$. Definiamo quindi una **funzione ausiliaria** $F(x)$ corrispondente a **qualsiasi integrale di** $f(x) = x$ **in un intervallo** $[0, t]$.

$$F(t) = \int_0^t x \; dx = \frac{t^2}{2}$$

Dunque, riscriviamo l'integrale precedente come

$$\int_t^{t+h} x \; dx = F(t+h) - F(t) = \frac{(t+h)^2}{2} - \frac{t^2}{2}$$

Arrivati a questo punto, ci chiediamo quale sia il **limite del rapporto incrementale** (dunque la **derivata**) di tale funzione ausiliaria, in modo da sapere quanto il suo valore cambi al variare del suo argomento.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{(t+h)^2}{2}}{h} = t$$

Notiamo quindi come la **derivata di** $F(x)$ corrisponda esattamente al **valore stesso di** $t$. Difatti, ragionando graficamente, riducendo al limite la distanza tra il punto $t$ e il punto $t+h$ (dunque calcolando la derivata), ciò che otteniamo non è altro che l'**"altezza" di un rettangolo di base infinitesimale**, poiché

- $F(t+h) - F(t)$ corrisponde all'**area** di $f(x)$ nell'intervallo $[t, t+h]$
- $h$ corrisponde alla **base** di tale area
- Dunque il limite del rapporto incrementale sarà

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{Area}{Base} = Altezza$$

Tuttavia, sappiamo anche che t**ale altezza corrisponde esattamente a** $f(t)$. Dunque, la **derivata della funzione ausiliaria in** $t$ corrisponde esattamente al **valore della funzione originale in** $t$**.**

$$F'(t) = f(t)$$

**Theorem 20. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale**

Se $F(t)$ è la funzione ricavata dall'integrale di $f(x)$ in $[0, t]$, allora $F'(t) = f(t)$.

$$F(t) = \int_0^t f(x)\, dx$$

$$F'(t) = f(t)$$

Possiamo quindi informalmente affermare che **l'integrale corrisponde all'operazione matematica inversa della derivata**.

Tornando all'esempio con $f(x) = x$, difatti, notiamo come la funzione $F(x)$ corrisponda esattamente ad una funzione la cui derivata coincide esattamente con $f(x)$.

Tale **teorema fondamentale** ci permette di calcolare con estrema facilità il valore di un qualsiasi integrale di una funzione definito in un certo intervallo, limitando il calcolo al **dover trovare il valore assunto dalla funzione la cui derivata coincide con** $f(x)$ **negli estremi** $a$ **e** $b$.

Per comodità, rappresenteremo i calcoli nel seguente formato

$$\int_a^b f(x)\, dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

**Esempi**

- Consideriamo il seguente integrale

$$\int_0^2 x^2 \; dx$$

  - Prima di tutto cerchiamo quale sia la funzione $F(x)$ la cui derivata coincide con $f(x)$. Ricordando le regole di derivazione, riusciamo a ricavare che

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 \Longrightarrow F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} = x^2 = f(x)$$

  - Dunque il valore dell'integrale sarà

$$\int_0^2 x^2 \; dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{8}{3}$$

- Consideriamo il seguente integrale

$$\int_2^8 x^2 + 5x \; dx$$

  - Cerchiamo la funzione $F(x)$ la cui derivata coincide con $f(x)$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

  - Dunque il valore dell'integrale sarà

$$\int_2^8 x^2 + 5x \; dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right]_2^8 = \frac{1}{3} \cdot 8^3 + \frac{5}{2} \cdot 8^2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{5}{2} \cdot 2^2 = 318$$

- Consideriamo il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x) \; dx$$

  - Cerchiamo la funzione $F(x)$ la cui derivata coincide con $f(x)$

$$F(x) = sin(x)$$

  - Dunque il valore dell'integrale sarà

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x) \; dx = [sin(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - sin(0) = 1$$