SAPIENZA
UNIVERSITÀ DI ROMA

UNIVERSITÀ "SAPIENZA" DI ROMA
FACOLTÀ DI INFORMATICA

Algebra

Appunti integrati con il libro "Geometria analitica con elementi di Algebra lineare", M. Abate, C. De Fabritiis

Author
Simone Bianco

25 febbraio 2023

Indice

Capitolo 0

Introduzione

Il seguente corso mira all'apprendimento dei principali elementi di Algebra Elementare, Algebra Lineare e Teoria dei Gruppi, incentrandosi principalmente su:

- **Insiemi**, partizioni, applicazioni, **relazioni** d'equivalenza e d'ordine, permutazioni. I numeri naturali e il **principio di induzione**. Il teorema binomiale.
- **Strutture algebriche**: Gruppi, anelli e campi, reticoli, sottostrutture, omomorfismi . Anelli di polinomi. L'algoritmo di Euclide. Classi resto modulo un intero. Congruenze ed equazioni in Z/n. Il teorema di Eulero-Fermat.
- **Sistemi di equazioni lineari**: algoritmo di Gauss, determinante di una matrice quadrata. Matrice inversa. Rango di una matrice: Il teorema di Cramer ed il teorema di Rouche-Capelli. Risoluzione di sistemi lineari omogenei.
- **Spazi vettoriali**: dipendenza e indipendenza lineare, basi. Matrici. Applicazioni lineari e loro rappresentazione: cambiamenti di base, diagonalizzazione di un operatore lineare. Polinomio caratteristico e relativa invarianza.
- **Elementi di teoria dei gruppi**: Gruppi ciclici, periodo di un elemento di un gruppo. Classificazione dei gruppi ciclici. Classi laterali modulo un sottogruppo. Il teorema di Lagrange e le sue conseguenze, sottogruppi normali. Il teorema fondamentale di omomorfismo tra gruppi.

Prima di approcciarsi al seguente corso, è consigliato avere una conoscenza sufficiente dei concetti espressi nel corso di ***Metodi Matematici per l'Informatica***.

Capitolo 1

Strutture algebriche principali

1.1 Richiami di insiemistica

Definiamo **insieme** una collezione di elementi su cui vengono svolte delle **operazioni algebriche**.

$$S : \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$$

In questo corso tratteremo molto le proprietà e le operazioni applicabili sulle varie **strutture algebriche** rappresentate tramite insiemi, pertanto effettuiamo un breve ripasso di **teoria degli insiemi**:

- Dati due insiemi A, B, definiamo l'**insieme unione** $A \cup B$ come l'insieme dove

$$A \cup B : \{x \in A \vee x \in B\}$$

- Definiamo invece come **insieme intersezione** $A \cap B$ l'insieme dove

$$A \cap B : \{x \in A \wedge x \in B\}$$

- Considerato un insieme B, affermiamo che l'insieme B è **sottoinsieme** dell'insieme A (denotato come $B \subseteq A$) se si verifica che

$$B \subseteq A \iff x \in B \implies x \in A$$

- Considerato un insieme X e un insieme A tale che $A \subseteq X$, denotiamo l'**insieme complementare** di A su X come

$$X - A = \{x \in X \mid x \notin A\}$$

- La **legge di De Morgan** afferma che

$$X - (A \cup B) = (X - A) \cap (X - B)$$

$$X - (A \cap B) = (X - A) \cup (X - B)$$

- Dato un insieme di partenza detto **dominio** ed un insieme di arrivo detto **codominio**, definiamo come **funzione** la relazione che associa ogni elemento del dominio ad un elemento del codominio

$$f : X \to Y : x \mapsto y$$

- Definiamo come **immagine della funzione** l'insieme di tutti gli elementi del codominio raggiungibili da un elemento del dominio

$$Im(f) = \{y \in Y \mid f(x) = y, \exists x \in X\}$$

- Una funzione viene detta **iniettiva** se ogni elemento del dominio è associato ad un elemento diverso del codominio

$$\texttt{Iniettività} : \forall x_1, x_2 \in X \mid x_1 \neq x_2 \implies f(x_1) \neq f(x_2)$$

- Una funzione viene detta **suriettiva** se ogni elemento del codominio è raggiungibile da almeno un elemento del dominio

$$\texttt{Suriettività} : \forall y \in Y, \exists x \in X \mid f(x) = y$$

  In alternativa, potremmo affermare che una funzione è suriettiva se la sua immagine coincide con il suo codominio

$$\texttt{Suriettività} : Im(f) = Y$$

- Una funzione viene detta **biettiva** (o biunivoca) se è sia iniettiva sia suriettiva. Se esiste una funzione biettiva tra due insiemi X ed Y, allora tali insiemi possiedono la **stessa cardinalità**

$$\exists f : X \to Y \mid f \text{ è biettiva} \implies |X| = |Y|$$

- Definiamo come **prodotto cartesiano** di due insiemi X e Y l'insieme contenente tutte le coppie (x, y) dove $x \in X$ e $y \in Y$

$$X \times Y : \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

- Date due funzioni f, g, la loro **funzione composta** è una funzione che associa un elemento del dominio di f ad un elemento del codominio di g

$$f : X \to Y : x \mapsto f(x)$$
$$g : Y \to Z : x \mapsto g(x)$$
$$g \circ f : X \to Z : x \mapsto g(f(x)) : x \mapsto (g \circ f)(x)$$

1.2 Operazioni binarie, Assiomi e Proprietà

Definition 1. Operazione binaria

Dato un insieme S, definiamo **operazione binaria** una funzione che manda ogni coppia di elementi appartenenti ad S in S stesso.

Tale proprietà viene anche detta **assioma di chiusura**.

$$m : S \times S \to S : (x, y) \mapsto m(x, y)$$

Attenzione: per comodità di scrittura, d'ora in poi indicheremo l'applicazione di un'operazione binaria generica $m(x, y)$ come xy.

Tuttavia, tale scrittura non corrisponde all'operazione prodotto (a meno che non sia specificato), bensì corrisponde ad un semplice "segnaposto" per una qualsiasi operazione binaria.

Esempio:

- Sull'insieme $\mathbb{R}$ l'**operazione additiva**, indicata come

  $$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto x + y$$

  e l'**operazione moltiplicativa**, indicata come

  $$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} : (x, y) \mapsto xy$$

  sono entrambe operazioni binarie
- Sull'insieme $X = \{f : A \to A : a \mapsto a\}$ la **composizione tra funzioni** corrisponde ad un'operazione binaria:

  $$\circ : X \times X \to X : (g, f) \to g \circ f$$

Definition 2. Assioma di Associatività

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$, tale operazione rispetta l'**assioma di associatività** se l'ordine di applicazione di tale operazione binaria non influenza il risultato:

$$x(yz) = (xy)z = xyz, \forall x, y, z \in S$$

Esempi:

- Operazione additiva: $(x + y) + z = x + (y + z) = x + y + z, \forall x, y, z \in S$
- Operazione prodotto: $(xy)z = x(yz) = xyz, \forall x, y, z \in S$

Definition 3. Assioma di esistenza dell'Elemento neutro

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$, tale operazione rispetta l'**assioma di esistenza dell'elemento neutro** se esiste un unico elemento $e \in S$, detto neutro, tale che:

$$xe = ex = x, \forall x \in S$$

Dimostrazione unicità:

- Supponiamo che

$$\exists e_1, e_2 \in S \mid e_1 x = x e_1 = x \wedge e_2 x = x e_2 = x, \forall x \in S$$

- Di conseguenza, si ha che

$$e_1 = e_1 e_2 = e_2 e_1 = e_2 \iff e_1 = e_2$$

□

Esempi:

- Operazione additiva: $x + 0 = x, \forall x \in S$
- Operazione prodotto: $x \cdot 1 = x, \forall x \in S$

Definition 4. Assioma di esistenza dell'Elemento inverso

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$, tale operazione rispetta l'**assioma di esistenza dell'elemento inverso** se esiste un unico elemento $x^{-1} \in S$, detto inverso, tale che:

$$xx^{-1} = x^{-1}x = e, \forall x \in S$$

Attenzione: con la scrittura x^{-1} indichiamo l'elemento inverso di x rispetto all'operazione binaria definita, non il "classico" inverso del prodotto (ossia $\frac{1}{x}$)

Dimostrazione unicità:

- Supponiamo che

$$\exists x_1^{-1}, x_2^{-1} \in S \mid x x_1^{-1} = x_1^{-1} x = e \wedge x x_2^{-1} = x_2^{-1} x = e, \forall x \in S$$

- Di conseguenza, si ha che

$$x_1^{-1} x = e = x_2^{-1} x \iff x_1^{-1} x = x_2^{-1} x \iff x_1^{-1} = x_2^{-1}$$

□

Esempi:

- Operazione additiva: $x + (-x) = 0, \forall x \in S$
- Operazione prodotto: $x \cdot \frac{1}{x} = 1, \forall x \in S$

Definition 5. Assioma di Commutatività

Data un'operazione binaria $m : S \times S \to S$, tale operazione rispetta l'**assioma di commutatività** se l'ordine degli elementi su cui viene applicata tale operazione non influenza il risultato:

$$xy = yx, \forall x, y \in S$$

Esempi:

- Operazione additiva: $x + y = y + x, \forall x \in S$
- Operazione prodotto: $xy = yx, \forall x \in S$

1.3 Semigruppi, Monoidi e Gruppi

Una volta definiti i quattro assiomi principali delle operazioni binarie, possiamo definire le seguenti quattro **strutture algebriche**:

Definition 6. Strutture algebriche semplici

Data la coppia (S, m) dove S è un **insieme** e m l'**operazione binaria** applicata su di esso, diciamo che tale **struttura algebrica** è un:

- Un **semigruppo** se vale l'assioma di associatività
- Un **monoide** se valgono gli assiomi di d'associatività e di elemento neutro
- Un **gruppo** se valgono gli assiomi di associatività, elemento neutro e elemento inverso
- Un **gruppo abeliano** (o commutativo) se valgono gli assiomi di associatività, elemento neutro, elemento inverso e commutatività

Esempi:

- $(\mathbb{N} - \{0\}, +)$ è un **semigruppo**
- $(\mathbb{N}, +)$ è un **monoide** commutativo
- $(\mathbb{R}, \cdot)$ è un **gruppo abeliano**
- $(\mathbb{Z}, \cdot)$ è un **monoide** commutativo
- Dati due insiemi X, Y, denotiamo con Y^X l'insieme composto da tutte le funzioni da X in Y

  $$Y^X : \{f : X \to Y\}$$

  Allora, la coppia $(X^X, \circ)$ è un monoide, poiché si ha:

  – **Associatività**:

  $$f, g, h \in X^X \implies h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

– **Elemento neutro**:

$$\exists \mathtt{id} \in X^X \mid \forall f \in X^X, f \circ \mathtt{id} = \mathtt{id} \circ f = f$$

dove $\mathtt{id}$ è la funzione identità, ossia $\mathtt{id}(x) = x, \forall x \in X$.

1.4 Anelli e Campi

Definition 7. Anello

Date le due operazioni binarie di somma e prodotto, definite come:

$$+ : A \times A \to A : (x, y) \mapsto xy$$

$$\cdot : A \times A \to A : (x, y) \mapsto x + y$$

Definiamo una struttura algebrica $(A, +, \cdot)$ come **anello** se:

- $(A, +)$ è un **gruppo abeliano**
- $(A, \cdot)$ è un **monoide**
- Vale la **relazione distributiva**, definita come:

$$a(b + c) = ab + ac, \forall a, b, c \in A$$

$$(b + c)a = ba + ca, \forall a, b, c \in A$$

Inoltre, definiamo tale struttura come **anello commutativo** se nella coppia $(A, \cdot)$ vale anche l'assioma **commutativo**:

$$ab = ba, \forall a, b \in A$$

Observation 1

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello. Dato l'elemento neutro della somma $0 \in A$, si ha che:

$$a \cdot 0 = 0, \forall a \in A$$

Dimostrazione:

- Dato un elemento $a \in A$ si ha che:

$$a = a \cdot 1 = a \cdot (0 + 1) = a \cdot 0 + a \cdot 1 = a \cdot 0 + a \iff$$

$$\iff a = a \cdot 0 + a \iff a + (-a) = a \cdot 0 + a + (-a) \iff 0 = a \cdot 0$$

□

Observation 2

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello. Dati due elementi $x, y \in A$, si ha che:

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}, \forall a \in A$$

Dimostrazione:

- Dati due elementi $x, y \in A$ si ha che:

$$(xy)^{-1}(xy) = 1 \iff (xy)^{-1}xy = 1 \iff (xy)^{-1}xyy^{-1} = y^{-1} \iff$$

$$\iff (xy)^{-1}x = y^{-1} \iff (xy)^{-1}xx^{-1} = y^{-1}x^{-1} \iff (xy)^{-1} = 1y^{-1}x^{-1}$$

□

Corollary 1

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello commutativo. Dati due elementi $x, y \in A$, si ha che:

$$(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} = x^{-1}y^{-1}, \forall a \in A$$

Definition 8. Campo

Definiamo una struttura algebrica $(K, +, \cdot)$ come **campo** se:

- $(K, +)$ è un **gruppo abeliano**
- $(K - \{0\}, \cdot)$ è un **gruppo abeliano**

Esempi:

- $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ è un **anello commutativo**
- $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ è un **campo**
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ è un **campo**

1.5 Sottogruppi ed Ideali

Definition 9. Sottogruppo

Sia $(G, \cdot)$ un gruppo. Definiamo $(H, \cdot)$ come **sottogruppo** di G, indicato come $H \leqslant G$, se:

- $e \in H$, dove e è l'elemento neutro di G
- $x, y \in H \implies xy \in H$
- $x \in H \implies x^{-1} \in H$

Attenzione: ricordiamo che con $\cdot$ intendiamo una qualsiasi operazione binaria

Esempi:

- $(\mathbb{Z}, +) \leqslant (\mathbb{Q}, +) \leqslant (\mathbb{R}, +) \leqslant (\mathbb{C}, +)$
- $(\mathbb{Z} - \{0\}, \cdot) \not\leqslant (\mathbb{Q} - \{0\}, \cdot) \leqslant (\mathbb{R} - \{0\}, \cdot)$

Definition 10. Ideale

Sia $(A, +, \cdot)$ un anello. Definiamo $(I, +, \cdot)$ come **ideale** di A, indicato come $I \triangleleft A$, se:

- $(I, +) \leqslant (A, +)$
- $AI, IA \subseteq I$, dove $AI : \{ax \mid x \in I, a \in A\}$ e $IA : \{yb \mid y \in I, b \in A\}$

Attenzione: generalmente, si ha che $AI \neq IA$

Observation 3

Se A è un anello **commutativo**, anche $I \triangleleft A$ è **commutativo**. In particolare, in tal caso si ha che $AI = IA$.

Definition 11. Ideale generato da elementi

Sia A un anello commutativo e siano $a_1, \ldots, a_n \in A$. Definiamo $I(a_1, \ldots, a_n) \triangleleft A$ come **ideale generato da** $a_1, \ldots, a_n$, dove

$$I(a_1, \ldots, a_n) : \{a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n \mid b_1, \ldots, b_n \in A\}$$

Dimostrazione:

- Verifichiamo che l'elemento neutro della somma sia in $I(a_1, \ldots, a_n)$:

$$0 = a_1 \cdot 0 + \ldots + a_n \cdot 0 \in I(a_1, \ldots, a_n)$$

- Verifichiamo che $I(a_1, \ldots, a_n)$ sia chiuso rispetto alla somma:

$$x, y \in I(a_1, \ldots, a_2) \iff x = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n, y = a_1c_1 + \ldots + a_nc_n \iff$$

$$\iff x + y = a_1(b_1 + c_1) + \ldots + a_n(b_n + c_n) \implies x + y \in I(a_1, \ldots, a_n)$$

- Verifichiamo che $I(a_1, \ldots, a_n)$ sia chiuso rispetto agli inversi della somma:

$$x \in I(a_1, \ldots, a_2) \iff x = a_1b_1 + \ldots + a_n + b_n \iff$$

$$\iff -x = -a_1b_1 - \ldots - a_nb_n = a_1(-b_1) - \ldots - a_n(-b_n) \implies -x \in I(a_1, \ldots, a_n)$$

- Verifichiamo che $I(a_1, \ldots, a_n)$ sia chiuso rispetto al prodotto:

$$x \in I(a_1, \ldots, a_2) \iff x = a_1b_1 + \ldots + a_nb_n \implies c \in A \mid cx = c(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n)$$

$$\implies cx = c(a_1b_1 + \ldots + a_nb_n) = a_1(b_1c) + \ldots + a_n(b_nc) \implies cx \in I(a_1, \ldots, a_n)$$

□

Definition 12. Ideale principale

Sia A un anello commutativo. Definiamo $I(a) \triangleleft A$ come **ideale principale di A generato da** a, dove

$$I(a) = \{ax \mid x \in A\}$$

(dimostrazione analoga alla precedente)

Proposition 1. Somma tra ideali

Dato un anello commutativo A e due suoi ideali $I, J \triangleleft A$, la loro somma corrisponde a:

$$I + J : \{i + j \mid i \in I, j \in J\}$$

inoltre, si ha che $I + J \triangleleft A$

Dimostrazione:

- $I + J \leqslant A$ poiché:
  - $0 \in I, 0 \in J \implies 0 = 0 + 0 \in I + J$
  - $x, y \in I + J \iff x + y = (i_1 + j_1) + (i_2 + j_2) = (i_1 + i_2) + (j_1 + j_2) \implies x + y \in I + J$
  - $x = i + j \in I + J \iff -x = -(i + y) = (-i) + (-j), -i \in I, -j \in J \implies -x \in I + J$
- $a \in A, x \in I + J \implies ax \in I + J$, poiché:

$$a \in A \mid ai \in I, aj \in J \implies ai + aj = a(i + j) \in I + J$$

□

Proposition 2. Intersezioni tra ideali

Dato un anello commutativo A e due suoi ideali $I, J \triangleleft A$, la loro intersezione corrisponde a:

$$I \cap J : \{h \mid h \in I \land h \in J\}$$

inoltre, si ha che $I \cap J \triangleleft A$

Dimostrazione:

- $I \cap J \leqslant A$ poiché:
  - $0 \in I \land 0 \in J \implies 0 \in I \cap J$
  - $x, y \in I \cap J \implies x, y \in I \land x, y \in J \implies x+y \in I \land x+y \in J \implies x+y \in I \cap J$
  - $x \in I \land x \in J \implies -x \in I \land -x \in J \implies -x \in I \cap J$
- $a \in A, x \in I \cap J \implies ax \in I \cap J$, poiché:

$$a \in A, x \in I \cap J \implies ax \in I \land ax \in J \implies ax \in I \cap J$$

□

Proposition 3. Prodotto tra ideali

Dato un anello commutativo A e due suoi ideali $I, J \triangleleft A$, la loro prodotto corrisponde a:

$$I \cdot J : \{i_1 j_1 + i_2 j_2 + \ldots + i_n j_n \mid i_k \in I, j_h \in J\}$$

inoltre, si ha che $I \cdot J \triangleleft A$

Dimostrazione:

- $I \cdot J \leqslant A$, poiché:
  - $0 \in I \land 0 \in J \implies 0 = 0 + 0 \in I \cdot J$
  - $x = i_1 j_1 + i_2 j_2 + \ldots + i_n j_n \in I \cdot J, , y = i'_1 j'_1 + i'_2 j'_2 + \ldots + i'_n j'_n \in I \cdot J \implies x + y = i_1 j_1 + i'_1 j'_1 + \ldots + i_n j_n + i'_n j'_n \in I \cdot J$
  - $x \in I \cdot J \implies -x = x = (-i_1) j_1 + (-i_2) j_2 + \ldots + (-i_n) j_n \mid -i_k \in I, j_h \in J \implies -x \in I \cdot J$
- $a \in A, x \in I \cdot J \implies ax \in I \cdot J$, poiché:

$$a \in A, x \in I \cdot J \implies ax = (ai_1) j_1 + (ai_2) j_2 + \ldots + (ai_n) j_n \implies ax \in I \cdot J$$

□

Capitolo 2

Numeri Complessi

Introduciamo il simbolo i con cui indichiamo l'**unità immaginaria**, avente la seguente proprietà: $i^2 = -1$. Definiamo l'insieme dei **numeri complessi** come

$$\mathbb{C} : \{a + ib \mid a, b \in \mathbb{R}\}$$

ossia l'insieme delle espressioni $z = a + ib$ composte dalla somma di una **parte reale**, indicata con $Re(z) = a$, ed una **parte immaginaria**, indicata con $Im(z) = b$.

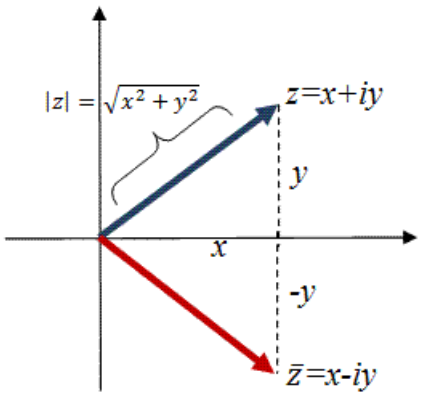
Ovviamente, da tale definizione di insieme dei numeri complessi ne segue che $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, poiché $\forall a \in \mathbb{R} \implies \exists z \in \mathbb{C} \mid z = a + i \cdot 0 = a$. Inoltre, definiamo un **numero immaginario puro** come un numero nella forma $z \in \mathbb{C} \mid z = 0 + i \cdot b = ib$.

Definition 13. Coniugato di un numero complesso

Definiamo come **coniugato di** z (indicato come $\overline{z} \in \mathbb{C}$) il numero complesso avente come parte immaginaria il valore inverso della parte immaginaria di z:

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists \overline{z} \in \mathbb{C} \mid Im(\overline{z}) = -Im(z) \implies z = a + ib, \overline{z} = a - ib$$

Poiché un numero complesso è determinato da una **coppia di valori** $a, b \in \mathbb{R} \mid z \in \mathbb{C}, z = a + ib$, possiamo rappresentare tale numero graficamente attraverso il **piano di Gauss**, avente come ascisse la **parte reale** dei numeri complessi e come ordinate la **parte immaginaria**.



Per tale motivo, dato un elemento $z \in \mathbb{C}$, definiamo come suo **valore assoluto** il numero reale corrispondente alla distanza di z stesso dall'origine, facilmente ricavabile attraverso il **teorema di Pitagora**:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Observation 4

Dati $z, w \in \mathbb{C} \mid z = a + ib, w = c + id$, la **somma dei loro coniugati** equivale al **coniugato della loro somma**

$$\overline{z} + \overline{w} = a - ib + c - id = (a - c) - i(b + d) = \overline{z + w}$$

Dati $z, w \in \mathbb{C} \mid z = a + ib, w = c + id$, il **prodotto dei loro coniugati** equivale al **coniugato del loro prodotto**

$$\overline{z} \cdot \overline{w} = (a - ib)(c - id) = (ac - bd) - i(ad + bc) = \overline{zw}$$

Dato $z \in \mathbb{C}$, il **prodotto** tra **esso** e il suo **coniugato** corrisponde al **quadrato del valore assoluto** di z

$$z \cdot \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

2.1 Il campo dei numeri complessi

Proposition 4

Dato insieme dei numeri complessi $\mathbb{C}$, si ha che $(C, +, \cdot)$ è un **campo**

Dimostrazione:

- Le operazioni binarie di somma e prodotto sono ben definite:

$$z, w \in C \implies z + w = a + ib + c + id = (a + c) + i(b + d) \implies z + w \in \mathbb{C}$$

$$z, w \in C \implies zw = (a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc) \implies zw \in \mathbb{C}$$

- Per costruzione di $\cdot$ e $+$, vale la **relazione distributiva**:

$$\forall z, w, q \in \mathbb{C} \mid z(w + q) = zw + zq$$

- È un gruppo abeliano nella somma:
  - **Associatività della somma**

$$z := a+bi, w := c+di, q := e+fi \in \mathbb{C} \implies (z+w)+q = (a+bi+c+di)+e+fi$$

$$= a + bi + c + di + e + fi = a + bi + (c + di + e + fi) = z + (w + q)$$

- **Elemento neutro della somma**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists! 0 \in \mathbb{C} \mid z + 0 = a + bi + 0 = a + bi = z$$

- **Elemento inverso della somma**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists! - z \in \mathbb{C} \mid z + (-z) = a + bi + (-a - bi) = 0$$

- **Commutatività della somma**

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \mid z + w = a + bi + c + di = c + di + a + bi = w + z$$

- È un gruppo abeliano nel prodotto (escludendo 0):
  - **Associatività del prodotto**

$$\forall z := a+bi, w := c+di, q := e+fi \in \mathbb{C} \implies (zw)q = [(a+bi)\cdot(c+di)]\cdot(e+fi) =$$

$$= (a + bi) \cdot (c + di) \cdot (e + fi) = (a + bi) \cdot [(c + di) \cdot (e + fi)] = z(wq)$$

  - **Elemento neutro del prodotto**

$$\forall z \in \mathbb{C}, \exists! 1 \in \mathbb{C} \mid z \cdot 1 = (a + bi) \cdot 1 = a + bi = z$$

  - **Elemento inverso del prodotto**: l'inverso $z^{-1} = \frac{1}{a+ib}$ non risulta apparire nella forma $c + id \mid c, d \in \mathbb{R}$. Riscriviamo quindi z^{-1} come:

$$z = a + ib \implies z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + i \cdot \frac{-b}{a^2 + b^2}$$

    Ponendo $c := \frac{a}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$ e $d := \frac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{R}$, otteniamo che $z^{-1} = c + id \in \mathbb{C}$. Quindi l'assioma è verificato per:

$$\forall z \in \mathbb{C} - \{0\}, \exists! z^{-1} := \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} \mid z \cdot z^{-1} = 1$$

  - **Commutatività del prodotto**

$$\forall z, w \in \mathbb{C} \mid z \cdot w = (a + bi)(c + di) = (c + di)(a + bi) = w \cdot' z$$

□

2.2 Forma polare dei numeri complessi

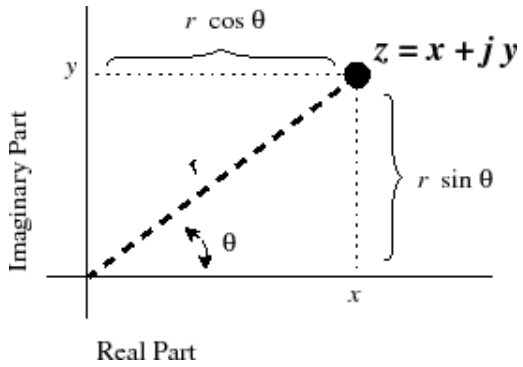
Inoltre, abbiamo visto come un numero complesso possa essere espresso come un punto sul piano gaussiano tramite una **coppia di valori**, descrivendo la distanza di tale punto dall'origine del piano $(0, 0)$ come $|z|$.

Possiamo quindi descrivere una **circonferenza di raggio** $r = |z|$ rappresentante tutti i numeri complessi aventi la stessa distanza dall'origine, dove θ corrisponde all'**arco in radianti** descritto dal **vettore** costruito attraverso le due coordinate gaussiane rappresentate da z.

Dunque, se $r = |z|$, abbiamo che:

$$r = |z| \implies \begin{cases} a = r \cdot \cos(\theta) \\ b = r \cdot \sin(\theta) \end{cases} \implies \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{r} = \frac{a}{|z|} \\ \sin(\theta) = \frac{b}{r} = \frac{b}{|z|} \end{cases}$$

Graficamente, ciò corrisponde a dire che:



Tuttavia, ricordando le proprietà delle funzioni seno e coseno, notiamo come il sistema imposto ammetta **infinite soluzioni**, poiché se θ è una soluzione allora anche $\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ è soluzione del sistema.

Per tale motivo, ogni soluzione valida viene detta **argomento di z** e, in particolare, esiste **un solo argomento principale** tale che $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Definiamo quindi come $arg(z)$ l'insieme contenente tutti gli argomenti di z, mentre definiamo come $Arg(z)$ l'argomento principale di z.

Definition 14. Forma polare dei numeri complessi

Dato un numero complesso $z := a + ib \in \mathbb{C}$, definiamo come **forma polare** di tale numero come:

$$z = r(\cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta))$$

dove $r = |z|$ e $\theta = Arg(z)$.

Utilizziamo anche la **notazione contratta**:

$$e^{i\theta} := \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$$

dunque:

$$z = re^{i\theta}$$

Giustificazione per la notazione contratta:

- Matematicamente, tramite le proprietà degli esponenti abbiamo che

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

- Svolgiamo ora tale calcolo tramite la notazione esplicita

$$(\cos(\theta_1) + i \cdot \sin(\theta_1)) \cdot (\cos(\theta_2) + i \cdot \sin(\theta_2)) =$$

$$[\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) - \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2)] + i \cdot [\cos(\theta_1) \cdot \cos(\theta_2) + \sin(\theta_1) \cdot \sin(\theta_2)] =$$

- Tramite le proprietà trigonometriche, in particolare $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$ e $\sin(a+b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$, riscriviamo tale espressione come:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2)$$

- Riscrivendo il risultato nella forma contratta, otteniamo che i due calcoli matematici risultano essere equivalenti tra di loro:

$$\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \cdot \sin(\theta_1 + \theta_2) = e^{i(\theta_1+\theta_2)}$$

L'uso di tale notazione ci permette di svolgere in modo rapido operazioni tra numeri complessi, in particolare tramite la **formula di De Moivre**:

Definition 15. Formula di De Moivre

Dato $z \in \mathbb{C}$, si ha che:

$$z = re^{i\theta} \implies z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Esempi:

1. Dato $z = -i$, calcolare z^4.
   - Calcoliamo l'argomento principale di z:

$$|z| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = 1$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{0}{1} = 0 \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{1} = -1 \end{cases} \implies Arg(z) = \frac{3}{2}\pi \implies arg(z) = Arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

   - Quindi, riscriviamo z come

$$z = re^{Arg(z)\cdot i} = e^{\frac{3}{2}\pi \cdot i}$$

   - A questo punto, z^4 corrisponderà a:

$$z^4 = e^{4\cdot\frac{3}{2}\pi\cdot i} = e^{6\pi\cdot i} = e^{0\cdot i} = 1$$

2. Dato $z = 1 - i$, calcolare z^{10}.

   - Calcoliamo l'argomento principale di z:

$$|z| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin(\theta) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{cases} \implies Arg(z) = \frac{7}{4}\pi \implies arg(z) = Arg(z) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

   - Quindi, riscriviamo z come

$$z = re^{Arg(z)\cdot i} = \sqrt{2}e^{\frac{7}{4}\pi\cdot i}$$

   - A questo punto, z^{10} corrisponderà a:

$$z^{10} = (\sqrt{2})^{10}e^{10\cdot\frac{7}{4}\pi\cdot i} = 2^5 e^{\frac{35}{2}\pi\cdot i} = 2^5 e^{(16\pi+\frac{3}{2}\pi)\cdot i} = 2^5 e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

   - Siccome abbiamo visto che $e^{\frac{3}{2}\pi i} = -i$, allora riscriviamo z^{10} come:

$$z^{10} = 2^5 e^{\frac{3}{2}\pi i} = -2^5 i$$

2.3 Teorema fondamentale dell'algebra

Considerati due numeri z e n dove $z \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, ci chiediamo quante siano le **soluzioni complesse dell'equazione** $x^n = z$. Nel caso in cui $z = 0$, l'unica soluzione risulta essere $x = 0$. Nel caso in cui $z \neq 0$, invece, esistono n **distinte soluzioni**.

Utilizzando la formula di De Moivre, possiamo riscrivere tale espressione come:

$$x^n = z \iff x = \sqrt[n]{z} \iff x = z^{\frac{1}{n}} \iff$$

$$\iff x = r^{\frac{1}{n}} e^{\frac{1}{n}\theta i}$$

Abbiamo quindi trovato **una soluzione valida** per l'equazione. Tuttavia, ricordando che un numero complesso z possiede **infiniti argomenti**, riscriviamo x come:

$$x = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})}$$

A questo punto, al variare di $k = 0, 1, \ldots, n-1$ otteniamo le n **soluzioni all'equazione**. Difatti, quando $k = n$, riotteniamo la prima soluzione dell'equazione, mentre quando $k = n + 1$ otteniamo la seconda, e così via.

Esempio:

- Dato $z = i$, vogliamo sapere le soluzioni dell'equazione $x^3 = z$.

$$x^3 = i \iff x^3 = e^{\frac{1}{2}\pi i} \iff x = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{2k\pi}{3})}$$

- Se $k = 0$

$$x_1 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi)} = e^{\frac{1}{6}\pi i}$$

- Se $k = 1$

$$x_2 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{2\pi}{3})} = e^{\frac{5}{6}\pi i}$$

- Se $k = 2$

$$x_3 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{4\pi}{3})} = e^{\frac{9}{6}\pi i} = e^{\frac{3}{2}\pi i}$$

- Se $k = 3$

$$x_4 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{6\pi}{3})} = e^{i(\frac{1}{6}\pi + 2\pi)} = e^{\frac{1}{6}\pi i} \implies x_4 = x_1$$

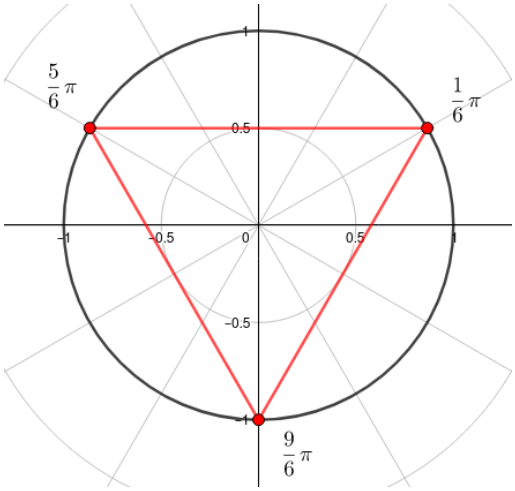
- Se $k = 4$

$$x_5 = e^{i(\frac{1}{2\cdot 3}\pi + \frac{8\pi}{3})} = e^{i(\frac{1}{6}\pi + \frac{2\pi}{3} + 2\pi)} = e^{\frac{5}{6}\pi i} \implies x_5 = x_2$$

- ...

Notiamo quindi che nonostante esistano **infiniti argomenti di z**, le soluzioni risultano essere cicliche tra di loro, risultando in solo 3 **soluzioni valide per l'equazione**.

Inoltre, graficando sul piano di Gauss le tre radici soluzioni dell'equazione, notiamo come ognuna di esse corrisponda al vertice di un triangolo equilatero iscritto in una circonferenza di raggio 1:



Observation 5

Le n radici n-esime di un numero complesso corrispondono ai vertici di un poligono regolare di n lati inscritto in una circonferenza di raggio $|z|^{\frac{1}{n}}$.

Theorem 5. Teorema fondamentale dell'algebra

Dato un polinomio $p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$ dove $a_i \in \mathbb{C}, n \geq 1, a_n \neq 0$, **esistono sempre n radici complesse** di $p(x)$:

$$\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C} \mid p(x_i) = 0$$

Capitolo 3

Relazioni e Induzione

Definition 16. Relazione

Dato un insieme X, definiamo come **relazione** R su X un **sottoinsieme del prodotto cartesiano** $X \times X$:

$$R \subseteq X \times X \iff R \subseteq \{(x, y) \mid x, y \in X\}$$

Data una coppia (x, y), se essa appartiene alla relazione R allora affermiamo ciò con la notazione $x \sim y$ (oppure con $R(x, y)$), altrimenti affermiamo che essa non appartiene alla relazione con la notazione $x \not\sim y$ (oppure con $\not R\,(x, y)$).

$$x \sim y \iff (x, y) \in R \qquad x \not\sim y \iff (x, y) \notin R$$

Definition 17. Relazione di equivalenza

Una relazione $\sim$ viene detta **relazione di equivalenza** se su di essa valgono le seguenti proprietà:

- **Riflessività**:
$$x \sim x, \forall x \in X$$
- **Simmetria**:
$$x \sim y \implies y \sim x, \forall x, y \in X$$
- **Transitività**:
$$x \sim y \land y \sim z \implies x \sim z, \forall x, y, z \in X$$

Esempi:

- La relazione di eguaglianza $a \sim b \iff a = b$ è una relazione di equivalenza
- Dato l'insieme X corrispondente ad un insieme di automobili, la relazione $a \sim b \iff$ `a ha lo stesso colore di b` è una relazione di equivalenza

Definition 18. Relazione d'ordine totale e parziale

Una relazione $\prec$ viene detta **relazione d'ordine totale** se su di essa valgono le seguenti proprietà:

- **Riflessività**:
$$x \prec x, \forall x \in X$$
- **Anti-simmetria**:
$$x \prec y, y \prec x \implies x = y, \forall x, y \in X$$
- **Transitività**:
$$x \prec y, y \prec z \implies x \prec z, \forall x, y, z \in X$$
- **Totalità**:
$$x \prec y \vee y \prec x, \forall x, y \in X$$

Se $\prec$ è una relazione che soddisfa la riflessività, l'anti-simmetria, la transitività ma non la totalità, allora tale relazione viene detta **relazione d'ordine parziale**

Esempi:

- La relazione di minor-eguaglianza $a \leq b$ è una relazione d'ordine
- Dato un insieme X, definiamo come $\mathcal{P}(X)$ l'insieme contenente tutte le parti di X (ossia i suoi sottoinsiemi)
$$\mathcal{P}(X) = \{X' \mid X' \subseteq X\}$$
La relazione $\subseteq$ su $\mathcal{P}(X)$ risulta essere una relazione d'ordine parziale, poiché:
  - Ogni sottoinsieme A è sottoinsieme di se stesso (riflessività):
$$A \subseteq A, \forall A \in \mathcal{P}(X)$$
  - Se un sottoinsieme A è sottoinsieme di B e B è sottoinsieme di A, allora ciò è possibile solo se A e B sono lo stesso sottoinsieme (anti-simmetria):
$$A \subseteq B \wedge B \subseteq A \implies A = B$$
  - Se un sottoinsieme A è sottoinsieme di B e B è sottoinsieme di C, allora anche A è sottoinsieme di C (transitività):
$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \implies A \subseteq C$$
  - Non tutti i sottoinsiemi sono confrontabili tra loro (ordine non totale). Ad esempio, se $X = \{a, b, c\}$ si ha che:
$$\{a\}, \{b, c\} \in \mathcal{P}(X) \implies \{a\} \not\subseteq \{b, c\} \wedge \{b, c\} \not\subseteq \{a\}$$

3.1 Classi di equivalenza

Definition 19. Classe di equivalenza

Sia $\sim$ relazione d'equivalenza definita su un insieme X. Dato un elemento $x \in X$, denotiamo come $[x]$ la sua **classe di equivalenza su** $\sim$, ossia l'insieme di tutti gli elementi in relazione con x:

$$[x] = \{y \in X \mid x \sim y\}$$

Observation 6

Sia $\sim$ relazione d'equivalenza definita su un insieme X. Dato un elemento $x \in X$, per riflessività della relazione $\sim$ si ha che:

$$x \sim x \iff x \in [x]$$

dunque un elemento è sempre nella sua classe di equivalenza

Definition 20. Insieme quoziente

Sia $\sim$ relazione d'equivalenza definita su un insieme X. Definiamo come **insieme quoziente di** X **su** $\sim$ l'insieme di tutte le classi di equivalenza indotte dalla relazione:

$$X/\sim: \{[x] \mid x \in X\}$$

Definition 21. Partizione di un insieme

Dato un insieme X, definiamo come **partizione di** X l'insieme $\{X_1, \ldots, X_n\}$ delle sue **parti**, ossia i suoi sottoinsiemi disgiunti tra loro la cui unione corrisponde ad X:

$$X = \bigsqcup_{i=1}^{n} X_i$$

dove $\bigsqcup$ corrisponde al simbolo di **unione disgiunta**, equivalente a:

$$X = \bigcup_{1 \le i,j \le n} X_i \text{ dove } X_i \cap X_j = \emptyset, \forall i \neq j$$

Observation 7

Data una relazione d'equivalenza $\sim$ definita su un insieme X, si verifica che:

$$x \sim y \iff [x] = [y] \qquad x \not\sim y \iff [x] \cap [y] = \emptyset$$

Dunque, **tutte le classi di equivalenza** indotte da $\sim$ sono **disgiunte tra loro**.

Dimostrazione:

- $x \sim y \implies [x] = [y]$
  - Se $x \sim y$, allora si ha che:

    $$z \in [x] \iff z \sim x \implies z \sim x, x \sim y \implies z \sim y \iff z \in [y] \implies [x] \subseteq [y]$$

  - Viceversa, siccome $x \sim y \iff y \sim x$, si ha che:

    $$w \in [y] \iff w \sim y \implies w \sim y, y \sim x \implies w \sim x \iff w \in [x] \implies [y] \subseteq [x]$$

- $[x] = [y] \implies x \sim y$
  - Se $[x] = [y]$, allora si ha che:

    $$z \in [x] = [y] \iff z \sim x, z \sim y \iff x \sim z, z \sim y \implies x \sim y$$

- $x \not\sim y \implies [x] \cap [y] = \emptyset$
  - Supponiamo per assurdo che $x \not\sim y$ e che $[x] \cap [y] \neq \emptyset$. Dunque, si ha che:

    $$[x] \cap [y] \neq \emptyset \iff \exists z \in [x] \cap [y] \iff z \in [x] \wedge z \in [y] \iff$$

    $$\iff z \sim x, z \sim y \iff x \sim z, z \sim y \implies x \sim y$$

    contraddicendo l'ipotesi iniziale, dunque $x \not\sim y \implies [x] \cap [y] = \emptyset$
- $[x] \cap [y] = \emptyset \implies x \not\sim y$
  - Supponiamo per assurdo che $[x] \cap [y] = \emptyset$ e che $x \sim y$. Dunque, si ha che:

    $$x \sim y \iff x \in [x] = [y] \implies [x] \cap [y] = [x] = [y] \neq \emptyset$$

    contraddicendo l'ipotesi iniziale, dunque $[x] \cap [y] = \emptyset \implies x \not\sim y$

□

Corollary 2

Data una relazione d'equivalenza $\sim$ definita su un insieme X, l'**insieme quoziente** $X/\sim$ è una **partizione** di X:

$$X = \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x]$$

Dimostrazione:

- Poiché tutte le classi di equivalenza appartenenti a $X/\sim$ sono disgiunte tra loro, si ha che:

  $$\bigcup_{[x] \in X/\sim} [x] = \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x]$$

- Dato $x \in X$, si ha che:

  $$x \in X \iff x \sim x \iff x \in [x] \implies x \in \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x]$$

- Viceversa, si ha che:

$$z \in \bigsqcup_{[x] \in X/\sim} [x] \implies \exists [x] \in X/\sim \mid z \in [x] \iff z \sim x \implies z \in X$$

□

Proposition 6

Dato un insieme X, una partizione $P := \{X_1, \ldots, X_n\}$ di X **induce una relazione di equivalenza** sull'insieme X

Dimostrazione:

- Definiamo la relazione $x \sim y \iff x, y \in X_i$, dove $X_i \in P$, indicante che due elementi sono in relazione se e solo se appartengono alla stessa parte della partizione.
- Verifichiamo che si tratti di una relazione di equivalenza:
  - Riflessività:
$$\forall x \in X, \exists X_i \in P \mid x \in X_i \implies x \sim x$$
  - Simmetria:
$$x \sim y \iff x, y \in X_i, \exists X_i \in X \implies y \sim x$$
  - Transitività:
$$x \sim y, y \sim z \iff x, y \in X_i \land y, z \in X_j, \exists X_i, X_j \in P \implies y \in X_i \cap X_j$$
    Poiché tutte le parti sono per definizione disgiunte tra loro, abbiamo che $y \in X_i \cap X_j \iff X_i = X_j$, dunque si ha che:
$$x \sim y, y \sim z \implies x, y \in X_i \land y, z \cap X_j \iff x, y, z \in X_i = X_j \implies x \sim z$$

□

Proposition 7. Proiezione canonica al quoziente

Una relazione di equivalenza $\sim$ su un insieme X induce una funzione suriettiva detta **proiezione canonica al quoziente** la quale mappa ogni elemento $x \in X$ alla propria classe di equivalenza su $\sim$:

$$\pi : X \to X/\sim : x \mapsto [x]$$

Dimostrazione:

- Poiché per riflessività si ha che $x \sim x \iff x \in [x]$, la funzione di proiezione π risulta essere evidentemente suriettiva:
$$x \in [x] \implies \forall [x] \in X/\sim, \exists x \in X \mid \pi(x) = [x]$$

□

3.2 Relazione di Divisore

Definition 22. Relazione di divisore

Dati due numeri naturali $m, n \in \mathbb{Z}$, definiamo la relazione "m è divisore di n", indicato come $m \mid n$, se esiste un elemento $q \in \mathbb{Z} \mid n = mq$:

$$m \mid n \iff \exists q \in \mathbb{Z} \mid n = mq$$

Attenzione: $m \mid n$ non è il simbolo matematico "tale che"

Observation 8

Dati $m, n \in \mathbb{Z}$, la relazione di divisore $m \mid n$ è una relazione **riflessiva** e **transitiva**

Dimostrazione:

- Soddisfa la **riflessività**:

$$\forall n \in Z, n = n \cdot 1 \iff n \mid n \cdot 1 \iff n \mid n$$

- Soddisfa la **transitività**:

$$m \mid n, n \mid d \iff \exists p, q \in Z \mid n = mp, d = nq \implies d = (mp)q = m(pq) \implies m \mid d$$

- Non soddisfa l'**anti-simmetria**:

$$m \mid n, n \mid m \iff \exists p, q \in Z \mid n = mp, m = nq \implies n = mp = (np)q = n(pq)$$

  A questo punto, si verificano due casi:

  - Se $n = 0$ allora

$$n = 0 \implies m = nq = 0 \cdot q = 0 \implies m = 0 \implies n = m = 0$$

  - Se $n \neq 0$ allora

$$n \neq 0 \implies n = n(pq) \implies qp = 1 \implies p = q = \pm 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} n = m & \text{se } p = q = 1 \\ n = -m & \text{se } p = q = -1 \end{cases}$$

  Dunque, non in tutti i casi la relazione è anti-simmetrica.

□

Corollary 3

Dati $m, n \in \mathbb{N}$, la relazione di divisore $m \mid n$ è una **relazione d'ordine**

Dimostrazione:

- Ovviamente, poiché $m, n \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, se segue che la relazione di divisore sia riflessiva e transitiva
- Procedendo analogamente alla dimostrazione precedente, il caso in cui $p = q = -1$ verrebbe scartato poiché $-1 \notin \mathbb{N}$, rendendo quindi $m = n$ l'unica possibilità

$$m \mid n, n \mid m, m, n \in \mathbb{N} \implies m = n$$

□

3.3 Relazione di Congruenza

Definition 23. Relazione di congruenza

Dato $a, b \in \mathbb{Z}$ e dato $n \geq 2 \in \mathbb{N}$, definiamo la relazione "a è congruente a b in modulo n", denotata come con $a \equiv b (\mathsf{mod}\ n)$, se e solo se $n \mid b - a$

$$a \equiv b (\mathsf{mod}\ n) \iff n \mid (b - a)$$

Esempi:

- $7 \equiv 22 (\mathsf{mod}\ 5) \implies n \mid b - a \implies 5 \mid (22 - 7) \implies 5 \mid 15$
- $7 \equiv 2 (\mathsf{mod}\ 5) \implies n \mid b - a \implies 5 \mid (2 - 7) \implies 5 \mid -5$

Observation 9

La relazione di congruenza $a \equiv b (\mathsf{mod}\ n)$ è una **relazione di equivalenza**.

Dimostrazione:

- **Riflessiva**:

$$a = a \iff a = n \cdot 0 + a \iff a - a = n \cdot 0 \iff n \mid a - a \iff a \equiv a (\mathsf{mod}\ n)$$

- **Simmetrica**:

$$a \equiv b (\mathsf{mod}\ n) \iff n \mid b - a \iff \exists p \in \mathbb{Z} \mid b - a = np \iff$$
$$\iff a - b = n(-p) \iff n \mid a - b \iff b \equiv a (\mathsf{mod}\ n)$$

- **Transitiva**:

$$a \equiv b (\mathsf{mod}\ n), b \equiv c (\mathsf{mod}\ \mathsf{n}) \iff \exists p, q \in \mathbb{Z} \mid b - a = np, c - b = nq \implies$$
$$\implies c - a = (c - b) + (b - a) = qn + pn = n(q + p) \iff n \mid c - a \iff a \equiv c (\mathsf{mod}\ n)$$

3.4 Teorema della divisione con resto euclidea

Theorem 8. Teorema della divisione con resto euclidea

Dati due interi $m, n \in \mathbb{Z}$ dove $n > 0$, si ha che:

$$\exists! q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n \mid m = nq + r$$

dove q viene definito come **quoziente** e r come **resto** della divisione

Dimostrazione dell'esistenza:

- Dato $[m] : \{a \in \mathbb{Z} \mid a \equiv m (\mathtt{mod}\ n)\}$, si ha che:
  $a \in [m] \iff a \equiv m (\mathtt{mod}\ n) \iff n \mid m-a \iff \exists p \in \mathbb{Z} \mid m-a = np \iff a = m-np$
- Consideriamo quindi $[m]_{\geq 0} : \{a \in [m] \mid a \in \mathbb{N}\}$. Poiché $[m]_{\geq 0} \subseteq \mathbb{N}$, per il **principio del buon ordinamento** si ha che:
  $$\exists r \in [m]_{\geq 0} \mid r \text{ è il minimo di } [m]_{\geq 0} \implies \exists q \in \mathbb{Z} \mid r = m - nq$$
- Supponiamo per assurdo che $r \geq n$, da cui ne segue che $r - n \geq 0 \implies r - n \in \mathbb{N}$. Dunque, abbiamo che:
  $$r - n = (m - nq) - n \iff r - n = m - n(q + 1) \iff r - n \in [m]_{\geq 0}$$
- Poiché $r - n \leq r$, l'ipotesi per cui r sia il minimo di $m_{\geq 0}$ viene contraddetta, dunque l'unica possibilità è che $r < n$
- Dunque, concludiamo che
  $$\exists q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < n \mid r = m - nq \implies m = nq + r$$

□

Dimostrazione dell'unicità:

- Supponiamo che q ed r non siano unici. Allora, ne segue che:
  $$\exists q_1, q_2, r_1, r_2 \in \mathbb{Z}, 0 \leq r_1, r_2 < n \mid nq_1 + r_1 = m = nq_2 + r_2 \implies$$
  $$\implies nq_1 + r_1 = nq_2 + r_2 \implies r_2 - r_1 = n(q_1 - q_2) \iff n \mid r_2 - r_1$$
- Siccome $0 \leq r_1, r_2 < n \implies -n < r_2 - r_1 < n$ e siccome $n \mid r_2 - r_1$, allora $r_2 - r_1$ deve necessariamente essere un multiplo di n compreso tra $-n$ ed n stesso.
- Poiché l'unico numero rispettante tali caratteristiche è 0, ne segue che:
  $$\begin{cases} -n < r_2 - r_1 < n \\ n \mid r_2 - r_1 \iff \exists b \in \mathbb{Z} \mid r_2 - r_1 = nb \end{cases} \iff r_2 - r_1 = 0 \iff r_2 = r_1$$
- A questo punto, poiché $n > 0$,si ha che:
  $$nq_1 + r_1 = nq_2 + r_2 \iff nq_1 + 0 = nq_2 + 0 \iff n(q_1 - nq_2) = 0 \iff q_1 = q_2$$

□

3.5 Relazione di Coniugio

Definition 24. Relazione di coniugio

Dato un gruppo G e dati $g, h \in G$, definiamo la relazione "g è coniugato di h" se si verifica che:

$$g \sim h \iff \exists a \in G \mid h = aga^{-1}$$

Observation 10

Se G è un gruppo abeliano, allora si ha che:

$$g \sim h \iff h = aga^{-1} = aa^{-1}g = g$$

Observation 11

La relazione di coniugio è una **relazione di equivalenza**.

Dimostrazione:

- **Riflessività**:

$$g = 1 \cdot g \cdot 1^{-1} \implies g \sim g$$

- **Simmetria**:

$$g \sim h \implies h = aga^{-1} \implies a^{-1}ha = a^{-1}aga^{-1}a \implies a^{-1}ha = g$$

  ponendo $b := a^{-1}$, si ha che:

$$bhb^{-1} = g \implies h \sim g$$

- **Transitività**:

$$g \sim h \land h \sim k \implies h = aga^{-1}, k = bhb^{-1} \implies k = b(aga^{-1})b^{-1} = (ba)g(a^{-1}b^{-1})$$

  ponendo $c := ba$, si ha che:

$$k = cgc^{-1} \implies g \sim k$$

□

3.6 Induzione matematica

Vogliamo dimostrare una successione di n proposizioni, etichettate come $p_1), p_2), \ldots, p_n)$. Supponiamo di aver dimostrato la proposizione $p_1)$, che denominiamo come **caso base**. Se le prime $p_1), \ldots, p_n)$ sono vere, allora anche la proposizione $p_{n+1})$ è vera (**passo induttivo**).

Per esprimere tale concetto matematicamente, possiamo dire che:

Theorem 9. Principio di induzione

Data una successione di proposizioni $p_1), \ldots, p_n)$, si ha che:

$$p_1) \implies p_2)$$

$$p_1), p_2) \implies p_3)$$

$$\ldots$$

$$p_1), \ldots, p_n) \implies p_{n+1})$$

Esempi:

1.
   - Vogliamo verificare che la proposizione seguente proposizione sia vera $\forall n \geq 1$:

   $$1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

   - Verifichiamo quindi il **caso base** $p_1)$, ossia $n = 1$

   $$1 = \frac{1(1+1)}{2} = \frac{2}{2}$$

   che risulta essere vero

   - A questo punto, assumiamo per **ipotesi induttiva** che $p_n)$ sia vera.
   - Impostiamo quindi il **passo induttivo**, ossia $p_{n+1})$:

   $$1 + 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

   - Notiamo come il **passo induttivo contenga al suo interno l'ipotesi induttiva stessa**, che abbiamo affermato essere vera:

   $$\underbrace{1 + 2 + 3 + \ldots + n}_{\text{Ipotesi induttiva}} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \iff$$

   $$\frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \iff \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

   $$\iff \frac{(n+1)(n+2)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

Dunque, anche il passo induttivo risulta essere vero, concludendo che **la proposizione** p_n) **sia valida** $\forall n \geq 1$

2. • La funzione di Fibonacci è definita come:

$$\begin{cases} F_0 = 0 & \text{se } n = 0 \\ F_1 = 1 & \text{se } n = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n+2} & \text{se } n \geq 2 \end{cases}$$

• Le costanti φ e ψ, corrispondenti alle soluzioni dell'equazione $x^2 = x + 1$, sono definite come:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad \psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

• Vogliamo verificare per induzione che la seguente proposizione sia vera $\forall n$:

$$F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

• Verifichiamo quindi p_0) e p_1:

$$F_0 = \frac{\varphi^0 - \psi^0}{\varphi - \psi} = \frac{1-1}{\varphi - \psi} = 0$$

$$F_1 = \frac{\varphi^1 - \psi^1}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi - \psi}{\varphi - \psi} = 1$$

• Assumiamo quindi per ipotesi induttiva che p_{n-1}) sia vera e verifichiamo il passo induttivo p_n, utilizzando però la definizione originale di F_n:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n+2} = \frac{\varphi^{n-1} - \psi^{n-1}}{\varphi - \psi} + \frac{\varphi^{n-2} - \psi^{n-2}}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^{n-2}(\varphi + 1) - \psi^{n-2}(\psi + 1)}{\varphi - \psi}$$

• Siccome per definizione stessa $\varphi^2 = \varphi + 1$ e $\psi^2 = \psi + 1$, allora abbiamo che:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n+2} = \frac{\varphi^{n-2}\varphi^2 - \psi^{n-2}\psi^2}{\varphi - \psi} = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\varphi - \psi}$$

verificando quindi la validità del passo induttivo

3. • Vogliamo dimostrare per induzione l'identità binomiale di Newton, definita come:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

dove il coefficiente binomiale è definito come:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

- Verifichiamo quindi il caso base:

$$1 = (a+b)^0 = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^{0-0} = 1$$

- A questo punto effettuiamo il passo induttivo:

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} = (a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n =$$

$$= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

- Trasliamo di -1 l'indice della prima sommatoria e portiamo fuori il suo ultimo termine:

$$= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= \binom{n}{n+1-1} a^{n+1} b^{n+1-(n+1)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

- Nella seconda sommatoria, invece, portiamo fuori il primo termine, in modo che gli indici di entrambe le sommatorie coincidano:

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + \binom{n}{0} a^0 b^{n-0+1} =$$

$$= a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} + b^{n+1} =$$

- A questo punto uniamo nuovamente le due sommatorie:

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n-k+1} =$$

- Per le proprietà dei coefficienti binomiali (facilmente verificabili) si ha che $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$, dunque riscriviamo la sommatoria come:

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} =$$

- A questo punto, poiché $\binom{n}{0} = \binom{n}{n+1} = 1$, riscriviamo i due termini esterni alla sommatoria in modo da poterli reinserire in essa, ottenendo il risultato cercato:

$$= \binom{n+1}{n+1} a^{n+1} + \binom{n+1}{0} b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n-k+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$$

Capitolo 4

Elementi di Teoria degli Anelli

4.1 Classi laterali sinistre

Proposition 10

Sia G un gruppo e sia $H \leqslant G$ sottogruppo. Definiamo la seguente **relazione d'equivalenza**:

$$x \sim y \iff x^{-1}y \in H$$

Dimostrazione:

- **Riflessività**:

$$x \sim x \implies x^{-1}x = 1 \in H$$

- **Simmetria**:

$$x \sim y \implies h := x^{-1}y \in H \implies h^{-1} := y^{-1}x \in H \implies y \sim x$$

- **Transitività**:

$$x \sim y, y \sim z \implies h := x^{-1}y, k := y^{-1}z \in H \implies$$

$$\implies hk = x^{-1}yy^{-1}z = x^{-1}z \implies x^{-1}z \in H$$

□

Definition 25. Classi laterali sinistre

Sia G un gruppo e sia $H \leqslant G$. Definiamo come **classi laterali sinistre di H di G** le classi d'equivalenza generate dalla relazione d'equivalenza $x \sim y \iff x^{-1}y \in H$:

$$x \in G, [x] = \{y \in G \mid x \sim y\}$$

Denotiamo come G/H (letto "G modulo H") l'**insieme quoziente di tutte le classi laterali sinistre** di H in G.

Esempio:

- L'ideale principale $I(3) \triangleleft \mathbb{Z}$, genera una partizione di $\mathbb{Z}$ in tre classi laterali sinistre:

$$\mathbb{Z}/I(3) : \{[0], [1], [2]\}$$

- In particolare, notiamo che:
  - $0 \in [0]$, poiché $0 \sim 0 \iff -0+0 = 0 = 3 \cdot 0 \in I(3)$
  - $1 \in [1]$, poiché $1 \sim 1 \iff -1+1 = 0 = 3 \cdot 0 \in I(3)$
  - $2 \in [2]$, poiché $2 \sim 2 \iff -2+2 = 0 = 3 \cdot 0 \in I(3)$
  - $3 \in [3]$, poiché $3 \sim 3 \iff -3+3 = 0 = 3 \cdot 0 \in I(3)$
  - $4 \in [1]$, poiché $4 \sim 1 \iff -4+1 = -3 = 3 \cdot (-1) \in I(3)$
  - $5 \in [2]$, poiché $5 \sim 2 \iff -5+2 = -3 = 3 \cdot (-1) \in I(3)$
  - $6 \in [3]$, poiché $6 \sim 3 \iff -6+3 = -3 = 3 \cdot (-1) \in I(3)$
  - $7 \in [1]$, poiché $7 \sim 1 \iff -7+1 = -6 = 3 \cdot (-2) \in I(3)$
  - $8 \in [2]$, poiché $8 \sim 2 \iff -8+2 = -6 = 3 \cdot (-2) \in I(3)$
  - $9 \in [3]$, poiché $9 \sim 3 \iff -9+3 = -6 = 3 \cdot (-2) \in I(3)$
  - $\dots$
- Più in generale, si verifica che:

$$\mathbb{Z}/I(n) : \{[0], \dots, [n-1]\}$$

Definition 26. Insieme quoziente $\mathbb{Z}_n$

Dato $(I(n), +) \leqslant (\mathbb{Z}, +)$, l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/I(n)$ **coincide** con l'insieme quoziente $\mathbb{Z}/\equiv$.

Tale particolare insieme quoziente viene detto **insieme quoziente $\mathbb{Z}_n$**

$$\mathbb{Z}_n := \{[0], \dots, [n-1]\} = \mathbb{Z}/I(n) = \mathbb{Z}/\equiv$$

Dimostrazione:

- Come dimostrato precedentemente, si ha che $(I(n), +) \leqslant (\mathbb{Z}, +)$.
- Considerando la relazione $a \sim b \iff (-a) + b \in I(n)$ (poiché a^{-1} nell'operazione somma corrisponde a $-a$), otteniamo che:

$$a \sim b \iff -a+b = b-a \in I(n) \iff -a+b = nk, \exists k \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff n \mid b-a \iff a \equiv b (\mathsf{mod}\ n)$$

  dunque si ha che $\mathbb{Z}_n := \mathbb{Z}/I(n) = \mathbb{Z}/\equiv$

□

Observation 12

Dato un gruppo G e $H \leqslant G$, per ogni $[x] \in G/H$ si ha che:

$$[x] = xH := \{xh \mid h \in H\}$$

Dimostrazione:

- Dimostriamo che $[x] = xH$:

$$y \in [x] \iff x \sim y \iff h := x^{-1}y \in H \iff h = x^{-1}y \iff$$

$$\iff xh = xx^{-1}y \iff xh = y \in xH$$

□

4.1.1 Teorema di Lagrange

Observation 13

Dato un gruppo G e $H \leqslant G$, per ogni $[x] = xH \in G/H$ si ha che:

$$|[x]| = |xH| = |H|$$

Dimostrazione:

- Dato $x \in G$ consideriamo la funzione $\varphi : H \to xH : h \mapsto xh$
- La funzione risulta essere iniettiva poiché:

$$h, k \in H \mid \varphi(h) \neq \varphi(k) \iff xh \neq xk \iff h \neq k$$

- La funzione risulta essere suriettiva poiché per costruzione di xH si ha che:

$$\forall xh \in xH, \exists h \in H \mid \varphi(h) = xh$$

- Poiché esiste una funzione biettiva $\varphi : H \to xH$, ne segue che $|H| = |xH|$

□

Theorem 11. Teorema di Lagrange

Sia G un **gruppo finito** e sia $H \leqslant G$. In tal caso, si ha che:

$$|G| = |H| \cdot |G/H|$$

Inoltre, definiamo $[G : H] := |G/H|$ come l'**indice di H in G**

Dimostrazione:

- Poiché G/H è una partizione di G e poiché $\forall [x] \in G/H, |[x]| = |H|$:

$$G = \bigsqcup_{[x] \in G/H} [x] \implies |G| = |H| \cdot |G/H|$$

□

4.2 L'anello commutativo $\mathbb{Z}_n$

Proposition 12. Gruppo quoziente G/H

Dato il gruppo abeliano $(G, +)$ e $H \leqslant G$, si ha che $(G/H, +)$ è un **gruppo abeliano**.

Dimostrazione:

- Dimostriamo prima che l'operazione somma intesa come $[x] + [y] = [x + y]$ sia ben definita, ossia che $[x] = [x'], [y] = [y'] \implies [x + y] = [x' + y']$:

$$[x] = [x'], [y] = [y'] \iff x \sim x', y \sim y' \iff x' - x, y' - y \in H$$

  Poiché $h_1 := x' - x, h_2 := y' - y \in H$, per chiusura nella somma di H si ha che:

$$h_1 + h_2 \in H \implies (x' - x) + (y' - y) = x' - x + y' - y = x' + y' - (x + y) \in H \iff$$

$$x' + y' \sim x + y \iff [x + y] = [x' + y']$$

- Successivamente, verifichiamo gli assiomi di gruppo abeliano:
  - **Associatività**:

$$([x] + [y]) + [z] = [x + y] + [z] = [x + y + z] = [x] + [y + z] = [x] + ([y] + [z])$$

  - **Elemento neutro**:

$$[x] + [0] = [x + 0] = [x]$$

  - **Elemento inverso**:

$$[x] + [-x] = [x + (-x)] = [0]$$

  - **Commutatività**:

$$[x] + [y] = [x + y] = [y + x] = [y] + [x]$$

□

Corollary 4. Gruppo quoziente $\mathbb{Z}_n$

Poiché $\mathbb{Z}$ è un anello commutativo, $(\mathbb{Z}_n, +)$ è un **gruppo abeliano**

Esempi:

Operando nel gruppo $\mathbb{Z}_{11}$ si avrà che:

- $[9] + [8] = [17] = [6]$, poiché $17 \equiv 6 (\texttt{mod } 11)$
- $[4] + [3] = [7]$
- $[5] - [6] = [-1] = [10]$, poiché $-1 \equiv 10 (\texttt{mod } 11)$

Proposition 13. Anello quoziente G/H

Dato l'anello commutativo A e $I \triangleleft A$, si ha che $(A/I, +, \cdot)$ è un **anello commutativo**.

Dimostrazione:

- Poiché $I \leqslant A$, per dimostrazione precedente si ha che $(A/I, +)$ è gruppo abeliano
- Dimostriamo prima che l'operazione prodotto intesa come $[x][y] = [xy]$ sia ben definita, ossia che $[x] = [x'], [y] = [y'] \implies [xy] = [x'y']$:

$$[x] = [x'], [y] = [y'] \iff x \sim x', y \sim y' \iff x' - x, y' - y \in I$$

Poiché $i_1 := x' - x, i_2 := y' - y \in I$, per chiusura nel prodotto di I si ha che:

$$i_1, i_2 \in I \implies i_1 y', x i_2 \in I \implies i_1 y' + x i_2 \in I \implies$$

$$i_1 y' + x i_2 = (x' - x)y' + x(y' - y) = x'y' - xy' + xy' - xy = x'y' - xy \in I \iff$$

$$\iff x'y' \sim xy \iff [x'y'] = [xy]$$

- Successivamente, verifichiamo i rimanenti assiomi di anello commutativo
  - **Associatività nel prodotto**:

$$([x][y])[z] = [xy][z] = [xyz] = [x][yz] = [x]([y][z])$$

  - **Elemento neutro nel prodotto**:

$$[x][1] = [x \cdot 1] = [x]$$

  - **Commutatività nel prodotto**:

$$[x][y] = [xy] = [yx] = [y][x]$$

  - **Distributività**:

$$[x]([y] + [z]) = [x][y + z] = [x(y + z)] = [xy + xz] = [xy] + [xz] = [x][y] + [x][z]$$

□

Corollary 5. Anello quoziente $\mathbb{Z}_n$

Poiché $\mathbb{Z}$ è un anello commutativo, $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ è un **anello commutativo**

Esempi:

Operando nell'anello $\mathbb{Z}_4$ avremo che:

- $[2][3] = [6] = [2]$, poiché $6 \equiv 2(\texttt{mod } 4)$
- $[2][3]^{-1} = [2][3] = [4]$, poiché $[3]$ è l'inverso di $[3]$ in $\mathbb{Z}_4$ in quanto $[3][3] = [9] = [1]$

4.3 Invertibili e Divisori dello zero

Definition 27. Invertibile e Divisore dello zero

Dato un anello commutativo A e un elemento $a \in A$, definiamo a come **elemento invertibile** se e solo se

$$\exists a^{-1} \in A \mid aa^{-1}a^{-1}a = 1$$

Definiamo invece a come **divisore dello zero** se e solo se:

$$a \mid 0 \iff \exists c \neq 0 \in A \mid 0 = ac$$

Definition 28. Gruppo degli invertibili

Dato un anello commutativo $(A, +, \cdot)$, definiamo l'**insieme degli invertibili di** A come:

$$A^* := \{a \in A \mid \exists a^{-1} \in A\}$$

Inoltre, $(A^*, \cdot)$ è un **gruppo**

Dimostrazione:

- **Chiusura:**
$$x, y \in A^* \implies (xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1} \implies xy \in A^*$$
- **Associatività:**
$$x, y, z \in A^* \implies x(yz) = xyz = (xy)z$$
- **Elemento neutro:**
$$1 = 1^{-1} \in A \mid 1 \cdot 1^{-1} = 1 \cdot 1 = 1 \implies 1 \in A^* \mid a \cdot 1 = a, \forall a \in A^*$$
- **Elemento inverso:**
$$x \in A^* \implies x = (x^{-1})^{-1} \implies x^{-1} \in A^*$$

□

Observation 14

Dato un anello commutativo A e un elemento $a \in A$, se a è un **divisore dello zero** allora esso **non è invertibile**:

$$a \mid 0 \implies a \notin A^*$$

Dunque, per contronominale di tale implicazione, se a è **invertibile** allora esso **non è un divisore dello zero**:

$$a \in A^* \implies a \nmid 0$$

Dimostrazione per assurdo:

- Supponiamo che per assurdo che $a \mid 0$ e che $a \in A^*$. Allora, si ha che:

  $$a \mid 0 \iff \exists b \neq 0 \in A \mid 0 = ab \implies a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}ab \implies 0 = b$$

  contraddicendo quindi l'ipotesi iniziale $b \neq 0$, dunque l'unica possibilità è che $a \notin A^*$

□

Definition 29. Dominio di integrità

Sia A un anello commutativo. Definiamo A come **dominio di integità** se $0 \in A$ è l'unico divisore dello zero:

$$\nexists a \neq 0 \in A \text{ t.c. } a \mid 0 \iff a \nmid 0, \forall a \neq 0 \in A$$

Observation 15

Un anello commutativo A è un dominio di integrità se e solo se vale la **legge di annullamento del prodotto**:

$$\forall x, y \in A \mid xy = 0 \implies x = 0 \vee y = 0$$

Dimostrazione:

- Supponiamo per assurdo che A sia un dominio di integrità e che $\exists x, y \neq 0 \in A \mid xy = 0$, implicando che non valga la legge di annullamento del prodotto. Dunque, si ha che:

  $$xy = 0 \implies x^{-1}xy = x^{-1}0 \implies y = 0$$

  contraddicendo l'ipotesi per cui $y \neq 0$, dunque l'unica possibilità è che valga la legge di annullamento del prodotto

- Supponiamo ora per assurdo che valga la legge di annullamento del prodotto e che A non sia un dominio di integrità. Dunque, si ha che:

  $$\exists a \neq 0 \in A \text{ t.c } a \mid 0 \implies ab = 0, \exists b \neq 0$$

  Poiché vale la legge di annullamento del prodotto, si ha che

  $$ab = 0 \implies a = 0 \vee b = 0$$

Tuttavia, poiché $b \neq 0$, l'unica possibilità è che $a = 0$, contraddicendo l'ipotesi per cui $a \neq 0$. Di conseguenza, A è un dominio di integrità

□

Corollary 6

L'anello commutativo $\mathbb{Z}$ è un **dominio di integrità** poiché in esso vale la **legge di annullamento del prodotto**

Observation 16

Se K è un **campo**, allora esso è un **dominio di integrità** poiché $K^* = K - \{0\}$

Dimostrazione:

- Se K è un campo, allora

$$\forall a \neq 0 \in K, \exists a^{-1} \in K \mid aa^{-1} = 1 \iff K^* = K - \{0\}$$

- Inoltre, siccome tutti gli elementi di K escluso zero sono invertibili, si ha che:

$$\forall a \neq 0 \in K, a \in K^* \implies a \nmid 0, \forall a \neq 0 \in K$$

□

Proposition 14

Dato un **dominio di integrità** A e dati $a, b \in A$, si ha che:

$$I(a) = I(b) \iff a = bc, \exists c \in A^*$$

Dimostrazione:

- $a = bc, \exists c \in A^* \implies I(a) = I(b)$

$$a = bc, \exists c \in A^* \implies ac^{-1} = b \implies \begin{cases} a = bc \implies a \in I(b) \implies I(a) \subseteq I(b) \\ b = ac^{-1} \implies b \in I(a) \implies I(b) \subseteq I(a) \end{cases}$$

- $I(a) = I(b) \implies a = bc, \exists c \in A^*$

$$I(a) = I(b) \implies \begin{cases} a \in I(a) = I(b) \implies a = bc, \exists c \in A \\ b \in I(b) = I(a) \implies b = ad, \exists d \in A \end{cases}$$

Dunque si verifica che:

$$a = bc = adc \implies a = adc \implies a(1 - dc) = 0 \implies$$

$$\implies \begin{cases} a = 0 \implies b = ad = 0 \implies a = bc = 0 \\ 1 - dc = 0 \implies dc = 1 \implies c = d^{-1} \implies c \in A^* \end{cases}$$

□

Corollary 7

Dato il dominio di integrità $\mathbb{Z}$ e dati $a, b \in \mathbb{Z}$, si verifica che:

$$I(a) = I(b) \iff a = \pm b$$

Dimostrazione:

- Poiché $\mathbb{Z}$ è un dominio di integrità, dati $a, b \in \mathbb{Z}$ si ha che:

$$I(a) = I(b) \iff a = bc, \exists c \in \mathbb{Z}^*$$

- Tuttavia, siccome $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$, si ha che:

$$I(a) = I(b) \iff a = bc, c = 1 \vee c = -1 \iff a = \pm b$$

□

4.4 Elementi irriducibili e primi

Definition 30. Elementi irriducibili e primi

Dato un anello commutativo A e un elemento $a \in A$, definiamo a come **elemento irriducibile** se e solo se:

$$a \neq 0, a \notin A^*, a = bc \implies b \in A^* \vee c \in A^*$$

Definiamo invece a come **elemento primo** se e solo se:

$$a \neq 0, a \notin A^*, a \mid bc \implies a \mid b \vee a \mid c$$

Attenzione: la definizione di elemento primo non coincide con la "normale" definizione di numero primo

Definition 31. Insieme dei numeri interi primi

Definiamo come **insieme dei numeri interi primi** l'insieme:

$$\mathbb{P} : \{p \in \mathbb{N}_{>1} \mid \nexists y \in \mathbb{N} - \{1, p\} \text{ t.c } y \mid a\}$$

Attenzione: gli elementi appartenenti a tale insieme coincidono con la "normale" definizione di **numero primo**

Observation 17

Dati un elemento $p \in \mathbb{P}$, si verifica che

$$p \in \mathbb{P} \implies p \text{ elemento primo}$$

Dimostrazione:

- Poiché $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$, allora $p \in \mathbb{P} \implies p \in \mathbb{Z}$
- Supponiamo che $p \mid ab$, dove $ab \in \mathbb{Z}$, dunque necessariamente p apparterrà alla fattorizzazione di ab, implicando che $p \mid a \vee p \mid b$

□

Observation 18

Dato un dominio di integrità A ed un elemento $a \in A$, si verifica che

$$a \text{ elemento primo} \implies a \text{ elemento irriducibile}$$

Dimostrazione:

- Se $a \in A$ è primo, allora per definizione si ha che $a \neq 0, a \notin A^*$.
- Se $a = bc$, allora si ha che $a \mid a \implies a \mid bc \implies a \mid b \vee a \mid c$
- A questo punto, si ha che:

$$a \mid b \implies b = ad, \exists d \in A \implies a = bc = adc \implies a = adc \implies a(1 - cd) = 0$$

- Siccome $a \neq 0$, allora:

$$a(1 - cd) = 0, a \neq 0 \implies 1 - cd = 0 \implies cd = 1 \implies c = d^{-1} \implies c \in A^*$$

- Analogamente, dimostriamo che $a \mid c \implies b \in A^*$
- Dunque, concludiamo che se a è primo allora esso è anche irriducibile:

$$a \text{ primo} \mid a = bc \implies a \mid b \vee a \mid c \implies b \in A^* \vee c \in A^*$$

□

Proposition 15

Dato il dominio di integrità $\mathbb{Z}$ e un elemento $p \in \mathbb{Z} \mid p \geq 2$, le seguenti condizioni sono **equivalenti**:

- $p \in \mathbb{P}$
- p è un elemento primo
- p è un elemento irriducibile

Dimostrazione:

- Per dimostrazione precedente, sappiamo che

$$p \in \mathbb{P} \implies p \text{ elemento primo} \implies p \text{ elemento irriducibile}$$

- Supponiamo che $p \geq 2 \in \mathbb{Z}$ sia irriducibile e che esistano $a, b \in \mathbb{N}$, tali che:

$$p = ab \in \mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \implies a \in \mathbb{Z}^* \vee b \in \mathbb{Z}^*$$

- Poiché $\mathbb{Z}^* = \{-1, 1\}$ e poiché $a, b \in \mathbb{N}$, allora ne segue che:

$$a \in \mathbb{Z}^* \vee b \in \mathbb{Z}^* \implies a = 1 \vee b = 1$$

  - Se $a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^*$, allora

$$a \in \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^* \implies a = 1, b = 1 \implies p = 1$$

    contraddicendo l'ipotesi per cui $p \geq 2$, dunque si tratta di un caso impossibile
  - Se $a \in \mathbb{Z}^*, b \notin \mathbb{Z}^*$, allora

$$a \in \mathbb{Z}^* \implies a = 1 \implies p = b \implies b \mid p \vee 1 \mid p, b = p$$

  - Se $a \notin \mathbb{Z}^*, b \in \mathbb{Z}^*$, allora

$$b \in \mathbb{Z}^* \implies b = 1 \implies p = a \implies a \mid p \vee 1 \mid p, a = p$$

- Dunque, in entrambi i casi possibili si ottiene che

$$p \text{ elemento irriducibile} \implies p \in \mathbb{P}$$

□

Proposition 16. Dominio di integrità $\mathbb{Z}_p$

Dato l'anello commutativo $\mathbb{Z}_n$, si ha che

$$\mathbb{Z}_n \text{ dominio di integrità} \iff n \in \mathbb{P}$$

Nel caso in cui $n \in \mathbb{P}$, per comodità utilizziamo la **notazione** $\mathbb{Z}_p$.

Dimostrazione:

- Supponiamo per assurdo che $\mathbb{Z}_n$ sia dominio di integrità e che $n \notin \mathbb{P}$, implicando che:

$$n \notin \mathbb{P} \implies ab = n, \exists a, b \notin \mathbb{Z}^*, 0 < a, b < n \implies$$
$$\implies [ab] = [n] = [0] \in \mathbb{Z}_n \implies [a][b] = [0] \implies [a] = [0] \vee [b] = [0]$$

  Tuttavia, per ipotesi si ha che $a, b > 0 \implies [a] \neq 0, [b] \neq 0$, creando una contraddizione, dunque l'unica possibilità è che $n \in \mathbb{P}$

- Supponiamo per assurdo che $n \in \mathbb{P}$ e che $\mathbb{Z}_n$ non sia dominio di integrità, implicando che:

$$\exists [a] \neq [0] \in \mathbb{Z}_n \text{ t.c. } [a] \mid [0] \implies [0] = [a][b], \exists [b] \neq [0] \in \mathbb{Z}_n \implies$$
$$\implies [0] = [ab] \iff ab \equiv 0 (\text{mod } n) \iff n \mid ab - 0$$

  Poiché $n \in \mathbb{P}$, si ha che:

$$n \mid ab \implies n \mid a \vee n \mid b \implies a \equiv 0 (\texttt{mod } n) \vee b \equiv 0 (\texttt{mod } n) \implies$$
$$\implies [a] = [n] = [0] \vee [b] = [n] = [0]$$

  Tuttavia, per ipotesi si ha che $a, b \neq 0 \implies [a], [b] \neq [0]$, creando una contraddizione, dunque l'unica possibilità è che $\mathbb{Z}_n$ sia dominio di integrità

□

4.5 Massimo comun divisore

Definition 32. Dominio ad ideali principali

Dato un dominio di integrità A, definiamo A come **dominio ad ideali principali** se e solo se considerato un qualsiasi $I \triangleleft A$ si ha che:

$$\exists d \in I \mid I = I(d)$$

In altre parole, ogni ideale coincide esattamente con un ideale principale

Proposition 17

Il dominio di integrità $\mathbb{Z}$ è un **dominio ad ideali principali**

Dimostrazione:

- Supponiamo che esista $I \triangleleft \mathbb{Z}$ tale che $I = \{0\}$. In tal caso, si ha che $I = I(0)$
- Supponiamo quindi che $I \neq \{0\}$, implicando che per definizione stessa di ideale si abbia che:

$$\forall n \in I \implies -n \in I$$

  Dunque, possiamo considerare direttamente il sottoinsieme $I_{>0}$, poiché per i numeri negativi basterebbe considerare il loro opposto.

- Siccome $I_{>0} \subseteq \mathbb{N}$, per il principio del buon ordinamento si ha che

$$\exists d \in I_{>0} \mid d \text{ è il minimo di } I_{>0}$$

- Dimostriamo quindi che $I = I(d)$:
  - Dato $x \in I(d)$, si ha che:
$$x \in I(d) \implies \exists y \in \mathbb{Z} \mid x = dy$$
  - Siccome $d \in I_{>0} \subseteq I$, allora $x = dy \in I$
  - Dato $x \in I$, per il teorema della divisione con resto euclidea si ha che:
$$\exists! q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r, d \mid x = dq + r \implies r = x - dq \in I$$
  - Assumiamo per assurdo che $r \neq 0$, implicando che $r > 0$ e dunque che $r \in I_{>0}$. Tuttavia,poiché $r < d$, allora ne seguirebbe che d non sia il minimo di $I_{>0}$.
  - Dunque, l'unica possibilità è che $r = 0$, implicando che:
$$x = dq + r = dq + 0 = dq \implies x = dq \implies x \in I(d)$$

□

Proposition 18. Massimo comun divisore (MCD)

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e degli elementi $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, si ha che:

$$\exists! d \in \mathbb{N} \mid I(a_1, \ldots, a_n) = I(d)$$

dove $d := MCD(a_1, \ldots, a_n)$, ossia è il **massimo comun divisore di** $a_1, \ldots, a_n$

In altre parole, si ha che:

$$\exists x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z} \mid a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = d$$

che definiamo come **identità di Bezout**.

Dimostrazione:

- Per ogni divisore comune di $a_1, \ldots, a_n$, ossia $\forall k \in \mathbb{Z}$ tali che $k \mid a_i, \forall i \in [1, n]$, si ha che:
$$k \mid a_i, \forall i \in [1, n] \implies a_i = kb_i, \exists b_i \in \mathbb{Z}$$
- Dunque, si verifica facilmente che:
$$d \in I(d) = I(a_1, \ldots, a_n) \implies \exists x_1, \ldots, x_n \mid \underbrace{d = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n}_{\text{Identità di Bezout}} \implies$$
$$\implies d = (kb_1)x_1 + \ldots + (kb_n)x_n = k(b_1 x_1 + \ldots + b_n x_n) \implies k \mid d$$
- Dunque, poiché ogni divisore in comune di $a_1, \ldots, a_n$ divide anche d, si ha che d è il massimo comun divisore di $a_1, \ldots, a_n$

□

Proposition 19

Dato l'anello commutativo $\mathbb{Z}_n$ e dato $0 < a < n$ si ha che:

$$[a] \in \mathbb{Z}_n^* \iff MCD(a,n) = 1$$

Dimostrazione:

- Se $[a] \in \mathbb{Z}_n^*$ si ha che:

$$\exists 0 < b < n \mid [a][b] = 1 \iff ab \equiv 1 (\mathsf{mod}\ n) \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid 1 = ab + nk$$

  Posto $d := MCD(a,n) > 0$, si ha che:

$$1 = ab + nk \in I(a,n) = I(d) \implies 1 \in I(d) \implies \exists p \in \mathbb{Z} \mid 1 = dp \implies d = p = \pm 1$$

  Poiché $d > 0$, l'unico caso possibile è $d = 1$

- Viceversa, supponendo che $MCD(a,n) = 1$ si ha che:

$$I(d) = I(a,n) \implies d \in I(a,n) \implies \exists b, k \in \mathbb{Z} \mid d = ab + nk \implies$$
$$\implies [1] = [ab + nk] \in \mathbb{Z}_n \implies [a][b] + [n][k] = [a][b] + [0][k] = [a][b]$$
$$\implies [b] = [a]^{-1} \implies [a] \in \mathbb{Z}_n^*$$

□

Corollary 8. Campo $\mathbb{Z}_p$

Dato $p \in \mathbb{P}$, il dominio di integrità $\mathbb{Z}_p$ è un **campo**

Dimostrazione:

- Poiché $\nexists y \in \mathbb{Z} - \{1, p\}$ tale che $y \mid p$, allora:

$$MCD(a,p) = 1, \forall 0 < a < p \iff [a] \in \mathbb{Z}_n^*, \forall 0 < a < p \implies \mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{0\}$$

□

Theorem 20

Dato l'anello commutativo $\mathbb{Z}_n$ e data la seguente equazione:

$$ax \equiv b (\mathsf{mod}\ n)$$

Posto $d := MCD(a,n)$ si verifica che:

- Se $d \nmid b$, allora $\nexists x \in \mathbb{Z}_n \mid ax = b (\mathsf{mod}\ n)$ (**non esistono soluzioni**)
- Se $d \mid b$, allora posti $p := \frac{a}{d}, q := \frac{b}{d}, m := \frac{n}{d}$, l'equazione è **equivalente** a:

$$ax \equiv b (\mathsf{mod}\ n) \iff px \equiv q (\mathsf{mod}\ m)$$

Dimostrazione:

- Prima di tutto, affermiamo che se l'equazione ammette una soluzione $x \in \mathbb{Z}$, allora

$$ax \equiv b(\mathtt{mod}\ n) \iff ax = b + nk, \exists k \in \mathbb{Z} \iff ax - nk = b$$

- Poiché $d := MCD(a, n)$, si ha che

$$d \mid a, d \mid n \implies d \mid ax, d \mid nk \implies d \mid ax - nk = b$$

- Viceversa, ciò dimostra che se $d \nmid b$, allora tale equazione non potrebbe ammettere soluzioni.
- Supponiamo quindi che $d \mid b$ e poniamo $p := \frac{a}{d}, q := \frac{b}{d}, m := \frac{n}{d}$ (implicando quindi che $a = pd, b = qd, n = md$. Dunque si verifica che:

$$ax \equiv b(\mathtt{mod}\ n) \iff pdx \equiv qd(\mathtt{mod}\ md) \iff$$

$$\iff dpx = dq + dmk, \exists k \in \mathbb{Z} \iff px = q + mk \iff px \equiv q(\mathtt{mod}\ m)$$

□

4.5.1 Algoritmo di Euclide

Lemma 21

Dati tre elementi $a, b, c \in \mathbb{Z}$, si ha che:

$$a \mid b, a \mid c \implies a \mid z, \forall z \in I(b, c)$$

Dimostrazione:

- Se $a \mid b$ e che $a \mid c$, si ha che:

$$z \in I(b, c) \iff z = bx + cy, \exists x, y \in \mathbb{Z} \implies z = (ak)x + (ah)c, \exists k, h \in \mathbb{Z} \implies$$

$$\implies z = a(kx) + a(hc) = a(kx + hc) \implies a \mid z$$

□

Method 1. Algoritmo di Euclide

Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ e sia $d := MCD(a, b)$. Il seguente **algoritmo di Euclide** permette di calcolare d:

1. Assumiamo $0 < a \leq b$ poniamo $r_0 := b$ e $r_1 := a$
2. Poniamo $r_{i+1} := r_{i-1}(\mathtt{mod}\ r_i)$ ad ogni iterazione, da cui ne segue che $r_{i-1} = r_i q_i + r_{i+1}$, ripetendo tale operazione fino a quando $r_{i+1} = 0$
3. All'n-esima iterazione, ossia quando $r_{n+1} = 0$, si ha che $MCD(a, b) = r_n$

Dimostrazione correttezza algoritmo:

- Poiché $I(a,b) = I(-a,b) = I(a,-b) = I(-a,-b)$, assumiamo che $0 < a, b$.
- Inoltre, poiché $I(a,b) = I(b,a)$, $MCD(0,b) = 0$ e $MCD(a,0) = 0$, assumiamo che $0 < a \leq b$.
- Siccome $r_0 := b, r_1 := a \in I(a,b)$, si ha che:

$$r_2 \equiv r_0 (\texttt{mod}\ r_1) \iff r_0 = r_1 q_1 + r_2 \iff r_2 = r_0 - r_1 q_1 \in I(a,b) = I(d)$$

- Supponiamo per ipotesi induttiva che $r_i \in I(a,b) = I(d), \forall i \in [0,n]$.

  Dimostriamo quindi il passo induttivo:

$$r_{i+1} \equiv r_{i-1} (\texttt{mod}\ r_i) \iff r_{i-1} = r_i q_1 + r_{i+1} \iff r_{i+1} = r_{i-1} - r_i q_i \in I(a,b) = I(d)$$

- Di conseguenza, $\forall i \in [0,n]$ si ha che

$$r_i \in I(a,b) = I(d) \iff r_i = dp, \exists p \in \mathbb{Z} \iff d \mid r_i \forall i \in [0,n] \implies d \mid r_n$$

- Poiché l'algoritmo termina quando $r_{n+1} = 0$, ne segue che:

$$r_{n+1} \equiv r_{n-1} (\texttt{mod}\ r_n) \iff 0 \equiv r_{n-1} (\texttt{mod}\ r_n) \iff r_{n-1} = r_n q_n \iff r_n \mid r_{n-1}$$

- Siccome $r_n \mid r_n$ e $r_n \mid r_{n-1}$, per il lemma precedente si ha che:

$$r_n \equiv r_{n-2} (\texttt{mod}\ r_{n-1}) \iff r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n \in I(r_{n-1}, r_n)$$

- Dunque, poiché $r_n, r_{n-1}, r_{n-2} \in I(r_{n-1}, r_n) \subseteq \mathbb{Z}$, per il lemma precedente si ha che:

$$r_n \mid r_n, r_n \mid r_{n-1} \implies r_n \mid r_{n-2}$$

- A questo punto, procedendo analogamente si ha che

$$r_n \mid r_n, r_n \mid r_{n-1} \implies r_n \mid r_{n-2}$$

$$r_n \mid r_{n-1}, r_n \mid r_{n-2} \implies r_n \mid r_{n-3}$$

$$\dots$$

$$r_n \mid r_2, r_n \mid r_1 \implies r_n \mid r_0$$

- Dunque, poiché $d := MCD(a,b)$ e dati $r_1 := a, r_0 := b$, si ha che:

$$r_n \mid a, r_n \mid b \implies r_n \mid d$$

- Infine, siccome $d, r_n \in \mathbb{N}$ (sezione 3.2) si ha che:

$$d \mid r_n, r_n \mid d \implies d = r_n$$

□

Esempi:

- Vogliamo calcolare $MCD(448, 216)$. Poniamo quindi inizialmente $r_0 = 448$ e $r_1 = 216$. Applicando l'algoritmo abbiamo quindi che:

$$r_0 = r_1 \cdot q_1 + r_2$$

$$448 = 216 \cdot 2 + 16$$

$$216 = 16 \cdot 13 + 8$$

$$16 = 8 \cdot 2 + 0$$

  Dunque, otteniamo che $MCD(448, 216) = 8$

- Vogliamo calcolare l'**identità di Bezout** per $b = 216$ e $a = 448$ ossia i due valori x e y tali che:

$$x, y \in \mathbb{Z} \mid MCD(488, 216) = 216x + 448y$$

  Tramite l'**algoritmo di Euclide** utilizzato nell'esercizio precedente, sappiamo che $MCD(488, 216) = 8$. Poniamo quindi:

$$216x + 448y = 8$$

  A questo punto, ripercorrendo al contrario i calcoli dell'algoritmo di Euclide, otteniamo che:

$$216x + 448y = 8$$

$$216x + 448y = 216 - 16 \cdot 13$$

$$216x + 448y = 216 - (448 - 216 \cdot 2) \cdot 13$$

$$216x + 448y = 216(1 + 13 \cdot 2) - 448 \cdot 13$$

$$216x + 448y = 216(27) + 448(-13)$$

  Otteniamo quindi che $x = 27$ e $y = -13$

- Vogliamo calcolare l'identità di Bezout e MCD per $a = 1470, b = 8316$ e $c = 12600$:

$$MCD(a, b, c) = MCD(a, MCD(b, c)) = MCD(MCD(a, b), c)$$

  - $d := MCD(b, c) = MCD(8316, 12600)$

$$12600 := 8316 \cdot 1 + 4284$$

$$8316 := 4284 \cdot 1 + 4032$$

$$4284 := 4032 \cdot 1 + 252$$

$$4032 := 252 \cdot 16 + 0$$

  dunque $d = 252$

– L'identità di Bezout per $MCD(8316, 12600) = 252 = 8316x + 12600y$ corrisponde a:

$$8316x + 12600y = 252$$

$$8316x + 12600y = 4284 - 4032$$

$$8316x + 12600y = (12600 - 8316) - (8316 - 4284)$$

$$8316x + 12600y = (12600 - 8316) - (8316 - (12600 - 8316))$$

$$8316x + 12600y = 12600 - 8316 - 8316 + 12600 - 8316$$

$$8316x + 12600y = 12600(2) + 8316(-3)$$

dunque $x = -3, y = 2$

– $p := MCD(a, d) = MCD(1470, 252)$

$$1470 = 252 \cdot 5 + 210$$

$$252 = 210 \cdot 1 + 42$$

$$210 = 42 \cdot 5 + 0$$

dunque $p = 42$

– L'identità di Bezout per $MCD(1470, 252) = 42 = 1470x + 252y$ corrisponde a:

$$1470z + 252w = 42$$

$$1470z + 252w = 252 - 210$$

$$1470z + 252w = 252 - (1470 - 252 \cdot 5)$$

$$1470z + 252w = 1470(-1) + 252(6)$$

dunque $x = -1, y = 6$

– L'identità di Bezout per $MCD(1470, 8316, 12600) = 42 = 1470x + 8316y + 12600z$ corrisponde a:

$$1470x + 8316y + 12600z = 42$$

$$1470x + 8316y + 12600z = 1470(-1) + (12600(2) + 8316(-3))(6)$$

$$1470x + 8316y + 12600z = 1470(-1) + 12600(12) + 8316 \cdot (-18)$$

dunque $x = -1, y = 12, z = -18$

4.5.2 Approfondimento sull'Identità di Bezout

Grazie all'algoritmo di Euclide, possiamo trovare due **soluzioni particolari** all'equazione dell'**identità di Bezout**, ossia $ax + by = MCD(a, b)$, per poi trovare tutte le soluzioni in grado di risolvere l'equazione:

Proposition 22

Data l'equazione $ax + by = d$, dove $d := MCD(a, b)$, e date x_0 e y_0 due soluzioni particolari dell'equazione, la soluzione ammette **infinite soluzioni** nella seguente forma:

$$x = x_0 + \frac{m}{a}k, \forall k \in \mathbb{Z} \qquad y = y_0 - \frac{m}{b}k, \forall k \in \mathbb{Z}$$

dove $m := mcm(a, b)$, ossia il minimo comune multiplo tra a e b

Dimostrazione:

- Innanzitutto, verifichiamo che le soluzioni possibili siano effettivamente valide:

$$a(x_0 + \frac{m}{a}k) + b(y_0 - \frac{m}{b}k) = d$$
$$ax_0 + mk + by_0 - mk = d$$
$$ax_0 + by_0 = d$$

- A questo punto, verifichiamo che tali soluzioni appaiano solo nella forma indicata:

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = d \\ ax_1 + by_1 = d \end{cases} \implies (ax_1 + by_1) - (ax_0 + by_0) = d - d \implies$$
$$a(x_1 - x_0) + b(y_1 + y_0) = 0 \implies a(x_1 - x_0) = -b(y_1 - y_0) \implies$$
$$\implies a(x_1 - x_0) = b(y_0 + y_1)$$

- Posto $N := a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$, si ha che $a \mid N$ e $b \mid N$, implicando che N sia un multiplo di $m := mcm(a, b)$. Dunque si ha che $\exists k \in \mathbb{Z} \mid N = mk$:

$$\begin{cases} a(x_1 - x_0) = N = mk \\ b(y_0 - y_1) = N = mk \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 - x_0 = \frac{m}{a}k \\ y_0 - y_1 = \frac{m}{b}k \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = x_0 + \frac{m}{a}k \\ y_1 = y_0 - \frac{m}{b}k \end{cases}$$

□

4.5.3 Criteri di divisibilità

Sia $a \in \mathbb{Z}$ con la sua **rappresentazione decimale**:

$$a = a_k \cdot 10^k + \ldots + a_0 \cdot 10^0 = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \text{ dove } a_i \in \{0, \ldots, 9\}$$

Osserviamo che:

- $10 \equiv 1 (\mathsf{mod}\ 3) \implies 10x \equiv x (\mathsf{mod}\ 3)$
- $10 \equiv 1 (\mathsf{mod}\ 9) \implies 10x \equiv x (\mathsf{mod}\ 9)$
- $10 \equiv -1 (\mathsf{mod}\ 11) \implies 10x \equiv -x (\mathsf{mod}\ 11)$

Quindi:

- In $\mathbb{Z}_3$ si ha che
$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \equiv \left[\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (1)^i\right] (\mathsf{mod}\ 3)$$
- In $\mathbb{Z}_9$ si ha che
$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \equiv \left[\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (1)^i\right] (\mathsf{mod}\ 9)$$
- In $\mathbb{Z}_{11}$ si ha che
$$a = \sum_{i=0}^{k} a_i \cdot 10^i \equiv \left[\sum_{i=0}^{k} a_i \cdot (-1)^i\right] (\mathsf{mod}\ 11)$$

Observation 19

Dati $x, y, k \in \mathbb{Z}_n$, si ha che:

$$x \equiv y (\mathsf{mod}\ n), k \mid n \implies x \equiv y (\mathsf{mod}\ k)$$

Dimostrazione:

$$x \equiv y (\mathsf{mod}\ n) \iff y - x = nq = (kp)q = k(pq) \in I(k) \implies x \equiv y (\mathsf{mod}\ k)$$

□

Esempi:

- Vogliamo sapere se $3 \mid 129383716$. Siccome siamo in $\mathbb{Z}_3$ abbiamo che:

  $129383716 \equiv [6+1+7+3+8+3+9+2+1] (\mathsf{mod}\ 3) \implies 129383716 \equiv 40 (\mathsf{mod}\ 3)$

  Tuttavia, siccome $3 \nmid 40$, ne segue che $3 \nmid 129383716$

- Vogliamo sapere se $11 \mid 129383716$. Siccome siamo in $\mathbb{Z}_{11}$ abbiamo che:

  $$129383716 \equiv [6-1+7-3+8-3+9-2+1](\texttt{mod } 11) \implies 129383716 \equiv 22(\texttt{mod } 11)$$

  Dunque, siccome $11 \mid 22$, ne segue che $11 \mid 129383716$

4.6 Minimo comune multiplo

Proposition 23. Minimo comune multiplo (mcm)

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e degli elementi $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, si ha che:

$$\exists! m \in \mathbb{N} \mid I(m) = I(a_1) \cap I(a_2) \cap \ldots \cap I(a_n)$$

dove $m := mcm(a_1, \ldots, a_n)$, ossia il **minimo comune multiplo di** $a_1, \ldots, a_n$

Dimostrazione:

- Poiché $m \in I(m)$ si ha che:

  $$m \in I(m) = I(a_1) \cap I(a_2) \cap \ldots \cap I(a_n) \iff m = a_i k_1, \exists k_1 \in \mathbb{Z}, \forall i \in [0, n] \implies a_i \mid m$$

  dunque m è un multiplo in comune di $a_1, \ldots, a_n$

- Per ogni multiplo comune di $a_1, \ldots, a_n$, ossia $\forall k \in \mathbb{Z}$ tali che $a_i \mid k, \forall i \in [1, n]$, si ha che:

  $$a_i \mid k, \forall i \in [1, n] \implies k = a_i b_i, \exists b_i \in \mathbb{Z} \implies$$
  $$\implies k \in I(a_i), \forall i \in [1, n] \implies k \in I(a_1) \cap \ldots \cap I(a_n) = I(m) \implies$$
  $$\implies k \in I(m) \implies k = mh, \exists h \in \mathbb{Z} \implies m \mid k$$

- Dunque, poiché ogni multiplo in comune di $a_1, \ldots, a_m$ è multiplo anche di d, si ha che m è il minimo comune multiplo di $a_1, \ldots, a_n$

□

Observation 20

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e dati $I_1, \ldots I_n \triangleleft A$ ideali, $\exists! a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ tali che :

- $I_1 + \ldots + I_n = I(a_1, \ldots, a_n) = I(d)$, dove $d := MCD(a_1, \ldots, a_n)$
- $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = I(a_1) \cdot \ldots \cdot I(a_n) = I(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$
- $I_1 \cap \ldots \cap I_n = I(a_1) \cap \ldots \cap I(a_n) = I(m)$, dove $m := mcm(a_1, \ldots, a_n)$

Dimostrazione:

- Poiché $\mathbb{Z}$ è un dominio ad ideali principali si ha che

$$I_i = I(a_i), \exists! a_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [i, n]$$

- Di conseguenza, si ha che:

$$I_1 + \ldots + I_n = I(a_1) + \ldots + I(a_n) = \{b_1 + \ldots + b_n \mid b_i \in I(a_i), \forall i \in [0, 1]\} =$$

$$= \{b_1 + \ldots + b_n \mid b_i = a_i x_i, \exists x_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [0, 1]\} = \{a_i x_i + \ldots + a_n x_n \mid x_i \in \mathbb{Z}, \forall i \in [0, 1]\} =$$

$$= I(a_1, \ldots, a_n) = I(d)$$

  dove $d : MCD(a_1, \ldots, a_n)$

- Preso $x \in I_1 \cdot \ldots \cdot I_n$, si ha che:

$$x \in I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = I(a_1) \cdot \ldots \cdot I(a_n) \implies$$

$$\implies \exists b_{j_{a_i}} \in I(a_i), \forall i, j \in [1, 0] \mid x = a_1 b_{1_{a_1}} \cdot \ldots \cdot a_n b_{1_{a_n}} + \ldots + a_1 b_{n_{a_1}} \cdot \ldots \cdot a_n b_{n_{a_n}} \implies$$

$$\implies x = a_1 \cdot \ldots a_n (b_{1_{a_1}} \cdot \ldots b_{1_{a_n}} + \ldots + b_{n_{a_1}} \cdot \ldots \cdot b_{n_{a_n}}) \implies x \in I(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$$

- Viceversa, si ha che

$$x \in I(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n) \implies x = a_1 \ldots a_n k, \exists k \in \mathbb{Z} \implies$$

$$\implies x = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}(a_n k) \mid a_n k \in I(a_n), a_i \in I(a_i), \forall i \in [1, n-1] \implies$$

$$\implies x \in I(a_1) \cdot \ldots \cdot I(a_n) = I_1 \cdot \ldots \cdot I_n$$

  Dunque, si ha che $I_1 \cdot \ldots \cdot I_n = I(a_1 \cdot \ldots \cdot a_n)$

- Infine, per dimostrazione precedente si ha che:

$$I_1 \cap \ldots \cap I_n = I(a_1) \cap \ldots \cap I(a_n) = I(m)$$

  dove $m := mcm(a_1, \ldots, a_n)$

□

4.6.1 Teorema fondamentale dell'aritmetica

Theorem 24. Teorema fondamentale dell'aritmetica

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e dati $a, b \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$mcm(a, b) \cdot MCD(a, b) = ab$$

Attenzione: dati $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{N} \mid n > 2 \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$mcm(a_1, .., a_n) \cdot MCD(a_1, \ldots, a_n) \neq a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

dunque tale teorema vale se e solo se $n = 2$

Dimostrazione:

- Se $a = 0 \vee b = 0$, allora:

$$mcm(a,b) = 0 \implies mcm(a,b) \cdot MCD(a,b) = 0 \cdot MCD(a,b) = 0 = ab$$

- Siano quindi $a, b > 0$. Considerando $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, tale numero può essere scritto come una **fattorizzazione in numeri interi primi**, ossia:

$$\exists! n_2, n_3, n_5, \ldots, n_p, \ldots \text{ dove } p \in \mathbb{P}, n_p \in \mathbb{N} \mid n = 2^{n_2} \cdot 3^{n_3} \cdot \ldots \cdot p^{n_p} \cdot \ldots = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p}$$

  dove $p \nmid n \implies n_p = 0$

- Riscriviamo quindi a e b come:

$$a = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \qquad b = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p}$$

- Poniamo inoltre $d := MCD(a,b)$ e $m := mcm(a,b)$, che per loro definizione corrispondono a:

$$d = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{min(a_p, b_p)} \qquad m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{max(a_p, b_p)}$$

- A questo punto, osserviamo che:

$$min(a_p, b_p) = a_p \iff max(a_p, b_p) = b_p$$

- Quindi, il prodotto tra d e m corrisponde a:

$$dm = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{min(a_p, b_p)} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{max(a_p, b_p)} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p + b_p} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_p} \cdot \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{b_p} = ab$$

□

Corollary 9. Calcolo del mcm

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e dati $a, b \in \mathbb{N}$, per il teorema fondamentale dell'aritmetica si ha che:

$$mcm(a,b) = \frac{ab}{MCD(a,b)}$$

4.7 Teorema cinese dei resti

Lemma 25. Numeri coprimi ed mcm

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e dati $a_1, \ldots, a_n \geq 2 \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$MCD(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j \in \mathbb{N} \implies mcm(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

Inoltre, due elementi $a, b \in \mathbb{N} \mid MCD(a, b) = 1$, definiamo tali elementi come **coprimi**

Dimostrazione:

- Consideriamo la fattorizzazione in primi di $a_1, \ldots, a_n$:

$$a_1 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{1,p}}, \quad a_2 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{2,p}}, \quad \ldots, \quad a_n = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{n,p}}$$

- Poiché $a_1, \ldots, a_n$ sono coprimi tra loro, si ha che

$$MCD(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j \in \mathbb{N} \implies \forall p \in \mathbb{P}, p \mid a_i \implies p \nmid a_j, \forall i \neq j \in \mathbb{N}$$

- Di conseguenza, per ogni esponente $a_{i,p} > 0$ si ha che $a_{j,p} = 0, \forall j \neq i$, da cui ne segue che:

$$\forall p \in \mathbb{P}, \exists! a_{k,p} > 0 \mid a_{1,p} + \ldots + a_{n,p} = a_{k,p} = max(a_{1,p}, \ldots, a_{n,p})$$

- Ponendo $m := mcm(a_1, \ldots, a_n)$ abbiamo che:

$$m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{max(a_{1,p}, \ldots, a_{n,p})} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_{1,p} + \ldots + a_{n,p}} = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_1} \cdot \ldots \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{a_n} = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

□

Lemma 26

Consideriamo la notazione $x(\mathsf{mod}\ q)$, indicante la classe $[x] \in \mathbb{Z}_q$, dove $q \in \mathbb{N}$.

Dati $a_1, \ldots, a_n \geq 2$ e posto $m := mcm(a_1, \ldots, a_n)$, la seguente funzione è **ben definita** ed **iniettiva**

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_m} : x(\mathsf{mod}\ m) \mapsto (x(\mathsf{mod}\ a_1), \ldots, x(\mathsf{mod}\ a_n))$$

Dimostrazione:

$$x \equiv x'(\mathsf{mod}\ m) \iff x' - x \in I(m) = I(a_1) \cap \ldots \cap I(a_n) \iff$$

$$\iff x' - x \in I(a_i), \forall i \in [1, n] \iff \begin{cases} x' - x \in I(a_1) \\ x' - x \in I(a_2) \\ \vdots \\ x' - x \in I(a_n) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv x'(\mathsf{mod}\ a_1) \\ x \equiv x'(\mathsf{mod}\ a_2) \\ \vdots \\ x \equiv x'(\mathsf{mod}\ a_n) \end{cases}$$

□

Theorem 27. Teorema cinese dei resti

Dati $a_1, \ldots, a_n \geq 2 \in \mathbb{N}$ **coprimi tra loro**, dunque tali che $MCD(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j$ e dati $0 \leq b_i < a_i \in \mathbb{N}, \forall i \in [1, n]$, il seguente sistema di congruenze (se compatibile) ammette un'**unica soluzione**

$$\exists! x (\mathtt{mod}\ m) \mid \begin{cases} x \equiv b_1 (\mathtt{mod}\ a_1) \\ x \equiv b_2 (\mathtt{mod}\ a_2) \\ \vdots \\ x \equiv b_3 (\mathtt{mod}\ a_n) \end{cases}$$

dove $m := mcm(a_1, \ldots, a_n) = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ e dove $x (\mathtt{mod}\ m)$ indica la classe $[x] \in \mathbb{Z}_m$

Dimostrazione:

- Per il lemma precedente, la seguente funzione è ben definita ed iniettiva

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_m} : x (\mathtt{mod}\ m) \mapsto (x (\mathtt{mod}\ a_1), \ldots, x (\mathtt{mod}\ a_n))$$

- Inoltre, posto $m := mcm(a_1, \ldots, a_n)$, per il lemma precedente si ha che:

$$MCD(a_i, a_j) = 1, \forall i \neq j \implies m = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$$

- A questo punto, notiamo che:

$$|\mathbb{Z}_{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_n}| = |\mathbb{Z}_{a_1}| \cdot \ldots \cdot |\mathbb{Z}_{a_n}| = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n = m = |\mathbb{Z}_m|$$

- Di conseguenza, poiché $|\mathbb{Z}_{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{a_n}| = |\mathbb{Z}_m|$ e poiché φ è iniettiva, ne segue che φ possa essere iniettiva se e solo se è suriettiva.
- Poiché φ è biettiva, concludiamo quindi che $\exists! x \ \mathtt{mod}\ \mathtt{m}$ tale che

$$\varphi(x \ \mathtt{mod}\ \mathtt{m}) = (b_1 \ \mathtt{mod}\ a_1, \ldots, b_n \ \mathtt{mod}\ a_n)$$

  implicando che $x \ \mathtt{mod}\ \mathtt{m}$ sia l'unica soluzione del sistema.

□

Esempi:

1. - Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 2 (\mathtt{mod}\ 3) \\ x \equiv 3 (\mathtt{mod}\ 5) \\ x \equiv 2 (\mathtt{mod}\ 7) \end{cases}$$

   - Poiché $x \equiv 2 (\mathtt{mod}\ 3) \iff x = 2 + 3a, \exists a \in \mathbb{Z}$, sostituendo $x = 2 + 3a$ dentro $x \equiv 3 (\mathtt{mod}\ 5)$ otteniamo che:

$$2 + 3a \equiv 3 (\mathtt{mod}\ 5)$$

- Impostiamo la seguente equazione, dove le seguenti classi di congruenza appartengono tutte a $\mathbb{Z}_5$:

$$[2+3a] = [3] \iff [2] + [3][a] = [3] \iff$$
$$\iff [3][a] = [3] - [2] \iff [a] = [1][3]^{-1} \iff$$
$$\iff [a] = [1][2] \iff [a] = [2]$$

- Quindi si ha che $[a] = [2] \in \mathbb{Z}_5 \iff a \equiv 2(\mathsf{mod}\ 5) \iff a = 2 + 5b, \exists b \in \mathbb{Z}$
- Sostituendo $x = 2 + 3(2 + 5b) = 8 + 15b$ dentro $x \equiv 2(\mathsf{mod}\ 7)$, otteniamo che:

$$8 + 15b \equiv 2(\mathsf{mod}\ 5)$$

- Ripetiamo quindi i passaggi analoghi a prima, stavolta lavorando in $\mathbb{Z}_7$:

$$[8 + 15b] = [2] \iff [8] + [15][b] = [2] \iff$$
$$\iff [15][b] = [2] - [8] \iff [1][b] = [2] - [1] \iff [b] = [1]$$

- Quindi si ha che $[b] = [1] \in \mathbb{Z}_7 \iff b \equiv 1(\mathsf{mod}\ 7) \iff b = 1 + 7c, \exists c \in \mathbb{Z}$
- Infine, otteniamo che

$$x = 8 + 15(1 + 7c) = 23 + 105c, \exists c \in \mathbb{Z} \iff x \equiv 23(\mathsf{mod}\ 105)$$

- Notiamo come $mcm(3, 5, 7) = 105$. Difatti, $x \equiv 23(\mathsf{mod}\ 105)$ è l'unica soluzione del sistema:

$$\begin{cases} 23 \equiv 2(\mathsf{mod}\ 3) \\ 23 \equiv 3(\mathsf{mod}\ 5) \\ 23 \equiv 2(\mathsf{mod}\ 7) \end{cases}$$

2. - Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\mathsf{mod}\ 15) \\ x \equiv 9(\mathsf{mod}\ 20) \end{cases}$$

- Poiché 15 e 20 non sono fattori primi, scomponiamo le due congruenze utilizzando il **teorema cinese dei resti**, in particolare la funzione φ:

$$x \equiv 6(\mathsf{mod}\ 15) \iff \begin{cases} x \equiv 0(\mathsf{mod}\ 3) \\ x \equiv 1(\mathsf{mod}\ 5) \end{cases}$$

$$x \equiv 9(\mathsf{mod}\ 20) \iff \begin{cases} x \equiv 1(\mathsf{mod}\ 4) \\ x \equiv 4(\mathsf{mod}\ 5) \end{cases}$$

- Il sistema iniziale, quindi, è equivalente a:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\mathtt{mod}\ 15) \\ x \equiv 9(\mathtt{mod}\ 20) \end{cases} \iff \begin{cases} x \equiv 0(\mathtt{mod}\ 3) \\ x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5) \\ x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 4) \\ x \equiv 4(\mathtt{mod}\ 5) \end{cases}$$

- Notiamo come il sistema sia **incompatibile**, poiché

$$x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5) \iff x \not\equiv 4(\mathtt{mod}\ 5)$$

dunque il sistema **non ammette alcuna soluzione**

3. - Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\mathtt{mod}\ 15) \\ x \equiv 11(\mathtt{mod}\ 20) \\ x \equiv 15(\mathtt{mod}\ 21) \end{cases}$$

- Scomponendo in fattori primi si ha che:

$$x \equiv 6(\mathtt{mod}\ 15) \iff \begin{cases} x \equiv 0(\mathtt{mod}\ 3) \\ x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5) \end{cases}$$

$$x \equiv 11(\mathtt{mod}\ 20) \iff \begin{cases} x \equiv 3(\mathtt{mod}\ 4) \\ x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5) \end{cases}$$

$$x \equiv 15(\mathtt{mod}\ 21) \iff \begin{cases} x \equiv 0(\mathtt{mod}\ 3) \\ x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 7) \end{cases}$$

- Il sistema iniziale, quindi, è equivalente a:

$$\begin{cases} x \equiv 6(\mathtt{mod}\ 15) \\ x \equiv 11(\mathtt{mod}\ 20) \\ x \equiv 15(\mathtt{mod}\ 21) \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv 0(\mathtt{mod}\ 3) \\ x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5) \\ x \equiv 3(\mathtt{mod}\ 4) \\ x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 7) \end{cases}$$

- Poiché $x \equiv 0(\mathtt{mod}\ 3) \iff x = 0 + 3a, \exists a \in \mathbb{Z}$, sostituendo nella seconda congruenza otteniamo che $3a \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5)$. Lavorando in $\mathbb{Z}_5$ quindi si ha che:

$$[3a] = [1] \iff [3][a] = [1] \iff$$

$$\iff [a] = [1][3]^{-1} \iff [a] = [2]$$

- Dunque $[a] = [2] \in \mathbb{Z}_5 \iff a \equiv 2(\mathtt{mod}\ 5) \iff a = 2 + 5b, \exists b \in \mathbb{Z}$.

- Sostituendo nella terza congruenza otteniamo $x = 3(2 + 5b) = 6 + 15b \iff 6 + 15b \equiv 3(\mathsf{mod}\ 4)$. Lavorando in $\mathbb{Z}_4$ si ha che:

$$[6 + 15b] = [3] \iff [6] + [15][b] = [3] \iff$$

$$\iff [2] + [3][b] = [3] \iff [3][b] = [3] - [2] \iff$$

$$\iff [b] = [1][3]^{-1} \iff [b] = [3]$$

- Dunque $[b] = [3] \in \mathbb{Z}_4 \iff b \equiv 3(\mathsf{mod}\ 4) \iff b = 3 + 4c, \exists c \in \mathbb{Z}$
- Sostituendo nella quarta congruenza otteniamo $x = 6 + 15(3 + 4c) = 51 + 60c \iff 51 + 60c \equiv 1(\mathsf{mod}\ 7)$. Lavorando in $\mathbb{Z}_7$ quindi si ha che:

$$[51 + 60c] = [1] \iff [2] + [4][c] = [1] \iff [2] + [4][c] = [1] \iff$$

$$\iff [4][c] = [1] - [2] \iff [4][c] = [-1] \iff [c] = [6][4]^{-1} \iff$$

$$\iff [c] = [6][2] \iff [c] = [12] \iff [c] = [5]$$

- Dunque $[c] = [2] \iff c \equiv 5(\mathsf{mod}\ 7) \implies c = 5 + 7d, \exists d \in \mathbb{Z}$.
- Infine, otteniamo che

$$x = 51 + 60(5 + 7d) = 351 + 420d \implies x \equiv 351(\mathsf{mod}\ 420)$$

che risulta essere l'unica soluzione del sistema. Difatti verifichiamo che:

$$\begin{cases} 351 \equiv 6(\mathsf{mod}\ 15) \\ 351 \equiv 11(\mathsf{mod}\ 20) \\ 351 \equiv 15(\mathsf{mod}\ 21) \end{cases} \implies \begin{cases} 351 \equiv 0(\mathsf{mod}\ 3) \\ 351 \equiv 1(\mathsf{mod}\ 5) \\ 351 \equiv 3(\mathsf{mod}\ 4) \\ 351 \equiv 1(\mathsf{mod}\ 7) \end{cases}$$

4. - Vogliamo calcolare le ultime due cifre di 37^{37}. Poniamo quindi $x := 37^{37}$ e calcoliamo la classe di equivalenza $x\ \mathsf{mod}\ 100$.
   - Scomponiamo quindi $100 = 4 \cdot 25$ in modo da poter applicare il teorema cinese dei resti:
     - Calcoliamo la classe di equivalenza di x in $\mathbb{Z}_4$

$$[x] = [37^{37}] = [37]^{37} = [1]^{37} = [1]$$

     - Calcoliamo la classe di equivalenza di x in $\mathbb{Z}_{25}$

$$[x] = [37^{37}] = [37]^{37} = [12]^{37} = [12][12]^{36} = [12][(12)^2]^{18} = [12][144]^{18} =$$

$$= [12][19]^{18} = [12][-6]^{18} = [12][(-6)^2]^9 = [12][36]^9 = [12][11]^9 =$$

$$= [12][11][(11)^2]^4 = [12][11][121]^4 = [12][11][-4]^4 = [12][11][6] = [792] = [17]$$

- Impostiamo quindi il seguente sistema e procediamo applicando il teorema cinese:
$$\begin{cases} x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 4) \\ x \equiv 17(\mathtt{mod}\ 25) \end{cases}$$
- Abbiamo quindi che $x = 1 + 4k \implies 1 + 4k \equiv 17(\mathtt{mod}\ 25)$:
$$[1] + [4][k] = [17] \iff [4][k] = [16] \iff [k] = [16][4]^{-1} \iff$$
$$\iff [k] = [16][19] \iff [k] = [304] \iff [k] = [4]$$
- Dunque $k \equiv 4(\mathtt{mod}\ 25) \implies k = 4 + 25j \implies x = 1 + 4(4 + 25j) = 17 + 100j$
- Quindi concludiamo che $x \equiv 17(\mathtt{mod}\ 100)$ e quindi che le ultime cifre di 37^{37} corrispondono a 17

5.
- Vogliamo calcolare l'inverso di 193 in $\mathbb{Z}_{240}$. Per definizione, ciò equivale a calcolare $193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 240)$
- Scomponiamo $240 = 24 \cdot 10$ e osserviamo che se $x \equiv y(\mathtt{mod}\ n)$ e $d \mid n$ allora si ha che
$$x \equiv y(\mathtt{mod}\ n) \iff y - x \in I(n) \iff y - x = nk = dhk, \exists h, k \in \mathbb{Z} \implies x \equiv y(\mathtt{mod}\ d)$$
- Quindi, siccome $16 \mid 240, 3 \mid 240$ e $5 \mid 240$, impostiamo il seguente sistema
$$\begin{cases} 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 3) \\ 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5) \\ 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 16) \end{cases}$$
- Riduciamo le classi di equivalenza del sistema:
  - Riduciamo $193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 3)$ in:
$$[193][x] = [1] \implies [1][x] = [1] \implies [x] = [1]$$
  - Riduciamo $193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5)$ in:
$$[193][x] = [1] \implies [3][x] = [1] \implies [x] = [3]^{-1} \implies [x] = [2]$$
  - Riduciamo $193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 16)$ in:
$$[193][x] = [1] \implies [1][x] = [1] \implies [x] = [1]$$
- Riconduciamo quindi il sistema iniziale ad una versione semplificata sulla quale possiamo applicare il teorema cinese:
$$\begin{cases} 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 3) \\ 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 5) \\ 193x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 16) \end{cases} \implies \begin{cases} x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 3) \\ x \equiv 2(\mathtt{mod}\ 5) \\ x \equiv 1(\mathtt{mod}\ 16) \end{cases}$$

- Quindi si ha che $x = 1 + 16k \implies 1 + 16k \equiv 1 (\mathtt{mod}\ 3)$:

$$[1] + [16][k] = [1] \iff [k] = [0][16]^{-1} \iff [k] = [0]$$

- Dunque $k = 0 + 3j \implies x = 1 + 16(0 + 3j) = 1 + 48j \implies 1 + 48j \equiv 2 (\mathtt{mod}\ 5)$:

$$[1] + [48][j] = [2] \iff [j] = [1][3]^{-1} \iff [j] = [2]$$

- Infine $j = 2 + 5h \implies x = 1 + 48(2 + 5h) = 97 + 240h \implies x \equiv 97 (\mathtt{mod}\ 240)$
- Dunque $[197]^{-1} = [97] \in \mathbb{Z}_{240}$. Difatti, in $\mathbb{Z}_{240}$ si ha che $[193][97] = [1]$

4.8 Piccolo teorema di Fermat

Lemma 28

Dato $p \in \mathbb{P}$ e dato $0 < k < p$ si ha che:

$$p \left| \binom{p}{k} \right.$$

Dimostrazione:

- Poiché $p \in \mathbb{P}$, allora esso non potrà essere semplificato dal denominatore, dunque si ha che:

$$\binom{p}{k} = \frac{p!}{k! \cdot (p-k)!} = p \cdot \frac{(p-1)!}{k! \cdot (p-k)!} = ph \iff p \left| \binom{p}{k} \right.$$

  dove $h := \frac{(p-1)!}{k! \cdot (p-k)!} \in \mathbb{Z}$ per definizione di coefficiente binomiale

□

Esempio:

$$\binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = 7 \cdot 5 \implies 7 \left| \binom{7}{3} \right.$$

Corollary 10

Dato $p \in \mathbb{P}$, dato dato $0 < k < p$ e dato $[a] \in \mathbb{Z}_p$, si ha che:

$$\binom{p}{k} \cdot [a] = [0]$$

Dimostrazione:

- Per il lemma precedente si ha che

$$p \left| \binom{p}{k} \right. \iff \binom{p}{k} = ph, \exists h \in \mathbb{Z}$$

- Di conseguenza, si ha che:

$$\binom{p}{k} \cdot [a] = ph \cdot [a] = [p][h][a] = [0][h][a] = [0], \exists h \in \mathbb{Z}$$

□

Lemma 29

Dato $p \in \mathbb{P}$ e dati $[a], [b] \in \mathbb{Z}_p$ si ha che:

$$([a] + [b])^p = [a]^p + [b]^p$$

Dimostrazione:

- Dato il **binomio di Newton** (dimostrato nella sezione 3.6), sappiamo che:

$$([a] + [b])^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} [a]^k [b]^{p-k}$$

- Se $k = 0 \vee k = p$, si ha che:

$$\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$$

- Se invece $0 < k < p$, per il corollario precedente sappiamo dato $[x] \in \mathbb{Z}_p$ si ha che:

$$p \left| \binom{p}{k} \implies \binom{p}{k} \cdot [x] = 0 \right.$$

- Di conseguenza, ogni termine della sommatoria, escluso il primo e l'ultimo, può essere ricondotto alla classe $[0]$:

$$([a] + [b])^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} [a]^k [b]^{p-k} = \binom{p}{0} [b]^p + \binom{p}{p} [a]^p + \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} [a]^k [b]^{p-k} =$$

$$= [b]^p + [a]^p + \sum_{k=1}^{p-1} [0] = [b]^p + [a]^p$$

□

Corollary 11

Dato $p \in \mathbb{P}$ e dati $[a_1], \ldots, [a_n] \in \mathbb{Z}_p \mid n \in \mathbb{N}$ si ha che:

$$([a_1] + \ldots + [a_n])^p = [a_1]^p + \ldots + [a_n]^p$$

Dimostrazione:

- Caso base (n=1):

$$[a_1]^p = [a_1]^p$$

- Caso base (n=2):
$$([a_1] + [a_2])^p = [a_1]^p + [a_2]^p$$
- Ipotesi induttiva:
$$([a_1] + \ldots + [a_n])^p = [a_1]^p + \ldots + [a_n]^p \mid n \in \mathbb{N}$$
- Passo induttivo:
$$([a_1] + \ldots + [a_n] + [a_{n+1}])^p = (([a_1] + \ldots + [a_n]) + [a_{n+1}])^p =$$
$$= ([a_1] + \ldots + [a_n])^p + [a_{n+1}]^p = [a_1]^p + \ldots + [a_n]^p + [a_{n+1}]^p$$

□

Theorem 30. Piccolo teorema di Fermat

Dato il campo $\mathbb{Z}_p$ dove $p \in \mathbb{P}$, dato $[a] \in \mathbb{Z}_p$ si ha che:

$$a^p \equiv a (\mathsf{mod}\ p)$$

Dimostrazione:

- Caso base (a=0):
$$[0]^p = [0]$$
- Ipotesi induttiva:
$$[a]^p = [a]$$
- Passo induttivo:
$$[a+1]^p = ([a] + [1])^p = [a]^p + [1]^p = [a]^p + [1] = [a] + [1] = [a+1]$$

□

Corollary 12

Dato il campo $\mathbb{Z}_p$ dove $p \in \mathbb{P}$, dato $[a] \in \mathbb{Z}_p$ si ha che:

$$a^{p+k} \equiv a^{k+1} (\mathsf{mod}\ p)$$

In particolare, se $k = -2$, si ha che:

$$a^{p-2} \equiv a^{-1} (\mathsf{mod}\ p)$$

dunque è sempre possibile calcolare comodamente $a^{-1} \in \mathbb{Z}_p$

Dimostrazione:

- Per il piccolo teorema di Fermat, si ha che:

$$[a]^p = [a] \iff [a]^k[a]^p = [a][a]^k \iff [a]^{p+k} = [a][a]^{k+1-1} \iff$$

$$\iff [a]^{p+k} = [a][a]^{-1}[a]^{k+1} \iff [a]^{p+k} = [1][a]^{k+1} \iff [a]^{p+k} = [a]^{k+1}$$

□

Esempio:

- Vogliamo trovare $[4]^{-1} \in \mathbb{Z}_{13}$. Per il corollario appena mostrato, si ha che:

$$4^{-1} \equiv 4^{13-2}(\mathsf{mod}\ 13) \iff [4]^{-1} = [4]^{11} = [4][4]^{10} = [4][4^2]^5 = [4][16]^5 =$$

$$= [4][3]^5 = [4][3]^2[3]^3 = [4][9][27] = [4][9][1] = [36] = [10]$$

4.9 Funzione totiente di Eulero

Definition 33. Funzione totiente di Eulero

Dato $n \in \mathbb{N}$, definiamo come $\varphi(n)$ come **funzione totiente di Eulero**, dove:

$$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto |\mathbb{Z}_n|$$

Lemma 31

Dati i due anelli commutativi $\mathbb{Z}_m$ e $\mathbb{Z}_n$, dove $MCD(m,n) = 1$, si ha che:

$$[a] \in \mathbb{Z}^*_{mn} \iff [a] \in \mathbb{Z}^*_m, [a] \in \mathbb{Z}^*_n$$

Dimostrazione:

- Supponiamo che $[a] \in \mathbb{Z}^*_{mn}$, da cui ricaviamo che:

$$[a] \in \mathbb{Z}^*_{mn} \iff \exists x \in \mathbb{Z}_{mn} \mid ax \equiv 1(\mathsf{mod}\ mn)$$

- Poiché $MCD(m,n) = 1 \implies mcm(m,n) = mn$, per il teorema cinese dei resti si ha che:

$$ax \equiv 1(\mathsf{mod}\ mn) \iff \begin{cases} ax \equiv 1(\mathsf{mod}\ m) \\ ax \equiv 1(\mathsf{mod}\ n) \end{cases} \iff [a] \in \mathbb{Z}^*_m, [a] \in \mathbb{Z}^*_n$$

□

Observation 21

Dati $m, n \in \mathbb{N}$ dove $MCD(m, n) = 1$, si ha che:

$$\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$$

Dimostrazione:

- Per il lemma precedente, la seguente funzione $f : \mathbb{Z}^*_{mn} \to \mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}^*_n$ risulta essere biettiva, implicando che:

$$\varphi(mn) = |\mathbb{Z}^*_{mn}| = |\mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}^*_n| = |\mathbb{Z}^*_m| \cdot |\mathbb{Z}^*_n| = \varphi(m)\varphi(n)$$

□

Observation 22

Dati $p \in \mathbb{P}$ e $k \neq 0 \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$$

Dimostrazione:

- Per dimostrazione precedente, per ogni $0 < a < p^k$, si ha che:

$$[a] \in \mathbb{Z}^*_{p^k} \iff MCD(a, p^k) = 1$$

- Inoltre, poiché $p \in \mathbb{P}$, si ha che:

$$MCD(a, p^k) = 1 \iff p \nmid a \iff \nexists n \in \mathbb{Z} \mid a = np$$

- Simmetricamente, quindi, si ha che:

$$[a] \notin \mathbb{Z}^*_{p^k} \iff MCD(a, p^k) \neq 1 \iff p \mid a \iff \exists n \in \mathbb{Z} \mid a = np$$

- Consideriamo quindi i multipli di p compresi tra 0 e p^k (escluso):

$$0 \leq np < p^k \implies 0 \leq n \leq p^{k-1}$$

  da cui traiamo che la cardinalità degli elementi non invertibili in $\mathbb{Z}_{p^k}$ corrisponde a:

$$H := \{[a] \in \mathbb{Z}_{p^k} \mid [a] \notin \mathbb{Z}^*_{p^k}\} \implies |H| = p^{k-1}$$

- Infine, quindi, concludiamo che:

$$\varphi(p^l) = \left|\mathbb{Z}_{p^k}\right| = \left|\mathbb{Z}^*_{p^k}\right| - |H| = p^k - p^{k-1} = p^{k-1}(p-1)$$

□

Proposition 32

Dato $n \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Dimostrazione:

- Consideriamo la fattorizzazione in primi di n, ossia:

$$\exists p_1, \ldots, p_k \in \mathbb{P}, i_1, \ldots, i_k \in \mathbb{N}_{>0} \mid n = p_1^{i_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k}$$

- Poiché tali fattori sono tutti coprimi tra loro, si ha che:

$$\varphi(n) = \varphi(p_1^{i_1}) \cdot \ldots \cdot \varphi(p_k^{i_k}) = p_1^{i_1-1}(p_i - 1) \cdot \ldots \cdot p_k^{i_k-1}(p_k - 1) =$$

$$= \frac{p_1^{i_1}(p_1 - 1)}{p_1} \cdot \ldots \cdot \frac{p_k^{k_1}(p_k - 1)}{p_k} = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

□

4.10 Ordine di un elemento di un gruppo

Definition 34. Sottogruppo ciclico ed Ideale d'ordine

Sia G un gruppo. Dato $g \in G$, definiamo il **sottogruppo ciclico** $H(g) \leqslant G$ e l'**ideale d'ordine** $I(g) \triangleleft \mathbb{Z}$ come:

$$H(g) : \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$$

$$I(g) : \{n \in \mathbb{Z} \mid g^n = e\}$$

Dimostrazioni:

- $H \leqslant G$
  - $g^0 = e \implies e \in H(g)$
  - $g^n, g^m \in H(g) \implies g^n \cdot g^m = g^{n+m} \implies g^{n+m} \in H(g)$
  - $g^n \in H(g) \implies (g^n)^{-1} = g^{-n} \implies g^{-n} \in H(g)$
- $I(g) \triangleleft \mathbb{Z}$
  - $g^0 = e \implies 0 \in H(g)$
  - $n, m \in I(g) \implies g^n = g^m = e \implies g^{n+m} = g^n \cdot g^m = e \implies n + m \in I(g)$
  - $n \in I(g) \implies g^{-n} = (g^n)^{-1} = e^{-1} = e \implies -n \in I(g)$
  - $n \in I(g), k \in \mathbb{Z} \implies g^{nk} = (g^n)^k = e^k = e \implies kn \in I(g)$

□

Definition 35. Ordine di un elemento

Sia G un gruppo. Dato $g \in G$, definiamo l'**ordine di** g come:

$$o(g) := |H(g)|$$

Proposition 33

Sia G un gruppo. Dato $g \in G$, si ha che $\exists! d \in \mathbb{N} \mid I(g) = I(d)$ tale che

- $d = 0 \implies o(g) = +\infty$
- $d > 0 \implies o(g) = d$

Dunque, $o(g)$ corrisponde al **più piccolo esponente** d tale che $g^d = e$

Dimostrazione:

- Poiché $I(g) \triangleleft \mathbb{Z}$ e poiché $\mathbb{Z}$ è un dominio ad ideali principali, si ha che $\exists! d \in \mathbb{N} \mid I(g) = I(d)$.
- Di conseguenza, si ha che:

$$n, m \in I(g) \iff g^n = g^m \iff g^{-n} \cdot g^n = g^m \cdot g^{-n} \iff e = g^{m-n} \iff$$

$$\iff m - n \in I(g) = I(d) \iff m - n = dh, \exists h \in \mathbb{Z} \iff d \mid m - n$$

- Consideriamo la funzione $f : \mathbb{Z} \to H(g) : n \mapsto g^n$, la quale risulta essere suriettiva per definizione stessa di $H(g)$
- Nel caso in cui $d = 0$, si ha che:

$$g^n = g^m \iff d \mid m - n \iff 0 \mid m - n \iff$$

$$\iff m - n = 0k, \exists k \in \mathbb{Z} \iff m - n = 0 \iff m = n$$

  di conseguenza, si ha che $f(n) = f(m) \iff m = n, \forall m, n \in \mathbb{Z}$, implicando che f sia anche iniettiva. Dunque, siccome f sarebbe una funzione biettiva, ne segue che

$$o(g) := |H(g)| = |Z| = +\infty$$

- Nel caso in cui $d > 0$, invece, si ha che $d \in I(d) = I(g) \iff g^d = e$

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \exists! q, r \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < d \mid n = dq + r \implies$$

$$\implies g^n = g^{dq+r} = g^{dq} g^r = (g^d)^q g^r = e^q g^r = g^r$$

- Poiché $\forall n \in \mathbb{Z}, \exists r \in [0, d) \mid g^n = g^r$ ne segue che possano esistere al massimo d potenze di g, implicando che $|H(g)| \leq d$
- Consideriamo ora invece la seguente restrizione di f, ossia $g : \{0, \ldots, d-1\} \to H(g) : n \mapsto g^n$

- Considerando ancora il caso in cui $d > 0$ e presi $0 \leq m, n < d$, da cui traiamo che $-d < m - n < d$, si ha che:

$$g^n = g^m \iff g^n g^{-m} = g^m g^{-n} \iff g^{m-n} = e \iff$$
$$\iff m - n \in I(g) = I(d) \iff m - n = dp, \exists p \in \mathbb{Z}$$

- Tuttavia, poiché $-d < m - n < d$, l'unica possibilità è $m - n = 0$, implicando che $m = n$. Di conseguenza, si ha che $g(n) = g(m) \iff n = m, \forall 0 \leq m, n < d$, implicando che g sia iniettiva, implicando a sua volta che:

$$o(g) := |H(g)| \leq |\{0, \dots, d-1\}| = d$$

- Infine, quindi, otteniamo che $d \geq |H(g)| \leq d \implies |H(g)| = d$, implicando quindi che g possa essere iniettiva se e solo se è suriettiva, da cui concludiamo che $g(x) = g^x \in H(g), \forall 0 \leq x < d$:

$$H(g) = \{g^0, \dots, g^{d-1}\}$$

□

Observation 23

Sia G un gruppo con cardinalità finita. Dato $g \in G$ si ha che

$$o(g) := |H(g)| \leq |G| < +\infty \implies o(g) \mid |G| \implies g^{|G|} = e$$

Attenzione: se $o(g) = +\infty$ allora $o(g) \not\leq |G|$

Dimostrazione:

- Dato $d := o(g) := |H(g)| \leq |G| < +\infty$, per il teorema di Lagrange si ha che:

$$o(g) \mid |G| \implies d \mid |G| \implies |G| = dk, \exists k \in \mathbb{Z} \implies g^{|G|} = g^{dk} = (g^d)^k = e^k = e$$

□

Corollary 13. Piccolo teorema di Fermat (seconda dimostrazione)

Dato il campo $\mathbb{Z}_p$ dove $p \in \mathbb{P}$, dato $[a] \in \mathbb{Z}_p$ si ha che:

$$a^p \equiv a (\mathsf{mod}\ p)$$

Dimostrazione:

- Se $[a] = [0]$, allora abbiamo che $[a]^p = [0]$
- Poiché $\mathbb{Z}_p$ è un campo, si ha che $\mathbb{Z}_p^* = \mathbb{Z}_p - \{0\}$, implicando che $\left|\mathbb{Z}_p^*\right| = p - 1$.
- Di conseguenza, dato $[a] \neq [0] \in \mathbb{Z}_p^*$ si ha che:

$$o(a) \mid \left|Z_p^*\right| \implies [a]^{\left|\mathbb{Z}_p^*\right|} = [1] \implies [a]^{p-1} = [1] \implies [a]^p [a]^{-1} = [1] \implies [a]^p = [a]$$

□

Theorem 34. Teorema di Eulero

Dati $a, n \in \mathbb{N}$ tali che $MCD(a, n) = 1$, si ha che:

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1(\texttt{mod}\ n)$$

dove $\varphi(n)$ è la funzione totiente di Eulero

Dimostrazione:

- Per dimostrazione precedente, si ha che:

$$MCD(a, n) = 1 \iff [a] \in \mathbb{Z}_n^*$$

- Di conseguenza, si ha che:

$$o(a) \mid |Z_n^*| \implies [a]^{|\mathbb{Z}_n^*|} = [1] \implies [a]^{\varphi(n)} = [1]$$

□

Proposition 35. Gruppo ciclico

Sia G un gruppo con cardinalità finita. Dato $g \in G$ si ha che

$$o(g) := |H(g)| = |G| \iff H(g) = G$$

In tal caso definiamo G come **gruppo ciclico**

Dimostrazione:

- Poiché $H(g) \leqslant G \implies H(g) \subseteq G$, per definizione stessa di insieme improprio si ha

$$|H(g)| = |G| \iff H(g) = G$$

□

Corollary 14

Sia G un gruppo. Dato $g \in G$, si ha che:

$$g \in G^* \implies g^{o(g)-1} = g^{-1}$$

Dimostrazione:

- Siccome $g \in \mathbb{G}^* \iff \exists g^{-1} \in \mathbb{G}$, allora:

$$g^{o(g)} = 1 \iff g^{o(g)}g^{-1} = g^{-1} \iff g^{o(g)-1} = g^{-1}$$

□

Lemma 36

Sia G un gruppo. Dato $g \in G$, si ha che:

$$g \in g^{-1} \implies o(g) = o(g^{-1})$$

Dimostrazione:

- Siccome $g \in \mathbb{G}^* \iff \exists g^{-1} \in \mathbb{G}$, allora:

$$(g^{-1})^n \in H(g^{-1}) \implies (g^{-1})^n = g^{-n} \in H(g)$$

- Analogamente, si ha che:

$$g^n \in \mathbb{H}(\eth) \implies g^n = (g^-1)^{-n} \in H(g^-1)$$

- Di conseguenza, si verifica che $H(g) = H^{-g} \implies o(g) = o(g^{-1})$ □

Lemma 37

Sia G un gruppo finito e $k \in \mathbb{Z}$, per ogni $g \in G$ si verifica che:

$$o(g^k) \mid o(g)$$

Dimostrazione:

- Dimostriamo che $H(g^k) \leqslant H(g)$
  - $(g^k)^n \in H(g^k) \implies (g^k)^n = g^{kn} \in H(g) \implies H(g^k) \subseteq H(g)$
  - $(g^k)^0 = g^0 = e \in H(g^k)$
  - $(g^k)^n, (g^k)^m \in H(g) \implies (g^k)^n(g^k)^m = g^{kn}g^{km} = g^{kn+km} = g^{k(n+m)} = (g^k)^{n+m} \in H(g)$
  - $(g^k)^n \in H(g^k) \implies ((g^k)^n)^{-1} = (g^k)^{-n} \in H(g^k)$
- Di conseguenza, per il teorema di Lagrange si ha che

$$\left|H(g^k)\right| \mid |H(g)| \iff o(g^k) \mid o(g)$$

□

Lemma 38

Sia G un gruppo finito. Dati $g, h \in G \mid gh = hg$, si ha che:

$$\frac{m}{d} \mid o(gh) \qquad \text{e} \qquad o(gh) \mid m$$

dove $m := mcm(o(g), o(h))$ e $d := MCD(o(g), o(h))$.

In particolare, se $d = 1$, allora $o(gh) = o(g)o(h)$.

Dimostrazione:

- Per definizione stessa di $m := mcm(o(g), o(h))$, si ha che

$$o(g) \mid m, o(h) \mid m \iff o(g) \cdot p = m = o(h) \cdot q, \exists p, q \in \mathbb{Z}$$

- Siccome per ipotesi $gh = hg$, si ha che:

$$(gh)^m = \underbrace{gh \cdot \ldots \cdot gh}_{m \text{ volte}} = g^m h^m = g^{o(g)\cdot p} h^{o(h)\cdot q} = (g^{o(g)})^p (h^{o(h)})^q = e^p e^q = e \implies$$

$$\implies m \in I(gh) = I(o(gh)) \implies o(gh) \mid m$$

- Inoltre, abbiamo che

$$e = (gh)^{o(gh)} = \underbrace{gh \cdot \ldots \cdot gh}_{o(gh) \text{ volte}} = g^{o(gh)} h^{o(gh)} \implies e = g^{o(gh)} h^{o(gh)} \iff g^{o(gh)} = h^{-o(gh)}$$

- Per il lemma precedente, abbiamo che

$$o(g^{o(gh)}) \mid o(g), o(h^{-o(gh)}) \mid o(h)$$

  e dato che $g^{o(gh)} = h^{-o(gh)}$, otteniamo che

  $o(g^{o(gh)}) \mid o(g), o(h^{-o(gh)}) \mid o(h) \iff o(g^{o(gh)}) \mid o(g), o(g^{o(gh)}) \mid o(h) \implies o(g^{o(gh)}) \mid d$

  dove $d = MCD(o(g), o(h))$

- A questo punto, notiamo che:

$$\frac{m}{d} \cdot \frac{d}{o(g^{o(gh)})} = \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \implies \frac{m}{d} \mid \frac{m}{o(g^{o(gh)})}$$

- Inoltre, ponendo $k := g^{o(gh)}$ abbiamo che

$$g^{o(g^{o(gh)})o(gh)} = g^{k \cdot o(gh)} = (g^{o(gh)})^k = k^{o(k)} = e \implies o(g) \mid o(g^{o(gh)})o(gh)$$

  e analogamente che:

$$h^{-o(g^{o(gh)})o(gh)} = (h^{-o(gh)})^{o(g^{o(gh)})} = (g^{o(gh)})^{o(g^{o(gh)})} = k^{o(k)} = e \implies$$

$$\implies o(h) \mid -o(g^{o(gh)})o(gh) \implies o(h) \mid o(g^{o(gh)})o(gh)$$

  di conseguenza si ha che $m \mid o(g^{o(gh)})o(gh)$

- Quindi, $\exists j \in \mathbb{Z}$ tale che:

$$o(g^{o(gh)})o(gh) = mj \implies o(gh) = \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \cdot j \implies \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \mid o(gh)$$

- Infine, per transitività si ha che:

$$\frac{m}{d} \mid \frac{m}{o(g^{o(gh)})}, \frac{m}{o(g^{o(gh)})} \mid o(gh) \implies \frac{m}{d} \mid o(gh)$$

- Per l'ultima affermazione notiamo che se $d = 1$, allora:

$$\frac{m}{d} \mid o(gh) \implies m \mid o(gh)$$

di conseguenza, poiché $m, d \in \mathbb{N}$, per anti-simmetria (sezione 3.2) si ha che:

$$m \mid o(gh), o(gh) \mid m \iff m = o(gh)$$

- Dunque, per il teorema fondamentale dell'algebra, se $d = 1$ si ha che:

$$o(g)(h) = m = o(g)o(h)$$

□

Proposition 39

Siano $n_1, \ldots, n_k \neq 0 \in \mathbb{N} \mid MCD(a_i, a_j) \iff i \neq j$ e sia $N := mcm(n_1, \ldots, n_k) = n_1 \cdot \ldots \cdot \cdots \cdot n_k$.

Dato $[a] \in \mathbb{Z}_{\gtrdot}{}^*$, dove $m := mcm(o_1, \ldots, o_k)$ e dove $o_h := o([a])$ nel gruppo $\mathbb{Z}_{\ltimes \tilde{>}}{}^*, \forall 0 < h < k$, posto $o := o([a])$ nel gruppo $\mathbb{Z}^*_{\gtrdot}$ si ha che:

$$o = m := mcm(o_1, \ldots, o_k)$$

Dimostrazione:

- Per il teorema cinese dei resti, abbiamo che:

$$a^o \equiv 1(\texttt{mod}\ N) \iff \begin{cases} a^o \equiv 1(\texttt{mod}\ n_1) \\ \vdots \\ a^o \equiv 1(\texttt{mod}\ n_k) \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} o_1 \mid o \\ \vdots \\ o_k \mid o \end{cases} \iff m := mcm(o_1, \ldots, o_k) \mid o$$

- Inoltre, poiché $m := mcm(o_1, \ldots, o_k)$, abbiamo che:

$$\begin{cases} o_1 \mid m \\ \vdots \\ o_k \mid m \end{cases} \iff \begin{cases} a^m \equiv 1(\texttt{mod}\ n_1) \\ \vdots \\ a^m \equiv 1(\texttt{mod}\ n_k) \end{cases} \iff a^m \equiv 1(\texttt{mod}\ N) \implies o \mid m$$

- Poiché $o, m \in \mathbb{N}$, per anti-simmetria (sezione 3.2) si ha che:

$$o \mid m, m \mid o \iff o = m)$$

□

Esempio:

- Vogliamo trovare tutti gli inversi di $\mathbb{Z}_{21}$ e il loro ordine, determinando se $\mathbb{Z}_{21}$ sia un gruppo ciclico
- Dato $g \in \mathbb{Z}_{21}$, sappiamo che $g \in \mathbb{Z}_{21}^* \iff MCD(a, 21) = 1$ (sezione 4.5). Dunque abbiamo che:

$$\mathbb{Z}_{21}^* : \{[1], [2], [4], [5], [8], [10], [11], [13], [16], [17], [19], [20]\} \implies |\mathbb{Z}_{21}^*| = 12$$

- Dato $g \in \mathbb{Z}_{21}^*$, per Lagrange abbiamo che $o(g)$ può essere solo un divisore di $|\mathbb{Z}_{21}^*|$, riducendo i tentativi necessari a trovare l'ordine di ogni elemento da 21 a 6:

$$o(g) \mid |\mathbb{Z}_{21}^*| \implies o(g) \mid 12 \implies o(g) \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$$

- Calcoliamo quindi gli ordini dei vari invertibili in $\mathbb{Z}_{21}$ trovati:
  - $[1]^1 = 1 \implies \begin{cases} o([1]) = 1 \\ [1]^{-1} = [1]^0 = [1] \end{cases}$
  - $[2]^6 = [64] = [1] \implies \begin{cases} o([2]) = 6 \\ [2]^{-1} = [2]^5 = [11] \end{cases} \implies \begin{cases} o([11]) = 6 \\ [11]^{-1} = [2] \end{cases}$
  - $[4]^3 = [2]^6 = [64] = [1] \implies \begin{cases} o([4]) = 3 \\ [4]^{-1} = [4]^2 = [16] \end{cases} \implies \begin{cases} o([16]) = 3 \\ [16]^{-1} = [4] \end{cases}$
  - $[5]^6 = [5^2]^3 = [4]^3 = [1] \implies \begin{cases} o([5]) = 6 \\ [5]^{-1} = [5]^5 = [17] \end{cases} \implies \begin{cases} o([17]) = 6 \\ [17]^{-1} = [5] \end{cases}$
  - $[8]^2 = [2]^6 = [1] \implies \begin{cases} o([8]) = 2 \\ [8]^{-1} = [8] \end{cases}$
  - $[10]^6 = [10^3]^2 = [13]^2 = [1] \implies \begin{cases} o([10]) = 6 \\ [10]^{-1} = [10]^5 = [19] \end{cases} \implies \begin{cases} o([19]) = 6 \\ [19]^{-1} = [10] \end{cases}$
  - $[13]^2 = [1] \implies \begin{cases} o([13]) = 2 \\ [13]^{-1} = [13]^1 = [13] \end{cases}$
  - $[20]^2 = [1] \implies \begin{cases} o([20]) = 2 \\ [20]^{-1} = [20]^1 = [20] \end{cases}$
- Poiché $\nexists g \in \mathbb{Z}_{21}^* \mid o(g) = |\mathbb{Z}_{21}^*|$, concludiamo che $\mathbb{Z}_{21}^*$ non è un gruppo ciclico

Capitolo 5

Gruppo Simmetrico

Observation 24

Una funzione $f : X \to Y : x \to f(x)$ è essere invertibile se e solo se f è biettiva.

$$f \texttt{ invertibile} \iff f \texttt{ biettiva}$$

dove l'essere invertibile equivale a dire che $\exists f^{-1} : Y \to X : f(x) \mapsto x$

Dimostrazione:

- Sia $f : X \to Y : x \mapsto f(x)$
- Se $\exists f^{-1} : Y \to X : f(x) \mapsto x$, ossia f è invertibile, allora

  $$f(x) = f(y) \implies f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(f(g)) \implies x = y$$

  dunque f è iniettiva
- Analogamente, si ha che

  $$\forall y \in Y, \exists x \in X \mid y = f(x) = f(f^{-1}(y))$$

  dunque f è anche suriettiva, implicando che essa sia biettiva
- Inoltre, poiché $f = (f^{-1})^{-1}$, anche f^{-1} è invertibile e di conseguenza biettiva
- Se invece f è biettiva, allora

  $$\forall x \in X, \exists! y \in Y \mid f(x) = y \implies f(f^{-1}(y)) = y$$

  di conseguenza, f è invertibile

□

Definition 36. Gruppo simmetrico

Dato un insieme X, denotiamo come $\mathcal{S}_X$ l'insieme:

$$\mathcal{S}_X : \{f : X \to X \mid f \texttt{ è biettiva}\}$$

Inoltre, si ha che $(\mathcal{S}_X, \circ)$ è un gruppo.

Dimostrazione:

- Per natura stessa della composizione tra funzione si ha che

$$f, g, h \in \mathcal{S}_X \implies h \circ (g \circ f) = h \circ g \circ f = (h \circ g) \circ f$$

- La funzione identità $\texttt{id} : X \to X : x \mapsto x$ è biettiva, dunque

$$\exists \texttt{id} \in \mathcal{S}_X \mid \forall f \in \mathcal{S}_X, f \circ \texttt{id} = \texttt{id} \circ f = f$$

- Poiché una funzione è biettiva se e solo se è invertibile, ne segue che

$$\forall f \in \mathcal{S}_X, \exists f^{-1} \in \mathcal{S}_X \mid f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = \texttt{id}$$

□

Observation 25

Dato il gruppo simmetrico $\mathcal{S}_X$, ogni $f \in \mathcal{S}_X$ corrisponde ad una **permutazione** del dominio X, poiché $f : X \to X$ è biettiva. Dunque, è possibile definire impropriamente $\mathcal{S}_X$ come il "**gruppo delle permutazioni di** X".

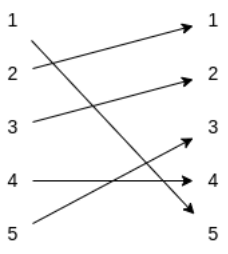
In particolare, se $|X| = n$ dove $n \in \mathbb{N}$, ogni $f \in \mathcal{S}_X$ corrisponderà ad una permutazione di n elementi. In tal caso, denotiamo come $\mathcal{S}_n$ il **gruppo simmetrico di ordine** n, la cui cardinalità corrisponde a $|\mathcal{S}_n| = n!$

Esempio:

- Data la permutazione $\sigma \in \mathcal{S}_5$, possiamo utilizzare due **notazioni** per poterne descrivere il comportamento:

Tramite grafo

σ



Tramite matrice

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Observation 26

Per comodità di scrittura, definiamo l'operazione binaria **prodotto tra permutazioni** come:

$$\cdot : \mathcal{S}_n \times \mathcal{S}_n \to \mathcal{S}_n : (\sigma, \tau) \mapsto \tau \circ \sigma$$

In altre parole, si ha che $\sigma\tau := \sigma \circ \tau = \sigma(\tau(x)), \forall x$.

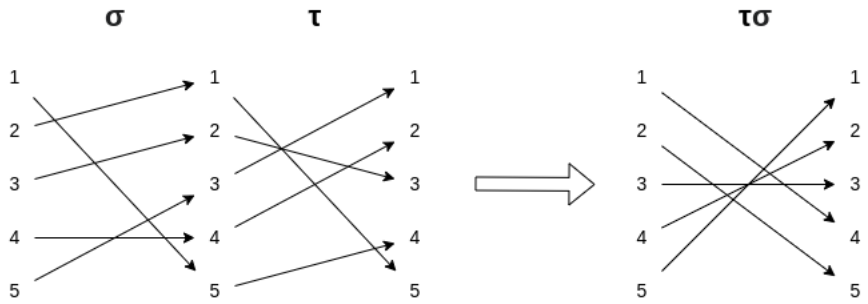
Ovviamente, $(\mathcal{S}_n, \cdot)$ risulta essere un **gruppo** (non abeliano poiché per natura stessa della composizione si ha che $\sigma\tau \neq \tau\sigma$))

Esempio:

- Siano $\sigma, \tau \in \mathcal{S}_5$ tali che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

- Per calcolare il prodotto tra le due permutazioni (dunque la loro composizione), utilizziamo due metodi:
  - Tramite **grafo**, considerando la composizione delle frecce rappresentanti le due permutazioni



  - Tramite **matrici**, dove ci basta "allineare" gli elementi in input della seconda permutazione con gli elementi in output della seconda. Il risultato del prodotto sarà costituito dagli **elementi in input della prima** e gli **elementi in output della seconda**.

$$\begin{matrix} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix} \implies \begin{matrix} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \\ \tau = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{matrix} \implies \tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5.1 Ordine di una permutazione

Definition 37. Ciclo di una permutazione

Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Definiamo come **ciclo di** σ una sequenza di interi $1 \leq i_1, \dots, i_n \leq n$ tutti distinti tra loro tali che:

$$\sigma(i_1) = i_2, \sigma(i_2) = i_3, \dots, \sigma(i_n) = i_1$$

Definiamo come **lunghezza del ciclo** il numero di elementi appartenenti al ciclo.

Esempio:

- Consideriamo la seguente permutazione in $\sigma \in \mathcal{S}_9$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

- Notiamo la presenza di tre cicli all'interno di tale permutazione:
  - $1 \to 5 \to 2 \to 7 \to 1$ che abbreviamo come (1587)
  - $3 \to 6 \to 3$ che abbreviamo come (36)
  - $4 \to 9 \to 8 \to 4$ che abbreviamo come (498)

Definition 38. Decomposizione in cicli

Data $\sigma \in \mathcal{S}_n$ composta da k cicli, definiamo la sua **decomposizione in cicli** come:

$$\sigma = \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_k$$

dove γ_i è un ciclo di σ

Esempio:

- Considerando ancora l'esempio precedente, possiamo riscrivere σ tramite la sua decomposizione in cicli:

$$\sigma \in \mathcal{S}_9 \mid \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 7 & 6 & 9 & 2 & 3 & 1 & 4 & 8 \end{pmatrix} \implies \sigma = (1587)(36)(498)$$

- Ovviamente, tramite una decomposizione in cicli è possibile ricostruire la permutazione associata:

$$\tau \in \mathcal{S}_8 \mid \tau = (235)(1874)(6) \implies \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Definition 39

Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Dati $1 \leq i \leq n$, definiamo:

$$I(\sigma, i) : \{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n(i) = i\}$$

$$I(\sigma) : \{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^n = \texttt{id}\}$$

dove:

- $\texttt{id}$ è la permutazione identica, dunque $\texttt{id} = (1)(2)\dots(n-1)(n)$
- $(I(\sigma(i)), +) \triangleleft (\mathbb{Z}, +)$
- $(I(\sigma), +) \triangleleft (\mathbb{Z}, +)$

Dimostrazione:

- $I(\sigma, i) \triangleleft \mathbb{Z}$:
  - $\sigma^0(i) = \texttt{id}(i) = i \implies 0 \in I(\sigma, i)$
  - $m, n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^n(i) = i = \sigma^m(i) \implies \sigma^{n+m}(i) = \sigma^n(\sigma^m(i)) = \sigma^n(i) = i \implies m + n \in I(\sigma, i)$
  - $n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^{-n}(i) = (\sigma^n)^{-1}(i) = i \implies -n \in I(\sigma, i)$
  - $n \in I(\sigma, i) \implies \sigma^{nk}(i) = (\sigma^n)^k(i) = i, \forall k \in \mathbb{Z} \implies nk \in I(\sigma, i), \forall k \in \mathbb{Z}$
  - Per gli ultimi due punti è necessario osservare che poiché $\sigma^n(i) = i$, allora $(\sigma^n)^k(i) = i, \forall k \in \mathbb{Z}$, poiché i viene sempre mandato in se stesso
- Viene omessa la dimostrazione di $I(\sigma) \triangleleft \mathbb{Z}$ poiché analoga a quella di $I(\sigma, i) \triangleleft \mathbb{Z}$

□

Lemma 40

Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e sia $\gamma_1 \dots \gamma_k$ la sua decomposizione in cicli. Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e dato $i \in \gamma_j \mid j \in [1, k]$ si ha che:

$$I(\sigma, i) = I(d_j)$$

dove d_j è la lunghezza di γ_j

Dimostrazione:

- Poiché $\mathbb{Z}$ è un dominio ad ideali principali e poiché $I(\sigma, i) \triangleleft \mathbb{Z}$, si ha che:

  $$\exists! h \in \mathbb{N} \mid I(\sigma, i) = I(h)$$

  dove $h := min(I(\sigma, i)_{>0})$
- Sia $i \in (i_1 i_2 \dots i_{d_j})$, dunque appartenente ad un ciclo di lunghezza d_j. Per comodità, supponiamo che $i = i_1$, poiché scorrere l'ordine degli elementi del ciclo non ne cambia le proprietà (ad esempio: $(2783) = (7832) = (8327) = \dots$)

- Se $0 < h < d_j$, si ha che:

$$0 < h < d_j \implies \sigma^h(i) = \sigma(\sigma^{h-1}(i)) = \sigma(i_h) = i_{h+1} \implies h \notin I(\sigma, i)$$

- Nel caso in cui invece $h = d$, si verifica che:

$$h = d_j \implies \sigma^h(i) = \sigma^{d_j}(i) = \sigma(\sigma^{d_j-1}(i)) = \sigma(i_{d_j}) = i_1 = i \implies h \in I(\sigma, i)$$

- Di conseguenza, affinché $I(\sigma, i) = I(h)$, ne segue necessariamente che $h = d_j$

□

Proposition 41. Ordine di una permutazione

Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e sia $\gamma_1 \dots \gamma_k$ la sua decomposizione in cicli. Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$, si ha che:

$$I(\sigma) = I(m) \implies o(\sigma) = m$$

dove $m := mcm(d_1, \dots, d_k)$ e dove $d_1, \dots, d_k$ sono rispettivamente le lunghezze di $\gamma_1 \dots \gamma_k$.

Dunque, $o(\sigma)$ corrisponde al **minimo comune multiplo delle lunghezze dei cicli di** σ

Dimostrazione:

- Per definizione stessa di $I(\sigma)$ e $I(\sigma, i)$, si ha che:

$$n \in I(\sigma) \iff \sigma^n = \texttt{id} \iff \sigma^n(i) = i, \forall i \in [1, n] \iff$$

$$\iff n \in I(\sigma, i), \forall i \in [1, n] \iff n \in I(\sigma, 1) \cap \dots \cap I(\sigma, n)$$

  implicando quindi che $I(\sigma) = I(\sigma, 1) \cap \dots \cap I(\sigma, n)$

- Poiché $\mathbb{Z}$ è un dominio ad ideali principali e poiché $I(\sigma) \triangleleft \mathbb{Z}$, per il lemma precedente si ha che:

$$I(\sigma) = I(\sigma, 1) \cap \dots \cap I(\sigma, n) = I(d_1) \cap \dots \cap I(d_k) = I(m)$$

  dove $m := mcm(d_1, \dots, d_k)$

□

Esempi:

- Data $\sigma \in S_7$ tale che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 7 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} = (13526)(47)$$

  L'ordine di tale permutazione risulta essere:

$$o(\sigma) = mcm(5, 2) = 10$$

- Data $\sigma \in S_{15}$ tale che:

$$\sigma = (1\ 2\ 10\ 8\ 3)(11\ 7)(4\ 12\ 14\ 6)(13)(5\ 15\ 9)$$

  L'ordine di tale permutazione risulta essere:

$$o(\sigma) = mcm(5, 2, 4, 1, 3) = 60$$

5.2 Segno delle permutazioni

Definition 40. Segno di una permutazione

Sia $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Definiamo il **segno di** σ come:

$$sgn(\sigma) = (-1)^{|Inv(\sigma)|} = \begin{cases} +1 & \text{se } |Inv(\sigma)| \text{ è pari} \\ -1 & \text{se } |Inv(\sigma)| \text{ è dipari} \end{cases}$$

Dove $Inv(\sigma)$ è l'**insieme delle sue inversioni**:

$$Inv(\sigma) : \{(i, j) \mid 1 \leq i < j \leq n, \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

Definiamo σ come **pari** se $sgn(\sigma) = +1$, mentre come **dispari** $sgn(\sigma) = -1$

Esempio:

- Sia $\sigma \in \mathcal{S}_5$ tale che

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- L'insieme delle sue inversioni sarà:

$$Inv(\sigma) : \{(1, 4), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 4)\}$$

  da cui otteniamo che $sgn(\sigma) = -1$

Definition 41. Trasposizione e Trasposizione adiacente

Definiamo $\tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$, dove $1 \leq i < j \leq n$, come **trasposizione** se:

$$\tau_{i,j}(k) = \begin{cases} j & \text{se } k = i \\ i & \text{se } k = j \\ k & \text{se } k \neq i, k \neq j \end{cases}$$

In particolare, definiamo come $\tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$ come **trasposizione adiacente** se $j = i + 1$, dunque avente l'effetto di scambiare due elementi adiacenti tra loro.

Lemma 42

Data $\sigma \in \mathcal{S}_n$, si ha che:

$$\exists 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n \mid \sigma = \tau_{i_1,i_1+1} \cdot \dots \cdot \tau_{i_k,i_k+1}$$

In altre parole, σ può essere espressa come il **prodotto di k trasposizioni adiacenti**

Dimostrazione tramite esempio:

- Prima di tutto, osserviamo che dati $\sigma, \tau_{i,j} \in \mathcal{S}_n$ tali che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

$$\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ 1 & \dots & j & \dots & i & \dots & n \end{pmatrix}$$

  si ha che:

$$\sigma\tau_{i,j} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \sigma(1) & \dots & \sigma(j) & \dots & \sigma(i) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Dunque, data $\sigma \in S_3$ tale che:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

  abbiamo che:

$$\sigma \cdot \tau_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} \implies \sigma \cdot \tau_{3,4} \cdot \tau_{2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \sigma \cdot \tau_{3,4} \cdot \tau_{2,3} \cdot \tau_{1,2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \implies \sigma \cdot \tau_{3,4} \cdot \tau_{2,3} \cdot \tau_{1,2} \cdot \tau_{3,4} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \mathtt{id}$$

- Di conseguenza, si ha che:

$$\sigma(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4}) = \mathtt{id} \iff$$

$$\iff \sigma(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})^{-1} = \mathtt{id}(\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})^{-1} \iff$$

$$\iff \sigma = (\tau_{3,4}\tau_{2,3}\tau_{1,2}\tau_{3,4})^{-1} \iff \sigma = \tau_{3,4}\tau_{1,2}\tau_{2,3}\tau_{3,4}$$

□

Proposition 43

Data $\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k$, dove $\tau_i := \tau_{i,i+1} \in \mathcal{S}_n$, si ha che:

$$sgn(\sigma) = (-1)^k$$

dove k è il numero di trasposizioni adiacenti che compongono σ

Dimostrazione:

- Sia $\tau_i = \tau_{i,i+1}$. Allora si ha che:

$$\sigma\tau_i = \begin{pmatrix} 1 & \ldots & i & i+1 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \ldots & \sigma(i+1) & \sigma(i) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

- Lo scambio effettuato genera una di due situazioni possibili: viene **creata una nuova inversione** oppure viene **risolta un'inversione pre-esistente**:

$$Inv(\sigma\tau_i) = \begin{cases} Inv(\sigma) \cup \{(i, i+1)\} & \text{se } (i, i+1) \notin Inv(\sigma) \\ Inv(\sigma) - \{(i, i+1)\} & \text{se } (i, i+1) \in Inv(\sigma) \end{cases}$$

- Di conseguenza, si ha che

$$|Inv(\sigma\tau_i)| = |Inv(\sigma)| \pm 1 \implies sgn(\sigma\tau_i) = \begin{cases} -1 & \text{se } sgn(\sigma) = +1 \\ +1 & \text{se } sgn(\sigma) = -1 \end{cases} \implies$$

$$\implies sgn(\sigma\tau) = -sgn(\sigma)$$

- Di conseguenza, se $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k$, si ha che:

$$\sigma(\tau_i \cdot \ldots \cdot \tau_k)^{-1} = (\tau_i \cdot \ldots \cdot \tau_k)(\tau_i \cdot \ldots \cdot \tau_k)^{-1} = \texttt{id}$$

- Poiché per definizione stessa di `id` si ha che $|Inv(\texttt{id})| = 0 \implies sgn(\texttt{id}) = 1$, ne segue che:

$$1 = sgn(\texttt{id}) = sgn(\sigma(\tau_i \cdot \tau_2 \cdot \tau_3 \cdot \ldots \cdot \tau_k)^{-1}) = sgn(\sigma \cdot \tau_k \cdot \ldots \cdot \tau_3 \cdot \tau_2 \cdot \tau_1) =$$
$$= -sgn(\sigma \cdot \tau_k \cdot \ldots \cdot \tau_3 \cdot \tau_2) = sgn(\sigma \cdot \tau_k \cdot \ldots \cdot \tau_3) = \ldots = (-1)^k \cdot sgn(\sigma)$$

- Quindi, otteniamo che:

$$1 = (-1)^k \cdot sgn(\sigma) \implies sgn(\sigma) = (-1)^k$$

□

Corollary 15

Date $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, si verifica che:

$$sgn(\sigma\sigma') = sgn(\sigma) \cdot sgn(\sigma')$$

□

Dimostrazione:

- Data $\sigma = \tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k$ e $\sigma' = \tau'_1 \cdot \ldots \cdot \tau'_k$, si ha che:

$$sgn(\sigma\sigma') = sgn(\tau_1 \cdot \ldots \cdot \tau_k \cdot \tau'_1 \cdot \ldots \cdot \tau'_k) = (-1)^{k+j} = (-1)^k(-1)^j = sgn(\sigma) \cdot sgn(\sigma')$$

Corollary 16

Data $\sigma \in \mathcal{S}_n$,si verifica che:

$$sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma)$$

Dimostrazione:

$$1 = sgn(\mathtt{id}) = sgn(\sigma\sigma^{-1}) = sgn(\sigma) \cdot sgn(\sigma^{-1}) \implies$$

$$\implies 1 = sgn(\sigma) \cdot sgn(\sigma^{-1}) \iff sgn(\sigma) = \pm 1 = sgn(\sigma^{-1})$$

□

Definition 42

Dato il gruppo $\mathcal{S}_n$, definiamo $\mathcal{A}_n \leqslant \mathcal{S}_n$ come il **sottogruppo alterno di ordine** n:

$$\mathcal{A}_n := \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid sgn(\sigma) = +1\}$$

Dimostrazione:

- $sgn(\mathtt{id}) = 1 \implies \mathtt{id} \in \mathcal{A}_n$
- $\sigma, \tau \in \mathcal{A}_n \implies sgn(\sigma\tau) = sgn(\sigma)sgn(\tau) = 1 \cdot 1 = 1 \implies \sigma\tau \in \mathcal{A}_n$
- $\sigma \in \mathcal{A}_n \implies sgn(\sigma^{-1}) = sgn(\sigma) = 1 \implies \sigma^{-1} \in \mathcal{A}_n$

□

Observation 27

Dato $\mathcal{S}_n$ e $\mathcal{A}_n \leqslant \mathcal{S}_n$, si ha che:

- $|\mathcal{A}_n| = \frac{n!}{2}$
- $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$

Dimostrazione:

- Date $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, si ha che:

$$\sigma \sim \sigma' \iff \sigma^{-1}\sigma' \in \mathcal{A}_n \iff sgn(\sigma^{-1}\sigma') = 1 \iff$$

$$\iff sgn(\sigma^{-1})sgn(\sigma') = 1 \iff sgn(\sigma) = sgn(\sigma')$$

- Di conseguenza, poiché $sgn(\sigma) = \pm 1, \forall \sigma \in \mathcal{S}_n$ e poiché $sgn(\mathtt{id}) = +1$, esistono solo due classi laterali sinistre:
  - La classe $[+1] : \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma \sim \mathtt{id}\}$
  - La classe $[-1] : \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid \sigma \not\sim \mathtt{id}\}$

  dunque si ha che $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$
- Infine, per il teorema di Lagrange, concludiamo che:

$$|A_n| = \frac{|\mathcal{S}_n|}{[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n]} = \frac{n!}{2}$$

□

Proposition 44

Sia $\sim$ la **relazione di coniugio** (sezione 3.5) e siano $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, tali che:

- $\gamma_1 \dots \gamma_k$ è la decomposizione in cicli di σ e $d_1, \dots d_k$ sono le lunghezze rispettive dei cicli
- $\gamma'_1 \dots \gamma'_k$ è la decomposizione in cicli di σ' e $d'_1, \dots d'_k$ sono le lunghezze rispettive dei cicli

In tal caso, si ha che:

$$\sigma \sim \sigma' \iff \begin{cases} k = h \\ d_1 = d'_1 \\ \dots \\ d_k = d'_h \end{cases}$$

Dimostrazione:

- Supponiamo che $\sigma \sim \sigma'$, dunque $\exists \alpha \in \mathcal{S}_n \mid \sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$
- Sia $\gamma_j = (i_1 \dots i_d) \mid j \in [1, k]$ un ciclo di σ. Allora, $\forall i_q \in \gamma_j \mid q \in [1, d]$ si ha che:

$$\sigma'(i_q) = \alpha\sigma\alpha^{-1}(i_q) \iff \sigma'\alpha(i_q) = \alpha\sigma\alpha^{-1}\alpha(i_q) \iff \sigma'\alpha(iq) = \alpha\sigma(i_q) \implies$$

$$\implies \sigma'\alpha(iq) = \alpha\sigma(i_q) = \begin{cases} \alpha(i_{q+1}) & \text{se } q < d \\ \alpha(i_1) & \text{se } q = d \end{cases}$$

- Di conseguenza, σ' possiede un ciclo nella forma $(\alpha(i_1), \dots, \alpha(i_d))$. Applicando lo stesso ragionamento con gli altri σ, possiamo creare una corrispondenza biunivoca tra i cicli di σ e i cicli di σ', da cui otteniamo che $h = k$ e che $d_p = d'_p, \forall p \in [1, k]$
- Viceversa, supponiamo che σ e σ' abbiano lo stesso numero di cicli e le stesse lunghezze per ogni ciclo, dunque tali che:

$$\sigma = (i_1 \dots i_{d_1}) \dots (j_1 \dots j_{d_k}) \qquad \sigma' = (a_1 \dots a_{d_1}) \dots (b_1 \dots b_{d_k})$$

- Presa $\alpha \in \mathcal{S}_n$ tale che:

$$\alpha(i_1) = a_1, \dots, \alpha(i_{d_1}) = a_{d_1}, \alpha(j_1) = b_1, \dots, \alpha(j_{d_k}) = b_{d_k}$$

dunque tale che:

$$\begin{array}{rccccccc} \sigma = & (i_1 & \dots & i_{d_1}) & \dots & (j_1 & \dots & j_{d_k}) \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \sigma' = & (a_1 & \dots & a_{d_1}) & \dots & (b_1 & \dots & j_{b_k}) \end{array}$$

- Dato $t \in [1, n]$ e dato $j \in [1, k]$, quindi, si ha che:

$$\alpha\sigma\alpha^{-1}(a_t) = \alpha\sigma(i_t) = \begin{cases} \alpha(i_{k+1}) & \text{se } t < d_j \\ \alpha(i_1) & \text{se } t = d_j \end{cases} = \begin{cases} a_{k+1} & \text{se } k < d_j \\ a_1 & \text{se } k = d_j \end{cases} \implies$$

$$\alpha\sigma\alpha^{-1}(a_t) = \sigma'(a_t) \implies \sigma \sim \sigma'$$

□

Esempi:

1. Date le seguenti permutazioni $\sigma, \sigma' \in S_6$, trovare $\alpha \in S_6$ tale che $\sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$:

$$\begin{array}{l} \sigma = (13)(254)(876) \\ \sigma' = (25)(184)(376) \end{array} \implies \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 8 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Date le seguenti permutazioni $\sigma, \sigma' \in S_7$, trovare $\alpha \in S_7$ tale che $\sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1}$:

$$\begin{array}{l} \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 6 & 1 & 4 & 2 & 7 & 5 \end{pmatrix} = (4)(13)(2675) \\ \sigma' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = (7)(56)(1234) \end{array} \implies \alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 6 & 7 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Observation 28

Sia $\sim$ la relazione di coniugio. Date $\sigma, \sigma' \in \mathcal{S}_n$, si ha che:

$$\sigma \sim \sigma' \implies sgn(\sigma) = sgn(\sigma)'$$

Dimostrazione:

- Se $\sigma \sim \sigma'$, allora

$$\exists \alpha \in \mathbb{S}_n \mid \sigma' = \alpha\sigma\alpha^{-1} \implies sgn(\sigma') = sgn(\alpha\sigma\alpha^{-1}) = sgn(\alpha)sgn(\sigma)sgn(\alpha^{-1})$$

- Dunque, poiché $sgn(\alpha) = sgn(\alpha^{-1}) = \pm 1 \implies sgn(\alpha)sgn(\alpha^{-1}) = 1$, se segue che:

$$sgn(\sigma') = sgn(\alpha)sgn(\sigma)sgn(\alpha^{-1}) \implies$$

$$\implies sgn(\sigma') = \begin{cases} 1 \cdot sgn(\sigma) \cdot 1 = sgn(\sigma) & \text{se } sgn(\alpha) = 1 \\ (-1) \cdot sgn(\sigma) \cdot (-1) = sgn(\sigma) & \text{se } sgn(\alpha) = -1 \end{cases} \implies$$

$$\implies sgn(\sigma') = sgn(\sigma)$$

□

Proposition 45

Data $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e data la sua scomposizione in cicli $\sigma = \gamma_1 \dots \gamma_k$, si ha che:

$$sgn(\sigma) = (-1)^{n-k}$$

dove k è il numero di cicli

Dimostrazione:

- Sia $\sigma \in \mathbb{S}_n$ tale che

$$\sigma = (i_1 \ \dots \ i_{d_1})(i_{d_1+1} \ \dots \ i_{d_2}) \ \dots \ (j_1 \ \dots \ j_{d_k})$$

- Consideriamo una permutazione $\sigma' \in \mathcal{S}_n$ definita come:

$$\sigma' = (1, \dots, d_1)(d_1+1, \dots, d_1+d_2)) \ \dots \ (n-d_k+1, n-d_k+2, \ \dots \ , n-1, n) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d_1 & d_1+1 & \dots & d_1+d_2 & \dots & \dots & n-d_k+1 & \dots & n \\ 2 & 3 & \dots & 1 & d_1+2 & \dots & d_1+1 & \dots & \dots & n-d_k+2 & \dots & n-d_k+1 \end{pmatrix}$$

- Poiché σ e σ' hanno la stessa quantità di cicli ognuno avente la stessa lunghezza del ciclo corrispondente, ne segue che $\sigma \sim \sigma'$. Di conseguenza, si ha che

$$\sigma \sim \sigma' \implies sgn(\sigma) = sgn(\sigma')$$

  dunque, ci basterà trovare il segno di σ' per ottenere il segno di σ

- A questo punto, le seguenti $d_1 - 1$ trasposizioni otteniamo che:

$$\sigma \cdot \tau_{d_1-1,d_1} \cdot \tau_{d_1-2,d_1-1} \cdot \dots \cdot \tau_{2,3} \cdot \tau_{1,2} =$$

$$= (1)(2)\dots(d_1-1)(d_1)(d_1+1, \dots, d_1+d_2)) \ \dots \ (n-d_k+1, n-d_k+2, \ \dots \ , n-1, n) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & d_1 & d_1+1 & \dots & d_1+d_2 & \dots & \dots & n-(d_k+1) & \dots & n \\ 1 & 2 & \dots & d_1 & d_1+2 & \dots & d_1+1 & \dots & \dots & n-(d_k+1)+1 & \dots & n-(d_k+1) \end{pmatrix}$$

- Ripetendo tale procedimento per ogni ciclo di σ', otteniamo la permutazione identica.

- Di conseguenza, il numero di trasposizioni componenti σ' corrisponde a:

$$\sum_{j=1}^{k} d_j - 1 = \sum_{j=1}^{k} d_j - \sum_{j=1}^{k} 1 = n - k$$

  poiché la somma di tutte le lunghezze dei cicli corrisponde ad n.

- Dunque, poiché σ' è composta da $n-k$ trasposizioni adiacenti, concludiamo che:

$$sgn(\sigma) = sgn(\sigma') = (-1)^{n-k}$$

□

Capitolo 6

Morfismi

Definition 43. Morfismo

Date due strutture algebriche $(G, \cdot)$ e $(H, \odot)$ dello stesso tipo (dunque entrambe monoidi, gruppi, anelli, ...), definiamo come **morfismo** una funzione $f : G \to H$ tale che:

$$f(g \cdot h) = f(g) \odot f(h), \forall g, h \in G$$

Attenzione: se le strutture algebriche presentano più operazioni binarie, è necessario che la condizione di morfismo sia valida per ognuna di esse

Esempi:

- Dati i due gruppi $(G, \cdot)$ e $(H, \cdot)$, la funzione $f : G \to H$ è un morfismo tra gruppi se e solo se:
$$f(gh) = f(g)f(h), \forall g, h \in G$$
- Dati i due gruppi $(G, \cdot)$ e $(H, +)$, la funzione $f : G \to H$ è un morfismo tra gruppi se e solo se:
$$f(gh) = f(g) + f(h), \forall g, h \in G$$
- Dati i due anelli $(A, +, \cdot)$ e $(B, +, \cdot)$, la funzione $f : A \to B$ è un morfismo tra anelli se e solo se:
$$f(a + b) = f(a) + f(b), \forall a, b \in A$$
$$f(ab) = f(a)f(b), \forall a, b \in A$$

Observation 29

Dati due gruppi G ed H e un morfismo $f : G \to H$, si ha che:

1. $f(1_G) = 1_H$
2. $f(g^{-1}) = f(g)^{-1}, \forall g \in G$

dove 1_G ed 1_H sono rispettivamente l'elemento neutro di G ed H

Dimostrazione:

1. Dato $g \in G$, per le proprietà del morfismo f ne segue che:

$$f(g) = f(1_G \cdot g) = f(1_G)f(g) \implies f(g)f(g)^{-1} = f(1_G)f(g)f(g)^{-1} \implies$$
$$\implies 1_H = f(1_G) \cdot 1_H \implies f(1_G) = 1_H$$

2. Dato $g \in G$, per le proprietà del morfismo f ne segue che:

$$f(1_G) = 1_H \implies f(g \cdot g^{-1}) = 1_H \implies f(g)f(g^{-1}) = 1_H \implies$$
$$\implies f(g^{-1}) = 1_H \cdot f(g)^{-1} \implies f(g^{-1}) = f(g)^{-1}$$

□

6.1 Isomorfismi, Endomorfismi ed Automorfismi

Definition 44. Isomorfismo, Endomorfismo ed Automorfismo

Date due strutture algebriche G, H ed una funzione $f : G \to H$, definiamo f come:

- **Isomorfismo** se è un **morfismo** ed è **biettiva**
- **Endomorfismo** se è un morfismo e $G = H$, ossia è un **morfismo sullo stesso gruppo**
- **Automorfismo** se è un **isomorfismo** e un **endomorfismo**

Observation 30

Se $f : G \to H$ è un isomorfismo, esiste sempre l'isomorfismo inverso $f^{-1} : H \to G$

Dimostrazione:

- Se $f : G \to H$ è un isomorfismo, dunque è biettiva, allora $\exists f^{-1} : H \to G$ poiché una funzione è biettiva se e solo se è invertibile. Inoltre, poiché $(f^{-1})^{-1} = f$, anche f^{-1} è invertibile e dunque biettiva
- Dati $g, h \in H$, mostriamo che f^{-1} sia anche un morfismo:

$$gh = f(f^{-1}(g))f(f^{-1}(h)) \implies gh = f((f^{-1}(g)(f^{-1}(g)) \implies$$
$$\implies f^{-1}(gh) = f^{-1}(f((f^{-1}(g)(f^{-1}(g))) \implies f^{-1}(gh) = f^{-1}(g)f^{-1}(h)$$

□

Observation 31

Se $f : G \to H$ e $g : H \to K$ sono due isomorfismi, la loro composta $g \circ f : G \to K$ è un isomorfismo

Dimostrazione:

- Poiché la composizione di due funzioni biettive è anch'essa biettiva, si ha che

$$h := g \circ f : G \to K \text{ biettiva}$$

- Dati $x, y \in G$, mostriamo che h sia anche un morfismo:

$$h(xy) = g(f(xy) = g(f(x)f(y)) = g(f(x))g(f(y)) = h(x)h(y)$$

□

Definition 45. Relazione di isomorfismo

Date due strutture algebriche G ed H, definiamo la **relazione di equivalenza** "G è **isomorfo** ad H", indicato come $G \cong H$, se e solo se esiste un isomorfismo $f : G \to H$.

$$G \cong H \iff \exists f : G \to H \text{ isomorfismo}$$

Dimostrazione:

- Per ogni gruppo G esiste l'automorfismo $\texttt{id} : G \to G : g \to g$

$$\texttt{id}(gh) = gh = \texttt{id}(g)\texttt{id}(h), \forall g, h \in G \implies G \cong G$$

- Se $G \cong H$ allora:

$$G \cong H \implies \exists f : G \to H \text{ isomorfismo} \iff$$

$$\iff \exists f^{-1} : H \to G \text{ isomorfismo inverso} \implies H \cong G$$

- Se $G \cong H, H \cong K$ allora:

$$G \cong H, H \cong K \implies \exists f : G \to H \text{ isomorfismo}, \exists g : H \to K \text{ isomorfismo} \implies$$

$$\implies g \circ f : G \to K \text{ isomorfismo} \implies G \cong K$$

□

Esempi:

1. - Dato $n \in \mathbb{Z}$, definiamo come **radice n-esima dell'unità**, ossia il numero 1, un elemento $z \in \mathbb{C}$ tale che $z^n = 1$.
   - Come già visto nella sezione 2.3, l'equazione $z^n = 1$ dove $z \in \mathbb{C}$ ammette n radici. Di conseguenza, esistono n radici n-esime $(z_0, \ldots, z_{n-1})$ tali che $z_k^n = 1$, dove $z_k := e^{i \cdot \frac{2\pi k}{n}}$.
   - Inoltre, poiché tutte le z_k differiscono solo di k all'esponente, denotiamo $\zeta := e^{i \cdot \frac{2\pi}{n}}$, ottenendo quindi che $\zeta^k = z_k$ (tale operazione risulta essere più comoda poiché ci permette di utilizzare le proprietà delle potenze)

- Definiamo quindi il seguente insieme:

$$H^n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\} = \{\zeta^0, \dots, \zeta^{n-1}\}$$

  e dimostriamo che $(H^n, \cdot) \leqslant (\mathbb{C}^*, \cdot)$:

  - $1 = \zeta^0 \implies 1 \in H^n$
  - $z, w \in H^n \iff z^n = w^n = 1 \implies 1 = z^n w^n = (zw)^n \implies zw \in H^n$
  - $z \in H^n \iff z^n = 1 \implies (z^{-1})^n = (z^n)^{-1} = 1^{-1} = 1 \implies z^{-1} \in H^n$

- Definiamo inoltre la seguente funzione

$$f : (\mathbb{Z}_n, +) \to (H^n, \cdot) : [k] \mapsto \zeta^k$$

  la quale risulta essere biettiva poiché $|\mathbb{Z}_n| = |H^n|$.

- Posto $[k] := [i] + [j]$ dove $[i], [j] \in \mathbb{Z}_n$, si ha che:

$$[k] = [i] + [j] \iff i + j = k + nh, \exists h \in \mathbb{Z} \iff i + j - nh = k$$

- Verifichiamo quindi che f sia anche un morfismo:

$$f([i]+[j]) = f([k]) = \zeta^k = \zeta^{i+j-nh} = \zeta^i \zeta^j \zeta^{-nh} = \zeta^i \zeta^j (\zeta^n)^{-h} = \zeta^i \zeta^j = f([i]) f([j]$$

- Dunque, si ha che $Z_n \cong H^n$

2. - Sia G un gruppo e sia $g \in G$. La funzione $f : (\mathbb{Z}, +) \to (G, \cdot) : n \to g^n$ è un morfismo:

$$f(n + m) = g^{n+m} = g^n g^m = f(n) f(m)$$

   - Supponiamo per assurdo che f non sia iniettiva e che $o(g) = +\infty$, implicando che:

$$\exists n \neq m \mid f(n) = f(m) \implies g^n = g^m \implies$$
$$\implies 1_G = g^0 = g^{n-n} = g^{m-n} \implies \exists m-n \neq 0 \mid g^{m-n} = 1_G \implies m-n \neq 0 \in I(g)$$

   - Tuttavia, come dimostrato nella sezione 4.10, abbiamo che $o(g) = +\infty \iff I(g) = I(0)$ e poiché $m - n \neq 0 \implies m - n \notin I(d) = I(0)$, siamo giunti ad una contraddizione. Dunque, l'unica possibilità è che $o(g) < +\infty$
   - Dunque, concludiamo che f non iniettiva $\implies o(g) = +\infty$ e di conseguenza che $o(g) < +\infty \implies f$ iniettiva

3. Dato il gruppo $(G, \cdot)$ e $g \in G$, la funzione $f_g : G \to G : h \mapsto ghg^{-1}$ è un endomorfismo:

$$f_g(h) f_g(h') = (ghg^{-1})(gh'g^{-1}) = ghh'g^{-1} = f_g(hh')$$

Observation 32

La proiezione canonica al quoziente $\pi : (\mathbb{Z}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_n, +, \cdot) : x \to [x]$ è un **morfismo suriettivo** di anelli

Dimostrazione:

- Sappiamo già che π sia suriettiva. Verifichiamo quindi che sia un morfismo di anelli:

$$\pi(x + y) = [x + y] = [x] + [y] = \pi(x) + \pi(y)$$

$$\pi(xy) = [xy] = [x][y] = \pi(x)\pi(y)$$

□

6.2 Nucleo ed Immagine di un morfismo

Proposition 46. Nucleo ed Immagine di un morfismo

Dato un morfismo $f : G \to H$, viene sempre generato $Ker(f) \leqslant G$, detto **nucleo di** f, e $Im(f) \leqslant H$, detto **immagine di** f, dove:

$$Ker(f) : \{g \in G \mid f(g) = 1_H\}$$

$$Im(f) : \{y \in H \mid f(x) = y, \exists x \in G\}$$

Dimostrazione:

- $Ker(f) \leqslant G$:
  - $f(1_G) = 1_H \implies 1_G \in Ker(f)$
  - $x, y \in Ker(f) \implies f(x) = f(y) = 1_H \implies f(xy) = f(x)f(y) = 1_H \cdot 1_H = 1_H \implies xy \in Ker(f)$
  - $x \in Ker(f) \implies f(x) = 1_H \implies 1_H = 1_H^{-1} = f(x)^{-1} = f(x^{-1}) \implies x^{-1} \in Ker(f)$
- $Im(f) \leqslant H$:
  - $f(1_G) = 1_H \implies 1_H \in Im(f)$
  - $x, y \in Im(f) \implies x = f(g), y = f(h) \implies xy = f(g)f(h) = f(gh) \implies xy \in Im(f)$
  - $x \in Im(f) \implies x = f(g) \implies x^{-1} = f(g)^{-1} = f(g^{-1}) \implies x^{-1} \in Im(f)$

□

Observation 33

Un morfismo è **iniettivo** se e solo se il nucleo è **semplice**, ossia $Ker(f) = \{1_G\}$

Dimostrazione:

- Poiché $Ker(f) \leqslant G \implies 1_G \in Ker(f)$, supponiamo per assurdo che f iniettiva e che $\exists x \neq 1_G \in Ker(f)$:

  $$g \neq 1_G \in Ker(f) \implies f(g) = 1_H = f(1_G)$$

  contraddicendo l'ipotesi per cui f sia iniettiva, dunque l'unica possibilità è che

  $$\nexists g \neq 1_G \in Ker(f) \implies Ker(f) = \{1_G\}$$

- Supponiamo invece che $Ker(f) = \{1_G\}$. In tal caso, si ha che:

  $$\forall g, g' \in G, f(g) = f(g') \iff f(g^{-1})f(g) = f^{-1}(g)f(g') \iff$$

  $$\iff 1_H = f^{-1}(g)f(g') \iff 1_H = f(g^{-1}g)$$

  Tuttavia, poiché $Ker(f) = \{1_G\}$, si ha che $f(x) = 1_H, \forall x \in G \iff x = 1_G$, allora

  $$1_H = f(g^{-1}g) \iff 1_G = g^{-1}g' \iff g = g'$$

  dunque, f risulta essere iniettiva

□

Observation 34

Se $f : A \to B$ è un morfismo di anelli, allora:

$$Ker(f) : \{a \in A \mid f(a) = 0_B\}$$

$$Im(f) : \{b \in B \mid f(a) = b, \exists a \in A\}$$

6.3 Teorema fondamentale di isomorfismo

Definition 46. Sottoanello

Sia A un anello. Definiamo $(B, +, \cdot) \leqslant (A, +, \cdot)$ come **sottoanello** se:

- $(B, +) \leqslant (A, +)$
- $x, y \in B \implies xy \in B$

Observation 35

Se $f : A \to B$ è un morfismo di anelli, allora

- $Ker(f) \triangleleft A$
- $Im(f) \leqslant B$ sottoanello

Dimostrazione:

- Abbiamo già dimostrato che $Ker(f) \leqslant G$ e $Im(f) \leqslant B$.
- $x \in Ker(f), y \in A \implies f(xy) = f(x)f(y) = 0_B \cdot f(y) = 0_B \implies xy \in Ker(f)$
- $x, y \in Im(f) \iff x = f(a), y = f(b), \exists a, b \in A \implies xy = f(a)f(b) = f(ab) \implies xy \in Im(f)$

□

Theorem 47. Teorema fondamentale di isomorfismo

Se $f : A \to B$ è un morfismo tra anelli, allora

$$A/Ker(f) \cong Im(f)$$

Dimostrazione:

- Mostriamo che esiste $\varphi : A/Ker(f) \to Im(f) : [a] \mapsto f(a)$ e che è **ben definita**, ossia che $[a], [b] \in A/Ker(f) \mid [a] = [b] \implies f(a) = f(b)$:

$$[a] = [b] \iff a \equiv b (\mathtt{mod}\ Ker(f)) \iff b - a \in Ker(f) \iff$$
$$\iff 0_B = f(b - a) = f(b) - f(a) \iff f(a) = f(b)$$

- Mostriamo che φ è un **morfismo** sia un morfismo di anelli:

$$\varphi([a]) + \varphi([b]) = f(a) + f(b) = f(a + b) = \varphi([a + b])$$
$$\varphi([a])\varphi([b]) = f(a)f(b) = f(ab) = \varphi([ab])$$

- Mostriamo che φ è **iniettiva** poiché il suo nucleo è semplice:

$$[x] \in Ker(\varphi) \iff \varphi([x]) = 0_B \iff f(x) = 0_B \iff$$
$$\implies x \in Ker(f) \iff x \in [0_A] \iff [x] = [0_A] \implies Ker(\varphi) = \{[0_A]\}$$

- Mostriamo che φ è **suriettiva** poiché il suo codominio, ossia $Im(f)$, coincide con la sua immagine, ossia $Im(\varphi)$:

$$f(a) \in Im(\varphi) \iff \exists [a] \in A/Ker(f) \mid \varphi([a]) = f(a) \iff$$
$$\iff \exists a \in A \mid \varphi([a]) = f(a) \iff \varphi([a]) \in Im(f)$$

- Concludiamo quindi che $\varphi : A/Ker(f) \to Im(f)$ è un **isomorfismo** e dunque che

$$A/Ker(f) \cong Im(f)$$

□

6.4 Sottogruppi normali

Definition 47. Classi laterali sinistre e destre

Dati G gruppo e $H \leqslant G$, definiamo le seguenti due relazioni di equivalenza:

$$x \sim_{sx} y \iff x^{-1}y \in H \qquad x \sim_{dx} y \iff xy^{-1} \in H$$

Definiamo come **classi laterali sinistre** le classi di equivalenza generate da $\sim_{sx}$ e come **classi laterali destre** le classi di equivalenza generate da $\sim_{dx}$.

$$[x]_{sx} : \{y \in G \mid x \sim_S y\} \qquad [x]_{dx} : \{y \in G \mid x \sim_D y\}$$

(*dimostrazione equivalenza analoga alla sezione* 4.1)

Definition 48. Insieme quoziente sinistro e destro

Dati G gruppo e $H \leqslant G$, denotiamo come G/H_{sx} l'**insieme quoziente** generato da $\sim_{sx}$ e come G/H_{dx} l'**insieme quoziente** generato da $\sim_{dx}$.

Nel caso in cui non sia specificato il pedice, ossia G/H, verrà sottointeso che si tratti di uno qualsiasi dei due insiemi quozienti, poiché irrilevante

Observation 36

Dati G gruppo, $H \leqslant G$ e le due relazioni $\sim_{sx}$ e $\sim_{dx}$, si ha che:

$$[x]_{sx} = xH = \{xh \mid h \in H\} \qquad [x]_{dx} = Hx = \{hx \mid h \in H\}$$

Inoltre, si ha che:

$$|xH| = |H| = |Hx|$$

(*dimostrazioni analoghe alla sezione* 4.1)

Observation 37

Dati G gruppo finito e $H \leqslant G$, si ha che:

$$[G : H] := |G/H_{sx}| = |G/H_{dx}|$$

Dimostrazione:

- Poiché sia G/H_{sx} sia G/H_{dx} sono partizioni di G le cui classi laterali possiedono tutte la stessa cardinalità di H, si ha che:

$$|G/H_{sx}| = \frac{|G|}{|H|} = |G/H_{dx}|$$

□

Observation 38

La **classe neutra**, ossia generata dall'elemento neutro di G, è sia una classe laterale **sinistra** sia una classe laterale **destra**:

$$[1_G]_{sx} = 1_G \cdot H = H = H \cdot 1_G = [1_G]_{dx}$$

Definition 49. Sottogruppo normale

Sia G un gruppo. Definiamo H come **sottogruppo normale** di G, indicato come $H \trianglelefteq G$, se:

- $H \leqslant G$
- $\forall x \in G$ si ha che $xH = Hx$, ossia la classe laterale sinistra di ogni elemento coincide con la classe laterale destra dell'elemento stesso

  Attenzione: tale condizione non implica che valga la commutatività tra elementi di G ed elementi di H (ossia che valga $gh = hg, \forall g \in G, \forall h \in H$)

Proposition 48

Sia G un gruppo. Le seguenti condizioni sono **equivalenti**:

1. $H \trianglelefteq G$
2. $\forall g \in G, h \in H$ si ha che $ghg^{-1} \in H$
3. $\forall g \in G, h \in H, \exists k \in H \mid gh = kg$

Dimostrazione:

- 1) $\implies$ 3)

  $$g \in G, h \in G \implies gh \in gH = Hg = \{kg \mid k \in H\} \implies \exists k \in H \mid gh = kg$$

- 3) $\implies$ 2)

  $$g \in G, h \in H, \exists k \in H \mid gh = kg \implies ghg^{-1} = kgg^{-1} \implies ghg^{-1} = k \in H$$

- 2) $\implies$ 1)
  - Dato $g \in G$, si ha che:

    $$gh \in gH \implies g \in G, h \in H \implies x := ghg^{-1} \in H \implies$$
    $$\implies xg = ghg^{-1}g \in Hg \implies xg = gh \implies gh \in Hg \implies gH \subseteq Hg$$

  - Analogamente, si ha che:

    $$kg \in Hg \implies g \in G, h \in H \implies \exists g^{-1} \in G \implies y := g^{-1}k(g^{-1})^{-1} = g^{-1}kg \in H$$
    $$\implies gy = gg^{-1}kg \in gH \implies gy = kg \in gH \implies kg \in gH \implies Hg \subseteq gH$$

– Dunque, poiché $\forall g \in G$ si ha che $gh = Hg$, ne segue che $H \trianglelefteq G$

□

Observation 39

Se G un **gruppo abeliano** e $H \leqslant G$, allora $H \trianglelefteq G$

Dimostrazione:

- Poiché G è abeliano e poiché $k \in H \implies k \in G$, ne segue che:

$$\forall g \in G, h \in H, \exists h \in H \mid gh = hg$$

dunque $H \trianglelefteq G$

□

Proposition 49

Se $(G, \cdot)$ è un gruppo e $H \trianglelefteq G$, allora $(G/H, \cdot)$ è un **gruppo**

Dimostrazione:

- Dimostriamo che il prodotto $[x][y] = [xy]$ sia ben definito, ossia che $[x] = [x'], [y] = [y'] \implies [xy] = [x'y']$
  - Poiché $H \trianglelefteq G$ e poiché $[x] = [x'], [y] = [y']$, si ha che:

$$xH = Hx = [x] = [x'] = x'H = Hx'$$

$$yH = Hy = [y] = [y'] = y'H = Hy'$$

  - Di conseguenza, otteniamo che:

$$x'y'h \in x'y'H = [x'y'] \implies \exists k, j \in H \mid x'y'h = x(ky') =$$

$$= (xk)y' = (jx)y = jxy \implies x'y'h \in Hxy = [xy]$$

    e che:

$$xyb \in xyH = [xy] \implies \exists d, q \in H \mid xyb = x(dy') = (xd)y' =$$

$$= (qx')y' = qx'y' \implies xyb \in Hx'y' = [x'y']$$

    dunque il prodotto è ben definito
- Dimostriamo quindi che $(G/H, \cdot)$ sia un gruppo
  - $([x][y])[z] = [xy][z] = [xyz] = [x][yz] = [x]([y][z])$
  - $\forall [x] \in G/H, \exists [1_G] \in G/H \mid [x][1_G] = [x \cdot 1_G] = [x]$
  - $\forall [x] \in G/H, \exists [x]^{-1} \in G/H \mid [x][x]^{-1} = [x][x^{-1}] = [xx^{-1}][1_G]$

□

Corollary 17

Se $(G, \cdot)$ è un gruppo abeliano e $H \trianglelefteq G$, allora $(G/H, \cdot)$ è un **gruppo abeliano**

Dimostrazione:

- Sappiamo già che $(G/H, \cdot)$ è un gruppo, dunque verifichiamo che valga la commutatività:
$$[x], [y] \in G/H \implies [x][y] = [xy] = [yx] = [y][x]$$

□

Observation 40

Dato G gruppo e $H \leqslant G$, si ha che:

$$[G : H] = 2 \implies H \trianglelefteq G$$

Dimostrazione:

- Supponiamo che $[G : H] = 2$, implicando che esistano solo due classi laterali sinistre e due classi laterali destre. Poiché la classe neutra $[1_G]_{sx} = H = [1_G]_{dx}$ è condivisa da entrambi gli insiemi quozienti, ne segue che:
$$G/H_{sx} = \{[1_G], [x]\}$$
$$G/H_{dx} = \{[1_G], [y]\}$$
- Poiché G/H è una partizione di G, ne segue che:
$$z \in [x] \iff z \notin [1_G]_{sx} = [1_G]_{dx} \iff z \in [y]$$
implicando quindi che $[x] = [y]$ e di conseguenza che $H \trianglelefteq G$
- In particolare, si ha che:
$$G/H_{sx} = \{H, G - H\}$$
$$G/H_{dx} = \{H, G - H\}$$

□

Corollary 18

Dato $\mathcal{S}_n$, si ha che $\mathcal{A}_n \trianglelefteq \mathcal{S}_n$

Dimostrazione:

- Poiché $\mathcal{A}_n \leqslant \mathcal{S}_n$ e poiché $[\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2$ (sezione 5.2), ne segue che $\mathcal{A}_n \trianglelefteq \mathcal{S}_n$

□

Observation 41

Se $f : G \to H$ è un morfismo di gruppi, allora $Ker(f) \trianglelefteq G$ e $Im(f) \leqslant H$

Dimostrazione:

- Sappiamo già che $Ker(f) \leqslant G$ e $Im(f) \leqslant H$
- Verifichiamo quindi che $Ker(f) \trianglelefteq G$

$$g \in G, h \in Ker(f) \implies f(ghg^{-1}) = f(g)f(h)f(g)^{-1} = f(g) \cdot 1_H \cdot f(g)^{-1} =$$
$$= f(g)f(g)^{-1}) = 1_H \implies ghg^{-1} \in Ker(f) \implies Ker(f) \trianglelefteq G$$

□

Corollary 19. Teorema fondamentale di isomorfismo

Se $f : G \to H$ è un morfismo tra gruppi, allora:

$$G/Ker(f) \cong Im(f)$$

Dimostrazione:

- Poiché $Ker(f) \trianglelefteq G$, sappiamo che $(G/Ker(f), \cdot)$ sia un gruppo con l'operazione di prodotto ben definita. A questo punto, la dimostrazione risulta essere analoga a quella vista nel caso degli anelli (sezione 6.3)

□

Proposition 50

Sia gruppo G e sia $g \in G$. Posto $d := o(g)$, si ha che:

$$H(g) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{se } d = 0 \\ \mathbb{Z}_d & \text{se } d > 0 \end{cases}$$

Dimostrazione:

- Riprendiamo il seguente morfismo di gruppi $f : \mathbb{Z} \to G : n \to g^n$, già visto negli esempi precedenti

$$f(n+m) = g^{n+m} = g^n g^m = f(n)f(m)$$

- Di conseguenza, per il teorema fondamentale di isomorfismo si ha che:

$$\mathbb{Z}/Ker(f) \cong Im(f)$$

- Tuttavia, notiamo che:

$$Im(f) = \{f(n) \mid n \in \mathbb{Z}\} = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} = H(g)$$
$$Ker(f) = \{n \in \mathbb{Z} \mid g^n = 1_G\} = I(g)$$

- Dunque, si ha che:

$$\mathbb{Z}/I(g) = \mathbb{Z}/Ker(f) \cong Im(f) = H(g)$$

- Poiché in $\mathbb{Z}$ si ha che: $\exists! d \geq 0 \mid I(g) = I(d)$ tale che:
  - $d = 0 \implies o(g) := |H(g)| = +\infty$
  - $d > 0 \implies o(g) := |H(g)| = d$

  ne segue che:

$$\mathbb{Z}_d := \mathbb{Z}/I(d) = \mathbb{Z}/I(g) = \mathbb{Z}/Ker(f) \cong Im(f) = H(g)$$

- In particolare, se $d = 0$, per ogni $[x] \in \mathbb{Z}_0$, si ha che:

$$[y] = [x] \iff x \sim y \iff y - x \in I(0) \iff$$
$$\iff x - y = 0k, \exists k \in \mathbb{Z} \iff x - y = 0 \iff x = y$$

- Di conseguenza, ne segue che proiezione canonica al quoziente $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_0 : x \mapsto [x]$, la quale sappiamo già essere un morfismo suriettivo, sia anche iniettiva, risultando quindi in un isomorfismo

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} \mid x \neq y \implies [x] \neq [y] \implies \pi(x) \neq \pi(y)$$

  da cui concludiamo che:

$$H(g) \cong \mathbb{Z}_0, \mathbb{Z}_0 \cong \mathbb{Z} \implies H(g) \cong \mathbb{Z}$$

- In definitiva, concludiamo che:

$$H(g) = Im(f) \cong \mathbb{Z}/Ker(f) = \mathbb{Z}/I(g) = \mathbb{Z}/I(d) = \begin{cases} \mathbb{Z}_0 \cong \mathbb{Z} & \text{se } d = 0 \\ \mathbb{Z}_d & \text{se } d > 0 \end{cases}$$

□

Corollary 20

Dato G un gruppo finito dove $|G| = n$, con $n \in \mathbb{N}$, si ha che:

$$\exists g \in G \mid o(g) = n \implies G \cong \mathbb{Z}_n$$

Dimostrazione:

- Supponiamo che $\exists g \in G \mid o(g) = n$. In tal caso, per la proposizione precedente, si ha che:

$$o(g) = n \implies H(g) \cong \mathbb{Z}_n$$

- Siccome $H(g) \leqslant G \implies H(g) \subseteq G$ e $|H|(g) = |G|$, allora ne segue che $G = H(g)$, implicando quindi che:

$$G = H(g) \cong \mathbb{Z}_n$$

□

Corollary 21

Se G è un gruppo finito e $|G| = p$ dove $p \in \mathbb{P}$, allora

$$G \cong \mathbb{Z}_p$$

Dimostrazione:

- Poiché $|G| = p$ ne segue che $\exists g \in G \mid g \neq 1_G$.
- Dato $H(g) \leqslant G$, per il teorema di Lagrange, si ha che

$$|H(g)| \mid |G| = p \implies |H(g)| = \begin{cases} 1 \\ p \end{cases}$$

- Poiché $g \neq 1_G \implies |H(g)| > 1$, ne segue che l'unica possibilità sia $o(p) := |H(g)| = p$.
- Di conseguenza, per il corollario precedente, ne segue che:

$$o(g) = p \implies G = H(g) \cong \mathbb{Z}_p$$

□

Observation 42

Sia G un gruppo. Se $H \trianglelefteq G$ allora la proiezione canonica al quoziente $\pi : (G, \cdot) \to (G/H, \cdot) : x \to [x]$ è un morfismo suriettivo e $Ker(\pi) = H$

Dimostrazione:

- Sappiamo già che $\pi : (G, \cdot) \to (G/H, \cdot) : x \to [x]$ sia un morfismo suriettivo
- Verifichiamo quindi che $Ker(f) = H$:

$$g \in Ker(\pi) \iff \pi(g) = [1_G] \iff [g] = [1_G] = H \iff g \in [g] = H$$

□

Esempio:

- La funzione $sgn : \mathcal{S}_n \to \{+1, -1\}$ è un morfismo

$$sgn(\sigma\sigma') = sgn(\sigma)sgn(\sigma')$$

- Dunque, per il teorema fondamentale di isomorfismo, si ha che:

$$\mathcal{S}_n / Ker(sgn) \cong Im(sgn)$$

- Inoltre, si ha che:

$$Ker(sgn) = \{\sigma \in \mathcal{S}_n \mid sgn(\sigma) = +1\} = \mathcal{A}_n \trianglelefteq \mathcal{S}_n \implies$$
$$\implies [\mathcal{S}_n : Ker(sgn)] = [\mathcal{S}_n : \mathcal{A}_n] = 2 \implies |Im(sgn)| = 2 \implies Im(sgn) = \{+1, -1\}$$

6.5 Gruppi diedrali

Definition 50. Gruppo diedrale

Definiamo come **gruppo diedrale** $\mathcal{D}_n$ il gruppo delle **simmetrie di un poligono regolare di** n **lati**, dove con simmetrie intendiamo tutte le azioni che mantengono la figura simmetrica, ossia:

- Rotazioni di un angolo giro (ossia $\frac{2\pi}{n}$) in senso antiorario (o orario, vista come l'inverso di una rotazione antioraria)

$$\rho: \texttt{ rotazione antioraria di } \frac{2\pi}{n}$$

- Riflessioni a specchio rispetto agli assi di simmetria del poligono (ogni poligono regolare possiede n assi di simmetria)

$$\sigma_i: \texttt{ riflessione rispetto all'asse di simmetria } r_i$$

Attenzione: il prodotto è dato dalla composizione (dunque viene trattato come nel caso delle permutazioni), ossia $\rho\sigma(i) = \rho(\sigma(i))$

Observation 43

Dato $\mathcal{D}_n$, effettuare n volte una rotazione riporta il poligono allo stato iniziale (poiché $n \cdot \frac{2\pi}{n} = 2\pi$), dunque

$$\rho^n = \rho^0 = 1 \implies \rho^{n+k} = \rho^n\rho^k = \rho^0\rho^k = \rho^k$$

Analogamente, poiché un poligono regolare di n lati possiede solo n assi di simmetria, si ha che:

$$\sigma_n = \sigma_0 \implies \sigma_{n+k} = \sigma_k$$

Observation 44

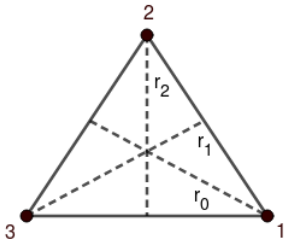
Per definizione stessa, ogni riflessione a specchio è uguale alla sua inversa.

Dunque, riflettere due volte rispetto allo stesso asse corrisponde alla simmetria neutra, ossia $\rho^0 = 1$

$$\sigma_i = \sigma_i^{-1} \implies \sigma_i^2 = 1$$

Esempi:

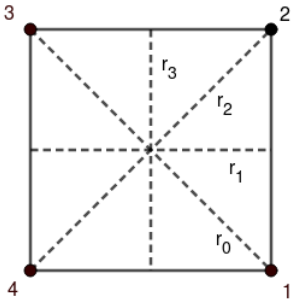
- Consideriamo il gruppo $\mathcal{D}_3$, corrispondente alle simmetrie di un triangolo equilatero.



  In tal caso, abbiamo che:

$$\mathcal{D}_3 : \{1, \rho, \rho^2, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2\}$$

- Consideriamo il gruppo $\mathcal{D}_4$, corrispondente alle simmetrie di un quadrato.

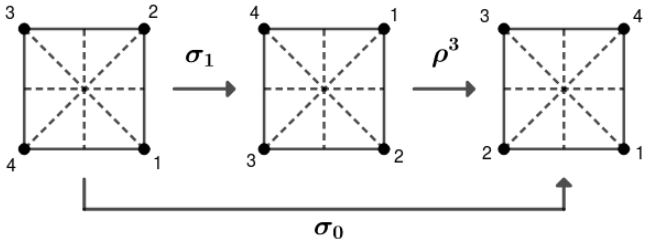


  In tal caso, abbiamo che:

$$\mathcal{D}_4 : \{1, \rho, \rho^2, \rho^3, \sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

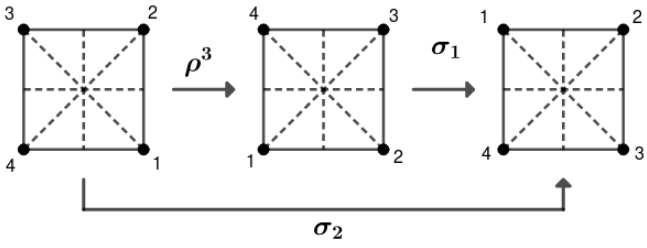
  Notiamo inoltre come in $\mathcal{D}_4$ si ha:

$$\rho^3\sigma_1 = \sigma_0$$



  E che:

$$\sigma_1\rho^3 = \sigma_2$$



Dunque, concludiamo che il prodotto non sia commutativo:

$$\rho^3\sigma_1 \neq \sigma_1\rho^3$$

Observation 45

Dato il gruppo $\mathcal{D}_n$, si ha che:

- $\rho^i\rho^j = \rho^{i+j(\text{mod } n)}$
- $\sigma_i\sigma_j = \rho^{i-j(\text{mod } n)}$
- $\rho^i\sigma_j = \sigma_{i+j(\text{mod } n)}$
- $\sigma_i\rho^j = \sigma_{i-j(\text{mod } n)}$

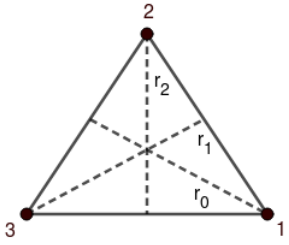
Proposition 51

Numerando i vertici del poligono, ogni simmetria **corrisponde** ad una permutazione dei vertici, dunque si verifica che $\mathcal{D}_n$ è **iniettivamente incluso** in $\mathcal{S}_n$.

In generale, se $\alpha \in \mathcal{D}_n$, ovvero una simmetria del poligono regolare di n lati, manda il vertice i nel vertice j, allora la corrispondente permutazione $\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_n$ manderà anch'essa i in j

Esempio:

- Consideriamo il gruppo $\mathcal{D}_3$, numerando i vertici del triangolo corrispondente



In tal caso abbiamo che:

$$1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \rho^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Corollary 22

Dato il gruppo $\mathcal{D}_n$ e dato$H_n \subseteq \mathcal{S}_n$ dove:

$$H : \{\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_n \mid \sigma_\alpha = \alpha, \exists \alpha \in \mathcal{D}_n\}$$

si ha che:

$$\mathcal{D}_n \cong H \leqslant \mathcal{S}_n$$

Dimostrazione:

- Posto $H_n : \{\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_n \mid \sigma_\alpha = \alpha, \exists \alpha \in \mathcal{D}_n\}$, ogni simmetria in $\mathcal{D}_n$ corrisponde ad una permutazione in $H \leqslant \mathcal{S}_n$, dunque si ha che:

$$\begin{cases} \alpha = \sigma_\alpha : i \mapsto j \\ \beta = \sigma_\beta : j \mapsto k \end{cases} \implies \beta\alpha = \sigma_\beta\sigma_\alpha : i \mapsto k$$

- Inoltre, si ha che:

$$\beta\alpha \in \mathcal{D}_n \implies \exists \sigma_{\beta\alpha} \in H_n \mid \sigma_{\beta\alpha} = \beta\alpha = \sigma_\beta\sigma_\alpha$$

- Definiamo quindi la funzione $f : (\mathcal{D}_n, \cdot) \to (H_n, \cdot) : \alpha \mapsto \sigma_\alpha$, la quale risulta essere un morfismo poiché:

$$f(\beta\alpha) = \sigma_{\beta\alpha} = \sigma_\beta\sigma_\alpha = f(\beta)f(\alpha)$$

- In particolare, f risulta essere suriettiva poiché

$$\forall \sigma_\alpha \in H_n, \exists \alpha \in \mathcal{D}_n \mid f(\alpha) = \sigma_\alpha$$

- Infine, poiché $|\mathcal{D}_n| = |H, n|$, ne segue che f possa essere suriettiva se e solo se è anche iniettiva, dunque f è un isomorfismo

□

6.6 Gruppo di Klein e Teorema di Cauchy

Definition 51. Gruppo di Klein

Definiamo come **gruppo di Klein** (o gruppo quadrinomio) il più piccolo gruppo non ciclico:

$$\mathcal{K}_4 : \{1, a, b, c\}$$

dove si verifica che:

- $a^2 = b^2 = c^2 = 1 \implies o(a) = o(b) = o(c) = 2$
- $ab = ba = c$
- $bc = cb = a$
- $ac = ca = b$

Esempio:

- Consideriamo il gruppo $\mathcal{D}_2 : \{1, \rho, \sigma_0, \sigma_1\}$. Notiamo come:
  - $\rho^2 = \sigma_0^2 = \sigma_1^2 = 1$
  - $\rho\sigma_0 = \sigma_0\rho = \sigma_1$
  - $\rho\sigma_1 = \sigma_1\rho = \sigma_0$
  - $\sigma_1\sigma_0 = \sigma_0\sigma_1 = \rho$

  Dunque, concludiamo facilmente che $\mathcal{D}_2 \cong \mathcal{K}_4$

Proposition 52

Se G è un gruppo finito dove $|G| = 4$, si verifica che:

$$G \cong \mathbb{Z}_4 \text{ oppure } G \cong \mathcal{K}_4$$

Dimostrazione:

- Sia $\neq 1 \in G$. Per Lagrange, sappiamo che $o(a) \mid |G| = 4 \iff o(a) \in \{1, 2, 4\}$
- Come visto nella sezione 6.4, sappiamo che è G è ciclicio se:

$$\exists a \in G \mid o(a) = 4 \implies G \cong \mathbb{Z}_4$$

- Ipotizziamo ora che non sia ciclico, dunque che $\exists a \in G \mid o(a) = 4$, implicando quindi che $G = \{1, a, b, c\}$, dove $o(a) = o(b) = o(c) = 2$. Verifichiamo che in tal caso $ab = c$:
  - Supponiamo per assurdo che $ab = 1$

$$ab = 1 \implies b = a^{-1} = a$$

    il che è impossibile

  - Supponiamo per assurdo che $ab = a$

$$ab = a \implies a^{-1}ab = a^{-1}a \implies b = 1$$

    il che è impossibile

  - Supponiamo per assurdo che $ab = b$

$$ab = b \implies abb^{-1} = bb^{-1} \implies a = 1$$

    il che è impossibile

  - Siccome $ab \neq 1$, $ab \neq a$ e $ab \neq c$, allora l'unica possibilità affinché valga la chiusura del gruppo è $ab = c$

- Analogamente, dimostriamo che $ac = b$ e $bc = a$, concludendo quindi che:

$$G \cong \mathcal{K}_4$$

□

Theorem 53. Teorema di Cauchy

Sia G un gruppo finito. Dato un numero primo $p \in \mathbb{P}$, si verifica che:

$$p \mid |G| \implies \exists g \in G \mid o(g) = p$$

In particolare, se $|G| = q \in \mathbb{P}$, allora G è ciclico poiché

$$\exists g \in G \mid o(g) = q \implies |G| = o(g) \implies G = H(g)$$

Proposition 54

Se G è un gruppo finito dove $|G| = 6$, si verifica che:

$$G \cong \mathbb{Z}_6 \text{ oppure } G \cong \mathcal{S}_3$$

Dimostrazione:

- Come già visto, se $\exists g \in G \mid o(g) = 6$, allora $G \cong \mathbb{Z}_6$
- Ipotizziamo quindi che G non sia ciclico, dunque che $\nexists g \in G \mid o(g) = 6$. Per il teorema di Cauchy sappiamo che
  - $\exists \alpha \in G \mid o(\alpha) = 3 \implies o(\alpha^k) \mid o(\alpha) = 3, k \neq 0 \implies o(\alpha^3) = 3$
  - $\exists \beta \in G \mid o(\beta) = 2 \implies \beta^{-1} = \beta$
- Notiamo che:

$$\alpha^i\beta = \alpha^j\beta \iff \alpha^i = \alpha^j \iff 1 = \alpha^j\alpha^{-i} = \alpha^{j-i} \iff 0 = j - i \iff j = i$$

  e che

$$\alpha^i = \alpha^j\beta \iff \alpha^{i-j} = \beta$$

- Tuttavia, l'ultima affermazione risulta essere assurda poiché:

$$o(\beta) = 2 \qquad o(p^{i-j}) = \begin{cases} o(1) = 1 & \text{se } i = j \\ o(p^k) = 3 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

  di conseguenza si ha che $\beta \neq \alpha^{i-j}$.

- Mostriamo inoltre che $\beta\alpha = \alpha^2\beta$:
  - Supponiamo per assurdo che $\beta\alpha = 1$

$$\beta\alpha = 1 \implies \alpha = \beta^{-1} \implies \alpha = \beta$$

    il che è impossibile
  - Supponiamo per assurdo che $\beta\alpha = \alpha$

$$\beta\alpha = \alpha \implies \beta = 1$$

    il che è impossibile
  - Supponiamo per assurdo che $\beta\alpha = \alpha^2$

$$\beta\alpha = \alpha^2 \implies \beta = \alpha$$

    il che è impossibile
  - Supponiamo per assurdo che $\beta\alpha = \beta$

$$\beta\alpha = \beta \implies \alpha = 1$$

    il che è impossibile
  - Supponiamo per assurdo che $\beta\alpha = \alpha\beta$, implicando che $o(\beta\alpha) = o(\alpha\beta)$:
    - $(\alpha\beta)^1 = \alpha\beta$
    - $(\alpha\beta)^2 = (\beta\alpha)(\beta\alpha) = \beta\beta\alpha\alpha = \beta^2\alpha^2 = \alpha^2$
    - $(\alpha\beta)^3 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^2 = (\alpha\beta)\alpha^2 = \alpha^3\beta = \beta$
    - $(\alpha\beta)^4 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^3 = (\alpha\beta)\beta = \alpha\beta^2 = \alpha$
    - $(\alpha\beta)^5 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^4 = (\alpha\beta)\alpha = \alpha^2\beta$
    - $(\alpha\beta)^6 = (\alpha\beta)(\alpha\beta)^5 = (\alpha\beta)\alpha^2\beta = \beta^2\alpha^3 = 1$

    dunque $o(\alpha\beta) = 6 \implies o(\alpha\beta) = |G| \implies G = H(\beta\alpha)$, ossia che il gruppo sia ciclico, contro l'ipotesi che invece esso non lo sia.
  - Quindi l'unica possibilità è che $\beta\alpha = \alpha^2\beta$

- Concludiamo quindi che:

$$G = \{1, \alpha, \alpha^2, \beta, \alpha\beta, \alpha^2\beta\}$$

- A questo punto, possiamo stendere una **tavola di Cayley**, ossia una tavola moltiplicativa:

	1	α	α^2	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$
1	1	α	α^2	β	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$
α	α	α^2	1	$\alpha\beta$	$\alpha^2\beta$	β
α^2	α^2	1	α	$\alpha^2\beta$	β	$\alpha\beta$
β	β	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	1	α^2	α
$\alpha\beta$	$\alpha\beta$	β	$\alpha^2\beta$	α	1	α^2
$\alpha^2\beta$	$\alpha^2\beta$	$\alpha\beta$	β	α^2	α	1

- Ricordando le proprietà dei prodotti dei gruppi diedrali (sezione 6.5), si ottiene una mappatura univoca $\alpha^i \mapsto \rho^i$ e analogamente $\alpha^i\beta \mapsto \sigma_i$. Ciò implica quindi che:

$$G \cong \mathcal{D}_3$$

- Inoltre, abbiamo visto che $\mathcal{D}_3 \cong H_3 \leqslant \mathcal{S}_3$ dove

$$H_3 : \{\sigma_\alpha \in \mathcal{S}_3 \mid \sigma_\alpha = \alpha, \alpha \in \mathcal{D}_3\}$$

  e dove $|\mathcal{D}_3| = 2 \cdot 3 = 6$ e $|\mathcal{S}_n| = 3! = 6$.

- Affinché l'isomorfismo esista si ha necessariamente che $|H| = |\mathcal{D}_3| = 6$, implicando quindi che

$$H_3 \leqslant \mathbb{S}_3, |H_3| = |\mathcal{S}_3| \implies G \cong \mathcal{D}_3 \cong H = \mathcal{S}_3$$

□

Capitolo 7

Polinomi

Definition 52. Anello polinomiale

Dato un anello commutativo A, definiamo l'**insieme dei polinomi** aventi come coefficienti elementi in A come:

$$A[x] : \{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \mid a_0, \ldots, a_n \in A, a_n \neq 0\}$$

Inoltre, $A[x]$ risulta essere un **anello commutativo**

Dimostrazione:

- Dati due polinomi $p(x), q(x) \in A[x]$, dunque definiti come

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \qquad q(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i$$

  abbiamo che:

- Nell'anello la somma è definita come:

$$p(x), q(x) \in A[x] \implies p(x) + q(x) = \sum_{i=0}^{max(n,m)} (a_i + b_i)x^i$$

- Nell'anello il prodotto è definita come:

$$p(x), q(x) \in A[x] \implies p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} \right)$$

- Gli assiomi di associatività e commutatività possono essere facilmente verificati tramite la definizione stessa della somma
- L'elemento neutro nella somma è il polinomio neutro $e(x) = 0$, mentre nel prodotto è il polinomio costante $d(x) = 1$
- L'elemento inverso nella somma è:

$$\forall p(x) \in A[x], \exists -p(x) \in A[x] \mid p(x) + (-p(x)) = 0$$

- Per via della definizione data di polinomio, non esiste un inverso moltiplicativo.

  Si pensi ad esempio a $p(x) = x + 3$. Tale polinomio non ammette inverso moltiplicativo poiché $\frac{1}{x+3} \notin A[x]$.

  Di conseguenza, $A[x]$ non può essere un campo.

□

Observation 46

Se K è un campo, allora $K[x]$ è un anello commutativo, poiché non ammette comunque l'esistenza dell'inverso nel prodotto

Definition 53. Grado di un polinomio

Dato $p(x) \in A[x]$ indichiamo il **grado del polinomio** come $deg(p(x))$, dove:

- $p(x) = 0 \iff deg(p(x)) = -\infty$ (polinomio nullo)
- $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \neq 0, a_n \neq 0 \implies deg(p(x)) = n$

Definition 54. Coefficienti direttori

Dato $p(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n \neq 0 \in A[x]$, definiamo a_n come **coefficiente direttore** del polinomio

Proposition 55

Ogni elemento $a \in A$ può essere visto come un **polinomio costante**, ossia di grado 0:

$$\forall a \in A, \exists a(x) \in A[x] \mid a(x) = a \iff deg(a(x)) = 0$$

Dunque, si ha che $A \leqslant A[x]$ sottoanello

Observation 47

Siano $p(x), q(x) \in A[x]$. Si verifica che:

$$deg(p(x)q(x)) = deg(p(x)) + deg(q(x))$$

Dimostrazione:

- Poiché il prodotto è definito come

  $$p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_i b_j x^{i+j} \right) = a_0b_0 + a_0b_1x^1 + \ldots + a_nb_mx^{n+m}$$

  allora $deg(p(x)q(x)) = deg(p(x)) + deg(q(x)) = n + m$

□

Proposition 56

Dato l'anello commutativo $K[x]$, si ha che:

$$K[x]^* = K^* = K - \{0\}$$

dunque gli unici elementi invertibili di $K[x]$ sono i **polinomi costanti**

Dimostrazione:

- Supponiamo per assurdo che $\exists a(x) \neq 0 \in K[x] \mid deg(a(x)) \geq 1$ e che $\exists a(x)^{-1} \neq 0 \in K[x] \mid deg(a(x)^{-1}) \geq 0$, da cui otteniamo che:

  $$deg(1) = deg(a(x)a(x)^{-1}) = deg(a(x)) + deg(a(x)^{-1}) \geq 1$$

  giungendo quindi ad una contraddizione, poiché $1 \in K \implies deg(1) = 0$. Dunque, l'unica possibilità è:

  $$deg(a(x)) \geq 1 \implies a(x) \neq 0 \notin K[x]^*$$

  da cui ricaviamo che

  $$a(x) \neq 0 \in K[x]^* \implies deg(a(x)) = 0$$

- Supponiamo invece che $deg(a(x)) = 0$, implicando che

  $$\exists a_0 \neq 0 \in K \mid a(x) = a_0 \implies \exists a_0^{-1} \in K \mid a_0 a_0^{-1} = 1 \implies$$

  da cui concludiamo che:

  $$deg(a(x)) = 0 \implies a(x) \neq 0 \in K[x]^*$$

□

7.1 Divisione con resto di polinomi

Theorem 57. Divisione con resto di polinomi

Dati $a(x), b(x) \in K[x]$ con $b(x) \neq 0$ allora

$$\exists! q(x), r(x) \in K[x] \mid a(x) = b(x)q(x) + r(x)$$

dove $deg(r(x)) < deg(b(x))$

Dimostrazione unicità (esistenza omessa)

- Supponiamo che

$$b(x)q_1(x) + r_1(x) = a(x) = b(x)q_2(x) + r_2(x)$$

dove $deg(r_1(x)), deg(r_2(x)) < deg(b(x))$, da cui otteniamo che:

$$deg(r_1(x)), deg(r_2(x)) < deg(b(x)) \implies deg(r_1(x) - r_2(x)) < deg(b(x)$$

- Dunque si ha che:

$$b(x)q_1(x) + r_1(x) = b(x)q_2(x) + r_2(x) \implies b(x)[q_1(x) - q_2(x)] = r_2(x) - r_1(x) \implies$$

$$\implies deg(r_2(x) - r_1(x)) = deg(b(x)) + deg(q_1(x) - q_2(x))$$

- Nel caso in cui $deg(q_1(x) - q_2(x)) \geq 0$, avremmo $deg(r_2(x) - r_1(x)) \geq deg(b(x))$, contraddicendo l'ipotesi. Di conseguenza, l'unica possibilità è

$$deg(q_1(x) - q_2(x)) = -\infty \iff q_1(x) - q_2(x) = 0 \iff q_1(x) = q_2(x)$$

- A questo punto, quindi, si ha che:

$$b(x)[q_1(x) - q_2(x)] = r_2(x) - r_1(x) \implies b(x) \cdot 0 = r_1(x) - r_1(x) \iff$$

$$\iff 0 = r_2(x) - r_1(x) \iff r_1(x) = r_2(x)$$

□

Esempio:

- Calcolo della divisione con resto di $a(x) = 2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 4$ e $b(x) = x^2 - x + 1$

$+2x^4$	$+3x^3$	$-2x^2$	$+x$	-4	$+x^2$	$-x$	$+1$
$-2x^4$	$+2x^3$	$-2x^2$			$2x^2$	$+5x$	$+1$
	$+5x^3$	$-4x^2$	$+x$	-4			
	$-5x^3$	$+5x^2$	$-5x$				
		x^2	$-4x$	-4			
		$-x^2$	$+x$	-1			
			$+3x$	-5			

Quindi concludiamo che:

$$2x^4 + 3x^3 - 2x^2 + x - 4 = (x^2 - x + 1)(2x^2 + 5x + 1) + 3x - 5$$

7.1.1 Regola di Ruffini

Method 2. Regola di Ruffini

Dati $a(x), b(x) \in K[x]$ dove $b(x) = x - c, \exists c \in K$, è facile calcolare il quoziente $q(x) \in K[x]$ e il resto $r(x) = r_0 \in K$ della divisione di $a(x)$ per $b(x)$:

1. Sia $a(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n$ con $a_n \neq 0$
2. Poiché $deg(a(x)) = deg(b(x)) + deg(q(x)) = 1 + deg(q(x)) \implies deg(q(x)) = deg(a(x)) - 1$, allora
$$q(x) = q_0 + \ldots + q_{n-1}x^{n-1}$$
dove $q_0, \ldots, q_{n-1}$ sono dati da:
   - $q_{n-1} = a_n$
   - $q_{n-1-k} = cq_{n-k} + a_{n-k}$
   - $r_0 = cq_0 + a_0$
3. In formato grafico, riassumiamo tale concetto con:

	a_n	a_{n-1}	$\ldots$	a_1	a_0
c		cq_{n-1}	$\ldots$	cq_1	cq_0
	q_{n-1}	q_{n-2}	$\ldots$	q_0	r_0

Esempio:

- Calcolare la divisione tra $a(x) = x^4 - 3x^3 + 2x - 5$ e $b(x) = x + 2$

	1	-3	0	2	-5
-2		-2	10	-20	36
	1	-5	10	-18	31

  Dunque si ha che:
$$x^4 - 3x^3 + 2x - 5 = (x + 2)(x^3 - 5x^2 + 10x - 18) + 31$$

Proposition 58. Teorema del fattore

Dato $p(x) \in K[x]$ e dato $c \in K$
$$p(c) = 0 \iff x - c \mid p(x)$$
in tal caso, c viene detta **radice (o zero) del polinomio**

Dimostrazione:

- $x - c \mid p(x) \implies p(c) = 0$
$$x - c \mid p(x) \implies p(x) = (x - c)q(c) \implies p(c) = (c - c)q(c) = 0$$

- $p(c) = 0 \implies x - c \mid p(x)$
  - Siano $q(x)$ e $r(x)$ il quoziente e il resto della divisione di $p(x)$ per $(x - c)$

    $$p(x) = (x - c)q(x) + r(x)$$

  - Poiché per definizione stessa di divisione con resto tra polinomi si ha che $deg(r(x)) < deg(x - c)$, ne segue che:

    $$deg(r(x)) < deg(x - c) \implies deg(r(x)) < 1 \implies r := r(x) \in K$$

  - Infine, per ipotesi si ha che

    $$0 = p(c) = (c - c)q(c) + r \implies 0 = (c - c)q(c) + r \implies$$

    $$\implies 0 = 0 + r \implies r = 0$$

    dunque, la divisione non ha resto, implicando che:

    $$(x - c) \mid p(x)$$

□

Corollary 23

Dato $p(x) \in K[x] \mid deg(a(x)) = n$, allora $a(x)$ ha al massimo n radici

Inoltre, se $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, allora, per il teorema fondamentale dell'algebra, esistono esattamente n radici

Dimostrazione:

- Sia $deg(p(x)) = n$ e siano per assurdo $c_1, \ldots, c_m$ dove $m > n$ e $c_i \neq c_j \iff i \neq j$ tali che

  $$p(c_i) = 0, \forall 1 \leq i \leq m$$

- Poiché un polinomio può essere scritto come il prodotto di tutte le sue radici, si verifica che:

  $$\begin{cases} x - c_1 \mid p(x) \\ \vdots \\ x - c_m \mid p(x) \end{cases} \implies \underbrace{(x - c_1) \cdot \ldots \cdot (x - c_m)}_{q(x)} \mid p(x)$$

- Poiché $deg(q(x)) = m$, tale divisione risulta essere impossibile, poiché un polinomio non può dividere un polinomio di grado minore

7.2 Proprietà dell'anello polinomiale

Proposition 59

L'anello commutativo $K[x]$ è un **dominio di integrità** poiché vale la **legge di annullamento del prodotto**

Corollary 24

Dato il dominio di integrità $K[x]$ e dati $p(x), q(x) \in K[x]$, si ha che:

$$I(p(x)) = I(q(x)) \iff p(x) = c \cdot q(x), \exists c \in K[x]^*$$

(*dimostrazione nella sezione* 4.3)

Theorem 60

L'anello commutativo $K[x]$ è un **dominio ad ideali principali**, dunque

$$\exists! p(x) \in I \mid I = I(p(x)$$

Dimostrazione esistenza:

- $I \subseteq I(p(x))$
  - Sia $p(x) \neq 0 \in I$ del più piccolo grado possibile.
  - Dato $a(x) \in I \mid a(x) = p(x)q(x) + r(x)$ si ha che $deg(r(x)) < deg(p(x))$, da cui ricaviamo che:

    $$a(x) = p(x)q(x) + r(x) \in I \implies r(x) = a(x) - p(x)q(x) \in I$$

  - Tuttavia, poiché $p(x)$ è il polinomio non nullo all'interno dell'ideale del più piccolo grado possibile e poiché $deg(r(x)) < deg(p(x))$, ne segue necessariamente che $r(x) = 0$.
  - Dunque, si ha che:

    $$a(x) = p(x)q(x) + r(x) \in I \implies a(x) = p(x)q(x) \implies a(x) \in I(p(x))$$

- $I(p(x)) \subseteq I$
  - Dato $p(x)) \neq 0 \in I$ del più piccolo grado possibile, si ha che:

    $$a(x) \in I(p(x)) \implies a(x) = p(x)b(x), \exists b(x) \in K[x] \implies a(x) \in I$$

    poiché $p(x) \in I$

Dimostrazione unicità:

- Se $I = \{0\}$, allora $I = I(0)$
- Sia invece $p(x) \neq 0 \in I$ del più piccolo grado possibile tale che $I = I(p(x))$, implicando che

$$\forall q(x) \in I \mid deg(q(x)) < deg(p(x)) \implies q(x) = 0$$

dunque non può esistere un polinomio in I con grado minore di $p(x)$

□

Definition 55. Massimo comun divisore di polinomi

Dato il dominio ad ideali principali $K[x]$ e degli elementi $a_1(x), \ldots, a_n(x) \in K[x]$, si ha che:

$$\exists! p(x) \in K[x] \mid I(a_1(x), \ldots, a_n(x)) = I(d(x))$$

dove $d(x) := MCD(a_1(x), \ldots, a_n(x))$

In particolare, individuiamo l'analogo dell'**identità di Bezout**:

$$\exists p_1(x), \ldots, p_n(x) \in K[x] \mid a_1(x)p_1(x) + \ldots + a_n(x)p_n(x) = d(x)$$

Definition 56. Minimo comune multiplo di polinomi

Dato il dominio ad ideali principali $\mathbb{Z}$ e degli elementi $a_1(x), \ldots, a_n(x) \in K[x]$, si ha che:

$$\exists! p(x) \in K[x] \mid I(a_1(x)) \cap \ldots \cap I(a_n(x)) = I(m(x))$$

dove $m(x) := mcm(a_1(x), \ldots, a_n(x))$

Observation 48

Poiché $K[x]$ è un dominio dominio di integrità, sappiamo che

$$I(p(x)) = I(q(x)) \iff p(x) = c \cdot q(x), \exists c \in K[x]^*$$

Dunque, dati $a_1(x), \ldots, a_n(x) \in K[x]$, si ha che $d(x) := MCD(a_1(x), \ldots, a_n(x))$ e $m(x) := mcm(a_1(x), \ldots, a_n(x))$ possano essere ben definiti solo a meno di una costante moltiplicativa non nulla.

Affinché valga l'unicità, quindi, basta imporre che i polinomi $d(x)$ e $m(x)$ abbiano **coefficiente direttore** $a_n = 1$

Definition 57. Polinomio monico

Dato $a(x) = a_0 + \ldots + a_n x^n \in K[x]$, definiamo $a(x)$ come **polinomio monico** se e solo se $a_n = 1$

Method 3

Dati $a(x), b(x) \in K[x]$, possiamo calcolare $d(x) := MCD(a(x), b(x))$ tramite l' **algoritmo di Euclide** e $m(x) := mcm(a(x), b(x))$ tramite il **teorema fondamentale dell'aritmetica**:

$$m(x) = \frac{a(x)b(x)}{d(x)}$$

Observation 49

Dati $a_1(x), \ldots, a_n(x) \in K[x]$ data $c \in K$, si ha che:

$$a_1(c) = \ldots = a_n(c) = 0 \iff d(c) = 0$$

dove $d(x) := MCD(a_1(x), \ldots, a_n(x)) \in K[x]$.

In altre parole, le uniche radici in comune tra due polinomi sono le radici del loro MCD

Dimostrazione:

- Sia $c \in K$ tale che:

$$a_i(c) = 0, \forall i \in [1, n] \iff (x - c) \mid a_i(c), \forall i \in [1, n]$$

- Poiché $d(x) : MCD(a_1(x), \ldots, a_n(x))$, per definizione stessa si ha che:

$$(x - c) \mid a_i(c), \forall i \in [1, n] \implies (x - c) \mid d(x) \iff d(c) = 0$$

- Viceversa, sempre per definizione stessa di $d(x)$ si ha che:

$$d(c) = 0 \implies (x - c) \mid d(x), d(x) \mid a_i(x), \forall i \in [1, n] \implies (x - c) \mid a_i(x), \forall i \in [1, n]$$

□

Proposition 61

Dato $p(x) \in K[x]$, si ha che:

$$p(x) \text{ elemento irriducibile} \iff p(x) \text{ elemento primo}$$

Dimostrazione:

- Sappiamo già che in un dominio di integrità si ha:

$$p(x) \texttt{ primo} \implies p(x) \texttt{ irriducibile}$$

(dimostrazione nella sezione 4.4)

- Dati $a(x), b(x) \in K[x]$, supponiamo che $p(x) \mid a(x)b(x)$:

$$p(x) \mid a(x)b(x) \mid a(x)b(x) = p(x)k(x), \exists k(x) \in K[x]$$

- Se $p(x) \nmid a(x)$, si ha che $d(x) := MCD(p(x), a(x)) = 1$. Dunque, tramite l'identità di Bezout otteniamo che:

$$\exists f(x), g(x) \in K[x] \mid d(x) = p(x)f(x) + a(x)g(x) \implies$$
$$\implies 1 = p(x)f(x) + a(x)g(x) \implies b(x) = p(x)b(x)f(x) + a(x)b(x)g(x) \implies$$
$$\implies b(x) = p(x)b(x)f(x) + [a(x)b(x)]g(x) \implies b(x) = p(x)b(x)f(x) + p(x)k(x)g(x) \implies$$
$$\implies b(x) = p(x)[q(x)f(x) + g(x)b(x)] \implies p(x) \mid b(x)$$

- Analogamente, se $p(x) \nmid b(x)$ si ha che $d(x) := MCD(p(x), b(x)) = 1$. Dunque, seguendo gli stessi passaggi otteniamo che $p(x) \mid a(x)$
- Concludiamo quindi che se $p(x)$ è irriducibile, allora:

$$p(x) \mid a(x)b(x) \implies p(x) \mid a(x) \vee p(x) \mid b(x)$$

□

Lemma 62

Dato $p(x) \in K[x]$, si ha che:

$$deg(p(x)) = 1 \implies p(x) \text{ irriducibile}$$

Dimostrazione:

- Se $deg(p(x)) = 1$ allora

$$p(x) = a(x)b(x) \implies \begin{cases} deg(a(x)) = 0, deg(b(x)) = 1 \implies a(x) \in \mathbb{C}[x]^* \\ deg(a(x)) = 1, deg(b(x)) = 0 \implies b(x) \in \mathbb{C}[x]^* \end{cases}$$

  dunque $p(x)$ è irriducibile

□

Proposition 63

Dato $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, si ha che:

$$p(x) \in \mathbb{C}[x] \text{ irriducibile} \iff deg(p(x)) = 1$$

Dimostrazione:

- Sappiamo già che $deg(p(x)) = 1 \implies p(x)$ irriducibile
- Consideriamo quindi il caso in cui $deg(p(x)) = 0$, allora

$$deg(p(x)) = 0 \iff p(x) \in \mathbb{C}^*$$

  dunque $p(x)$ non può essere irriducibile per definizione stessa

- Sia invece $deg(p(x)) > 1$. Per il teorema fondamentale dell'algebra si ha che:

$$\exists z \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0 \iff x - z \mid p(x) \iff$$

$$\iff p(x) = (x-z)q(x), \exists q(x) \in \mathbb{C}[x] \implies$$

$$\implies deg(q(x)) = deg(p(x)) - 1 > 0 \implies q(x) \notin \mathbb{C}^* = \mathbb{C}[x]^*$$

  dunque $p(x)$ non può essere irriducibile poiché $deg((x-z)) = 1 \implies (x-z) \notin \mathbb{C}[x]^*$ e $q(x) \notin \mathbb{C}[x]^*$.

- Dunque si ha che

$$deg(p(x)) \neq 1 \implies p(x) \text{ non irriducibile}$$

  che per contronominale implica che

$$p(x) \text{ irriducibile} \implies deg(p(x)) = 1$$

□

Proposition 64

Dato $p(x) \in \mathbb{R}[x]$, si ha che:

$$p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ irriducibile} \iff deg(p(x)) = 1 \text{ oppure } deg(p(x)) = 2, \Delta < 0$$

dove $deg(p(x)) = 2 \implies p(x) = ax^2 + bx + c, \Delta := b^2 - 4ac$

Dimostrazione:

- Poiché $\mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$, la dimostrazione in entrambi i lati dei casi con $deg(p(x)) = 1$ è analoga alla precedente
- Supponiamo quindi per assurdo che $deg(p(x)) = 2, \Delta < 0$ e che $p(x)$ non sia irriducibile, implicando che:

$$\exists a(x)b(x) \in \mathbb{R}[x] - \mathbb{R}[x]^* \mid p(x) = a(x)b(x) \wedge deg(p(x)) = 2$$

$$\implies deg(a(x)) = deg(b(x)) = 1 \implies$$

$$\implies \begin{cases} \exists c, d \in \mathbb{R} \mid a(x) = cx + d \implies a(-c^{-1}d) = 0 \iff (x + c^{-1}d) \mid a(x) \\ \exists f, g \in \mathbb{R} \mid b(x) = fx + g \implies b(-f^{-1}g) = 0 \iff (x + f^{-1}g) \mid b(x) \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} (x + c^{-1}d) \mid a(x), a(x) \mid p(x) \implies (x + c^{-1}d) \mid p(x) \iff p(-c^{-1}d) = 0 \\ (x + f^{-1}g) \mid b(x), b(x) \mid p(x) \implies (x + f^{-1}g) \mid p(x) \iff p(-f^{-1}g) = 0 \end{cases}$$

  dunque $x_1 := -c^{-1}d \in \mathbb{R}$ e $x_2 := -f^{-1}g \in \mathbb{R}$ sarebbero le radici di $p(x)$, contraddicendo l'ipotesi per cui $\Delta < 0 \implies x_1, x_2 \in \mathbb{C} - \mathbb{R}$.

  Dunque, l'unica possibilità è:

$$deg(p(x)) = 2, \Delta < 0 \implies p(x) \in \mathbb{R}[x] \text{ irriducibile}$$

- Sia quindi $p(x) := a_0 + \ldots + a_n x^n \in \mathbb{R}[x] \subset \mathbb{C}[x]$ irriducibile con $deg(p(x)) > 1$. Per il teorema fondamentale dell'algebra, $\exists z := c + id \in \mathbb{C} \mid p(z) = 0 \iff (x-z) \mid p(x)$

- Poiché $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, si ha che:

$$\forall j \in [1,n], \exists d_j \in \mathbb{R} \mid a_j := d_j + i \cdot 0 = d_j - i \cdot 0 =: \overline{a_j} \implies a_j = \overline{a_j}, \forall j \in [1,n]$$

dunque, per le proprietà dei complessi coniugati (sezione 2), ne segue che:

$$p(\overline{z}) = a_0 + \dots a_n \overline{z}^n = a_0 + \dots a_n \overline{z^n} = \overline{a_0} + \dots \overline{a_n z^n} = \overline{a_0} + \dots \overline{a_n z^n} =$$

$$\overline{a_0 + \dots + a_n z^n} = \overline{p(z)} = \overline{0} = 0 \implies p(\overline{z}) = 0 \iff (x - \overline{z}) \mid p(x)$$

dove per definizione si ha $\overline{z} = c - id$

- Nel caso in cui $d = 0$, ne seguirebbe che $z = \overline{z}$, implicando che:

$$(x - z) \mid p \iff p(x) = q(x)(x - z), \exists q(x) \in \mathbb{R}[x] \implies$$

$$\implies deg(q(x)) + deg(x - z) = deg(p(x)) > 1 \implies$$

$$\implies deg(q(x)) + 1 > 1 \implies deg(q(x)) > 0 \implies q(x) \notin K^*$$

rendendo quindi tale caso è impossibile, poiché altrimenti si avrebbe che $p(x)$ non sia irriducibile in quanto $q(x), (x - z) \notin K^*$

- Sia quindi $d \neq 0$, implicando che $z \neq \overline{z}$:

$$(x - z) \mid p(x), (x - \overline{z}) \mid p(x) \implies (x - z)(x - \overline{z}) \mid p(x) \implies$$

$$\implies x^2 - \overline{z}x - zx + z \cdot \overline{z} \mid p(x) \implies x^2 - (\overline{z} + z)x + z \cdot \overline{z} \mid p(x) \implies$$

$$\implies x^2 - (c - id + c + id)x + (c + id)(c - id) \mid p(x) \implies x^2 - 2cx + c^2 + d^2 \mid p(x)$$

- Poiché $p(x)$ è irriducibile, l'unica possibilità è:

$$x^2 - 2cx + c^2 + d^2 \mid p(x) \implies p(x) = k(x^2 - 2cx + c^2 + d^2), \exists k \in \mathbb{R}[x]^* = \mathbb{R}^* \implies$$

$$\implies p(x) = kx^2 - 2kcx + kc^2 + kd^2 \implies \Delta = (-2kc)^2 - 4k^2(c^2 + d^2) \implies$$

$$\implies \Delta = 4k^2c^2 - 4k^2c^2 - 4k^2d^2 \implies \Delta = -4k^2d^2 < 0$$

□

Theorem 65. Fattorizzazione in polinomi irriducibili e monici

Dato $p(x) \neq 0 \in K[x]$, si ha che:

$$\exists! q_1(x), \dots, q_k(x) \neq 0 \in K[x], \exists c \in K^* \mid p(x) = c \cdot q_1(x) \cdot \dots \cdot q_k(x)$$

dove $q_1(x), \dots, q_k(x)$ sono **polinomi monici** e **irriducibili**

Dimostrazione esistenza:

- Supponiamo che $deg(p(x)) = 1$, implicando che $p(x) = ax + b, \exists a, b \neq 0 \in K$

- Poiché $a, b \neq 0 \implies a, b \in K^* \implies \exists a^{-1}, b^{-1} \in K^*$, ne segue che

$$p(x) = ax + b \implies p(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right) \implies p(x) = a(x + ba^{-1})$$

  dove a e $deg(x - ba^{-1}) = 1 \implies (x - ba^{-1})$ irriducibile, dunque esiste una fattorizzazione di $p(x)$ in polinomi monici ed irriducibili

- Sia quindi $p(x) \in K[x] \mid deg(p(x)) > 1$ dove

$$\exists a(x), b(x) \in K[x] \mid p(x) = d(x)f(x)$$

  e supponiamo per ipotesi induttiva che $a(x)$ e $b(x)$ siano fattorizzabili in polinomi monici ed irriducibili:

$$\exists! q_1(x), \ldots, q_k(x) \in K[x], \exists c \in K^* \mid d(x) = c \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_k(x)$$
$$\exists! q'_1(x), \ldots, q'_k(x) \in K[x], \exists c' \in K^* \mid f(x) = c' \cdot q'_1(x) \cdot \ldots \cdot q'_k(x)$$

  da cui ne segue che:

$$p(x) = d(x)f(x) = c \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_k(x) \cdot c' \cdot q'_1(x) \cdot \ldots \cdot q'_k(x) =$$
$$= (c \cdot c') \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot q_k(x) \cdot q'_1(x) \cdot \ldots \cdot q'_k(x)$$

  dunque $p(x)$ è fattorizzabile in polinomi monici ed irriducibili

Dimostrazione unicità:

- Se $deg(p(x)) = 0$ allora $\exists! c \in K^* \mid p(x) = c$
- Sia quindi $deg(p(x)) > 0$. Notiamo inoltre che dato $p(x) := a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$, affinché la fattorizzazione possa essere in polinomi monici ed irriducibili ne segue necessariamente che $c = c' = a_n$.
- Supponiamo quindi che esistano due fattorizzazioni possibili in polinomi monici ed irriducibili per $p(x)$:

$$c \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot q_k(x) = p(x) = c' \cdot q'_1(x) \cdot \ldots \cdot q'_j(x) \implies$$
$$c \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot q_k(x) = c' \cdot q'_1(x) \cdot \ldots \cdot q'_j(x) \implies q_1(x) \mid q'_1(x) \cdot \ldots \cdot q'_j(x)$$

- Tuttavia, poiché $q_1(x)$ irriducibile se e solo se è primo, ne segue che:

$$q'_1(x) \cdot \ldots \cdot q'_j(x) \mid q'_1(x) \vee \ldots \vee q_1(x) \mid q'_j(x)$$

- Per comodità, assumiamo che $q'_1(x)$ il polinomio per cui $q_1(x) \mid q'_1(x)$:

$$q_1(x) \mid q'_1(x) \iff q'_1(x) = d \cdot q_1(x), \exists d \in K^* \implies$$
$$c \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot q_k(x) = c' \cdot d \cdot q_1(x) \cdot \ldots \cdot q'_j(x) \implies$$
$$\implies c \cdot q_2(x) \cdot \ldots \cdot \ldots \cdot q_k(x) = \frac{p(x)}{q_1(x)} = c' \cdot d \cdot q'_2(x) \cdot \ldots \cdot q'_j(x)$$

- Poiché $deg\left(\frac{p(x)}{q(x)}\right) < deg(p(x))$ possiamo concludere che $k = k$ e, a meno di riordinare i fattori, possiamo assumere che $q_2(x) = q'_2(x), \ldots, q_k(x) = q'_j(x)$

□

Theorem 66

Sia $p(x) := a_0 + \dots a_n x^n \in \mathbb{Z}[x]$ dove $a_0, a_n \neq 0$. Se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ è radice di $p(x)$ e $MCD(a,b) = 1$, allora

$$p\left(\frac{a}{b}\right) = 0 \implies a \mid a_0, b \mid a_n$$

e di conseguenza che:

$$a \nmid a_0 \vee b \nmid a_n \implies p\left(\frac{a}{b}\right) \neq 0$$

Dimostrazione:

- Supponendo che $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p\left(\frac{a}{b}\right) = 0, MCD(a,b) = 1$, ne segue che:

$$0 = p\left(\frac{a}{b}\right) = a_0 + a_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + \dots + a_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n \implies$$

$$\implies b^n \cdot 0 = b^n \left(a_0 + a_1 \cdot \left(\frac{a}{b}\right) + \dots + a_n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n\right) \implies$$

$$\implies 0 = a_0 b^n + \dots + a_{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b + a_n a^n \implies$$

$$\implies a_n a^n = -a_0 b^n - \dots - a_{n-1} \cdot a^{n-1} \cdot b \implies$$

$$\implies a_n a^n \cdot \frac{1}{b} = -a_0 b^{n-1} - \dots - a_{n-1} \cdot a^{n-1} \implies b \mid a_n a^n$$

- Poiché $MCD(a,b) = 1 \implies MCD(a^n, b) = 1$, allora

$$b \mid a_n a^n \implies b \mid a_n$$

- Analogamente, seguendo gli stessi passaggi arriviamo a dimostrare che $MCD(a,b) = 1 \implies MCD(a, b^n) = 1$ implica che

$$a \mid a_0 b^n \implies a \mid a_0$$

□

Esempi:

- Dato $p(x) = x^3 - 19x - 30$, se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ fosse soluzione, allora

$$p\left(\frac{a}{b}\right) \implies a \mid 30, b \mid 1$$

quindi le uniche soluzioni possibili di $p(x)$ possono essere:

$$x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 5, \pm 6, \pm 10, \pm 15, \pm 30$$

- Dato $p(x) = 6x^3 - 11x^2 + 6x - 1$, se $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ fosse soluzione, allora

$$p\left(\frac{a}{b}\right) \implies a \mid -1, b \mid 6$$

quindi le uniche soluzioni possibili di $p(x)$ possono essere:

$$x = \pm 1, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{6}$$

7.3 Polinomi in $\mathbb{Z}_p$

Lemma 67

Dato $p \in \mathbb{P}$, si ha che:

$$\prod_{0<a<p} (x-a) \equiv x^{p-1} - 1 (\mathsf{mod}\ p)$$

Dimostrazione:

- Sia $q(x) := x^{p-1} - [1] \in \mathbb{Z}_p$. Per il piccolo teorema di Fermat, dato $0 < a < p$ si ha che:
$$a^{p-1} \equiv 1 (\mathsf{mod}\ p) \implies a^{p-1} - 1 \equiv 0 (\mathsf{mod}\ p) \implies$$
$$\implies q([a]) \equiv 0 (\mathsf{mod}\ p) \iff x - [a] \mid q(x)$$
- Dunque, si ha che:
$$x - [a] \mid q(x), \forall 0 < a < p \implies \prod_{0<a<p} (x-[a]) \mid q(x) \implies$$
$$\implies q(x) = k \cdot \prod_{0<a<p} (x-[a]), \exists k \in \mathbb{Z} \implies$$
ottenendo quindi una fattorizzazione in polinomi monici ed irriducibili
- Poiché il coefficiente direttore di $q(x)$ è 1, affinché la fattorizzazione sia valida ne segue necessariamente che $k = 1$, concludendo che:
$$\prod_{0<a<p} (x-a) \equiv x^{p-1} - 1 (\mathsf{mod}\ p)$$

□

Observation 50

Dato $p \in \mathbb{P}$, si ha che:

$$\prod_{0<a<p} (x-a) = \sum_{k=1}^{p} (-1)^{p-k-1} \begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix} x^{k-1}$$

dove $\begin{bmatrix} p \\ k \end{bmatrix}$ è un numero di Stirling di prima specie senza segno, ossia il numero di permutazioni in $\mathcal{S}_p$ aventi k cicli

Esempio:

- Dato
$$S_3 : \{(1)(2)(3), (12)(3), (13)(2), (23)(1), (123), (132)\}$$
si ha che:
$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix} = 2, \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 3, \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = 1$$

Lemma 68

Dato $d \in \mathbb{N}$ tale che $d \mid p-1$, l'equazione $x^d \equiv 1 (\mathtt{mod}\ p)$ ammette d soluzioni distinte in $\mathbb{Z}_p$

Dimostrazione:

- Sia $d \in \mathbb{N}$ tale che $d \mid p-1$. Ne segue che:

$$d \mid p-1 \implies p-1 = dk, \exists k \in \mathbb{Z}$$

- Per dimostrazione precedente, si ha che:

$$\prod_{0<a<p} (x-a) \equiv x^{p-1} - 1 (\mathtt{mod}\ p) \implies \prod_{0<a<p} (x-a) \equiv x^{dk} - 1 (\mathtt{mod}\ p) \implies$$

$$\implies \prod_{0<a<p} (x-a) \equiv (x^d)^k - 1^k (\mathtt{mod}\ p) \implies \prod_{0<a<p} (x-a) \equiv (x^d-1)^k (\mathtt{mod}\ p) \implies$$

$$\implies \prod_{0<a<p} (x-a) \equiv (x^d-1)(x^d-1)^{k-1} (\mathtt{mod}\ p)$$

- Posto $q(x) := (x^d-1)^{n-1}$, si ha che:

$$\prod_{0<a<p} (x-a) \equiv (x^d-1)q(x) (\mathtt{mod}\ p)$$

$$\implies x - [a] \mid x^d - [1] \vee x - [a] \mid q(x), \forall 0 < a < p$$

- Dunque, sia $0 < b < p$ tale che $x - [b] \mid x^d - [1]$. Ne segue che:

$$\prod_{0<a<p, a \neq b} (x-a) \equiv q(x) (\mathtt{mod}\ p)$$

- Per motivi di grado, ripetendo tale procedimento su $q(x)$ e i suoi fattori, otterremo esattamente d radici di $x^d - [1]$

□

Lemma 69

Dato $d \in \mathbb{N}$ tale che $d \mid p-1$, allora

$$\exists [a] \in \mathbb{Z}_p \mid o([a]) = d$$

Dimostrazione:

- Se $d = 1$, allora $\exists 1 \in \mathbb{Z}_p^* \mid o([1]) = 1$
- Se invece $d = q^k$ dove $q \in \mathbb{P}$, allora per il lemma precedente si ha che:

$$d = q^k \implies q^k \mid p-1 \implies \begin{cases} x^{q^k} \equiv 1 (\texttt{mod}\ p) \text{ ha } q^k \text{ soluzioni} \\ x^{q^k-1} \equiv 1 (\texttt{mod}\ p) \text{ ha } q^k - 1 \text{ soluzioni} \end{cases}$$

  dunque $\exists [a] \in \mathbb{Z}_p$ che è soluzione di $x^{q^k} = [1]$ ma non di $x^{q^k-1} = [1]$, implicando che:

$$o([a]) \mid q^k, o([a]) \nmid q^{k-1} \implies o([a]) = q^k$$

- Supponiamo per ipotesi induttiva di aver verificato che per tutti gli n divisori di $p-1$ più piccoli di d che $\exists [b] \in \mathbb{Z}_p \mid o([b]) = n$
- Sia quindi $d = nq^k$ dove $q \in \mathbb{P} \mid MCD(n, q^k) = 1$. Per induzione, si ha che:

$$\exists [b], [c] \in \mathbb{Z}_p \mid o([b]) = n, o([c]) = q^k$$

- Infine, come visto nella sezione 4.10, poiché $MCD(o([b]), o([c])) = 1$ si ha che:

$$\exists a \in \mathbb{Z}_p \mid [a] = [bc] \implies o([a]) = nq^k = d$$

□

Proposition 70

Il gruppo $(\mathbb{Z}_p^*, \cdot)$, dove $p \in \mathbb{P}$, è **sempre ciclico**

Dimostrazione:

- Per il lemma precedente, si ha che:

$$p-1 \mid p-1 \implies \exists [a] \in \mathbb{Z}_p^* \mid o([a]) = p-1 = \left|\mathbb{Z}_p^*\right| \implies \mathbb{Z}_p^* = H([a])$$

□

Capitolo 8

Spazi vettoriali

Definition 58. Spazio vettoriale

Dato un campo K, definiamo come **spazio vettoriale su** K una struttura algebrica $(V, +, \cdot)$, dove $+ : V \times V \to V : (u, v) \mapsto w$ e $\cdot : K \times V \to V : (\lambda, v) \mapsto w$, soddisfacente i seguenti assiomi:

- $(V, +)$ è un gruppo abeliano
- $\forall s, t \in K, v \in V \implies s(t \cdot v) = stv = (s \cdot t)v$ (**Associatività scalare**)
- $1 \in K, v \in V \implies 1 \cdot v = v$ (**Elemento neutro**)
- $\forall s, t \in K, v \in V \implies (s + t)v = sv + tv$ (**Distributività vettoriale**)
- $\forall s \in K, v, w \in V \implies s(v + w) = sv + sw$ (**Distributività scalare**)

Inoltre, definiamo $\lambda \in K$ come **scalare** e $v \in V$ come **vettore**.

Definition 59. Spazio di coordinate

Dato un campo K, definiamo come **insieme di coordinate** un insieme i cui elementi sono tuple di n elementi appartenenti a K:

$$K^n = K \times \ldots \times K = \{(t_1, \ldots, t_n) \mid t_1, \ldots, t_n \in K\}$$

Definendo l'operazione di somma come:

$$\begin{cases} v := (t_1, \ldots, t_n) \in K^n \\ w := (s_1, \ldots, s_n) \in K^n \end{cases} \implies v + w := (t_1 + s_1, \ldots, t_n + s_n) \in K^n$$

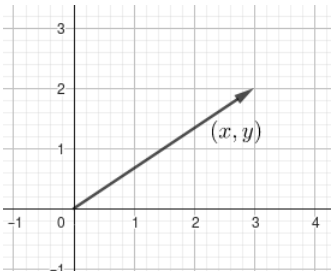
e l'operazione di prodotto per scalare come:

$$\lambda \in K, v := (t_1, \ldots, t_n) \in K^n \implies \lambda v = (\lambda t_1, \ldots, \lambda t_n) \in K^n$$

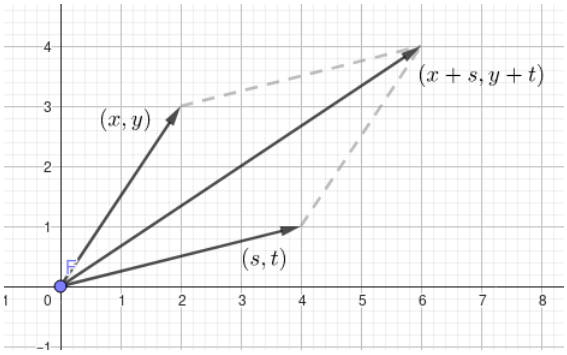
la struttura $(K^n, +, \dot{})$ è uno **spazio vettoriale** *(dimostrazione omessa)*

Interpretazione geometrica:

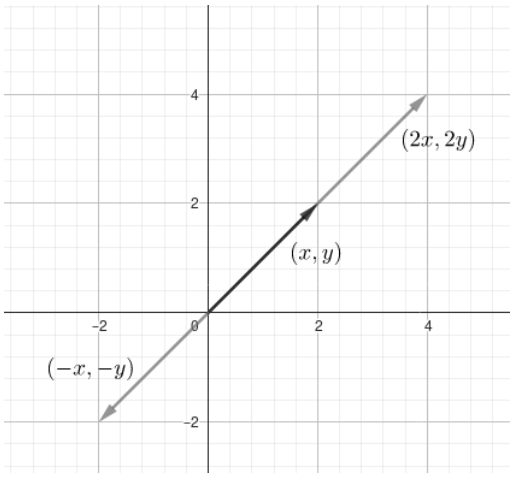
- Dato lo spazio di coordinate $\mathbb{R}^2$ e un vettore $v := (x, y) \in \mathbb{R}^2$, possiamo rappresentare tale vettore come:



- Preso $w := (s, t) \in \mathbb{R}^2$, la somma vettoriale $v + w$ corrisponde al classico *metodo del parallelogramma* utilizzato in fisica elementare:



- Preso $\lambda \in \mathbb{R}$, il prodotto per scalare $\lambda \cdot v$ ha la stessa direzione del vettore v, ma con lunghezza aumentata o diminuita e verso uguale o invertito



Observation 51

Dato uno spazio vettoriale V su un campo K, si ha che:

- $\forall \lambda \in K \implies \lambda \cdot 0_V = 0_V$
- $\forall v \in V \implies 0 \cdot v = 0_V$

Dato $0_V = (0, \ldots, 0) \in V$ è detto **vettore nullo**, ossia l'elemento neutro di V, e dove 0 è l'elemento neutro di K

Dimostrazione:

- Dato $\lambda \in K$, si ha che:

$$\lambda \cdot 0_V = (\lambda \cdot 0, \dots, \lambda \cdot 0) = (0, \dots, 0) = 0_V$$

- Dato $v = (t_1, \dots, t_n) \in V$, si ha che:

$$0 \cdot v = (0 \cdot t_1, \dots, 0 \cdot t_n) = (0, \dots, 0) = 0_V$$

□

Definition 60. Sottospazio vettoriale

Dato un spazio vettoriale V su K, definiamo $W \subseteq V$ come **sottospazio vettoriale** di V su K se:

- $(W, +) \leqslant (V, +)$
- $w \in W, \lambda \in K \implies \lambda w \in W$

Esempi:

- $\mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ poiché non vale la seconda condizione
- $\mathbb{R}^n_{\geq 0} \subseteq \mathbb{R}^n$ non è sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ poiché non vale nessuna delle due condizioni

8.1 Span, Generatori e Indipendenza lineare

Definition 61. Span

Dato uno spazio vettoriale V su K e dei vettori $v_1, \dots, v_n \in V$, definiamo **span** (o **sottospazio generato** da $v_1, \dots, v_n$) l'insieme di tutte le **combinazioni lineari** di tali vettori:

$$Span(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$$

Dimostrazione:

- $0_V = 0 \cdot v_1 + \dots + 0 \cdot v_n \in Span(v_1, \dots, v_n)$
- $v, w \in Span(v_1, \dots, v_n) \implies v + w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n + \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = (\lambda_1 + \mu_1)v_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n)v_n \implies v + w \in Span(v_1, \dots, v_n)$
- $v \in Span(v_1, \dots, v_n) \implies -v = (-\lambda_1)v_1 + \dots + (-\lambda_n)v_n \in Span(v_1, \dots, v_n)$
- $v \in Span(v_1, \dots, v_n), c \in K \implies cv = (c\lambda_1)v_1 + \dots + (c\lambda_n)v_n \in Span(v_1, \dots, v_n)$

□

Definition 62. Insieme di generatori

Dato uno spazio vettoriale V su K, definiamo i vettori $v_1, \ldots, v_n \neq 0_V \in V$ come un **insieme di generatori di** V se e solo se ogni vettore di v può essere espresso come una combinazione lineare di $v_1, \ldots, v_n$:

$$\forall v \in V, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \mid v = v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

o analogamente se e solo se:

$$V = Span(v_1, \ldots, v_n)$$

Dimostrazione:

- Poiché $v_1, \ldots, v_n \in V$, per definizione stessa si ha sempre che $Span(v_1, \ldots, v_n) \subseteq V$
- Dunque, affinché le due definizioni siano equivalenti è sufficiente che:

$$\forall v \in V, \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \mid v = v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \iff V \subseteq Span(v_1, \ldots, v_n)$$

□

Definition 63. Indipendenza lineare

Dato uno spazio vettoriale V su K, definiamo i vettori $v_1, \ldots, v_n \neq 0_V \in V$ come **linearmente indipendenti** se e solo se:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V \iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

In caso contrario, vengono detti **linearmente dipendenti**

Observation 52

Sia V uno spazio vettoriale. Dati i vettori $v_1, \ldots, v_n \neq 0_V \in V$, si ha che:

$$v_1, \ldots, v_n \text{ lin. ind.} \iff v_1, \ldots, v_{n-1} \text{ lin. ind.} \wedge v_n \notin Span(v_1, \ldots, v_{n-1})$$

Dimostrazione:

- Nel caso in cui $v_1, \ldots, v_n$ siano linearmente indipendenti, si ha che:

  $$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n = 0_V \iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$$

  da cui ne segue automaticamente che:

  $$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0_V \iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0$$

  dunque anche $v_1, \ldots, v_{n-1}$ sono linearmente indipendenti
- Supponiamo quindi che $v_n \in Span(v_1, \ldots, v_{n-1})$, implicando che:

  $$\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{n-1} v_{n-1} = v_n \iff \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{n-1} v_{n-1} - v_n = 0_V \iff$$

$$\iff \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_{n-1} v_{n-1} + (-1) v_n = 0_V$$

dunque $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente dipendenti. Per contronominale, quindi, si ha che:

$$v_1, \ldots, v_n \text{ lin. indipendenti } \implies v_n \notin Span(v_1, \ldots, v_{n-1})$$

- Viceversa, supponiamo per assurdo che $v_n \notin Span(v_1, \ldots, v_n)$ e che $\exists \lambda_n \neq 0 \mid \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V$. Ne segue che

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V \implies \lambda_n v_n = -\lambda_1 v_1 - \ldots - \lambda_{n-1} v_{n-1} \implies$$

$$\implies v_n = (-\lambda_n^{-1}\lambda_1) v_1 + \ldots + (-\lambda_n^{-1}\lambda_{n-1}) v_{n-1} \implies v_n \in Span(v_1, \ldots, v_{n-1})$$

contraddicendo quindi l'ipotesi $v_n \notin Span(v_1, \ldots, v_n)$, implicando quindi che l'unica possibilità sia $\lambda_n = 0$.

- Di conseguenza, nel caso in cui $v_1, \ldots, v_{n-1}$ siano linearmente indipendenti e $v_n \notin Span(v_1, \ldots, v_n)$, otteniamo che:

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + \lambda_n v_n = 0_V \iff \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} + 0 \cdot v_n = 0_V \iff$$

$$\iff \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{n-1} v_{n-1} = 0_V \iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_{n-1} = 0 = \lambda_n$$

dunque $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti

□

Proposition 71. Estensione a generatore

Dati i vettori **linearmente indipendenti** $v_1, \ldots, v_k \in Span(w_1, \ldots, w_n)$, allora:

- $k \leq n$
- $\exists v_{k+1}, \ldots, v_n \in Span(w_1, \ldots, w_n) \mid Span(v_1, \ldots, v_n) = Span(w_1, \ldots, w_n)$ dove $v_1, \ldots, v_n$ sono linearmente indipendenti

Dimostrazione:

- Dato $v_1 \neq 0 \in Span(w_1, \ldots, w_n)$, il quale è ovviamente linearmente indipendente con se stesso, si ha che:

$$\exists \lambda_i \neq 0 \in K, i \in [1, n] \mid v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n \neq 0_V$$

- A meno di riordinare i termini, assumiamo che $\lambda_1 \neq 0$

$$v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n \implies \lambda_1 w_1 = v - \lambda_2 w_2 - \ldots - \lambda_n w_n \implies$$

$$\implies w_1 = (\lambda_1^{-1}) v + (-\lambda_1^{-1}\lambda_2) w_2 - \ldots + (-\lambda_1^{-1}\lambda_n) w_n \implies w_1 \in Span(v_1, w_2, \ldots, w_n)$$

- Poiché $w_1 = \mu_1 v_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_n w_n \in Span(v_1, w_2, \ldots, w_n)$, ne segue che:

$$u \in Span(w_1, \ldots, w_n) \iff u = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n =$$

$$= \lambda_1(\mu_1 v_1 + \mu_2 w_2 + \ldots + \mu_n w_n) + \lambda_2 w_2 + \ldots + \lambda_n w_n =$$

$$= (\lambda_1\mu_1) v_1 + (\lambda_1\lambda_2\mu_2) w_2 + \ldots + (\lambda_1\lambda_n\mu_n) w_n \iff u \in Span(v_1, w_2, \ldots, w_n)$$

dunque si ha che $Span(v_1, w_2, \ldots, w_n) = Span(w_1, \ldots, w_n)$

- Supponiamo quindi induttivamente che dati $v_1, \ldots, v_i \in Span(w_1, \ldots, w_n)$ linearmente indipendenti, dove $i \leq n$, si ha che:

$$Span(v_1, \ldots, v_i, w_{i+1}, \ldots, w_n) = Span(w_1, \ldots, w_n)$$

- Preso $v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \ldots + \lambda_n w_n \in Span(v_1, \ldots, v_i, w_{i+1}, \ldots, w_n)$, supponiamo per assurdo che $\lambda_{i+1}, \ldots, \lambda_n = 0$, implicando che:

$$v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \ldots + \lambda_n w_n \implies$$

$$\implies v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_i v_i + 0 \cdot w_{i+1} + \ldots + 0 \cdot w_n \implies$$

$$\implies v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_i v_i \implies 0_V = (-1) v_{i+1} + \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_i v_i$$

  contraddicendo l'ipotesi per cui $v_1, \ldots, v_k$ siano linearmente indipendenti, dunque l'unica possibilità è

$$\exists \lambda_j \neq 0, j \in [i+1, n] \mid v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \ldots + \lambda_n w_n \neq 0_V \iff$$

- A meno di riordinare i termini, assumiamo che $\lambda_{i+1} \neq 0$

$$v_{i+1} = \mu_1 v_1 + \ldots + \mu_i v_i + \lambda_{i+1} w_{i+1} + \ldots + \lambda_n w_n \implies$$

$$\implies \lambda_{i+1} w_{i+1} = v_{i+1} - \mu_1 v_1 - \ldots - \mu_i v_i - \lambda_{i+2} w_{i+2} - \ldots - \lambda_n w_n \implies$$

$$w_{i+1} = (\lambda_{i+1}^{-1}) v_{i+1} + (-\lambda_{i+1}^{-1} \mu_1) v_1 + \ldots + (-\lambda_{i+1}^{-1} \mu_i) v_i + (-\lambda_{i+1}^{-1} \lambda_{i+2}) w_{i+2} + \ldots + (-\lambda_{i+1}^{-1} \lambda_n) w_n$$

$$\implies w_{i+1} \in Span(v_1, \ldots, v_i, v_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_n)$$

- Poiché $w_{i+1} = \mu_1 v_1 + \ldots \mu_{i+1} v_{i+1} + \mu_{i+2} w_{i+2} + \ldots + \mu_n w_n \in Span(v_1, \ldots, v_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_n)$, procedendo analogamente al caso base si ha che::

$$u \in Span(w_1, \ldots, w_n) \iff u \in Span(v_1, \ldots, v_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_n)$$

  dunque si ha che $Span(w_1, \ldots, w_n) = Span(v_1, \ldots, v_{i+1}, w_{i+2}, \ldots, w_n)$, implicando quindi per induzione che

$$Span(w_1, \ldots, w_n) = Span(v_1, \ldots, v_n)$$

- Supponiamo per assurdo che vi possano essere $k > n$ vettori linearmente indipendenti, dunque che $\exists v_{n+1} \in Span(w_1, \ldots, w_n) \mid v_1, \ldots, v_n, v_{n+1}$ linearmente indipendenti. Poiché $Span(w_1, \ldots, w_n) = Span(v_1, \ldots, v_n)$, ne segue che:

$$v_{n+1} \in Span(w_1, \ldots, w_n) = Span(v_1, \ldots, v_n)$$

  contraddicendo l'ipotesi per cui $v_1, \ldots, v_n, v_k$ siano indipendenti, dunque l'unica possibilità è che i vettori linearmente indipendenti siano $k \leq n$

□

8.2 Base e Dimensione

Definition 64. Base

Dato uno spazio vettoriale V su K, definiamo i vettori $v_1, \dots, v_n \neq 0_V \in V$ come una **base** se e solo se sono un **insieme di generatori** e **linearmente indipendenti**

Observation 53

Dato uno spazio vettoriale V, si ha che:

$$v_1, \dots, v_n \text{ base di } V \iff \forall v \in V, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

Inoltre, chiamiamo tali unici scalari come **coordinate di** v **in base** $v_1, \dots, v_n$

Dimostrazione:

- Nel caso in cui $\forall v \in V, \exists! \lambda_1, \dots, \lambda_n \mid v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$, per definizione stessa di vettori generatori si ha che $v_1, \dots, v_n$ sono generatori di V
- Inoltre, poiché tali coordinate sono uniche, ne segue naturalmente che:

  $$\exists! \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0 \in K \mid \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n = 0_V$$

  dunque $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti
- Viceversa, se $v_1, \dots, v_n \in V$ sono una base di V, si ha che:

  $$V = Span(v_1, \dots, v_n) = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K\}$$

- Dato $v \in V$, supponiamo per assurdo che esistano due combinazioni lineari di $v_1, \dots, v_n$ tali che

  $$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \implies \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \implies$$
  $$\implies \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n - \lambda_1 v_1 - \dots - \lambda_n v_n = 0_V \implies (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0_V$$

- Poiché $v_1, \dots, v_n$ sono linearmente indipendenti, si ha che:

  $$(\lambda_1 - \mu_1) v_1 + \dots + (\lambda_n - \mu_n) v_n = 0_V \iff (\lambda_1 - \mu_1) = \dots = (\lambda_n - \mu_n) = 0 \iff$$
  $$\iff \lambda_1 = \mu_1, \dots, \lambda_n = \mu_n$$

□

Observation 54. Base canonica

Dato uno spazio di coordinate K^n, definiamo i vettori $e_1, \dots, e_n \in K^n$ come **base canonica di** K^n, dove:

$$e_i = (a_1, \dots, a_n) \mid \begin{cases} a_j = 0 & \text{se } j \neq i \\ a_j = 1 & \text{se } j = i \end{cases}$$

Dimostrazione:

- Dati $e_1, \ldots, e_n \in K^n$ definiti come:
  - $e_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0, 0)$
  - $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0, 0)$
  - $\vdots$
  - $e_n = (0, 0, 0, \ldots, 0, 1)$
- Si ha che:

$$v = (t_1, \ldots, t_n) \in K^n \iff v = (t_1, \ldots, 0) + \ldots + (0, \ldots, t_n)$$

$$\iff v = t_1 e_1 + \ldots + t_n e_n \in Span(e_1, \ldots, e_n)$$

  dunque tali vettori sono generatori poiché $K^n = Span(e_1, \ldots, e_n)$
- Analogamente, si ha che:

$$\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n = (0, \ldots, 0) \iff (\lambda_1, 0, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0)$$

$$(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n) = (0, \ldots, 0) \iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$$

  dunque tali vettori sono anche linearmente indipendenti, costituendo quindi una base di K^n

□

Proposition 72

Sia V uno spazio vettoriale. Se $v_1, \ldots, v_n$ e $w_1, \ldots, w_m$ sono due basi di V, si ha necessariamente che $n = m$.

Dunque tutte le basi di uno spazio vettoriale hanno la **stessa cardinalità**

Dimostrazione:

- Poiché i due insiemi di vettori sono entrambi base di V, si ha che

$$Span(v_1, \ldots, v_n) = V = Span(w_1, \ldots, w_m)$$

- Di conseguenza, poiché i vettori $v_1, \ldots, v_n \in V = Span(w_1, \ldots, w_m)$ sono linearmente indipendenti, ne segue che $n \leq m$
- Analogamente, poiché i vettori $w_1, \ldots, w_m \in V = Span(v_1, \ldots, v_m)$ sono linearmente indipendenti, ne segue che $m \leq n$
- Dunque, l'unica possibilità è che $n = m$

□

Definition 65. Dimensione di uno spazio vettoriale

Dato uno spazio vettoriale V, definiamo come **dimensione di** V, indicata come $dim(V)$ la **cardinalità di una sua qualsiasi base** (poiché ogni base di V ha la stessa cardinalità).

Nel caso in cui non esista un insieme finito di generatori di V, definiamo la sua dimensione come **infinita**.

Esempi:

- Lo spazio di coordinate K^n e la sua base canonica $e_1, \ldots, e_n$, si ha che:

$$dim(K^n) = n$$

- Lo spazio vettoriale $K[x]$ non può avere base finita: dati $p_1(x), \ldots, p_n(x) \in V$ e $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ si ha che:

$$deg(\lambda_1 p_1(x) + \ldots + \lambda_n p_n(x) \leq max(deg(p_1(x)), \ldots, deg(p_n(x)))$$

  Infatti, in tale esempio la base è data dai monomi $1, x, x^2, \ldots$, dunque non esiste un insieme finito di generatori di $K[X]$

- Lo spazio vettoriale $K^S : \{f : S \to K\}$ ha dimensione finita se e solo se S ha cardinalità finita

Lemma 73. Estensione a base

Sia V uno spazio vettoriale dove $dim(V) = n$. Dati i vettori **linearmente indipendenti** $v_1, \ldots, v_k \in V$, dove $k < n$ allora:

$$\exists v_{k+1}, \ldots, v_n \in V \mid v_1, \ldots, v_n \text{ sono base di } V$$

Dimostrazione:

- Poiché $dim(V) = n$, sia $w_1, \ldots, w_n$ una base qualsiasi di V. Per dimostrazione precedente, dato $k < n$ si ha che:

$$\exists v_{k+1}, \ldots, v_n \in V \mid Span(v_1, \ldots, v_n) = Span(w_1, \ldots, w_n) = V$$

  dove $v_1, \ldots, v_n$ sono anche linearmente indipendenti, dunque costituiscono una base di V

□

Lemma 74. Riduzione a base

Sia V uno spazio vettoriale dove $dim(V) = n$. Dato l'**insieme di generatori** $v_1, \ldots, v_k$ di V, dove $k \geq n$ allora:

$$\exists v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \in \{v_1, \ldots, v_k\} \mid v_{i_1}, \ldots, v_{i_n} \text{ sono base di } V$$

Dimostrazione:

- Dati $v_1, \ldots, v_m$ generatori di V, assumiamo che $\exists v_{k_1} \neq 0 \in \{v_1, \ldots, v_m\}$, il quale è ovviamente linearmente indipendente con se stesso
- Poiché $Span(v_{i_1}) \subsetneqq Span(v_1, \ldots, v_m) = W$, allora
$$\exists v_{i_2} \in \{v_1, \ldots, v_m\} \mid v_{i_2} \notin Span(v_{i_1}) \iff v_{i_1}, v_{i_2} \text{ lin. ind.}$$
- Ripetendo tale procedimento n, estendiamo l'insieme $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ di vettori linearmente indipendenti fino a che essi non siano generatori di V:
$$Span(v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}) = Span(v_1, \ldots, v_m) = V$$
dunque $v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}$ sono una base di V

□

Proposition 75

Sia V uno spazio vettoriale dove $dim(V) = n$. Dati i vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$, si ha che:

$$v_1, \ldots, v_n \text{ lin. ind.} \iff v_1, \ldots, v_n \text{ generatori}$$

Dimostrazioni:

- Supponiamo per assurdo che $v_1, \ldots, v_n \in V$ siano linearmente indipendenti ma che non siano generatori di V, dunque $Span(v_1, \ldots, v_n) \subsetneqq V$. Ne segue che:
$$\exists v_{n+1} \in W \mid v_{n+1} \notin Span(v_1, \ldots, v_n) \implies v_1, \ldots, v_{n+1} \text{ lin. ind.}$$
contraddicendo la condizione per cui $dim(V) = n$ implica che non possano esistere più di n vettori linearmente indipendenti (sezione 8.1), dunque l'unica possibilità è che $v_1, \ldots, v_n$ siano anche generatori di V
- Viceversa, supponiamo per assurdo che $v_1, \ldots, v_n$ siano generatori di V ma non linearmente indipendenti. Ne segue che:
$$\exists \lambda_i \neq 0 \in K, i \in [1, n] \mid \lambda_1 v_1 + \ldots \lambda_i v_i + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V \implies$$
$$v_i = (\lambda_i^{-1}\lambda_1)v_1 + \ldots + (\lambda_i^{-1}\lambda_n)v_n = 0_V \implies w_i \in Span(v_1, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n)$$
dove $\hat{v_i}$ indica che tale elemento è escluso
- A questo punto, si ha che:
$$u \in Span(v_1, \ldots, v_n) \iff u \in Span(v_1, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n)$$
da cui otteniamo che:
$$W = Span(v_1, \ldots, v_n) = Span(v_1, \ldots, \hat{v_i}, \ldots, v_n)$$
contraddicendo la condizione per cui $dim(V) = n$ implica che non possano esistere meno di n generatori di V, dunque l'unica possibilità è che $v_1, \ldots, v_n$ siano anche linearmente indipendenti

□

8.2.1 Formula di Grassman

Theorem 76. Formula di Grassmann

Dato uno spazio vettoriale W su K e dati due sottospazi $U, V \subseteq W$, i seguenti insiemi:

$$U + V : \{u + v \mid u \in U, v \in V\}$$

$$U \cap V : \{w \mid w \in U, w \in V\}$$

sono due sottospazi di W, dove:

$$dim(U + V) = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$$

Dimostrazione:

- Dati: $k := dim(U \cap V), m := dim(U), n := dim(V)$, siano:
  - $w_1, \dots, w_k$ una base di $U \cap V$
  - $\mathcal{B}_1 := w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_m$ una base di U
  - $\mathcal{B}_2 := w_1, \dots, w_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ una base di V
- Consideriamo quindi il seguente insieme di vettori:

$$\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = w_1, \dots, w_k, u_{k+1}, \dots, u_m, v_{k+1}, \dots, v_n$$

- Dati $u \in Span(B_1) = U$ e $v \in Span(B_2) = V$, dove

$$u = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i + \sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j u_j \qquad v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \lambda_j v_j$$

  si ha che :

$$u + v \in U + V \iff u + v = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i w_i + \sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j u_j + \sum_{i=1}^{k} \mu_i w_i + \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j v_j \iff$$

$$\iff u + v = \sum_{i=1}^{k} (\lambda_i + \mu_i) w_i + \sum_{j=k+1}^{m} \lambda_j u_j + \sum_{j=k+1}^{n} \mu_j v_j \iff u + v \in Span(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$$

  dunque $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ sono generatori di $U + V$
- Consideriamo quindi $0_W \in U + V$ scritto come combinazione lineare di tale base

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i w_i + \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j + \sum_{h=k+1}^{n} \eta_h v_h = 0_W$$

- Posti:

$$a := \sum_{i=1}^{k} \beta_i w_i \qquad b := \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j \qquad c := \sum_{h=k+1}^{n} \eta_h v_h$$

si ha che:

$$a + b + c = 0_W \iff b = -a - c \implies b \in Span(\mathcal{B}_2) = V$$

inoltre, poiché $b \in Span(u_{k+1}, \ldots, u_m) \subsetneqq U \implies b \in U$, ne segue che $b \in U \cap V$

- Di conseguenza, si ha che:

$$\begin{cases} b := \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j \\ b \in U \cap V \iff b = \sum_{t=0}^{k} \alpha_t w_t \end{cases} \implies \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j = \sum_{t=0}^{k} \alpha_t w_t \implies$$

$$\implies \sum_{t=0}^{k} \alpha_t w_t - \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j = 0_W$$

- Poiché $\mathcal{B}_1 = w_1, \ldots, w_k, u_{k+1}, \ldots, u_m$ è una base di U, dunque sono vettori linearmente indipendenti, ne segue che:

$$\sum_{t=0}^{k} \alpha_t w_t - \sum_{j=k+1}^{m} \gamma_j u_j = 0_W \iff \alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \gamma_{k+1} = \ldots = \gamma_m = 0$$

- In particolare, quindi, otteniamo che $\gamma_{k+1} = \ldots = \gamma_m = 0 \implies b = 0_W$, da cui traiamo che:

$$a + b + c = 0_W \implies a + 0_W + c = 0_W \implies a + c = 0_W$$

- A questo punto, poiché:

$$a + c = 0_W \implies \sum_{i=1}^{k} \beta_i w_i + \sum_{h=k+1}^{n} \eta_h v_h = 0_W$$

e poiché $\mathcal{B}_2 := w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ è una base di V, dunque sono vettori linearmente indipendenti, ne segue che:

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i w_i + \sum_{h=k+1}^{n} \eta_h v_h = 0_W \iff \beta_1 = \ldots = \beta_k = \eta_{k+1} = \ldots = \eta_n = 0$$

concludendo quindi che i vettori $\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 = w_1, \ldots, w_k, u_{k+1}, \ldots, u_m, v_{k+1}, \ldots, v_n$ siano anche linearmente indipendenti, costituendo quindi una base di $U + V$

- Infine, si ha che:

$$dim(U + V) = dim(Span(w_1, \ldots, w_k, u_{k+1}, \ldots, u_m, v_{k+1}, \ldots, v_n)) =$$

$$= k + (m - k) + (n - k) = m + n - k = dim(U) + dim(V) - dim(U \cap V)$$

□

8.3 Trasformazioni lineari

Definition 66. Trasformazione lineare

Dati due spazi vettoriali V e W definiti sullo stesso campo K, la funzione $f : V \to W$ viene detta **trasformazione lineare** (o morfismo tra spazi vettoriali) se:

- $\forall v, v' \in V, f(v + v') = f(v) + f(v')$
- $\forall \lambda \in K, v \in V, f(\lambda v) = \lambda f(v)$

Lemma 77

Dato uno spazio vettoriale V si ha che:

$$dim(V) = n \implies V \cong K^n$$

Dimostrazione:

- Dato $dim(V) = n$, sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V. Definiamo la funzione

  $$\varphi : K^n \to V : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1 v_1 + \ldots + t_n v_n)$$

  dunque φ mappa ogni vettore di K^n ad una combinazione lineare di V
- Poiché:

  $$v_1, \ldots, v_n \text{ base di } V \iff \forall v \in V, \exists! \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K \mid v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

  e poiché $dim(K^n) = n$, la funzione φ risulta essere automaticamente biettiva:

  $$\forall v := \varphi(u) \in V, \exists! u := (t_1, \ldots, t_n) \in K^n \mid \varphi(u) = t_1 v_1 + \ldots + t_n v_n$$

- Dati quindi $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in K^n$, si ha che:

  $$\varphi(x+y) = (x_1+y_1)v_1+\ldots+(x_n+y_n)v_n = x_1v_1+\ldots+x_nv_n+y_1v_1+\ldots+y_nv_n = \varphi(x)+\varphi(y)$$

- Dato invece $\lambda \in K$, si ha che:

  $$\varphi(\lambda v) = \lambda x_1 v_1 + \ldots \lambda x_n v_n = \lambda(x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n) = \lambda \varphi(x)$$

- Dunque, concludiamo che φ sia un isomorfismo e di conseguenza che:

  $$V \cong K^n$$

□

Theorem 78

Dati due spazi vettoriali V e W definiti sullo stesso K, si ha che:

$$V \cong W \iff dim(V) = dim(W)$$

Dimostrazione:

- Nel caso in cui $dim(V) = dim(W) = n$ dove $n \in \mathbb{N}$, per il lemma precedente si ha che:
$$dim(V) = n, dim(W) = n \implies V \cong K^n, W \cong K^n \implies$$
$$\implies V \cong K^n, K^n \cong W \implies V \cong W$$
- Viceversa, supponiamo che $V \cong W$, dove f è l'isomorfismo che rende V isomorfo a W. Sia inoltre $v_1, \dots, v_n$ la base di V.
- Poiché f è un morfismo suriettivo, si ha che:
$$\forall w \in W, \exists v \in V \mid w = f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) =$$
$$f(\lambda_1 v_1) + \dots + f(\lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \dots + \lambda_n f(v_n)$$
dunque, poiché anche $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono vettori di W, ne segue che $f(v_1), \dots, f(v_n)$ siano generatori di W
- Inoltre, poiché f è iniettiva se e solo se $Ker(f) = \{0_V\}$ e poiché ne segue che:
$$\mu_1 f(v_1) + \dots + \mu_n f(v_n) = 0_W \iff f(\mu_1 v_1) + \dots + f(\mu_n v_n) = 0_W \iff$$
$$\iff f(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n) = 0_W \iff \mu_1 v_1 + \dots + \mu_n v_n = 0_V \iff \mu_1 = \dots = 0$$
dunque $f(v_1), \dots, f(v_n)$ sono anche linearmente indipendenti, costituendo quindi una base di W, implicando quindi che $dim(W) = n = dim(V)$

□

Definition 67. Spazio quoziente

Dato uno spazio vettoriale V e un sottospazio $W \subseteq V$, la struttura $(V/W, +, \cdot)$ è uno spazio vettoriale, detto **spazio quoziente**, dove la somma è definita come $[v] + [v'] = [v + v']$ e il prodotto per scalare è definito come $\lambda[x] = [\lambda x]$.

Dimostrazione:

- La dimostrazione della buona definizione della somma risulta analoga a quella del normale gruppo quoziente
- Dimostriamo quindi che il prodotto per scalare sia ben definito
$$[v] = [v'] \implies v' - v \in W \implies \lambda(v' - v) \in W \implies [\lambda v] = [\lambda v']$$
- La dimostrazione di $(V/W, +, \cdot)$ spazio vettoriale viene omessa poiché banale

□

Theorem 79. Dimensione spazio quoziente

Dato uno spazio vettoriale V e un sottospazio $W \subseteq V$, si verifica che

$$dim(V/W) = dim(V) - dim(W)$$

Dimostrazione:

- Siano $n := dim(V)$, $k := dim(W)$ e $w_1, \ldots, w_k$ una base di W.
- Poiché $k \leq n$, è possibile estendere con $n - k$ vettori di V l'insieme $w_1, \ldots, w_k$ fino a formare una base di V:

$$\exists v_{k+1}, \ldots, v_n \in V \mid w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n \text{ base di V}$$

- Dato $v \in V = Span(w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n)$, si ha che:

$$v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_k w_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n \implies$$
$$\implies [v] = \lambda_1 [w_1] + \ldots + \lambda_k [w_k] + \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n]$$

- Poiché:

$$w_1, \ldots, w_k \in W \iff w_1 \sim 0_V, \ldots, w_k \sim 0_V \iff [0_V] = [w_1] = \ldots = [w_k]$$

  si ha che:

$$[v] = \lambda_1 [w_1] + \ldots + \lambda_k [w_k] + \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n] \iff$$
$$\iff [v] = \lambda_1 [0_V] + \ldots + \lambda_k [0_V] + \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n] \iff$$
$$\iff [v] = \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n]$$

  dunque, $[v_{k+1}], \ldots, [v_n]$ sono generatori di V/K

- Preso $[0_V] \in V/W$, si ha che:

$$[0_V] = \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n] \iff [0_V] = [\lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n] \iff$$
$$\iff u := \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n \in W$$

- Poiché anche $w_1, \ldots, w_k$ è base di W e poiché $u \in W$, si ha che:

$$u = \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k \iff$$
$$\iff \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n = \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k \iff$$
$$\iff \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_k w_k - \lambda_{k+1} v_{k+1} + \ldots + \lambda_n v_n = 0_V \iff$$
$$\iff \mu_1 = \ldots = \mu_k = \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$

  dato che $w_1, \ldots, w_k, v_{k+1}, \ldots, v_n$ sono base di V, dunque linearmente indipendenti.

- In particolare, quindi, dati $\lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ ne segue che:

$$[0_V] = \lambda_{k+1} [v_{k+1}] + \ldots + \lambda_n [v_n] \iff \lambda_{k+1} = \ldots = \lambda_n = 0$$

  implicando che anche $[v_{k+1}], \ldots, [v_n]$ siano linearmente indipendenti, costituendo quindi base di V/W, la cui dimensione risulta essere:

$$dim(V/W) = dim(Span([v_{k+1}], \ldots, [v_n])) = n - k = dim(V) - dim(W)$$

□

8.3.1 Teorema del Rango

Proposition 80. Nucleo ed Immagine di una trasformazione lineare

Data una trasformazione lineare $f : V \to W$, il nucleo $Ker(f) \subseteq V$ e l'immagine $Im(f) \subseteq W$ di f corrispondono a:

$$Ker(f) : \{v \in V \mid f(v) = 0_W\}$$

$$Im(f) : \{w \in W \mid f(v) = w, \exists v \in V\}$$

dove entrambi sono sottospazi vettoriali rispettivamente di V e W

Dimostrazione:

- Sappiamo già $Ker(f) \trianglelefteq V$ e che $Im(f) \leqslant W$
- Verifichiamo quindi che siano chiusi nel prodotto per scalare

$$v \in Ker(f), \lambda \in K \implies f(\lambda v) = \lambda f(v) = \lambda 0_W = 0_W \implies \lambda v \in Ker(f)$$

$$w = f(v) \in Im(f), \lambda \in K \implies \lambda w = \lambda f(v) = f(\lambda v) \implies \lambda v \in Im(f)$$

□

Observation 55. Teorema fondamentale di isomorfismo

Data una trasformazione lineare $f : V \to W$, si ha che

$$V/Ker(f) \cong Im(f)$$

(dimostrazione analoga agli altri casi del teorema)

Theorem 81. Teorema del Rango

Siano V e W due spazi vettoriali. Data una trasformazione lineare $f : V \to M$, definiamo come **rango di** f la dimensione della sua immagine, la quale equivale a:

$$rk(f) := dim(Im(f)) = dim(V) - dim(Ker(f))$$

Dimostrazione:

- Poiché $f : V \to W$ è una trasformazione lineare, per il teorema fondamentale di isomorfismo si ha che $V/Ker(f) \cong Im(f)$, da cui ne segue automaticamente che:

$$V/Ker(f) \cong Im(f) \iff dim(V/Ker(f)) = dim(Im(f)) \iff$$

$$\iff dim(V) - dim(Ker(f)) = dim(Im(f))$$

□

8.4 Spazi affini, Sottospazi affini e Giacitura

Definition 68. Spazio affine

Dato uno spazio vettoriale $(V, +, \cdot)$, definiamo come **spazio affine a** V la struttura (A, V, ϕ), dove:

- Gli elementi $P \in A$ vengono detti **punti**
- La funzione $\phi : A \times V \to A$ gode delle seguenti proprietà
  - **Associatività mista:**

$$\forall P \in A, \forall v, w \in V, \phi(\phi(P, v), w) = \phi(P, (v + w))$$

  - **Elemento nullo destro:**

$$\forall a \in A, \exists 0_V \in V \mid \phi(a, 0_V) = a$$

  - **Azione libera e transitiva:**

$$\forall P \in A, \text{ la funzione } \phi_P : V \to A : v \to \phi(P, v) \text{ è biettiva}$$

Detto in parole molto povere (e poco esatte) uno spazio affine A è una **traslazione totale di uno spazio vettoriale** V dove ogni punto del primo corrisponde biunivocamente ad un punto dell'altro

Definition 69. Sottospazio affine e Giacitura

Dato uno spazio vettoriale V, un suo sottospazio vettoriale $W \subseteq V$ e un vettore $v \in V$, definiamo come **sottospazio affine** l'insieme di **punti** generato da:

$$U = v + W : \{v + w \mid w \in W\}$$

dove W viene definito **giacitura** di U, indicato con $Giac(U)$ e dove:

$$dim(U) = dim(Giac(U)) = dim(W)$$

In altre parole, il sottospazio affine U corrisponde ad una **traslazione** del sottospazio W tramite il vettore v. Ogni sottospazio affine può essere visto come una **classe laterale di un sottospazio** (poiché l'operazione primaria è la somma).

8.5 Prodotto scalare e Spazio ortogonale

Definition 70. Prodotto scalare

Dato lo spazio di coordinate K^n, definiamo come **prodotto scalare** l'operazione:

$$\cdot : K^n \times K^n \to K : ((\lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_1, \dots, \mu_n)) \mapsto v \cdot v' = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mu_i$$

la quale gode delle seguenti proprietà:

- $u, v \in K^n \implies u \cdot v = v \cdot u$ (**Simmetria**)
- $u, v, w \in K^n \implies (v + w)u = u(v + m) = vu + vu$ (**Distributività**)
- $u, v \in K^n, \lambda \in K \implies (\lambda u)v = u(\lambda v) = \lambda uv$ (**Linearità per scalare**)

Attenzione: il prodotto scalare differisce dal prodotto **per** scalare

Definition 71. Norma di un vettore

Dato $v \in \mathbb{R}^n$, definiamo la **norma (o lunghezza)** di tale vettore come

$$||v|| := \sqrt{v \cdot v} = \sqrt{x_1^2 + \dots x_n^2}$$

Theorem 82

Dati $u, v \in \mathbb{R}^n$ e l'angolo $0 < \theta < \pi$ interno tra u e v, si ha che

$$\cos\theta = \frac{uv}{||u||\,||v||}$$

Inoltre, si verifica che:

- $\theta < \frac{\pi}{2} \iff uv > 0$
- $\theta = \frac{\pi}{2} \iff uv = 0$
- $\theta > \frac{\pi}{2} \iff uv < 0$

Dimostrazione:

- Tramite il Teorema del Coseno (normalmente utilizzato per calcolare la lunghezza di un lato di un triangolo qualsiasi sapendo la lunghezza degli altri due lati), si ha che:

$$||v - u||^2 = ||u||^2 + ||v||^2 - 2\,||u||\,||v||\cos\theta \iff$$
$$\iff ||v - u||^2 - ||u||^2 - ||v||^2 = -2\,||u||\,||v||\cos\theta \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2 - \sum_{j=1}^{n} x_n^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = -2\,||u||\,||v||\cos\theta \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n}(y_i^2 - 2y_i x_i + x_i^2) - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = -2\,||u||\,||v||\cos\theta \iff$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 2\sum_{h=1}^{n} y_h x_h + \sum_{t=1}^{n} + x_t^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{k=1}^{n} y_k^2 = -2\,||u||\,||v||\cos\theta \iff$$

$$\iff \sum_{h=1}^{n} y_h x_h = ||u||\,||v||\cos\theta \iff \sum_{h=1}^{n} y_h x_h = ||u||\,||v||\cos\theta \iff$$

$$\iff uv = ||u||\,||v||\cos\theta \iff \frac{uv}{||u||\,||v||} = \cos\theta$$

□

Proposition 83. Relazione di ortogonalità

Siano $u, v \in \mathbb{R}^n$. Il vettore u viene detto "**ortogonale a** v", indicato come $v \perp w$, se e solo se:

$$u \perp v \iff uv = 0$$

Nota: l'ortogonalità è una generalizzazione del concetto di perpendicolarità nell'ambito dell'algebra lineare

Dimostrazione:

- Per definizione stessa di perpendicolarità, l'essere perpendicolari implica che vi sia un angolo retto tra due linee. Generalizzando tale concetto all'ortogonalità tra vettori, dato l'angolo $0 < \theta < \pi$ interno a u e v, per il teorema precedente si ha che:

$$uv = 0 \iff \theta = \frac{\pi}{2} \iff \cos(\theta) = 1 \iff \text{angolo retto tra } u \text{ e } v$$

□

Definition 72. Sottospazio ortogonale

Dato il sottospazio vettoriale $V \subseteq K^n$, definiamo $V^\perp$ il **sottospazio ortogonale a** V come:

$$V^\perp = \{v \in K^n \mid vw = 0, \forall w \in V\}$$

dove in particolare si ha che:

$$dim(K^n) = dim(V) + dim(V^\perp)$$

Dimostrazione:

- $V^\perp \leqslant K^n$
  - $\forall v \in V, 0_{K^n} \cdot v = 0 \implies 0_{K^n} \in V^\perp$
  - $\forall v \in V, w_1, w_2 \in V^\perp \implies (w_1 + w_2)v = w_1 v + w_2 v = 0 + 0 = 0 \implies w_1 + w_2 \in V^\perp$
  - $\forall v \in V, w \in V^\perp \implies (-w)v = -(wv) = 0 \implies -w \in V^\perp$
- $\forall v \in V, w \in V^\perp, \lambda \in K \implies (\lambda w)v = \lambda(wv) = 0 \implies \lambda w \in V^\perp$
- Poiché $Ker(V \cap V^\perp) = \{0_V\} \implies dim(V \cap V^\perp) = 0$ e poiché $K^n = V + V^\perp$, per la formula di Grassman ne segue che:

$$dim(K^n) = dim(V + V^\perp) = dim(V) + dim(V^\perp)$$

□

Capitolo 9

Matrici

Definition 73. Matrici

Dati $m, n \neq 0 \in \mathbb{N}$, una **matrice** $m \times n$ **a coefficienti in un campo** K è una griglia con m righe e n colonne, le cui entrate sono elementi in K

$$A \in Mat_{m\times n}(K) \implies A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

dove $Mat_{m\times n}(K) = \underbrace{K^n \times \ldots \times K^n}_{\text{m volte}} = \underbrace{K^m \times \ldots \times K^m}_{\text{n volte}}$

Esempio:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$$

Definition 74. Vettori colonna e Vettori riga

Definiamo una matrice $1 \times n$ come **vettore riga**

$$\begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in Mat_{1\times n}(K) = K^n$$

e analogamente definiamo una matrice $m \times 1$ come **vettore colonna**

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix} \in Mat_{m\times 1}(K) = K^m$$

Observation 56

Una matrice $m \times n$ può essere definita come un **vettore di m vettori riga aventi n elementi** (che vengono indicati con un pedice)

$$A_1, \dots, A_n \in K^m \implies A = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & A_n \end{pmatrix}$$

o come un **vettore di n vettori colonna aventi m elementi** (che vengono indicati con un apice)

$$A^1, \dots, A^m \in K^n \implies A = \begin{pmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^m \end{pmatrix}$$

Observation 57

La struttura $(Mat_{m\times n}(K), +, \cdot)$ è uno **spazio vettoriale** di dimensione:

$$dim(Mat_{m\times n}(K)) = m \cdot n$$

e la cui **base canonica** è composta dalle matrici:

$$e_{i,j} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \Bigg| \begin{cases} a_{k,h} = 0 & \text{se } k \neq i \vee h \neq j \\ a_{k,h} = 1 & \text{se } k = i, h = j \end{cases}$$

Dimostrazione:

- Date $A, B \in Mat_{m\times n}(K)$ e $\lambda \in K$, le operazioni di somma e prodotto sono definite come:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{1,1} + b_{1,1} & \cdots & a_{1,n} + b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} + b_{m,1} & \cdots & a_{m,n} + b_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m,1} & \cdots & \lambda a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- Le dimostrazioni di $(Mat_{m\times n}(K), +, \cdot)$ spazio vettoriale e della base canonica vengono omesse poiché analoghe alle dimostrazioni per K^n

□

Esempio:

- La base canonica di $Mat_{2\times 2}(A)$ corrisponde a:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Observation 58

Dato lo spazio $Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

$$Mat_{m\times n}(K) \cong K^{m\cdot n}$$

Dimostrazione:

- Poiché $dim(Mat_{m\times n}(K)) = m\cdot n$ e $dim(K^{m\cdot n}) = m\cdot n$, per dimostrazione precedente si ha che:

$$dim(Mat_{m\times n}(K)) = dim(K^{m\cdot n}) \iff Mat_{m\times n}(K) \cong K^{m\cdot n}$$

□

Definition 75. Prodotto tra matrici

Sia $A = (A_1, \dots, A_h) \in Mat_{h\times m}(K)$ e sia $B = (B^1, \dots, B^n) \in Mat_{m\times n}(K)$.

Definiamo come **prodotto tra matrici** la trasformazione lineare:

$$\cdot : Mat_{h\times m}(K) \times Mat_{m\times n}(K) \to Mat_{h\times n}(K) : (A, B) \mapsto AB$$

dove :

$$AB = \begin{pmatrix} A_1B^1 & \cdots & A_1B^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_hB^1 & \cdots & A_hB^n \end{pmatrix}$$

Attenzione: affinché il prodotto sia ben definito è **necessario** che la quantità di colonne di A sia uguale alla quantità di righe di B

Esempi:

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8 \\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\cdot 1+6\cdot 3 & 5\cdot 2+6\cdot 4 \\ 7\cdot 1+8\cdot 3 & 7\cdot 2+8\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 32 & 46 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 3+2\cdot(-2) & 1\cdot 6+2\cdot 0 & 1\cdot 7+2\cdot 8 \\ 4\cdot 3+5\cdot(-2) & 4\cdot 6+5\cdot 0 & 4\cdot 7+5\cdot 8 \end{pmatrix} =$
  $= \begin{pmatrix} -1 & 6 & 23 \\ 2 & 24 & 68 \end{pmatrix}$
- $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 7 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \nexists$ poiché la quantità di colonne nella prima non corrisponde a quella delle righe della seconda

Observation 59

Date tre matrici A, B, C ed uno scalare λ, se i prodotti sono **ben definiti** si ha che:

- $(AB)C = ABC = A(BC)$
- $A(B + C) = AB + AC$
- $(A + B)C = AC + BC$
- $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$

Corollary 25

Uno spazio vettoriale $Mat_{n\times n}(K)$ (anche detto spazio delle matrici quadrate di ordine n) è un **anello non commutativo**, dove l'elemento neutro è:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

9.1 Rango di una matrice

Definition 76. Trasformazione lineare di una matrice

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo la **trasformazione lineare associata ad** A come

$$L_A : K^n \to K^m : x := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \to Ax$$

dove:

$$L_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix}$$

Definition 77. Sistema lineare e Matrice completa

Data una **matrice di coefficienti** A ed un **vettore di incognite** b, definiti come:

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

l'equazione $Ax = b$ corrisponde ad un **sistema lineare di equazioni cartesiane** nella forma:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

il quale è rappresentato fedelmente dalla seguente **matrice completa**:

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} & b_m \end{array}\right)$$

Dimostrazione:

- Si nota facilmente che:

$$Ax = b \iff \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \iff \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_n \end{cases}$$

□

Proposition 84

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

- $Im(L_A) = Span(A^1, \ldots, A^n)$
- $Ker(L_A) = Span(A_1, \ldots, A_m)^\perp$

Dimostrazione:

- Data $A \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

$$L_A(x) \in Im(L_A) \iff L_A(x) = Ax = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$$

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix} =$$

$$= x_1 A^1 + \ldots x_n A^n \iff L_A(x) \in Span(A^1, \ldots, A^n)$$

dunque si ha che $Im(L_A) = Span(A^1, \ldots, A^n)$

- Inoltre, notiamo che:

$$Ker(L_A) = \{x \in K^n \mid L_A(x) = Ax = 0_{K^m}\} =$$

$$= \left\{ x \in K^n \mid \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{pmatrix} x = 0_{K^m} \right\} = Span(A_1, \ldots, A_m)^\perp$$

dunque $Ker(L_A)$ contiene tutte i vettori $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ che sono soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n = 0 \end{cases}$$

□

Definition 78. Rango di una matrice

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **rango di** A il rango della sua trasformazione lineare associata:

$$rk(A) := rk(L_A)$$

Proposition 85

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

$$rk(A) = n - dim(Ker(L_A)) = dim(Span(A^1, \ldots, A^n)) = dim(Span(A_1, \ldots, A_m))$$

Dimostrazione:

- Poiché $rk(A) := rk(L_A)$ e poiché $L_A : K^n \to K^m$, per il teorema del rango si ha che:

$$rk(A) := rk(L_A) = dim(L_A) = dim(K^n) - dim(Ker(L_A)) = n - dim(Ker(L_A))$$

- Inoltre, per dimostrazioni precedenti si ha che:

$$dim(Span(A^1, \ldots, A^n)) = dim(Im(L_A)) = n - dim(Ker(L_A)) =$$

$$= n - dim(Span(A_1, \ldots, A_n)^\perp) = dim(Span(A_1, \ldots, A_m))$$

□

Corollary 26

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

$$0 \leq rk(A) \leq min(m, n)$$

9.1.1 Riduzione a scala di una matrice

Definition 79. Operazioni elementari su matrici

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **operazioni elementari** su righe e colonne le seguenti tre operazioni:

1. **Scambiare** due righe (o colonne) tra di loro
2. **Moltiplicare** una riga (o colonna) per $\lambda \in K^*$
3. **Sommare** ad una riga (o colonna) un multiplo di un'altra riga (o colonna)

Definition 80. Matrici equivalenti

Date due matrici $A, B \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo tali matrici come **equivalenti** se sono uguali se è possibile ottenere l'una partendo dall'altra utilizzando **solo operazioni elementari**.

In particolare, se vengono utilizzate solo operazioni su righe tali matrici vengono dette **equivalenti per righe**, mentre vengono dette **equivalenti per colonne** se vengono utilizzate solo operazioni su colonne.

Observation 60

Date due matrici $A, B \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

- Se A e B sono **equivalenti per righe**, allora

$$Ker(L_A) = Ker(L_B), Im(L_A) \neq Im(L_B)$$

- Se A e B sono **equivalenti per colonne**, allora

$$Ker(L_A) \neq Ker(L_B), Im(L_A) = Im(L_B)$$

In entrambi i casi si verifica che:

$$rk(A) = rk(B)$$

Dimostrazione:

- Basti pensare che effettuando solo operazioni su righe non si vadano ad alterare i vettori $x \in Ker(L_A)$ in grado di risolvere il sistema $Ax = 0$, dunque $Ker(L_A) = Ker(L_B)$, mentre i vettori $b \in Im(L_A)$ generati dal sistema $Ax = b$ vanno ad essere modificati, dunque $Im(L_A) \neq Im(L_B)$
- Analogamente, effettuando solo operazioni su colonne non si vanno ad alterare i vettori $b \in Im(L_A)$ generati dal sistema $Ax = b$, dunque $Im(L_A) = Im(L_B)$, mentre i vettori $x \in Ker(L_A)$ risolventi il sistema $Ax = b$ vanno ad essere modificati, dunque $Ker(L_A) \neq Ker(L_B)$
- Nel caso in cui il nucleo non venga alterato, si ha che:

$$rk(A) = dim(Im(L_A)) = n - dim(Ker(L_A)) =$$

$$= n - dim(Ker(L_B)) = dim(Im(L_B) = rk(B)$$

  mentre nel caso in cui l'immagine non venga alterata si ha che:

$$rk(A) = dim(Im(L_A)) = dim(Im(L_B)) = rk(L_B)$$

□

Definition 81. Pivot e Matrice a scala

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **pivot** di una riga il primo elemento non nullo a partire da sinistra di tale riga.

Inoltre, la matrice A viene detta **matrice a scala** se $\forall i \in [i, m]$ si verifica che il pivot della riga A_i è più a sinistra pivot della riga A_{i+1}

Esempi:

- Le seguenti matrici sono a scala, i cui pivot sono cerchiati:

$$\begin{pmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & \textcircled{1} & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{5} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{7} \end{pmatrix}$$

- Le seguenti matrici non sono a scala:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 9 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \\ 8 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Method 4. Algoritmo di Gauss-Jordan

Ogni matrice $A \in Mat_{n\times m}(K)$ può essere ridotta ad una **matrice a scala** $S \in Mat_{n\times m}(K)$ tramite il seguente algoritmo:

1. Sia A^j, dove $j \in [1,n]$ la prima colonna a partire da sinistra non nulla, ossia $\exists i[1,n] \mid c := a_{i,j} \neq 0$
2. Se $c \notin A_1$, allora la i-esima riga contenente c viene scambiata con A_1
3. Per $k = 2,\dots,m$, sottraiamo λA_1 alla riga A_k, dove λ è uno scalare scelto apposta in modo da annullare l'i-esimo elemento della
4. Se la matrice risultante non è ancora ridotta a scala, allora viene ripetuto ricorsivamente l'algoritmo su A_2, ignorando le prime i colonne, e così via

Theorem 86. Riduzione a scala

Sia $A = (A^1,\dots,A^n) \in Mat_{m\times n}(K)$ e sia $S = (S^1,\dots,S^n)$ la sua versione ridotta a scala.

Se $S^{j_1},\dots,S^{j_h}$ sono le colonne di S contenenti i pivot della scala, allora $A^{j_1},\dots,A^{j_h}$ sono una base di $Im(A) = Span(A^1,\dots,A^n)$, implicando che

$$h = rk(S) = rk(A)$$

Esempio:

- Consideriamo il seguente sistema e la matrice completa ad essa associata:

$$\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 4x+5y+6z=0 \\ 7x+8y+9z=0 \end{cases} \implies A_b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

  dove il vettore incognito b viene omesso dalla matrice completa in quanto $b = 0_{K^m}$

- Date le righe $R_1,\dots,R_3$ della matrice, procediamo quindi con l'algoritmo di Gauss-Jordan fino ad ottenere la versione a scala di tale matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-4R_1,R_3-7R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{0} & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dunque, otteniamo che A^1 e A^2 sono una base di $Im(L_A) = Span(A^1,A^2,A^3)$ e il rango della matrice corrisponde a $rk(A) = 2$
- Riducendo ancora tale matrice (mantenendo la forma a scala), si ha che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{0} & -3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \boxed{0} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ \boxed{0} & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Dunque, il sistema di partenza risulta essere equivalente al seguente:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 0 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y + 9z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$$

- Poiché abbiamo svolto solo operazioni per riga, la matrice originale e la sua versione a scala risultano essere equivalenti per righe, implicando che il nucleo non sia stato alterato.
- Di conseguenza, risolvendo tale sistema in funzione di una variabile ausiliaria t, siamo in grado di ottenere una base di $Ker(L_A)$:

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = z \\ y = -2z \end{cases} \implies \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Infine, quindi, concludiamo che:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \text{ base di } Im(L_A) \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ base di } Ker(L_A)$$

9.2 Teorema di Rouché-Capelli

Theorem 87. Teorema di Rouché-Capelli

Data una matrice di coefficienti $A \in Mat_{m\times n}(K)$ e un vettore di coefficienti $b \in K^m$, il sistema $Ax = b$ **ammette soluzioni** se e solo se $rk(A) = rk(A_b)$, dove A_b è la matrice completa associata al sistema.

$$\exists x \in K^n \mid Ax = b \iff rk(A) = rk(A_b)$$

Dimostrazione:

- Dato il sistema $Ax = b$, si verifica che:

$$\exists x \in K^n \mid Ax = b \iff \exists x_1, \dots, x_n \in K \mid x_1A^1 + \dots + x_nA^n = b \iff$$

$$\iff b \in Span(A^1, \dots, A^n) \iff Span(A^1, \dots, A^n) = Span(A^1, \dots, A^n, b) \iff$$

$$\iff dim(Span(A^1, \dots, A^n)) = dim(Span(A^1, \dots, A^n, b)) \iff rk(A) = rk(A_b)$$

□

Proposition 88

Dato il sistema $Ax = b$, l'**insieme delle soluzioni** V (se esistenti) è un **sottospazio affine** di $Ker(L_A)$ di dimensione $dim(V) = n - rk(A)$, dove in particolare si ha che:

- Se $rk(A) = rk(A_b) = n$, la soluzione al sistema è **unica** e il sistema viene detto **determinato**

$$\exists! x \in K^n \mid Ax = b \iff rk(A) = rk(A_b) = n$$

- Se $rk(A) = rk(A_b) \neq n$, allora il sistema ammette **infinite soluzioni** e il sistema viene detto **indeterminato**

$$\exists x \in K^n \mid Ax = b \iff rk(A) = rk(A_b) \neq n$$

Dimostrazione:

- Dato $V = \{x \in K^n \mid Ax = b\}$ l'insieme delle soluzioni del sistema (ipotizzando che ne esista almeno una), si ha che:

$$x_0, x \in V \iff Ax_0 = b = Ax \iff Ax_0 = Ax \iff A(x - x_0) = 0$$

$$\iff x' - x_0 \in Ker(L_A) \iff x' \in x_0 + Ker(L_A)$$

  dunque V è un sottospazio affine a $Ker(L_A)$ traslato da una soluzione particolare x_0 del sistema

- In quanto sottospazio affine del nucleo, ne segue che:

$$dim(V) = dim(Ker(L_A)) = dim(K^n) - dim(Im(L_A)) = n - dim(Im(L_A)) =$$

$$= n - rk(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } rk(A) = n \\ > 1 & \text{se } rk(A) \neq n \end{cases}$$

- Dunque, nel caso in cui $rk(A) = n$ l'unica soluzione all'interno di V sarà x_0, altrimenti esisteranno infinite soluzioni generate dalla traslazione della base di $Ker(L_A)$

□

Esempi:

1. - Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} w + 2x + z = 1 \\ 2w + 4x + y = 3 \\ w + 2x + y - z = 2 \end{cases} \implies A_b = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_1, R_2 - 2R_1}$$

$$\xrightarrow{R_3 - R_1, R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

- Dunque, poiché $rk(A) = rk(A_b) = 2 \neq 4$, il sistema ammette infinite soluzioni e le colonne A^1, A^3 sono base di $Im(L_A)$. Inoltre, il sistema è equivalente a:

$$\begin{cases} w + 2x + z = 1 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} w = 1 - 2x - z \\ y = 1 + 2z \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} w = 1 - 2t_1 - t_2 \\ x = t_1 \\ y = 1 + 2t_2 \\ z = t_1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} w \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2. - Consideriamo il seguente sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -x + y + 5z = 0 \\ 2y + 6z = 0 \end{cases} \implies A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+R_1}$$

$$\xrightarrow{R_2+R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

- Poiché $rk(A) \neq rk(A_b)$, il sistema non ammette soluzioni

3. - Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x + ky = 4 - k \\ kx + 4y = 4 \end{cases} \implies A_b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 4-k \\ k & 4 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2-kR_1}$$

$$\xrightarrow{R_2-kR_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 4-k \\ 0 & 4-k^2 & 4-2k+k^2 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & k & 4-k \\ 0 & 4-k^2 & (2-k)^2 \end{array}\right)$$

- A questo punto, a seconda del valore di k si verificano tre casi:
  - Se $k \neq \pm 2$, ne segue che $4-k^2 \neq 0$ e di conseguenza che $rk(A) = rk(A_b) = 2$, implicando che il sistema ammetta un'unica soluzione
  - Se $k = -2$, si ha che $rk(A) \neq rk(A_b)$, dunque il sistema non ammette soluzioni
  - Se $k = 2$, si ha che $rk(A) = rk(A_b) = 1 \neq 2$, dunque il sistema ammette infinite soluzioni

$$A_b = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \{x + 2y = 2 \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

9.2.1 Equazioni parametriche

Proposition 89. Equazioni parametriche

Sia V un sottospazio e sia W un sottospazio affine al un sottospazio $Giac(W) \subseteq V$, dunque $\exists x_0 \in V \mid W = x_0 + Giac(W)$.

Data la base $g_1, \ldots, g_n$ di $Giac(W)$, si verifica che:

$$\forall x \in W, \exists! \lambda_1, \ldots, \lambda_d \in K \mid x = x_0 + t_1 g_1 + \ldots + t_n g_n$$

Definiamo l'insieme di tali equazioni come **equazioni parametriche** di W

Dimostrazione:

- Dato $x_0 \in V \mid W = x_0 + Giac(W)$ e data la base $g_1, \ldots, g_n$ di $Giac(W)$, si ha che:

$$x \in W \iff x - x_0 \in Giac(W) \iff$$

$$\iff \exists! t_1, \ldots, t_d \in K \mid x - x_0 = t_1 g_1 + \ldots + t_d g_n$$

$$\iff x = x_0 + t_1 g_1 + \ldots + t_n g_n$$

□

Proposition 90

Dato uno spazio vettoriale V e un sottospazio affine W espresso come l'insieme delle sue equazioni parametriche:

$$W = \{x_0 + t_1 g_1 + \ldots + t_d g_n \mid t_1, \ldots, t_n \in K\}$$

dove $x_0 \in V \mid W = x_0 + Giac(W)$ e dove $g_1, \ldots, g_n$ sono base di $Giac(W)$, si verifica che:

$$x \in W \iff rk(v_1, \ldots, v_n, x - x_0) = dim(W)$$

Dimostrazione:

- Per il teorema di Rouché-Capelli, si ha che:

$$x \in W \iff x - x_0 \in Giac(W) = Span(g_1, \ldots, g_n) \iff$$

$$\iff Span(g_1, \ldots, v_d) = Span(g_1, \ldots, g_d, x - x_0) \iff$$

$$\iff rk(g_1, \ldots, v_d) = rk(v_1, \ldots, v_d, x - x_0) \iff$$

$$\iff dim(Giac(W)) = rk(v_1, \ldots, v_d, x - x_0) \iff$$

$$\iff dim(W) = rk(v_1, \ldots, v_d, x - x_0) \iff$$

□

Esempio:

- Consideriamo il seguente insieme di equazioni parametriche corrispondenti ad un sottospazio affine in $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- Siccome $dim(V) = 2$, si verifica che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff rk \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix} = 2$$

- Effettuando la riduzione a scala di tale matrice, si ha che:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 0 & -3 & y-2x+2 \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3-3R_1} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 0 & -3 & y-2x+2 \\ 0 & -6 & z-3x+4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 0 & -3 & y-2x+2 \\ 0 & 0 & z+x-2y \end{pmatrix}$$

- Affinché la riduzione in scala abbia solo 2 pivot, è necessario che l'ultima riga della matrice contenga tutti zeri, implicando quindi che:

$$rk(A) = 2 \iff z + x - 2y = 0$$

- L'insieme di equazioni parametriche dato, quindi, equivale al seguente sistema di equazioni cartesiane:

$$\left\{ \; x - 2y + z = 0$$

corrispondente ad una retta in $\mathbb{R}^3$

9.3 Determinante di una matrice

Definition 82. Trasformazione multilineare

Una trasformazione lineare del tipo

$$f : V_1 \times \ldots \times V_k \to W : (v_1, \ldots, v_k) \to f(v_1, \ldots, v_k)$$

viene detta **multilineare** se $\forall i \in [1, k]$ dati $\lambda, \mu \in K$ si verifica che:

$$f(v_1, \ldots, \lambda v_i' + \mu v_i'', \ldots, v_n) = \lambda f(v_1, \ldots, v', \ldots v_n) + \mu f(v_1, \ldots, v'', \ldots v_n)$$

Definition 83. Determinante di una matrice

Definiamo come **determinante** di una matrice l'unica trasformazione lineare

$$det : Mat_{n\times n}(K) \to K$$

che verifica le seguenti tre proprietà:

1. det è **multilineare** su righe e colonne della matrice
2. $A_1, \dots, A_n$ e $A^1, \dots, A^n$ sono **basi** di K^n se e solo se $det(A) \neq 0$
3. $det(I_n) = 1$, dove I_n è la matrice identità di ordine n

Observation 61

Data una matrice $A \in M_{n\times n}(K)$, si ha che:

- $\exists A_i, A_j \in A, i \neq j \mid A_i = A_j \implies det(A) = 0$
- $\exists A^i, A^j \in A, i \neq j \mid A^i = A^j \implies det(A) = 0$
- $\exists A_i \in A \mid A_i = 0_{K^n} \implies det(A) = 0$
- $\exists A^i \in A \mid A^i = 0_{K^n} \implies det(A) = 0$

Dimostrazione:

- Se esistono due righe $A_i, A_j \in A$ uguali, allora $Span(A_1, \dots, A_n)$ non è linearmente indipendente, dunque non può costituire base di K^n
- Se esiste una riga $A_h \in A$ uguale al vettore nullo, allora $Span(A_1, \dots, A_n)$ non è né linearmente indipendente né generatore di K^n, dunque non può costituire base di K^n
- Per le colonne vale il ragionamento analogo alle righe

□

Proposition 91. Determinante alternante su righe e colonne

Data una matrice $A = (A_1, \dots, A_i, \dots A_j, \dots, A_n) \in Mat_{n\times n}(K)$, si verifica che:

$$det(A_1, \dots, A_i, \dots A_j, \dots, A_n) = -det(A_1, \dots, A_j, \dots A_i, \dots, A_n)$$

dunque, scambiando due righe (o colonne) della matrice il **determinante cambia segno**

Dimostrazione:

- Data una matrice $A = (A_1, \dots, A_i + A_j, \dots A_i + A_j, \dots, A_n)$, per la proprietà 2) del determinante si ha che:

$$det(A_1, \dots, A_i + A_j, \dots A_i + A_j, \dots, A_n) = 0$$

- Per multilinearità del determinante, si ha che:

$$0 = det(A_1, \dots, A_i + A_j, \dots A_i + A_j, \dots, A_n) \implies$$

$$\implies 0 = det(A_1, \dots, A_i, \dots A_i + A_j, \dots, A_n) + det(A_1, \dots, A_j, \dots A_i + A_j, \dots, A_n) \implies$$

$$\implies 0 = det(A_1, \dots, A_i, \dots A_i, \dots, A_n) + det(A_1, \dots, A_i, \dots A_j, \dots, A_n) +$$

$$+ det(A_1, \dots, A_j, \dots A_i, \dots, A_n) + det(A_1, \dots, A_j, \dots A_j, \dots, A_n) \implies$$

$$\implies 0 = 0 + det(A_1, \dots, A_i, \dots A_j, \dots, A_n) + det(A_1, \dots, A_j, \dots A_i, \dots, A_n) + 0 \implies$$

$$\implies det(A_1, \dots, A_i, \dots A_j, \dots, A_n) = -det(A_1, \dots, A_j, \dots A_i, \dots, A_n)$$

□

Theorem 92. Teorema di Binet

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}$, si ha che:

$$det(AB) = det(A) \cdot det(B)$$

(dimostrazione omessa)

9.3.1 Formula di Leibniz e Regola di Sarrus

Definition 84. Formula di Leibniz

Tramite le sue proprietà 1), 3) e la sua alternanza su righe e colonne, il determinante di una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$ può essere definito come:

$$det(A) := \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n,\sigma(n)}$$

(dimostrazione omessa)

Corollary 27

Se $A \in Mat_{2\times 2}(K)$, allora

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies det(A) = ad - bc$$

Dimostrazione:

- Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

- Dato $S_2 = \{(1)(2), (12)\}$, si verifica che:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_2} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = ad - bc$$

□

Corollary 28

Se $A \in Mat_{3\times 3}(K)$, allora

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \implies det(A) = aei + bfg + cdh - afh - bdi - ceg$$

Dimostrazione:

- Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$$

- Dato $S_3 = \{(1)(2)(3), (12)(3), (1)(23), (13)(2), (123), (321)\}$, si verifica che:

$$det(A) = \sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma) \cdot a_{1,\sigma(1)} \cdot a_{2,\sigma(2)} \cdot a_{3,\sigma(3)} =$$

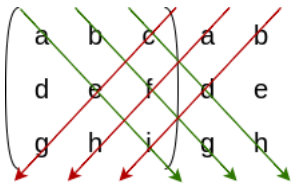
$$= a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} - a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3} - a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2} - a_{1,3}a_{2,2} - a_{3,1} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} =$$

$$= aei - bdi - ceg - afh + bfg + cdh$$

□

Method 5. Regola di Sarrus

La **Regola di Sarrus** permette di ricordare facilmente il calcolo del determinante di una matrice quadrata di ordine 3, ricopiando a destra della matrice le sue prime due colonne, per poi **sommare le tre diagonali** e **sottrarre le tre anti-diagonali**:



$$A \in Mat_{3\times 3}(K) \implies det(A) = aei + bfg + cdh - afh - dfi - ceg$$

Esempi:

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

si ha che:

$$det(A) = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

- Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

si ha che:

$$det(A) = 1 \cdot 5 \cdot 0 + 2 \cdot 6 \cdot 7 + 3 \cdot 4 \cdot 8 - 2 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot 5 \cdot 7 - 1 \cdot 6 \cdot 8 = 27$$

9.3.2 Determinante tramite riduzione a scala

Definition 85. Matrice triangolare

Sia $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Definiamo A come **triangolare superiore** se $\forall i > j$ si ha che $a_{i,j} = 0$, ossia se sotto la diagonale principale vi sono tutti zeri

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

o **triangolare inferiore** se $\forall i < j$ si ha che $a_{i,j} = 0$, ossia se sopra la diagonale principale vi sono tutti zeri

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{1,2} & a_{2,2} & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Observation 62

Una **matrice a scala** è sempre **triangolare**.

Observation 63

Se $A \in Mat_{n\times n}(K)$ è una matrice triangolare, allora il suo determinante corrisponde al **prodotto della sua diagonale**

$$det(A) = a_{1,1} \cdot a_{2,2} \cdot \ldots \cdot a_{n,n}$$

(dimostrazione omessa)

Method 6. Calcolo del determinante tramite riduzione a scala

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, è possibile ricavare il suo determinante tramite la sua riduzione a scala, poiché:

1. Scambiare due righe (o colonne) **inverte il segno del determinante**
2. Moltiplicare una riga (o colonna) per uno scalare $\lambda \in K^*$ **moltiplica anche il determinante** per tale scalare
3. Sommare ad una riga (o colonna) un multiplo di un'altra riga (o colonna) **non altera il determinante**

Dunque, data la riduzione a scala S della matrice A, è possibile calcolare $det(A)$ tramite il calcolo di $det(S)$, per poi **invertire gli effetti subiti dal determinante** in base alle operazioni svolte durante la riduzione.

Dimostrazione:

- Sia $A = (A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \in Mat_{n\times n}(K)$
- Abbiamo già dimostrato come scambiare due righe o colonne implichi che il determinante cambi segno, dunque

$$det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = -det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_i, \ldots, A_n)$$

- Data $A' = (A_1, \ldots, \lambda A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \in Mat_{n\times n}(K)$, per multilinearità del determinante si ha che:

$$det(A') = det(A_1, \ldots, \lambda A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) =$$

$$= \lambda \cdot det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = \lambda det(A)$$

- Data $A'' = (A_1, \ldots, A_i + \mu A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) \in Mat_{n\times n}(K)$, per multilinearità del determinante si ha che:

$$det(A'') = det(A_1, \ldots, A_i + \mu A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) =$$

$$= det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + \mu \cdot det(A_1, \ldots, A_j, \ldots, A_j, \ldots, A_n) =$$

$$= det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) + \mu \cdot 0 = det(A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_j, \ldots, A_n) = det(A)$$

□

Esempio:

- Riprendiamo la matrice dell'esempio precedente, il cui determinante sappiamo già essere 27:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- Effettuiamo la riduzione a scala di tale matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-4R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-7R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2\cdot\frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & -21 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+6R_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}$$

- Poiché una matrice a scala è sempre triangolare, si ha che:

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix} \implies det(S) = 1 \cdot 1 \cdot (-9) = -9$$

- Tra i vari passaggi effettuati durante la riduzione a scala, l'unico ad influenzare il determinante è il terzo. Dunque, si ha che:

$$det(S) = -\frac{1}{3} \cdot det(A) \implies -9 = -\frac{1}{3} \cdot det(A) \implies det(A) = 27$$

9.3.3 Sviluppo di Laplace

Definition 86. Sottomatrice

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **sottomatrice di** A una matrice ottenuta cancellando un determinato numero di righe e/o colonne dalla matrice originale

Definition 87. Minore di una matrice

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **minori di** A tutte le sottomatrici quadrate ottenute da A.

Denotiamo come $M_{i,j}$ il minore ottenuto cancellando la riga i e la colonna j dalla matrice A.

Theorem 93. Sviluppo di Laplace

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, lo **sviluppo di Laplace sulla i-esima riga di A** è definito come:

$$det(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k} \cdot a_{i,k} \cdot det(M_{i,k}) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot cof_{i,k}(A)$$

dove $cof_{i,k}(A) = (-1)^{i+k} \cdot det(M_{i,k})$ viene detto il **cofattore (o complemento algebrico)** dell'entrata $a_{i,k}$.

Analogamente, lo sviluppo di Laplace sulla j-esima colonna di A è definito come:

$$det(A) = \sum_{h=1}^{n}(-1)^{h+j} \cdot a_{h,j} \cdot det(M_{h,j}) = \sum_{h=1}^{n} a_{h,j} \cdot cof_{h,j}(A)$$

(dimostrazione omessa)

Esempi:

1.
   - Riprendiamo la matrice già vista in vari esempi precedenti, il cui determinante sappiamo già essere 27:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$
   - Effettuiamo lo sviluppo di Laplace su A_3:

$$det(A) = (-1)^{3+1}\cdot 7 \cdot det\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + (-1)^{3+2}\cdot 8 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + (-1)^{3+3}\cdot 0 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= 7(2\cdot 6 - 3\cdot 5) - 8(1\cdot 6 - 3\cdot 4) + 0 = -21 + 48 = 27$$

2.
   - Calcoliamo il determinante della seguente matrice quadrata di ordine 4:
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$
   - Effettuiamo lo sviluppo di Laplace su A^3:

$$det(A) = 0 + (-1)^{2+3}\cdot 5 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} + 0 - 0 = -5 \cdot det\begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

- Il calcolo di $det(A)$ viene quindi ridotto al calcolo di $det(M_{2,3})$, il quale può essere facilmente calcolato tramite la regola di Sarrus o tramite un nuovo sviluppo di Laplace
- Utilizzando la regola di Sarrus, abbiamo che:

$$det(A) = -5 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} = -5(48 + 0 + (-7) - 168 - 0 - (-2)) = 625$$

- Utilizzando lo sviluppo di Laplace su $(M_{2,3})^1$, invece, abbiamo che:

$$det(A) = -5 \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & 6 \end{pmatrix} = -5 \left[(-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot det \begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} + \right.$$

$$\left. +(-1)^{2+1} \cdot 7 \cdot det \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \right] = -5[50 - 175] = 625$$

9.3.4 Regola di Cramer

Theorem 94. Regola di Cramer

Dato un sistema lineare $Ax = b$:

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + \ldots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + \ldots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

dove A è una matrice di coefficienti tale che $det(A) \neq 0$, allora il sistema ammette la seguente unica soluzione:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{det(A)} \cdot det(b, A^2, \ldots, A^{n-1}, A^n) \\ x_2 = \frac{1}{det(A)} \cdot det(A^1, b, \ldots, A^{n-1}, A^n) \\ \vdots \\ x_{n-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot det(A^1, A^2, \ldots, b, A^n) \\ x_n = \frac{1}{det(A)} \cdot det(A^1, A^2, \ldots, A^{n-1}, b) \end{cases}$$

(dimostrazione omessa)

Esempio:

- Consideriamo il sistema

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 4x + 5y + 6z = 0 \\ 7x + 8y = 0 \end{cases}$$

  la cui matrice dei coefficienti corrisponde è

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

  dove $det(A) = 27$

- Per la regola di Cramer, si ha che:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{27} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 8 & 0 \end{pmatrix} \\ y = \frac{1}{27} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ z = \frac{1}{27} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{27} \cdot (-48) \\ y = \frac{1}{27} \cdot (42) \\ z = \frac{1}{27} \cdot (-3) \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{16}{9} \\ y = \frac{14}{9} \\ z = -\frac{1}{9} \end{cases}$$

9.4 Matrici inverse

Definition 88. Gruppo generale lineare

Definiamo come **gruppo generale lineare** il gruppo $(GL(n, K), \cdot)$ contenente tutte le matrici invertibili dell'anello $Mat_{n\times n}(K)$:

$$GL(n, K) = \{A \in Mat_{n\times n}(K) \mid \exists A^{-1} \in Mat_{n\times n}(K)\}$$

Dimostrazione:

- $A, B, C \in GL(n, K), A(BC) = ABC = (AB)C$
- $\forall A \in GL(n, K), \exists! I_n \in GL(n, K) \mid AI_n = I_n A = A$
- $\forall A \in GL(n, K), \exists! A^{-1} \in GL(n, K) \mid AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$

□

Theorem 95

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, le seguenti condizioni sono equivalenti tra loro:

1. $A \in GL(n, K)$
2. $rk(A) = n$
3. $det(A) \neq 0$
4. $A_1, \dots, A_n$ sono una base di K^n
5. $A^1, \dots, A^n$ sono una base di K^n
6. A è equivalente per righe e colonne a I_n

Dimostrazione:

- 3) $\iff$ 4), 5)
  - Per definizione stessa di determinante, si ha che:

$$det(A) \neq 0 \iff \begin{cases} A^1, \dots, A^n \text{ base di } K^n \\ A_1, \dots, A_n \text{ base di } K^n \end{cases}$$

- 2) $\iff$ 3), 4)
  - Poiché $dim(K^n) = n$ implica che n vettori possono essere generatori se e solo se sono anche linearmente indipendenti, si ha che:

$$rk(A) = n \iff dim(Span(A^1, \dots, A^n)) = dim(Span(A_1, \dots, A_n)) = n \iff$$

$$\iff \begin{cases} Span(A^1, \dots, A^n) = K^n \iff A^1, \dots, A^n \text{ sono base di } K^n \\ Span(A_1, \dots, A_n) = K^n \iff A_1, \dots, A_n \text{ sono base di } K^n \end{cases}$$

- 1) $\iff$ 2)
  - Supponiamo che $\exists! B = (B^1, \dots, B^n) \in Mat_{n\times n}(K) \mid A \cdot B = B \cdot A = I_n$. Per definizione di prodotto tra matrici ne segue che:

$$AB = I_n \iff AB^1 = e_1, AB^2 = e_2, \dots, AB^n = e_n \iff$$

$$\iff L_A(B^1) = e_1, L_A(B^2) = e_2, \dots, L_A(B^n) = e_n \iff$$

$$\iff e_1, e_2, \dots, e_n \in Im(L_A) \iff Im(L_A) = Span(e_1, \dots, e_n) = K^n \iff$$

$$\iff rk(A) = n$$

- 2) $\iff$ 6)
  - Se $rk(A) = n$, è possibile ridurre a scala A fino ad ottenere I_n
  - Viceversa, poiché $rk(I_n) = n$, se I_n è equivalente per righe e colonne ad A ne segue automaticamente che $rk(A) = n$

□

Corollary 29

È possibile definire il **gruppo generale lineare** anche come:

$$GL(n,K) = \{A \in Mat_{n\times n}(K) \mid det(A) \neq 0\}$$

Observation 64

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, si ha che:

$$det(A^{-1}) = det(A)^{-1}$$

Dimostrazione:

- Per il teorema di Binet, si ha che:

$$1 = det(I_n) = det(A \cdot A^{-1}) = det(A)det(A^{-1}) \implies det(A)^{-}1 = det(A^{-1})$$

□

Definition 89. Gruppo speciale lineare

Dato il gruppo $(GL(n,K),\cdot)$, definiamo $SL(n,K) \trianglelefteq GL(n,K)$ come **gruppo speciale lineare**, dove

$$SL(n,K) = \{A \in GL(n,K) \mid det(A) = 1\}$$

Dimostrazione:

- $SL(n,K) \leqslant GL(n,K)$
  - $det(I_n) = 1 \implies I_n \in SL(n,K)$
  - $A, B \in SL(n,K) \implies det(AB) = det(A)det(B) = 1 \cdot 1 = 1 \implies AB \in SL(n,K)$
  - $A \in SL(n,K) \implies det(A^{-1}) = det(A)^{-1}) = 1 \implies A^{-1} \in SL(n,K)$
- Date le matrici $A, B \in SL(n,K)$, si ha che:

$$A \sim_L B \iff A^{-1}B \in SL(n,K) \iff det(A^{-1}B) = 1 \iff det(A^{-1})det(B) = 1 \iff$$

$$\iff det(A)^{-1}det(B) = 1 \iff det(A)^{-1} = det(B)^{-1} \iff det(A) = det(B)$$

$$A \sim_R B \iff AB^{-1} \in SL(n,K) \iff det(AB^{-1}) = 1 \iff det(A)det(B^{-1}) = 1 \iff$$

$$\iff det(A)det(B)^{-1} = 1 \iff det(B)^{-1} = det(A)^{-1} \iff det(B) = det(A)$$

dunque le classi laterali sinistre e destre coincidono, implicando che $SL(n,K) \trianglelefteq GL(n,K)$

□

Method 7. Inversione tramite algoritmo di Gauss-Jordan

Data una matrice $A \in GL(n, K)$, poiché è A invertibile se e solo se equivalente per righe e colonne a I_n, si ha che

$$(A \mid I_n), (I_n \mid B) \text{ equivalenti per righe } \iff B = A^{-1}$$

Esempi:

1. • Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
dove $det(A) = -2$, dunque A è invertibile
• Procedendo con l'algoritmo di Gauss-Jordan, si ha che:
$$(A \mid I_n) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1 += R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right) = (I_n \mid B)$$
$$\implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$
dove $det(A^{-1}) = -\frac{1}{2}$
2. • Sia
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$
dove $det(A) = 27$, dunque A è invertibile
• Procedendo con l'algoritmo di Gauss-Jordan, si ha che:
$$(A \mid I_N) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 7 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_3 += -7R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -21 & -7 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_2 *= -\frac{1}{3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{9}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -\frac{5}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 + R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 2 & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_2-2R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{array}\right) \implies A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

dove $det(A^{-1}) = \frac{1}{27}$

Definition 90. Matrice trasposta

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, definiamo come **matrice trasposta** la matrice $A^T \in Mat_{n\times m}(K)$ avente come i-esima riga la i-esima colonna della matrice A e come j-esima colonna la j-esima colonna di A

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \cdots & a_{m,1} \\ a_{1,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{1,n} & \cdots & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Esempio:

- Data la seguente matrice A, la sua trasposta corrisponde a:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \implies A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 2 & 6 & 10 \\ 3 & 7 & 11 \\ 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Observation 65

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, si verifica che:

- $det(A) = det(A^T)$
- $(AB)^T = B^T A^T$

(dimostrazioni omessa)

Definition 91. Matrice dei cofattori

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, definiamo come **matrice dei cofattori** la matrice $cof(A) \in Mat_{n\times n}(K)$ avente come entrate i cofattori di ogni entrata della matrice A

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \implies cof(A) = \begin{pmatrix} cof(A)_{1,1} & \cdots & cof(A)_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cof(A)_{n,1} & \cdots & cof(A)_{n,n} \end{pmatrix}$$

dove ricordiamo che

$$cof(A)_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot det(M_{i,j})$$

Definition 92. Matrice aggiunta

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, definiamo come **matrice aggiunta** la trasposta della matrice dei cofattori di A:

$$adj(A) = (cof(A))^T$$

Theorem 96. Inversa di una matrice tramite aggiunta

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$ dove $det(A) \neq 0$, si verifica che:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A)$$

Dimostrazione:

- Come conseguenza dello sviluppo di Laplace, si verifica che:

$$A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = det(A) \cdot I_n \implies adj(A) \cdot A = det(A) \cdot I_n \implies$$
$$\implies adj(A) = det(A) \cdot I_n \cdot A^{-1} \implies det(A)^{-1} adj(A) = A^{-1}$$

□

Esempio:

- Prendiamo ancora una volta la nostra solita matrice esempio, il cui determinante sappiamo essere $det(A) = 27$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}$$

- La sua matrice dei cofattori corrisponde a:

$$cof(A) = \begin{pmatrix} cof_{1,1}(A) & cof_{1,2}(A) & cof_{1,3}(A) \\ cof_{2,1}(A) & cof_{2,2}(A) & cof_{2,3}(A) \\ cof_{3,1}(A) & cof_{3,2}(A) & cof_{3,3}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 & 42 & -3 \\ 24 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

mentre la conseguente matrice aggiunta corrisponde a:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

- Dunque, la matrice inversa di A corrisponde a:

$$A^{-1} = \frac{1}{27}\begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -16 & 8 & -1 \\ 14 & -7 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Corollary 30

Data una matrice $A \in Mat_{2\times 2}(K)$, si verifica che:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Dimostrazione:

- Sia

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- La sua matrice aggiunta corrisponde a:

$$cof(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \implies adj(A) = (cof(A))^T = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

- Di conseguenza, la sua inversa sarà:

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot adj(A) = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$$

9.5 Teorema degli orlati

Definition 93. Orlato di un minore

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$ e dati un suo minore M di ordine k e un minore M' di ordine $k+1$, definiamo M' come **orlato di** M se quest'ultimo è anche un minore di M'

Esempio:

- Consideriamo la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

e il suo minore M di ordine 2 ottenuto eliminando le colonne 2 e 4 e la riga 3

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$$

- Gli orlati di M corrispondono a:

$$M_1' = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 9 & 11 & 12 \end{pmatrix} \qquad M_2' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{pmatrix}$$

Observation 66

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$ e un suo minore M di ordine k, esistono $(m-k)(n-k)$ orlati di M in A

Theorem 97. Teorema degli orlati (o di Kronecker)

Data una matrice $A \in Mat_{m\times n}(K)$, si ha che:

$$rk(A) = k \iff \exists M \text{ minore di } A \mid \begin{cases} \text{ordine di } M = k \\ det(M) \neq 0 \\ det(M') = 0, \forall M' \text{ orlato di } M \end{cases}$$

(dimostrazione omessa)

Esempi:

1.
- Vogliamo discutere il comportamento di tale sistema al variare dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 0 \\ x + y + az = b \end{cases} \implies A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & b \end{array}\right) \implies$$

$$\implies \begin{cases} rk(A_b) = rk(A) & \text{se } dim(A^1, \dots, A^n, b) = dim(A^1, \dots, A^n) \\ rk(A_b) = rk(A) + 1 & \text{se } dim(A^1, \dots, A^n, b) \neq dim(A^1, \dots, A^n) \end{cases}$$

- Tramite la regola di Sarrus, otteniamo che il determinante corrisponde a:

$$det(A) = a^3 + 1 + 1 - a - a - a = a^3 - 3a + 2 = (a+2)(a-1)^2$$

- Se $a \neq 1$ o $a \neq -2$ allora $det(A) \neq 0$, implicando che $rk(A) = 3$.

  Inoltre, siccome $rk(A_b) \leq min(3, 4) = 3$ e siccome $rk(A_b) = rk(A)$ oppure $rk(A_b) = rk(A) + 1$, allora ne segue necessariamente che $rk(A) = rk(A_b) = 3$.

  Per il teorema di Rouche-Capelli, lo spazio affine generato dalle soluzioni ha dimensione pari a 0, dunque il sistema è **determinato** ed esiste un'unica soluzione dipendente dai parametri assunti da a e b.

- Se $a = 1$, allora $det(A) = 0$, poiché radice del polinomio precedentemente trovato.

  Tuttavia, dalla riduzione a scala otteniamo che::

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 += -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 += -R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b-1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 += -R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3 += b \cdot R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

  implicando che $rk(A) = 1$ e $rk(A_b) = 2$, dunque il sistema **non ammette soluzioni**.

- Se $a = -2$, allora $det(A) = 0$, poiché radice del polinomio precedentemente trovato.

  Per il teorema degli orlati, si ha che l'unico orlato del minore $M_{3,3}$, dove $det(M_{3,3}) = 3$ è la matrice A stessa, che sappiamo avere determinante nullo, dunque $rk(A) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \implies rk(A) = 2$$

  Nel caso della matrice A_b, invece, consideriamo il seguente minore:

$$A_b = \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & b \end{array}\right)$$

  Gli unici due orlati di tale minore sono:

$$\begin{cases} M_1' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = A & \implies det(M_1') = det(A) = 0 \\ M_2' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} & \implies det(M_2') = 4b + 0 + 1 + 2 - b = 3b + 3 \end{cases}$$

Dunque, si ha che:

$$rk(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } a = -2, b = -1 \implies rk(A) = rk(A_b) \implies \exists \text{ inf. soluzioni} \\ 3 & \text{se } a = -2, b \neq -1 \implies rk(A) \neq rk(A_b) \implies \nexists \text{ soluzioni} \end{cases}$$

- In particolare, se $a = -2$ e $b = -1$, possiamo trovare le infinite soluzioni del sistema in funzione di x:

$$\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \\ x + y - 2z = -1 \end{cases} \implies \begin{cases} -2y + z = -x \\ y - 2z = 1 - x \end{cases}$$

applichiamo la regola di Cramer per trovare il valore di y in funzione di x, per poi sostituire il valore ottenuto nella seconda equazione, trovando il valore di z in funzione di x:

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3} \cdot det \begin{pmatrix} -x & 1 \\ -1-x & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}(3x+1) = x + \frac{1}{3} \\ y - 2z = 1 - x \end{cases} \implies \begin{cases} y = x + \frac{1}{3} \\ z = \frac{2}{3} + x \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema indeterminato, quindi, appaiono nella forma:

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} + x \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dunque generanti una retta (difatti, la dimensione dello spazio affine generato è $n - rk(A) = 3 - 2 = 1$)

2. - Consideriamo il seguente insieme di equazioni parametriche corrispondenti ad un sottospazio affine in $\mathbb{R}^3$, già analizzato precedentemente:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \mid t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

- Siccome $dim(V) = 2$, si verifica che

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff rk(A) = rk \begin{pmatrix} 1 & 4 & x-1 \\ 2 & 5 & y \\ 3 & 6 & z+1 \end{pmatrix} = 2$$

- Considerando il minore $M_{3,3}$, si ha che:

$$M_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \implies det(M_{3,3}) = 5 - 8 = -3 \neq 0$$

- Siccome la matrice iniziale stessa è l'unico orlato di $M_{3,3}$, per il teorema degli orlati si verifica che:

$$rk(A) = \begin{cases} 2 & \text{se } det(A) = 0 \\ 3 & \text{se } det(A) \neq 0 \end{cases}$$

- Dunque, si ha che:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V \iff rk(A) = 2 \iff det(A) = 0$$

- Utilizzando lo sviluppo di Laplace sulla terza colonna, si ha che:

$$det(A) = 0 \iff (x-1)\cdot det\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} - y\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + (z-1)\cdot det\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\iff -3(x-1) + 6y - 3(z+1) \iff -3x + 6y - 3z = 0 \iff x - 2y + z = 0$$

- L'insieme di equazioni parametriche dato, quindi, equivale al seguente sistema di equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

corrispondente ad una retta in $\mathbb{R}^3$

3. - Dati la seguente retta r e il seguente piano π

$$r = \begin{cases} x = -2 + 3a \\ y = 1 - 2a \\ z = 5a \end{cases} \qquad \pi = \begin{cases} x = 4 - 2b + 5c \\ y = 3b - c \\ z = 1 + b - 2c \end{cases}$$

possiamo trovare l'intersezione $r \cap \pi$ in $\mathbb{R}^3$ nei seguenti tre modi:

(a) Troviamo i valori di a, b e c unendo i due sistemi:

$$\begin{cases} -2 + 3a = 4 - 2b + 5c \\ 1 - 2a = 3b - c \\ 5a = 1 + b - 2c \end{cases} = \begin{cases} 3a + 2b - 5c = 6 \\ 2a + 3b - c = 1 \\ 5a - b + 2c = 1 \end{cases} \implies A = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Siccome $det(A) = 82$ *(calcolo omesso)*, possiamo applicare la regola di Cramer per trovare il valore di a, per poi sostituirlo nel sistema e trovare il valore di b e c:

$$\begin{cases} a = \frac{1}{82} \cdot det\begin{pmatrix} 6 & 2 & -5 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{82} \cdot 44 = \frac{22}{41} \\ c = 2a + 3b - 1 \\ b = 5a + 2c - 1 \end{cases} \implies$$

$$\begin{cases} a = \frac{22}{41} \\ c = \frac{44}{41} + 3b - 1 = 3b + \frac{3}{41} \\ b = \frac{110}{41} + 2c - 1 = 2c + \frac{69}{41} \end{cases} \implies \begin{cases} a = \frac{22}{41} \\ c = 3\left(2c + \frac{69}{41}\right) + \frac{3}{41} = 6c + \frac{210}{41} \\ b = 2c + \frac{69}{41} \end{cases} \implies$$

$$\implies \begin{cases} a = \frac{22}{41} \\ c = -\frac{42}{41} \\ b = 2\left(-\frac{42}{41}\right) + \frac{69}{41} = -\frac{15}{41} \end{cases} \implies \begin{cases} x = -2 + 3a \\ y = 1 - 2a \\ z = 5a \end{cases} = \begin{cases} x = -\frac{16}{41} \\ y = -\frac{3}{41} \\ z = \frac{110}{41} \end{cases}$$

(b) Troviamo il sistema di equazioni cartesiane descriventi π:

$$\pi = \begin{cases} x = 4 - 2b + 5c \\ y = 3b - c \\ z = 1 + b - 2c \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x-4 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff rk\begin{pmatrix} -2 & 5 & x-4 \\ 3 & -1 & y \\ 1 & -2 & z-1 \end{pmatrix} = 2$$

Siccome $det(M_{3,3}) = -13 \neq 0$, per il teorema degli orlati, si ha che:

$$\iff rk\begin{pmatrix} -2 & 5 & x-4 \\ 3 & -1 & y \\ 1 & -2 & z-1 \end{pmatrix} = 2 \iff det\begin{pmatrix} -2 & 5 & x-4 \\ 3 & -1 & y \\ 1 & -2 & z-1 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$(x-4)(-5) - y(-1) + (z-1)(-13) = 0 \iff 5x - y + 13z = 33$$

Siccome $x \in r \cap \pi \iff x \in r \wedge x \in \pi$, sostituendo i valori assunti da x, y e z nell'equazione cartesiana di π otteniamo che:

$$-5x + y - 13z = 33 \iff 5(-2+3a) - (1-2a) + 13(5a) = 33 \iff a = \frac{22}{41}$$

Una volta trovato il valore di a, procediamo analogamente al metodo precedente, sostituendo a nell'equazione parametrica di π e ricavando b e c per sostituzione.

(c) Troviamo il sistema di equazioni cartesiane descriventi π e il sistema di equazioni cartesiane descriventi r.

Sappiamo già che:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \pi \iff 5x - y + 13z = 33$$

dunque ricaviamo le equazioni cartesiane di r:

$$r = \begin{cases} x = -2 + 3a \\ y = 1 - 2a \\ z = 5a \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \iff$$

$$\iff rk \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ -2 & y-1 \\ 5 & z \end{pmatrix} = 1$$

Considerando il minore di ordine 1 corrispondente all'entrata $a_{1,1} = 3$, dove quindi $det(a_{1,1}) = 3$, per il teorema degli orlati si ha che:

$$rk \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ -2 & y-1 \\ 5 & z \end{pmatrix} = 1 \iff \begin{cases} det \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ -2 & y-1 \end{pmatrix} = 0 \\ det \begin{pmatrix} 3 & x+2 \\ 5 & z \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} 2x + 3y + 1 = 0 \\ -5x + 3z - 10 = 0 \end{cases}$$

Possiamo quindi costruire un nuovo sistema di equazioni cartesiane corrispondente a $r \cap \pi$ utilizzando le due equazioni cartesiane descriventi r e l'equazione cartesiana descrivente π:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in r \cap \pi \iff \begin{cases} 5x - y + 13z = 33 \\ 2x + 3y + 1 = 0 \\ -5x + 3z - 10 = 0 \end{cases}$$

Poiché il determinante della matrice dei coefficienti associata a tale sistema è diverso da 0, è possibile ricavare i valori di x, y e z tramite la regola di Cramer, ottenendo una soluzione analoga agli altri due metodi

9.6 Matrici simili

Definition 94. Matrici simili

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, tali matrici vengono dette **simili** se si verifica che:

$$\exists C \in GL(n, K) \mid A = C^{-1}BC$$

Attenzione: tale condizione non è equivalente ad affermare che A è coniugato a B, poiché nella relazione di coniugio gli elementi C, C^{-1} dovrebbero essere presi in $Mat_{n\times n}(K)$ e non in $GL(n, K)$. Inoltre, ricordiamo che $GL(n, K) \nleq Mat_{n\times n}(K)$.

9.6.1 Invarianti per similitudine

Proposition 98. Determinante invariante

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, se A è simile a B, allora

$$det(A) = det(B)$$

Dimostrazione:

- Sia $C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$. Siccome $det(C^{-1}) = det(C)^{-1}$, si verifica che:
  $det(B) = det(C^{-1}AC) = det(C^{-1})det(A)det(C) = det(C)^{-1}det(A)det(C) = det(A)$

□

Definition 95. Traccia di una matrice

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, definiamo come **traccia** di A la somma delle entrate sulla diagonale principale:

$$tr(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Lemma 99

Date $A \in Mat_{m\times n}(K)$ e $B \in Mat_{n\times m}(K)$, si verifica che:

$$tr(AB) = tr(BA)$$

Dimostrazione:

- Il risultato segue dalla definizione stessa di prodotto tra matrici:
$$tr(AB) = \sum_{k=1}^{n}(ab)_{k,k} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{k,j}b_{j,k} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} b_{j,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}(ba)_{k,k} = tr(BA)$$

□

Proposition 100. Traccia invariante

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, se A è simile a B, allora

$$tr(A) = tr(B)$$

Dimostrazione:

- Se $\exists C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$, allora
$$tr(B) = tr(C^{-1}AC) = tr(C^{-1}CA) = tr(A)$$

□

Definition 96. Polinomio caratteristico

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, definiamo come **polinomio caratteristico** di A come:

$$p_A(x) := det(xI_n - A)$$

Esempio:

- Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$
il suo polinomio caratteristico corrisponde a:
$$p_A(x) = det\left(\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\right) = det\begin{pmatrix} x-1 & -2 \\ -3 & x-4 \end{pmatrix} = x^2 - 5x - 2$$

- Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
il suo polinomio caratteristico corrisponde a:
$$p_A(x) = det\begin{pmatrix} x-1 & 0 & +1 \\ -2 & x+3 & 0 \\ -1 & 0 & x-1 \end{pmatrix} = (x-3)(x^2 - 2x + 2)$$

Proposition 101. Polinomio invariante

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, se A è simile a B, allora

$$p_A(x) = p_B(x)$$

Dimostrazione:

- Se $\exists C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$, allora
$$p_B(x) = det(xI_n - B) = det(xI_n - C^{-1}AC) = det(xC^{-1}C - C^{-1}AC) =$$
$$= det(C^{-1}xI_nC - C^{-1}AC) = det(C^{-1}(xI_n - A)C) = det(C^{-1})det(xI_n - A)det(C) =$$
$$= det(C)^{-1}det(xI_n - A)det(C) = det(xI_n - A) = p_A(x)$$

□

Observation 67

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, si verifica che:

$$p_A(x) = x^n - tr(A)x^{n-1} + \ldots + (-1)^n det(A)$$

(dimostrazione omessa)

Definition 97. Autovalori ed Autovettori

Data $A \in Mat_{n\times n}$ e uno scalare $\lambda \in K$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $p_A(\lambda) = 0$
2. $\exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid Av = \lambda v$

Dove λ viene detto **autovalore di** A, mentre v viene detto **autovettore relativo a** λ

Dimostrazione:

- Supponiamo quindi che esista $\exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid Av = \lambda v$:

$$\exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid (\lambda I_n - A)v = 0 \iff Ker(L_{(\lambda I_n - A)}) \neq \{0_{K^n}\} \iff$$

$$\iff dim(Ker(L_{(\lambda I_n - A)})) > 0 \iff rk(\lambda I_n - A) = n - dim(Ker(L_{(\lambda I_n - A)})) < n$$

$$\iff det(\lambda I_n - A) = 0 \iff p_A(\lambda) = 0$$

□

Observation 68

Data $A \in Mat_{n\times n}$ e uno scalare $\lambda \in K$, il vettore $v \neq 0_{K^n} \in K^n$ è un autovettore relativo a λ se e solo se:

$$(A - \lambda I_n)v = 0$$

o in alternativa

$$0 = (\lambda I_n - A)v$$

Dimostrazione:

- Notiamo facilmente che:

$$\exists v \neq 0 \in K^n \mid Av = \lambda v \iff \begin{cases} 0 = \lambda v - Av \iff 0 = (\lambda I_n - A)v \\ Av - \lambda v = 0 \iff (A - \lambda I_n)v = 0 \end{cases}$$

□

Definition 98. Spettro e Autospazio relativo

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, definiamo come **spettro** di A l'insieme dei suoi autovalori

$$Sp(A) = \{\lambda \in K \mid p_A(\lambda) = 0\}$$

e come **autospazio relativo a** $\lambda \in Sp(A)$ il sottospazio di K^n generato dagli autovettori relativi a λ:

$$E_\lambda(A) = \{v \in K^n \mid Av = \lambda v\}$$

Nota: affinché $E_\lambda(A)$ possa essere uno spazio vettoriale, viene ammesso anche 0_{K^n} come soluzione di $Av = \lambda v$

Proposition 102. Spettro invariante

Date due matrici $A, B \in Mat_{n\times n}(K)$, se A è simile a B, allora

$$Sp(A) = Sp(B)$$

Inoltre, dato $\lambda \in Sp(A) = Sp(B)$ si ha che:

$$E_\lambda(A) = E_\lambda(B) \iff A = B$$

Dimostrazioni:

- Se $\exists C \in GL(n, K) \mid B = C^{-1}AC$, allora $p_A(x) = p_B(x)$, dunque si ha che:

$$\mu \in Sp(A) \iff p_A(\mu) = p_B(\mu) = 0 \iff \mu \in Sp(B)$$

- Dato $\lambda \in Sp(A) = Sp(B)$, si ha che:

$$E_\lambda(A) = E_\lambda(B) \iff Av = \lambda v = Bv, \forall v \in E_\lambda(A) \iff A = B$$

□

Esempio:

- Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -5 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x-1 & -1 & -3 \\ -1 & x & 5 \\ 2 & 1 & x-2 \end{pmatrix} = x(x-1)(x-2)$$

  dunque otteniamo che $Sp(A) = \{0, 1, 2\}$

- Gli autovettori dell'autospazio $E_0(A)$ corrispondono a:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff (0 \cdot I_n - A)v = 0 \iff \begin{cases} -x - y - 3z = 0 \\ -x + 5z = 0 \\ 2x + y - 2z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 5t \\ y = -8t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 5 \\ -8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori dell'autospazio $E_1(A)$ corrispondono a:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_1(A) \iff (1 \cdot I_n - A)v = 0 \iff \begin{cases} -y - 3z = 0 \\ -x + y + 5z = 0 \\ 2x + y - z = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Gli autovettori dell'autospazio $E_2(A)$ corrispondono a:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in E_0(A) \iff (2 \cdot I_n - A)v = 0 \iff \begin{cases} x - y - 3z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = t \end{cases} \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Definition 99. Molteplicità algebrica e geometrica

Data una matrice $A \in Mat_{n \times n(K)}$, per ogni autovalore $\lambda \in Sp(A)$ definiamo la sua:

- **Molteplicità algebrica** $\mu(\lambda)$, ossia la sua molteplicità come radice del polinomio caratteristico $p_A(x)$, corrispondente al più grande intero tale che:

$$\mu(\lambda) \in \mathbb{N}, (x - \lambda)^{\mu(\lambda)} \mid p_A(x)$$

- **Molteplicità geometrica** $\nu(\lambda)$, ossia la dimensione del suo autospazio relativo, corrispondente a:

$$\nu(\lambda) = dim(E_\lambda(A)) = n - rk(\lambda I_n - A)$$

Per ogni $\lambda \in Sp(A)$, si verifica che:

$$1 \leq \nu(\lambda) \leq \mu(\lambda)$$

Proposition 103. Molteplicità invarianti

Se $A, B \in Mat_{n \times n}(K)$ sono matrici simili, allora $\forall \lambda \in Sp(A) = Sp(B)$ si ha che:

$$\mu_A(\lambda) = \mu_B(\lambda) \qquad \nu_A(\lambda) = \nu_B(\lambda)$$

(dimostrazione omessa)

9.6.2 Diagonalizzazione di una matrice

Definition 100. Matrice diagonale

Sia $A \in Mat_{n\times n}(K)$. Tale matrice viene detta **diagonale** se $\forall i \neq j$ si ha che $a_{i,j} = 0$, ossia se sopra e sotto la diagonale principale vi sono tutti zeri

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Definition 101. Matrici triangolarizzabili e diagonalizzabili

Una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$ viene detta **triangolarizzabile** se simile ad una matrice triangolare $T \in Mat_{n\times n}(K)$, mentre viene detta **diagonalizzabile** se simile ad una matrice diagonale $D \in Mat_{n\times n}(K)$

Proposition 104

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. A è triangolarizzabile
2. La somma di tutte le sue molteplicità algebriche è n:

$$\sum_{\lambda \in Sp(A)} \mu(\lambda) = n = dim(K^n)$$

3. Il suo polinomio caratteristico è completamente fattorizzabile:

$$p_A(x) = \prod_{\lambda \in Sp(A)} (x - \lambda)^{\mu(\lambda)}$$

(dimostrazione omessa)

Corollary 31

Per il teorema fondamentale dell'algebra, **ogni matrice** $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{C})$ è **triangolarizzabile**.

Analogamente, una matrice $B \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è **triangolarizzabile** se e solo se

$$\forall \lambda \in Sp(B), \lambda \in \mathbb{R} \iff Sp(B) \subseteq \mathbb{R}$$

Esempio:

- Data la matrice
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$$
il suo polinomio caratteristico corisponde a:
$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = x^2 + 1$$
- Siccome $p_A(x) \in \mathbb{R}[x]$, $deg(p_A(x)) = 2$ e $\Delta_{p_A(x)} < 0$, tale polinomio non è fattorizzabile, dunque A non è triangolarizzabile
- Considerando invece la matrice $A' \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{C})$ avente entrate coincidenti a quelle di A, otteniamo che:
$$p_{A'}(x) = (x-i)(x+i) \in \mathbb{C}[x] \implies Sp(A') = \{\pm i\} \subseteq \mathbb{C}$$
dunque A' è triangolarizzabile

Proposition 105

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. A è diagonalizzabile
2. La somma di tutte le sue molteplicità geometriche è n:
$$\sum_{\lambda \in Sp(A)} \nu(\lambda) = n = dim(K^n)$$
3. Esistono $B^1, \dots, B^n$ autovettori di A tali che:
$$B^1, \dots, B^n \text{ base di } K^n$$
4. Il suo spettro contiene n autovalori diversi tra loro:
$$|Sp(A)| = n$$

Observation 69

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, dati $\lambda, \mu \in Sp(A) \mid \lambda \neq \mu$ si ha che:
$$E_\lambda(A) \cap E_\mu(A) = \{0_{K^n}\}$$

Dimostrazione:

- Ovviamente, essendo sottospazi vettoriali, si ha che:
$$0_{K^n} \in E_\lambda(A), 0_{K^n} \in E_\mu(A) \implies 0_{K^n} \in E_\lambda(A) \cap E_\mu(A)$$

- Supponiamo quindi che $\exists v \neq 0_{K^n} \in K^n \mid \lambda v = Av = \mu v$, dunque un autovettore relativo sia λ sia a μ, dove $\lambda \neq \mu$. Ne segue che:

$$\lambda v = Av = \mu v \implies \lambda v = \mu v \implies (\lambda - \mu)v = 0_{K^n}$$

- Poiché $\lambda \neq \mu \implies \lambda - \mu \neq 0$, si ha che:

$$(\lambda - \mu)v = 0_{K^n} \iff v = 0_{K^n}$$

contraddicendo quindi l'ipotesi iniziale, dunque l'unica possibilità è che:

$$\nexists v \neq 0_{K^n} \mid v \in E_\lambda(A), v \in E_\mu(A) \iff E_\lambda(A) \cap E_\mu(A) = \{0_{K^n}\}$$

□

Corollary 32

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$ e dati i vettori $v_1 \neq 0_{K^n} \in E_{\lambda_1}(A), \dots, v_k \neq 0_{K^n} \in E_{\lambda_k}(A)$, dove $\lambda_i \neq \lambda_j, \forall i \neq j$, si ha che:

$$v_1, \dots, v_k \text{ linearmente indipendenti}$$

Dimostrazione:

- Poiché:

$$\lambda, \mu \in Sp(A) \mid \lambda \neq \mu \implies E_\lambda(A) \cap E_\mu(A) = \{0_{K^n}\}$$

ne segue automaticamente che:

$$v_i \neq 0_{K^n} \in E_{\lambda_i}(A) \implies v_i \neq 0_{K^n} \notin E_{\lambda_j}(A), \forall j \neq i$$

dunque $v_1, \dots, v_k$ sono linearmente indipendenti

□

Proposition 106. Matrice diagonalizzante

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, se esiste una base $B^1, \dots, B^i, \dots, B^j, \dots, B^n$ di K^n tale che:

- $B^1, \dots, B^i$ è base di $E_{\lambda_1}(A)$
- $\vdots$
- $B^j \dots, B^n$ è base di $E_{\lambda_n}(A)$

dove $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in Sp(A)$ e dove $i \neq j$ allora:

$$\exists B = ({}^1, \dots, B^i, \dots, B^j, \dots, B^n) \in GL(n, K) \mid D = B^{-1}AB$$

dove $D \in Mat_{n\times n}(K)$ è una matrice diagonale e dove B viene detta **matrice diagonalizzante**.

Esempio:

1. • Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -8 & 3 \\ 4 & -8 & 4 \\ 5 & -12 & 7 \end{pmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

• Il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x-5 & 8 & -3 \\ -4 & x+8 & -4 \\ -5 & 12 & x-7 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-5)det \begin{pmatrix} x+8 & -4 \\ 12 & x-7 \end{pmatrix} + 4det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ 12 & x-7 \end{pmatrix} - 5det \begin{pmatrix} 8 & -3 \\ x+8 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= (x-5)(x^2+x-8) + 4(8x-20) - 5(3x-8) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x-2)^2$$

dunque sappiamo che A è triangolarizzabile e che il suo spettro è $Sp(A) = \{0, 2\}$.

• Siccome affinché A sia anche diagonalizzabile è necessario che $\nu(0) + \nu(2) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, notiamo come:

$$1 \leq \nu(0) \leq \mu(0) \iff 1 \leq \nu(0) \leq 1 \iff \nu(0) = 1$$

di conseguenza, si ha che:

$$\nu(0) + \nu(2) = 3 \iff 1 + \nu(2) = 3 \iff \nu(2) = 2$$

• Consideriamo quindi il sistema $(2 \cdot I_n - A)v = 0$:

$$\begin{cases} -3x + 8y - 3z = 0 \\ -4x + 10y - 4z = 0 \\ -5x + 12y - 5z = 0 \end{cases} \implies (2 \cdot I_n - A) = \begin{pmatrix} -3 & 8 & -3 \\ -4 & 10 & -4 \\ -5 & 12 & -5 \end{pmatrix}$$

Si ha che:

$$\nu(2) = 2 = dim(E_2(A)) = 3 - rk(2 \cdot I_n - A) = \iff rk(2 \cdot I_n - A) = 1$$

• Tuttavia, considerando il minore $M_{3,3}$, per il teorema degli orlati si verifica che:

$$det \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -4 & 10 \end{pmatrix} = -30 + 32 = 2 \neq 0 \implies rk(2 \cdot I_n - A) \geq 2$$

Dunque si ha che $rk(2 \cdot I_n - A) \neq 1$, implicando quindi che A non sia diagonalizzabile.

- Difatti, si ha che:

$$1 \leq \nu(2) = 3 - rk(2 \cdot I_n - A) \leq 3 - 2 = 1 \iff \nu(2) = 1$$

e dunque che:

$$\nu(0) + \nu(2) = 1 + 1 = 2 \neq 3 = dim(\mathbb{R}^3)$$

2. - Consideriamo la seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 2 & k-1 \end{pmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$$

- Il suo polinomio caratteristico corrisponde a:

$$p_A(x) = det \begin{pmatrix} x-1 & -k \\ -2 & x-k-1 \end{pmatrix} = (x-1)(x-k-1) - 2k$$
$$= x^2 - kx - k - 1 = (x+1)(x-k-1)$$

dunque si ha che $Sp(A) = \{-1, k+1\}$

- Siccome $p_A(x)$ è completamente fattorizzabile indipendentemente dal valore assunto da k, allora A è sempre triangolarizzabile.
- Se $k = -2$, si ha che:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \implies p_A(x) = (x+1)^2 \implies Sp(A) = \{-1\}$$

Dunque A è diagonalizzabile se e solo se $\nu(-1) = 2$.

Tuttavia, considerando il sistema $(-1 \cdot I_n - A)v = 0$, notiamo che :

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \nu(-1) = dim(E_{-1}(A)) = 1$$

Dunque A non è diagonalizzabile se $k = -2$

- Se invece $k \neq -2$, si ha che:

$$p_A(x) = (x+1)(x-k-1) \implies Sp(A) = \{-1, k+1\}$$

Dunque A è diagonalizzabile, poiché vi sono 2 autovalori distinti.

- Difatti, notiamo come considerando il sistema $(-1 \cdot I_n - A)v = 0$ si ha che :

$$\begin{cases} -2x + ky = 0 \\ -2x + ky = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = -\frac{k}{2} \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{k}{2}t \end{pmatrix} \implies \nu(-1) = dim(E_{-1}(A)) = 1$$

mentre per il sistema $((k+1) \cdot I_n - A)v = 0$ si ha che :

$$\begin{cases} kx - ky = 0 \\ -2x + 2y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = t \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \nu(-1) = dim(E_{-1}(A)) = 1$$

dunque si ha che $\nu(-1) + \nu(k+1) = 2 = dim(\mathbb{R}^2)$

- Inoltre, otteniamo che i due vettori trovati sono base della matrice diagonalizzante B:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\frac{k}{2} & 1 \end{pmatrix} \implies D = B^{-1}AB \implies D = \begin{pmatrix} k+1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

9.7 Matrice di una trasformazione lineare

Definition 102. Matrice di una trasformazione lineare

Siano V e W due spazi vettoriali e sia $f : V \to W$ una trasformazione lineare.

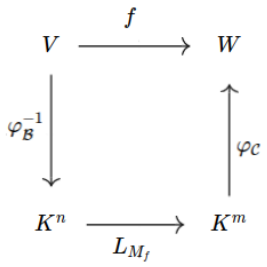
Data una base $\mathcal{B} = v_1, \ldots, v_n$ di V, una base $\mathcal{C} = w_1, \ldots, w_m$ di W e i seguenti due isomorfismi (sezione 8.3):

$$\varphi_{\mathcal{B}} : K^n \to V : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1 v_1 + \ldots + t_n v_n)$$

$$\varphi_{\mathcal{C}} : K^m \to W : (s_1, \ldots, s_n) \mapsto (s_1 w_1 + \ldots + s_n w_m)$$

Definiamo come **matrice di f nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$** l'unica matrice $M_f \in Mat_{m \times n}(K)$ tale che:

$$\exists! M_f \in Mat_{m \times n}(K) \mid f = \varphi_{\mathcal{C}} \circ L_{M_f} \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$$



- Sia $L_A : K^n \to K^m$ una trasformazione lineare tale che:

$$f = \varphi_{\mathcal{C}} \circ L_A \circ \varphi_{\mathcal{B}^{-1}}$$

  dove per definizione stessa di L_A è associata ad un'unica matrice $A \in Mat_{n\times m}(K)$
- Data la base canonica $e_1, \ldots, e_n$ di K^n, per ogni $i \in [1, n]$ si ha che:

$$\varphi_{\mathcal{B}}(e_i) = 0 \cdot v_1 + \ldots + 1 \cdot v_i + \ldots + 0 \cdot v_n = v_i \implies \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(v_i) = e_i$$

- Inoltre, per ogni $i \in [1, n]$ si ha che:

$$L_A(e_i) = Ae_i = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,i} \\ \vdots \\ a_{m,i} \end{pmatrix} = A^i$$

- Infine, dato il seguente isomorfismo:

$$\varphi_{\mathcal{C}} : K^m \to W : (s_1, \ldots, s_n) \mapsto (s_1 v_1 + \ldots + s_n v_n)$$

  per ogni $i \in [1, n]$ si ha che:

$$\varphi_{\mathcal{C}}(A^i) = a_{1,i} w_1 + \ldots + a_{m,i} w_m$$

- A questo punto, per ogni $i \in [1, n]$ si ha che:

$$f(v_i) = \varphi_{\mathcal{C}}(L_A(\varphi_{\mathcal{B}^{-1}}(v_i))) \iff$$

$$\iff f(v_i) = \varphi_{\mathcal{C}}(L_A(e_i)) \iff f(v_i) = \varphi_{\mathcal{C}}(A^i) \iff$$

$$f(v_i) = a_{1,i} w_1 + \ldots + a_{m,i} w_m$$

- Dunque, è possibile ricostruire la matrice A tramite le seguenti combinazioni lineari:

$$f(v_1) = a_{1,1} w_1 + \ldots + a_{m,1} w_m \implies A^1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$f(v_n) = a_{1,n} w_1 + \ldots + a_{m,n} w_m \implies A^n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

□

Esempi:

1. • Consideriamo i seguenti due sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}[x]$:

$$V := \mathbb{R}[x]^{\leq 4} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid deg(p(x)) \leq 4\}$$
$$W := \mathbb{R}[x]^{\leq 3} = \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid deg(p(x)) \leq 3\}$$

dove $\mathcal{B} : x^4, x^3, x^2, x, 1$ è base di V e $\mathcal{C} : x^4, x^3, x^2, x, 1$ è base di W, da cui ne segue che:

$$dim(V) = 5 = dim(\mathbb{R}^5) \iff V \cong \mathbb{R}^5$$
$$dim(V) = 4 = dim(\mathbb{R}^5) \iff V \cong \mathbb{R}^4$$

• Sia $f' : V \to W : p(x) \mapsto p'(x)$ la trasformazione lineare corrispondente alla derivata di un polinomio. La matrice di f' nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ corrisponde a:

$$\begin{cases} f'(x^4) = 4x^3 = 4x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \\ f'(x^3) = 3x^2 = 0x^3 + 3x^2 + 0x + 0 \\ f'(x^2) = 2x = 0x^3 + 0x^2 + 2x + 0 \\ f'(x) = x = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 1 \\ f'(1) = 0 = 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0 \end{cases} \implies M_f = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

• Consideriamo quindi i seguenti isomorfismi:

$$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} : V \to \mathbb{R}^5 : ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}$$

$$\varphi_{\mathcal{C}} : \mathbb{R}^4 \to W : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \mapsto ax^3 + bx^2 + cx + d$$

• Dato il polinomio $p(x) := 4x^4 + 2x^3 + x + 5 \in V$, si ha che:

$$\varphi_{\mathbb{B}}^{-1}(p(x)) = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \implies L_{M_f}(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(p(x))) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\implies \varphi_{\mathcal{C}} L_{M_f}(\varphi_{\mathcal{B}}^{-1}(p(x)))) = 16x^3 + 6x^2 + 1$$

2. • Consideriamo ancora gli spazi $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ e $W = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$.

- Sia $\Delta : V \to W : p(x) \mapsto p(x+1) - p(x)$ la trasformazione lineare corrispondente all'operatore differenza (anche detta "derivata discreta")
- La matrice di Δ nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ corrisponde a:

$$\begin{cases} \Delta(x^4) = (x+1)^4 - x^4 = 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 \\ \Delta(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1 \\ \Delta(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 \\ \Delta(x) = (x+1) - x = 1 \\ \Delta(1) = (x+1)^0 - x^0 = 0 \end{cases} \implies M_\Delta = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3.
- Siano $V = W = \mathbb{R}^2$ e sia:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 3y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$$

- Siano inoltre

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

rispettivamente la base di $V = \mathbb{R}^2$ e di $W = \mathbb{R}^2$

- Consideriamo quindi la matrice M_f di f nelle basi $\mathbb{B}$ e $\mathbb{C}$

$$M_f = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Le coordinate della colonna M_f^1 corrisponderanno a:

$$a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \implies a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a - 2c = 4 \\ 3a + 4c = 6 \end{cases} \implies$$

$$\implies \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 - 3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 10 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{10}R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - 2R_2}$$

$$\xrightarrow{R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{14}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{array}\right) \implies \begin{cases} a = \frac{14}{5} \\ c = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

- Analogamente, le coordinate di M_f^2 saranno:

$$b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \implies b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 3(-1) \\ 2 + 4(-1) \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies b\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} b - 2d = -2 \\ 3b + 4 = -2 \end{cases} \implies$$

$$\implies \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 3 & 4 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2+=-3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 10 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2*=\frac{1}{10}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_1+=-2R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{array}\right) \implies \begin{cases} b = -\frac{6}{5} \\ d = \frac{2}{5} \end{cases}$$

- Dunque, concludiamo la matrice di f nelle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ sia:

$$M_f = \begin{pmatrix} \frac{14}{5} & -\frac{6}{5} \\ -\frac{3}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

Proposition 107. Matrice di cambiamento di base)

Sia V uno spazio vettoriale e siano $\mathcal{B} = v_1, \ldots, v_n$ e $\mathcal{C} = w_1, \ldots, w_n$ due basi di V.

Dato il vettore $v \in V$ tale che:

$$v = a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = b_1w_1 + \ldots + b_nw_n$$

e dati i suoi **vettori delle coordinate** in base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$:

$$v_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \qquad v_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Definiamo come **matrice di cambiamento di base** l'unica matrice $M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in Mat_{n\times m}(K)$ tale che:

$$\exists! M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \in Mat_{n\times m}(K) \mid M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot v_{\mathcal{B}} = v_{\mathcal{C}}$$

Dimostrazione:

- Consideriamo l'automorfismo $\mathtt{id} : V \to V : v \mapsto v$ e consideriamo l'endomorfismo $L_A : K^n \to K^n$ tale che

$$\mathtt{id} = \varphi_{\mathcal{C}} \circ L_A \circ \varphi_{\mathcal{B}}^{-1}$$

dove

$$\varphi_{\mathcal{B}} : K^n \to V : (t_1, \ldots, t_n) \mapsto (t_1v_1 + \ldots + t_nv_n)$$
$$\varphi_{\mathcal{C}} : K^n \to V : (s_1, \ldots, s_n) \mapsto (s_1w_1 + \ldots + s_nw_n)$$

- Le colonne della matrice A corrisponderanno a:

$$\mathtt{id}(v_1) = a_{1,1}w_1 + \ldots + a_{m,1}w_n \implies v_1 = a_{1,1}w_1 + \ldots + a_{m,1}w_n \implies A^1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$$

$$\vdots$$

$$\mathtt{id}(v_n) = a_{1,n}w_1 + \ldots + a_{m,n}w_n \implies v_n = a_{1,n}w_1 + \ldots + a_{m,n}w_n \implies A^n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$$

- Dato un vettore $v \in V$, poiché l'automorfismo $\mathtt{id} : V \to V : v \mapsto v$ ha alcun effetto primario, l'unico effetto secondario ottenuto applicando la matrice di $\mathtt{id}$ al vettore contenente le coordinate di v in base $\mathbb{B}$ sarà quello di restituire le coordinate di v in base $\mathcal{C}$

□

Esempio:

- Consideriamo le seguenti due basi dello spazio $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$$

- Consideriamo la matrice del cambiamento dalla base $\mathcal{B}$ alla base $\mathcal{C}$:

$$M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- Le coordinate della matrice del cambiamento di base corrisponderanno a:

$$a\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 5a + 7c = 1 \\ 6a + 8c = 2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 3 \\ c = -2 \end{cases}$$

$$b\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 5b + 7d = 3 \\ 6b + 8d = 4 \end{cases} \implies \begin{cases} b = 2 \\ d = -1 \end{cases}$$

$$\implies M_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$$

- Consideriamo quindi il seguente vettore e le sue coordinate in base $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \implies$$

$$\implies \begin{cases} x + 3y = -5 \\ 2x + 4y = -4 \end{cases} \implies \begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

- Le sue coordinate in base $\mathcal{C}$ corrisponderanno a:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 - 6 \\ -8 + 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -5 \end{pmatrix}$$

- Difatti, notiamo che:

$$6\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

9.8 Matrici ortogonali

Definition 103. Base ortogonale

Sia $v_1, \dots, v_n$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tale base viene detta **ortogonale** se i vettori sono tutti **ortogonali** tra loro, dunque se

$$v_i v_j = 0, \forall i \neq j$$

Definition 104. Base ortonormale

Sia $v_1, \dots, v_n$ una base di $\mathbb{R}^n$. Tale base è detta **ortonormale** se i vettori sono tutti **ortogonali** tra loro e sono **versori**, ossia aventi norma pari ad 1, dunque se:

$$v_i v_j = \delta_{ij} = \begin{cases} ||v_i|| = 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

dove δ_{ij} viene detto **delta di Kroneker**.

Observation 70

Le basi ortonormali possono essere ottenute da dalla base canonica $e_1, \dots, e_n$ attraverso **rotazioni** e **riflessioni**

Observation 71

Data una base ortonormale $\mathcal{B} = v_1, \dots, v_n$ di $\mathbb{R}^n$ e dato un vettore $w \in \mathbb{R}^n$, le coordinate di v nella base $\mathcal{B}$ corrispondono a:

$$w = (w \cdot v_1) \cdot v_1 + \dots + (w \cdot v_1) \cdot v_n$$

Proposition 108. Matrice ortogonale

Data una matrice $A \in Mat_{n \times m}(\mathbb{R})$, tale matrice viene detta **matrice ortogonale** se si verifica una delle seguenti seguenti condizioni equivalenti:

- $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I_n \iff A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T$
- Le colonne $A^1, \dots, A^n$ sono base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
- Le righe $A_1, \dots, A_n$ sono base ortonormale di $\mathbb{R}^n$
- $L_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è isometria, ossia non cambia la distanza tra i punti del piano

(dimostrazione omessa)

Definition 105. Gruppo ortogonale

Dato il gruppo $(GL(n,\mathbb{R}),\cdot)$, definiamo $O(n) \leqslant GL(n,K)$ come **gruppo ortogonale**, dove

$$O(n) = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid A^{-1} = A^T\}$$

Dimostrazione:

- $I_n^{-1} = I_n = I_n^T \implies I_n \in O(n)$
- $A, B \in O(n) \implies A^{-1} = A^T, B^{-1} = B^T \implies (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} = B^TA^T = (AB)^T \implies AB \in O(n)$
- $A \in O(n) \implies A^{-1} = A^T \implies (A^{-1})^{-1} = A = (A^T)^T \implies (A^{-1})^{-1} = (A^{-1})^T \implies A^{-1} \in O(n)$

□

Proposition 109. Normalizzazione di un vettore

Dato uno spazio vettoriale V e un vettore $v \in V$, la **normalizzazione di** v corrisponde a:

$$w = \frac{v}{||v||}$$

Dimostrazione:

- Poiché la norma di v, ossia $||v||$, corrisponde alla lunghezza geometrica di v, si vede facilmente che il vettore w ottenuto corrisponde ad un vettore avente la stessa direzione di v ma norma pari ad 1

□

Proposition 110. Proiezione di un vettore

Dato uno spazio vettoriale V e due vettori $v, w \in V$, la **proiezione di** v **su** w corrisponde a:

$$proj_w(v) = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w$$

Dimostrazione:

- Consideriamo la normalizzazione u del vettore w:

$$u = \frac{w}{||w||}$$

- Sia $x := proj_w(v)$ il vettore corrispondente alla proiezione di v su w. Per definizione stessa di proiezione su vettore, tale vettore avrà la stessa direzione del vettore w e di conseguenza anche la stessa direzione del vettore u. Dunque, si ha che:

$$x = ||x|| \cdot u$$

- Consideriamo quindi l'angolo θ interno ai vettori v e x. Per definizione stessa di coseno, si ha che:

$$\cos(\theta) = \frac{||x||}{||v||}$$

- Poiché w ha la stessa direzione di x, l'angolo interno ai vettori v e w coincide con l'angolo θ. Come visto nella sezione 8.5, si ha che:

$$\cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{||v||\,||w||}$$

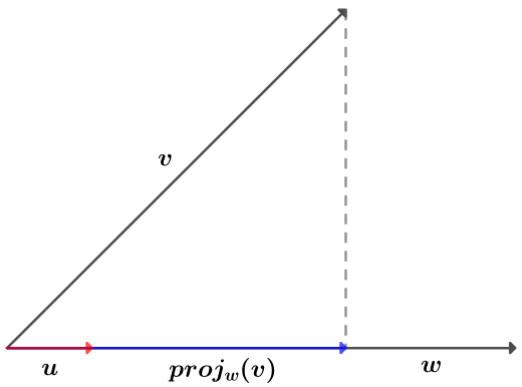
- Dunque, si ha che:

$$\frac{||x||}{||v||} = \cos(\theta) = \frac{v \cdot w}{||v||\,||w||} \implies \frac{||x||}{||v||} = \frac{v \cdot w}{||w||}$$

- Infine, concludiamo che:

$$x = ||x|| \cdot u = \frac{v \cdot w}{||w||} \cdot \frac{w}{||w||} = \frac{v \cdot w}{||w||^2} w = \frac{v \cdot w}{w \cdot w} w$$

- Di seguito, vi è un'interpretazione grafica dei passaggi effettuati:



□

Definition 106. Matrice simmetrica

Data una matrice $A \in Mat_{n\times n}(K)$, tale matrice viene detta **simmetrica** se

$$A = A^T$$

Theorem 111. Teorema spettrale

Data una matrice simmetrica $S \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$, le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $Sp(S) \subset \mathbb{R}$
2. S è diagonalizzabile
3. Esiste una base ortonormale $\mathcal{B} = B^1, \dots, B^n$ di $\mathbb{R}^n$ tale che $B^i, \forall i \in [1, n]$ è autovettore di S
4. $\exists B \in O(n) \mid D = B^{-1}AB = B^TAB$ dove $D \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ è una matrice diagonale

(dimostrazione omessa)

Method 8. Ortonormalizzazione di Gram-Schimdt

Sia V uno spazio vettoriale e sia $v_1, \dots, v_n$ una sua base. Il seguente algoritmo restituisce una base ortogonale $u_1, \dots, u_n$ di V e una base ortonormale $w_1, \dots, w_n$ di V:

1. Poniamo $u_1 := v_1$
2. Il vettore u_2 corrisponderà a: $u_2 = v_2 - proj_{u_1}(v_2)$
3. Difatti, notiamo che:

$$u_1 \cdot u_2 = u_1(v_2 - proj_{u_1}(v_2)) = u_1(v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{u_1 \cdot u_1})u_1 =$$

$$= u_1v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{||u_1||^2}||u_1|| = u_1v_2 - u_1v_2 = 0$$

   dunque u_1 risulta essere ortogonale a u_2
4. In generale, il vettore u_k, dove $k \in [1, n]$, corrisponderà a:

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{k-1} proj_{u_i}(v_k)$$

5. I vettori $u_1, \dots, u_k$ costituiscono una base ortogonale di V.
6. Per ottenere la base ortonormale $w_1, \dots, w_n$, basterà normalizzare ogni vettore della base ortogonale:

$$w_k = \frac{u_k}{||u_k||}, \forall k \in [1, n]$$

Capitolo 10

Algoritmi di crittografia

10.1 Algoritmo RSA

Method 9. Algoritmo di crittografia RSA

Siano:

- $p, q \in \mathbb{P} \mid p \neq q$ e sufficientemente grandi
- $n : pq$
- $\lambda(n) := mcm(p-1, q-1)$
- $e \in \mathbb{N} \mid \begin{cases} 1 < e < \lambda(n) \\ MCD(e, \lambda(n)) = 1 \end{cases}$
- $d := e{-}1(\texttt{mod}\ \lambda(n))$
- (e, n) una coppia detta **chiave pubblica**
- (d, n) una coppia detta **chiave privata**

Dato un **messaggio da cifrare** m tale che $MCD(m, n) = 1$, il **messaggio cifrato** c ottenuto tramite la **chiave pubblica** (e, n) corrisponde a:

$$m^e \equiv c(\texttt{mod}\ n)$$

Una volta ottenuto il messaggio cifrato, applicando la **chiave privata** (d, n) è possibile riottenere il messaggio m:

$$c^d \equiv m(\texttt{mod}\ n)$$

Poiché le due chiavi sono **l'una l'inversa dell'altra**, distribuendo la propria chiave pubblica (e, n) è possibile permettere ad un interlocutore di poterci inviare messaggi cifrati, per poi decifrarli tramite la propria chiave privata (d, n), la quale dovrà essere mantenuta **nascosta** al fine di non concedere ad altre persone di poter leggere il contenuto del messaggio m.

Dimostrazione:

- Poiché $\lambda(n) := mcm(p,q)$, si ha che:

$$\begin{cases} (p-1) \mid \lambda(n) \implies \exists k \in \mathbb{Z} \mid \lambda(n) = (p-1)k \\ (q-1) \mid \lambda(n) \implies \exists h \in \mathbb{Z} \mid \lambda(n) = (q-1)h \end{cases}$$

- Per il piccolo teorema di Fermat si ha che:

$$m^p \equiv m(\mathsf{mod}\ p) \iff m^{p-1} \equiv 1(\mathsf{(mod}\ p) \implies$$

$$\implies m^{(p-1)k} \equiv 1(\mathsf{mod}\ p) \iff m^{\lambda(n)} \equiv m(\mathsf{mod}\ p)$$

  e analogamente:

$$m^q \equiv m(\mathsf{mod}\ q) \iff m^{q-1} \equiv 1(\mathsf{mod}\ q) \implies$$

$$\implies m^{(q-1)h} \equiv 1(\mathsf{mod}\ q) \iff m^{\lambda(n)} \equiv 1(\mathsf{mod}\ q)$$

- Poiché $MCD(p,q) = 1$, per il teorema cinese dei resti si ha che:

$$\{m^{\lambda(n)} \equiv 1(\mathsf{mod}\ p) m^{\lambda(n)} \equiv 1(\mathsf{mod}\ q) \iff m^{\lambda n} \equiv 1(\mathsf{mod}\ n)$$

- Inoltre, si ha che:

$$MCD(e,\lambda(n)) = 1 \iff [e] \in \mathbb{Z}^*_{\lambda(n)} \iff \exists [d] := [e]^{-1} \in \mathbb{Z}^*_{\lambda(n)} \iff$$

$$\iff ed \equiv 1(\mathsf{mod}\ \lambda(n)) \iff ed = 1 + b\lambda(n), \exists b \in \mathbb{Z}$$

- Dunque, concludiamo che:

$$(m^e)^d \equiv m^{ed} \equiv m^{1+\lambda(n)j} \equiv m(m^{\lambda(n)})^j \equiv m(1)^j \equiv m(\mathsf{mod}\ n)$$

□

Observation 72

La condizione $MCD(m,n) = 1$ è **necessaria** affinché non vi sia una **perdita del messaggio** durante il processo di cifratura e de-cifratura. Difatti, tramite tale condizione si ha che:

$$MCD(m,n) = 1 \implies \begin{cases} n \nmid m \iff \nexists k \in \mathbb{Z} \mid m = nk \iff m \not\equiv 0(\mathsf{mod}\ n) \\ p \nmid m \iff \nexists h \in \mathbb{Z} \mid m = ph \iff m \not\equiv 0(\mathsf{mod}\ p) \\ q \nmid m \iff \nexists b \in \mathbb{Z} \mid m = qb \iff m \not\equiv 0(\mathsf{mod}\ q) \end{cases}$$

Senza tale condizione, quindi, potrebbe verificarsi che $n \mid m \vee p \mid m \vee q \mid m$, portando ad una perdita del messaggio.

Observation 73

I due primi $p, q \in \mathbb{P}$ devono essere **sufficientemente grandi** poiché altrimenti sarebbe possibile ricavare gli interi componenti dell'algoritmo tramite essi, ottenendo quindi anche la **chiave privata** (d, n).

Difatti, poiché l'intero $n := pq$ è contenuto nella chiave pubblica (e, n), se p o q fossero due numeri piccoli si potrebbe ricavare l'uno dall'altro procedendo per **bruteforce**:

1. Preso $k \in \mathbb{P}$, se $k \mid n$ allora $k = p$ e $q = \frac{n}{k}$
2. Se invece $k \nmid n$, allora verrà ripetuto il passo precedente con il numero primo successivo
3. Una volta trovati p e q, basterà calcolare $[d] := [e]^{-1}(\texttt{mod}\ \lambda(n))$ per poter ottenere la chiave privata (d, n)

10.2 Interpolazione di Lagrange e Algoritmo SSS

Definition 107. Matrice di Vandermonde

Dati $x_0, \dots, x_n \in K$, definiamo la seguente matrice $V \in Mat_{n\times n}(K)$ come **matrice di Vandermonde a coefficienti** $x_0, \dots, x_n$:

$$V(x_0, x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

Proposition 112

Dati $x_0, \dots, x_n \in K$, si ha che:

$$det(V(x^0, \dots, x^n)) = \prod_{0\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

Dimostrazione:

- Consideriamo il determinante di $V(x_0, \dots, x_n)$:

$$det(V(x_0, x_1, \dots, x_n)) = det \begin{pmatrix} x_0^0 & x_0^1 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ x_1^0 & x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^0 & x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} = det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix}$$

- Poiché sottrarre un multiplo di una riga non ha effetti sul determinante, sottraendo la prima riga a tutte le altre si ha che:

$$det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{pmatrix} \xrightarrow{R_i - R_1, \forall i>1} det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

- Eseguendo lo sviluppo di Laplace sulla prima colonna, si ha che:

$$det\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ 0 & x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix} = 1 \cdot det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix}$$

- Notiamo che $\forall i, k \in [1, n]$ si ha che:

$$x_i^k - x_0^k = (x_i - x_0)(x_i^{k-1} + x_i^{k-2}x_0 + \ldots + x_i x_0^{k-2} + x_0^{k-1})$$

da cui ne segue che:

$$det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & x_1^2 - x_0^2 & \cdots & x_1^n - x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & x_n^2 - x_0^2 & \cdots & x_n^n - x_0^n \end{pmatrix} =$$

$$= det\begin{pmatrix} x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) & \cdots & (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \ldots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n + x_0) & \cdots & (x_n - x_0)(x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \ldots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \end{pmatrix}$$

- Per multilinearità del determinante, si ha che:

$$det\begin{pmatrix} x_1 - x_0 & (x_1 - x_0)(x_1 + x_0) & \cdots & (x_1 - x_0)(x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \ldots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - x_0 & (x_n - x_0)(x_n + x_0) & \cdots & (x_n - x_0)(x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \ldots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \end{pmatrix} =$$

$$(x_1 - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_0) \cdot det\begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \ldots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \ldots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \end{pmatrix} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n}(x_j - x_0) \cdot det\begin{pmatrix} 1 & x_1 + x_0 & \cdots & x_1^{n-1} + x_1^{n-2}x_0 + \ldots + x_1 x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n + x_0 & \cdots & x_n^{n-1} + x_n^{n-2}x_0 + \ldots + x_n x_0^{n-2} + x_0^{n-1} \end{pmatrix}$$

- Sottraendo ad ogni colonna tutte le colonne precedenti moltiplicate per b_0, si ha che:

$$\prod_{j=1}^{n}(x_j-x_0)\cdot det\begin{pmatrix} 1 & x_1+x_0 & \cdots & x_1^{n-1}+x_1^{n-2}x_0+\ldots+x_1x_0^{n-2}+x_0^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n+x_0 & \cdots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2}x_0+\ldots+x_nx_0^{n-2}+x_0^{n-1} \end{pmatrix} \xrightarrow{C^i-\sum_{j=1}^{n-1}x_0C^j,\forall i}$$

$$\prod_{j=1}^{n}(x_j-x_0)\cdot det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{j=1}^{n}(x_j-x_0)\cdot det(V(x_1,\ldots,x_n))$$

- Effettuando gli stessi passaggi ricorsivamente, concludiamo che:

$$det(V(x_0,\ldots,x_n)) = \prod_{j=1}^{n}(x_j-x_0)\cdot det(V(x_1,\ldots,x_n)) =$$

$$= \prod_{j=1}^{n}(x_j-x_0)\cdot\prod_{h=2}^{n}(x_h-x_1)\cdot det(V(x_2,\ldots,x_n)) = \ldots = \prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i)$$

□

Lemma 113

Dati $x_0,\ldots,x_n \in K$, si ha che:

$$det(V(x_0,\ldots,x_n)) \neq 0 \iff x_i \neq x_j, \forall i \neq j$$

Dimostrazione:

- Poiché

$$det(V(x_0,\ldots,x_n)) = \prod_{0\le h<j\le n}(x_j-x_h)$$

si vede facilmente che:

$$\exists k,h \in [0,n] \mid x_k = x_h \implies x_k - x_h = 0 \implies det(V(x_0,\ldots,x_n)) = 0$$

da cui per contronominale otteniamo che:

$$det(V(x_0,\ldots,x_n)) \neq 0 \implies \nexists k,h \in [0,n] \mid x_k = x_h \implies x_k \neq x_h, \forall k,h \in [0,n]$$

- Viceversa, supponiamo per assurdo che $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$ e che $det(V(x_0,\ldots,x_n)) = 0$. Ne segue che:

$$det(V(x_0,\ldots,x_n)) = 0 \iff \prod_{0\le i<j\le n}(x_j-x_i) = 0$$

- Per la legge di annullamento del prodotto, ne segue che:

$$\prod_{0\leq i<j\leq n}(x_j - x_j) = 0 \implies (x_1 - x_0) = 0 \ \vee \ldots \vee \ (x_n - x_{n-1}) = 0 \implies$$

$$x_1 = x_0 \ \vee \ldots \vee \ x_n = x_{n-1}$$

  contraddicendo quindi l'ipotesi per cui $x_k \neq x_j, \forall i \neq j$. Dunque, l'unica possibilità è che $det(V(x_0, \ldots, x_n)) \neq 0$

□

Proposition 114

Siano $x_0, \ldots, x_n \in K \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j$. Dati $y_0, \ldots, y_n \in K$, si ha che:

$$\exists! p(x) \in K[x]_{\leq n} \mid \begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ p(x_n) = y_n \end{cases}$$

Dimostrazione:

- Posto $p(x) := a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n \in K[x]_{\leq n}$, si ha che:

$$\begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ p(x_n) = y_n \end{cases} \iff \begin{cases} a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 x_n + \ldots a_n x_n^n = y_n \end{cases}$$

- Considerando $a_0, \ldots, a_n$ come le incognite del sistema, la matrice dei coefficienti associata a risulta essere una matrice di Vandermonde nella forma $V(x_0, \ldots, x_n)$. Di conseguenza, si ha che:

$$x_i \neq x_j, \forall i \neq j \iff det(V(x_0, \ldots, x_n)) \neq 0 \iff \exists! \text{ soluzione}$$

- Dunque, esiste può esistere un'unico polinomio $p(x) \in K_{\leq n} \mid p(x_0) = y_0, \ldots, p(x_n) = y_n$

□

Corollary 33

Dati $x_0, \ldots, x_n \in K \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, si ha che:

$$\exists! p_i(x) \in K[x]_{\leq n} \mid p_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

dove $\delta_{i,j}$ è il **delta di Kroneker** e dove $p_1, \ldots, p_n$ formano una base di $K[x]_{\leq n}$ detta **base di Lagrange**

Dimostrazione:

- Dato $i \in [0, n]$, si ha che:

$$p_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \iff (x - x_j) \mid p_i(x), \forall j \neq i \in [0, n] \iff \begin{cases} p_i(x_1) = 0 \\ \vdots \\ p_i(x_i) = 1 \\ \vdots \\ p_i(x_n) = 0 \end{cases}$$

- Per la proposizione precedente, l'unica possibilità è che $p_0(x), \ldots, p_n(x) \in K[x]_{\leq n}$ siano unici, poiché:

$$\exists! q(x) \in K[x]_{\leq n} \mid q(x_1) = 0, \ldots, q(x_i) = 1, \ldots, q(x_n) = 0$$

□

- Di conseguenza, ne segue automaticamente che tali polinomi siano linearmente indipendenti tra loro, poiché nessuno di loro può essere espresso come combinazione lineare degli altri.
- Inoltre, poiché $dim(K[x]_{\leq n}) = n + 1$, sappiamo che $n + 1$ vettori possono essere linearmente indipendenti se e solo se sono anche generatori, di conseguenza $p_0, \ldots, p_n$ sono una base di $K[x]_{\leq n}$

□

Theorem 115. Interpolazione di Lagrange

Dati i seguenti **nodi dell'interpolazione** $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, dove $x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, e dati i seguenti polinomi $p_0, \ldots, p_1 \in K[x]_{\neq n}$ tali che:

$$p_i(x) = \prod_{0 \leq j \leq n \mid j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

L'**unico polinomio** $p(x) \in K[x]_{\leq n}$ **passante per ogni nodo** corrisponde a:

$$p(x) = y_0 p_0(x) + \ldots + y_n p_n(x)$$

Dimostrazione:

- Consideriamo la base di Lagrange $p_0, \ldots, p_n \in K[x]_{\leq n}$ dello spazio $K_{\leq n}$ vista nel corollario precedente:

$$\exists! p_i(x) \in K[x]_{\leq n} \mid p_i(x_j) = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

- Per ogni polinomio della base si ha che:

$$p_i(x_j) = 0, \forall j \neq i \in [0, n] \iff (x - x_j) \mid p_i(x), \forall j \neq i \in [0, n] \implies$$

$$\implies (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \mid p_i(x) \iff$$
$$\iff p_i(x) = c_i(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n), \exists c_i \in K$$

- Poiché $p_i(x_i) = 1, \forall i \in [0, n]$, l'unica possibilità è che $c_i = 1, \forall i \in [0, n]$. Inoltre, poiché $p_i(x_i) = 1$, ne segue che:

$$p_i(x) = (x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - i + 1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n) \implies$$
$$p_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - i + 1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{1} \implies$$
$$p_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - i + 1) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{p_i(x_i)} \implies$$
$$p_i(x) = \frac{(x - x_1) \cdot \ldots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_1) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \ldots \cdot (x_i - x_n)} =$$
$$p_i(x) = \prod_{0 \leq j \leq n | j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

- Sia quindi $p(x) \in K[x]_{\leq n}$ definito come:

$$p(x) := y_0 p_0(x) + \ldots + y_n p_n(n)$$

- Dunque, $\forall k \in [0, n]$ si ha che:

$$p(x_k) = y_0 p_0(x_k) + \ldots + y_k p_k(x_k) + \ldots + y_n p_n(x_k) \implies$$
$$p(x_k) = y_0 \cdot 0 + \ldots + y_k \cdot 1 + \ldots + y_n \cdot 0 = y_k \implies \begin{cases} p(x_0) = y_0 \\ \vdots \\ p(x_n) = y_n \end{cases}$$

- Per la proposizione precedente, concludiamo che $p(x)$ sia l'unico polinomio in $K[x]_{\leq n}$ tale che $p(x_0) = y_0, \ldots, p(x_n) = y_n$

□

Observation 74

Dati $n+1$ punti del piano cartesiano $(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$, è possibile utilizzare l'interpolazione di Lagrange per trovare l'unico polinomio di grado n, dunque $p(x) \in K[x]_{\leq n}$, passante per tali tre punti

Method 10. Algoritmo SSS

Il seguente algoritmo permette di suddividere in $n+1$ **partizioni** un **segreto** $s \in K$, per poi ricostruire il quest'ultimo tramite le partizioni stesse:

1. Scelti casualmente i coefficienti $a_1, \ldots, a_n \in K$, definiamo $p(x) \in K[x]_{\leq n}$ come:

$$p(x) = s + a_1 x + \ldots + a_n x_n$$

2. Scelti $n{+}1$ valori $x_0, \ldots, x_n \mid x_i \neq x_j, \forall i \neq j$, costruiamo i nodi dell'**interpolazione di Lagrange** come $(x_0, p(x_0)), \ldots, (x_n, p(x_n))$
3. Distribuiamo ogni nodo ad eventuali interlocutori
4. Una volta riottenuti gli $n{+}1$ nodi, tramite l'interpolazione di Lagrange è possibile ricostruire $p(x)$
5. Infine, poiché s è il termine noto di $p(x)$, è possibile riottenere il segreto tramite $p(0) = s$