Università "Sapienza" di Roma
Facoltà di Informatica

Calcolo Integrale

Appunti integrati con il libro
"Calculus: A Complete Course" - R.Adams, C.Essex

Author
Simone Bianco

16 maggio 2022

Indice

Capitolo 0

Introduzione

Il corso di Calcolo Integrale si pone come un continuo degli argomenti trattati nel corso di Calcolo Differenziale. Le nozione precedentemente apprese verranno nuovamente accennate in alcuni casi, ma in linea di massima essi verranno considerati come già assodati.

Il corso verterà principalmente su tre macro-argomenti:

- **Serie Numeriche**, dove viene analizzata la somma di un numero infinito di termini, definita con l'operazione di limite tendente ad infinito, discutendone le proprietà fino ai polinomi di grado infinito (Serie di Potenze).
- **Integrali**, partendo dal problema del calcolo delle aree, definendo il concetto di integrale definito, fino all'applicazione di esso come strumento matematico inverso all'operazione di derivazione.
- **Equazioni Differenziali**, ossia equazioni in cui le incognite sono funzioni e le relazioni riguardano la funzione e le sue derivate.

Capitolo 1

Serie Numeriche

1.1 Successioni e Tipologie di Serie Numeriche

In matematica, con il termine **successione** viene semplicemente indicato l'insieme dei valori assunti da una funzione $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, n \mapsto a_n$. Tale insieme, andrebbe quindi scritto come $a = \{a(1), a(2), a(3), ..., a(n)\}$. Tuttavia, per questioni di praticità, è molto più comodo usare la notazione $a_n = a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, dove il numero in pedice (ossia sotto) viene detto **indice della successione**.

Esempi di successioni:

- Se $a_n = 2n$ allora $a_n = 2, 4, 6, 8, 10, ..., 2n$
- Se $a_n = 2^n$ allora $a_n = 2, 4, 8, 16, 32..., 2^n$
- Se $a_n = \frac{1}{n}$ allora $a_n = \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ..., \frac{1}{n}$

Immaginiamo di voler calcolare la somma dei numeri reali. Essa è ben definita dalle seguenti proprietà:

$$a_1, a_2, a_3, ..., a_n \in \mathbb{R}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = S_n$$

E l'insieme dei termini da sommare fosse **illimitato**? Come possiamo sapere il risultato finale della somma? Introduciamo quindi quello che è il concetto di **serie numerica**.

Definition 1. Serie Numerica

Data una **successione** di termine generico a_k, si dice serie numerica la **"somma infinita"** dei suoi termini.

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

1.1.1 Serie Convergenti e Divergenti

Abbiamo quindi dato una definizione di **serie numerica**. Tuttavia, dobbiamo ancora analizzare le **proprietà** che tali serie possono assumere. Vediamo qualche esempio:

1. Consideriamo le seguente successione: se $a_n = 0$, allora

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} 0$$

Cosa accade a questa serie considerando $n \to +\infty$? Poiché si tratta di una funzione costante, indipendentemente dal valore assunto da n, il risultato della somma sarà **sempre 0**, dunque

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} 0 = 0$$

2. Consideriamo ora invece la successione

$$a_n = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)}$$

Analizziamo prima cosa accade alla serie per piccoli valori di k

- $S_1 = a_1 = 1 - \frac{1}{2}$
- $S_2 = a_1 + a_2 = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) = 1 - \frac{1}{3}$
- $S_3 = a_1 + a_3 = 1 - (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{4}) = 1 - \frac{1}{4}$
- ...

Notiamo che le **serie parziali** seguono uno **schema**: una serie di indice k, darà come risultato $S_k = 1 - \frac{1}{k+1}$. Possiamo quindi generalizzare la serie in

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Dunque, il limite per $n \to +\infty$ di questa serie, sarà

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \lim_{n\to+\infty} 1 - \frac{1}{n+1} = 1$$

In entrambi gli esempi mostrati, per $n \to +\infty$, le due serie **tendono ad un valore finito** (dunque hanno limite in ℓ). In questi casi si parla di **serie convergenti**.

Definition 2. Serie Convergente

Se la successione delle somme parziali S_n converge ad un valore ℓ, allora si dice che la serie numerica è **convergente** e la sua somma finale è ℓ

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell$$

Analizziamo ora le ulteriori due serie:

1. Sia data la successione costante $a_n = 1$. Vediamo il comportamento delle sue prime serie parziali.

   - $S_0 = 1$
   - $S_1 = 1 + 1 = 2$
   - $S_2 = 1 + 1 + 1 = 3$
   - ...

   Notiamo facilmente che

   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n$$

   Applicando il limite su tale successione, dunque, otteniamo che

   $$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} n + 1 = +\infty$$

2. Determinare se la seguente successione ammette limite a $+\infty$:

   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + ... + \frac{1}{16} + ...$$

   Notiamo facilmente che la serie può essere riscritta nel seguente modo applicando banali proprietà matematiche

   $$1 + \frac{1}{2} + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(8 \cdot \frac{1}{16}\right) + ...$$
   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... = 1 + 1 + 1 + ...$$

   La serie, dunque, corrisponde in realtà ad una somma di una determinata quantità di 1. È facile quindi concludere che la serie **non ammetta limite finito**, poiché essa tende a $+\infty$. Inoltre, per chi fosse interessato, la serie può essere riscritta in modo più formale come

   $$1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{2^k}{2^{k+1}}\right) = 1 + \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right) = 1 + \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} 1 = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}+1} 1$$

Definition 3. Serie Divergente

Se la successione delle somme parziali S_n diverge ad un valore $+\infty$ (o $-\infty$), allora si dice che la serie numerica è **divergente**

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = +\infty(-\infty)$$

ATTENZIONE: è necessario puntualizzare che se una serie non converge, **non è detto che essa sia divergente**.

Dimostrazione: Consideriamo la serie della seguente successione $a_n = (-1)^n$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k$$

- $S_0 = 1$
- $S_1 = 1 - 1 = 0$
- $S_2 = 1 - 1 + 1 = 1$
- $S_3 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0$
- ...

Notiamo quindi che

$$S_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

Dunque tale serie per $n \to +\infty$ non è **né convergente** ad un limite finito ℓ **né divergente** a $+\infty$.

Errori nel calcolo di somme infinite

Nell'esempio precedente, siamo in grado di arrivare a tale conclusione solo perché, ai tempi moderni, siamo a conoscenza del **concetto di limite**. In passato, molti matematici hanno provato a rispondere al quesito posto dalla serie numerica $(-1)^n$, giungendo a **tre conclusioni errate**:

Partendo dalla serie $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - ...$ posso aggiungere delle parentesi in tre modi:

- $S_n = (1-1)+(1-1)+(1-...$, in questo modo otterremo che $S_n = 0+0+0+... = 0$
- $S_n = 1+(-1+1)+(-1+1)+...$, in questo modo otterremo che $S_n = 1+0+0+... = 1$
- $S_n = 1 - (1 + 1 - 1 + 1 - ...$, in questo modo otterremo che $S_n = 1 - S_n$. A questo punto possiamo risolvere l'equazione, ottenendo che $S_n = \frac{1}{2}$

Abbiamo già accennato che tutte e tre le conclusioni siano errate. Il motivo è semplice: **non si può trattare una somma infinita come una somma finita**. Esempio evidente di ciò è la terza conclusione: non ha alcun senso aprire una parentesi senza mai chiuderla alla fine.

Tale problema, tuttavia, può essere "aggirato" dal concetto di limite: immaginando una **serie finita** fino ad a_n, possiamo applicare le normali proprietà matematiche su di essa, per **poi** estenderne il risultato per $n \to +\infty$.

In questo caso, quindi, abbiamo già detto che:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases} \implies \lim_{n \to +\infty} S_n = \text{ Non Esiste}$$

1.1.2 Serie geometrica

Prendiamo in considerazione la seguente successione:

$$\text{Sia } q \in \mathbb{R}, \quad a_k = q^k = 1, q, q^2, q^3, ..., q^k$$

Tale successione viene chiamata **progressione geometrica** (per via di alcune proprietà matematiche che non analizzeremo). Vediamo cosa accade ad una serie che implementa tale successione:

- Se $q = 1$, allora
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1^k = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = n + 1$$
- Se $q \neq 1$, allora:
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^{n-1} + q^n$$
$$q \cdot S_n = q \cdot \sum_{k=0}^{n} q^k = q + q^2 + ... + q^n + q^{n+1}$$
$$S_n - q \cdot S_n = 1 - q^{n+1}$$
$$S_n(1-q) = 1 - q^{n+1}$$
$$S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Quindi, possiamo concludere che

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

Per vedere cosa accade alla **serie geometrica** per $n \to +\infty$, dobbiamo prima analizzare cosa accade a $a_n = q^n$:

$$\lim_{n \to +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{se } -1 < q < 1 \\ 1 & \text{se } q = 1 \\ +\infty & \text{se } q > 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Unendo le due definizioni, quindi, otteniamo che per $n \to +\infty$ il comportamento della **serie geometrica** risulta in:

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Definition 4. Serie geometrica

La **Serie geometrica** è definita come

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1 \\ n+1 & \text{se } q = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } -1 < q < 1 \\ +\infty & \text{se } q \geq 1 \\ \nexists & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Esempi di calcolo con serie geometrica

- Esempio diretto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k = +\infty, \text{ poiché abbiamo } q \geq 1$$

- Esempio con proprietà degli esponenziali:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}, \text{ poiché abbiamo } -1 < q < 1$$

- Esempio con costanti moltiplicative:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{2^k} = 3 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 3 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 3 \cdot 2 = 6, \text{ poiché abbiamo } -1 < q < 1$$

- Esempio partendo da $k > 0$:

$$\sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=5}^{\infty} 3^{k-5+5} = \sum_{k=5}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \sum_{k=5}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-5} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \sum_{h=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^h = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot 2 = \frac{1}{16}$$

Dall'ultimo esempio proposto, quindi possiamo notare la seguente **proprietà delle serie**:

$$\sum_{k=k_0}^{n} q^k = q^{k_0} \cdot \sum_{h=0}^{n-5} q^h$$

1.1.3 Serie armonica

Prendiamo in considerazione la seguente successione:

$$a_n = \frac{1}{n+1}$$

Tale successione viene chiamata **successione armonica** (per via di alcune proprietà legate alla musica che non analizzeremo). La serie finita di tale successione corrisponde a:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n}$$

Per vedere se tale serie **converga** o **diverga**, è necessario chiedersi cosa accade per S_{n+1}:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = S_n + \frac{1}{n+1}$$

Dunque, per definizione stessa, abbiamo che $\forall n$

$$S_n + \frac{1}{n+1} > S_n$$

e quindi possiamo concludere che per $n \to +\infty$ la **serie armonica sia divergente**.

Serie armonica generalizzata

Vediamo ora cosa accade alla serie armonica una volta **generalizzata**:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + ... + \frac{1}{n^\alpha}$$

Analizziamo cosa accade alla serie in base al valore di α:

- Se $\alpha < 1$ abbiamo:

  $$\frac{1}{k^\alpha} > \frac{1}{k}$$

  dunque obbligatoriamente segue che

  $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} > \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} > +\infty$$

  Come dimostrato prima, sappiamo che la serie armonica normale è **divergente**. Di conseguenza, poiché la **serie armonica generalizzata** per $\alpha < 1$ è **maggiore di una serie divergente**, ne consegue che anche essa sia **divergente**.

- Se $\alpha > 1$ abbiamo:

$$\frac{1}{k^\alpha} < \frac{1}{k}$$

dunque obbligatoriamente segue che

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \implies \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha} < +\infty$$

Analogamente all'esempio al caso con $\alpha < 1$, confrontiamo la serie generalizzata con quella normale: poiché la **serie armonica generalizzata** per $\alpha > 1$ è **minore di una serie divergente**, ne consegue che essa sia **convergente** (poiché solo un valore finito può essere minore di $+\infty$).

Ovviamente, è necessario sottolineare che da tale dimostrazione **non** siamo in grado di dedurre quale sia il **valore a cui converga la serie**, ma solo che essa converga. Per questo motivo, indichiamo ciò con la scrittura impropria $< +\infty$.

Definition 5. Serie armonica generalizzata

La **Serie armonica generalizzata** è definita come

$$\lim_{n \to +\infty} S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \begin{cases} +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \\ < +\infty & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

dove $< +\infty$ indica la convergenza ad un valore indefinito

1.2 Condizioni, Teoremi e Criteri di Convergenza

In questa sezione vedremo una serie di **condizioni**, **teoremi**, **criteri** e altre **regole** che ci permettono di stabilire facilmente e senza dover effettuare alcun calcolo se una serie **converga** o **diverga**.

1.2.1 Condizioni necessarie per la convergenza di una serie

Prendiamo in considerazione la seguente **serie convergente**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \ell, \quad \ell \in \mathbb{R}$$

come sappiamo, tale espressione si traduce in

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} S_n = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k$$

Per definizione stessa della sommatoria, sappiamo che la **differenza** tra S_{n+1} e S_n risulta in:

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{k=0}^{n+1} a_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = a_{n+1}$$

Tuttavia, abbiamo già stabilito che per $n \to +\infty \implies S_n \to \ell$. Di conseguenza, lo stesso deve valere anche per S_{n+1}, dunque $n \to +\infty \implies S_{n+1} \to \ell$.

Possiamo quindi dire che

$$\lim_{n\to+\infty} S_{n+1} - \lim_{n\to+\infty} S_n = a_{n+1}$$
$$0 - 0 = a_{n+1}$$
$$a_{n+1} = 0$$

Riformuliamo il tutto nel seguente teorema:

Theorem 1. Condizione di convergenza

Se una serie è convergente per $n \to +\infty$, **allora** $a_k \to 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty \implies a_k \to 0$$

ATTENZIONE: è necessario sottolineare che la condizione **Se ... allora** impone che **solo se la prima condizione è vera allora anche la seconda deve esserlo** e <u>non il contrario</u>.

Il tipico esempio di ciò è la **serie armonica** vista precedentemente: nonostante per $n \to +\infty$ abbiamo che $\frac{1}{k} \to 0$, non è vero che la serie converga. Infatti, come sappiamo, essa **diverge positivamente**. Dunque, se $a_k \to 0$, **non è detto che la serie converga**.

Negazione del precedente teorema

Se la seconda condizione è negata (ossia a_k non tende a 0), **allora anche la prima** è necessario che lo sia. Per capire meglio, consideriamo la seguente serie:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

Possiamo facilmente calcolare il limite di a_k per $\to +\infty$:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k+1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{k(1+\frac{1}{k})} = 1$$

Poiché il limite di a_k non è zero, è **impossibile che la serie converga**.

Ciò ci permette di formulare il seguente ulteriore teorema:

Theorem 2. Negazione della condizione di convergenza

Se per $n \to +\infty$ si verifica che $a_k \nrightarrow 0$ (ossia a_k non tende a 0), allora la serie **non può essere convergente**

$$a_k \nrightarrow 0 \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ non è convergente}$$

ATTENZIONE: ricordiamo che se una serie **non converge**, non è detto che essa **diverga** (sezione 1.1.1)

1.2.2 Serie a termini di segno costante

Consideriamo una **Serie a termini positivi**, ossia rispettante la condizione

$$a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Abbiamo già visto come dalla definizione stessa di serie abbiamo che

$$S_{n+1} - S_n = a_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Unendo le due condizioni abbiamo che

$$S_{n+1} - S_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
$$S_{n+1} \geq S_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

La seguente serie, quindi, è **crescente** e di conseguenza può avere solo due possibilità: **convergere** ad un valore finito oppure **divergere positivamente**.

Theorem 3. Serie a termini di segno costante

Se $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, allora la serie **converge** oppure **diverge positivamente**

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} < +\infty \\ +\infty \end{cases}$$

Se $a_k \leq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, allora la serie **converge** oppure **diverge negativamente**

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k = \begin{cases} < -\infty \\ -\infty \end{cases}$$

Esempio di applicazione dei teoremi

Consideriamo la seguente serie già parzialmente analizzata in precedenza:

$$S_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1}$$

Possiamo stabilire se la seguente serie **converga**, **diverga** o **nessuna delle due cose** senza effettuare alcun calcolo:

- Sappiamo che si tratta di una **serie a termini positivi**, poiché $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, dunque questa serie può solo **convergere o divergere**
- Sappiamo inoltre che il limite di a_k per $n \to +\infty$ corrisponde a 1 (come analizzato nella sezione 1.2.1), dunque sappiamo che questa serie **non può convergere**
- **Unendo le due condizioni imposte**, possiamo dire con certezza che tale serie **diverge**

1.2.3 Criterio del confronto

Proviamo ora ad analizzare una serie più complessa rispetto a quelle già viste:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

- Vediamo facilmente che si tratta di una **serie a termini positivi**, poiché $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, dunque la serie è convergente o divergente
- Il limite di a_k per $n \to +\infty$ è 0

$$\lim_{k \to +\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) = \lim_{y \to 0} sin\left(y\right) = 0$$

  dunque non siamo in grado di dire se la serie non sia convergente, dunque abbiamo ancora il dubbio tra **convergenza e divergenza**

- Proviamo a **confrontare la serie con altre due serie** di cui è più facile stabilire la convergenza

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

  Ovviamente, la serie più a sinistra è **convergente a 0**. La serie più a destra, invece, si tratta di una **serie armonica generalizzata** con $\alpha > 1$, dunque sappiamo che **anche essa è convergente**.

$$\text{Convergente } \leq \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) \leq \text{ Convergente}$$

Poiché la nostra serie iniziale è **sia maggiore** di una serie convergente, **sia minore** di un'altra serie convergente, ne consegue che **anche essa sia convergente**.

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k^2}\right) < +\infty$$

Possiamo quindi formulare il seguente teorema:

Theorem 4. Criterio del confronto

Siano $0 \leq a_k \leq b_k, \quad \forall k \in \mathbb{N}$

- Se $S(b_k)$ **converge**, allora anche $S(a_k)$ **converge**

$$\text{Se } \sum_{k=0} b_k < +\infty \Longrightarrow \sum_{k=0} b_k < +\infty$$

- Se $S(a_k)$ **diverge**, allora anche $S(b_k)$ **diverge**

$$\text{Se } \sum_{k=0} a_k = \infty \Longrightarrow \sum_{k=0} b_k = \infty$$

1.2.4 Criterio del confronto asintotico

Vediamo ora una serie simile alla precedente, ma profondamente diversa:

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right)$$

- Vediamo facilmente che si tratta di una **serie a termini positivi**, poiché $a_k \geq 0, \quad \forall k \in \mathbb{N}$, dunque la serie è convergente o divergente
- Il limite di a_k per $n \to +\infty$ è 0

$$\lim_{k \to +\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{y \to 0} sin\,(y) = 0$$

  dunque abbiamo ancora il dubbio tra **convergenza e divergenza**

- Proviamo ad applicare il **criterio del confronto**

$$\sum_{k=1}^{\infty} 0 < \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

  A differenza dell'esempio visto nella sezione precedente, la seconda serie corrisponde ad una **serie armonica normale**, che sappiamo essere **divergente**

$$\text{Convergente } \leq \sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \text{ Divergente}$$

Ancora una volta, quindi, non siamo in grado di stabilire se la serie sia **convergente o divergente**

- Proviamo ad analizzare nel dettaglio cosa accade per $n \to +\infty$ ai termini di entrambe le serie

$$\lim_{k\to+\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) \leq \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k}$$

$$\lim_{y\to 0} sin(y) \leq \lim_{y\to 0} y$$

Prima di procedere è necessario ricordare un **teorema fondamentale dell'analisi matematica**: per $x \to 0$ abbiamo $sin(x) \sim x$ (letto come $sin(x)$ **segue** x):

$$\lim_{x\to 0} \frac{sin(x)}{x} = 1$$

- Per **minuscoli valori** di $\frac{1}{k}$, dunque, **la funzione** $sin(\frac{1}{k})$ **si comporta esattamente come** $\frac{1}{k}$. Applicando tale teorema alle nostre due serie, quindi, otteniamo che:

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Poiché la seconda serie è **divergente positivamente** e la prima serie **segue il suo comportamento**, concludiamo che **anche essa diverge positivamente**.

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin\left(\frac{1}{k}\right) = +\infty$$

Possiamo quindi formulare l'ulteriore seguente teorema:

Theorem 5. Criterio del confronto asintotico

Siano $0 \leq a_k, b_k$ tali che

$$\lim_{k\to+\infty} = \frac{a_k}{b_k} = 1$$

allora:

- $S(a_k)$ converge **se e solo se** $S(b_k)$ converge

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k < +\infty$$

- $S(a_k)$ diverge **se e solo se** $S(b_k)$ diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \infty \iff \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \infty$$

Esercizi svolti

1. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} 3^k = \text{ Serie Geometrica con } q \geq 1 \ = \textbf{Diverge a } +\infty$$

2. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{3}{2}}} = \text{ Serie armonica con } \alpha > 1 \ = \textbf{Converge}$$

3. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \text{ Serie armonica con } \alpha \leq 1 \ = \textbf{Diverge a } +\infty$$

$$\text{quindi } \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 1 = \textbf{Diverge a } +\infty$$

4. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{k}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{k}\right) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^2 \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{sin^2\left(\frac{1}{k}\right)}{\left(\frac{1}{k}\right)^2} = \lim_{y\to 0} \frac{sin^2(y)}{y^2} = \frac{sin(y)\cdot sin(y)}{x\cdot x} = 1\cdot 1 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\right)^2 = \text{ Serie armonica con } \alpha > 1 \ = \textbf{Converge}$$

$$\text{quindi } \sum_{k=1}^{\infty} sin^2\left(\frac{1}{k}\right) = \textbf{Converge}$$

5. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 2$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 2 \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - 1 \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{k}} - 2}{\frac{1}{k} - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 2}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1 - 1}{y - 1} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y - 1} - \frac{1}{y-1} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y - 1} \cdot \frac{y}{y} - \frac{1}{y-1} = \lim_{y\to 0} \frac{y}{y-1} - \frac{1}{y-1} = 0 + 1 = 1$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} - 1 = ?$$

- È una serie a termini negativi, dunque può o convergere o divergere a -∞
- Non può convergere, poiché

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k} - 1 = -1$$

- Dunque **Diverge a -∞**

$$\text{quindi } \sum_{k=1}^{\infty} e^{\frac{1}{k}} - 2 = \textbf{ Diverge a -}\infty$$

6. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\left(cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\left(cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right) \sim \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2k} \text{ poiché}$$

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k\left(cos\left(\frac{1}{k}\right) - 1\right)}{-\frac{1}{2k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{-\left(1 - cos\left(\frac{1}{k}\right)\right)}{-\frac{1}{2k^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{-(1 - cos(y))}{-\frac{1}{2}\cdot y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{1}{2k} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k} = -\frac{1}{2} \cdot +\infty = \textbf{Diverge a -}\boldsymbol{\infty}$$

$$\text{quindi } \sum_{k=0}^{\infty} k \left(cos \left(\frac{1}{k} \right) - 1 \right) = \textbf{Diverge a -}\boldsymbol{\infty}$$

1.2.5 Criterio del Rapporto e Criterio della Radice

Una volta enunciati i precedenti criteri, possiamo analizzare i seguenti due criteri, estremamente simili tra loro:

Theorem 6. Criterio del Rapporto

Sia $a_k \geq 0$. Se si verifica che

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \ell$$

allora se

- $\ell < 1$ la serie **converge**
- $\ell > 1$ la serie **diverge**
- $\ell = 1$ **non sappiamo** se la serie converga o diverga

Theorem 7. Criterio della Radice

Sia $a_k \geq 0$. Se si verifica che

$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell$$

allora se

- $\ell < 1$ la serie **converge**
- $\ell > 1$ la serie **diverge**
- $\ell = 1$ **non sappiamo** se la serie converga o diverga

Come possiamo notare, i criteri risultano **simili** e, in base al valore di ℓ, ci permettono di raggiungere le **stesse conclusioni**. Inoltre, spesso applicando entrambi criteri sulla stessa serie si ottiene lo **stesso valore** di ℓ.

Tuttavia, vi è chiaramente una **preferenza situazionale nella scelta del criterio** da applicare: se la serie a_k presenta un termine del tipo $k!$ allora conviene utilizzare il **Criterio del Rapporto**, mentre se presenta un termine del tipo x^k, $x \in \mathbb{R}$ allora conviene utilizzare il **Criterio della Radice**. Per esempio, nella seguente serie scegliamo di applicare il criterio del rapporto:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^2} \Rightarrow \lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^2}}{\frac{k!}{k^2}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^2} \cdot \frac{k^2}{k!} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k^2}{k+1} = +\infty \Rightarrow \ell > 1 \Rightarrow \textbf{Diverge}$$

1.2.6 Accorgimenti per i Criteri e Formula di Stirling

Poiché abbiamo introdotto il Criterio della Radice, è necessario ricordare l'esistenza di un **limite notevole nel quale ci si imbatte spesso** nell'applicare tale criterio, ossia

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{k} = 1$$

Inoltre, per calcolare alcuni limiti può essere utile ricordare gli **ordini di grandezza delle successioni**, in modo da decretare quale termine vinca rispetto ad un altro:

$$1 \prec log^a(n) \prec \sqrt[b]{n} \prec n^c \prec d^n \prec n! \prec n^n$$

Infine, per alcuni casi può risultare utile introdurre la **Formula di Stirner**, descrivente il comportamento asintotico della seguenti due funzioni:

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}} = 1$$

dunque per $k \to +\infty$ abbiamo

$$k! \sim k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}$$

Esercizi svolti

1. Decretare se la seguente serie converge o diverge usando il Criterio della Radice

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[k]{k^2}}{2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(\sqrt[k]{k})^2}{2} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

2. Decretare se la seguente serie converge o diverge usando il Criterio del Rapporto

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^2}{2^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2}{2^{k+1}} \cdot \frac{2^k}{k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2+2k+1}{2k^2} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

3. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0 < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

Bonus: un occhio più allenato potrebbe essere in grado di riconoscere che tale serie corrisponde al **Polinomio di Taylor di grado infinitesimo di** e^k. Dunque, l'intera serie converge esattamente a e^k.

4. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cdot 2^k}{k!} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{(k+1)^2 \cdot 2^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^2 \cdot 2^k}{k!}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2 \cdot 2^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{k^2 \cdot 2^k} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2 \cdot 2 \cdot 2^k}{(k+1) \cdot k!} \cdot \frac{k!}{k^2 \cdot 2^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2(k+1)}{k^2} = 0 < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

5. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1) \cdot k!}{(k+1)^k \cdot (k+1)} \cdot \frac{k^k}{k!} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{k^k}{(k+1)^k} = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \frac{1}{e} < 1 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

NB: nell'ultimo passaggio è stato usato un limite notevole

6. Decretare se la seguente serie converge o diverge usando il Criterio del Confronto Asintotico

   Suggerimento: usare la Formula di Stirling dove possibile

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} \sim \sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k} \quad \text{poiché} \quad \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k} \Longrightarrow \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{\sqrt{2\pi k}}{e^k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[2k]{2\pi k}}{e} =$$

$$= \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt[2k]{2\pi}\sqrt{\sqrt[k]{k}}}{e} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2k}}}{e} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{e} < 0 \Longrightarrow \textbf{Converge}$$

$$\text{quindi } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{k^k} = \textbf{Converge}$$

7. Decretare se la seguente serie converge o diverge

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} \text{ poiché}$$

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{\frac{k^k}{e^k \cdot k!}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi k}}} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!} \cdot \sqrt{2\pi k} = \lim_{k \to +\infty} \frac{k^k \cdot e^{-k} \cdot \sqrt{2\pi k}}{k!} = 1$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot +\infty = \textbf{Diverge}$$

$$\text{quindi } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^k}{e^k \cdot k!} = \textbf{Diverge}$$

1.2.7 Criterio di Leibniz

Fino ad ora abbiamo trattato tipologie di serie in cui il segno rimane **costante** (serie a termini positivi e serie a termini negativi), fatta eccezione per la serie $a_k = (-1)^k$, che abbiamo decretato come **nè convergente nè divergente**. Rimane però il dubbio per le serie in cui $(-1)^k$ costituisce **solo parte di** a_k e non la sua totalità. Il **Criterio di Leibniz** è in grado di determinare se una serie di questo tipo sia in grado di convergere oppure no in base a **tre requisiti**:

Theorem 8. Criterio di Leibniz

Sia $a_k = (-1)^k \cdot b_k$. Se b_k soddisfa le seguenti **tre condizioni**, allora la serie di termine generico a_k è **convergente**:

- b_k è una successione a termini di segno costante
- $b_{k+1} \leq b_k$ per ogni k, ossia è una successione decrescente
- $b_k \to 0$ per $n \to +\infty$

Esempio

Consideriamo la seguente serie, cercando di determinarne la convergenza:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

Notiamo facilmente che non possiamo applicare nessuno dei criteri visti precedentemente. Vediamo quindi se essa rispetta le tre condizioni del **Criterio di Leibniz**.

Prima di tutto, mettiamo in evidenza b_k ricordando che $a_k = (-1)^k \cdot b_k$:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{1}{k}$$

Successivamente, verifichiamo le condizioni

- $b_k = \frac{1}{k}$ è a **termini positivi**
- $b_{k+1} \leq b_k \Longrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{k}$ è vero per ogni k, dunque è **decrescente**
- $b_k \to 0$ per $k \to +\infty$

Tutte e tre le condizioni sono soddisfatte, dunque si tratta di una serie **convergente**

1.2.8 Convergenza Assoluta

Nonostante il Criterio di Leibniz riesca a trattare anche le serie a segno alterno, esso è strettamente dipendente da una caratteristica: l'**alternanza tra i segni deve essere regolare**, ossia deve ricorrere dopo ogni termine. Ma cosa accade se l'alternanza non è regolare?

Consideriamo la seguente serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(k)}{k^2}$$

In questa situazione, abbiamo che ogni termine compreso tra $0 \leq k \leq \pi$ è positivo, mentre quelli tra $\pi \leq k \leq 2\pi$ sono negativi, dunque il Criterio di Leibniz non è applicabile.

In questo caso, possiamo applicare quella che viene chiamata **Condizione di Convergenza Assoluta**:

Theorem 9. Convergenza Assoluta

La serie di termine generico a_k si dice **convergente assolutamente** se e solo se la serie di termine generico $|a_k|$ è **convergente**

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ converge assolutamente solo se } \sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty$$

Se la serie di termine generico a_k **converge assolutamente**, allora essa **converge anche semplicemente**.

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| < +\infty \Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty$$

Tornando alla nostra serie, quindi, proviamo a vedere se essa converge assolutamente

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{sin(k)}{k^2} \longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{sin(k)}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|sin(k)|}{k^2}$$

Notiamo che l'unico criterio utilizzabile sulla nuova serie ottenuta è il **Criterio del Confronto** (non asintotico)

$$0 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|sin(k)|}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

$$Convergente \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|sin(k)|}{k^2} \leq Convergente$$

Poiché si trova tra due serie convergenti, ne consegue che anche la **serie assoluta sia convergente**. Dunque, la nostra serie iniziale **converge assolutamente** e di conseguenza **converge semplicemente**.

ATTENZIONE: così come abbiamo fatto per la condizione necessaria di convergenza, è necessario sottolineare che l'**ordine della condizione** sia importantissimo. Dunque, se una serie converge semplicemente, **non è detto** che essa converga assolutamente.

Per esempio, abbiamo già stabilito che la seguente serie sia **convergente** per via del Criterio di Leibniz

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} < +\infty$$

ma essa **non converge assolutamente** (ed anzi, diverge assolutamente)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

Riordinamento dei termini della serie

Tuttavia, nel caso in cui una serie converga semplicemente ma non assolutamente, è possibile trovare un **riordinamento** dei termini della serie tale che

$$\sum_{h=0}^{\infty} a_{S(h)} = \ell$$

Tutto ciò è possibile poiché ricordiamo che le somme godono della proprietà commutativa, dunque al cambiare dell'ordine degli addendi il risultato non cambia. Perciò, in realtà, tale riordinamento non rende la serie convergente nel caso in cui essa non lo sia già, poiché si tratta solo di una "forzatura snaturata".

Prendiamo ancora una volta come esempio la seguente serie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} < +\infty$$

All'interno di tale serie, i segni si alternano ad ogni termine, dunque è possibile individuare **due sotto-serie** all'interno della serie di partenza

- Se $a_k > 0$ (che si verifica solo quando k è pari) allora tale termine a_k è anche dentro la serie
$$S_+ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2h}, \quad h \in \mathbb{N}$$
- Se $a_k < 0$ (che si verifica solo quando k è dispari) allora tale termine a_k è anche dentro la serie
$$S_- = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-1}{2h+1}, \quad h \in \mathbb{N}$$

Entrambe le due sotto-serie sono divergenti. Possiamo però scegliere un **valore arbitrario** di ℓ a cui far convergere la serie di partenza, seguendo un semplice algoritmo:

1. Scegliere un arbitrario valore di ℓ
2. Se la somma dei termini S è minore di ℓ, allora aggiungere alla somma il successivo termine di S_+
3. Altrimenti, se la somma dei termini S è maggiore di ℓ, allora sottrarre alla somma il successivo termine di S_-
4. Tornare al punto 2 e ripetere l'algoritmo all'infinito

In questo modo, una volta superato il valore di ℓ, il riordinamento dei termini permetterà alla serie di rimanere sempre poco sopra o poco sotto tale valore, convergendo quindi ad ℓ.

Esempio di applicazione dell'algoritmo

Consideriamo la serie
$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

1. Scegliamo $\ell = \frac{3}{2}$ e poniamo $S = 0$, poiché non abbiamo ancora sommato nessun termine.
2. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il primo termine della serie S_+, ossia 1 (dunque $S = 1$)
3. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il secondo termine della serie S_+, ossia $\frac{1}{3}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$)
4. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il terzo termine della serie S_+, ossia $\frac{1}{5}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{23}{15}$)
5. $S > \ell$, dunque sottraiamo il primo termine della serie S_-, ossia $-\frac{1}{2}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} = \frac{31}{30}$)

6. $S < \ell$, dunque aggiungiamo il quarto termine della serie S_+, ossia $\frac{1}{7}$ (dunque $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} = \frac{247}{210}$)
7. Ripetendo l'algoritmo all'infinito, otteniamo che $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{7} + ... \approx \frac{3}{2}$

Esempio già svolto

Se invece volessimo far convergere la serie a $\frac{1}{\pi}$, i primi 50 termini di essa sarebbero:

$$S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \frac{1}{7} - \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \frac{1}{9} - \frac{1}{18} - \frac{1}{20} - \frac{1}{22} + \frac{1}{11} - \frac{1}{24} - \frac{1}{26} + \frac{1}{13} - \frac{1}{28} -$$
$$- \frac{1}{30} + \frac{1}{15} - \frac{1}{32} - \frac{1}{34} + \frac{1}{17} - \frac{1}{36} - \frac{1}{38} + \frac{1}{19} - \frac{1}{40} - \frac{1}{42} + \frac{1}{21} - \frac{1}{44} - \frac{1}{46} + \frac{1}{23} - \frac{1}{48} - \frac{1}{50} + \frac{1}{25} - \frac{1}{52} - \frac{1}{54} -$$
$$- \frac{1}{56} + \frac{1}{27} - \frac{1}{58} - \frac{1}{60} + \frac{1}{29} - \frac{1}{62} - \frac{1}{64} + \frac{1}{31} - \frac{1}{66} - \frac{1}{68} \approx \frac{1}{\pi}$$

1.3 Serie di Taylor

1.3.1 Polinomio di Taylor

Prima di parlare delle **Serie di Taylor**, è necessario effettuare un breve ripasso sul **Polinomio di Taylor**:

Definition 6. Polinomio di Taylor

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Si definisce come Polinomio di Taylor di ordine n in x_0 di f il polinomio $T(x; x_0)$, ossia il **miglior polinomio di grado $\leq n$ che approssima f in un intorno** x_0, e dove $R(x, x_0)$ rappresenta la **differenza (resto) infinitesimale di approssimazione** tra $f(x_0)$ e $T(x; x_0)$.

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + ... + a_{n-1} x + a_n$$

$$f(x_0) = T(x; x_0) + R(x; x_0) \implies R(x; x_0) = f(x_0) - T(x; x_0)$$

La **forma generica del Polinomio di Taylor** può essere riscritta come

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$$

mentre il **resto infinitesimale** equivale a

$$R(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

dove $\xi \in (x, x_0)$

Dunque, se volessimo approssimare il valore di $f(x) = e^x$ nel punto $x_0 = 0$ con un Polinomio di Taylor di ordine n, otterremmo

$$e^x \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \frac{f(0)}{0!}x^0+\frac{f'(0)}{1!}x^1+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Tuttavia, poiché sappiamo che la **derivata di** $f(x) = e^x$ **coincide con se stessa**, abbiamo che

- $f(0) = e^0 = 1$
- $f'(0) = e^0 = 1$
- $f''(0) = e^0 = 1$
- $f'''(0) = e^0 = 1$
- ...
- $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$

Dunque, calcolando i valori della sommatoria otteniamo che

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

In questo caso, utilizziamo il segno di approssimazione ($\approx$) poiché non abbiamo considerato il **resto infinitesimale** della differenza tra $f(x)$ e $T(x; x_0)$. Il vero valore di e^x, quindi, coincide con

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \frac{e^\xi}{(n+1)!}x^{n+1}$$

Il motivo per cui non è stato considerato il resto è semplice: nel nostro caso, parleremo del **Polinomio di Taylor di ordine** ∞. Difatti, per definizione stessa del Polinomio di Taylor e del resto infinitesimale possiamo affermare che per $n \to +\infty$, la **Serie di Taylor coincide esattamente con il valore di** $f(x)$.

Calcolando il limite per $n \to +\infty$ del **resto infinitesimale**, ci rendiamo conto che esso tende a 0, dunque è completamente trascurabile

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = f^{(n+1)}(\xi) \cdot \lim_{n\to+\infty} \frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} = f^{(n+1)}(\xi) \cdot 0 = 0$$

Definition 7. Serie di Taylor

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in (a, b)$. Si definisce come Serie di Taylor il **Polinomio di Taylor** $T(x; x_0)$ **di ordine** n **per** $n \to +\infty$ che coincide esattamente con il valore di $f(x_0)$

$$f(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

1.3.2 Serie di Taylor Notevoli

Una volta data la loro definizione, vedremo una lista di Serie di Taylor notevoli che sarà comodo ricordare e che verranno date per assunte per il resto del corso.

Attenzione: il procedimento con cui vengono ricavate le serie notevoli è analogo all'esempio fatto con la serie di e^x nella sezione precedente. Per questioni di comodità verranno omessi.

- Serie di Taylor di $f(x) = e^x$ valida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = cos(x)$ valida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = sin(x)$ valida $\forall x \in \mathbb{R}$

$$sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = \frac{1}{1-x}$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

  (già vista nell'ambito delle serie geometriche)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

- Serie di Taylor di $f(x) = \frac{1}{1+x}$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

- Serie di Taylor di $f(x) = ln(1+x)$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

$$ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{k+1!}$$

- Serie di Taylor di $f(x) = arctg(x)$ valida $\forall x \in (-1, 1)$

$$arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1!}$$

1.3.3 Principio di Sostituzione e Calcolo delle Derivate

Prima di procedere, è necessario sottolineare che, così come avviene all'interno del Polinomio di Taylor, anche per le Serie di Taylor vale in **Principio di Sostituzione**: se volessimo calcolare la Serie di Taylor di $f(x) = e^{x^2}$, ci basterebbe porre $y = x^2$ per **trasformare** la funzione in $f(x) = e^y$.

A questo punto, siamo già in grado di calcolare la sommatoria di questa nuova funzione:

$$e^{x^2} = e^y = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!}$$

Inoltre, è necessario ricordare che, poiché il Polinomio di Taylor viene calcolato utilizzando le derivate stesse della funzione, è possibile **calcolare il valore della derivata k-esima** nel punto $x_0 = 0$, ossia $f^{(k)}(0)$, semplicemente calcolando il prodotto tra il termine a_k della serie e $k!$

$$f^{(k)}(0) = a_k \cdot k!$$

Esempio

Consideriamo la funzione $f(x) = x^3 \cdot sin(x^3)$. Applicando il **principio di sostituzione**, otteniamo che

$$x^3 \cdot sin(x^3) = y \cdot sin(y) = y \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k+2}}{(2k+1)!} =$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^3)^{2k+2}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{6k+6}}{(2k+1)!}$$

Estendendo la serie calcolata, otteniamo

$$x^3 \cdot sin(x^3) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{6k+6}}{(2k+1)!} = \frac{x^6}{1!} - \frac{x^{12}}{3!} + \frac{x^{18}}{5!} - \frac{x^{24}}{7!} + ... = a_6 - a_{12} + a_{18} - a_{24} + ...$$

Proviamo a calcolare i seguenti valori assunti dalle derivate k-esime di $f(x)$:

- **Valore di** $f''(0)$: il termine di grado 2 **non esiste all'interno della serie**, dunque
$$f''(0) = a_2 \cdot 2! = 0 \cdot 2! = 0$$
- **Valore di** $f^{(6)}(0)$: il termine di grado 6 **esiste all'interno della serie**, dunque
$$f^{(6)}(0) = a_6 \cdot 6! = \frac{1}{1!} \cdot 6! = 6!$$
- **Valore di** $f^{(24)}(0)$: il termine di grado 24 **esiste all'interno della serie**, dunque
$$f^{(24)}(0) = a_{24} \cdot 24! = -\frac{1}{7!} \cdot 24! = -\frac{24!}{7!}$$

Esercizi svolti

1. Si consideri la funzione $f(x) = cos(x^2)$
   - Se ne calcoli la corrispondente Serie di Taylor

$$cos(x^2) = cos(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{4k}}{(2k)!}$$

   - Si calcoli il valore di $f'''(0)$

$$f'''(0) = a_3 \cdot 3! = 0 \cdot 3! = 0$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(4)}(0)$

$$f^{(4)}(0) = a_4 \cdot 4! = -\frac{1}{2!} \cdot 4! = -\frac{24}{2} = -12$$

2. Si consideri la funzione $f(x) = x \cdot ln(1 + x^2)$
   - Se ne calcoli la corrispondente Serie di Taylor

$$x \cdot ln(1 + x^2) = x \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x^2)^{k+1}}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+3}}{k+1}$$

   - Si calcoli il valore di $f'''(0)$

$$f'''(0) = a_3 \cdot 3! = \frac{1}{0!} \cdot 3! = 3! = 6$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(4)}(0)$

$$f^{(4)}(0) = a_4 \cdot 4! = 0 \cdot 4! = 0$$

3. Si consideri la funzione $f(x) = x^5 \cdot e^{x^2}$
   - Se ne calcoli la corrispondente Serie di Taylor

$$x^5 \cdot e^{x^2} = x^5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+5}}{k!}$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(6)}(0)$

$$f^{(6)}(0) = a_6 \cdot 6! = 0 \cdot 6! = 0$$

   - Si calcoli il valore di $f^{(7)}(0)$

$$f^{(7)}(0) = a_7 \cdot 7! = \frac{1}{1!} \cdot 7! = 7! = 5040$$

1.4 Serie di Numeri Complessi e Formula di Eulero

In questa sezione accenneremo alcuni argomenti che verranno ripresi nel capitolo del corso relativo alle **Equazioni Differenziali**.

In particolare, parleremo dei **numeri complessi**, della **formula di Eulero** e del **legame tra esponenziale, seno e coseno**.

1.4.1 Numeri complessi

Con il termine **numeri complessi** (indicati in insiemistica come $\mathbb{C}$), si intende **un'estensione "immaginaria" dei numeri reali**.

Come da matematica elementare, sappiamo che **la radice** di esponente pari di un **numero negativo non esiste**. Ad esempio, non esiste alcun numero equivalente a $\sqrt{-1}$, poiché nessun numero elevato al quadrato può dare come risultato -1:

- Ipotizzando che tale numero esista e che sia un numero positivo, allora il prodotto di tale numero con se stesso dovrebbe dare vita ad un **numero positivo**, poiché avremmo un **prodotto tra due numeri positivi**, mentre -1 è **negativo**
- Ipotizzando che tale numero esista e che sia un **numero negativo**, allora il prodotto di tale numero con se stesso dovrebbe dare vita ad un **numero positivo**, poiché avremmo un **prodotto tra due numeri negativi**, mentre -1 è **negativo**

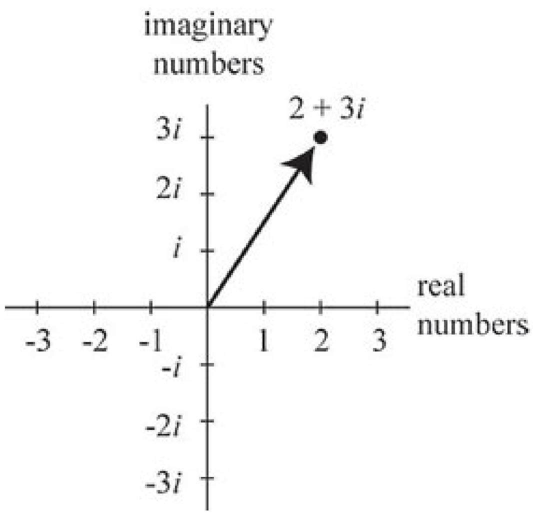
Tuttavia, possiamo effettuare un salto della fede e dare per valida l'esistenza di tale numero. Come abbiamo visto, tale numero **non può essere un numero reale** e per tale motivo viene definito col termine di **numero "immaginario"**, venendo indicato con l'**unità immaginaria** i, dove $i = \sqrt{-1}$.

L'insieme dei **numeri complessi** $\mathbb{C}$, come già accennato, corrisponde ad un'estensione "immaginaria" dei numeri reali e vengono rappresentati nella seguente forma:

$$z = x + iy$$

dove $z \in \mathbb{C}$ e $x, y \in \mathbb{R}$

Graficamente, i numeri complessi possono essere interpretati nella seguente forma:



L'utilizzo di tali numeri apre molte porte all'interno della matematica, ad esempio la **fattorizzazione** di alcuni numeri primi che, per loro definizione stessa, normalmente non sarebbero fattorizzabili:

$$5 = (2+i)(2-i) = 4 - 2i + 2i - i^2 = 4 - (-1) = 5$$

Attenzione: ricordiamo che poiché $i = \sqrt{-1}$, *ne segue che* $i^2 = -1$ *e che* $-i \cdot i = +1$

1.4.2 Formula di Eulero

Nel nostro caso, parleremo dei numeri complessi in ambito della Formula di Eulero:

Lemma 10. Formula di Eulero

$\forall \theta \in \mathbb{R}$ vale la seguente equivalenza:

$$e^{i\theta} = cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)$$

In particolare, è famosa in ambito matematico la così detta *"equazione perfetta"*, poiché contenente tutte le 5 costanti fondamentali della matematica

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

che deriva da

$$e^{i\pi} + 1 = cos(\pi) + i \cdot sin(\pi) + 1 = -1 + 0 + 1 = 0$$

Ma cosa c'entra tutto ciò con le **serie numeriche**? Il motivo è semplice: possiamo provare tale formula anche attraverso le **Serie di Taylor** dell'esponenziale, del coseno e del seno:

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \theta^k}{k!}$$

Prima di procedere, osserviamo il **comportamento** di i^k al crescere di k:

k	0	1	2	3	4	5	6	...
i^k	1	i	-1	$-i$	1	i	-1	...

dunque, affermiamo che:

$$i^k = \begin{cases} (-1)^h & \text{con } k = 2h \\ (-1)^h \cdot i & \text{con } k = 2h+1 \end{cases}$$

Successivamente, **separiamo** la precedente sommatoria in due sommatorie, una contenente i **termini pari** ed una contenente i **termini dispari**:

$$e^{i\theta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k \theta^k}{k!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{i^{2h}\theta^{2h}}{(2h)!} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{i^{2h+1}\theta^{2h+1}}{(2h+1)!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \theta^{2h}}{(2h)!} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \cdot i \cdot \theta^{2h+1}}{(2h+1)!}$$

Infine, notiamo che possiamo mettere in evidenza le **Serie di Taylor del seno e del coseno**, ottenendo esattamente l'identità affermata dalla **Formula di Eulero**:

$$e^{i\theta} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \theta^{2h}}{(2h)!} + \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \cdot i \cdot \theta^{2h+1}}{(2h+1)!} = \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \theta^{2h}}{(2h)!}}_{cos(\theta)} + i \cdot \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h \cdot \theta^{2h+1}}{(2h+1)!}}_{sin(\theta)} = cos(\theta) + i \cdot sin(\theta)$$

1.5 Serie di Potenze

Le **Serie di Potenze** corrispondono ad una **generalizzazione** del concetto precedentemente visto in ambito delle **Serie di Taylor**

Definition 8. Serie di Potenze

Con il termine **Serie di Potenze**, ci riferiamo ad una serie che assume la forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot (x - x_0)^k$$

dove $\{a_k\}$ è una successione di numeri reali, chiamata **successione di coefficienti**, e $x_0 \in \mathbb{R}$, chiamato **centro della serie**.

Per comprendere meglio, vediamo alcuni esempi con alcune serie già analizzate:

- Indicare la successione di coefficienti ed il centro della seguente serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

  - **Successione**: $a_k = \frac{1}{k!}$
  - **Centro**: $x_0 = 0$ (dovuto dal fatto che $x^k = (x - x_0)^k \iff x_0 = 0$)

- Indicare la successione di coefficienti ed il centro della seguente serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 3^{2k}}{(2k)!} x^{6k+2}$$

  - **Successione**:

$$a_h = \begin{cases} 0 & h \neq 6k+2 \\ \frac{(-1)^k 3^{2k}}{(2k)!} & h = 6k+2 \end{cases}$$

  - **Centro**: $x_0 = 0$

- Indicare la successione di coefficienti ed il centro della seguente serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-3)^k}{k^2+1}$$

  - **Successione**: $a_k = \frac{1}{k^2+1}$
  - **Centro**: $x_0 = 3$

1.5.1 Insieme di convergenza

Una volta data definizione di serie di potenze, possiamo andare a descriverne le proprietà. In particolare, le sue proprietà in ambito di **convergenza**.

Consideriamo il seguente insieme contenente **tutti valori di x a cui la serie converge**

$$E = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{la serie converge in } x\}$$

Notiamo facilmente come tale insieme **non possa essere vuoto**, poiché considerando $x = x_0$ otteniamo

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 0^k = a_0 \cdot 0^0 + a_1 \cdot 0^1 + a_2 \cdot 0^2 + ... = a_0$$

Attenzione: ricordiamo che in algebra si ha $0^0 = 1$, mentre $0^x = 0$, $\forall x \neq 0$

Dunque, ne segue che, obbligatoriamente, $x_0 \in E$, dunque $E \neq \emptyset$. Quindi, **ogni serie di potenze converge nel suo centro**.

Inoltre, questa **proprietà** ci permette di formulare il seguente teorema:

Theorem 11. Intervallo di convergenza

Sia P una serie di potenze e sia x_0 il suo centro.

- Se P **converge** in x_1, dove $x_1 \neq x_0$, allora essa **converge** $\forall x \in [x_0, x_1]$
- Se P **non converge** in x_1, dove $x_1 \neq x_0$, allora essa **non converge** $\forall x > x_1$

Ne segue, quindi, che l'insieme di convergenza E sia un **intervallo**.

Una volta affermate le proprietà che ci permettono di definire l'**intervallo di convergenza** di una serie di potenze, possiamo dare una definizione di **raggio di convergenza della serie**:

Definition 9. Raggio di convergenza della serie

Sia P una serie di potenze e sia x_0 il suo centro. Esiste un valore R chiamato **raggio di convergenza della serie** per cui vale che

- P **converge** se $|x - x_0| < R$
- P **non converge** se $|x - x_0| > R$
- La convergenza di P è **ignota** se $|x - x_0| = R$, dunque è necessario analizzarla separatamente

dove R può essere 0, $+\infty$ o un valore in $(0, +\infty)$

Esempi

- Si consideri la seguente serie e se ne indichi il centro e l'intervallo di convergenza

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

  - **Centro**: $x_0 = 0$
  - **Raggio**: $R = +\infty$
  - **Intervallo di Convergenza**: $E = \mathbb{R}$

- Si consideri la seguente serie e se ne indichi il centro e l'intervallo di convergenza

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

  - **Centro**: $x_0 = 0$
  - **Raggio**: $R = 1$ (poiché sappiamo che essa converge per $x \in (-1, 1)$
  - **Convergenza a** 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} 1^k = +\infty = \text{Non converge}$$

  - **Convergenza a** -1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = \text{Non converge}$$

  - **Intervallo di Convergenza**: $E = (-1, 1)$

- Si consideri la seguente serie e se ne indichi il centro e l'intervallo di convergenza

$$arctg(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1}$$

  - **Centro**: $x_0 = 0$
  - **Raggio**: $R = 1$ (poiché sappiamo che essa converge per $x \in (-1, 1)$
  - **Convergenza a** 1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 1^{2k+1}}{2k+1} = \frac{(-1)^k}{2k+1} =< +\infty = \text{Converge}$$

  - **Convergenza a** -1:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (-1)^{2k+1}}{2k+1} = \frac{(-1)^{3k+1}}{2k+1} =< +\infty = \text{Converge}$$

  - **Intervallo di Convergenza**: $E = [-1, 1]$

Negli esempi precedenti, il valore del raggio R è ricavabile facilmente poiché si tratta di serie notevoli di cui conosciamo già il comportamento. Ma come possiamo calcolare il valore di R di una serie qualsiasi?

Theorem 12. Calcolo del raggio di convergenza

Sia P una serie di potenze. Esiste un valore ℓ equivalente a

$$\ell = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

tale che

$$R = \begin{cases} +\infty & \text{se } \ell = 0 \\ \frac{1}{\ell} & \text{se } \ell \in (0, +\infty) \\ 0 & \text{se } \ell = +\infty \end{cases}$$

In forma impropria, quindi, potremmo dire che $R = \frac{1}{\ell}$

Esempi

- Si consideri la seguente serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{(k+1)(k+2)}$$

  - **Centro della serie**: $x_0 = 2$
  - **Raggio della serie**:

$$L = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{(k+2)(k+3)}{(k+1)(k+2)}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+3)}{(k+1)} = 1$$

$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{1} = 1$$

  - **Convergenza per** $x = x_0 - R = 2$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-2)^k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k+1)(k+2)} = \text{Converge per Leibniz}$$

  - **Convergenza per** $x = x_0 + R = 3$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(3-2)^k}{(k+1)(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \text{Converge}$$

  - **Intervallo di Convergenza**: $E = [1, 3]$

- Si consideri la seguente serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(2x-1)^k}{k!}$$

  - **Riscrittura in forma di serie di potenze**:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(2x-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(2(x-\frac{1}{2}))^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k(x-\frac{1}{2})^k}{k!} =$$

  - **Centro della serie**: $x_0 = \frac{1}{2}$
  - **Raggio della serie**:

$$L = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{6^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{6^k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{6}{k+1} = 0$$

$$L = 0 \Longrightarrow R = +\infty$$

  - **Intervallo di Convergenza**: $E = \mathbb{R}$ (converge $\forall x \in \mathbb{R}$)
  - **Analisi ulteriore della serie**: possiamo riscrivere la serie nella seguente forma

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{3^k(2x-1)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6x-3)^k}{k!} = [\textbf{Pongo } y = 6x-3] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = e^y = e^{6x-3}$$

1.5.2 Derivazione di una serie di potenze

Consideriamo la **serie di potenze generica**, già definita come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$$

Come sappiamo, in matematica le **funzioni** godono di alcune proprietà, come la **continuità** in un intervallo o la **derivabilità**.

Poiché abbiamo già affermato che le funzioni possano essere espresse anche in termini di serie di potenze, ne consegue che anche quest'ultime godano delle stesse proprietà, in particolare la **derivabilità**: se una funzione può essere espressa sotto forma di una somma infinita di termini, ne segue logicamente che la derivata di tale funzione possa essere espressa sotto forma di una **somma infinita delle derivate di ogni termine originale**.

- La funzione $f(x)$ viene definita come

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

- La derivata prima della funzione $f(x)$, ossia $f'(x)$, viene definita come

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

- La derivata seconda della funzione $f(x)$, ossia $f''(x)$, viene definita come

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (k-1) \cdot (x - x_0)^{k-2}$$

- ...

Come notiamo, per derivare i termini che compongono la serie di potenze è necessario applicare le semplici regole delle derivazioni, in particolare la **regola della potenza**.

$$f(x) = x^\alpha \Longrightarrow f'(x) = \alpha \cdot x^{\alpha-1} \Longrightarrow f''(x) = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot x^{\alpha-2} \Longrightarrow ...$$

Inoltre, possiamo notare come la serie originale e la serie derivata mantengano lo **stesso centro** e lo stesso **intervallo di convergenza**: riscriviamo $f'(x)$ nella seguente forma

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cdot k \cdot (x - x_0)^{k-1} = [\textbf{Pongo } h = k-1] \sum_{h=0}^{\infty} a_{h+1} \cdot (h+1) \cdot (x - x_0)^h$$

A questo punto, ci rendiamo conto che il **centro della serie** sia rimasto invariato (è sempre x_0), mentre la **successione di convergenza** di $f'(x)$ equivale a

$$b_h = a_{h+1} \cdot (h+1)$$

$$\text{Il limite di } a_k \text{ equivale a } L_{f(x)} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

$$\text{Il limite di } b_h \text{ equivale a } L_{f'(x)} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|b_h|} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_{h+1} \cdot (h+1)|} =$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_{h+1}} \cdot \sqrt[k]{h+1} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \cdot \underbrace{\sqrt[k]{k}}_{\text{Tende a 1}} = \lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{|a_k|}$$

Dunque, otteniamo che le due serie possiedono lo stesso valore L e di conseguenza avranno lo stesso **raggio di convergenza**

$$L_{f(x)} = L_{f'(x)} \Longrightarrow R_{f(x)} = R_{f'(x)}$$

Theorem 13. Derivabilità di una serie

Sia $f(x)$ una funzione tale che $\forall x \in |x - x_0| < R$ vale

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$$

allora, ne segue che

- f è **derivabile infinite volte**
- La **derivata j-esima** di f equivale a

$$f^{(j)}(x) = \sum_{k=j}^{\infty} k \cdot (k-1) \cdot \ldots \cdot (k-j+1) \cdot a_k (x - x_o)^{k-j}$$

Esempi

- Si calcoli la **derivata prima** della seguente serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k+1) \cdot x^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

Dunque, $f(x)$ è una **funzione ignota** la cui derivata equivale a $f'(x) = \frac{1}{1-x}$. Con gli strumenti attuali, non siamo in grado di calcolare a cosa corrisponda la funzione $f(x)$, tuttavia, andando ad intuito, possiamo concludere che $f(x) = -ln(1-x)$.

- Si calcoli la **derivata prima** della seguente serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k (x - \frac{1}{2})^k}{k!} = e^{6x-3}$$

$$f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot 6^k (x - \frac{1}{2})^{k-1}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^k (x - \frac{1}{2})^{k-1}}{(k-1)!} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6 \cdot 6^{k-1} (x - \frac{1}{2})^{k-1}}{(k-1)!} =$$

$$= 6 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{6^{k-1} (x - \frac{1}{2})^{k-1}}{(k-1)!} = [\textbf{Pongo } h = k-1] = 6 \cdot \underbrace{\sum_{h=0}^{\infty} \frac{6^h (x - \frac{1}{2})^h}{h!}}_{\text{Corrisponde a } f(x)} = 6 \cdot f(x)$$

Dunque, $f(x)$ è una funzione la cui derivata equivale a $f'(x) = 6 \cdot f(x)$. Inoltre, siamo in grado di **verificare** tale conto, poiché sappiamo che $f(x) = e^{6x-3}$.

$$f'(x) = [e^{6x-3}]' = [6x-3]' \cdot e^{6x-3} = 6 \cdot e^{6x-3}$$

- Si calcoli la **derivata prima** e la **derivata seconda** della seguente serie di potenze

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+2)^k}{k \cdot (k-1)}$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k \cdot (x+2)^{k-1}}{k \cdot (k-1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+2)^{k-1}}{k-1} = [\textbf{Pongo } h = k-1] = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(x+2)^h}{h}$$

$$f''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k \cdot (k-1) \cdot (x+2)^{k-2}}{k \cdot (k-1)} = \sum_{k=2}^{\infty} (x+2)^{k-2} = [\textbf{Pongo } h = k-2] =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} (x+2)^h = \frac{1}{1-(x+2)} = -\frac{1}{1+x}$$

Una volta calcolato il valore a cui la serie converge, notiamo come la derivata seconda $f''(x)$ sia **riscrivibile** anche nella seguente forma

$$f''(x) = -\frac{1}{1+x} = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

Dunque, possiamo formulare la seguente **eguaglianza**

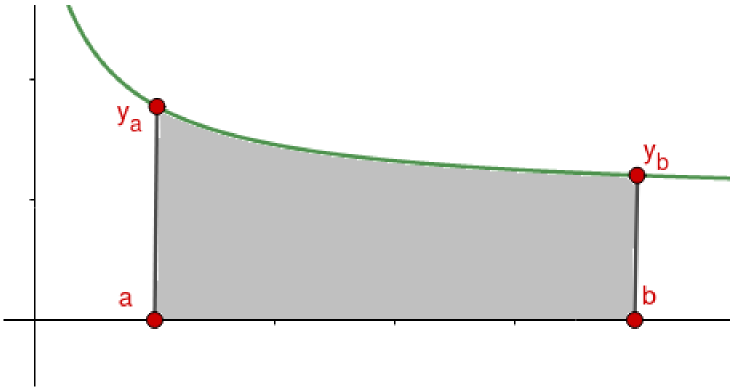
$$\sum_{h=0}^{\infty} (x+2)^h = -\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^k$$

Capitolo 2

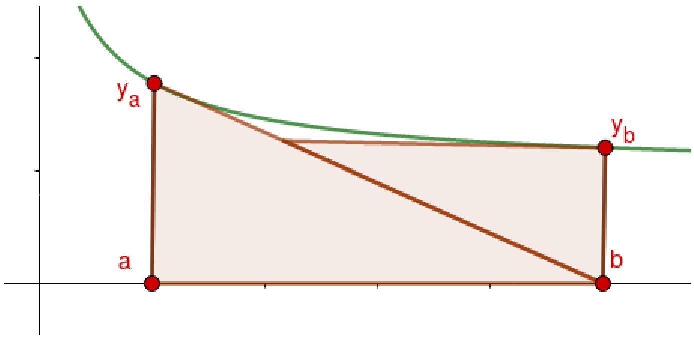
Integrali

2.1 Definizione geometrica

Per introdurre il concetto di **integrale di una funzione**, vediamone prima la sua definizione in **ambito geometrico**. Immaginiamo di trovarci nella seguente situazione: vogliamo calcolare l'**area della figura sottostante alla funzione** $f(x)$ **nell'intervallo** $[a, b]$

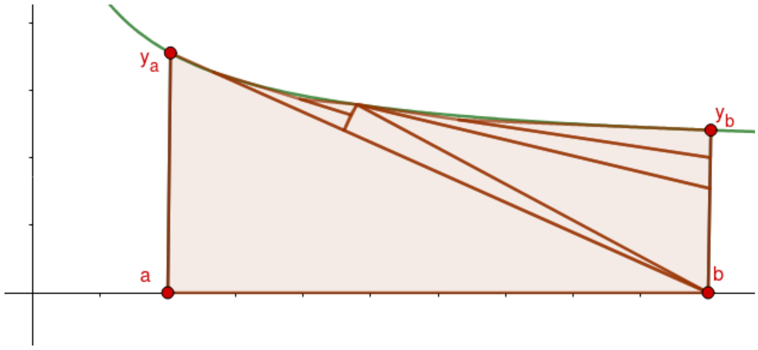


Notiamo però che tale figura **non corrisponde ad un poligono,** ne tanto meno ad una figura geometricamente nota. Come possiamo dunque calcolarne l'area senza poter applicare una formula precisa? Potremmo pensare di **scomporre la figura in dei poligoni** di cui possiamo effettivamente calcolare l'area, per poi **sommare tutte le aree calcolate** ed ottenere l'area della figura. Proviamo quindi a scomporre l'area in **due triangoli**.



Essendo il lato superiore della figura **curvilineo**, non siamo in grado di trovare una **scomposizione perfetta** della figura che possa coprire l'area originale nel suo totale.

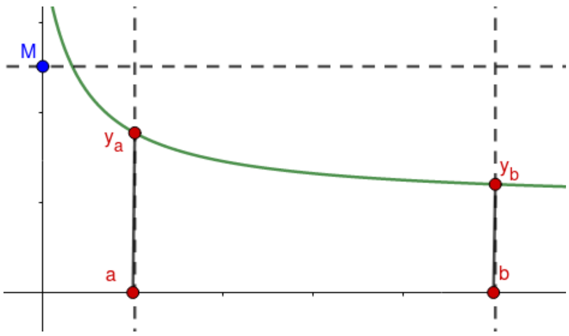
L'unica via, quindi, è stimare l'area della figura tramite una **serie di approssimazioni**: se scomponessimo l'area in una **quantità elevata di triangolini** potremmo arrivare a lasciare scoperta una minuscolissima parte della figura, rendendo la somma delle aree **estremamente vicina all'area effettiva** della figura.



Rimane tuttavia un problema fondamentale, ossia il *come calcolare* tali aree dei triangoli. Notiamo come non è presente un **rigore matematico** in tale approccio, poiché ogni triangolo è estremamente diverso dall'altro, risultando anche nella presenza di alcuni rettangoli non retti. Stimare l'area della figura utilizzando dei triangoli, quindi, risulta estremamente **inefficiente** e di **difficoltà pari** (se non superiore) **al problema originale**.

Proviamo un nuovo approccio: proviamo a scomporre la figura in una **serie di rettangoli**, ossia la figura geometrica la cui area è la **più semplice da calcolare**. Cerchiamo inoltre di seguire un approccio **più rigoroso** rispetto alla stima precedente.

Aggiungiamo al piano la seguente retta $r(x) = M$.



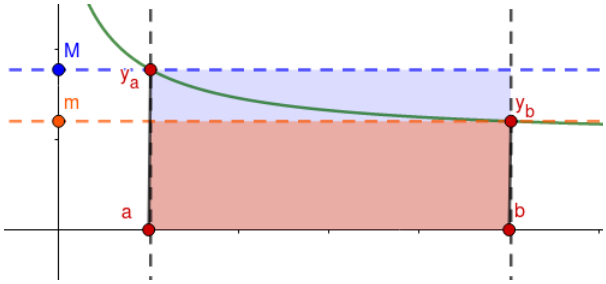
Consideriamo quindi il rettangolo di base $(b-a)$ e di altezza M. Tale rettangolo ha sicuramente un'area **maggiore** rispetto all'area che stiamo cercando. Consideriamo inoltre il rettangolo di base $(b-a)$ e di altezza 0. Tale rettangolo ha sicuramente un'area **minore** dell'area che stiamo cercando. Possiamo quindi definire la seguente disequazione:

$$0 \cdot (b-a) \leq A \leq M \cdot (b-a)$$

dove A è l'**area della figura**.

Attualmente, la stima dell'area della figura risulta estremamente incorretta. Proviamo quindi ad affinare la nostra stima.

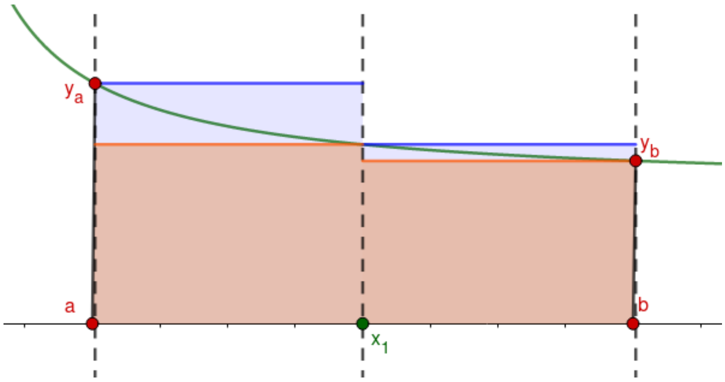
Aggiungiamo al piano una seconda retta $r(x) = m$, dove $m = min(y_a, y_b)$. Inoltre, "aggiorniamo" la retta precedente, ponendo $M = max(y_a, y_b)$.



Analogamente a prima, stimiamo il valore di A confrontandolo con un'**area maggiore** (ossia $M \cdot (b - a)$) e con un'**area minore** (ossia $m \cdot (b - a)$):

$$m \cdot (b - a) \leq A \leq M \cdot (b - a)$$

Notiamo però come la stima risulti ancora troppo imprecisa. Decidiamo quindi di **scomporre il problema in due figure**, raddoppiando il numero di rettangoli.



Una volta scomposto in due figure il problema, notiamo come possiamo individuare un **valore** M ed un **valore** m per ognuna delle **due figure**, corrispondenti ai **punti di massimo e di minimo dei due intervalli** definiti dalla scomposizione, ossia $[a, x_1]$ e $[x_1, b]$, dove x_1 corrisponde al **punto medio tra** a **e** b.

- $x_1 = \frac{b-a}{2}$
- $M_0 = max_{[a,x_1]} f(x)$
- $m_0 = min_{[a,x_1]} f(x)$
- $M_1 = max_{[x_1,b]} f(x)$
- $m_1 = min_{[x_1,b]} f(x)$

A questo punto, riscriviamo nuovamente la stima di A, utilizzando la somma dei rettangoli minori e la somma dei rettangoli maggiori.

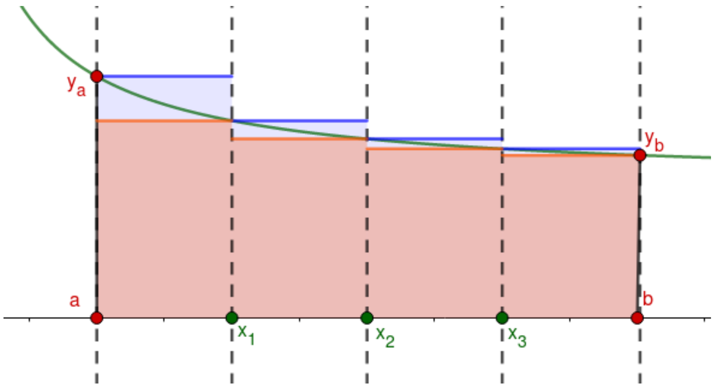
$$m_0 \cdot (b - a) + m_1 \cdot (b - a) \leq A \leq M_0 \cdot (b - a) + M_1 \cdot (b - a)$$

A questo punto, possiamo fare alcuni accorgimenti:

- Le basi dei quattro rettangoli equivalgono tutte a $\frac{b-a}{2}$, poiché non abbiamo fatto altro che dividere l'intervallo $[a, b]$ in due
- Per via della proprietà distributiva, possiamo riscrivere ognuna delle due somme come il prodotto tra la **somma delle altezze dei rettangoli** e la **base**

$$m_0 \cdot \frac{b-a}{2} + m_1 \cdot \frac{b-a}{2} \leq A \leq M_0 \cdot \frac{b-a}{2} + M_1 \cdot \frac{b-a}{2}$$
$$\frac{b-a}{2}(m_0 + m_1) \leq A \leq \frac{b-a}{2}(M_0 + M_1)$$

L'approssimazione risulta quindi **più accurata** rispetto alla precedente. Procediamo quindi sulla stessa riga, questa volta **dividendo l'intervallo in quattro**.



A questo punto, è facile rendersi conto che questa volta la stima corrisponderà a

$$\frac{b-a}{4}(m_0 + m_1 + m_2 + m_3) \leq A \leq \frac{b-a}{4}(M_0 + M_1 + M_2 + M_3)$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{b-a}{2^2} \cdot \sum_{k=0}^{2^2-1} m_k \leq A \leq \frac{b-a}{2^2} \cdot \sum_{k=0}^{2^2-1} M_k$$

ricordando che M_k e m_k corrispondono rispettivamente al **massimo e al minimo dell'k-esimo intervallo**.

Possiamo quindi definire la seguente **forma generalizzata**:

$$\frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) \leq A \leq \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x)$$

dove n corrisponde al **numero di suddivisioni** e ogni x_k corrisponde a

$$x_k = a + k \cdot \frac{b-a}{2}$$

Facciamo ora alcune osservazioni: dando un rapido sguardo ai grafici delle ultime tre approssimazioni, notiamo come all'aumentare del numero degli intervalli la **somma dei rettangoli maggiori**, che d'ora in poi chiameremo $\overline{S_n}$, vada man mano a **diminuire**, mentre la **somma dei rettangoli minori**, che d'ora in poi chiameremo $\underline{S_n}$, vada man mano ad **aumentare**.

$$\underline{S_n} \leq \underline{S_{n+1}} \leq ... \leq A \leq ... \leq \overline{S_{n+1}} \leq \overline{S_n}$$

Immaginiamo ora di suddividere la figura un numero infinito di volte. Intuitivamente, riusciamo a concludere che l'**errore nella stima** si riduca ad un valore **infinitesimale**, così come la **differenza tra $\underline{S_n}$ e $\overline{S_n}$**.

$$\lim_{n \to +\infty} \underline{S_n} = \underline{S}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \overline{S_n} = \overline{S}$$

$$\underline{S} = A = \overline{S}$$

Dunque, possiamo concludere che effettuando il limite per $n \to +\infty$, le somme $\underline{S_n}$ e $\overline{S_n}$ **convergano al valore dell'area** A. Se $f(x)$ è una funzione su cui può essere applicato tale concetto, allora si dice che f è **integrabile secondo Riemann**.

Definition 10. Integrazione secondo Riemann

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si dice che f è **integrabile secondo Riemann** se dati

- Il limite per $n \to +\infty$ della somma $\underline{S_n}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = \underline{S}$$

- Il limite per $n \to +\infty$ della somma $\overline{S_n}$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = \overline{S}$$

si verifica che

$$\underline{S} = \overline{S}$$

L'**integrale definito nell'intervallo** $[a, b]$ **di** $f(x)$ viene denominato con

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

Esempi

Vediamo ora alcuni esempi di calcolo di un integrale utilizzando la sua definizione geometrica:

1. Si calcoli l'integrale definito in $[0, 1]$ di $f(x) = 2$

$$\int_0^1 2\ dx$$

- Prima di tutto, è necessario individuare il massimo e il minimo di ogni intervallo in cui andremo a suddividere la figura. Ovviamente, trattandosi di una funzione costante, il **massimo** e il **minimo** avranno sempre valore 2 indipendentemente dall'intervallo.

$$min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = 2$$
$$max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = 2$$

- Calcoliamo ora i valori di $\overline{S}$ e $\underline{S}$

$$\underline{S} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1-0}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} 2 =$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2(2^n - 1) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^+1 - 2}{2^n} = 2$$

$$\overline{S} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{1-0}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n-1} 2 =$$
$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} \cdot 2(2^n - 1) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^+1 - 2}{2^n} = 2$$

- Concludiamo quindi che

$$\int_0^1 2\ dx = 2$$

- Ovviamente, tale calcolo risulta corretto, poiché l'area richiesta corrisponde esattamente ad un rettangolo di base pari ad 1 ed altezza pari a 2.

2. Si calcoli l'integrale definito in $[0,1]$ di $f(x)=x$

$$\int_0^1 x\ dx$$

- Poiché la funzione $f(x)=x$ è una funzione **monotona crescente**, il minimo dell'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ corrisponde sempre al valore assunto dalla funzione nel suo estremo sinistro, ossia $f(x_k)$, mentre il massimo dell'intervallo corrisponderà sempre al valore assunto nel suo estremo destro, ossia $f(x_{k+1})$.

$$min_{[x_k,x_{k+1}]}f(x)=f(x_k)=a+k\frac{b-a}{2^n}=\frac{k}{2^n}$$
$$max_{[x_k,x_{k+1}]}f(x)=f(x_{k+1})=a+(k+1)\frac{b-a}{2^n}=\frac{k+1}{2^n}$$

- Calcoliamo ora i valori di $\overline{S}$ e $\underline{S}$

$$\underline{S}=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}min_{[x_k,x_{k+1}]}f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-0}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{k}{2^n}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}k=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{(2^n-1)\cdot 2^n}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}-2^n}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2}$$

$$\overline{S}=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}max_{[x_k,x_{k+1}]}f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-0}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}\frac{k+1}{2^n}=$$
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^n}\cdot\sum_{k=0}^{2^n-1}(k+1)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{2^n\cdot(2^n+1)}{2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2^{2n}+2^n}{2^{2n+1}}=\frac{1}{2}$$

- Concludiamo quindi che

$$\int_0^1 x\ dx=\frac{1}{2}$$

- Ovviamente, tale calcolo risulta corretto, poiché l'area richiesta corrisponde esattamente ad un triangolo di base pari ad 1 ed altezza pari a 1.

Nota: all'interno dei calcoli è stato omesso il calcolo della sommatoria poiché è stata usata seguente la sommatoria notevole

$$\sum_{k=0}^{n}k=\frac{n\cdot(n+1)}{2}$$

3. Si calcoli l'integrale definito in $[0, 2]$ di $f(x) = x^2$

$$\int_0^2 x^2 \, dx$$

- Poiché la funzione $f(x) = x^2$ è una funzione **monotona crescente**, il minimo dell'intervallo $[x_k, x_{k+1}]$ corrisponde sempre al valore assunto dalla funzione nel suo estremo sinistro, ossia $f(x_k)$, mentre il massimo dell'intervallo corrisponderà sempre al valore assunto nel suo estremo destro, ossia $f(x_{k+1})$.

$$min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_k) = \left(a + k\frac{b-a}{2^n}\right)^2 = \frac{4k^2}{2^{2n}}$$

$$min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1}) = \left(a + (k+1)\frac{b-a}{2^n}\right)^2 = \frac{4(k+1)^2}{2^{2n}}$$

- Calcoliamo ora i valori di $\overline{S}$ e $\underline{S}$

$$\underline{S} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n - 1} min_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n - 1} \frac{4k^2}{2^{2n}} =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{8}{2^{3n}} \cdot \sum_{k=0}^{2^n - 1} k^2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{8}{2^{3n}} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}(2^n - 1)(2^{n+1} - 1) =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{8}{3} \cdot \frac{2^{3n} - 2^{2n-1} - 2^{2n} + 2^{n-1}}{2^{3n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{8}{3} \cdot \frac{2^{3n}}{2^{3n}} = \frac{8}{3}$$

$$\overline{S} = \lim_{n \to +\infty} \frac{b-a}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n - 1} max_{[x_k, x_{k+1}]} f(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{2}{2^n} \cdot \sum_{k=0}^{2^n - 1} \frac{4(k+1)^2}{2^{2n}} =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{8}{2^{3n}} \cdot \sum_{k=0}^{2^n - 1} (k+1)^2 = \lim_{n \to +\infty} \frac{8}{2^{3n}} \cdot \frac{1}{3} \cdot 2^{n-1}(2^n + 1)(2^{n+1} + 1) =$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{8}{3} \cdot \frac{2^{3n} + 2^{2n-1} + 2^{2n} + 2^{n-1}}{2^{3n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{8}{3} \cdot \frac{2^{3n}}{2^{3n}} = \frac{8}{3}$$

- Concludiamo quindi che

$$\int_0^2 x^2 \, dx = \frac{8}{3}$$

Nota: all'interno dei calcoli è stato omesso il calcolo della sommatoria poiché è stata usata seguente la sommatoria notevole

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{1}{6} \cdot n(n+1)(2n+1)$$

2.2 Proprietà delle funzioni integrabili

Una volta appreso il concetto di integrale, resta da chiedersi quali siano le **tipologie di funzioni integrabili** e le **proprietà** che esse possiedono.

Dopo aver visto la definizione geometrica di integrale, è facile ragionare su quali siano le tipologie di funzioni integrabili, ossia qualsiasi funzione **continua** o **monotona** (anche monotona discontinua) nell'intervallo $[a, b]$.

Come sappiamo, le funzioni che non rispettano tali caratteristiche sono poche. Infatti, sostanzialmente le uniche **funzioni non integrabili** sono delle funzioni di cui è **difficile calcolare il valore** assunto dalla funzione stessa. Esempio tipico di ciò è la **funzione di Dirichlet**, che assume valore 1 nel caso in cui x sia un numero razionale e valore 0 nel caso in cui sia un numero irrazionale. Tale funzione risulta difficile da integrare poiché all'interno di un intervallo vi sono infiniti numeri razionali ed infiniti numeri irrazionali.

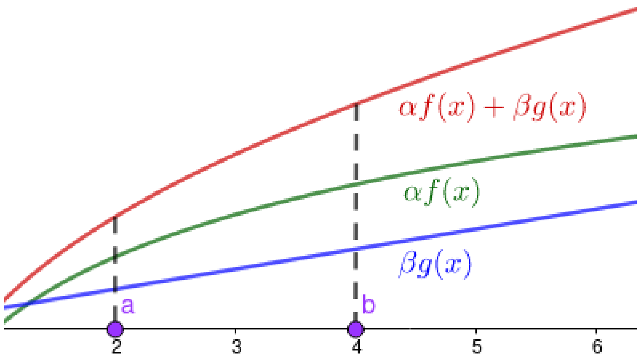
Proprietà degli integrali

Tenendo a mente la definizione geometrica di integrale, dunque del fatto che corrisponda esattamente all'area della funzione in un intervallo specifico, possiamo formulare alcune **proprietà** che essi rispettano in qualsiasi caso:

Theorem 14. Linearità dell'integrale

Date **due funzioni** f **e** g **integrabili** nell'intervallo $[a, b]$, la funzione $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ è integrabile nell'intervallo $[a, b]$ e l'integrale equivale alla **somma dell'integrale di** $\alpha f(x)$ **e di** $\beta g(x)$ **nell'intervallo** $[a, b]$:

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx$$

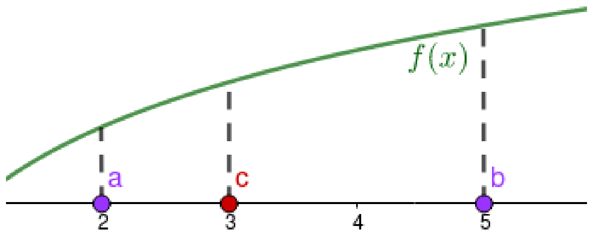


Notiamo facilmente come la somma delle aree di $\alpha f(x)$ e $\beta g(x)$ nell'intervallo $[a, b]$ corrispondano all'area di $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ nello stesso intervallo

Theorem 15. Additività dell'integrale

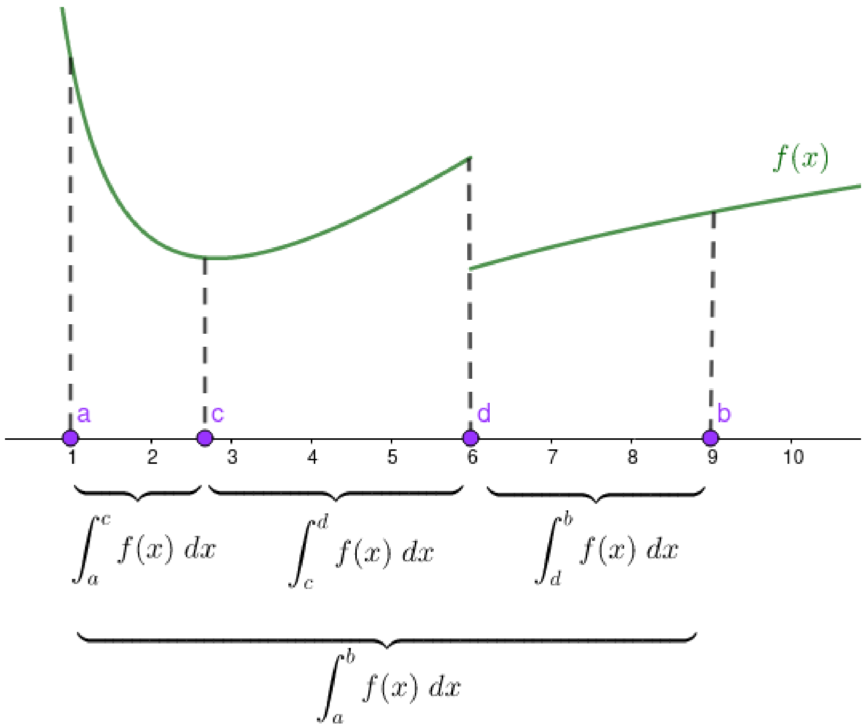
Sia $[a,b] = [a,c] \cup [c,b]$, dove $c \in [a,b]$, e sia f una funzione **integrabile in** $[a,c]$ **e in** $[c,b]$. In tal caso, f è integrabile in $[a,b]$ ed l'integrale equivale alla **somma tra l'integrale in** $[a,c]$ **e l'integrale in** $[c,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$



Tale proprietà risulta essere banale, poiché sfruttata anche nella definizione geometrica stessa di integrale

Seppur semplice, tale proprietà ci permette di fare delle **assunzioni aggiuntive**. Immaginiamo di voler calcolare l'integrale in $[a,b]$ di una **funzione discontinua e non strettamente monotona**.



A primo impatto, ci sembra impossibile stabilire il valore assunto dall'integrale in $[a,b]$. Tuttavia, sfruttare la proprietà dell'additività dell'integrale, **spezzando il singolo integrale nella somma tra tre integrali**: uno nell'intervallo $[a,c]$, dove la funzione è

strettamente decrescente, uno nell'intervallo $[c, d]$, dove la funzione è **strettamente crescente**, ed uno in $[d, b]$, dove la funzione è **discontinua**.

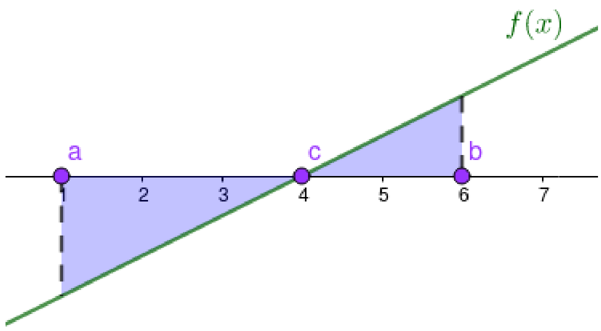
A questo punto, utilizzando il **metodo di Rienmann**, ci risulta facile calcolare i tre singoli integrali, per poi sommarli ed ottenere il valore dell'integrale in $[a, b]$.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^d f(x)\, dx + \int_d^b f(x)\, dx$$

Proposition 16. Integrabilità di una funzione

Una funzione f è integrabile in un intervallo $[a, b]$ se all'interno di tale intervallo presenta un **numero finito di cambi di monotonia e un numero finito di discontinuità**.

Inoltre, tale proprietà ci permette di calcolare integrali in cui la funzione **non assume valori strettamente positivi** in un intervallo.



In questo caso, l'integrale in $[a, b]$ può essere comodamente spezzato nella **somma tra l'integrale in** $[a, c]$ **e l'integrale in** $[c, b]$. Tuttavia, notiamo come nell'intervallo $[a, c]$ la funzione assuma **valori negativi**, rendendo **negativo** il risultato di tale integrale.

Di conseguenza, l'integrale in $[a, b]$ corrisponderebbe alla **somma tra un'area negativa ed un'area positiva**. Nel caso in cui invece volessimo ottenere l'**area assoluta**, è necessario **negare l'integrale in** $[a, c]$, in modo da ottenere la somma effettiva tra le due aree.

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx$$

Proposition 17. Integrale con Area assoluta

Se una funzione f assume **valori negativi** $\forall x \in [x_1, x_2]$ e viene integrata in tale intervallo, allora è necessario **negare il risultato** dell'integrale.

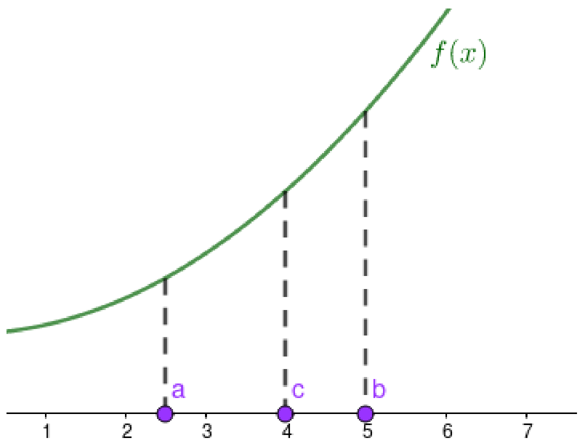
Fino ad ora abbiamo visto solo casi in cui abbiamo integrato una funzione in un intervallo $[a, b]$ dove $a < b$. Ma cosa accade se **invertiamo i due estremi** di un integrale? A livello quantitativo, il risultato non cambierà, poiché la **quantità di area** sottostante alla funzione sarà sempre la stessa. Tuttavia, ciò che **cambierà sarà il segno del risultato**, ottenendo una versione negata dell'integrale originale.

Theorem 18. Inversione dell'intervallo di integrazione

Se f è una funzione integrabile in $[a, b]$ dove $a < b$, allora vale che

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

Infine, l'ultima proprietà degli integrali prevede il **calcolo di un'area tramite la differenza tra due aree**. Consideriamo la seguente situazione: vogliamo calcolare l'integrale in $[c, b]$ della seguente funzione



In questo caso, ci viene naturale affermare che l'integrale in $[c, b]$ corrisponde esattamente alla **differenza tra l'integrale in** $[a, b]$ **e l'integrale in** $[a, c]$.

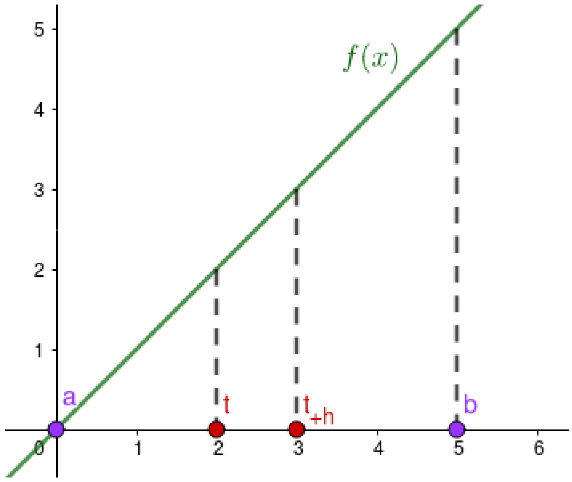
Theorem 19. Differenza tra integrali

Sia $[a, b]$ un intervallo e sia $c \in [a, b]$. Se f è una funzione integrabile in $[a, b]$, allora l'integrale di f in $[c, b]$ è esprimibile come

$$\int_c^b f(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^c f(x)\, dx$$

2.3 Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Riprendiamo ora il discorso del calcolo dell'integrale della funzione $f(x) = x$.



Vogliamo calcolare l'integrale di f nell'intervallo $[t, t+h]$. Scegliamo quindi di utilizzare l'ultima proprietà degli integrali discussa nella sezione precedente, ossia la**differenza tra integrali**.

$$\int_t^{t+h} x\ dx = \int_0^{t+h} x\ dx - \int_0^t x\ dx$$

Poiché le aree al di sotto di $f(x) = x$ corrispondono a dei **triangoli**, possiamo *"barare"* e calcolarci velocemente tali aree:

$$\int_t^{t+h} x\ dx = \int_0^{t+h} x\ dx - \int_0^t x\ dx = \frac{(t+h)\cdot(t+h)}{2} - \frac{t\cdot t}{2}$$

Notiamo come le aree calcolate corrispondono sono valide per qualsiasi valore di t. Definiamo quindi una **funzione ausiliaria** $F(x)$ corrispondente a **qualsiasi integrale di** $f(x) = x$ **in un intervallo** $[0, t]$.

$$F(t) = \int_0^t x\ dx = \frac{t^2}{2}$$

Dunque, riscriviamo l'integrale precedente come

$$\int_t^{t+h} x\ dx = F(t+h) - F(t) = \frac{(t+h)^2}{2} - \frac{t^2}{2}$$

Arrivati a questo punto, ci chiediamo quale sia il **limite del rapporto incrementale** (dunque la **derivata**) di tale funzione ausiliaria, in modo da sapere quanto il suo valore cambi al variare del suo argomento.

$$F'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{t^2}{2} - \frac{(t+h)^2}{2}}{h} = t$$

Notiamo quindi come la **derivata di** $F(x)$ corrisponda esattamente al **valore stesso di** t. Difatti, ragionando graficamente, riducendo al limite la distanza tra il punto t e il punto $t+h$ (dunque calcolando la derivata), ciò che otteniamo non è altro che l'**"altezza" di un rettangolo di base infinitesimale**, poiché

- $F(t+h) - F(t)$ corrisponde all'**area** di $f(x)$ nell'intervallo $[t, t+h]$
- h corrisponde alla **base** di tale area
- Dunque il limite del rapporto incrementale sarà

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \frac{Area}{Base} = Altezza$$

Tuttavia, sappiamo anche che t**ale altezza corrisponde esattamente a** $f(t)$. Dunque, la **derivata della funzione ausiliaria in** t corrisponde esattamente al **valore della funzione originale in** t**.**

$$F'(t) = f(t)$$

Theorem 20. Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

Se $F(t)$ è la funzione ricavata dall'integrale di $f(x)$ in $[0, t]$, allora $F'(t) = f(t)$.

$$F(t) = \int_0^t f(x)\, dx$$

$$F'(t) = f(t)$$

Possiamo quindi informalmente affermare che **l'integrale corrisponde all'operazione matematica inversa della derivata**.

Tornando all'esempio con $f(x) = x$, difatti, notiamo come la funzione $F(x)$ corrisponda esattamente ad una funzione la cui derivata coincide esattamente con $f(x)$.

Tale **teorema fondamentale** ci permette di calcolare con estrema facilità il valore di un qualsiasi integrale di una funzione definito in un certo intervallo, limitando il calcolo al **dover trovare il valore assunto dalla funzione la cui derivata coincide con** $f(x)$ **negli estremi** a **e** b.

Per comodità, rappresenteremo i calcoli nel seguente formato

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\,\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Esempi

- Consideriamo il seguente integrale

$$\int_0^2 x^2\, dx$$

  - Prima di tutto cerchiamo quale sia la funzione $F(x)$ la cui derivata coincide con $f(x)$. Ricordando le regole di derivazione, riusciamo a ricavare che

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 \Longrightarrow F'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^{3-1} = x^2 = f(x)$$

  - Dunque il valore dell'integrale sarà

$$\int_0^2 x^2\, dx = \left.\frac{1}{3}x^3\right|_0^2 = \frac{1}{3} \cdot 2^3 - \frac{1}{3} \cdot 0^3 = \frac{8}{3}$$

- Consideriamo il seguente integrale

$$\int_2^8 x^2 + 5x\, dx$$

  - Cerchiamo la funzione $F(x)$ la cui derivata coincide con $f(x)$

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2$$

  - Dunque il valore dell'integrale sarà

$$\int_2^8 x^2 + 5x\, dx = \left.\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2\right|_2^8 = \frac{1}{3} \cdot 8^3 + \frac{5}{2} \cdot 8^2 - \frac{1}{3} \cdot 2^3 + \frac{5}{2} \cdot 2^2 = 318$$

- Consideriamo il seguente integrale

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx$$

  - Cerchiamo la funzione $F(x)$ la cui derivata coincide con $f(x)$

$$F(x) = sin(x)$$

  - Dunque il valore dell'integrale sarà

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx = sin(x)|_0^{\frac{\pi}{2}} = sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - sin(0) = 1$$

2.3.1 Funzioni primitive, integrale definito e indefinito

Abbiamo quindi visto come al fine di poter calcolare l'integrale di una funzione $f(x)$ sia necessario trovare una **funzione** $F(x)$ tale che $F'(x) = f(x)$.

Tale funzione viene detta **primitiva di** $f(x)$ e ne possono esistere **infinite**: se $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$, allora anche $G(x) = F(x) + c$ (per **qualsiasi valore costante** c) è una **primitiva** di $f(x)$, poiché $G'(x) = f(x)$.

Proposition 21. Funzioni primitive

Se $f(x)$ è una funzione integrabile, allora esistono **infinite funzioni primitive** $G(x)$ tali che $G'(x) = f(x)$, dove $G(x) = F(x) + c$ per ogni $c \in \mathbb{R}$

Notiamo però come l'esistenza di infinite primitive non influisca sul **Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale**, poiché considerando una qualsiasi primitiva $G(x) = F(x) + c$, allora abbiamo che

$$\int_a^b f(x)\, dx = G(x)\big|_a^b = G(b) - G(a) = F(b) + c - (F(a) + c) = F(b) - F(a)$$

dunque, considerando una **qualsiasi primitiva di** $f(x)$, otterremo **sempre lo stesso risultato**, poiché i due valori costanti c si eliminano a vicenda.

Abbiamo inoltre già concluso come si possa impropriamente considerare l'**integrazione** come l'**operazione matematicamente inversa** alla **derivazione**, nonostante fino ad ora abbiamo utilizzato gli integrali per calcolare l'area al di sotto di una funzione.

Definiamo quindi la differenza tra **integrale definito**, ossia quello visto fin'ora dove viene calcolata l'area al di sotto di una funzione in un intervallo definito, ed **integrale indefinito**, ossia l'operazione inversa alla derivazione.

Proposition 22. Integrale definito e indefinito

Definiamo come **integrale definito** il calcolo dell'area al di sotto di una funzione $f(x)$ in un intervallo $[a, b]$ come

$$\int_a^b f(x) = F(x)\big|_a^b = F(b) - F(a)$$

mentre definiamo come **integrale indefinito** l'operazione inversa alla derivazione, ossia trovare la primitiva $F(x)$ di una funzione $f(x)$

$$\int f(x) = F(x) + c$$

2.4 Tecniche di integrazione

2.4.1 Integrali immediati

Essendo l'integrazione l'operazione inversa alla derivazione, ne segue logicamente che esistano degli **integrali immediati** strettamente legati alle **derivate immediate**:

Derivate immediate

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$sin(x)$	$cos(x)$
$cos(x)$	$-sin(x)$
$tg(x)$	$\frac{1}{cos^2(x)}$
$arctg(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
e^x	e^x
α^x	$\alpha^x ln(\alpha)$
$ln(\lvert x\rvert)$	$\frac{1}{x}$

Integrali immediati

$f(x)$	$F(x)$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c$
$sin(x)$	$-cos(x)+c$
$cos(x)$	$sin(x)+c$
$\frac{1}{cos^2(x)}$	$tg(x)+c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$arctg(x)+c$
e^x	e^x+c
α^x	$\frac{\alpha^x}{ln(\alpha)}+c$
$\frac{1}{x}$	$ln(\lvert x\rvert)+c$

2.4.2 Integrazione per sostituzione

Consideriamo il seguente integrale:

$$\int_1^4 e^{3x}\,dx$$

Notiamo come tale integrale risulti essere estremamente **simile** all'integrale di $f(x) = e^x$, la cui primitiva sappiamo essere $F(x) = e^x$. Inoltre, ricordando che gli integrali corrispondono in realtà a nient'altro che ad una **serie numerica** di somme di piccole aree, risulta intuitivo applicare le normali proprietà di **sostituzione** che abbiamo già visto all'interno delle serie numeriche.

Tuttavia, è necessario sottolineare che effettuare un **cambio di variabile** nell'ambito dell'integrazione comporta il dover andare a sostituire **ogni riferimento alla variabile originale** presente nell'integrale, inclusi gli **estremi dell'intervallo** e la **variabile di integrazione**:

- Poniamo $y = 3x$ al fine di trasformare $f(x) = e^{3x} = e^y$
- Di conseguenza, gli **estremi dell'intervallo** devono essere modificati, poiché quando $x = 1$ abbiamo che $y = 3$, mentre quando $x = 4$ abbiamo che $y = 12$
- Anche la **variabile di integrazione** deve essere modificata, poiché se $y = 3x$, ne segue che $y' = [3x]' = 3$

$$y = 3x$$
$$dy = [3x]'\,dx$$
$$dy = 3\,dx$$
$$\frac{dy}{3} = dx$$

- Dunque, una volta sostituiti **tutti i riferimenti** alla variabile di integrazione, l'integrale che otterremo sarà:

$$\int_1^4 e^{3x}\ dx = \int_3^{12} e^y\ \frac{dy}{3} = \frac{1}{3}\int_3^{12} e^y\ dy$$

- A questo punto, ci basterà calcolare l'**integrale immediato** ottenuto, per poi riportare il risultato ottenuto in termini della variabile di integrazione originale

$$\frac{1}{3}\int_3^{12} e^y\ dy = \left.\frac{e^y}{3}\right|_3^{12} = \left.\frac{e^{3x}}{3}\right|_1^4 = \frac{e^{12}-e^3}{3}$$

Ulteriori esempi

1. Consideriamo il seguente integrale

$$\int_0^{\pi} cos(6x)\ dx$$

   - Sostituendo per $y = 6x$, otteniamo che
     - Gli estremi dell'intervallo diventano $[0, 6\pi]$
     - La variabile di integrazione diventa

$$y = 6x$$

$$dy = 6\,dx$$

$$\frac{dy}{6} = dx$$

   - Dunque l'integrale viene trasformato in

$$\int_0^{\pi} cos(6x)\ dx = \frac{1}{6}\int_0^{6\pi} cos(y)\ dy = \left.\frac{sin(y)}{6}\right|_0^{6\pi} = \frac{0-0}{6} = 0$$

2. Consideriamo il seguente integrale

$$\int x^2 e^{x^3}\ dx$$

   - Sostituendo per $y = x^3$, otteniamo che
     - La variabile di integrazione diventa

$$y = x^3$$

$$dy = 3x^2\,dx$$

$$\frac{dy}{3} = x^2\,dx$$

- Dunque l'integrale viene trasformato in

$$\int x^2 e^{x^3}\, dx = \int e^y \frac{dy}{3} = \frac{e^y}{3} + c = \frac{e^{x^3}}{3} + c$$

3. Consideriamo il seguente integrale

$$\int_{-1}^{3} \frac{1}{2x+15}\, dx$$

- Gli estremi dell'intervallo diventano $[13, 21]$
- Sostituendo per $y = 2x + 15$, otteniamo che
  - La variabile di integrazione diventa

$$y = 2x + 15$$

$$dy = 3\, dx$$

$$\frac{dy}{2} = dx$$

- Dunque l'integrale viene trasformato in

$$\int_{13}^{21} \frac{1}{y} \frac{dy}{3} = \frac{1}{3} \int_{13}^{21} \frac{1}{y}\, dy = \left. \frac{ln(|y|)}{3} \right|_{13}^{21} = \frac{ln(21) - ln(13)}{3}$$

4. Consideriamo il seguente integrale

$$\int \frac{4x+6}{x^2+3x+6}\, dx$$

- Sostituendo per $y = x^2 + 3x + 6$, otteniamo che
  - La variabile di integrazione diventa

$$y = x^2 + 3x + 6$$

$$dy = 2x + 3\, dx$$

- Dunque l'integrale viene trasformato in

$$\int \frac{4x+6}{x^2+3x+6}\, dx = 2 \int \frac{2x+3}{x^2+3x+6}\, dx = 2 \int \frac{1}{y}\, dy =$$

$$= 2ln(|y|) = 2ln(\left|x^2 + 3x + 6\right|) + c$$

2.4.3 Integrazione per parti

Consideriamo il seguente integrale

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx$$

Proviamo a risolverlo applicando l'**integrazione per parti** vista nella sezione precedente. Ponendo $y = x^2$ otteniamo che

$$\begin{aligned} y &= x^2 \\ dy &= 2x\, dx \\ \frac{dy}{2} &= x\, dx \end{aligned}$$

dunque possiamo riscrivere l'integrale come

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx = \int x \cdot x^2 e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int y e^y\, dy$$

A questo punto, non siamo riusciti a ricondurre l'integrale originale ad un **integrale immediato**, dunque non sappiamo calcolarne la primitiva.

Proviamo quindi un altro approccio:

- Consideriamo la seguente equazione, descrivente la **derivazione di un prodotto di funzioni**
$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$
- Applichiamo quindi l'operazione di integrazione su entrambe le parti
$$\int [f(x) \cdot g(x)]'\, dx = \int f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\, dx$$
- A questo punto, notiamo come nel lato sinistro dell'equazione abbiamo l'**integrazione di una derivata** che, essendo **l'una l'inversa dell'altra**, restituiscono il prodotto originale tra le funzioni $f(x)$ e $g(x)$
$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)\, dx$$
- Utilizzando le proprietà degli integrali, **spezziamo l'integrale nella parte destra in due**
$$f(x) \cdot g(x) = \int f'(x) \cdot g(x)\, dx + \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$
- Infine, non ci rimane che portare uno dei due integrali sul lato sinistro dell'**equazione**, ottenendo quindi che
$$\int f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\, dx$$

Abbiamo ottenuto quindi una **formula** che ci permette di calcolare l'**integrale di un prodotto tra una funzione derivata ed una funzione**.

Proposition 23. Integrazione per parti

Se il prodotto tra funzioni $f'(x) \cdot g(x)$ è integrabile, allora

$$\int f'(x) \cdot g(x) = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \, dx$$

A questo punto, riprendiamo l'integrale precedentemente calcolato applicando l'integrazione per parti

$$\frac{1}{2} \int ye^y \, dy$$

Per poter applicare l'**integrazione per parti**, è necessario **stabilire attentamente quale tra le due funzioni** presenti all'interno dell'integrale **corrisponda a** $f'(x)$ e quale **corrisponda a** $g(x)$.

Vediamo cosa accade in entrambi i casi:

1.
   - Scegliamo $f'(x) = e^y$ e $g(x) = y$.
   - Poiché $f'(x) = e^y$, ne segue che, tramite **integrazione**, $f(x) = e^y$, mentre poiché $g(x) = x$, ne segue che, tramite **derivazione**, $g'(x) = 1$
   - Dunque, applicando l'**integrazione per parti** otteniamo che

   $$\frac{1}{2} \int ye^y \, dy = \frac{1}{2} \left(ye^y - \int e^y \cdot 1 \, dy \right)$$

   - A questo punto, il secondo integrale ottenuto corrisponde ad un integrale immediato, dunque siamo in grado di calcolarne la primitiva

   $$\frac{1}{2} \left(ye^y - \int e^y \cdot 1 \, dy \right) = \frac{ye^y - e^y}{2} + c = \frac{x^2 e^{x^2} - e^{x^2}}{2} + c$$

2.
   - Scegliamo ora invece $f'(x) = x$ e $g(x) = e^x$.
   - Poiché $f'(x) = x$, ne segue che, tramite **integrazione**, $f(x) = \frac{x^2}{2}$, mentre poiché $g(x) = e^x$, ne segue che, tramite **derivazione**, $g'(x) = e^x$
   - Dunque, applicando l'**integrazione per parti** otteniamo che

   $$\frac{1}{2} \int ye^y \, dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y^2 e^y}{2} - \int \frac{y^2 e^y}{2} \, dy \right)$$

   - A questo punto, notiamo come il secondo integrale ottenuto sia in realtà **più complesso** di quello iniziale, richiedendo inoltre un'ennesima applicazione del metodo appena utilizzato. L'integrazione per parti, dunque, risulta essere uno **strumento potente ma di difficile gestione**, richiedendo molta pratica.

Ulteriori esempi

1. Consideriamo il seguente integrale

$$\int x^3 e^x \, dx$$

- Applicando l'integrazione per parti abbiamo che
- $f'(x) = e^x \Longrightarrow f(x) = e^x$
- $g(x) = x^3 \Longrightarrow g'(x) = 3x^2$

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx$$

- Applichiamo ancora una volta l'integrazione per parti
- $f'(x) = e^x \Longrightarrow f(x) = e^x$
- $g(x) = 3x^2 \Longrightarrow g'(x) = 6x$

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx = x^3 e^x - \left(3x^2 e^x - \int 6xe^x \, dx\right)$$

- E applicandola ancora un'ultima volta otteniamo che
- $f'(x) = e^x \Longrightarrow f(x) = e^x$
- $g(x) = 6x \Longrightarrow g'(x) = 6$

$$\int x^3 e^x \, dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x \, dx = x^3 e^x - \left(3x^2 e^x - \int 6xe^x \, dx\right) =$$

$$= x^3 e^x - \left(3x^2 e^x - \left(6xe^x - \int 6e^x \, dx\right)\right) = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6xe^x - 6e^x + c =$$

$$= e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

2. Consideriamo il seguente integrale

$$\int_0^\pi x cos(2x) \, dx$$

- Applicando l'integrazione per parti abbiamo che
- $f'(x) = cos(2x) \Longrightarrow f(x) = \frac{sin(2x)}{2}$
- $g(x) = x \Longrightarrow g'(x) = 1$

$$\int_0^\pi x \cdot cos(2x) \, dx = \frac{x \cdot sin(2x)}{2} - \int \frac{sin(2x)}{2} \, dx = \frac{x \cdot sin(2x)}{2} + \frac{cos(2x)}{4} =$$

$$= \frac{2x \cdot sin(2x) + cos(2x)}{4}\Bigg|_0^\pi = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

3. Consideriamo il seguente integrale

$$\int ln(x)\ dx$$

- Riscriviamo l'integrale come

$$\int ln(x)\ dx = \int 1 \cdot ln(x)\ dx$$

- Applicando l'integrazione per parti abbiamo che
- $f'(x) = 1 \implies f(x) = x$
- $g(x) = ln(x) \implies g'(x) = \frac{1}{x}$

$$\int 1 \cdot ln(x)\ dx = xln(x) - \int \frac{x}{x}\ dx = xln(x) - x + c$$

- In alternativa, avremmo potuto sviluppare l'integrale procedendo per sostituzione

$$\begin{aligned} y &= ln(x) \\ dy &= \frac{1}{x}\,dx \end{aligned}$$

dove di conseguenza abbiamo che

$$y = ln(x) \implies e^y = x$$

- Riscriviamo quindi l'integrale come

$$\int ln(x)\ dx = \int ln(x) \cdot \frac{x}{x}\ dx = \int ye^y\ dy$$

- A questo punto sviluppiamo l'integrale per parti ponendo
- $f'(x) = e^y \implies f(x) = e^y$
- $g(x) = y \implies g'(x) = 1$

$$\int ye^y\ dy = ye^y - \int e^y\ dx = ye^y - e^y = ln(x) \cdot e^{ln(x)} - e^{ln(x)} = xln(x) - x + c$$

2.4.4 Integrazioni pre-calcolate

In questa sezione vedremo alcune **"tecniche rapide"** che permettono di calcolare gli **integrali più comuni** in modo da **saperne già lo sviluppo** senza dover effettuare alcun calcolo per sostituzione e/o per parti.

1. Consideriamo il seguente integrale generico

$$\int e^{\alpha x}\, dx$$

   dove $\alpha \neq 0$.

   - Procedendo per sostituzione, abbiamo che

$$y = \alpha x$$
$$dy = \alpha\, dx$$
$$\frac{dy}{\alpha} = dx$$

   - Dunque, indipendentemente dal valore di α (dunque $\forall \alpha \in \mathbb{R}$), l'integrale sarà

$$\int e^{\alpha x}\, dx = \frac{1}{\alpha}\int e^{y}\, dy = \frac{e^{y}}{\alpha} = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$$

2. Consideriamo il seguente integrale generico

$$\int sin(\alpha x)\, dx$$

   - Procedendo per sostituzione, abbiamo che

$$y = \alpha x$$
$$dy = \alpha\, dx$$
$$\frac{dy}{\alpha} = dx$$

   - Dunque, indipendentemente dal valore di α (dunque $\forall \alpha \in \mathbb{R}$), l'integrale sarà

$$\int sin(\alpha x)\, dx = \frac{1}{\alpha}\int sin(y)\, dy = -\frac{cos(y)}{\alpha} = -\frac{cos(\alpha x)}{\alpha} + c$$

3. Consideriamo il seguente integrale generico

$$\int cos(\alpha x)\; dx$$

- Procedendo per sostituzione, abbiamo che

$$y = \alpha x$$
$$dy = \alpha\, dx$$
$$\frac{dy}{\alpha} = dx$$

- Dunque, indipendentemente dal valore di α (dunque $\forall \alpha \in \mathbb{R}$), l'integrale sarà

$$\int cos(\alpha x)\; dx = \frac{1}{\alpha} \int cos(y)\; dy = \frac{sin(y)}{\alpha} = \frac{sin(\alpha x)}{\alpha} + c$$

4. Consideriamo il seguente integrale generico

$$\int \frac{1}{\alpha x + \beta}\; dx$$

- Procedendo per sostituzione, abbiamo che

$$y = \alpha x + \beta$$
$$dy = \alpha\, dx$$
$$\frac{dy}{\alpha} = dx$$

- Dunque, indipendentemente dal valore di $\alpha x+\beta$ (dunque $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$), l'integrale sarà

$$\int \frac{1}{\alpha x + \beta}\; dx = \frac{1}{\alpha} \int \frac{1}{y}\; dy = \frac{ln(|y|)}{\alpha} = \frac{ln(|\alpha x + \beta|)}{\alpha} + c$$

5. Consideriamo il seguente integrale generico, dove $f(x)$ è una qualsiasi funzione e $f'(x)$ è la sua derivata

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$$

- Procedendo per sostituzione, abbiamo che

$$\begin{aligned} y &= f(x) \\ dy &= f'(x)\,dx \\ \frac{dy}{f'(x)} &= dx \end{aligned}$$

- Dunque, indipendentemente dalla funzione $f(x)$ (dunque $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$), l'integrale sarà

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{y} \cdot \frac{dy}{f'(x)} = \int \frac{1}{y}\,dy = ln(|y|) = ln(|f(x)|) + c$$

6. Consideriamo il seguente integrale generico

$$\int e^{\alpha x} cos(\beta x)\,dx$$

- Procedendo per parti, abbiamo che
  - $f'(x) = e^{\alpha x} \Longrightarrow f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$
  - $g(x) = cos(\beta x) \Longrightarrow -\beta sin(\beta x)$

$$\begin{aligned} \int e^{\alpha x} cos(\beta x)\,dx &= \frac{cos(\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha} - \int \frac{-\beta sin(\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha}\,dx = \\ &= \frac{cos(\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\int sin(\beta x)e^{\alpha x}\,dx \end{aligned}$$

- Procedendo ancora per parti otteniamo che
  - $f'(x) = e^{\alpha x} \Longrightarrow f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$
  - $g(x) = sin(\beta x) \Longrightarrow \beta cos(\beta x)$

$$\int e^{\alpha x} cos(\beta x)\,dx = \frac{cos(\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{sin(\beta x)e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\int cos(\beta x)e^{\alpha x}\,dx\right]$$

- A questo punto impostiamo e risolviamo la seguente equazione

$$\int e^{\alpha x} cos(\beta x)\ dx = \frac{cos(\beta x) e^{\alpha x}}{\alpha} + \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{sin(\beta x) e^{\alpha x}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\int cos(\beta x) e^{\alpha x}\ dx\right]$$

$$\int e^{\alpha x} cos(\beta x)\ dx = \frac{cos(\beta x) e^{\alpha x}}{\alpha} + \frac{\beta sin(\beta x) e^{\alpha x}}{\alpha^2} - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha x} cos(\beta x)\ dx$$

$$\int e^{\alpha x} cos(\beta x)\ dx + \frac{\beta^2}{\alpha^2}\int e^{\alpha x} cos(\beta x)\ dx = \frac{\alpha cos(\beta x) e^{\alpha x} + \beta sin(\beta x) e^{\alpha x}}{\alpha^2}$$

$$\left(\frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2}\right)\int e^{\alpha x} cos(\beta x)\ dx = \frac{\alpha cos(\beta x) e^{\alpha x} + \beta sin(\beta x) e^{\alpha x}}{\alpha^2}$$

$$\int e^{\alpha x} cos(\beta x)\ dx = \frac{\alpha cos(\beta x) e^{\alpha x} + \beta sin(\beta x) e^{\alpha x}}{\alpha^2} \cdot \frac{\alpha^2}{\beta^2 + \alpha^2}$$

$$\int e^{\alpha x} cos(\beta x)\ dx = \frac{e^{\alpha x}(\alpha cos(\beta x) + \beta sin(\beta x))}{\beta^2 + \alpha^2} + c$$

7. Consideriamo il seguente integrale generico

$$\int e^{\alpha x} sin(\beta x)\ dx$$

- Procedendo per parti, abbiamo che
  - $f'(x) = e^{\alpha x} \Longrightarrow f(x) = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}$
  - $g(x) = sin(\beta x) \Longrightarrow \beta cos(\beta x)$

$$\int e^{\alpha x} sin(\beta x)\ dx = \frac{e^{\alpha x} sin(\beta x)}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\int e^{\alpha x} cos(\beta x)\ dx$$

- Sostituendo l'integrale ottenuto con la formula rapida precedentemente calcolata otteniamo che

$$\int e^{\alpha x} sin(\beta x)\ dx = \frac{e^{\alpha x} sin(\beta x)}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{e^{\alpha x}(\alpha cos(\beta x) + \beta sin(\beta x))}{\beta^2 + \alpha^2}\right] =$$

$$= \frac{e^{\alpha x}(\alpha sin(\beta x) - \beta cos(\beta x))}{\beta^2 + \alpha^2} + c$$

8. Consideriamo il seguente integrale generico, dove $P_n(x)$ è un qualsiasi polinomio di grado n

$$\int P_n(x)e^x \, dx$$

- Ricordando che la formula dell'integrazione per parti ha origine dalla **derivazione di un prodotto di funzioni**, sappiamo che per un qualsiasi polinomio $Q_n(x)$ si verifica che

$$[Q_n(x)e^x]' = Q'_n(x)e^x + Q_n(x)e^x$$

- A questo punto, fattorizziamo l'espressione e poniamo il polinomio $P_n(x)$ come la somma tra il polinomio $Q_n(x)$ e la sua derivata (dunque $P_n(x) = Q'_n(x) + Q_n(x)$)

$$Q_n(x)e^x + Q'_n(x)e^x = e^x(\underbrace{Q_n(x)}_{n} + \underbrace{Q'_n(x)}_{n-1}) = P_n(x)e^x$$

- Dunque, possiamo dire che la **derivazione di un polinomio $Q_n(x)$ di grado n per un esponenziale è un polinomio di grado n per lo stesso esponenziale**, ossia $P_n(x)$, ottenuto dalla somma del polinomio originale e la sua derivata.

  Quest'ultima corrisponderà ad un **polinomio di grado $n-1$,** poiché derivato da un polinomio di grado n (derivazione di potenze).

- Quindi, sapendo che

$$P_n(x) = Q_n(x) + Q'_n(x)$$

  e che

$$\int P_n(x)e^x \, dx = Q_n(x)e^x$$

  è possibile ricavare $Q_n(x)$ tramite $P_x(n)$ risolvendo un **sistema di equazioni**

- Esempio:
  - Si consideri il seguente integrale

$$\int (x^3 - 3x^2 + 8x - 11)e^x \, dx$$

  - Poiché $P_n(x) = x^3 - 3x^2 + 8x - 11$, tramite le assunzioni fatte precedentemente, sappiamo che

$$\int (x^3 - 3x^2 + 8x - 11)e^x \, dx = \int P_3(x)e^x \, dx = Q_3(x)e^x$$

e quindi che

$$P_3(x) = Q_3(x) + Q_3'(x)$$
$$x^3 - 3x^2 + 8x - 11 = Q_3(x) + Q_3'(x)$$

– Inoltre, poiché $Q_3(x)$ è un polinomio di grado 3, ne segue che

$$Q_3(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

e, poiché $Q_3'(x)$ corrisponde alla sua derivata, ne segue che

$$Q_3'(x) = 3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma$$

– Riscriviamo quindi l'equazione precedente come

$$P_3(x) = Q_3(x) + Q_3'(x)$$
$$x^3 - 3x^2 + 8x - 11 = (\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta) + (3\alpha x^2 + 2\beta x + \gamma)$$
$$x^3 - 3x^2 + 8x - 11 = \alpha x^3 + (3\alpha + \beta)x^2 + (2\beta + \gamma)x + \gamma + \delta$$

– A questo punto, ci basta risolvere il sistema di equazioni per ottenere il risultato

$$\begin{cases} x^3 = \alpha x^3 \\ -3x^2 = (3\alpha + \beta)x^2 \\ 8x = (2\beta + \gamma)x \\ -11 = \gamma + \delta \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -6 \\ \gamma = 20 \\ \delta = -31 \end{cases}$$

$$Q_3(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$
$$Q_3(x) = x^3 - 6x^2 + 20x - 31$$

– Infine, quindi, concludiamo che

$$\int (x^3 - 3x^2 + 8x - 11)e^x \, dx = (x^3 - 6x^2 + 20x - 31)e^x + c$$

- Seguendo un ragionamento analogo, possiamo arrivare a formulare che

$$\int P_n(x)e^{kx} \, dx = Q_n(x)e^{kx}$$

dove

$$P_n(x) = k \cdot Q_n(x) + Q_n'(x)$$

2.4.5 Integrazione di $sin^k(x)$ e $cos^k(x)$

Di seguito vedremo due approcci consigliati per sviluppare gli integrali relativi alle funzioni trigonometriche del seno e del coseno a seconda del loro grado di elevazione.

- Se si ha un'integrale nella forma

$$\int sin^k(x)\ dx \quad \text{oppure} \quad \int cos^k(x)\ dx$$

  dove k è una potenza **dispari**, allora è consigliato procedere per **sostituzione**

- **Esempio:** (gli stessi passaggi possono essere utilizzati **anche con il coseno**)
  - Si consideri il seguente integrale

$$\int sin^5(x)\ dx$$

  - Possiamo riscrivere tale integrale come

$$\int sin^5(x)\ dx = \int sin^4(x) \cdot sin(x)\ dx = \int (sin^2(x))^2 sin(x)\ dx$$

  - A questo punto, ricordando l'**identità trigonometrica fondamentale**, ossia $sin^2(x) + cos^2(x) = 1$, possiamo riscrivere l'integrale come

$$\int (sin^2(x))^2 sin(x)\ dx = \int (1 - cos^2(x))^2 sin(x)\ dx$$

  - Procedendo per **sostituzione**, otteniamo che

$$y = cos(x)$$
$$dy = -sin(x)\, dx$$

$$\int (1 - cos^2(x))^2 sin(x)\ dx = -\int (1 - y^2)^2\ dy$$

  - Siamo quindi riusciti a **ricondurre** l'integrale di una funzione trigonometrica ad un **integrale di un polinomio**, il quale risulta estremamente semplice da calcolare

$$-\int (1 - y^2)^2\ dy = -\int 1 - 2y^2 + y^4\ dy = -y + \frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 =$$
$$-cos(x) + \frac{2}{3}cos^3(x) - \frac{1}{5}cos^5(x) + c$$

- Nel caso in cui k sia una potenza **pari**, invece, è consigliato procedere per **parti**
- **Esempio:** (gli stessi passaggi possono essere utilizzati **anche con il coseno**)
  - Si consideri il seguente integrale

$$\int sin^4(x)\ dx$$

  - Possiamo riscrivere tale integrale come

$$\int sin^4(x)\ dx = \int sin^3(x)sin(x)\ dx$$

  - Procedendo per parti, otteniamo che
    - $f'(x) = sin(x) \Longrightarrow f(x) = -cos(x)$
    - $g(x) = sin^3(x) \Longrightarrow g'(x) = 3sin^2(x)cos(x)$

$$\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)cos^2(x)\ dx$$

  - Utilizzando l'**identità trigonometrica fondamentale** otteniamo che

$$\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)(1 - sin^2(x))\ dx$$

$$\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x) - 3\int sin^4(x)\ dx$$

  - A questo punto portiamo l'integrale ottenuto dall'altra parte dell'equazione

$$\int sin^4(x)\ dx + 3\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)$$

$$(1+3)\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)$$

$$4\int sin^4(x)\ dx = -sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)$$

$$\int sin^4(x)\ dx = \frac{1}{4}\left[-sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)\right]$$

  - Siamo quindi riusciti a **ridurre il grado** dell'integrale, poiché a questo punto ci resta da **calcolare l'integrale di** $sin^2(x)$, calcolabile utilizzando lo **stesso metodo**, per ottenere l'integrale di $sin^4(x)$

$$\frac{1}{4}\left[-sin^3(x)cos(x) + 3\int sin^2(x)\right] = \frac{-2sin^3(x)cos(x) - 3sin(x)cos(x) + 3x}{8}$$

2.4.6 Integrazione di funzioni razionali

Fino ad ora abbiamo visto solo situazioni in cui viene integrato il prodotto tra un polinomio ed un'altra funzione generica. Vediamo ora i casi in cui viene richiesto di integrare il **rapporto tra due polinomi**, esprimibile quindi con la forma generica

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx$$

dove $P(x)$ e $Q(x)$ sono due polinomi (principalmente di grado 0, 1 o 2).

1. **Caso 1**: se il rapporto tra polinomi so trova nella seguente forma

$$\int \frac{\beta}{\gamma x+\delta}\, dx$$

allora è possibile procedere nel seguente modo:

- Porto β fuori dall'integrale e sostituisco per $y=\gamma x+\delta$

$$\int \frac{\beta}{\gamma x+\delta}\, dx = \beta\int \frac{1}{\gamma x+\delta}\, dx = \frac{\beta}{\gamma}\int \frac{1}{y}\, dy$$

- A questo punto sviluppo l'integrale e riapplico la sostituzione

$$\frac{\beta}{\gamma}\int \frac{1}{y}\, dy = \frac{\beta}{\gamma}ln(|y|) = \frac{\beta}{\gamma}ln(|\gamma x+\delta|)$$

- Dunque, concludiamo che

$$\int \frac{\beta}{\gamma x+\delta}\, dx = \frac{\beta}{\gamma}ln(|\gamma x+\delta|)$$

2. **Caso 2**: se il rapporto tra polinomi so trova nella seguente forma (dove $\alpha \neq 0$)

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\, dx$$

allora è possibile procedere nel seguente modo:

- Riscriviamo l'integrale nella seguente forma

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\, dx = \int \frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma x)+\beta}{\gamma x+\delta}\, dx = \int \frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma x+\delta-\delta)+\beta}{\gamma x+\delta}\, dx$$

- A questo punto, distribuiamo parzialmente per spezzare l'integrale

$$\int \frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma x+\delta)-\frac{\alpha}{\gamma}\delta+\beta}{\gamma x+\delta}\, dx = \int \frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma x+\delta)}{\gamma x+\delta}\, dx - \int \frac{\frac{\alpha}{\gamma}\delta+\beta}{\gamma x+\delta}\, dx$$

- Dunque, semplifichiamo il semplificabile

$$\int \frac{\frac{\alpha}{\gamma}(\gamma x+\delta)}{\gamma x+\delta}\,dx - \int \frac{\frac{\alpha}{\gamma}\delta+\beta}{\gamma x+\delta}\,dx = \int \frac{\alpha}{\gamma}\,dx + \int \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma x+\delta)}\,dx$$

- Ed infine svolgiamo i due integrali ottenuti

$$\int \frac{\alpha}{\gamma}\,dx + \int \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma(\gamma x+\delta)}\,dx = \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\beta\gamma-\alpha\delta}{\gamma^2}\cdot ln(|\gamma x+\delta|)+c$$

- Dunque, concludiamo che

$$\int \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\,dx = \frac{\alpha\gamma x+(\beta\gamma-\alpha\delta)\cdot ln(|\gamma x+\delta|)}{\gamma^2}+c$$

3. **Caso 3**: se il rapporto tra polinomi so trova nella seguente forma (dove $\alpha \neq 0$)

$$\int \frac{1}{\alpha x^2+\beta+\gamma}\,dx$$

allora è necessario ricondurlo alla seguente forma

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx$$

dove $\beta = \frac{b}{a}$ e $\gamma = \frac{c}{a}$. Successivamente, sarà necessario sviluppare l'integrale ottenuto procedendo in base ad **uno dei tre casi elencati di seguito**:

(a) **Caso 3.a**: se il **delta** di tale polinomio di secondo grado è **pari a zero** ($\Delta = 0$), allora le **radici del polinomio** x_1 **ed** x_2 saranno uguali, dunque è possibile procedere nel seguente modo

- Riscrivo l'integrale come

$$\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \int \frac{1}{(x-x_1)^2}\,dx \qquad \text{se e solo se } \Delta = 0$$

- A questo punto procedo per sostituzione ponendo $y = x - x_1$

$$\int \frac{1}{(x-x_1)^2}\,dx = \int \frac{1}{y}^2\,dy = \int y^{-2}\,dy = -\frac{1}{y} = -\frac{1}{x-x_1}$$

- Dunque concludiamo che

$$\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = -\frac{1}{x-x_1}+c \qquad \text{se e solo se } \Delta = 0$$

(b) **Caso 3.b**: se il **delta** di tale polinomio di secondo grado è **maggiore di zero** ($\Delta > 0$), allora le **radici del polinomio** x_1 **ed** x_2 saranno diverse, dunque è possibile procedere nel seguente modo

- Riscrivo l'integrale come

$$\int \frac{1}{x^2 + \beta x + \gamma}\, dx = \int \frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)}\, dx \qquad \text{se e solo se } \Delta > 0$$

- A questo punto, sfrutto una **proprietà matematica** secondo cui esistono due costanti C e D ($\exists C, D \in \mathbb{R}$) tali che

$$\frac{1}{(x - x_1)(x - x_2)} = \frac{C}{(x - x_1)} + \frac{D}{x - x_2}$$

- Per trovare tali costanti C e D, è necessario considerare i seguenti due casi:
  - Se $x = x_1$, allora

$$\frac{1}{(x_1 - x_1)(x_1 - x_2)} = \frac{C}{(x_1 - x_1)} + \frac{D}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{1}{x_1 - x_2} = C + \frac{D(x_1 - x_1)}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{1}{x_1 - x_2} = C + \frac{D \cdot 0}{x_1 - x_2}$$

$$\frac{1}{x_1 - x_2} = C$$

  - Se $x = x_2$, allora

$$\frac{1}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_2)} = \frac{C}{(x_2 - x_1)} + \frac{D}{x_2 - x_2}$$

$$\frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{C(x_2 - x_2)}{(x_2 - x_1)} + D$$

$$\frac{1}{x_2 - x_1} = \frac{C \cdot 0}{(x_2 - x_1)} + D$$

$$\frac{1}{x_2 - x_1} = D$$

- Dunque, concludiamo che

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{C}{(x-x_1)} + \frac{D}{x-x_2}$$

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{\frac{1}{x_1-x_2}}{(x-x_1)} + \frac{\frac{1}{x_2-x_1}}{x-x_2}$$

$$\frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{(x-x_1)(x_1-x_2)} + \frac{1}{(x-x_2)(x_2-x_1)}$$

- A questo punto, tornando all'integrale, abbiamo che

$$\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \int \frac{1}{(x-x_1)(x_1-x_2)} + \frac{1}{(x-x_2)(x_2-x_1)}\,dx =$$

$$= \frac{1}{x_1-x_2}\int \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x_2-x_1}\int \frac{1}{x-x_2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{x_1-x_2}\left[\int \frac{1}{x-x_1} - \int \frac{1}{x-x_2}\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{x_1-x_2}\left[ln(|x-x_1|) - ln(|x-x_2|)\right] =$$

$$= \frac{1}{x_1-x_2} \cdot ln\left(\left|\frac{x-x_1}{x-x_2}\right|\right) + c \qquad \text{se e solo se } \Delta > 0$$

(c) **Caso 3.c**: se il **delta** di tale polinomio di secondo grado è **minori di zero** ($\Delta < 0$), allora le **radici del polinomio** x_1 **ed** x_2 saranno due **numeri complessi diversi**, dunque è possibile procedere nel seguente modo

- Riscriviamo il polinomio **completando il quadrato**

$$x^2+\beta x+\gamma = x^2+\beta x+\frac{\beta^2}{4}-\frac{\beta^2}{4}+\gamma = \left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2 + \frac{4\gamma-\beta^2}{4} =$$

$$= \frac{4\gamma-\beta^2}{4}\left(\frac{\left(x+\frac{\beta}{2}\right)^2}{\frac{4\gamma-\beta^2}{4}}+1\right) = \frac{4\gamma-\beta^2}{4}\left(\left(\frac{2x+\beta}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\right)^2+1\right)$$

- Dunque, riscriviamo l'integrale come

$$\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \int \frac{1}{\frac{4\gamma-\beta^2}{4}\left(\left(\frac{2x+\beta}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\right)^2+1\right)}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \frac{4}{4\gamma-\beta^2}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+\beta}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\right)^2+1}\,dx$$

- A questo punto, procediamo per sostituzione

$$y = \frac{2x+\beta}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}$$
$$dy = \frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \frac{4}{(4\gamma-\beta^2)\left(\frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\right)}\int \frac{1}{y^2+1}\,dy =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\cdot arctg(y) = \frac{2}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\cdot arctg\left(\frac{2x+\beta}{\sqrt{4\gamma-\beta^2}}\right)+c$$

- Inoltre, dato che in questo caso abbiamo sempre $\Delta = \beta^2 - 4\gamma$ (poiché $\alpha = 1$), possiamo riscrivere il tutto anche come

$$\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\,dx = \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot arctg\left(\frac{2x+\beta}{\sqrt{-\Delta}}\right)+c \qquad \text{se e solo se } \Delta < 0$$

4. **Caso 4:** Se $P(x)$ è un polinomio di **grado maggiore di 2**, allora è opportuno effettuare una **divisione tra polinomi**, in modo da **abbassare il grado** di $P(x)$ e poter rientrare in uno dei **precedenti casi**

$$\text{Poiché } P(x) = S(x)\cdot Q(x) + R(x)$$

dove $S(x)$ è il **risultato della divisione** $\frac{P(x)}{Q(x)}$ e $R(x)$ è il suo **resto**, allora

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{S(x)\cdot Q(x)+R(x)}{Q(x)}\,dx = \int S(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\,dx$$

Esempio:

- Consideriamo il seguente integrale:

$$\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}\,dx$$

- Effettuiamo la divisione tra polinomi:

$$\begin{array}{r|l} x^3+0x^2+0x+0 & x^2+2x+2 \\ \cline{2-2} x^3+2x^2+2x+0 & x-2 \\ \cline{1-1} -2x^2-2x+0 & \\ -2x^2-4x-4 & \\ \cline{1-1} 2x+4 & \end{array}$$

Trovando quindi che x^3 è riscrivibile come $(x^2+2x+2)(x-2)+2x+4$

- Riscriviamo quindi l'integrale come

$$\int \frac{x^3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{(x^2+2x+2)(x-2)+2x+4}{x^2+2x+2}\,dx =$$
$$= \int x-2\,dx + \int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\,dx$$

- A questo punto, siamo riusciti a ricondurre l'integrale originale alla **somma tra due integrali** di cui siamo in grado di calcolare la primitiva

$$\int x-2\,dx + \int \frac{2x+4}{x^2+2x+2}\,dx = \frac{1}{2}x^2-2x+\int \frac{2x+4-2+2}{x^2+2x+2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2-2x+\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\,dx + \int \frac{2}{x^2+2x+2}\,dx =$$
$$= \frac{1}{2}x^2-2x+ln(\left|x^2+2x+2\right|)+2arctg(x+1)\,dx+c$$

2.5 Studio di funzioni definite tramite integrali

Consideriamo il seguente integrale:

$$F(t) = \int_0^t cos^2(x^3)+e^{x^2}\,dx$$

Per definizione di **integrazione secondo Rienmann**, sappiamo che la funzione $g(x) = e^{x^2}$ sia integrabile poiché continua $\forall x \in \mathbb{R}$. Tuttavia, dopo alcune prove (si consiglia di tentare), notiamo come **non siamo in grado di trovare la primitiva** di tale funzione. Di conseguenza, concludiamo che la funzione $F(t)$ **esista**, tuttavia risultando **indefinita**.

Tuttavia, poiché la funzione $F(t)$ esiste, possiamo trarre alcune conclusioni su essa:

- $F(t)$ **è ben definita?** Sì, poiché $f(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R}$
- $F(t)$ **è derivabile?** Sì, poiché per il teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo che
$$F'(t) = f(t) = cos^2(t^4) + e^{t^2}$$
- **Quanto vale** $F(0)$**?** Per definizione di integrale, sappiamo che
$$F(0) = \int_0^0 cos^2(x^3) + e^{x^2}\, dx = 0$$
- **Quanto vale** $F'(1)$**?** Poiché $F'(t) = f(t)$, abbiamo che
$$F'(1) = cos^2(1^3) + e^{1^2} = cos^2(1) + e$$
- **Quanto vale** $F(1)$**?** Non siamo in grado di rispondere, poiché la primitiva $F(t)$ è indefinita
- $F(1)$ **è maggiore o minore di 0?** Ricordando le proprietà di monotonia degli integrali, possiamo affermare che $F(1) \geq 0 \iff f(1) \geq 0$:
  - Sapendo che $cos^2(x^3) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ e che $e^{x^2} \geq 1\, \forall x \in \mathbb{R}$, concludiamo che $f(x) \geq 1\, \forall x \in \mathbb{R}$
  - Poiché che $f(x) > 0\, \forall x \in$, ne traiamo che che $F(x) > 0\, \forall x \in \mathbb{R}$, dunque $F(1) \geq 1$
- $F(-2)$ **è maggiore o minore di 0?** Prima di procedere analogamente al punto precedente, è necessario ricordare che
$$F(-2) = \int_0^{-2} f(x)\, dx = -\int_{-2}^{0} f(x)\, dx$$
  - Come abbiamo visto nel punto precedente, sappiamo che $F(t) > 0\, \forall x \in \mathbb{R}$
  - Dunque, poiché abbiamo invertito il segno dell'integrale come conseguenza dell'inversione dell'intervallo di integrazione, ne segue che $F(-2) < 0$
- $F(t)$ **è crescente?** Sì, poiché la sua derivata (ossia $f(x)$) è sempre positiva
- $F(t)$ **è pari o dispari?** Per rispondere a questa domanda è necessario ricordare che
  - Se una funzione è pari, allora $f(x) = f(-x)$
  - Se una funzione è dispari, allora $f(-x) = -f(x)$

  Dunque, per verificare se $F(t)$ sia pari o dispari, dobbiamo verificare se $F(t) = F(-t)$ oppure se $F(-t) = -F(t)$.

  Prima di procedere, è necessario evidenziare che $f(x) = cos^2(x^3) + e^{x^2}$ è una **funzione pari**, dunque l'**intervallo** $[0, t]$ sarà una versione **specchiata e coincidente dell'intervallo** $[-t, 0]$.

A questo punto, possiamo quindi affermare che

$$\int_0^t cos^2(x^3) + e^{x^2}\,dx = \int_{-t}^0 cos^2(x^3) + e^{x^2}\,dx$$

$$\underbrace{\int_0^t cos^2(x^3) + e^{x^2}\,dx}_{F(-t)} = \underbrace{-\int_0^{-t} cos^2(x^3) + e^{x^2}\,dx}_{-F(-t)}$$

$$F(t) = -F(-t)$$
$$-F(t) = F(-t)$$

Poiché abbiamo ottenuto che $F(-t) = -F(t)$, possiamo concludere che $F(t)$ è una funzione dispari.

Generalizzando la dimostrazione dell'ultimo esempio, in possiamo definire il seguente **teorema**:

Theorem 24. Integrazione di funzioni pari e dispari

Sia $F(x)$ definita come

$$F(t) = \int_0^t f(x)\,dx$$

- Se $f(x)$ è una **funzione pari**, allora $F(t)$ è una **funzione dispari**.
- Se $f(x)$ è una **funzione dispari**, allora $F(t)$ è una **funzione pari**.

Attenzione: affinché valga tale teorema è strettamente necessario che l'intervallo di integrazione sia $[0, t]$

Inoltre, tramite il teorema appena stipulato, possiamo affermare un secondo teorema:

Theorem 25. Integrazione di funzioni pari e dispari

Se viene integrata una funzione $f(x)$ in un intervallo $[-t, t]$, allora

- Se $f(x)$ è **dispari** si ha che

$$\int_{-t}^{t} f(x)\, dx = \int_{0}^{t} f(x)\, dx - \int_{0}^{-t} f(x)\, dx = 0$$

- Se $f(x)$ è **pari** si ha che

$$\int_{-t}^{t} f(x)\, dx = \int_{0}^{t} f(x)\, dx + \int_{-t}^{0} f(x)\, dx = 2\int_{0}^{t} f(x)\, dx$$

Tuttavia, alcune volte è necessario fare **attenzione** nell'utilizzo di questi teoremi:

- Consideriamo l'integrale

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx$$

- Poiché $f(x)$ è dispari e l'intervallo di integrazione è $[-1, 1]$, applicando il teorema precedente otterremmo che $F(1) - F(-1) = 0$.
- Tuttavia, tale conclusione è errata, poiché la funzione **non è integrabile secondo Rienmann** nell'intervallo $[-1, 1]$, vista la presenza di una **discontinuità illimitata in** $x = 0$.
- Dunque, nonostante il teorema, avviamo che

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\, dx = \text{ Non Integrabile secondo Rienmann}$$

2.6 Integrali impropri

Riprendiamo l'integrale visto alla fine della sezione precedente, il quale abbiamo già decretato **non integrabile**.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \text{ Non Integrabile secondo Rienmann}$$

Abbiamo visto come il motivo di ciò sia la presenza di una **discontinuità illimitata nel punto** $x = 0$, rendendo quindi inapplicabile per definizione stessa l'integrazione secondo Rienmann.

Proviamo a **spezzare l'integrale** su due intervalli:

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x}\,dx$$

Notiamo come anche i due integrali ottenuti **non siano integrabili secondo Rienmann**, sempre per via della presenza della discontinuità in $x = 0$.

Tuttavia, come ci insegna l'analisi matematica, quando una cosa **non è possibile in modo strettamente matematico**, possiamo andare a studiare il comportamento di una funzione nel momento in cui ci **avviciniamo al punto problematico** (ossia andando ad effettuare il **limite**).

Consideriamo solo il primo dei due integrali individuati, il quale sappiamo già non essere integrabile

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x}\,dx = ln(|x|)|_{-1}^{0} = ln(0) - ln(1) = ln(0) = \text{Non esiste}$$

Aggiungiamo all'estremo superiore in 0 una **costante molto piccola** ε

$$\int_{-1}^{0+\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx = \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx$$

L'integrale risulta definito nell'intervallo $[-1, \varepsilon]$, rendendolo quindi **perfettamente integrabile secondo le condizioni di Rienmann**.

A questo punto, facciamo tendere $\varepsilon \to 0^+$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_{-1}^{\varepsilon} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\varepsilon\to 0^+} ln(|x|)|_{-1}^{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} ln(\varepsilon) - ln(1) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} ln(\varepsilon) = -\infty$$

Abbiamo ottenuto, quindi, che l'area sotto la funzione $f(x)$ in $[-1, 0]$ è **divergente**, ossia **non ammette limite finito**. A questo punto, possiamo anche non studiare il comportamento del secondo integrale, poiché otterremmo una situazione $\infty - \infty$, che risulta comunque essere **divergente**, indicando comunque che si tratta di un **integrale di area illimitata**.

Diamo quindi una definizione di **integrazione in senso improprio**:

Definition 11. Integrazione in senso improprio

Sia $f(x)$ una funzione con una **discontinuità illimitata** nel punto $x = b$.

Di conseguenza, essa non è integrabile secondo Rienmann nell'intervallo $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)\ dx = \text{ Non integrabile secondo Rienmann}$$

Allora, si dice che $f(x)$ **è integrabile in senso improprio** in $[a, b]$ se l'integrale per $[a, b - \varepsilon]$ dove $\varepsilon \to 0^+$ **ammette limite finito**:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\ dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} F(x)|_a^{b-\varepsilon} = \ell$$

Si ricorda che con limite finito si intende un limite diverso da $+\infty, -\infty$ e $\nexists$

Esempi:

- Si stabilisca se il seguente integrale è integrabile secondo Rienmann o in senso improprio o se non sia integrabile:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx$$

  - Poiché è presente una discontinuità illimitata in $x = 0$, sappiamo che $f(x)$ non è integrabile secondo Rienmann in $[0, 1]$
  - Proviamo quindi a vedere se sia integrabile in senso improprio

$$\lim_{a \to 0^+} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\ dx = \lim_{a \to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_a^1 = \lim_{a \to 0^+} 2 - 2\sqrt{a} = 2$$

  - Siccome ammette limite finito, allora $f(x)$ **è integrabile in senso improprio in** $[0, 1]$

- Si stabilisca se il seguente integrale è integrabile secondo Rienmann o in senso improprio o se non sia integrabile:

$$\int_0^{+\infty} e^{-3x}\ dx$$

  - Poiché stiamo integrando un intervallo illimitato, sappiamo già che $f(x)$ non è integrabile secondo Rienmann in $[0, +\infty]$

– Vediamo quindi se sia integrabile in senso improprio

$$\lim_{b\to+\infty}\int_0^b e^{-3x}\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left.\frac{e^{-3x}}{-3}\right|_0^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{-3e^{3b}}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$$

– Siccome ammette limite finito, allora $f(x)$ **è integrabile in senso improprio in** $[0,+\infty]$

- Si stabilisca se il seguente integrale è integrabile secondo Rienmann o in senso improprio o se non sia integrabile:

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$$

– Notiamo come l'integrale sia riscrivibile come

$$\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2+2x+1}\,dx = \int_{-1}^{1}\frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

– Dunque, essendo $x=-1$ una radice del polinomio al denominatore, $f(x)$ non è integrabile secondo Rienmann in $[-1,1]$

– Vediamo quindi se sia integrabile in senso improprio

$$\lim_{a\to-1^+}\int_a^1\frac{1}{x^2+2x+1}\,dx = \lim_{a\to-1^+}\int_a^1\frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \lim_{a\to-1^+}\left.-\frac{1}{x+1}\right|_a^1 =$$
$$= \lim_{a\to-1^+}-\frac{1}{2}+\frac{1}{a+1} = -\frac{1}{2}+\infty=+\infty$$

– Siccome non ammette limite finito, allora $f(x)$ **non è integrabile in senso improprio in** $[-1,+1]$, dunque $f(x)$ non è integrabile in alcun modo (diverge).

2.6.1 Convergenza degli integrali impropri

Nella sezione precedente, abbiamo visto alcuni integrali riconducibili alla seguente **forma generica**:

$$\int_0^t\frac{1}{x^\alpha}\,dx = \int_0^t x^{-\alpha}\,dx$$

Essendo $x=0$ un punto di discontinuità, sappiamo già che tale integrale **non è integrabile secondo Rienmann**. Vediamo quindi il suo comportamento in **senso improprio**:

$$\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_t^\varepsilon x^{-\alpha}\,dx$$

A questo punto, in base al valore assunto da α, integrale può svilupparsi in due modi:

- Se $\alpha = 1$, allora:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_t^\varepsilon x^{-\alpha}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} ln(|x|)\Big|_\varepsilon^t = \lim_{\varepsilon \to 0^+} ln(t) - ln(\varepsilon) = +\infty$$

- Se $\alpha \neq 1$, allora:

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_t^\varepsilon x^{-\alpha}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Bigg|_\varepsilon^t = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{t^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

  - Se $\alpha < 1$, allora ne segue che che $1 - \alpha > 0$. Dunque, poiché

    $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$$

    avremo che

    $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{t^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{t^{1-\alpha} + 0}{1-\alpha} = \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

  - Se $\alpha > 1$, allora ne segue che che $1 - \alpha < 0$. Dunque, poiché

    $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{1-\alpha} = +\infty$$

    avremo che

    $$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{t^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{t^{1-\alpha} + \infty}{1-\alpha} = +\infty$$

Infine, possiamo concludere che

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^t \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

dunque, l'integrale **converge** ad un valore finito se $\alpha < 1$ e **diverge** se $\alpha \geq 1$.

Consideriamo invece la stessa funzione generica ma con un **intervallo di integrazione illimitato**, risultante di conseguenza nel seguente integrale improprio:

$$\int_t^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_t^\varepsilon \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

A questo punto, analogamente al caso precedente, in base al valore assunto da α l'integrale può svilupparsi in due modi:

- Se $\alpha = 1$, allora:

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_t^\varepsilon x^{-\alpha}\, dx = \lim_{\varepsilon \to +\infty} ln(|x|)\Big|_t^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to +\infty} ln(\varepsilon) - ln(t) = +\infty$$

- Se $\alpha \neq 1$, allora:

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_t^\varepsilon x^{-\alpha} \, dx = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_t^\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \frac{\varepsilon^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} - \frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} = \lim_{\varepsilon \to +\infty} \frac{\varepsilon^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

  - Se $\alpha < 1$, allora ne segue che che $1 - \alpha > 0$. Dunque, poiché

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \varepsilon^{1-\alpha} = +\infty$$

    avremo che

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \frac{\varepsilon^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{+\infty - t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = +\infty$$

  - Se $\alpha > 1$, allora ne segue che che $1 - \alpha < 0$. Dunque, poiché

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \varepsilon^{1-\alpha} = 0$$

    avremo che

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \frac{\varepsilon^{1-\alpha} - t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{0 - t^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{t^{1-\alpha}}{\alpha-1}$$

Quindi, possiamo concludere che

$$\lim_{\varepsilon \to +\infty} \int_t^\varepsilon \frac{1}{x^\alpha} \, dx = \begin{cases} \frac{t^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}$$

dunque, inversamente al caso precedente, l'integrale **converge** ad un valore finito se $\alpha > 1$ e **diverge** se $\alpha \leq 1$.

Dunque, definiamo la **convergenza e la divergenza di un integrale improprio** come:

Definition 12. Convergenza e Divergenza di un integrale

Data una funzione $f(x)$ e un **intervallo illimitato** (superiormente o lateralmente), si dice che l'integrale improprio di tale funzione è

- **Convergente** se:

$$\int_a^b f(x) \, dx < +\infty$$

- **Divergente** se

$$\int_a^b f(x) \, dx = \pm\infty$$

Attenzione: se un intervallo è **illimitato in più punti**, è necessario **spezzare tale intervallo** ed analizzare il comportamento di ogni sotto-intervallo nella vicinanza di ogni punto illimitato.

2.6.2 Criteri di convergenza degli integrali

Consideriamo il seguente integrale:

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{3-x}}\,dx$$

Notiamo come la funzione $f(x)$ risulta essere **illimitata in entrambi gli estremi** dell'intervallo $[1,3]$. **Spezziamo** quindi l'integrale per poterne studiare separatamente il comportamento in entrambi i punti illimitati:

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{3-x}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{3-x}}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{3-x}}\,dx$$

A questo punto, vogliamo **determinare** se entrambi gli integrali ottenuti siano **convergenti** o **divergenti**, senza andare a calcolare il valore specifico dell'area sotto la funzione.

Analizziamo quindi uno per volta entrambi gli integrali:

- Nell'intervallo $[1,2]$, la radice $\sqrt[3]{3-x}$ presente all'interno della funzione non dà problemi in nessuno dei due estremi. Poiché esso non influenza l'illimitatezza dell'intervallo, esso **non influenzerà neanche la convergenza dell'integrale**.

  Possiamo quindi dire che i seguenti due integrali **si comportano allo stesso modo nell'intervallo** $[1,2]$:

  $$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{3-x}}\,dx \approx \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

  Dunque, possiamo dire che se l'**integrale di destra** è **convergente**, allora lo è anche l'**integrale di sinistra**.

  $$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{y}}\,dy < +\infty \text{ poiché } \alpha < 0$$

  Quindi concludiamo che:

  $$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{3-x}}\,dx < +\infty$$

- Nell'intervallo $[2,3]$, la radice $\sqrt{x-1}$ presente all'interno della funzione non dà problemi in nessuno dei due estremi. Poiché esso non influenza l'illimitatezza dell'intervallo, esso **non influenzerà neanche la convergenza dell'integrale**.

  Possiamo quindi dire che i seguenti due integrali **si comportano allo stesso modo nell'intervallo** $[2,3]$:

  $$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{3-x}}\,dx \approx \int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{3-x}}\,dx$$

Dunque, possiamo dire che se l'**integrale di destra** è **convergente**, allora lo è anche l'**integrale di sinistra**.

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{3-x}}\,dx = \int_2^3 \frac{1}{\sqrt[3]{y}}\,dy < +\infty \text{ poiché } \alpha < 0$$

Quindi concludiamo che:

$$\int_2^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{3-x}}\,dx < +\infty$$

- Poiché **entrambi gli integrali sono convergenti**, possiamo affermare che

$$\int_1^3 \frac{1}{\sqrt{x-1}\sqrt[3]{3-x}}\,dx < +\infty$$

Theorem 26. Criterio del confronto asintotico

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che in x_0 vi sia un punto illimitato. Se si verifica che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

dove $\ell \in (0, +\infty)$, allora abbiamo che

$$\int_a^{x_0} f(x)\,dx \approx \int_a^{x_0} g(x)\,dx$$

- Se $g(x)$ **converge**, allora anche $f(x)$ **converge**
- Se $g(x)$ **diverge**, allora anche $f(x)$ **diverge**

Attenzione: x_0 può essere $+\infty$, $-\infty$ o un valore finito.

Oltre al **criterio del confronto asintotico**, gli integrali e le serie condividono anche il **criterio del confronto semplice**:

Theorem 27. Criterio del confronto

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni tali che in x_0 vi sia un punto illimitato. Se si verifica che

$$0 \leq \int_a^{x_0} f(x)\, dx \leq \int_a^{x_0} g(x)\, dx$$

allora abbiamo che:

- Se $g(x)$ **converge**, allora anche $f(x)$ **converge**
- Se $f(x)$ **diverge**, allora anche $g(x)$ **diverge**

e anche il **criterio di convergenza assoluta**:

Theorem 28. Criterio di convergenza assoluta

Sia $f(x)$ una funzioni tale che in x_0 vi sia un punto illimitato. Se si verifica che

$$\int_a^{x_0} |f(x)|\, dx < +\infty$$

allora

$$\int_a^{x_0} f(x)\, dx < +\infty$$

Esempio:

Consideriamo il seguente integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2}\, dx$$

- La funzione è illimitata in entrambi gli estremi, quindi spezziamo l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2}\, dx = \int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x} + x^2}\, dx$$

- Siccome per $x \to 0$ la funzione $\frac{1}{\sqrt{x}}$ **tende a** $+\infty$ **più velocemente rispetto a** $\frac{1}{x^2}$, la mettiamo in evidenza nel primo integrale. Nel secondo integrale, invece, mettiamo in evidenza la funzione $\frac{1}{x^2}$ siccome per $x \to +\infty$ **tende a 0 più velocemente rispetto a** $\frac{1}{\sqrt{x}}$.

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}}\right)\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^{-\frac{3}{2}}+1}\right)\,dx$$

- A questo punto, studiamo separatamente i due integrali applicando il confronto asintotico:
  - Sapendo che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1+0} = 1$$

allora possiamo dire che

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}}\right)\,dx \approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

che sappiamo **convergere** poiché $\alpha < 0$

$$\text{Siccome } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < +\infty \text{ allora } \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{1+x^{\frac{3}{2}}}\right)\,dx < +\infty$$

  - Sapendo che

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^{-\frac{3}{2}}+1}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^{-\frac{3}{2}}+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{0+1} = 1$$

allora possiamo dire che

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^{-\frac{3}{2}}+1}\right)\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$$

che sappiamo **convergere** poiché $\alpha > 0$

$$\text{Siccome } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty \text{ allora } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{x^{-\frac{3}{2}}+1}\right)\,dx < +\infty$$

- Siccome entrambi gli integrali convergono, allora ne deriva che

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}+x^2}\,dx < +\infty$$

2.7 Cheatsheet riassuntivo per integrali rapidi

Funzione : $f(x)$	**Primitiva** : $F(x)$
$\int x^\alpha \, dx \quad$ se $\alpha \neq -1$	$\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c$
$\int sin(\alpha x) \, dx$	$\dfrac{-cos(\alpha x)}{\alpha} + c$
$\int cos(\alpha x) \, dx$	$\dfrac{sin(\alpha x)}{\alpha} + c$
$\int \dfrac{1}{cos^2(x)} \, dx$	$tg(x) + c$
$\int \dfrac{1}{1+x^2} \, dx$	$arctg(x) + c$
$\int e^{\alpha x} \, dx$	$\dfrac{e^{\alpha x}}{\alpha} + c$
$\int \alpha^x \, dx$	$\dfrac{\alpha^x}{ln(\alpha)} + c$
$\int \dfrac{1}{\alpha x + \beta} \, dx$	$\dfrac{ln(\|\alpha x + \beta\|)}{\alpha} + c$
$\int \dfrac{g'(x)}{g(x)} \, dx$	$ln(\|g(x)\|) + c$
$\int e^{\alpha x} cos(\beta x) \, dx$	$\dfrac{e^{\alpha x}(\alpha cos(\beta x) + \beta sin(\beta x))}{\beta^2 + \alpha^2} + c$
$\int e^{\alpha x} sin(\beta x) \, dx$	$\dfrac{e^{\alpha x}(\alpha sin(\beta x) - \beta cos(\beta x))}{\beta^2 + \alpha^2} + c$

Funzione : $f(x)$	**Primitiva** : $F(x)$
$\int P_n(x)e^{\alpha x}\, dx$ dove $P_n(x) = \alpha Q_n(x) + Q'_n(x)$	$Q_n(x)e^{\alpha x} + c$
$\int P(x)cos(\alpha x)\, dx$ oppure $\int P(x)sin(\alpha x)\, dx$	Derivare $P(x)$ e integrare cos o sin
$\int P(x)ln(\alpha x)\, dx$ oppure $\int P(x)arctg(\alpha x)\, dx$	Integrare $P(x)$ e derivare ln o $arctg$
$\displaystyle\int \frac{\alpha x+\beta}{\gamma x+\delta}\, dx \quad \text{se } \alpha \neq 0$	$\displaystyle\frac{\alpha\gamma x + (\beta\gamma - \alpha\delta)\cdot ln(\lvert\gamma x+\delta\rvert)}{\gamma^2} + c$
$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\, dx \quad \text{se } \Delta = 0$	$\displaystyle-\frac{1}{x-x_1} + c$
$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\, dx \quad \text{se } \Delta > 0$	$\displaystyle\frac{1}{x_1-x_2}\cdot ln\left(\left\lvert\frac{x-x_1}{x-x_2}\right\rvert\right) + c$
$\displaystyle\int \frac{1}{x^2+\beta x+\gamma}\, dx \quad \text{se } \Delta < 0$	$\displaystyle\frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\cdot arctg\left(\frac{2x+\beta}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c$
$\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\, dx \quad \text{se grado } P(x) \geq 2$	$\displaystyle\int S(x)\, dx + \int \frac{R(x)}{Q(x)}\, dx$
$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^t \frac{1}{x^\alpha}\, dx$	$\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}$ se $\alpha < 1$ $+\infty$ se $\alpha \geq 1$
$\displaystyle\lim_{\varepsilon\to +\infty}\int_t^\varepsilon \frac{1}{x^\alpha}\, dx$	$\frac{t^{1-\alpha}}{\alpha-1}$ se $\alpha > 1$ $+\infty$ se $\alpha \leq 1$

Capitolo 3

Equazioni differenziali

3.1 Equazioni differenziali ordinarie

Giunti a questo punto dello studio dell'Analisi Matematica, siamo finalmente pronti ad affrontare quelle che sono le ***vere*** equazioni descriventi il mondo reale, ossia le **equazioni differenziali**.

Fino a questo giorno, abbiamo parlato di **equazioni algebriche**, dove veniva richiesto di trovare uno o più **valori incogniti** che potessero soddisfare l'equazione (ossia le x di un'equazione). Nell'ambito delle equazioni differenziali, invece, viene richiesto di trovare una **funzione incognita** che possa soddisfare l'equazione.

Per capire cosa intendiamo con funzione incognita, vediamo la seguente equazione:

$$f^2(x) + x^2 - 1 = 0$$

Procediamo in maniera algebrica, riscrivendo l'equazione come:

$$f^2(x) = 1 - x^2$$
$$f(x) = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

Abbiamo quindi trovato **due funzioni** (ossia $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ e $f_2(x) = \sqrt{1-x^2}$) in grado di soddisfare l'equazione. Entrambe le funzioni sono quindi **soluzioni dell'equazione**.

Vediamo ora un altro esempio di equazione con funzione incognita:

- Data $f(x) = cos(x)$, trovare una funzione $g(x)$ tale che:

$$g'(x) = f(x)$$

- Notiamo come il problema dato non sia altro che un modo alternativo per descrivere un problema già affrontato numerose volte: trovare una **primitiva di** $f(x)$, ossia $g(x)$

- Per risolvere il problema, quindi, procediamo integrando entrambi i lati dell'equazione:

$$g'(x) = f(x)$$
$$g'(x) = cos(x)$$
$$\int g'(x)\ dx = \int cos(x)\ dx$$
$$g(x) = \int cos(x)\ dx$$
$$g(x) = sin(x) + c$$

- Abbiamo ottenuto quindi che $g(x) = sin(x) + c$, dove $c \in \mathbb{R}$. Poiché c può essere una costante qualsiasi, tale equazione possiede **infinite soluzioni**.

L'equazione appena svolta è l'esempio più banale di **equazione differenziale**, ossia un'equazione in cui uno dei membri contiene una **derivata di qualsiasi ordine della funzione incognita**.

Esempi:

- La funzione
$$x^2 + 3x - 1 = 0$$
non è un'equazione differenziale, poiché in essa non compare né una funzione incognita né una sua derivata.
- La funzione
$$f^2(x) + x^2 - 1 = 0$$
non è un'equazione differenziale, poiché in essa non compare una derivata della funzione incognita
- La funzione
$$f(x) - f'(x) + f''(x) - 3 = 0$$
è un'equazione differenziale.

Definition 13. Equazione differenziale ordinaria (EDO)

Un'**equazione differenziale ordinaria** è un'equazione in cui l'**incognita** è una **funzione** e uno dei termini dell'equazione è una **derivata di qualsiasi ordine della funzione incognita stessa**.

L'**ordine dell'EDO** corrisponde all'ordine della **derivata** della funzione incognita di **ordine più alto**.

Consideriamo la seguente **EDO di secondo ordine**:

$$y''(t) = 2$$

Poiché $y''(t)$ è una derivata di secondo ordine, per trovare la funzione incognita $y(t)$ è necessario **integrare due volte** entrambi i membri dell'equazione:

$$\begin{aligned} y''(t) &= 2 \\ \int\int y''(t)\ dt\ dt &= \int\int 2\ dt\ dt \\ \int y'(t)\ dt &= \int (2t + c_1)\ dt \\ y(t) &= t^2 + c_1 t + c_2 \end{aligned}$$

Otteniamo quindi che $y(t) = t^2 + c_1 t + c_2$, dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Poiché sia c_1 che c_2 possono essere una qualsiasi costante, tale EDO di secondo ordine ha **infinite soluzioni** dipendenti da due parametri.

Proposition 29

Un'equazione differenziale di ordine N ha infinite soluzioni dipendenti da N parametri reali.

3.2 Problema di Cauchy

Lo studio delle equazioni differenziali trova applicazione in numerosi campi scientifici, in particolare nella Fisica e nella Chimica.

Consideriamo ad esempio il seguente **problema**:

Ci troviamo su un dirupo e lasciamo cadere un sasso. Considerando la nostra posizione come l'origine del piano cartesiano e sapendo che l'accelerazione gravitazionale è pari a $g = 9.8m/s^2$, vogliamo trovare un equazione in grado di descrivere la distanza s percorsa dal sasso in base al tempo t trascorso per qualsiasi valore di t.

Prima di procedere, è necessario effettuare prima un piccolo ripassino di fisica di base per assicurarci di essere tutti sullo stesso piano:

- La **velocità** di un corpo corrisponde al **cambiamento del suo spostamento** in rapporto al tempo.
$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$
- L'**accelerazione** di un corpo corrisponde al **cambiamento della sua velocità** in rapporto al tempo.
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t^2}$$

- Lo **spostamento** di un corpo in un qualsiasi tempo t corrisponde alla funzione $s(t)$
- La **velocità istantanea** di un corpo in un qualsiasi tempo t corrisponde alla derivata prima della funzione dello spostamento

$$v(t) = s'(t)$$

- L'**accelerazione istantanea** di un corpo in un qualsiasi tempo t corrisponde alla derivata prima della funzione della velocità istantanea.

$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$

Poiché vogliamo trovare la **funzione** $s(t)$ in grado di descrivere la **distanza** percorsa dal sasso in base tempo trascorso e sappiamo che l'**accelerazione** del sasso è pari a $g = 9.8m/s^2$, allora possiamo dire che

$$a(t) = s''(t) = gm/s^2$$

Possiamo quindi ricavare la funzione dello spostamento integrando due volte $s''(t)$:

$$\int \int s''(t)\ dt\ dt = \int \int g\ dt\ dt$$

$$s(t) = \int (gt + c_1)\ dt$$

$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ sono due costanti che danno vita ad **infinite soluzioni**.

Tuttavia, sapendo che **nell'origine** (ossia in $t = 0$), il **corpo non si è ancora mosso** (dunque sia la sua velocità istantanea sia il suo spostamento sono pari a 0), possiamo **restringere il problema** imponendo dei **vincoli**:

- Siccome $v(t) = gt + c_1$ e in $t = 0$ la **velocità è pari a zero**, allora

$$v(0) = 0$$

$$g \cdot 0 + c_1 = 0$$

$$c_1 = 0$$

- Siccome $s(t) = \frac{1}{2}gt^2 + c_1 t + c_2$ e in $t = 0$ lo **spostamento è pari a zero**, allora

$$s(0) = 0$$

$$\frac{1}{2}g \cdot 0^2 + c_1 \cdot + c_2 = 0$$

$$c_2 = 0$$

- Affinché i **vincoli** imposti siano **rispettati**, quindi, è necessario che $c_1 = 0$ e $c_2 = 0$, rendendo quindi possibile **un'unica soluzione all'equazione** rispetto alle infinite precedentemente trovate
$$s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$
- ***Approfondimento***: l'equazione trovata, difatti, corrisponde alla formula generica del *moto rettilineo uniformemente accelerato* che viene normalmente studiato in fisica. Nel nostro caso, abbiamo semplicemente posto $a = g$, $v_i = 0$ (ossia la velocità iniziale) e $s_i = 0$ (ossia lo spostamento iniziale):
$$s(t) = \frac{1}{2}at^2 + v_i t + s_i \quad \Longrightarrow \quad s(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

Applicando i vincoli imposti dalle **condizioni iniziali**, quindi, siamo riusciti a ricondurre il problema ad un'**unica soluzione**. Tale tipologia di problema viene detto **problema di Cauchy**:

Definition 14. Problema di Cauchy

Viene definito come **Problema di Cauchy** un problema matematico in cui data un'**equazione differenziale** di ordine N e una **quantità N di condizioni iniziali <u>sufficienti</u>**, si è in grado di ricondurre tale problema ad un'**unica soluzione**.

$$(c) = \begin{cases} \text{EDO di ordine N per l'incognita } y(t) \\ + \text{ N condizioni iniziali} \end{cases}$$

dove (c) è l'unica soluzione del problema.

Il problema precedentemente svolto, quindi, può essere riformulato nel seguente problema di Cauchy:

$$(c) = \begin{cases} y''(t) = g \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

ATTENZIONE: è necessario sottolineare che affinché si possa ottenere una sola soluzione è necessario che il problema di Cauchy sia **ben formulato**, ossia le sue condizioni iniziali devono essere sufficienti a poter ottenere una sola soluzione.

Ad esempio, il seguente problema non è un problema di Cauchy, poiché le condizioni iniziali fornite non sono sufficienti a poter ottenere una sola soluzione:

$$(c) = \begin{cases} y''(t) = g \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

Esempi:

1. Consideriamo il seguente problema:

$$(c) = \begin{cases} y'(t) = \alpha y(t)[1 - y(t)] \\ y(0) = k \end{cases}$$

dove k è una costante

- La **prima soluzione all'EDO** data che riusciamo a trovare è $y_1(t) = 1$, poiché:
  - La derivata della funzione $y_1(t) = 1$ deve essere $y_1'(t) = [y_1(t)]' = 0$
  - Sostituendo $y_1(t)$ a $y(t)$ nell'EDO data, otteniamo effettivamente che $y'(t) = 0$:
  $$y'(t) = \alpha \cdot 1 \cdot [1 - 1] = \alpha \cdot 1 \cdot 0 = 0$$
- La **seconda soluzione all'EDO** data che riusciamo a trovare è $y_2(t) = 0$, poiché:
  - La derivata della funzione $y_2(t) = 0$ deve essere $y_2'(t) = [y_2(t)]' = 0$
  - Sostituendo $y_2(t)$ a $y(t)$ nell'EDO data, otteniamo effettivamente che $y'(t) = 0$:
  $$y'(t) = \alpha \cdot 0 \cdot [1 - 0] = \alpha \cdot 0 \cdot 1 = 0$$
- A questo punto, sarà la **condizione iniziale** a determinare quale delle due equazioni trovate sia l'unica soluzione del problema:
  - Se $k = 1$, allora solo $y_1(t) = 1$ è in grado di soddisfare la condizione iniziale $y(0) = k$
  - Se $k = 0$, allora solo $y_2(t) = 0$ è in grado di soddisfare la condizione iniziale $y(0) = k$

2. Consideriamo il seguente problema:

$$(c) = \begin{cases} y'(t) = 2y(t) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

- Sapendo che $y(0) = 1$, possiamo affermare che
$$y'(0) = 2y(0) = 2 \cdot 1 = 2$$
- Derivando l'equazione $y'(0) = 2y(0)$, otteniamo che
$$[y'(0)]' = [2y(0)]'$$
$$y''(0) = 2y'(0)$$
dove sappiamo già che $y'(0) = 2$, dunque $y''(0) = 2y'(0) = 2 \cdot 2 = 4$

- Se derivassimo nuovamente, otterremmo che

$$y'''(0) = 2 \cdot y''(0) = 2 \cdot 4 = 8$$

- A questo punto, notiamo che il pattern corrisponde a

$$y^{(n)}(0) = 2y^{(n-1)}(0) = 2^n$$

- Ricordando che il **Polinomio di Taylor** di una funzione corrisponde a

$$T_n(f(x), x_0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

possiamo definire il polinomio di Taylor di $y(t)$ in $x_0 = 0$ come:

$$T_n(y(t), 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}(t - 0)^k$$

- Poiché abbiamo già dimostrato che

$$y^{(n)}(0) = 2^n$$

possiamo riscrivere il polinomio come

$$T_n(y(t), 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{y^{(k)}(0)}{k!}t^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{2^k}{k!}t^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!}$$

- A questo punto, facciamo tendere $n \to +\infty$, ottenendo la seguente serie notevole di Taylor

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(2t)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2t)^k}{k!} = e^{2t}$$

- Notiamo quindi che $y(t) = e^{2t}$ è **l'unica soluzione valida del problema di Cauchy**, poiché essa è sia una soluzione dell'EDO data sia rispetta la condizione iniziale data.

Lo stesso procedimento utilizzato nell'esercizio precedente è applicabile con **qualsiasi altro valore costante**, ossia per qualsiasi equazione differenziale del tipo $y'(t) = \lambda y(t)$, dove $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$y'(t) = \lambda y(t) \implies y(t) = e^{\lambda x}$$

3.3 Equazioni lineari, omogenee e non

3.3.1 EDO lineari omogenee

Vediamo ora il **caso più generico** di quanto appena espresso, ossia un'equazione differenziale nella forma:

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t)$$

Ricordando come la derivata della funzione $f(x) = e^{g(x)}$ sia

$$f(x) = e^{g(x)} \quad \Longrightarrow \quad f'(x) = g'(x) \cdot e^{g(x)}$$

possiamo facilmente concludere che la **funzione** $a(x)$ dell'equazione differenziale corrisponda esattamente alla **derivata** $g'(x)$. Dunque, possiamo affermare che:

$$y'(t) = a(t) \cdot y(t) \quad \Longrightarrow \quad y(t) = e^{A(x)}$$

dove $A(x)$ è la **primitiva** di $a(x)$.

Inoltre, possiamo osservare come se $y_0(t) = e^{A(t)}$ è **una soluzione dell'equazione**, allora **anche** $y_1(t) = C \cdot e^{A(t)t}$ $(\forall C \in \mathbb{R})$ **è una soluzione dell'equazione**, poiché derivando $y_1(t)$ si andrebbe ad ottenere

$$[y_1(t)]' = [C \cdot e^{A(t)}]'$$

$$y_1'(t) = a(t) \cdot \underbrace{C \cdot e^{\lambda t}}_{y_1(t)}$$

$$y_1'(t) = a(t) \cdot y_1(t)$$

la cui soluzione sappiamo già essere $y_1(t) = e^{A(t)}$.

Definition 15. EDO lineare omogenea

Data un'**EDO lineare**, ossia dove sia $y'(t)$ sia $y(t)$ compaiono con termini di grado 0 o 1, ed **omogenea**, ossia dove la derivata non contiene termini costanti aggiuntivi indipendenti dalla funzione $y(t)$, se $y_0(t) = e^{A(t)}$ è una soluzione dell'EDO, allora lo è anche $y_1(t) = C \cdot y_0(t)$ $(\forall C \in \mathbb{R})$:

$$y'(t) = a(t)y(t) \quad \Longrightarrow \quad y(t) = Ce^{A(t)}$$

3.3.2 EDO lineari non-omogenee

Consideriamo ora un'EDO lineare non-omogenea, espressa nella seguente forma:

$$y'(t) = a(t)y(t) + b(t)$$

La **soluzione** di tale equazione può essere scritta come

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t)$$

dove:

1. $y_0(t)$ corrisponde alla **soluzione dell'EDO lineare omogenea associata**, ossia
$$y_0'(t) = a(t)y_0(t)$$
2. $\overline{y}(t)$ corrisponde ad **una soluzione particolare dell'equazione**, ottenuta tramite
$$\overline{y}'(t) = a(t)\overline{y}(t) + b(t)$$

Sappiamo già che la soluzione del punto 1 corrisponde a

$$y_0(t) = Ce^{A(t)}$$

Quanto al punto 2, dobbiamo procedere con un ragionamento intuitivo:

- Ipotizziamo che
$$\overline{y}(t) = h(t)e^{A(t)}$$
- Derivando tale funzione, otteniamo che
$$[\overline{y}(t)]' = [h(t)e^{A(t)}]'$$
$$\overline{y}\,'(t) = h'(t)e^{A(t)} + a(t)\underbrace{h(t)e^{A(t)}}_{\overline{y}(t)}$$
$$\overline{y}\,'(t) = h'(t)e^{A(t)} + a(t)\overline{y}(t)$$
- A questo punto, confrontiamo l'equazione derivata con l'equazione precedentemente definita, ottenendo che
$$\overline{y}\,'(t) = \underbrace{h'(t)e^{A(t)}}_{b(t)} + a(t)\overline{y}(t)$$
$$\overline{y}'(t) = a(t)\overline{y}(t) + b(t)$$

- Quindi, possiamo affermare che

$$h'(t)e^{A(t)} = b(t)$$

$$h'(t) = \frac{b(t)}{e^{A(t)}}$$

$$h'(t) = b(t)e^{-A(t)}$$

$$h(t) = \int b(t)e^{-A(t)}\, dt$$

- A questo punto, possiamo riscrivere la funzione $\overline{y}(t)$ come

$$\overline{y}(t) = h(t)e^{A(t)}$$

$$\overline{y}(t) = e^{A(t)} \left[\int b(t)e^{-A(t)}\, dt \right]$$

Una volta trovate $y_0(t)$ e $\overline{y}(t)$, possiamo dire che **la soluzione dell'EDO lineare non-omogenea** equivale a:

$$y(t) = y_0(t) + \overline{y}(t) = Ce^{A(t)} + e^{A(t)} \left[\int b(t)e^{-A(t)}\, dt \right] =$$
$$e^{A(t)} \left[C + \int b(t)e^{-A(t)}\, dt \right]$$

valida $\forall C \in \mathbb{R}$.