Università "Sapienza" di Roma
Facoltà di Informatica

Calcolo delle Probabilità

Appunti integrati con il libro "The Probability Tutoring Book", Carol Ash

Author
Simone Bianco

5 ottobre 2022

Indice

Capitolo 0

Introduzione

Capitolo 1

Esiti ed Eventi

Prima di poter parlare di probabilità, è necessario definire ciò di cui essa si occupa. Il **calcolo di una probabilità** corrisponde allo studio di un fenomeno osservabile esclusivamente dal punto di vista della possibilità o meno del suo verificarsi.

Consideriamo ad esempio il lancio di una moneta. Tale fenomeno può avere **solo due esiti**, ossia testa o croce. Possiamo rappresentare tale fenomeno sottoforma di insieme, dove i suoi elementi sono tutti gli esiti possibili:

$$S : \{T, C\}$$

Effettuando un esperimento su tale insieme, ossia un lancio, il risultato di tale esperimento rientrerà in un **numero finito di esiti**, rappresentabili tramite un insieme. Tale esperimento viene detto **aleatorio**, mentre l'insieme di tutti gli esiti possibili viene detto **insieme ambiente (o spazio campionario)**.

Consideriamo ora il lancio di un dado. Anche in questo caso, il numero di esiti risulta essere finito: può uscire solo una faccia avente da uno a sei pallini. **Enumeriamo** quindi tutti gli esiti possibili associando un numero ad ogni esito:

$$S : \{\cdot,\ \cdot\cdot,\ \cdot\cdot\cdot,\ \cdot\cdot\cdot\cdot,\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot,\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\} \quad \longrightarrow \quad S : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Analogamente, possiamo enumerare gli esiti del lancio di una moneta:

$$S : \{T, C\} \quad \longrightarrow \quad S : \{0, 1\}$$

Consideriamo ora l'**insieme** A contenente le facce di un dado aventi un numero di pallini inferiore o uguale a tre. Possiamo rappresentare tale insieme in **tre modi**:

- Per **enumerazione**, ossia $A : \{1, 2, 3\}$
- Per **proprietà descrittiva**, ossia $A : \{\texttt{facce di un dado il cui valore è massimo 3}\}$
- Per **notazione matematica**, ossia $A : \{x \in S \,|\, x \leq 3\}$

Abbiamo quindi definito gli elementi di A come appartenenti ad S ($x \in S$), dove S è l'insieme ambiente contenente tutti gli esiti possibili del lancio di un dado. Dunque, ne segue che $A \subset S$ (dunque che $x \in B \implies x \in S$), ossia è un **sottoinsieme dell'insieme ambiente**, che definiamo come **evento**. L'insieme A, quindi, corrisponde all'evento in cui esce una faccia minore o uguale a tre.

Definition 1. Evento

Un **evento** corrisponde ad un **sottoinsieme dell'insieme ambiente**, ossia dell'insieme contenente tutti i possibili esiti di un fenomeno.

1.1 Proprietà degli eventi

Consideriamo l'evento in cui esce una faccia pari. Definiamo tale evento come:

$$A : \{x \in S \,|\, x\%2 = 0\} : \{2, 4, 6\}$$

Riprendiamo anche l'evento già visto in cui esce una faccia minore o uguale a 3:

$$B : \{x \in S \,|\, x \leq 3\} : \{1, 2, 3\}$$

Definiti questi due eventi, possiamo prendere in considerazione l'**evento unione** tra i due, ossia l'evento in cui esce una faccia pari **oppure** minore o uguale a 3:

$$C : A \cup B : \{1, 2, 3, 4, 6\} \text{ dove } x \in A \cup B \iff x \in A \vee x \in B$$

Analogamente, possiamo prendere in considerazione l'**evento intersezione** tra i due, ossia l'evento in cui esce una faccia pari **e anche** minore o uguale a 3:

$$D : A \cap B : \{2\} \text{ dove } x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B$$

Notiamo come quest'ultimo evento corrisponda ad un **singleton** (o singoletto), ossia un insieme di un solo elemento. Tale evento viene detto **evento elementare**.

Immaginiamo ora di voler descrivere l'evento in cui esce una faccia dispari. Come sappiamo, un numero dispari non è altro che un numero non pari. Definiamo quindi tale evento come **evento complementare** dell'evento in cui escono facce pari:

$$A^c : \{x \in S \,|\, x \notin A\}$$

Attenzione: è necessario sottolineare come non basti definire l'evento delle facce dispari come l'evento contenente tutti gli esiti che non sono nell'evento delle facce pari (dunque $A^c \neq \{x \notin A\}$), poiché ciò includerebbe anche gli esiti esterni all'insieme ambiente. Dunque, quando si parla di **evento complementare**, tale evento deve sempre essere **rapportato all'insieme ambiente** (dunque $x \in A^c \implies x \in S$).

Ovviamente, da tale definizione di evento complementare ne segue che l'**evento complementare dell'evento complementare di A** sia l'evento A stesso:

$$(A^c)^c = A$$

Un ulteriore modo per poter definire un evento complementare è tramite l'**esclusione**: eliminando tutti gli esiti appartenenti all'evento A dall'insieme ambiente S, otteniamo l'evento complementare di A:

$$A^c : S \setminus A$$

Volendo rappresentare l'evento contenente le facce minori o uguali a tre e non pari, possiamo definire tale evento in **due modi**:

- L'intersezione tra l'evento delle facce minori o uguali a tre e l'evento delle facce dispari (ossia il complementare delle facce pari)

$$E : B \cap A^c$$

- L'evento contenente gli esiti minori o uguali a tre esclusi gli esiti contenuti nell'evento delle facce pari

$$E : B \setminus A$$

Dunque, ne traiamo che:

$$B \setminus A = B \cap A^c$$

Trattandosi sostanzialmente di insiemi, gli eventi godono anche delle altre proprietà ad essi legati:

- **Proprietà disgiuntiva**

$$A \cap A^c = \emptyset$$

- **Proprietà associativa**

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{e} \quad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

- **Proprietà distributiva**

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad \text{e} \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

- **Legge di De Morgan**

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \quad \text{e} \quad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Dimostrazione:

Ricordiamo che, nell'ambito dell'insiemistica, la notazione $A = B$ indica che l'insieme A coincide esattamente con l'insieme B. Tale affermazione può essere ricondotta alla condizione $A \subseteq B \land B \subseteq A$, poiché l'unico caso possibili in cui A è sottoinsieme proprio di B e B è sottoinsieme proprio di A è quando A e B coincidono.

Dunque, per dimostrare che $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$, è sufficiente dimostrare che:

- $(A \cup B)^c \subseteq A^c \cap B^c$
- $A^c \cap B^c \subseteq (A \cup B)^c$

Consideriamo la seguente unione:

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Se un elemento x appartiene al complementare di tale unione, allora ne segue che esso non appartenga all'unione in se

$$x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c \implies x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

A sua volta, ciò è possibile solo se l'elemento x appartenga al complementare di qualsiasi insieme appartenente a tale unione:

$$x \notin \bigcup_{i=1}^{n} A_i \iff \forall A_i \text{ si ha che } x \in (A_i)^c$$

Quest'ultima condizione, infine, implica che:

$$\forall A_i \text{ si ha che } x \in (A_i)^c \implies x \in \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c$$

Dunque, concludiamo che:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} (A_i)^c$$

La stessa condizione, tuttavia, implica che non esiste un indice i tale che l'elemento x possa essere in A_i

$$\forall A_i \text{ si ha che } x \in (A_i)^c \implies \nexists i \mid x \in A_i$$

Dunque, considerando l'unione di tutte gli A_i insiemi, l'elemento x non può trovarsi in essa, dunque esso sarà necessariamente situato nel complementare di tale unione:

$$\nexists i \mid x \in A_i \implies x \in \left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \right)^c$$

Dunque, concludiamo che:

$$\bigcap_{i=1}^{n}(A_i)^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

Poiché entrambe le condizioni sono verificate, otteniamo che:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \subseteq \bigcap_{i=1}^{n}(A_i)^c\right) \wedge \left(\bigcap_{i=1}^{n}(A_i)^c \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \Longleftrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = \bigcap_{i=1}^{n}(A_i)^c$$

- **Esclusione disgiuntiva (XOR)**

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Dimostrazione:

$$\begin{gathered}
(A \cup B) \setminus (A \cap B) \\
(A \cup B) \cap (A \cap B)^c \\
[(A \cap (A \cap B)^c] \cup [B \cap (A \cap B)^c] \\
[(A \cap (A^c \cup B^c)] \cup [B \cap (A^c \cup B^c)] \\
[(A \cap A^c) \cup (A \cap B^c)] \cup [(B \cap A^c) \cup (B \cap B^c)] \\
[\emptyset \cup (A \cap B^c)] \cup [(B \cap A^c) \cup \emptyset] \\
[A \cap B^c] \cup [B \cap A^c] \\
[A \setminus B] \cup [B \setminus A]
\end{gathered}$$

1.2 Cardinalità e Funzioni indicatrici

Analogamente agli insiemi, con il termine **cardinalità** indichiamo il **numero di esiti contenuti in un evento**. Per essere numerabile, ovviamente, un evento deve possedere una **quantità finita di eventi**.

Indichiamo la cardinalità di un evento con la notazione:

$$|A| = n$$

dove A è l'evento e n è la sua cardinalità.

Dato un evento A, invece, definiamo come **funzione indicatrice di A** (indicata come I_A) la funzione che preso un elemento x in input restituisce **1 se l'elemento appartiene all'evento**, oppure **0 altrimenti**.

Definition 2. Funzione indicatrice

Dato un evento A, la sua **funzione indicatrice** corrisponde a

$$I_A : S \to \{0, 1\} : x \mapsto I_A(x)$$

$$I_A(x) = \begin{cases} 1 & \texttt{se } x \in A \\ 0 & \texttt{altrimenti} \end{cases}$$

Da tale definizione, quindi, ne segue logicamente che:

$$I_A(x) = 1 \iff I_{A^c}(x) = 0$$
$$I_A(x) = 0 \iff I_{A^c}(x) = 1$$

Dunque, dato un qualsiasi evento, si ha che:

$$I_A(x) + I_{A^c}(x) = 1 \qquad \forall x \in S$$

Consideriamo ora le due funzioni indicatrici I_A e I_B. La **funzione indicatrice dell'evento intersezione** $A \cap B$ può essere definita come:

$$I_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 & \texttt{se } x \in A \cap B \\ 0 & \texttt{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \texttt{se } x \in A \land x \in B \\ 0 & \texttt{altrimenti} \end{cases}$$

Poiché tale funzione deve valere 1 solo se $x \in A$ e $x \in B$, ne segue che ciò possa essere **possibile solo se per lo stesso elemento x si ha che $I_A x = 1$ e $I_B(x) = 1$**.

Possiamo quindi definire $I_{A\cap B}$ anche come il prodotto tra $I_A(x)$ e $I_B(x)$, poiché nel caso in cui **una (o entrambe) delle due funzioni restituisca 0** allora anche la funzione indicatrice dell'unione **restituirà 0**.

$$I_{A\cap B} = I_A \cdot I_B$$

Vediamo ora la **funzione indicatrice dell'evento unione** $A \cup B$, definita come:

$$I_{A\cup B}(x) = \begin{cases} 1 & \texttt{se } x \in A \cup B \\ 0 & \texttt{altrimenti} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \texttt{se } x \in A \vee x \in B \\ 0 & \texttt{altrimenti} \end{cases}$$

Cerchiamo quindi un modo matematico per poter calcolare facilmente $I_{A\cup B}(x)$ tramite $I_A(x)$ e $I_B(x)$. Intuitivamente, si potrebbe pensare che la somma tra le due funzioni indicatrici di A e B corrisponda al valore dato da quella dell'unione. Tuttavia, notiamo che:

- Se $I_A(x) = 0$ e $I_B(x) = 0$, allora $I_A(x) + I_B(x) = 0$
- Se $I_A(x) = 1$ e $I_B(x) = 0$, allora $I_A(x) + I_B(x) = 1$
- Se $I_A(x) = 0$ e $I_B(x) = 1$, allora $I_A(x) + I_B(x) = 1$
- Se $I_A(x) = 1$ e $I_B(x) = 1$, allora $I_A(x) + I_B(x) = 2$

Notiamo quindi come l'ultimo caso dia un **risultato sbagliato** rispetto all'output che vorremmo (ossia 1). Il motivo di ciò può essere spiegato comodamente tramite l'**errore di doppio conteggio degli insiemi**:

- Consideriamo i due insiemi $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{0, 2, 4, 5\}$
- L'unione tra i due insiemi risulterà essere $A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
- Si ha quindi che $|A \cup B| \neq |A| + |B|$ (dunque che $6 \neq 4 + 4$). Ciò avviene poiché è stata **conteggiata due volte l'intersezione** $A \cap B$, poiché ogni elemento in tale intersezione (ossia $\{1, 2\}$) è stato contato sia nella **cardinalità di** A sia nella **cardinalità di B**.
- Per ri-bilanciare il conto, quindi, è necessario **sottrarre una volta tale intersezione**, in modo da conteggiarla in una sola delle due cardinalità

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Analogamente, quindi, il **calcolo esatto della funzione indicatrice unione** sarà:

$$I_{A\cup B} = I_A + A_B - I_{A\cap B}$$

Notiamo quindi una stretta relazione tra **cardinalità** e **funzione indicatrice**. Difatti, potremmo usare quest'ultima per descrivere la prima come la **somma di tutti i valori dati dalla funzione indicatrice dell'evento stesso** per ogni elemento dell'insieme:

$$A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} I_A(x_i)$$

Nel caso in cui gli eventi da trattare siano **più di due**, possiamo utilizzare la **proprietà associativa** di cui essi godono per calcolare la loro cardinalità.

- Vogliamo calcolare la **cardinalità dell'insieme** $A \cap B \cap C$. Tramite la proprietà associativa, sappiamo che:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$$
$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = A \cup B \cup C$$

  Dunque, ne traiamo che

$$|A \cap B \cap C| = |(A \cap B) \cap C| = |A \cap B| \cdot |C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|$$

  Poiché ne faremo uso frequentemente, per comodità riscriviamo il **prodotto delle cardinalità** come

$$|A \cap B \cap C| = |A| \cdot |B| \cdot |C| = |ABC|$$

- Per la **cardinalità dell'insieme** $A \cup B \cup C$, le cose risultano un po' più complesse. Anche in questo caso, procediamo con la proprietà associativa:

$$\begin{gathered}
|A \cup B \cup C| = |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\
= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = \\
= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = \\
= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - \{|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap B) \cap (B \cap C)|\} = \\
= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = \\
= |A| + |B| + |C| - |AB| - |AC| - |BC| + |ABC|
\end{gathered}$$

  Notiamo come il risultato corrisponda ancora una volta al **ri-aggiustamento di un doppio conteggio**: sommando i tre insiemi contiamo 2 volte ognuna delle intersezioni a due, necessitando quindi che ognuno di essi venga sottratto una volta. In questo modo, però, abbiamo **aggiunto 3 volte** l'intersezione a tre (contando la somma tra i tre insiemi) e **sottratto 3 volte** la stessa intersezione (rimuovendo le tre intersezioni a due), necessitando quindi che essa venga **ri-conteggiata**

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |AB| - |AC| - |BC| + |ABC|$$

- Analogamente, la **cardinalità dell'insieme** $A \cup B \cup C \cup D$, corrisponderà a:

$$\begin{gathered}
|A \cup B \cup C \cup D| = |(A \cup B \cup C) \cup D| = \\
= ... = \\
= |A| + |B| + |C| + |D| - |AB| - |AC| - |AD| - |BC| - |BD| - |CD| + \\
+ |ABC| + |ABD| + |ACD| + |BCD| - |ABCD|
\end{gathered}$$

Notiamo quindi la presenza di un certo **pattern** durante il calcolo della cardinalità di un'unione:

- **Aggiungiamo** gli n insiemi
- **Sottraiamo** tutte le intersezioni a due
- **Aggiungiamo** tutte le intersezioni a tre
- **Sottraiamo** tutte le intersezioni a quattro
- ...

Infatti, possiamo riscrivere la cardinalità delle due unioni viste precedentemente anche nel seguente **modo compatto**

$$|A \cup B \cup C| = \sum_{i=1}^{3} |A_i| - \sum_{1 \leq 1 < j \leq 3} |A_i A_j| + \sum_{1 \leq 1 < j < k \leq 3} |A_i A_j A_k|$$

$$|A \cup B \cup C \cup D| = \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{1 \leq 1 < j \leq 4} |A_i A_j| + \sum_{1 \leq 1 < j < k \leq 4} |A_i A_j A_k| + \sum_{1 \leq 1 < j < k < h \leq 4} |A_i A_j A_k A_h|$$

dove, ad esempio, la notazione $1 \leq i < j \leq 3$ sottostante alla prima sommatoria indica **tutte tuple di valori possibili** in un range di numeri che va da 1 a 3, dove 3 è il **numero degli insiemi nell'unione**. Analogamente, la notazione $1 \leq i < j < k \leq 3$ indica tutte le triple di valori possibili e così via.

Notiamo anche come il segno di tali sommatorie sia alternato. Difatti, **aggiungiamo** tutte le m-uple in cui m **è un numero dispari**, mentre **sottraiamo** tutte le m-uple in cui m **è un numero pari**. Possiamo quindi generalizzare l'intero concetto a n **insiemi**, utilizzando la seguente notazione iper-compatta:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{k=1}^{n} \left((-1)^{k+1} \cdot \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq n} |A_{i_1} \cdot A_{i_2} \cdot \ldots \cdot A_{i_k}| \right)$$

Alcune volte, però, è difficile calcolare l'esatta cardinalità di alcune unioni tra eventi. In questi casi si preferisce quindi un **calcolo approssimativo**, stabilendo un **limite inferiore** ed un **limite inferiore**, cercando di ridurre il più possibile la differenza tra di essi:

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i A_j|}_{\text{Limite inferiore}} \leq \underbrace{\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| \leq \sum_{i=0}^{n} |A_i|}_{\text{Limite superiore}}$$

Capitolo 2

Metodo standard per la probabilità

2.1 Probabilità di un evento

Considerato l'insieme ambiente "lancio di una moneta non truccata", definito come $S : \{T, C\}$, ci chiediamo quale sia la **probabilità** che si verifichi l'evento "Testa", dunque definito come $A : \{T\}$. Intuitivamente, concludiamo che la probabilità di tale evento sia 50%, dunque $\frac{1}{2}$, poiché tale evento può generare solo due risultati: T o C. Descriviamo quindi tale probabilità come:

$$P(T) = \frac{1}{2}$$

Analogamente, ci chiediamo quale sia la **probabilità** che si verifichi l'evento "faccia maggiore di 2", ossia $A : \{x \in S \mid x > 2\}$, nell'insieme ambiente "lancio di un dado", dunque $S : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Anche in questo caso, il calcolo di tale probabilità risulta intuitivo, poiché vi sono 4 possibili esiti favorevoli rispetto ai 6 esiti totali:

$$P(\texttt{faccia maggiore di 2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Potremmo quindi pensare alla seguente **formula generica**:

$$P(x) = \frac{\texttt{Casi favorevoli}}{\texttt{Casi totali}}$$

Tuttavia, **tale formula risulta incorretta**, poiché in alcuni casi essa da vita ad alcune incongruenze logiche:

- Consideriamo il lancio di due monete, avente **tre esiti**: due volte testa, due volte croce, una volta testa ed una volta croce

  $$S : \{\texttt{Due teste}, \texttt{Due croci}, \texttt{Una testa ed una croce}\}$$

- Se volessimo calcolare la probabilità dell'evento "Una volta testa ed una volta croce", otterremmo il seguente risultato:

  $$P(\texttt{Una testa ed una croce}) = \frac{\texttt{Casi favorevoli}}{\texttt{Casi totali}} = \frac{1}{3}$$

- Tuttavia, tale calcolo risulta inesatto, poiché a livello intuitivo la probabilità dovrebbe essere più alta, poiché abbiamo due modi di verificare tale evento:
  - Primo Lancio: T - Secondo Lancio: C
  - Primo Lancio: C - Secondo Lancio: T
- Difatti, definendo l'insieme ambiente corrispondente al lancio di due monete, otteniamo **4 reali esiti possibili**:

$$S : \{TT, CC, TC, CT\}$$

- Analogamente, definendo rigorosamente l'evento "Una volta testa ed una volta croce", otteniamo **2 esiti possibili**:

$$A : \{TC, CT\}$$

- Dunque, il reale calcolo della probabilità richiesta corrisponderà a:

$$P(\texttt{Una testa ed una croce}) = \frac{|\texttt{Una testa ed una croce}|}{|\texttt{Lancio di due monete}|} = \frac{|A|}{|S|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Definition 3. Calcolo standard di una Probabilità

Dato un insieme ambiente S ed un evento A, dove $A \subseteq S$, la **probabilità** di tale evento corrisponde al **rapporto tra la cardinalità dell'evento e la cardinalità dell'insieme ambiente**:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|}$$

Esempi:

Considerando un mazzo di carte standard (52 carte), vogliamo calcolare la probabilità dell'evento "Pesco un asso o una carta con seme picche".

- Definiamo la situazione in modo rigoroso:

$$S : \{\texttt{Mazzo di carte standard}\}$$

$$A : \{\texttt{Carta asso}\} \text{ dove } A \subseteq S$$

$$B : \{\texttt{Carta picche}\} \text{ dove } B \subseteq S$$

$$A \cup B : \{\texttt{Carta asso o picche}\}$$

- Applichiamo la formula del **modello standard della probabilità**:

$$P(A \cup B) = \frac{|A \cup B|}{|S|} = \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|S|}$$

- In un mazzo standard sono presenti 4 assi (uno per ogni seme) e 13 carte per ogni seme (dunque 13 picche). Ovviamente, questo implica che solo uno dei 4 assi sia un asso di picche.
- Il calcolo richiesto, quindi, si riconduce a:

$$P(A \cup B) = \frac{|A| + |B| - |A \cap B|}{|S|} = \frac{4 + 13 - 1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

Consideriamo ora l'insieme ambiente "Lancio di due dadi", i cui elementi sono denotati come coppie XY, dove X è il primo lancio e Y il secondo:

$$S : \left\{ \begin{array}{cccccc} 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 21 & 22 & 23 & 24 & 25 & 26 \\ 31 & 32 & 33 & 34 & 35 & 36 \\ 41 & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{array} \right\}$$

1. Calcolare la probabilità dell'evento "Somma dei lanci uguale a 5"
   - Definiamo l'evento come:

   $$A : \{XY \in S \,|\, X + Y = 5\}$$

   - Analizzando tutti gli esiti possibili dell'insieme ambiente, gli esiti appartenenti all'evento corrispondono a:

   $$S : \left\{ \begin{array}{cccccc} 11 & 12 & 13 & \color{red}{14} & 15 & 16 \\ 21 & 22 & \color{red}{23} & 24 & 25 & 26 \\ 31 & \color{red}{32} & 33 & 34 & 35 & 36 \\ \color{red}{41} & 42 & 43 & 44 & 45 & 46 \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & 56 \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{array} \right\} \implies A : \{14, 23, 32, 41\}$$

   - La probabilità dell'evento, quindi corrisponde a:

   $$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$$

2. Calcolare la probabilità dell'evento "Secondo lancio maggiore del primo"
   - Definiamo l'evento come:

   $$A : \{XY \in S \,|\, Y > X\}$$

- Analizzando tutti gli esiti possibili dell'insieme ambiente, gli esiti appartenenti all'evento corrispondono a:

$$S : \left\{ \begin{array}{cccccc} 11 & \color{red}{12} & \color{red}{13} & \color{red}{14} & \color{red}{15} & \color{red}{16} \\ 21 & 22 & \color{red}{23} & \color{red}{24} & \color{red}{25} & \color{red}{26} \\ 31 & 32 & 33 & \color{red}{34} & \color{red}{35} & \color{red}{36} \\ 41 & 42 & 43 & 44 & \color{red}{45} & \color{red}{46} \\ 51 & 52 & 53 & 54 & 55 & \color{red}{56} \\ 61 & 62 & 63 & 64 & 65 & 66 \end{array} \right\} \implies A : \left\{ \begin{array}{ccccc} 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 23 & 24 & 25 & 26 & 34 \\ 35 & 36 & 45 & 46 & 56 \end{array} \right\}$$

- La probabilità dell'evento, quindi corrisponde a:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

2.1.1 Calcolo tramite il complemento

Vogliamo calcolare la probabilità dell'evento **"Lanci tutti diversi tra loro"** effettuato su **"Cinque lanci di dadi"**. A differenza degli esempi della sezione precedente, risulterebbe estremamente lungo elencare ed analizzare tutti gli esiti contenuti nell'**insieme ambiente** poiché esso contiene 6^5 esiti possibili.

Possiamo definire quindi tale insieme come il **prodotto cartesiano ripetuto 5 volte sull'insieme "Un lancio di dado"**

$$I : \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
$$S : (I \times I \times I \times I \times I) \to (a, b, c, d, e) : \{\texttt{Cinque lanci di dadi}\}$$

Di conseguenza, definiamo l'evento "Lanci tutti diversi tra loro" come:

$$A : \{(a, b, c, d, e) \in S \mid a \neq b \neq c \neq d \neq e\}$$

Ovviamente, calcolare la **cardinalità dell'evento A** in modo diretto risulta complesso (ricordiamo che $|S| = 6^5$). Scegliamo quindi un **approccio più semplice**: per definizione stessa di **insieme complementare**, si ha che

$$|A^c| = |S| - |A| \iff |A| = |S| - |A^c|$$

Quindi, possiamo **riscrivere** il calcolo della **probabilità dell'evento A** come:

$$P(A) = \frac{|A|}{|s|} = \frac{|S| - |A^c|}{|S|} = 1 - \frac{|A^c|}{|S|}$$

A questo punto, ci basta calcolare la **cardinalità dell'evento complementare di A** (ossia l'evento "Lanci tutti uguali tra loro"), il quale possiede solo 6 esiti possibili:

$$A^c = \{11111, 22222, 33333, 44444, 55555, 66666\}$$

Dunque, la probabilità dell'evento A corrisponde a:

$$P(A) = 1 - \frac{|A^c|}{|S|} = 1 - \frac{6}{6^5} \approx 99.92\%$$

Theorem 1. Passaggio al complemento

Dato un insieme ambiente S ed un evento A, dove $A \subseteq S$, la probabilità dell'evento corrisponde a $1 - P(A^c)$, dove A^c è l'evento complementare ad A su S:

$$P(A) = \frac{|A|}{|S|} = 1 - \frac{|A^c|}{|S|} = 1 - P(A^c)$$

Esempio:

Considerando l'insieme ambiente "Tutte le coppie (carta rossa, carta blu)", vogliamo sapere la probabilità dell'evento "almeno un asso".

Definiamo quindi l'insieme ambiente come:

$$A : \{\texttt{Carte rosse}\} \longrightarrow |A| = 52$$
$$B : \{\texttt{Carte blu}\} \longrightarrow |B| = 52$$
$$S : \{\texttt{Coppie rosso-blu}\} : A \times B \longrightarrow |S| = 52 \cdot 52$$

Successivamente, definiamo l'evento "almeno un asso" come:

$$E : \{\texttt{coppie con asso rosso}\} \longrightarrow |E| = 4 \cdot 52$$
$$F : \{\texttt{coppie con asso blu}\} \longrightarrow |F| = 4 \cdot 52$$
$$C : \{\texttt{coppie con almeno un asso}\} : E \cup F \longrightarrow |C| = |E| + |F| - |E \cap F|$$
$$E \cap F : \{\texttt{coppie con entrambi gli assi}\} \longrightarrow |E \cap F| = 4 \cdot 4$$

La probabilità dell'evento, quindi, corrisponde a:

$$P(C) = \frac{|C|}{|S|} = \frac{|E| + |F| - |E \cap F|}{|S|} = \frac{4 \cdot 52 + 4 \cdot 52 - 4 \cdot 4}{52 \cdot 52} = \frac{400}{2704}$$

Di contraltare, il calcolo tramite il **passaggio al complemento** risulta **immediato** rispetto al precedente:

$$C^c = \{\texttt{coppie senza assi}\} \longrightarrow |C^c| = 48 \cdot 48$$

$$P(C) = 1 - P(C^c) = 1 - \frac{2304}{2704} = \frac{400}{2704}$$

2.2 Figure della Combinatoria

Nella sezione precedente (e in quelle successive) abbiamo utilizzato le **figure della combinatoria** più comuni (disposizioni, anagrammi e combinazioni) per calcolare le cardinalità.

Di seguito, viene fornito un **breve ripasso** di tali figure. Per **approfondimenti**, si consiglia la sezione omonima degli appunti del corso di *"Metodi Matematici per l'Informatica"*.

Definition 4. Figure della Combinatoria

Definiamo come **disposizione con ripetizione di ordine k di n oggetti** una sequenza ordinata $(x_1, x_2, ..., x_k)$ di k oggetti scelti tra gli n totali

$$D'_{n,k} = n \cdot n \cdot n \cdot ... \cdot n = n^k$$

Sia $1 \leq k \leq n$. Definiamo come **disposizione semplice di ordine k di n oggetti** una sequenza ordinata $(x_1, x_2, ..., x_k)$ di k oggetti distinti tra loro scelti tra gli n totali. Una disposizione semplice in cui $k = n$ viene detta **permutazione**.

$$D_{n,k} = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Gli **anagrammi** di un insieme di n lettere, in cui compaiono k gruppi di $n_1, n_2, ..., n_k$ lettere ripetute

$$\#A = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot ... \cdot n_k!}$$

Una **combinazione** è un raggruppamento di k elementi, presi in qualsiasi ordine, formato a partire da n elementi distinti

$$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$