تاریخ انتشار: ۷ دی ۱۳۹۹
تاریخ تحویل: ۱۳ دی ۱۳۹۹

تمرین ها و مطالب سر کلاس مکمل کتاب های معرفی شده هستند و از محتوای هر دو برای طرح سوالات امتحانی استفاده میشود.
در مواردی که مطالب گفته شده در کتاب های معرفی شده موجود باشد به فصل های کتاب مورد نظر اشاره می شود.

۱) روابط زیر را در کلاس بدست آوردیم:

روابط جابه جاگرها Commutation relations

L_x, L_y, and L_z commute with L^2:

$$[\widehat{L}^2, \widehat{L}_x] = [\widehat{L}^2, \widehat{L}_y] = [\widehat{L}^2, \widehat{L}_z] = 0$$

L_x, L_y, and L_z do not commute with each other:

$$[\widehat{L}_x, \widehat{L}_y] = i\hbar \widehat{L}_z$$
$$[\widehat{L}_y, \widehat{L}_z] = i\hbar \widehat{L}_x$$
$$[\widehat{L}_z, \widehat{L}_x] = i\hbar \widehat{L}_y$$

از طرفی طبق تعریف داریم:

$$\widehat{L}^2 = \widehat{L}_x^2 + \widehat{L}_y^2 + \widehat{L}_z^2$$
$$\widehat{L}_+ = \widehat{L}_x + i\widehat{L}_y$$
$$\widehat{L}_- = \widehat{L}_x - i\widehat{L}_y$$

میشود به راحتی ثابت کرد:

$$[\widehat{L}^2, \widehat{L}_+] = [\widehat{L}^2, \widehat{L}_-] = 0$$
$$[\widehat{L}_z, \widehat{L}_\pm] = \hbar \widehat{L}_\pm$$

همانطور که جابه جاگر غیر صفر برای عملگر موقعیت و تکانه به معنی برقراری اصل عدم قطعیت در مورد آن دو عملگر بود $\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2}\left| < [\widehat{A}, \widehat{B}] >_\psi \right|$ در اینجا هم روابط عدم قطعیت برای عملگرهایی که خاصیت جابجایی ندارند Do not commute برقرار است:

$$\Delta L_x \Delta L_y \geq \frac{\hbar}{2}\left| < \widehat{L}_z > \right|$$
$$\Delta L_y \Delta L_z \geq \frac{\hbar}{2}\left| < \widehat{L}_x > \right|$$
$$\Delta L_z \Delta L_x \geq \frac{\hbar}{2}\left| < \widehat{L}_y > \right|$$

با توجه به روابط بالا ابتدا به سوالات مفهومی زیر فکر کنید و بعد قدم به قدم با اثبات روابط ریاضی خواسته شده به جواب های خود شکل ریاضی ببخشید:

دیدیم که هماهنگ های کروی یا **spherical harmonics** (Y_l^m)، توابع ویژه یا **eigenfunction** های مشترک دو عملگر **L^2** و **L_z** هستند:

$$\widehat{L}_z Y_l^m(\theta, \phi) = m \hbar \, Y_l^m(\theta, \phi)$$

$$\widehat{L}^2 Y_l^m(\theta, \phi) = \hbar^2 \, l\,(l+1)\, Y_l^m(\theta, \phi)$$

اینکه ما در **state** یا حالت Y_0^0 باشیم یعنی چه؟ **l=m=0**، آیا هیچ تکانه زاویه ای نداریم؟ مقدار چشمداشتی یا **expectation value** برای عملگرهای **<L^2>** و **<L_z >** صفر است؟ **<L_x >** و **<L_y >** چطور؟ چه شکل فضایی این خاصیت را دارد؟ آیا شکل فضایی جواب شما با آنچه در شکل ۱ و شکل ۲ میبینید تطابق دارد؟

حالت Y_1^0 چطور؟ آیا این حالت تکانه زاویه ای دارد؟ در جهت **z** چطور؟ تکانه زاویه ای در جهت **z** یعنی چرخش در صفحه **xy**، یعنی شکل فضایی **state** گستردگی در این صفحه دارد، آیا جواب شما تصویر این حالت در شکل های ۱ و ۲ را تایید می کند؟

حالت Y_1^1 چطور؟ یا حالت کلی **m = l**! آیا چون بیشینه **m** همان **l** هست، کل تکانه زاویه ای در جهت **z** قرار گرفته است؟ اگر فرض کنیم که اینطور است، یعنی **$L_x = L_y = 0$**، پس اصل عدم قطعیت که در بالا دیدیم چه میشود؟ در تصویر چه میبینید؟ چرا $\left|Y_1^1\right|^2$ که به صورت یک نان دونات شکل میباشد، به صورت یک دیسک مسطح نیست؟ آیا این بدان معنی نیست که عدم قطعیتی در $\Delta L_x \Delta L_y$ وجود دارد؟

ب) تصور کنید که ذره ای در یکی از حالت های ویژه هماهنگ های کروی نرمالایز شده قرار دارد (Y_l^m)، درست است که کل تابع موج به صورت هماهنگ کروی نیست ولی متناسب است: $\psi \propto Y_l^m$ ، $<\psi|\psi>= 1$

الف) نشان دهید که در این حالت $<\widehat{L}_x> \;=\; <\widehat{L}_y> \;=\; 0$

راهنمایی: از اپراتور های افزاینده $\widehat{L}_+$ و کاهنده $\widehat{L}_-$ استفاده کنید.

ب) نشان دهید $<\widehat{L}_x^{\,2}> = <\widehat{L}_x^{\,2}> = \frac{\hbar^2}{2}[l(l+1) - m^2]$

ج) به سوالات مفهومی بالا برگردید و جواب های خود را دوباره ارزیابی کنید. آیا ممکن است تمام مولفه های تکانه زاویه ای همزمان صفر شوند؟

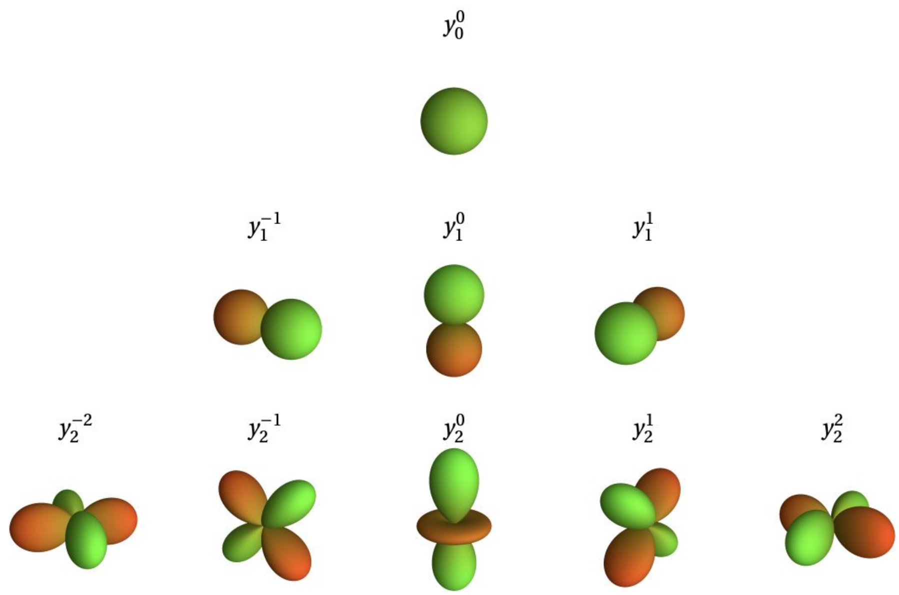
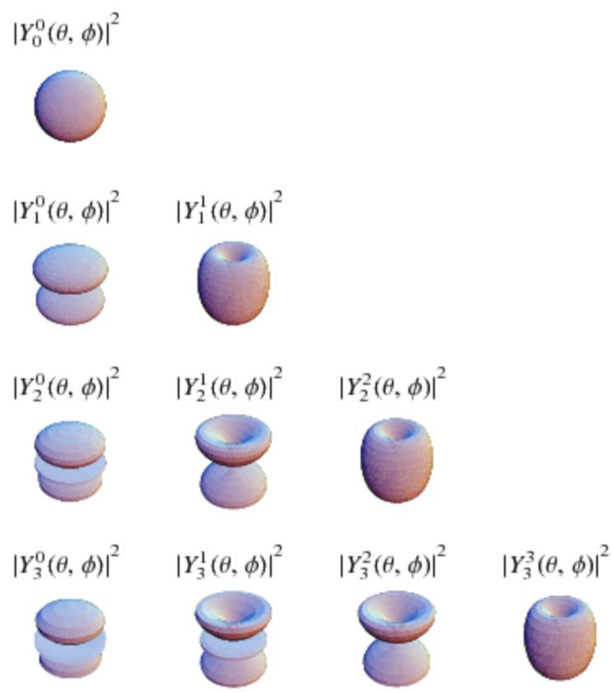


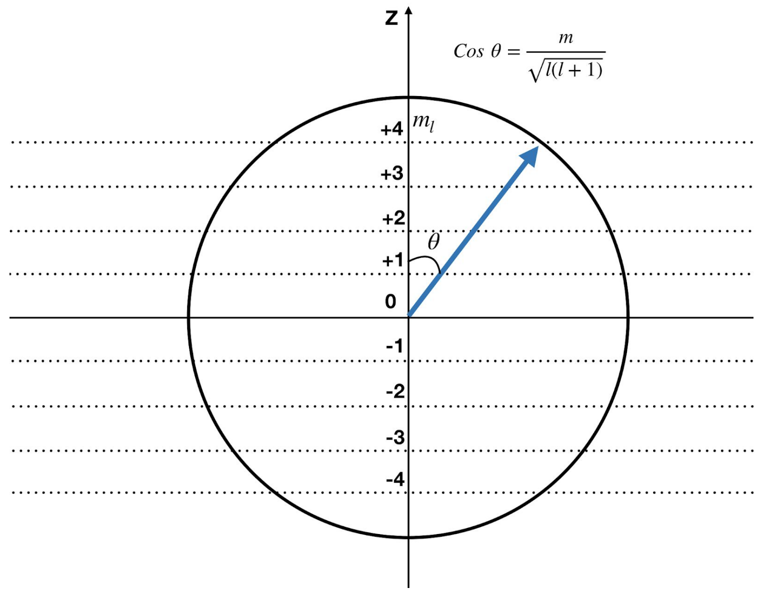
Figure B.1: Plots of the real-valued spherical harmonic basis functions. Green indicates positive values and red indicates negative values.

شکل ۱: تصویر بخش حقیقی هماهنگ های کروی.



شکل ۲: تصویر تابع احتمال یا توان دوم اندازه هماهنگ های کروی.

۲) در کلاس نشان دادیم که چرخش و اینکه تابع موج باید تک مقداری باشد باعث میشود که مقدار تکانه زاویه ای در جهت z، گسسته شود.در واقع تصویر تکانه زاویه ای روی محور z گسسته میشود. این اتفاق مختص مکانیک کوانتومی است. در این تمرین سعی میکنیم میزان گسستگی در دنیای کلاسیک را بدست آوریم:
ابتدا با توجه به شکل ۳، نشان دهید $Cos\,\theta = m/(l(l+1))^{0.5}$



شکل ۳: بردار تکانه زاویه ای و تصویر آن روی محور z

راهنمایی: از دو رابطه ی زیر مقدار بردار آبی $\langle L \rangle$ و تصویرش بر محور z یا $\langle L_z \rangle$ را بدست آورید:

$$\widehat{L}_z Y_l^m(\theta,\phi) = m\hbar\, Y_l^m(\theta,\phi)$$
$$\widehat{L}^2 Y_l^m(\theta,\phi) = \hbar^2\, l\,(l+1)\, Y_l^m(\theta,\phi)$$

توپ سختی داریم با جرم ۲۵۰ گرم و شعاع ۴ سانتیمتر که با سرعت ۵ دور در ثانیه در حال گردش است. مقدار تکانه زاویه ای l و حداقل زاویه ای که بردار تکانه زاویه ای با محور خاصی تشکیل میدهد را حساب کنید.
راهنمایی: ابتدا تکانه زاویه ای توپ را حساب کنید $I\omega$. $I = mr^2$ ، که در آن r شعاع ژیراسیون است که با شعاع کره طبق $r = \sqrt{(\frac{2}{5})}a$ مرتبط است. سپس تکانه بدست آمده را با $\langle L \rangle$ برابر قرار داده و سپس $Cos\,\theta$ و θ را بدست آورید. میتوانید از تقریب زیر برای $\theta << 1$ استفاده کنید.

$$(1+x)^2 = 1 + 1/2\,x + \ldots$$
$$1/(1+x) = 1 - x + \ldots$$
$$Cos\,\theta = 1 - 1/2\,\theta^2 + \ldots$$

آزمون خوبی داشته باشید،
نگار اشعری آستانی