تاریخ انتشار: ۱۸ آبان ۱۳۹۹
تاریخ تحویل: ۳۰ آبان ۱۳۹۹

تمرین ها و مطالب سر کلاس مکمل کتاب های معرفی شده هستند و از محتوای هر دو برای طرح سوالات امتحانی استفاده میشود. در مواردی که مطالب گفته شده در کتاب های معرفی شده موجود باشد به فصل های کتاب مورد نظر اشاره می شود.

۱) رابطه جابجایی یا کامیوتیتور [A,B] را برای حالات زیر بدست آورید: (تمرین ۱۱ فصل ۴ مک کوآری)

$A = \frac{d^2}{dx^2},\ B = x$

$A = \frac{d}{dx} - x,\ B = \frac{d}{dx} + x$

$A = \int_0^x dx,\ B = \frac{d}{dx}$

$A = \frac{d^2}{dx^2} - x,\ B = \frac{d}{dx} + x^2$

۲) سرعت حرکت ذره و موج الکترون

قصد داریم سرعت الکترون را با توجه به روابط Planck و de Broglie به دست آوریم. به روابط زیر دقت کنید:

انرژی جنبشی الکترونی را که از یک لوله پرتو کاتدی (Cathode ray tube) در حال عبور است در نظر بگیرید:

E = ½ mV^2 V = Speed of the electron,
Speed of the wave = λ f
E = h f ⇒ <u>f = E / h = ½ mV^2/h</u>
mV = P = h / λ ⇒ <u>λ = h / (m V)</u>

⇒ Speed of the wave λ f = h / (m V) * ½ mV^2/h = ½ V !!!

طبق روابط بالا سرعت ذره و موج الکترون با هم متفاوت و در واقع سرعت موج نصف سرعت ذره است! چطور یکی از دیگری جا نمی ماند؟!!! این پدیده را توضیح دهید!
راهنمایی: از مفهوم Wave packet و سرعت فاز در مقایسه با سرعت گروهی استفاده کنید.

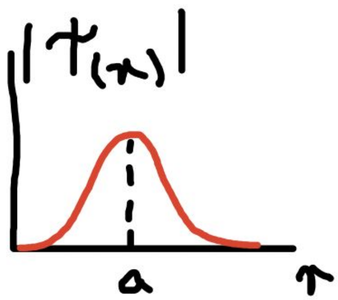
۳) حد بالای رابطه ی عدم قطعیت (فصل ۴ شانکار + تمرین های سری دوم دانشگاه MIT OpenCourseWARE)

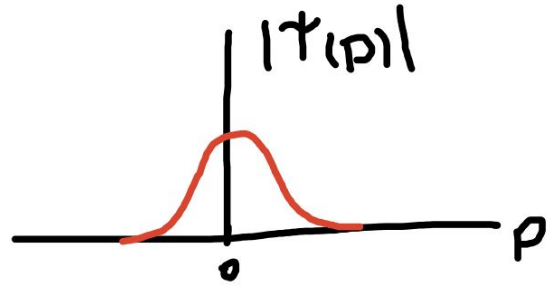
در این تمرین قصد داریم تابع موجی (تابع موج گاوسی) را بررسی کنیم که اصطلاحا رابطه عدم قطعیت را اشباع می کند:

The Gaussian happens to saturate the lower bound of the uncertainty relation

$\Delta X \,.\, \Delta P \;=\; \hbar/2$

این تابع موج همچنین تابعی شاخص است زیرا که هم پوزیشن به نسبت معینی دارد و هم مومنتوم به نسبت معین:





تابع موج گاوسی زیر را در نظر بگیرید و مراحل زیر را به ترتیب انجام دهید:

$$\psi(x) \ = \ A\ exp(-(x-a)^2/2\Delta^2)$$

الف) تابع بالا را نرمالایز کنید

ب) احتمال حضور الکترون در فاصله x تا x + dx یا $(P(x))\,dx$ را بدست آوردید.

ج) عدم قطعیت در مکان را حساب کنید: $\Delta x = sqrt(<x^2> \ - \ <x>^2)$

د) حال قصد داریم مراحل بالا (احتمال وجود تکانه ای به خصوص، عدم قطعیت در تکانه) را برای متغیر تکانه تکرار کنیم ولی پیش از آن با استفاده از روابط فوریه و تعاریف داده شده، روابط کاربردی زیر را ثابت کنید و با استفاده از آنها مراحل فوق را برای تکانه تکرار کنید.

روابط فوریه:

$$f(x) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk\ e^{ikx}\, \overline{f}(k)$$

$$\overline{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx\ e^{-ikx} f(x)$$

تعاریف:

$$<x> \ = \int dx\ P(x)\ x$$

$$<\widehat{p}^{\,n}> \ = \int dx\ \psi^*(x)\, \widehat{p}^{\,n}\ \psi(x)$$

$$\widehat{p} = -i\hbar \frac{\delta}{\delta x}$$

د-۱) ثابت کنید:

$$<\widehat{p}> \ = \int dk\ \ |\overline{\psi}(k)|^2\ \hbar k$$

$$<\hat{p}^2> = \int dk \; |\bar{\psi}(k)|^2 (\hbar k)^2$$

$$<f(\hat{p})> = \int dk \; |\bar{\psi}(k)|^2 f(\hbar k)$$

د-۲) حال با توجه به روابط بالا ، $\bar{\psi}(k)$ ، $P(p) = |\bar{\psi}(k)|^2$ ، $<\hat{p}>$ و Δp را حساب کنید.

آیا حد بالای رابطه ی عدم قطعیت برای $\Delta x \,.\, \Delta p$ به دست آمد؟

ه) نشان دهید که اگر تابع موج حقیقی باشد $<\hat{p}> = 0$

راهنمایی: نشان دهید تابع احتمال برای $\pm p$ برابر است.

و) نشان دهید اگر میانگین تکانه برای $\psi(x)$ برابر با $<\hat{p}>$ باشد، میانگین تکانه برای $\psi(x)exp(ip_0x/\hbar)$ ، برابر با $<\hat{p}> + p_0$ میباشد.

محاسبات خوبی داشته باشید!

مریم میرزا عبداللهی ها
نگار اشعری