Capítulo 4

Ecuaciones recurrentes lineales

Este capítulo se dedica al estudio de recurrencias lineales, un tipo especial de ecuaciones que definen una sucesión de números reales

$$\{x_n\} = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$$

de forma recursiva, es decir, donde cada término se define en función de los términos precedentes. Una recurrencia lineal tiene que ir acompañada de condiciones iniciales que nos brindan información sobre los primeros términos de la sucesión.

4.1. Introducción a las recurrencias lineales

Definición 13. Una ecuación de la forma $x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$, para $n > k$, que expresa el término n-ésimo de una sucesión $\{x_n\}$ en función de k términos anteriores se denomina ecuación de recurrencia o simplemente recurrencia de orden k. Las recurrencias de la forma

$$x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} = 0$$

se denominan recurrencias lineales homogéneas, mientras las recurrencias de la forma

$$x_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k} = R_n,$$

donde R_n (no nulo) en general depende de n, se denominan recurrencias lineales no homogéneas.

Nótese que dados los valores iniciales $x_0, x_1, \dots, x_{k-1}$, la recurrencia

$$x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k})$$

tiene una única solución dada por

$$\begin{aligned} x_k &= f(x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_0) \\ x_{k+1} &= f(x_k, x_{k-1}, \dots, x_1) \\ x_{k+2} &= f(x_{k+1}, x_k, \dots, x_2) \\ &\dots \end{aligned}$$

El siguiente problema de la reproducción de conejos fue enunciado por Leonardo de Pisa[1] a principios del siglo XIII.

Ejemplo 72. Supongamos que tenemos un conejo macho y una hembra recién nacidos. Cada pareja es capaz de reproducirse al cabo de un mes de haber nacido y produce, a partir de este momento, otro macho y otra hembra cada mes. Si no se muere ninguno, ¿cuántos conejos tendremos al cabo de un año?

Solución: Para obtener una ecuación recurrente que representa el enunciado nos situamos al final del mes k-ésimo ($k \geq 2$). Tendremos tantas parejas de conejos como las que teníamos al final del mes anterior $k-1$, más las parejas nacidas en el mes actual k. Ahora bien, en el mes k habrán nacido tantas parejas como las que había al final del mes $k-2$ (dado que están un mes antes de poder procrear). Así, pues, si x_n representa el total de parejas de conejos al final del mes n, entonces

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2}, \qquad \forall n \geq 2,$$

con $x_0 = x_1 = 1$, puesto que inicialmente y al final del primer mes sólo había una pareja. La solución para el número de parejas de conejos al cabo de doce meses será el término $x_{12} = x_{11} + x_{10}$. Por sustitución progresiva vamos obteniendo $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 5$, o sea la sucesión $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots)$. Por lo tanto se obtienen $x_{12} = 233$ parejas al cabo de un año.

Ejemplo 73. Dibuja $n \geq 0$ rectas en el plano de tal manera que no haya dos de ellas que sean paralelas ni tres que se corten en un mismo punto. Calcula cuántas regiones (x_n) determinarán las n rectas.

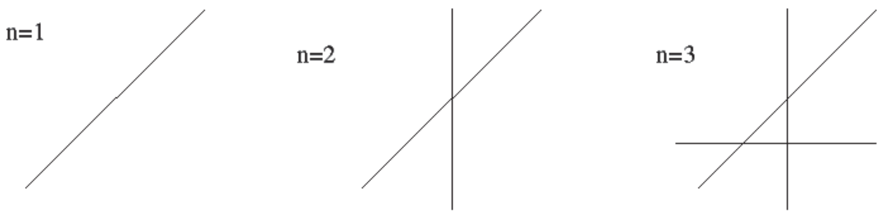

Figura 4.1: Figura 4.1: Rectas en el plano.

Solución: En la Figura 4.1 vemos el caso de $n = 1, 2$ o 3 rectas, donde se forman, respectivamente, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$ y $x_3 = 7$ regiones.

[1]Leonardo de Pisa, también conocido como Fibonacci (hijo de Bonaccio), fue un matemático italiano que jugó un importante papel en la introducción en Europa del sistema de numeración indo-arábigo actualmente utilizado. Se le conoce sobre todo por la invención de la sucesión que lleva su nombre, surgida como consecuencia del estudio del crecimiento de las poblaciones de conejos.

Nótese que la n-ésima recta trazada añade n regiones a las que se habían formado con las $n-1$ rectas precedentes. Así,

$$x_n = x_{n-1} + n \quad \forall n \geq 1$$

siendo $x_0 = 1$.

Ejemplo 74. Tenemos que subir una escalera de $n \geq 1$ peldaños. Decidimos, en cada paso, subir un peldaño o bien subir dos. Con estas condiciones calcula de cuántas maneras diferentes podemos llegar arriba.

Solución: El total de maneras, x_n, de subir la escalera lo podemos descomponer en dos subtotales. El total de maneras en que hemos subido un peldaño en el primer paso y nos queda, por lo tanto, una escalera de $n-1$ peldaños, más el total de maneras en que hemos subido dos peldaños en el primer paso, donde nos queda todavía una escalera de $n-2$ peldaños para subir. Así

$$x_n = x_{n-1} + x_{n-2} \quad \forall n \geq 3$$

siendo $x_1 = 1; x_2 = 2$. Nótese que hemos obtenido la misma recurrencia lineal de la sucesión de Fibonacci, Ejemplo 72, pero con diferentes condiciones iniciales.

4.2. Recurrencias lineales de orden uno

Busquemos la solución general de la recurrencia lineal de orden 1:

$$x_n = rx_{n-1} + R_n, \quad n \geq 1.$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
x_1 &= rx_0 + R_1 \\
x_2 &= rx_1 + R_2 \\
&= r(rx_0 + R_1) + R_2 \\
&= r^2x_0 + rR_1 + R_2 \\
x_3 &= rx_2 + R_3 \\
&= r(r^2x_0 + rR_1 + R_2) + R_3 \\
&= r^3x_0 + r^2R_1 + rR_2 + R_3 \\
&\dots \\
x_n &= r^nx_0 + \sum_{j=1}^{n} r^{n-j}R_j.
\end{aligned}$$

Ejemplo 75. Encuentra una fórmula explícita para la sucesión definida por la siguiente ecuación recurrente de orden uno

$$x_n = x_{n-1} + 2n \qquad \forall n \geq 1,$$

siendo $x_0 = 3$.

Solución: En este caso $r = 1$ y $R_n = 2n$, de ahí que la solución es

$$x_n = 3 + \sum_{j=1}^{n} 2j = 3 + 2\sum_{j=1}^{n} j = 3 + n(n+1).$$

4.3. Recurrencias lineales de orden superior a uno

Ejemplo 76. Encuentra fórmulas explícitas para las sucesiones que cumplan la siguiente ecuación recurrente homogénea de orden 2.

$$x_n - x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0 \qquad \forall n \geq 2.$$

Solución: Buscamos una solución de la forma t^n. Al sustituir en la ecuación obtenemos.

$$t^n - t^{n-1} - 6t^{n-2} = 0.$$

De ahí que

$$t^{n-2}(t^2 - t - 6) = 0.$$

Tenemos que,

$$t^2 - t - 6 = (t+2)(t-3)$$

por lo tanto, las raíces son $t = -2$ y $t = 3$.

Así, dos soluciones de la ecuación son las sucesiones

$$1, -2, (-2)^2, (-2)^3, \ldots, (-2)^n, \ldots \text{ y } 1, 3, 3^2, 3^3, \ldots, 3^n, \ldots$$

Nótese que la sucesión

$$s_n = (-2)^n + 3^n$$

formada por la suma de las dos soluciones también es solución. Efectivamente,

$$\begin{aligned}((-2)^{n-1} + 3^{n-1}) + 6((-2)^{n-2} + 3^{n-2}) &= -2(-2)^{n-2} + 3 \cdot 3^{n-2} + 6((-2)^{n-2} + 3^{n-2}) \\ &= 4(-2)^{n-2} + 9 \cdot 3^{n-2} \\ &= (-2)^n + 3^n \\ &= s_n.\end{aligned}$$

Este hecho no es característico de este ejemplo, sino que corresponde al caso general, tal como veremos a continuación.

Definición 14. Dada una ecuación recurrente homogénea $x_n + ax_{n-1} + bx_{n-2} = 0$, la ecuación $t^2+at+b=0$ se denomina ecuación característica de dicha ecuación recurrente y el polinomio $P(t) = t^2 + at + b$ se denomina polinomio característico.

Teorema 19. *Si λ es una raíz del polinomio característico $P(t) = t^2 + at + b$, entonces $\{\lambda^n\}$ es una solución de la ecuación recurrente homogénea $x_n + ax_{n-1} + bx_{n-2} = 0$.*

Demostración. Como λ es una raíz del polinomio característico $P(t) = t^2 + at + b$, tenemos que $\lambda^{n-2}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$ o, equivalentemente, $\lambda^n + a\lambda^{n-1} + b\lambda^{n-2} = 0$. Por lo tanto, $\{\lambda^n\}$ es una solución de la ecuación recurrente $x_n + ax_{n-1} + bx_{n-2} = 0$. □

Teorema 20. *Si $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ son soluciones de la ecuación recurrente homogénea $x_n = ax_{n-1} + bx_{n-2}$, entonces, para cada par de números $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la sucesión $\{s_n\}$, donde*

$$s_n = \alpha p_n + \beta q_n, \qquad \forall n \geq 0,$$

también es solución de la ecuación.

Demostración. Si $\{p_n\}$ y $\{q_n\}$ son soluciones de la ecuación recurrente, entonces

$$\begin{array}{l} p_n = ap_{n-1} + bp_{n-2} \\ q_n = aq_{n-1} + bq_{n-2} \;\; (\forall n \geq 2). \end{array}.$$

Tomemos $s_n = \alpha p_n + \beta q_n$ $(\forall n \geq 0)$. Ahora, $\forall n \geq 2$ tenemos que

$$\begin{aligned} s_n &= \alpha p_n + \beta q_n \\ &= \alpha(ap_{n-1} + bp_{n-2}) + \beta(aq_{n-1} + bq_{n-2}) \\ &= a(\alpha p_{n-1} + \beta q_{n-1}) + b(\alpha p_{n-2} + \beta q_{n-2}) \\ &= as_{n-1} + bs_{n-2} \end{aligned}$$

y esto quiere decir que $\{s_n\}$ es también una secuencia que verifica la ecuación recurrente. □

Teorema 21. *Si λ_1 y λ_2 son raíces diferentes del polinomio carácterístico de la ecuación recurrente homogénea de orden dos $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2}$, entonces, para toda solución $\{y_n\}$ de dicha ecuación, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que $y_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$.*

Demostración. Por los Teoremas 19 y 20 sabemos que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple que $\alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$ satisface la recurrencia del enunciado. Ahora, sea $\{y_n\}$ una solución arbitraria de dicha recurrencia. Para que se cumpla $y_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$ para todo n, se tiene que cumplir que α y β sean solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n \\ y_{n+1} &= \alpha\lambda_1^{n+1} + \beta\lambda_2^{n+1}. \end{aligned}$$

Como $a_2 \neq 0$, tenemos que $\lambda_1 \neq 0$ y $\lambda_2 \neq 0$, de ahí que el determinante de la matriz del sistema es diferente de cero:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1^n & \lambda_2^n \\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} \end{vmatrix} = \lambda_1^n \lambda_2^n (\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0.$$

Por lo tanto, concluimos que toda solución de la ecuación $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}$ se obtiene como combinación lineal de λ_1^n y λ_2^n. □

Si no tenemos en cuenta las condiciones iniciales, hay infinitas sucesiones que cumplen la ecuación recurrente (α y β pueden tomar valores cualesquiera). Si tenemos en cuenta las condiciones iniciales, específicas para la ecuación, hará falta determinar el valor de las constantes α y β resolviendo un sistema de ecuaciones. En este caso habrá una única sucesión que será solución.

Ejemplo 77. Busca la única sucesión que cumple la ecuación recurrente del ejemplo 76

$$x_n - x_{n-1} - 6x_{n-2} = 0 \qquad \forall n \geq 2$$

con las condiciones iniciales $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Solución: Tal como hemos visto en el ejemplo 76, la ecuación recurrente tiene como soluciones $(-2)^n$ y 3^n. Además, por la proposición 20 sabemos que las sucesiones $\alpha(-2)^n + \beta 3^n$ también son soluciones para cualquier par de constantes α y β. Si tomamos las condiciones iniciales $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 = \alpha(-2)^0 + \beta 3^0 = \alpha + \beta \\ x_1 &= 1 = \alpha(-2)^1 + \beta 3^1 = -2\alpha + 3\beta \end{aligned}$$

y, de aquí, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta \\ 1 &= -2\alpha + 3\beta \end{aligned}$$

que tiene la solución $\alpha = -\dfrac{1}{5}$, $\beta = \dfrac{1}{5}$. Por lo tanto, la única solución que verifica las condiciones iniciales es

$$x_n = -\frac{1}{5}(-2)^n + \frac{1}{5}3^n.$$

Ejemplo 78. Determina la solución de la ecuación recurrente del Ejemplo 72 (sucesión de Fibonacci)

$$x_n - x_{n-1} - x_{n-2} = 0 \qquad \forall n \geq 2$$

con condiciones iniciales $x_0 = x_1 = 1$.

Solución: la ecuación característica de la ecuación recurrente es $t^2 - t - 1 = 0$. Las raíces son

$$t = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Así, la solución general es

$$x_n = \alpha \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \beta \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

Si tomamos las condiciones iniciales $x_0 = x_1 = 1$ obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= \alpha + \beta \\ 1 &= \alpha \left(\tfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right) + \beta \left(\tfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

de donde resulta $\alpha = \dfrac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$, $\beta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$. Por tanto, el término general viene dado por

$$x_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

o, lo que es lo mismo,

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right).$$

Ejemplo 79. Determina la solución de la ecuación recurrente

$$x_n - 2x_{n-1} + 2x_{n-2} = 0 \qquad \forall n \geq 2$$

con condiciones iniciales $x_0 = x_1 = 2$.

Solución: La ecuación característica de la ecuación recurrente es $t^2 - 2t + 2 = 0$. Las raíces $t = 1 \pm i$ son complejas. Como

$$(1 \pm i)^n = 2^{\frac{n}{2}} e^{\pm i \frac{\pi}{4} n} = (\sqrt{2})^n \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) \pm i \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{4}\right) \right)$$

la solución general

$$x_n = \alpha\,(1+i)^n + \beta\,(1-i)^n$$

se expresa como

$$x_n = 2^{\frac{n}{2}} \left(k_1 \cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + k_2 \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{4}\right) \right),$$

donde $k_1 = \alpha + \beta$ y $k_2 = (\alpha - \beta)i$. Si tomamos ahora las condiciones iniciales $x_0 = 1$ y $x_1 = 2$, obtenemos

$$\begin{aligned} 1 &= k_1 \\ 2 &= k_1 + k_2 \end{aligned}$$

de donde resulta $k_1 = k_2 = 1$. Por tanto, el término general viene dado por

$$x_n = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos\left(n\frac{\pi}{4}\right) + \operatorname{sen}\left(n\frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Consideremos ahora el caso en que la ecuación característica tiene una única raíz doble.

Teorema 22. *Si la ecuación característica $t^2 - a_1 t - a_2 = 0$ tiene una raíz p doble, entonces, las sucesiones $\{p^n\}$ y $\{np^{n-1}\}$ verifican la ecuación recurrente $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}$, , para todo $n \geq 2$.*

Demostración. Si p es una raíz de multiplicidad dos del polinomio

$$f(t) = t^2 - a_1 t - a_2 \tag{4.1}$$

definido por la ecuación característica, entonces $f(p) = 0$ y $f'(p) = 0$ (toda raíz doble de un polinomio también anula a su derivada). Así, podemos buscar una solución alternativa a $\{ p^n \}$ a través de la derivada. Multiplicando ambos miembros de (4.1) por t^{n-2} obtenemos

$$t^{n-2} f(t) = t^n - a_1 t^{n-1} - a_2 t^{n-2}$$

y, derivando esta expresión respecto a t,

$$(n-2)t^{n-3} f(t) + t^{n-2} f'(t) = nt^{n-1} - a_1(n-1)t^{n-2} - a_2(n-2)t^{n-3},$$

donde la parte izquierda se anula, para cada n, cuando $t = p$. Es decir, para todo n,

$$np^{n-1} - a_1(n-1)p^{n-2} - a_2(n-2)p^{n-3} = 0.$$

Así, la sucesión $\{ np^{n-1} \}$ también es una solución de la ecuación recurrente. □

Teorema 23. *Si λ es una raíz doble del polinomio carácterístico de la ecuación recurrente homogénea $x_n = a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2}$, entonces, para toda solución $\{y_n\}$ de dicha ecuación, existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tales que $y_n = \alpha\lambda^n + \beta n \lambda^{n-1}$.*

Demostración. En primer lugar, nótese que $\lambda \neq 0$. Por los Teoremas 20 y 4.1, sabemos que para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, la sucesión $\{\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^{n-1}\}$ es solución de la recurrencia. Ahora, sea $\{y_n\}$ una solución arbitraria de dicha recurrencia. Para que se cumpla $y_n =$

$\alpha\lambda^n + \beta n\lambda^{n-1}$ para todo n, se tiene que cumplir que α y β sean solución del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} y_n &= \alpha\lambda^n + \beta n\lambda^{n-1} \\ y_{n+1} &= \alpha\lambda^{n+1} + \beta(n+1)\lambda^n. \end{aligned}$$

Como el determinante de la matriz del sistema es

$$\begin{vmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ \lambda^{n+1} & (n+1)\lambda^n \end{vmatrix} = \lambda^{2n} \neq 0,$$

concluimos que toda solución de la ecuación $x_n = a_1x_{n-1} + a_2x_{n-2}$ se obtiene como combinación lineal de $\{\lambda^n\}$ y $\{n\lambda^{n-1}\}$. □

Ejemplo 80. Determina la solución de la ecuación recurrente

$$x_n = 2x_{n-1} - x_{n-2} \qquad \forall n \geq 2$$

con $x_0 = 1$, $x_1 = 2$.

Solución: La ecuación característica viene dada por

$$t^2 - 2t + 1 = 0$$

que podemos escribir como

$$(t-1)^2 = 0$$

es decir, $t = 1$ es una raíz doble. Por lo tanto, la solución general de la ecuación será, pues, de la forma

$$x_n = \alpha \cdot 1^n + \beta \cdot n$$

y, teniendo en cuenta las condiciones iniciales, formamos el sistema

$$\begin{aligned} x_0 &= 1 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0 = \alpha \\ x_1 &= 2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 = \alpha + \beta \end{aligned}$$

que tiene como solución $\alpha = \beta = 1$. Así, la solución que verifica las condiciones iniciales es

$$x_n = 1 + n.$$

En los casos de ecuaciones recurrentes de orden superior a 2 procederemos por analogía al caso de ecuaciones de orden 2.

Ejemplo 81. Determina la solución general de la ecuación recurrente

$$x_n - 6x_{n-1} + 12x_{n-2} - 8x_{n-3} = 0.$$

Solución: La ecuación característica es

$$t^3 - 6t^2 + 12t - 8 = 0 \iff (t-2)^3 = 0.$$

Dado que tiene una única raíz $t = 2$ de multiplicidad 3 podemos formar las tres soluciones

$$x_n = 2^n, \quad x_n = n\,2^{n-1}, \quad x_n = n(n-1)\,2^{n-2}$$

así, la solución general es

$$x_n = \alpha\,2^n + \beta n\,2^{n-1} + \gamma n(n-1)2^{n-2}$$

α, β y γ constantes.

Ejemplo 82. Determina la solución general de la ecuación recurrente

$$x_n - 9x_{n-1} + 15x_{n-2} + 25x_{n-3} = 0.$$

Solución: La ecuación característica es $t^3 - 9t^2 + 15t + 25 = 0 \iff (t-5)^2(t+1) = 0$. Como tiene una raíz doble $t = 5$ y una raíz simple $t = -1$, podemos formar las tres soluciones $x_n = 5^n$, $x_n = n\,5^{n-1}$ y $x_n = (-1)^n$. Así, la solución general es

$$x_n = \alpha\,5^n + \beta n\,5^{n-1} + \gamma(-1)^n,$$

donde α, β y γ son constantes.

Ejemplo 83. Determina la solución general de la ecuación recurrente

$$x_n - 4x_{n-1} + x_{n-2} + 10x_{n-3} - 4x_{n-4} - 8x_{n-5} = 0.$$

Solución: La ecuación característica es $t^5 - 4t^4 + t^3 + 10t^2 - 4t - 8 = 0 \iff (t-2)^3(t+1)^2 = 0$. Esta ecuación tiene una raíz $t = 2$ de multiplicidad 3 y una raíz $t = -1$ de multiplicidad 2, por tanto podemos formar las soluciones $x_n = 2^n$, $x_n = n\,2^{n-1}$, $x_n = n(n-1)\,2^{n-2}$, $x_n = (-1)^n$ y $x_n = n(-1)^{n-1}$. La solución general es

$$x_n = \alpha\,2^n + \beta n\,2^{n-1} + \gamma\,n(n-1)\,2^{n-2} + \delta(-1)^n + \mu\,n(-1)^{n-1},$$

donde α, β, γ, δ y μ son constantes.

Ejemplo 84. Resolver la ecuación

$$x_n - x_{n-1} - 2x_{n-2} = n^2 \qquad \forall n \geq 2$$

con las condiciones iniciales $x_0 = 0, x_1 = 2$.

Solución: Utilizando la ecuación característica determinamos las dos soluciones para la ecuación homogénea. Así

$$t^2 - t - 2 = 0$$

se puede factorizar como

$$(t-2)(t+1) = 0$$

que da las dos raíces $t = 2$ y $t = -1$ y, por lo tanto, las dos soluciones son 2^n y $(-1)^n$.

Ahora el problema es encontrar la solución particular.

Ensayemos una solución de la ecuación no homogénea tomando

$$x_n = c_0 + c_1 n + c_2 n^2$$

Si ahora sustituimos en la ecuación recurrente que queremos resolver tendremos

$$\begin{aligned} &(c_0 + c_1 n + c_2 n^2) - (c_0 + c_1(n-1) + c_2(n-1)^2) \\ &-2(c_0 + c_1(n-2) + c_2(n-2)^2) = n^2 \end{aligned}$$

que, desarrollando, da

$$(-2c_0 + 5c_1 - 9c_2) + (-2c_1 + 10c_2)n - 2c_2 n^2 = n^2$$

donde, igualando coeficiente a coeficiente los dos polinomios de cada lado de la igualdad, se forma el sistema

$$\begin{aligned} -2c_0 + 5c_1 - 9c_2 &= 0 \\ -2c_1 + 10c_2 &= 0 \\ -2c_2 &= 1 \end{aligned}$$

que tiene como solución $c_0 = -4$, $c_1 = -\frac{5}{2}$, $c_2 = -\frac{1}{2}$.

Así, vemos que la solución general es la solución $(\alpha 2^n + \beta(-1)^n)$ de la ecuación homogénea a la cual añadiremos la solución particular que acabamos de encontrar:

$$x_n = \alpha 2^n + \beta(-1)^n - 4 - \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}n^2.$$

Si ahora imponemos las condiciones iniciales, podemos determinar las constantes α y β, así

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 = \alpha + \beta - 4 \\ x_1 &= 2 = 2\alpha - \beta - 4 - \frac{5}{2} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

que da el sistema

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha + \beta - 4 \\ 2 &= 2\alpha - \beta - 7 \end{aligned}$$

que tiene como solución $\alpha = \frac{13}{3}$, $\beta = -\frac{1}{3}$.

Finalmente, la solución es la sucesión

$$x_n = \frac{13}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^{n+1} - 4 - \frac{5}{2}n - \frac{1}{2}n^2.$$