UNIVERSIDAD
NACIONAL
DE COLOMBIA

Diseño e implementación de estrategias de Inversión mediante modelos de Cadenas de Markov

Un enfoque en optimización basado en cambios de régimen

Tania Julieth Araque Duenas
Oscar Julian Rodríguez Cardenas
Angela Sofia Rubiano Quintero

Junio 2024

Universidad Nacional de Colombia

Contents

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

Chapter 1

Introducción

1.1 Contexto y Motivación

La teoría moderna de carteras, desarrollada por Harry Markowitz en la década de 1950, ha sido la base para la toma de decisiones en la asignación de activos. Sin embargo, esta teoría asume que las distribuciones de retornos de los activos son normales y que las relaciones entre los activos permanecen constantes a lo largo del tiempo. Estas suposiciones a menudo no se sostienen en mercados financieros reales, que son inherentemente volátiles y están sujetos a cambios abruptos.

El estudio de cadenas de Markov proporciona un marco matemático dentro del cual se encuentran modelos de sistemas estocásticos, en los cuales el futuro depende únicamente del estado actual y no del historial completo. Usar Cadenas de Markov en la optimización de carteras permite capturar de manera precisa las transiciones entre diferentes estados del mercado como fases alcistas, bajistas y neutrales. El enfoque dinámico puede mejorar significativamente la toma de decisiones durante la inversión en lo que al riesgo se refiere.

En este proyecto, se propone desarrollar estrategias de inversión basadas en modelos de cadenas de Markov con el enfoque particular en cambios de régimen. Los modelos de cambio de régimen conocidos también como modelos de Markov con Conmutación, son útiles especialmente para capturar la naturaleza no lineal que como se menciona anteriormente es importante en este campo, los modelos como Switching Hidden Markov Model - SHMM, Hamilton Switching Model, Switching Stochastic Volatility Model, entre otros permiten que las probabilidades de transición entre los estados del mercado varíen en función de diferentes condiciones financieras.

A lo largo de la historia la economía ha sido parte fundamental en el desarrollo del mundo , un eje central en la sociedad y mecanismo de superación tanto personal como profesional , por tal motivo se relaciona el curso de cadenas de Markov con la necesidad de avanzar en el mundo de las inversiones , con un mercado que se actualiza constantemente y se considera complicado para la mayoría de la población , se encuentra la motivación para realizar este proyecto .

1.2 Objetivos del Proyecto

1.2.1 Objetivo General

Desarrollar e implementar estrategias de inversión basadas en modelos de Cadenas de Markov con cambios de régimen, optimizando la asignación de activos en función de las condiciones del mercado para mejorar el rendimiento y gestionar el riesgo de las carteras de inversión.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Estudiar y analizar los diferentes modelos de Cadenas de Markov identificando sus fortalezas para ser aplicado en el desarrollo del proyecto.
- Analizar y recopilar datos históricos de precios de activos financieros y variables macroeconómicas relevantes.
- Implementar el Modelo de Regímenes Cambiantes adecuado utilizando herramientas tanto estadísticas como de programación.
- Evaluar el rendimiento del modelo mediante pruebas retrospectivas (backtesting) y validación cruzada.
- Desarrollar y optimizar estrategias de inversión basadas en los regímenes adecuados identificados.

- Comparar el rendimiento de las estrategias basadas en el modelo de Markov con cambios de régimen con las estrategias de inversión tradicionales.
- Documentar los resultados y proporcionar recomendaciones para la implementación práctica de las estrategias de inversión propuestas para inversionistas principiantes.

1.3 Justificación

En un entorno financiero caracterizado por alta volatilidad e incertidumbre, las estrategias de inversión tradicionales a menudo fallan en capturar la complejidad y dinamismo de los mercados. Las condiciones del mercado pueden cambiar abruptamente debido a diversos factores económicos, políticos y sociales, lo que demanda un enfoque más adaptativo y preciso. Los modelos de Cadenas de Markov con cambios de régimen, como el Modelo de Regímenes Cambiantes de Hamilton, ofrecen una solución robusta al permitir la identificación y respuesta a diferentes regímenes del mercado, como períodos alcistas y bajistas.

Implementar estos modelos en la gestión de carteras permite una mejor toma de decisiones, optimización del rendimiento y una gestión de riesgos más efectiva. Al reconocer y adaptarse a los cambios en el mercado, los inversores pueden ajustar sus estrategias de inversión para maximizar los rendimientos y minimizar los riesgos, aprovechando las condiciones favorables y protegiéndose contra las adversas. Esta capacidad de adaptación es crucial para mejorar el desempeño de las carteras y responder proactivamente a las fluctuaciones del mercado.

El desarrollo e implementación de estrategias de inversión utilizando modelos de Cadenas de Markov usan como principal herramienta la inferencia Bayesiana tanto en modelos de fijación de precios de activos en tiempo continuo como en modelos de probabilidades de transición entre diferentes estados del mercado de esta se busca manera facilitar tanto la identificación de patrones como la posible predicción de futuros movimientos de los precios de los activos

El proyecto abarca la implementación de los modelos mediante herramientas de programación y software estadístico, así como la validación de las estrategias propuestas por el resultado de los estudios anteriores , a través de simulaciones y análisis empíricos con datos históricos del mercado . Teniendo como objetivo final demostrar que las estrategias de inversión basadas en modelos de Cadenas de Markov y cambios de régimen pueden mejorar la gestión de carteras y proporcionar rendimientos ajustados al riesgo que sean más favorables en comparación con los métodos tradicionales.

No solo contribuirá a la literatura académica sobre la aplicación de modelos de Markov en finanzas, sino que también proporcionará herramientas prácticas para personas interesadas en iniciarse en el mundo de las inversiones . Al demostrar la eficacia de estos modelos a través de pruebas empíricas y metodológicas, se ofrecerá una nueva perspectiva en la gestión de inversiones, promoviendo la adopción de estrategias más sofisticadas y adaptativas en la industria financiera.

Chapter 2

Marco Teórico

2.1 Cadenas de Markov

La cadena de Markov, también conocida como modelo de Markov o proceso de Markov, es un concepto desarrollado dentro de la teoría de la probabilidad y la estadística que establece una fuerte dependencia entre un evento y otro suceso anterior. Su principal utilidad es el análisis del comportamiento de procesos estocásticos , es decir que si tenemos la información presente del proceso, saber cómo llegó al estado actual no afecta las probabilidades de pasar a otro estado en el futuro. Veamos formalmente su definición

2.1.1 Definición

(Häggström,O, 2002, pág. 10). Sea P una matriz k x k con elementos $\{P_{i,j}$: i,j = 1,...,$k\}$. Un proceso aleatorio (X_0,X_1,...) con espacio finito de estados S=$\{s_1$,...,$s_k\}$ se dice una cadena de Markov (homogénea) con matriz de transición P, si para todo n , todo i,j $\in$ $\{$1,...,$k\}$ y todo i_0,...,i_{n-1} $\in$ $\{$1,...,$k\}$ se tiene que

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(X_{n+1}= s_j \mid X_0=s_{i0}, X_1=s_i,...,X_{n-1}=s_{n-1},X_n=s_i) \\ &=\mathrm{P}(X_{n+1} = s_j|X_n = s_i) \\ &=P_{i,j} . \end{aligned}$$

La propiedad descrita anteriormente se conoce como la propiedad de Markov.

2.1.2 Propiedades

- **Irreducibilidad:** (Häggström,O, 2002, pág. 23) Una cadena de Markov (X_0,X_1,...) con espacio de estados $S = \{s_1,...,s_k\}$ y una matriz de transición P se dice irreducible si para todo s_i,$s_j \in S$, $s_i \leftrightarrow s_j$(comunicantes). De otro modo se dice que la cadena es Reducible.

- **Aperiodicidad:** (Häggström,O, 2002, pág. 25) El periodo$d(s_i)$ de un estado $s_i \in S$ esta definido como

$$d(s_i)\text{=}mcd\ (n \geqslant 1\text{:}(P^n)_{i,j}\text{≤ } 0)$$

si $d(s_i)$=1 decimos que el estado s_i es aperiodico. Una cadena de Markov se dice aperiodica si todos sus estados son aperiodicos . De otro modo se dice que la cadena es periodica.

- **Reversibilidad:** (Häggström, 2002, pág. 39)Sea (X_0,X_1,...) una cadena de Markov con espacio de estados $S = \{s_1,...,s_k\}$ y una matriz de transición P una distribucionde probabilidad π en S se dice reversible para la cadena (o para la matriz de transición P) si para todo $i, j \in \{1, ..., k\}$ se tiene

$$\pi_i P_{i,j}\text{=}\pi_j P_{j,i}$$

Una cadena de Markov se dice Reversible si existe una distribucion reversible para esta.

2.1.3 Algoritmos de simulación

- **Cadenas de Markov Método Montecarlo MCMC:** Las cadenas de Markov Monte Carlo (MCMC) son una clase de algoritmos utilizados en estadística y matemáticas para obtener muestras de una distribución de probabilidad. Estos algoritmos son especialmente útiles cuando la distribución es compleja y no se puede muestrear directamente.

(Häggström,O, 2002, pág. 37) La idea es la siguiente: Supongamos que podemos construir una cadena de Markov irreducible y aperiódica $(X_0, X_1, \ldots)$, cuya (única) distribución estacionaria es π. Si ejecutamos la cadena con una distribución inicial arbitraria (por ejemplo, comenzando en un estado fijo), entonces el teorema de convergencia de cadenas de Markov garantiza que la distribución de la cadena en el tiempo n converge a π, a medida que $n \to \infty$. Por lo tanto, si ejecutamos la cadena durante un tiempo suficientemente largo n, entonces la distribución de X_n estará muy cerca de π. Por supuesto, esto es solo una aproximación, pero el punto es que la aproximación puede hacerse arbitrariamente buena al elegir un tiempo de ejecución n grande.

Ejemplos de Algoritmos MCMC:

- **Gibbs Sampling:** (Häggström,O, 2002, pág. 49) Son útiles para simular distribuciones de probabilidad π en espacios de estados de la forma S^V, donde S y V son conjuntos finitos. En otras palabras, tenemos un conjunto finito V de vértices con un conjunto finito S de valores alcanzables en cada vértice, y π es la distribución de alguna asignación aleatoria de valores en S a los vértices en V (en el ejemplo del modelo hard-core, tenemos $S = 0, 1$). El muestreador de Gibbs es una cadena de Markov que en cada tiempo entero $n + 1$ hace lo siguiente.
  1. Elige un vértice $v \in V$ al azar (uniformemente).
  2. Actualiza $X_{n+1}(v)$ según la distribución condicional π del valor en v, dado que todos los demás vértices toman valores según X_n.
  3. Sea $X_{n+1}(w) = X_n(w)$ para todos los vértices $w \in V$ excepto v.
- **Metropolis Chain:**(Häggström,O, 2002, pág. 51) Describamos una forma (no la más general posible) de construir una cadena de Metropolis para simular una distribución de probabilidad dada $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_k)$ en un conjunto $S = s_1, \ldots, s_k$. El primer paso es construir un grafo G con conjunto de vértices S. El conjunto de aristas (estructura de vecindad) de este grafo puede ser arbitrario, excepto que
  1. El grafo debe ser conexo para asegurar la irreducibilidad de la cadena resultante, y
  2. Cada vértice no debe ser el extremo de demasiadas aristas, ya que de otro modo la cadena se vuelve computacionalmente muy pesada para simular en la práctica.

$$d_i : \text{Numero de vecinos del vertice } v_i$$

$$P_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} \min\left\{\frac{\pi_j d_i}{\pi_i d_j}\right. , 1\} & \text{si } s_i \text{ y } s_j \text{ son vecinos} \\ 0 & \text{si } s_i \neq s_j \text{ no son vecinos} \\ 1 - \sum_{l_{sl \backsim si}} \frac{1}{d_i} \min\left\{\frac{\pi_l d_i}{\pi_i d_l}\right. , 1\} & \text{si } i = j \end{cases}$$

2.1.4 Ejemplos de aplicaciones en diversos campos

Las cadenas de Markov tienen aplicaciones en diversos campos debido a su capacidad para modelar sistemas que evolucionan con el tiempo de manera estocástica. Como por ejemplo :

- **Finanzas**
  - **Modelos de Valoración de Opciones:** El modelo de Black-Scholes utiliza cadenas de Markov para modelar los precios de las acciones y determinar el precio de las opciones.
  - **Riesgo de Crédito** Modelos de cadenas de Markov se utilizan para predecir la probabilidad de default de una empresa a lo largo del tiempo.
- **Ciencias Ambientales**
  - **Modelos de Precipitación:** Las cadenas de Markov se utilizan para modelar y predecir patrones de lluvia y sequías.
  - **Ecología:** Las cadenas de Markov se utilizan para para modelar la dinámica de poblaciones y la evolución de ecosistemas.
- **Ciencias Sociales**
  - **Modelos de Elección Discreta:** Utilizados en economía para modelar decisiones de consumo y elección de productos.
  - **Sociología:** Modelos de Markov pueden describir la movilidad social y las transiciones entre diferentes estados socioeconómicos
- **Ingeniería**
  - **Redes de Comunicaciones:** Las cadenas de Markov se utilizan para modelar y analizar el comportamiento de redes de comunicación, como las tasas de error en canales de transmisión.
  - **Fiabilidad de Sistemas:** Modelos de cadenas de Markov ayudan a evaluar la fiabilidad y disponibilidad de sistemas complejos, como plantas de energía o sistemas de producción.

- **Ciencias de la Computación**
  - **Procesamiento de Lenguaje Natural (NLP):** Los modelos de Markov ocultos (HMM) se utilizan para tareas como el etiquetado de partes del discurso, reconocimiento de voz y traducción automática.
  - **Algoritmo de PageRank:** Utilizado por Google para clasificar páginas web en los resultados de búsqueda, está basado en una cadena de Markov.
- **Biología y Medicina**
  - **Modelos de Secuencias Genéticas:** Las cadenas de Markov se utilizan para modelar secuencias de ADN y predecir la estructura y función de genes.
  - **Epidemiología:** Se emplean para modelar la propagación de enfermedades infecciosas y evaluar estrategias de intervención.
- **Química**
  - **Simulaciones de Monte Carlo:** Utilizadas en química computacional para modelar el comportamiento de moléculas y reacciones químicas.
  - **Dinámica Molecular:** Cadenas de Markov ayudan a entender las transiciones entre estados de conformación de moléculas.

2.2 Modelos Markov con Cambio de Régimen

En el desarrollo e implementación del proyecto es de suma importancia el concepto de modelos con cambio de régimen , pues presenta una serie de beneficios para capturar las dinámicas no lineales del mercado financiero , en especial el estudio de Hamilton, J. D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle y Krolzig, H.-M. (1997). Markov-Switching Vector Autoregressions: Modelling, Statistical Inference, and Application to Business Cycle Analysis. Springer. fuentes principales cuyas especificaciones se encuentran descritas en la bibliografia.

2.2.1 Descripción

Los modelos de Markov de cambio de régimen, también conocidos como modelos de Markov con conmutación, son una extensión de las cadenas de Markov clásicas que permiten que los parámetros del modelo cambien de acuerdo con un proceso de Markov. En lugar de asumir que las propiedades estadísticas del sistema son constantes a lo largo del tiempo, estos modelos permiten que las propiedades cambien en función del estado en el que se encuentre el sistema , en este caso estados del mercado financiero.

En un modelo de cambio de régimen, el sistema puede estar en uno de varios estados distintos (o regímenes), y la transición entre estos estados está gobernada por una cadena de Markov. Cada régimen tiene su propio conjunto de parámetros que determinan el comportamiento del sistema en ese régimen particular. Por ejemplo, en el contexto financiero, un régimen podría representar un mercado alcista, otro un mercado bajista, y otro un mercado lateral.

- **Beneficios de Capturar Dinámicas No Lineales del Mercado**
  - **Adaptabilidad a Condiciones Cambiantes**
    - Los modelos de cambio de régimen son dinámicos y pueden adaptarse a las condiciones cambiantes del mercado, lo que es crucial para capturar la naturaleza volátil y no lineal de los mercados financieros.
    - Permiten que los parámetros del modelo cambien en respuesta a diferentes estados del mercado, lo que proporciona una representación más precisa de la realidad.
  - **Mejora en la Gestión de Riesgos**
    - Al identificar y modelar distintos regímenes de mercado, estos modelos pueden mejorar significativamente la capacidad de los gestores de carteras para anticipar y gestionar riesgos.
    - Permiten implementar estrategias de inversión más robustas que pueden ajustarse automáticamente en función del régimen detectado.
  - **Captura de Estructuras Dependientes del Estado**
    - Los mercados financieros a menudo exhiben estructuras de dependencia complejas que cambian con el tiempo. Los

modelos de cambio de régimen pueden capturar estas estructuras al permitir que las relaciones entre variables cambien de acuerdo con el estado del mercado.
    * Esto es especialmente útil para modelar comportamientos extremos y eventos de cola, que son difíciles de prever con modelos lineales tradicionales.

- **Mejora en la Predicción y Análisis**
    * La capacidad de cambiar entre regímenes permite que los modelos de cambio de régimen capturen mejor los patrones de comportamiento y las tendencias del mercado.
    * Proporcionan un marco más flexible para el análisis y la predicción de retornos financieros, lo que puede llevar a una toma de decisiones más informada y precisa.
- **Identificación de Fases del Ciclo Económico**
    * Estos modelos pueden ayudar a identificar y separar diferentes fases del ciclo económico, como expansiones y recesiones, proporcionando información valiosa para la toma de decisiones estratégicas.
    * Permiten a los inversores ajustar sus estrategias de acuerdo con la fase del ciclo económico en la que se encuentra el mercado, optimizando así el rendimiento de la cartera.

2.2.2 Régimen

Un régimen se refiere a un estado o modo específico en el cual un sistema o proceso se encuentra en un momento dado. Cada régimen puede caracterizarse por tener ciertas propiedades estadísticas o comportamientos que son distintos de otros regímenes en el mismo modelo , en este caso se puede clasificar los regímenes económicos en base a la actividad del mercado: un régimen alcista cuando el mercado está en crecimiento sostenido, y un régimen bajista cuando el mercado muestra tendencias a la baja.

Así el régimen en los modelos de Markov con cambio de régimen es una representación de los diferentes estados o modos que un sistema puede experimentar, cada uno con sus propias características y comportamientos distintivos.

- **Caracterírsticas:**
  - **Propiedades Estadísticas:** Cada régimen puede tener diferentes parámetros estadísticos, como medias, varianzas, o estructuras de correlación, que reflejan las características específicas del sistema en ese estado.
  - **Comportamientos Distintivos:** Los regímenes pueden representar diferentes fases, estados o condiciones en las cuales el sistema exhibe comportamientos observables o fenómenos específicos. Por ejemplo, en economía, los regímenes pueden corresponder a períodos de expansión, recesión o estancamiento.
  - **Transiciones:** El proceso de cambio de régimen implica transiciones entre estos estados a lo largo del tiempo, que pueden ocurrir de manera abrupta o gradual dependiendo del modelo y del sistema estudiado.

2.2.3 Fundamentos Teoricos

Los modelos de Markov con cambio de régimen se fundamentan en los siguientes principios teóricos:

- **Cadenas de Markov:** Su característica fundamental de dependencia de estado presente
- **Proceso de Cambio de Régimen:** Los parámetros del modelo pueden cambiar entre diferentes estados o regímenes, según un proceso de Markov subyacente.
- **Funciones de Densidad de Probabilidad:** Funciones de densidad de probabilidad condicionales, utilizadas para modelar la transición entre estados

2.2.4 Proceso de cambio de régimen

El proceso de cambio de régimen es un modelo que permite capturar transiciones discretas entre diferentes estados o regímenes a través del tiempo. Estos cambios pueden representar alteraciones en el comportamiento, estructura o características del sistema modelado. Por ejemplo, en economía, un cambio de régimen puede indicar una transición de una fase de expansión a una recesión, mientras que en ecología podría representar un cambio en la dinámica de una población debido a modificaciones en su entorno. En términos matemáticos, el proceso de cambio de régimen se define utilizando los siguientes conceptos:

- **Estado Latente:** Se introduce un estado latente S_t que indica el régimen actual del sistema en el tiempo t .Este estado puede tomar valores discretos que representan los diferentes regímenes del sistema.

- **Matriz de Transición:** Se define una matriz P de transición de Markov, donde $P_{i,j}$ representa la probabilidad de transición del régimen i j Esta matriz modela cómo los regímenes cambian a lo largo del tiempo, cumpliendo con la propiedad de Markov (dependencia solo del estado actual).

- **Parámetros** Se especifican los parametros asociados con cada régimen, que determinan las características del sistema en ese estado particular. En este caso las estrategias de gestión para la optimización de carteras tratadas en el topíco 2.3

2.2.5 Funciones de densidad de probabilidad

En los modelos de Markov con cambio de régimen, las funciones de densidad de probabilidad condicionales son esenciales para modelar la transición entre diferentes estados del mercado. Cada estado (o régimen) puede representar diferentes condiciones del mercado, como períodos de alta volatilidad (mercado bajista) y baja volatilidad (mercado alcista). Las funciones de densidad condicionales permiten capturar la probabilidad de observar ciertos rendimientos o comportamientos del mercado dado que está en un régimen particular.

- **Distribución Normal (Gaussiana) Condicional**

  - **Descripción:** La distribución normal es ampliamente utilizada en modelos de Markov con cambio de régimen, especialmente cuando se asume que las observaciones dentro de cada régimen siguen una distribución normal.

  - **Función de Densidad:**

$$f(y_t \mid s_t = i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{(y_t - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

donde y_t es la observación en el tiempo t, s_t es el estado del régimen en el tiempo t , i denota el régimen específico, μ_i es la media y σ_i es la desviación estándar del régimen i.

- **Distribución t de Student Condicional**
  - **Descripción:** Utilizada cuando las observaciones tienen colas más pesadas que una distribución normal. Es útil para modelar datos financieros donde los eventos extremos son más comunes.
  - **Función de Densidad:**

$$f(y_t \mid s_t = i) = \frac{\nu_i}{\pi\sigma_i^2} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu_i}{2}+1\right)} \left(1 + \frac{\nu_i}{\sigma_i^2}(y_t - \mu_i)^2\right)^{-\frac{\nu_i}{2}-1}$$

  donde ν_i es el parámetro de grados de libertad, μ_i es la media y σ_i es la escala del régimen i.

- **Distribución Exponencial Condicional**
  - **Descripción:** Adecuada para modelar tiempos entre eventos en un régimen específico, especialmente en contextos de supervivencia y fiabilidad.
  - **Función de Densidad:**

$$f(y_t \mid s_t = i) = \lambda_i \exp(-\lambda_i y_t)$$

  donde λ_i es la tasa de ocurrencia de eventos en el régimen i.

- **Distribución Poisson Condicional**
  - **Descripción:** Usada para modelar el número de eventos en un intervalo de tiempo en un régimen específico.
  - **Función de Densidad:**

$$P(Y_t = k \mid s_t = i) = \frac{\lambda_i^k}{k!} \exp(-\lambda_i)$$

  donde Y_t es el número de eventos, λ_i es la tasa de eventos en el régimen i, y k es el número de ocurrencias.

Estas funciones permiten capturar la naturaleza estocástica y la variabilidad del mercado, proporcionando una base robusta para el diseño e implementación de estrategias de inversión optimizadas basadas en cambios de régimen.

2.2.6 Formulación Matemática

Los pilares de formulación matemática en los modelos de Markov con cambio de régimen implican

- **Modelo de Estado Latente:** Representa el régimen actual del sistema.
- **Probabilidades de Transición:** Matriz de transición que especifica las probabilidades de pasar de un régimen a otro, según un proceso de Markov.

$$\text{P} = \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} & P_{03} & \dots \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} & P_{13} & \dots \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} & P_{23} & \dots \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & \\ P_{i0} & P_{i1} & P_{i2} & P_{i3} & \dots \\ . & . & . & . & \\ . & . & . & . & \end{bmatrix}$$

La i-ésima fila de P para $i = 0, 1, ...$ es la distribución condicional de X_{n+1} dado que $X_n = i$. Si el número de estados es finito , digamos k entonces P es una matriz cuadrada cuya dimensión es kxk Es inmediato que

$$P_{i,j} = P(X_{n+1} = j|X_n = i) \geq 0 \text{ , para } i, j = 0, 1, 2, ...$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} P_{i,j} =$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}$$

$$\text{P(X}_{n+1} = j|X_n = i) = 1\text{, para } i = 0, 1, 2, ...$$

de modo que cada fila de la matriz representa una distribución de probabilidad. Una matriz con esta propiedad se llama una matriz estocástica o de Markov

- **Parámetros Regime-Switching:** Cada régimen puede tener sus propios parámetros específicos θ_i , que caracterizan las propiedades del sistema en ese estado particular. Estos parámetros pueden incluir medias, varianzas u otras características estadísticas relevantes.

2.2.7 Modelos

- **Modelo HMM (Hidden Markov Model):** En un modelo HMM, las observaciones son generadas por un proceso que depende de un estado latente que sigue una cadena de Markov. Las funciones de densidad condicionales determinan la probabilidad de observar datos dados los estados latentes.

- **Modelos MS-GARCH (Markov Switching Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity):** Estos modelos combinan la estructura de GARCH para capturar la volatilidad condicional con cambios de régimen que permiten diferentes comportamientos de volatilidad en diferentes estados.

- **Modelos MS-VAR (Markov Switching Vector Autoregression):** Utilizados en macroeconomía para modelar series temporales multivariadas, donde la dinámica de las series puede cambiar entre diferentes regímenes.

  ”Markov-Switching Vector Autoregressions: Modelling, Statistical Inference, and Application to Business Cycle Analysis” por Helmut Lütkepohl y Hans-Martin Krolzig.

2.2.8 Diferencias entre modelos de Markov simples y con cambios de régimen

DIFERENCIAS CLAVE ENTRE LOS MODELOS DE MARKOV SIMPLES Y LOS MODELOS DE MARKOV CON CAMBIOS DE RÉGIMEN

Aspecto	Modelos de Markov Simples	Modelos de Markov con Cambios de Régimen
Definición	Modelos que describen un sistema donde las transiciones dependen solo del estado actual.	Modelos que permiten que los parámetros cambien entre distintos regímenes, gobernados por un proceso de Markov.
Estados	Tienen un conjunto fijo de estados que no cambian.	Pueden cambiar entre múltiples regímenes, cada uno con su propio conjunto de parámetros.
Transiciones	Las probabilidades de transición entre estados son fijas.	Las probabilidades de transición pueden cambiar dependiendo del régimen actual.
Parámetros	Parámetros constantes a lo largo del tiempo.	Parámetros que varían según el régimen en el que se encuentra el sistema.
Flexibilidad	Menos flexible, adecuado para sistemas con comportamientos estables.	Más flexible, adecuado para sistemas con cambios estructurales y dinámicas no lineales.
Aplicaciones	Adecuados para procesos con dependencias de corto plazo y cambios suaves.	Adecuados para procesos con cambios bruscos y regímenes distintos, como ciclos económicos o cambios de mercado.
Complejidad	Menos complejo, fácil de estimar e interpretar.	Más complejo, requiere técnicas avanzadas para estimación e interpretación.
Ejemplo de Aplicación	Modelado de cadenas de ADN, procesos de decisión en ingeniería.	Análisis de ciclos económicos, modelado de volatilidad en mercados financieros.
Ventajas	Simplicidad, facilidad de implementación.	Captura mejor la realidad en sistemas con cambios de régimen, mayor precisión en modelado de dinámicas complejas.
Desventajas	No captura cambios estructurales ni dinámicas no lineales.	Mayor complejidad en estimación y calibración, requiere más datos y computación.

Figure 2.1: Elaboración propia

2.2.9 Aplicaciones de modelos de Markov con Cambio de régimen

Dentro de los ejemplos de modelos de Markov con Cambio de regimen se encontró interesantes los siguientes trabajos , que también sirven como referecia para el desarrollo del presente

- **Economía y Finanzas:**
  - **Modelado de Ciclos Económicos:**
    * **Descripción:** Modelos utilizados para identificar y modelar diferentes fases del ciclo económico, como expansión, recesión o recuperación.
    * **Referencia:** Regime-Switching Models for the Business Cycle por Kim, Chang-Jin y Nelson, Charles R.
  - **Predicción de Recesiones y Expansiones Económicas:**
    * **Descripción:**Utilizados para predecir cambios en la actividad económica basados en indicadores clave.
    * **Referencia:**Predicting U.S. Recessions: The Role of Leading Indicators por Stock, James H. y Watson, Mark W.
- **Biología y Ecología:**
  - **Dinámicas de Población:**
    * **Descripción:** Modelos aplicados para estudiar las dinámicas de población de especies en entornos cambiantes.
    * **Referencia:** Markov Models and Habitat Suitability: A Case Study with American Marten por Rota, Christopher T. y Millspaugh, Joshua J.
  - **Cambios en Ecosistemas según Factores Ambientales:**
    * **Descripción:** Modelos utilizados para identificar y analizar cambios abruptos en los ecosistemas debido a factores ambientales.
    * **Referencia:** Regime Shifts in Ecological Systems: Approaches for Detection and Analysis por Scheffer, Marten et al.

- **Ingeniería y Telecomunicaciones:**
  - **Gestión de Redes de Comunicación:**
    - **Descripción:** Modelos aplicados para gestionar y optimizar redes de comunicación adaptando protocolos según la carga de tráfico.
    - **Referencia:** Modeling of Network Traffic Using Regime-Switching Models por Sarker, Imran H. y Reaz, Mamun Bin Ibne.
  - **Cambio de Protocolos según Condiciones de Tráfico:**
    - **Descripción:**Modelos utilizados para mejorar la gestión del rendimiento de redes ajustando protocolos según las condiciones dinámicas de tráfico.
    - **Referencia:** Markov-Switching Models in Network Performance Management por Baras, John S. y Sidiropoulos, Nicholas D.

2.3 Optimización de Carteras

2.3.1 Teoría Moderna de Portafolios

Según Markowitz, H en su árticulo "Portfolio Selection" La Teoría Moderna de Portafolios es un marco teórico de inversión que busca maximizar la rentabilidad esperada de una cartera para un nivel dado de riesgo, o minimizar el riesgo para un nivel dado de rentabilidad esperada. Esta teoría fue desarrollada por Harry Markowitz en la década de 1950 y se basa en la idea de que los inversores pueden construir carteras eficientes, es decir, portafolios que ofrecen la máxima rentabilidad posible para un nivel determinado de riesgo. Introduce conceptos clave como la diversificación, la frontera eficiente y la relación riesgo-retorno.

- **Diversificación:** Estrategia de inversión que implica distribuir el capital en una variedad de activos diferentes para reducir el riesgo total de la cartera. Al invertir en una mezcla de activos que no están perfectamente correlacionados, se puede minimizar el impacto de la volatilidad de cualquier activo individual en la rentabilidad general de la cartera. La diversificación se basa en el principio de que diferentes activos reaccionan de manera diferente a los mismos eventos del mercado, por lo que una pérdida en una inversión puede ser compensada por una ganancia en otra.

– **Frontera eficiente:** Concepto fundamental en la Teoría Moderna de Portafolios que representa el conjunto de carteras que ofrecen la máxima rentabilidad esperada para un nivel dado de riesgo o el mínimo riesgo para un nivel dado de rentabilidad esperada. Estas carteras son consideradas eficientes porque, para un nivel de riesgo específico, no existe otra cartera con una rentabilidad esperada más alta, y para una rentabilidad esperada específica, no existe otra cartera con un nivel de riesgo más bajo. La frontera eficiente es una curva que muestra la relación óptima entre riesgo y retorno de las carteras diversificadas.

– **Relación riesgo-retorno:** Es un principio central en la inversión que establece que existe una relación directa entre el nivel de riesgo asumido y la rentabilidad esperada de una inversión. Generalmente, a mayor riesgo, mayor es la rentabilidad potencial, y viceversa. Este concepto se utiliza para evaluar y comparar diferentes inversiones, considerando que los inversores deben decidir cuánto riesgo están dispuestos a asumir para alcanzar sus objetivos de rentabilidad. La relación riesgo-retorno se puede cuantificar mediante medidas como la desviación estándar, la varianza y el índice de Sharpe.

2.3.2 Modelos de Valoración de Activos

Los modelos de valoración de activos son herramientas teóricas y matemáticas utilizadas para determinar el valor justo o intrínseco de un activo financiero. Estos modelos toman en cuenta diversos factores como el riesgo, el rendimiento esperado, la liquidez, y otras características relevantes del activo. Su objetivo principal es ayudar a los inversores a tomar decisiones informadas sobre la compra, venta o retención de activos. Algunos de los modelos más importantes incluyen el Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM), el Modelo de Descuento de Dividendos (DDM) y el Modelo de Valoración de Opciones de Black-Scholes.

- **Modelo de Valoración de Activos de Capital (CAPM):** El CAPM es un modelo que describe la relación entre el riesgo sistemático de un activo y su rendimiento esperado. Fue desarrollado por William Sharpe, John Lintner y Jan Mossin. Se basa en la idea de que los inversores deben ser compensados por el riesgo asumido, y la fórmula principal del modelo es:

  $$E(R_i) = R_f + \beta_i(E(R_m) - R_f)$$

  donde $E(R_i)$ es el rendimiento esperado del activo, R_f es la tasa libre de riesgo, β_i es la medida del riesgo sistemático del activo, y $E(R_m)$ es el rendimiento esperado del mercado.

- **Modelo de Descuento de Dividendos (DDM):** El DDM es un método utilizado para valorar una acción basándose en los dividendos futuros que se espera que pague la empresa y descontándolos a su valor presente. El modelo asume que el valor de una acción es igual a la suma del valor presente de todos sus dividendos futuros. La fórmula general del DDM es:

  $$P_0 = \frac{D_1}{r - g}$$

  donde P_0 es el precio actual de la acción, D_1 es el dividendo esperado en el próximo período, r es la tasa de descuento, y g es la tasa de crecimiento de los dividendos.

- **Modelo de Valoración de Opciones de Black-Scholes:** El modelo Black-Scholes es un modelo matemático para la valoración de opciones financieras. Fue desarrollado por Fischer Black y Myron Scholes en 1973. El modelo calcula el precio de una opción basándose en factores como el precio actual del activo subyacente, el precio de ejercicio, el tiempo hasta el vencimiento, la volatilidad del activo, y la tasa libre de riesgo. La fórmula principal del modelo Black-Scholes es:

  $$C = S_0 N(d_1) - X e^{-rT} N(d_2)$$

  donde C es el precio de la opción de compra, S_0 es el precio actual del activo subyacente, X es el precio de ejercicio, T es el tiempo hasta el vencimiento, r es la tasa libre de riesgo, $N(\cdot)$ es la función de distribución acumulativa de la distribución normal, y d_1 y d_2 se calculan con las siguientes fórmulas:

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/X) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

donde σ es la volatilidad del activo subyacente.

2.3.3 Métodos de Optimización de Carteras

Los métodos de optimización de carteras son técnicas matemáticas y algorítmicas utilizadas para seleccionar la combinación óptima de activos que maximicen el rendimiento esperado para un nivel dado de riesgo, o minimicen el riesgo para un nivel dado de rendimiento esperado. Estos métodos se basan en la teoría de la optimización y pueden variar en complejidad y enfoque, desde técnicas determinísticas como la programación cuadrática hasta enfoques probabilísticos como la optimización estocástica.

- **Programación Cuadrática:** La programación cuadrática es una técnica de optimización que se utiliza cuando el objetivo es minimizar (o maximizar) una función cuadrática sujeta a restricciones lineales. En el contexto de la optimización de carteras, la programación cuadrática se usa para minimizar la varianza (riesgo) de la cartera, dada una rentabilidad esperada. La función objetivo típicamente toma la forma:

$$\min \frac{1}{2} x^T Q x \quad \text{tal que} \quad Ax = b, \quad x \geq 0$$

  donde Q es la matriz de covarianza de los retornos de los activos, x es el vector de pesos de la cartera, A es la matriz de restricciones (por ejemplo, que los pesos sumen a uno), y b es el vector de valores de restricciones (por ejemplo, la rentabilidad esperada de la cartera).

- **Optimización Estocástica:** La optimización estocástica se refiere a un conjunto de métodos de optimización que consideran la incertidumbre y variabilidad en los parámetros del modelo.

En la optimización de carteras, este enfoque permite modelar y optimizar bajo condiciones de incertidumbre sobre los retornos futuros de los activos. Un enfoque común es la programación estocástica, donde los parámetros inciertos se modelan como variables aleatorias y el objetivo es optimizar el valor esperado de la función objetivo. La formulación general puede incluir:

$$\min E[f(x, \xi)] \quad \text{tal que} \quad g(x, \xi) \leq 0$$

donde x es el vector de decisiones, ξ representa las variables aleatorias (por ejemplo, retornos futuros), $f(x, \xi)$ es la función objetivo, y $g(x, \xi)$ son las restricciones.

– **Optimización Robusta**:
La optimización robusta es un enfoque que busca encontrar soluciones que sean insensibles a la incertidumbre en los parámetros del modelo. En el contexto de la optimización de carteras, la optimización robusta se utiliza para construir carteras que funcionen bien en una variedad de escenarios futuros, no solo en el escenario promedio. La formulación típica involucra minimizar la función objetivo en el peor caso de un conjunto de posibles realizaciones de los parámetros inciertos:

$$\min_{\xi \in \Xi} \max f(x, \xi) \quad \text{tal que} \quad g(x, \xi) \leq 0, \quad \forall \xi \in \Xi$$

donde Ξ es el conjunto de todas las posibles realizaciones de las variables aleatorias.

2.3.4 Estrategias de Gestión Activa y Pasiva

– **Gestión activa:** Implican la toma de decisiones de inversión basadas en un análisis detallado del mercado con el objetivo de superar el rendimiento de un índice de referencia o benchmark. Los gestores activos buscan identificar y capitalizar oportunidades de inversión a través de la selección de valores, el timing del mercado y otras técnicas de análisis fundamental y técnico. Estas estrategias pueden ser más costosas debido a la mayor cantidad de investigación y transacciones involucradas.

  ∗ **Características principales:**

- **Análisis y selección de activos:** Los gestores activos seleccionan activamente los activos que creen que ofrecerán mejores rendimientos.
- **Timing del mercado:** Intentan comprar y vender activos en los momentos óptimos para maximizar los beneficios.
- **Costos:** Suelen tener mayores costos en comparación con la gestión pasiva debido a las comisiones de transacción y los honorarios de gestión.
- **Rendimiento:** Pueden ofrecer rendimientos superiores al benchmark, aunque también implican un mayor riesgo.

– **Gestión Pasiva:** Las estrategias de gestión pasiva buscan replicar el rendimiento de un índice de referencia o benchmark en lugar de superarlo. Los gestores pasivos invierten en una cartera que refleja la composición del índice, manteniendo las proporciones de los activos de manera similar al índice. Este enfoque se basa en la teoría de que es difícil y costoso superar consistentemente al mercado a largo plazo, por lo que replicar el índice es una estrategia más eficiente y de menor costo.

  * **Características principales:**

    - **Replicación del índice:** Se construyen carteras que replican un índice específico, como el S&P 500.
    - **Costos:** Generalmente, tienen costos más bajos debido a la menor rotación de activos y menores comisiones de gestión.
    - **Simplicidad:** Menor necesidad de análisis detallado de los activos y de decisiones de timing del mercado.
    - **Rendimiento:** Tienden a ofrecer rendimientos que se alinean con los del índice de referencia, eliminando el riesgo de bajo rendimiento por decisiones erróneas de selección de activos.

2.4 Aplicaciones Financieras

2.4.1 Gestión de Riesgos

La gestión de riesgo es el proceso de identificación, evaluación y priorización de riesgos seguidos de la aplicación de recursos para minimizar, controlar y monitorear la probabilidad y/o el impacto de eventos adversos. En el contexto de la inversión, la gestión de riesgo implica la implementación de estrategias para reducir la exposición a pérdidas potenciales en una cartera de inversiones.

2.4.2 Riesgo y Rendimiento

Conceptos fundamentales en el análisis y la toma de decisiones financieras. Estos dos elementos están estrechamente relacionados, ya que las inversiones que ofrecen mayores rendimientos generalmente conllevan un mayor nivel de riesgo , mas específicamente :

– **Rendimiento financiero :** Se refiere a la ganancia o pérdida obtenida de una inversión a lo largo del tiempo. Es la recompensa que los inversores reciben por comprometer su capital. En términos cuantitativos, el rendimiento puede expresarse como una tasa porcentual que mide el aumento en el valor de una inversión respecto a su costo inicial. Este se calcula comúnmente como el cambio en el valor del activo, ya sea a través de apreciación de capital o ingresos generados, como los dividendos o los intereses. Existen diferentes tipos:

  * **Rendimiento Esperado:** Valor promedio ponderado de los posibles rendimientos de una inversión según sus probabilidades de ocurrencia.
  * **Rendimiento histórico:** Se refiere a los retornos obtenidos en el pasado y que a menudo se utiliza como una referencia para estimar rendimientos futuros.

– **Riesgo:** Se refiere a la incertidumbre asociada con los rendimientos de una inversión. En otras palabras, es la probabilidad de que los rendimientos reales difieran de los esperados, pudiendo resultar en pérdidas. El riesgo financiero se puede desglosar en varias categorías, como el riesgo de mercado, que deriva de las fluctuaciones en los precios de los activos, o el riesgo de crédito, relacionado con la capacidad de un prestatario para cumplir con sus obligaciones financieras.

El riesgo es una característica inherente de las inversiones, y su medición y gestión son fundamentales para la toma de decisiones en finanzas. Entre las medidas más comunes del riesgo está la volatilidad, que se refiere a la magnitud de las variaciones en el rendimiento de una inversión en un periodo de tiempo. Cuanto más volátil sea un activo, mayor es su riesgo.

– **Relación entre Riesgo y Rendimiento:** En finanzas, el principio básico es que existe una relación positiva entre riesgo y rendimiento. Es decir, para obtener mayores rendimientos, los inversores deben estar dispuestos a asumir un mayor riesgo. Este concepto se refleja en la curva de la frontera eficiente, un concepto central en la teoría moderna de carteras, que muestra las combinaciones óptimas de riesgo y rendimiento para una cartera de inversiones.

Estos serán tópicos principales para la evaluación y comparación de nuestro modelo con los métodos tradicionales.

2.4.3 Introducción a la gestión de riesgos y métodos de medición (VaR, CVaR.)

La **gestión de riesgos** es un proceso clave en la administración financiera, que tiene como objetivo identificar, medir, mitigar y controlar los riesgos a los que están expuestas las inversiones o carteras de activos. El propósito fundamental de este proceso es minimizar las posibles pérdidas mientras se maximizan los rendimientos, considerando el nivel de riesgo que los inversores están dispuestos a asumir.
En el ámbito financiero, los riesgos provienen de diversas fuentes, como los cambios en las tasas de interés, la volatilidad del mercado, el riesgo de crédito, la liquidez y factores macroeconómicos globales. Para gestionar de manera efectiva estos riesgos, es necesario medirlos y entender sus impactos potenciales. En este sentido, los métodos cuantitativos como el Valor en Riesgo (VaR) y el Valor en Riesgo Condicional (CVaR) son herramientas ampliamente utilizadas.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

- **Valor en Riesgo (VaR):** El Valor en Riesgo (VaR) es una medida estadística que cuantifica la pérdida máxima esperada de una inversión o cartera durante un periodo de tiempo determinado, con un nivel de confianza específico. En otras palabras, el VaR estima el peor escenario probable para una inversión, considerando un horizonte temporal y un porcentaje de probabilidad dado. Por ejemplo, un VaR diario del 5%con un nivel de confianza del 95% significa que, bajo condiciones normales de mercado, se espera que la cartera pierda no más del valor calculado en el 95% de los días. El VaR tiene diferentes métodos de cálculo, entre los que se incluyen:
  * **Método paramétrico:** (o varianza-covarianza), que asume que los rendimientos de los activos siguen una distribución normal.
  * **Simulación histórica:** Que utiliza datos históricos de precios para calcular el riesgo.
  * **Simulación de Monte Carlo:** Que genera múltiples escenarios de precios posibles a través de modelos estocásticos para estimar el riesgo.

- **Valor en Riesgo Condicional (CVaR):** También conocido como Expected Shortfall (ES), es una extensión del VaR que proporciona una medida del riesgo extremo. Mientras que el VaR sólo estima la pérdida máxima probable dentro de un intervalo de confianza, el CVaR mide la pérdida esperada en los casos en los que esta pérdida excede el VaR, es decir, en los eventos más extremos o raros. En resumen, el CVaR cuantifica el riesgo de cola o el impacto de los eventos que están más allá del VaR, proporcionando una visión más completa del riesgo.
  El CVaR es especialmente útil cuando se evalúan escenarios de riesgo severo, ya que ofrece una estimación del valor promedio de las pérdidas que podrían ocurrir en el peor caso. Esto es crucial en situaciones de crisis o en mercados con comportamientos anormales, donde los eventos de baja probabilidad y alto impacto pueden tener consecuencias devastadoras.

  La implementación de el método de medición VaR para gestión de riesgos, será fundamental , para evaluar la efectividad de nuestro modelo.

2.4.4 Uso de modelos de Markov con cambio de régimen en la predicción de precios y rendimientos de activos.

- **Modelización de Precios de Activos Financieros:** Los modelos de Markov con cambio de régimen son especialmente útiles para predecir precios de activos como acciones, bonos y divisas. Al incorporar diferentes regímenes de mercado, estos modelos pueden capturar mejor las características de las series temporales financieras, como los saltos en los precios y las fases de alta y baja volatilidad.
  Por ejemplo, en lugar de asumir que los precios de las acciones siguen un proceso lineal o constante en el tiempo, el modelo puede cambiar entre un régimen de crecimiento rápido de precios y un régimen de caída o corrección, dependiendo de las condiciones de mercado predominantes.

- **Predicción de Rendimientos de Activos:** El rendimiento de un activo es una de las variables más importantes en la toma de decisiones financieras. Los modelos con cambio de régimen permiten capturar la naturaleza impredecible de los rendimientos de los activos financieros, que a menudo muestran comportamientos no lineales y no estacionarios. En particular, estos modelos pueden mejorar la precisión de las previsiones al permitir que los rendimientos sigan diferentes dinámicas en función del régimen en el que se encuentre el mercado.

  Por ejemplo, en un régimen de baja volatilidad, los rendimientos de las acciones pueden seguir una distribución más concentrada alrededor de la media, lo que refleja un comportamiento más estable. En cambio, en un régimen de alta volatilidad, los rendimientos pueden ser más dispersos, con la posibilidad de observar grandes ganancias o pérdidas en períodos cortos de tiempo. Los modelos con cambio de régimen permiten ajustar las estrategias de inversión para adaptarse a estos cambios en la dinámica del mercado.

- **Captura de Ciclos de Mercado:** Los modelos de Markov con cambio de régimen también son efectivos para capturar los ciclos de mercado, es decir, las transiciones entre fases de crecimiento y recesión en los mercados financieros. Estos ciclos suelen reflejarse en los precios de los activos y sus rendimientos, por lo que un modelo que incorpora diferentes regímenes puede ayudar a predecir cuándo es probable que el mercado pase de un período alcista a uno bajista, o viceversa.

Esta capacidad de capturar los cambios de tendencia es útil para los inversores, ya que les permite ajustar sus carteras y estrategias según las condiciones del mercado, evitando grandes pérdidas en períodos de alta volatilidad o crisis.

2.4.5 Ejemplos de estudios y aplicaciones previas en la literatura financiera

– **Hamilton (1989):** Un modelo de cambio de régimen para los ciclos económicos Uno de los estudios más influyentes en la literatura financiera es el trabajo de James Hamilton (1989), donde introdujo un modelo de Markov con cambio de régimen para describir los ciclos económicos en Estados Unidos. Hamilton mostró que los rendimientos de los activos, como las acciones, tienden a comportarse de manera diferente en fases de expansión y recesión. Este enfoque marcó un hito en el uso de los modelos con cambio de régimen para capturar las transiciones entre diferentes estados del mercado, siendo aplicable tanto a la predicción de precios de activos como a la modelización de series temporales económicas.

– **Ang y Bekaert (2002):** Modelos de Markov con cambio de régimen en la predicción de rendimientos de acciones En su estudio, Ang y Bekaert (2002) aplicaron modelos de Markov con cambio de régimen para modelar los rendimientos de acciones y las tasas de interés. El objetivo fue capturar las fluctuaciones entre los regímenes de alta y baja volatilidad en los mercados de capitales. Encontraron que los modelos con cambio de régimen mejoran la precisión de las predicciones de los rendimientos de los activos en comparación con los modelos tradicionales sin cambio de régimen.

– **Cai (1994) y Gray (1996):** Modelización de tasas de interés Cai (1994) y Gray (1996) desarrollaron modelos de Markov con cambio de régimen para modelar las tasas de interés a corto plazo. Estos estudios mostraron que los cambios de régimen en la volatilidad de las tasas de interés pueden predecirse eficazmente mediante el uso de estos modelos. En particular, estos autores encontraron que los mercados de tasas de interés presentan fases de baja y alta volatilidad, y que la previsión de estos regímenes ayuda a gestionar mejor los riesgos asociados a instrumentos de renta fija y derivados de tasas de interés.

– **Schaller y Van Norden (1997):** Predicción de retornos bursátiles con modelos de cambio de régimen Schaller y Van Norden (1997) analizaron si los modelos de cambio de régimen podían predecir de manera efectiva los retornos bursátiles en mercados de valores desarrollados. Su estudio mostró que las fases de mercado alcista y bajista pueden predecirse mejor con modelos de cambio de régimen en comparación con modelos tradicionales de mercado eficiente, proporcionando una herramienta más robusta para los inversores que desean aprovechar las transiciones entre estos regímenes.

Chapter 3

Metodología

3.1 Diseño del Modelo

3.1.1 Definición de Estados del Mercado

En una primera instancia se definieron tres estados para la cadena de Markov, siendo estos: altista, estable y bajista, sin embargo debido a la alta volatilidad de los precios del café en E.E.U.U y a unos resultados no tan convincentes en las simulaciones, se optó por tomar cinco estados, siendo estos: Muy alcista, alcista, estable, bajista y muy bajista, la inclusión de estos dos estados permitió capturar mejor el dinamismo de los precios, un punto clave para recalcar es que se utilizaron los precios del café directamente, se empleo una medida muy utilizada en finanzas llamada el **retorno logaritmico** la cual tiene como objetivo expresar el cambio porcentual de un precio de un día a otro de manera que sea más sencilla en términos de interpretación, a continuación la fórmula:

$$R_t = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

donde

$$P_t \text{ es el precio en el tiempo } t$$

y

$$P_{t-1} \text{ es el precio en el tiempo } t-1.$$

Basados en esto, se obtiene :

1. **Muy alcista:** Durante este estado se da una fuerte subida en los precios del café, estos experimentan una crecimiento significativo y grande, también se puede entender como una fase de expansión.

2. **Alcista:** Durante este estado el mercado tiene una tendencia positiva,sin embargo, de manera más moderada con respecto al estado muy alcista, aunque los precios crecen de manera constante no es muy explosivo el crecimiento.

3. **Estable:** Durante este estado existe una carencia de grandes fluctuaciones en los precios, básicamente, los precios se mantienen constantes sin mostrar tendencias claras de subida o bajada.

4. **Bajista:** Durante el estado bajista existe una tendencia en descenso moderado de los precios no tan pronunciada.

5. **Muy bajista:** Durante este estado se presenta un escenario de fuertes caídas en los precios del café, se caracteriza por un decrecimiento significativo y rápido.

3.1.2 Matriz de Transición

Para calcular la matriz de transición, se deben clasificar los precios de cada día del café en los estados anteriormente mencionados basados en los retornos logaritmicos, para clasificar estos retornos se definen umbrales utilizando su media y desviación estándar, para ilustrar de forma significativa la tendencia central y la dispersión.
Dichos umbrales de definen de la siguiente manera:

- **Muy alcista (Estado 1):** Si el retorno es mayor que la media + una desviación estándar.

- **Alcista (Estado 2):** Si el retorno es mayor que la media + 0.5 veces la desviación estándar.

- **Estable (Estado 3):** Si el retorno está entre media - 0.5 veces la desviación estándar y media + 0.5 veces la desviación estándar.

- **Bajista (Estado 4):** Si el retorno es menor que la media - 0.5 veces la desviación estándar.

- **Muy bajista (Estado 5):** Si el retorno es menor que la media - una desviación estándar.

Por ejemplo, Si el retorno de un día está por encima de la media + una desviación estándar, ese día se clasifica como "muy alcista". Si el retorno está por debajo de la media - una desviación estándar, ese día se clasifica como "muy bajista". Este proceso se repite para cada día de los datos históricos.

Ahora una vez que se tienen todos los retornos clasificados en los estados del mercado, se analizan las transiciones entre días consecutivos, por ejemplo, si el mercado pasa de un estado muy alcista en el día 1 a un estado estable en el día 2, esto se registra como una transición del estado 1 a 3.La frecuencia de estas transiciones se almacenaran en la matriz de transición, cada fila de la matriz corresponde al estado inicial y cada columna al estado final.

Para el cálculo de las probabilidades de transiciones entre estados, simplemente se divide cada fila por el total de transiciones que salen de ese estado, es decir, si en 100 días el mercado ha estado en el estado alcista y ha pasado 20 veces al estado muy alcista, la probabilidad de pasar del estado alcista al estado muy alcista sería 20/100 o 0.2.

la matriz de transición obtenida con los datos del café (commodity escogido) fue la siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0.09803922 & 0.1372549 & 0.37254902 & 0.11764706 & 0.2745098 \\ 0.23404255 & 0.04255319 & 0.34042553 & 0.21276596 & 0.17021277 \\ 0.16260163 & 0.18699187 & 0.3902439 & 0.17073171 & 0.08943089 \\ 0.14545455 & 0.18181818 & 0.38181818 & 0.18181818 & 0.10909091 \\ 0.15555556 & 0.11111111 & 0.4 & 0.17777778 & 0.15555556 \end{bmatrix}$$

Como se mecionó cada fila de la matriz representa el estado actual y cada columna representa la probabilidad de pasar a ese estado al dia siguiente:

- **Primera fila:** Estado muy alcista hoy.
- **Segunda fila:** Estado alcista hoy.
- **Tercera fila:** Estado estable hoy.
- **Cuarta fila:** Estado bajista hoy.
- **Quinta fila:** Estado muy bajista hoy.

Interpretación correcta:

1. **Fila 1 (Estado Muy Alcista Hoy):**

    - 0.0980: Hay un 9.80% de probabilidad de que el mercado permanezca muy alcista al día siguiente.

    - 0.1373: Hay un 13.73% de probabilidad de que el mercado pase a un estado alcista al día siguiente.

    - 0.3725: Hay un 37.25% de probabilidad de que el mercado pase a un estado estable al día siguiente.

    - 0.1176: Hay un 11.76% de probabilidad de que el mercado pase a un estado bajista al día siguiente.

    - 0.2745: Hay un 27.45% de probabilidad de que el mercado pase a un estado muy bajista al día siguiente.

2. **Fila 2 (Estado Alcista Hoy):**

   - 0.2340: Hay un 23.40% de probabilidad de que el mercado pase a un estado muy alcista al día siguiente.

   - 0.0426: Hay un 4.26% de probabilidad de que el mercado permanezca alcista al día siguiente.

   - 0.3404: Hay un 34.04% de probabilidad de que el mercado pase a un estado estable al día siguiente.

   - 0.2128: Hay un 21.28% de probabilidad de que el mercado pase a un estado bajista al día siguiente.

   - 0.1702: Hay un 17.02% de probabilidad de que el mercado pase a un estado muy bajista al día siguiente.

3. **Fila 3 (Estado Estable Hoy):**

   - 0.1626: Hay un 16.26% de probabilidad de que el mercado pase a un estado muy alcista al día siguiente.

   - 0.1870: Hay un 18.70% de probabilidad de que el mercado pase a un estado alcista al día siguiente.

   - 0.3902: Hay un 39.02% de probabilidad de que el mercado permanezca estable al día siguiente.

   - 0.1707: Hay un 17.07% de probabilidad de que el mercado pase a un estado bajista al día siguiente.

   - 0.0894: Hay un 8.94% de probabilidad de que el mercado pase a un estado muy bajista al día siguiente.

4. **Fila 4 (Estado Bajista Hoy):**

   - 0.1455: Hay un 14.55% de probabilidad de que el mercado pase a un estado muy alcista al día siguiente.

- 0.1818: Hay un 18.18% de probabilidad de que el mercado pase a un estado alcista al día siguiente.

- 0.3818: Hay un 38.18% de probabilidad de que el mercado pase a un estado estable al día siguiente.

- 0.1818: Hay un 18.18% de probabilidad de que el mercado permanezca bajista al día siguiente.

- 0.1091: Hay un 10.91% de probabilidad de que el mercado pase a un estado muy bajista al día siguiente.

5. **Fila 5 (Estado Muy Bajista Hoy):**

   - 0.1556: Hay un 15.56% de probabilidad de que el mercado pase a un estado muy alcista al día siguiente.

   - 0.1111: Hay un 11.11% de probabilidad de que el mercado pase a un estado alcista al día siguiente.

   - 0.4000: Hay un 40.00% de probabilidad de que el mercado pase a un estado estable al día siguiente.

   - 0.1778: Hay un 17.78% de probabilidad de que el mercado pase a un estado bajista al día siguiente.

   - 0.1556: Hay un 15.56% de probabilidad de que el mercado permanezca muy bajista al día siguiente.

3.2 Implementación del Modelo

El modelo GARCH fue utilizado como régimen principal para predecir la volatilidad condicional de los precios, o mejor dicho, de los retornos logaritmicos de los precios del café, dentro de cada estado de la cadena de Markov, la volatilidad de los precios puede variar a lo largo del tiempo, aquí el modelo GARCH modela la volatilidad dependiendo de los datos de volatilidad pasada y los shocks recientes en los precios, es decir, retornos inesperados.

Dependiendo del estado predicho por la cadena de Mrkov, se usa un modelo Garch especifico para dicho estado, cada estado tiene su propio comportamiento de volatilidad, esto permite que el modelo capte la volatilidad dentro de cada estado específico del mercado.

Por ejemplo Suponga que el mercado hoy está en un estado bajista (Estado 4), la cadena de Markov dice que hay una probabilidad del 18.18% de que el mercado permanezca bajista al día siguiente, pero también una probabilidad del 38.18% de que pase a un estado estable. Esta probabilidad es útil para simular qué estado es más probable que ocurra al día siguiente:

- Si el mercado se mantiene en un estado bajista (Estado 4), se usa un modelo GARCH ajustado para capturar la volatilidad típica de los mercados en tendencia bajista. Dicho modelo predice la volatilidad basada en la volatilidad y los shocks recientes en ese estado.
- Si el mercado pasa al estado estable (Estado 3), se usa un modelo GARCH con menor volatilidad, ya que los mercados estables tienden a tener menos fluctuaciones en los precios.

3.3 Datos

3.3.1 Fuentes de Datos

Los datos históricos utilizados fueron extraídos de Investing.com una plataforma utilizada para el análisis de mercados financieros en tiempo real, en este caso, corresponden al precio histórico del café (US Coffee C), una referencia clave en el mercado de futuros de café.

Los datos utilizados corresponden al periodo comprendido entre el 18 de enero de 2023 y el 30 de abril de 2024, lo que proporciona una visión detallada del comportamiento reciente del mercado de café. Se utilizó el precio del cierre diario para la modelación.

Entre otros valores, también se incluye el precio de apertura, máximo, mínimo, el volumen y la varianza. Limpieza de los Datos y análisis

```
coffee_data.head()
```

	Fecha	Último	Apertura	Máximo	Mínimo	Vol.	% var.
322	2023-01-18	155.00	151.55	156.05	151.50	18100.0	258.0
321	2023-01-19	154.60	154.50	157.55	153.60	18130.0	-26.0
320	2023-01-20	154.80	154.45	155.40	151.85	12910.0	13.0
319	2023-01-23	158.55	154.75	159.95	154.50	25540.0	242.0
318	2023-01-24	159.85	158.95	161.25	156.85	21920.0	82.0

Figure 3.1: fig:Muestra de datos

Para asegurar la calidad y precisión de los datos históricos del precio del café utilizados en este proyecto, se realizó un proceso de limpieza que incluyó la transformación de valores numéricos y fechas. En primer lugar, las columnas numéricas como Último, Apertura, Máximo y Mínimo, que contenían precios con comas como separadores decimales, fueron ajustadas reemplazando las comas por puntos y convirtiéndolas a valores flotantes.

Finalmente se realizó un pequeño análisis para estudiar el comportamiento de los precios:

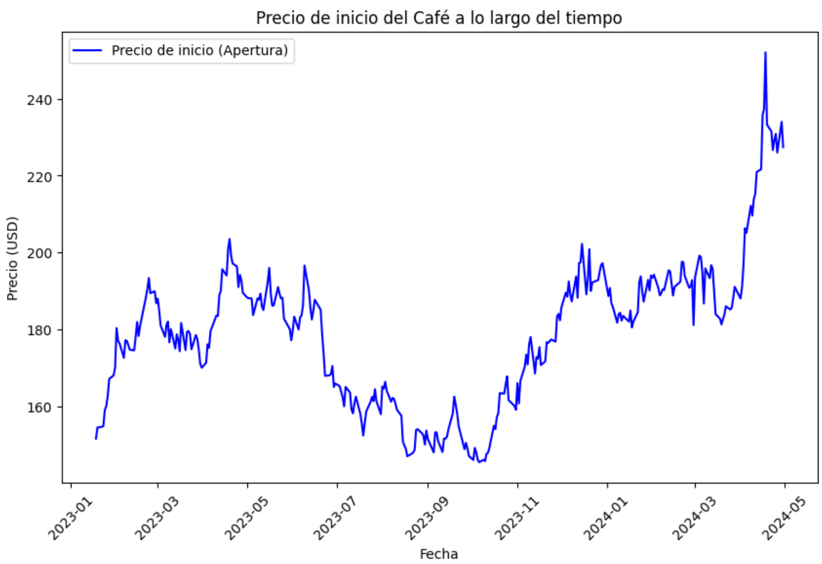

Figure 3.2: Precios apertura

La gráfica del precio de inicio (apertura) muestra una tendencia ascendente general durante el periodo analizado, con fluctuaciones significativas. Se observa un pico marcado hacia el primer trimestre de 2024, lo que sugiere un incremento considerable en la demanda o algún evento externo que impulsó el precio. Aunque hay caídas notables a mediados de 2023, el mercado parece haber recuperado su estabilidad con un fuerte crecimiento hacia finales del periodo.

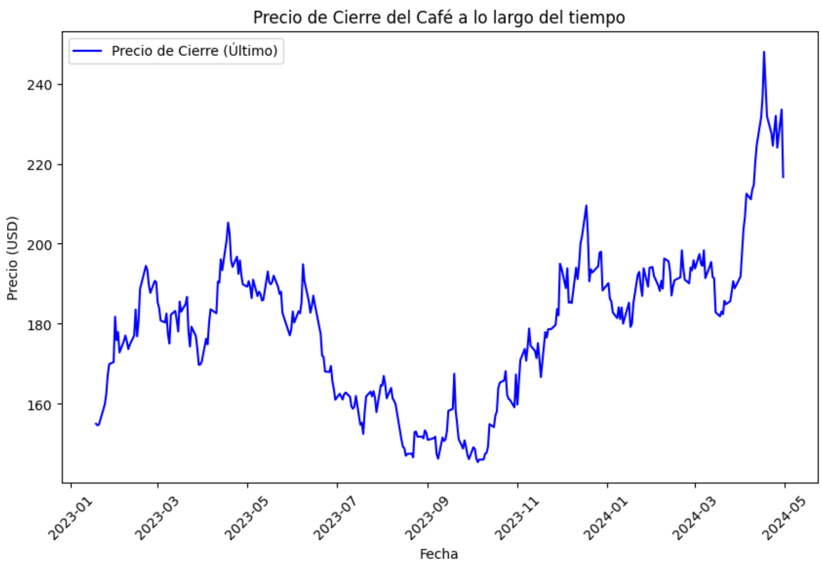

Figure 3.3: Precios cierre

El comportamiento del precio de cierre sigue un patrón muy similar al precio de apertura, con un aumento pronunciado hacia el primer trimestre de 2024. Las fluctuaciones observadas durante el periodo destacan un mercado que experimenta subidas y bajadas rápidas, lo que refleja una alta volatilidad. La consistencia entre el precio de inicio y el de cierre indica que las fuerzas del mercado son relativamente estables a lo largo del día, pero con cambios significativos entre días.

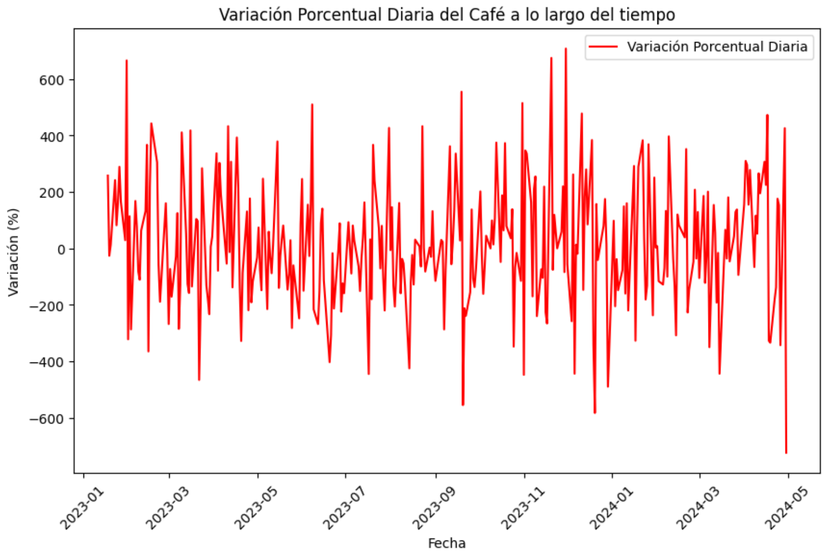

Figure 3.4: Variación Porcentual Diaria del Café

La gráfica de variación porcentual diaria muestra una alta volatilidad a lo largo del tiempo, con fluctuaciones diarias de gran magnitud, tanto positivas como negativas. Estas variaciones reflejan un mercado extremadamente dinámico y sensible, donde los precios del café experimentan cambios abruptos. La amplia dispersión de los valores sugiere que el mercado del café está expuesto a factores externos impredecibles, lo que hace que los precios varíen de manera significativa en cortos periodos de tiempo.

3.4 Validación y Pruebas

3.4.1 Backtest

Para probar el rendimiento del modelo se utiliza la técnica de backtesting. El backtest realizado tuvo como objetivo evaluar la capacidad del modelo para predecir tanto el estado del mercado como los precios futuros del café. Se utilizaron datos de un periodo posterior al entrenamiento del modelo, específicamente desde el 30 de mayo de 2024 hasta el 30 de agosto de 2024, para verificar su rendimiento en un escenario real.

El backtest reveló que: aunque el modelo tiene algunas desviaciones en la predicción de precios exactos, fue capaz de captar las tendencias generales del mercado y anticipar correctamente las fases clave de volatilidad. Esto lo convierte en una herramienta valiosa para la predicción y el análisis de escenarios futuros en el mercado del café, estos fueron los 5 primeros días de predicción con el modelo:

```
[70] backtest_results.head()
```

	Fecha	Precio Real	Precio Predicho	Estado Real	Estado Predicho
1	2024-08-29	251.80	250.501899	2	1
2	2024-08-28	260.45	252.500814	1	4
3	2024-08-27	259.40	262.036862	3	3
4	2024-08-26	253.65	260.024203	5	2
5	2024-08-23	251.20	254.355963	3	4

Figure 3.5: Tabla backtest

También se graficaron los precios de apertura para poder visualizar mejor los resultados:

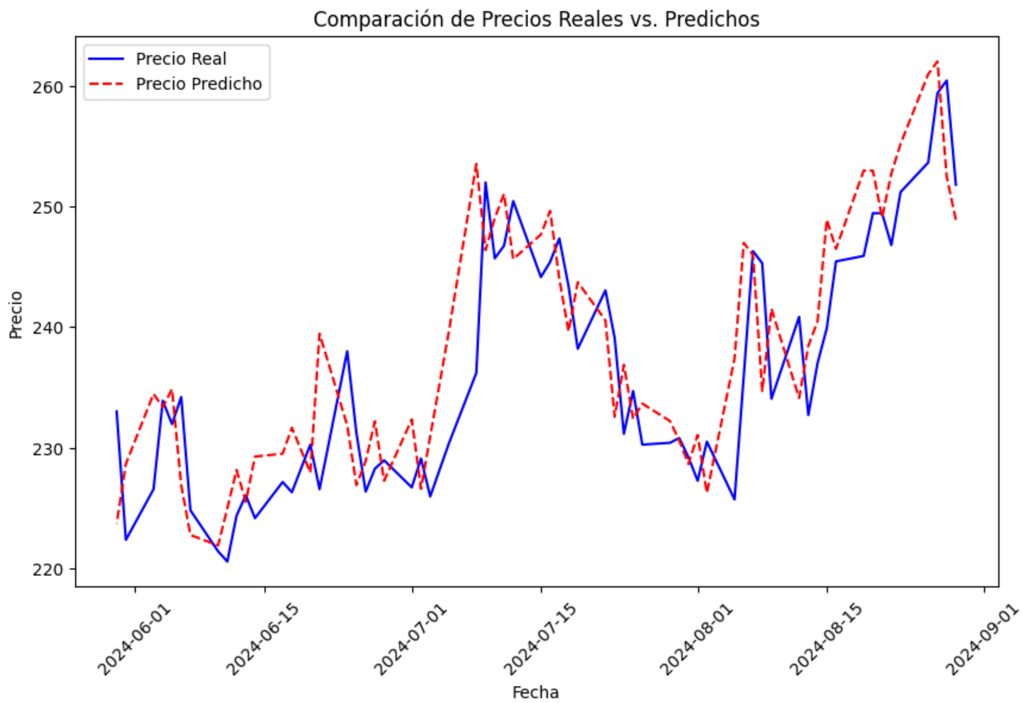

Figure 3.6: backtest precios

Estos resultados demuestran la capacidad del modelo para adaptarse a los abruptos cambios del mercado pues predice correctamente las tendencias alcistas y bajistas. Indica también que el modelo es robusto en la predicción de fases de crecimiento y caída, lo que lo convierte en una herramienta útil para analizar el comportamiento futuro del mercado del café. Sin embargo, en algunos puntos se observan desviaciones significativas, lo que sugiere que la precisión del modelo podría mejorarse ajustando los parámetros de volatilidad o utilizando técnicas adicionales de ajuste.

Chapter 4

Resultados Esperados

4.1 Predicción del estado del mercado futuro

Se implemento una pequeña función en el notebook que se encuentra en el repositorio llamado **proyecyto.ipynb**, en el último apartado hay una celda bajo el titulo de **Predicciones por parte del usuario**, como su nombre lo indica tiene como objetivo realizar predicciones del precio del café para el día siguiente, dado que se tienen los retornos y la cadena de Markov previamente ajustados, lo único que realmente necesita el usuario es el precio actúal del café y el número de días a predecir, a continuación algunos ejemplos:

```
Ingrese el precio actual del café: 245
Ingrese el número de días a predecir: 10
Día 1: Precio Predicho = 243.29 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
Día 2: Precio Predicho = 242.55 USD, Estado Predicho = Estable
Día 3: Precio Predicho = 242.84 USD, Estado Predicho = Alcista
Día 4: Precio Predicho = 243.96 USD, Estado Predicho = Muy Alcista
Día 5: Precio Predicho = 242.26 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
Día 6: Precio Predicho = 242.55 USD, Estado Predicho = Alcista
Día 7: Precio Predicho = 242.21 USD, Estado Predicho = Bajista
Día 8: Precio Predicho = 241.48 USD, Estado Predicho = Estable
Día 9: Precio Predicho = 239.79 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
Día 10: Precio Predicho = 238.11 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
```

Figure 4.1: Predicción precio del café a 10 días

```
Ingrese el precio actual del café: 176
Ingrese el número de días a predecir: 20
Día 1: Precio Predicho = 176.21 USD, Estado Predicho = Alcista
Día 2: Precio Predicho = 177.03 USD, Estado Predicho = Muy Alcista
Día 3: Precio Predicho = 176.49 USD, Estado Predicho = Estable
Día 4: Precio Predicho = 177.31 USD, Estado Predicho = Muy Alcista
Día 5: Precio Predicho = 177.52 USD, Estado Predicho = Alcista
Día 6: Precio Predicho = 178.06 USD, Estado Predicho = Estable
Día 7: Precio Predicho = 177.52 USD, Estado Predicho = Estable
Día 8: Precio Predicho = 176.28 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
Día 9: Precio Predicho = 175.74 USD, Estado Predicho = Estable
Día 10: Precio Predicho = 175.50 USD, Estado Predicho = Bajista
Día 11: Precio Predicho = 175.26 USD, Estado Predicho = Bajista
Día 12: Precio Predicho = 176.07 USD, Estado Predicho = Muy Alcista
Día 13: Precio Predicho = 176.28 USD, Estado Predicho = Alcista
Día 14: Precio Predicho = 175.74 USD, Estado Predicho = Estable
Día 15: Precio Predicho = 175.95 USD, Estado Predicho = Alcista
Día 16: Precio Predicho = 175.42 USD, Estado Predicho = Estable
Día 17: Precio Predicho = 175.95 USD, Estado Predicho = Estable
Día 18: Precio Predicho = 175.71 USD, Estado Predicho = Bajista
Día 19: Precio Predicho = 174.48 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
Día 20: Precio Predicho = 174.69 USD, Estado Predicho = Alcista
```

Figure 4.2: Predicción precio del café a 20 días

```
Ingrese el precio actual del café: 263
Ingrese el número de días a predecir: 30
Día 1: Precio Predicho = 264.22 USD, Estado Predicho = Muy Alcista
Día 2: Precio Predicho = 263.85 USD, Estado Predicho = Bajista
Día 3: Precio Predicho = 264.65 USD, Estado Predicho = Estable
Día 4: Precio Predicho = 263.85 USD, Estado Predicho = Estable
Día 5: Precio Predicho = 264.17 USD, Estado Predicho = Alcista
Día 6: Precio Predicho = 263.80 USD, Estado Predicho = Bajista
Día 7: Precio Predicho = 264.12 USD, Estado Predicho = Alcista
Día 8: Precio Predicho = 264.92 USD, Estado Predicho = Estable
Día 9: Precio Predicho = 265.73 USD, Estado Predicho = Estable
Día 10: Precio Predicho = 266.53 USD, Estado Predicho = Estable
Día 11: Precio Predicho = 267.35 USD, Estado Predicho = Estable
Día 12: Precio Predicho = 265.48 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
Día 13: Precio Predicho = 265.79 USD, Estado Predicho = Alcista
Día 14: Precio Predicho = 263.94 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
Día 15: Precio Predicho = 264.74 USD, Estado Predicho = Estable
Día 16: Precio Predicho = 262.89 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
Día 17: Precio Predicho = 261.05 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
Día 18: Precio Predicho = 260.26 USD, Estado Predicho = Estable
Día 19: Precio Predicho = 258.43 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
Día 20: Precio Predicho = 257.65 USD, Estado Predicho = Estable
Día 21: Precio Predicho = 258.84 USD, Estado Predicho = Muy Alcista
Día 22: Precio Predicho = 258.48 USD, Estado Predicho = Bajista
Día 23: Precio Predicho = 256.68 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
Día 24: Precio Predicho = 255.90 USD, Estado Predicho = Estable
Día 25: Precio Predicho = 256.68 USD, Estado Predicho = Estable
Día 26: Precio Predicho = 257.46 USD, Estado Predicho = Estable
Día 27: Precio Predicho = 257.10 USD, Estado Predicho = Bajista
Día 28: Precio Predicho = 256.32 USD, Estado Predicho = Estable
Día 29: Precio Predicho = 257.10 USD, Estado Predicho = Estable
Día 30: Precio Predicho = 255.30 USD, Estado Predicho = Muy Bajista
```

Figure 4.3: Predicción precio del café a 30 días

4.2 Simulaciones

En el proceso del diseño del modelo , se implementaron diferentes alternativas que arrojaron diversos resultados a la hora de las simulación , lo que permitió corregir errores y ajustar parámetros tanto del régimen como de la cadena para encontrar un equilibrio entre tiempo y complejidad , a continuación algunas de las simulaciones mencionadas.
Primeramente se utilizaron tres estados: Alcista, estable y bajista, en adición para determinar el cambio entre estados se utilizaron umbrales fijos.

	Fecha	Precio Real	Precio Predicho	Estado Real	Estado Predicho
1	2024-08-29	251.80	287.818736	1	2
2	2024-08-28	260.45	291.993384	1	2
3	2024-08-27	259.40	302.024133	3	2
4	2024-08-26	253.65	323.688405	2	1
5	2024-08-23	251.20	294.138688	2	2

Figure 4.4: Simulación con 3 estados

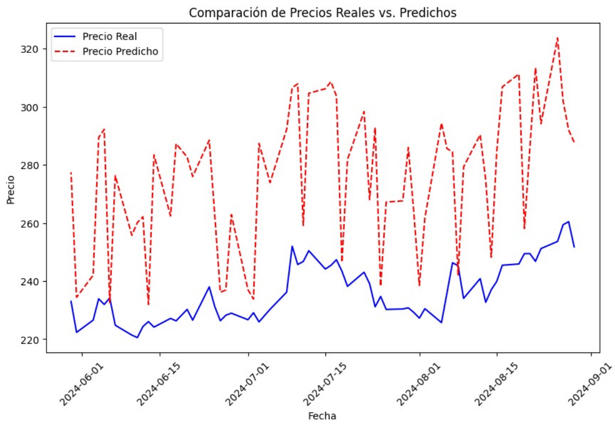

Figure 4.5: Simulación con 3 estados

Seguidamente se modificaron los umbrales con el fin de mejorar las predicciones, por ejemplo si el retorno superaba en 0.5 unidades al retorno anterior entonces se consideraba un estado alcista, ahora se baja el umbral a 0.3, obteniendo lo siguiente:

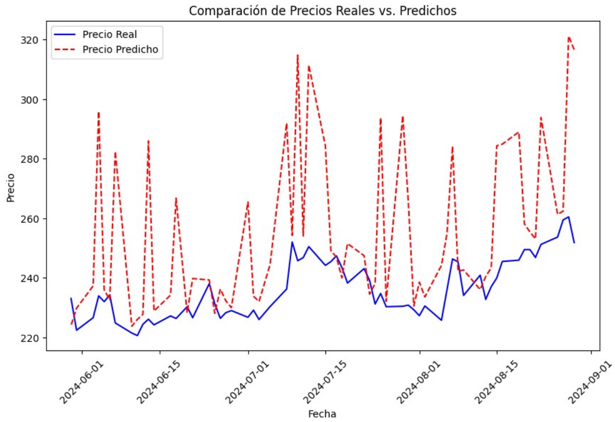

Figure 4.6: Simulación con 3 estados

Luego se experimentó el uso dos estados más: Un estado muy alcista y un estado muy bajista:

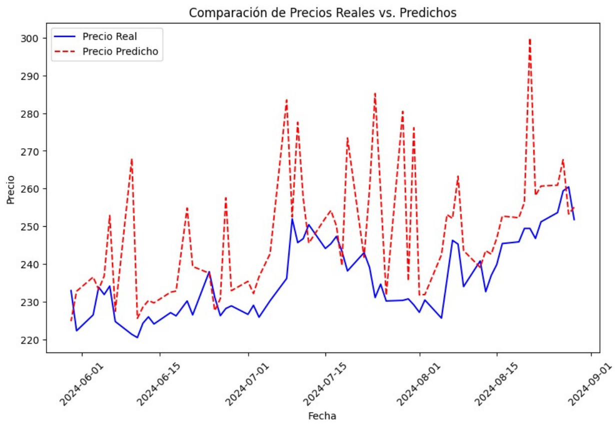

Figure 4.7: Simulación con 5 estados y algunos ajustes de parámetros

En un paso siguiente se intentó ajustar los umbrales con la media de los retornos para intentar capturar un poco mejor el dinamismo de los precios:

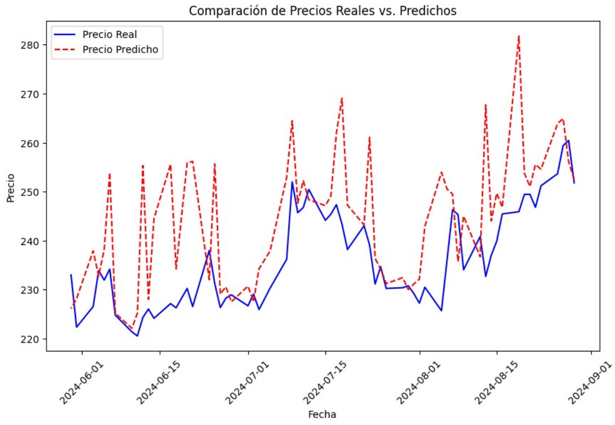

Figure 4.8: Simulación con 5 estados y ajuste de parámetros en régimen

Finalmente se incluyó también como parte del modelo final la desviación estándar para capturar mejor las transiciones entre los estados, obteniendo así un resultado bastante acertado:

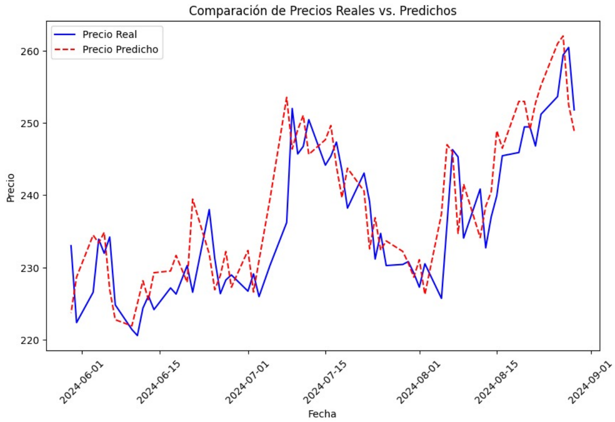

Figure 4.9: Simulación con 5 estados y parámetros finales

4.3 Comparación con Métodos Tradicionales

Se comparan los resultados obtenidos en la predicción del comportamiento del mercado haciendo uso del modelo con cadenas de Markov con cambio de régimen vs algunos de los métodos tradicionales , para el commodity (café) , con el fin de resaltar que el modelo captura el dinamismo del mercado de manera eficiente.

4.3.1 Modelo:

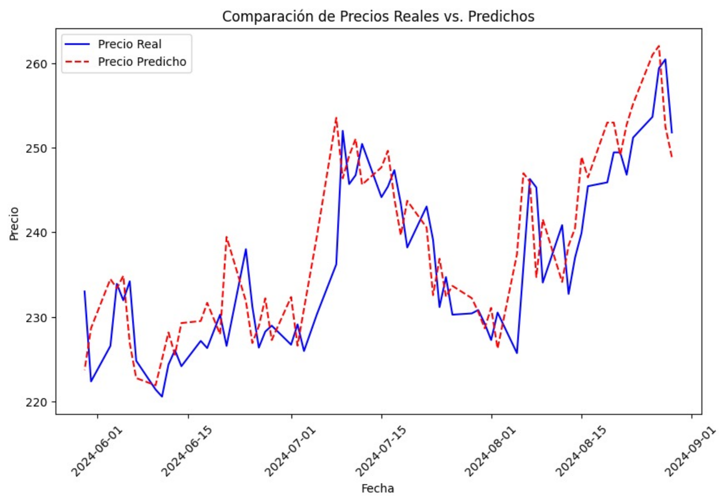

Figure 4.10: Comportamiento del mercado por el Modelo

4.3.2 Análisis técnico:

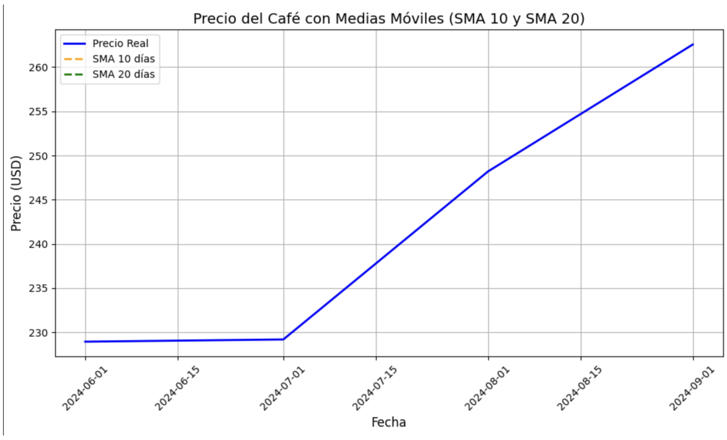

Figure 4.11: Comportamiento del mercado por Análisis técnico

El análisis técnico considera indicadores de tendencia , Se pueden utilizar medias móviles (simple o exponencial), que ayudan a identificar las tendencias a largo, mediano y corto plazo. La pendiente de estas medias puede indicar si el mercado está en una fase alcista, bajista o estable. Sin embargo la simulación arroja una pendiente pronunciada que no considera el dinamismo del mercado.

4.3.3 Modelo econométrico:

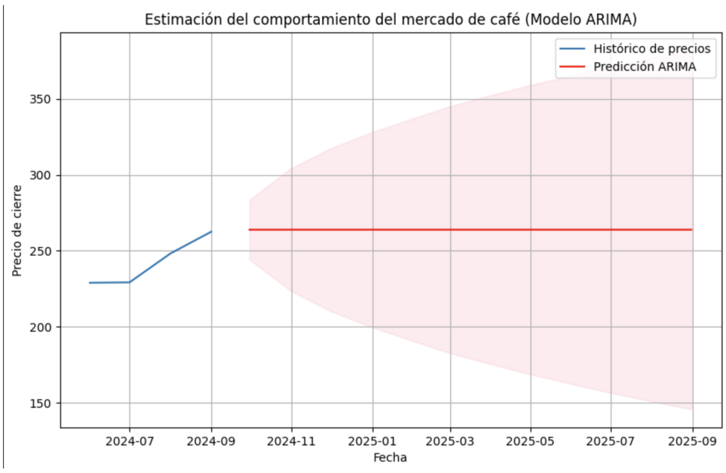

Figure 4.12: Comportamiento del mercado por Modelo econométrico

Estos modelos pueden predecir los movimientos de los precios en función de su comportamiento histórico. Las fases del mercado pueden ser inferidas al observar la evolución de las predicciones del modelo. Aunque este modelo tiene una gran posibilidad de predicción a futuro , el comportamiento inicial no considera fielmente los estados del mercado en los que se mueve el conjunto de datos.

Modelo ETS

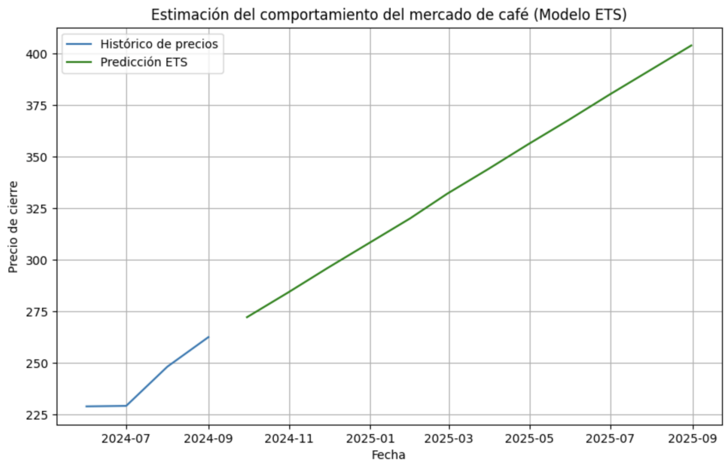

Figure 4.13: Comportamiento del mercado por Modelo ETS

Este enfoque se utiliza para hacer pronósticos que dependen de la tendencia y la estacionalidad del mercado. Para activos como el café, que tienen variaciones estacionales, los modelos ETS pueden identificar patrones cíclicos que se alinean con fases alcistas o bajistas. En el momento de la simulación este modelo aunque identifica los pratrones se queda corto en predicción , pues necesita un conjunto mayor de datos.

4.4 Estrategias de inversión

Según los resultados obtenidos por la implementación del modelo haciendo uso de cadenas de Markov con cambio de régimen, sugerimos las siguientes estrategias de inversión, basadas en el posible comportamiento del mercado, según los datos ingresados.

- **Pasos para el estudio del mercado:**

  1. **Identifique sus datos**

     Descargue los datos del commodity que desea estudiar , preferiblemente de la pagína Investing.com formato Csv.

  2. **Haga uso del modelo de cadenas de Markov con cambio de régimen que se encuentra en el siguiente** Repositorio

     Cargue los datos anteriormente obtenidos , en el modelo y ejecute el programa.

  3. **Identifique la predicción asociada al posible estado del mercado**

     Observe el resultado que ofrece el programa , e identifique el estado futuro del mercado , que cuenta con la siguiente enumeración:

     - **(1) Muy alcista**
     - **(2) Alcista**
     - **(3) Estable**
     - **(4) Bajista**
     - **(5) Muy Bajista**

  4. **Siga la estrategia de inversión apta para su caso**

- **Estrategias por estado del mercado:**

  1. **Estrategia en mercado muy alcista (commodities)**

     - **Compra agresiva de contratos de futuros**: Invierte de manera significativa en futuros de commodities que se encuentren en una fuerte tendencia alcista (por ejemplo, petróleo o metales como el cobre).

     - **Apalancamiento elevado**: Usa apalancamiento en la compra de futuros o ETFs relacionados con las commodities para aprovechar la tendencia alcista.

- **Compra de opciones de compra (*Call Options*)**: Compra opciones de compra para asegurar precios bajos en commodities antes de que suban más.

- **Inversión en compañías mineras o productoras**: Invierte en acciones de empresas vinculadas a la producción de la commodity (por ejemplo, en empresas petroleras o mineras).

2. **Estrategia en mercado alcista (commodities)**

   - **Compra moderada de contratos de futuros**: Invierte en futuros de commodities que tengan una tendencia alcista pero con un crecimiento más controlado.

   - **Apalancamiento moderado**: Usa apalancamiento de manera moderada para aumentar tu exposición, pero sin asumir un riesgo elevado.

   - **Compra y mantén (*Buy and Hold*)**: Mantén tus posiciones en las commodities durante la tendencia alcista.

   - **Venta de opciones de compra (*Covered Call*)**: Si ya posees futuros o acciones relacionadas, vende opciones de compra para obtener ingresos adicionales.

3. **Estrategia en mercado estable (commodities)**

   - **Rango de trading (*Range Trading*)**: Aprovecha la estabilidad del mercado para comprar commodities cuando sus precios están en el rango bajo y vender cuando están en el rango alto.

   - **Venta de opciones de compra (*Call Options*)**: Genera ingresos vendiendo opciones de compra cuando los precios se acercan a niveles máximos.

   - **Diversificación**: Diversifica tu cartera en varias commodities para minimizar el riesgo en un mercado sin tendencia clara.

   - **Bonos y activos defensivos**: Mantén una parte de la cartera en bonos u otros activos refugio.

4. **Estrategia en mercado bajista (commodities)**

   - **Cobertura con opciones de venta (*Put Options*)**: Compra opciones de venta para proteger tu cartera ante la caída de precios de commodities.

   - **Venta en corto (*Short Selling*)**: Vende en corto contratos de futuros de commodities que anticipes que seguirán bajando.

   - **Reducción de exposición**: Reduce posiciones en commodities y busca inversiones más seguras en sectores defensivos.

   - **Inversiones defensivas**: Cambia tu enfoque hacia sectores que sean menos vulnerables a la caída de precios de commodities.

5. **Estrategia en mercado muy bajista (commodities)**

   - **Venta agresiva en corto**: Aprovecha la fuerte caída vendiendo en corto commodities con precios que anticipes que seguirán cayendo.

   - **Compra de opciones de venta profundas (*Deep Out of The Money Put Options*)**: Compra opciones de venta con precios de ejercicio bajos para obtener ganancias significativas en commodities que estén en fuertes caídas.

   - **Cierre de posiciones largas**: Cierra todas las posiciones largas en commodities para evitar mayores pérdidas.

   - **Inversión en activos refugio**: Cambia tu cartera hacia activos seguros como bonos del gobierno o divisas fuertes para proteger el capital.

4.5 Ejemplo Práctico: Precio del Café

- **Mercado Alcista**
  Compra contratos de futuros de café o acciones de empresas relacionadas con la producción y distribución de café. Mantén estas posiciones mientras el mercado permanezca en esta fase.

- **Mercado Bajista**
  Vende futuros de café o reduce posiciones en acciones vinculadas al sector. Usa opciones de venta (*put options*) para cubrir las posibles pérdidas.

- **Mercado Estable**
  Realiza operaciones de rango, comprando futuros o acciones del café en momentos bajos y vendiendo cuando alcanzan picos dentro del rango.

Chapter 5

Conclusiones

A lo largo del trabajo se presentan conclusiones experimentales y comparaciones que permiten desarrollar las siguientes ideas , con buena fundamentación.

- **Eficacia de los Modelos de Cadenas de Markov:** Los modelos de cadenas de Markov con cambio de régimen demuestran ser herramientas efectivas para capturar la dinámica del mercado, permitiendo la identificación y adaptación a diferentes regímenes de inversión (alcista, bajista, etc.).

- **Optimización de Carteras:** La implementación de estrategias de inversión basadas en cambios de régimen mejora la optimización de carteras al ajustar las asignaciones de activos en función del estado del mercado, lo que puede resultar en rendimientos más estables y menores riesgos.

- **Predicción de Rendimientos:** Los modelos permiten predecir rendimientos futuros de activos financieros con mayor precisión al considerar la probabilidad de transiciones entre diferentes estados del mercado, lo que proporciona información valiosa para la toma de decisiones.

- **Flexibilidad y Adaptabilidad:** Las estrategias de inversión diseñadas con cadenas de Markov con cambio de régimen son flexibles y se pueden adaptar a diferentes activos y condiciones del mercado, lo que las convierte en una herramienta versátil para inversores.

- **Evidencia Empírica:** Los resultados empíricos obtenidos durante el proyecto validan la aplicación de cadenas de Markov con cambio de régimen en la optimización de carteras, mostrando mejoras en comparación con enfoques tradicionales.

- **Implementación Práctica:** La implementación de modelos de cadenas de Markov con cambio de régimen en gestión de inversiones se facilita mediante herramientas de programación como Python, lo que permite automatizar estrategias basadas en datos en tiempo real.

- **Limitaciones y Oportunidades de Mejora:** Aunque los modelos son útiles, es importante considerar sus limitaciones, como la necesidad de datos históricos robustos y la complejidad en la calibración de parámetros.

- **Recomendaciones para Inversores:** Se recomienda a los inversores principiantes considerar la inclusión de modelos de cadenas de Markov con cambio de régimen en su análisis de riesgo y rendimiento, así como en la formulación de estrategias de inversión personalizadas.

5.1 Reflexiones del Equipo sobre la Experiencia del Proyecto

Por último nos gustaría agregar que realizar este proyecto ha sido una experiencia altamente enriquecedora para nuestro equipo. Desde el inicio, nos enfrentamos a desafíos que nos llevaron a profundizar en el estudio de las cadenas de Markov y su aplicación en la optimización de carteras de inversión. Este proceso no solo nos permitió adquirir conocimientos teóricos, sino que también fortaleció nuestras habilidades prácticas en programación y análisis de datos.

El trabajo colaborativo fue fundamental. Cada miembro del equipo aportó perspectivas únicas, lo que nos permitió abordar problemas complejos desde diferentes ángulos. La discusión y el intercambio de ideas enriquecieron nuestras soluciones y nos llevaron a descubrir enfoques innovadores que no habríamos considerado individualmente. Además, la experiencia de implementar modelos y analizar datos del mercado real nos dio una comprensión más profunda de cómo funcionan las estrategias de inversión en un contexto práctico. Ver cómo nuestros modelos podían predecir resultados y optimizar decisiones nos brindó una gran satisfacción y motivación para seguir aprendiendo.

Enfrentamos momentos de frustración, especialmente al ajustar los modelos y tratar de obtener resultados coherentes, pero cada obstáculo superado se convirtió en una oportunidad de aprendizaje. La perseverancia y el trabajo en equipo nos enseñaron la importancia de la resiliencia y la adaptabilidad en el ámbito académico y profesional.

En resumen, este proyecto no solo nos ha permitido aplicar y ampliar nuestros conocimientos en finanzas y matemáticas, sino que también ha fortalecido nuestra capacidad para trabajar en equipo y enfrentar desafíos de manera efectiva. Estamos agradecidos por la oportunidad de haber trabajado juntos en este proyecto y esperamos que los conocimientos adquiridos nos sirvan en nuestras futuras carreras.

Chapter 6

Cronograma

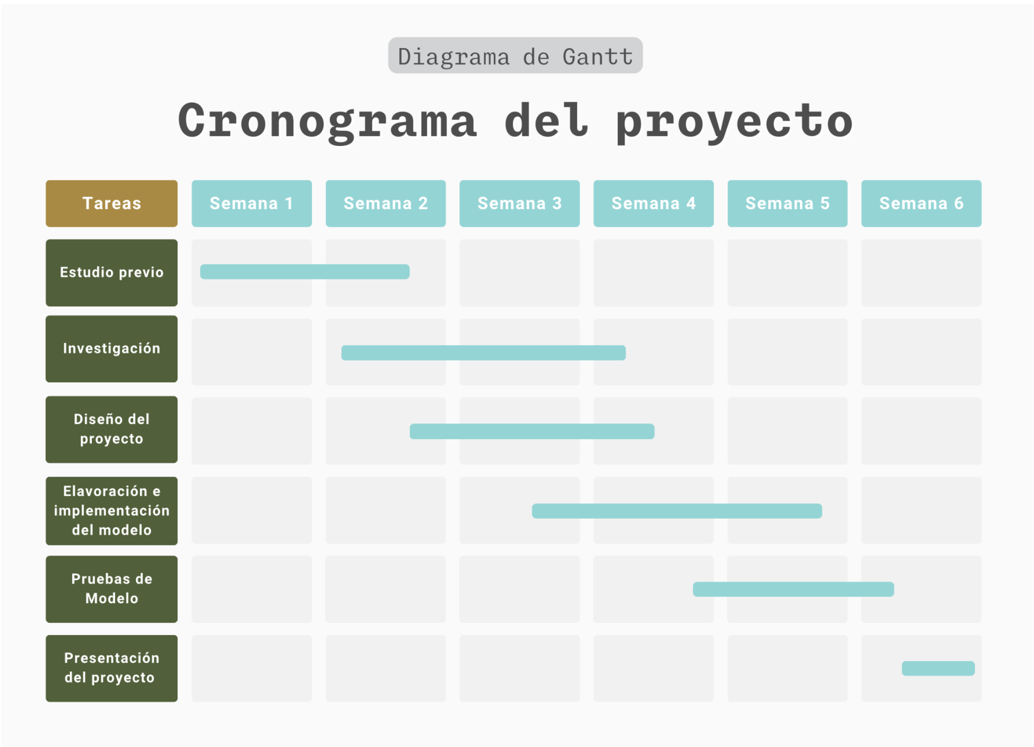

Figure 6.1: Cronograma proyecto final

Chapter 7

Recursos Necesarios

7.1 Herramientas y Software

En el desarrollo de este proyecto, se hace uso de diversas herramientas y software especializados que facilitan el análisis, la implementación de modelos y la validación de resultados. A continuación, se describen las principales herramientas empleadas:

- **Python:** Python es el principal lenguaje de programación utilizado en este proyecto debido a su versatilidad y su extensa biblioteca de herramientas científicas. Python proporciona una amplia gama de paquetes que facilitan la modelización financiera, la simulación de procesos estocásticos, el análisis de datos y la visualización de resultados.

En el desarrollo el proyecto también fue de suma importancia la implementación de las bibliotecas **arch** y **`statsmodels.tsa.regime_switching.markov_regression`** pero , ¿por qué y cómo funcionan?

Biblioteca Arch: Es una herramienta especializada para el modelado y análisis de la heterocedasticidad condicional, incluyendo los modelos ARCH (Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) y GARCH (Generalized ARCH). Fue desarrollada por Kevin Sheppard

- **Modelo GARCH(p,q):** El modelo *GARCH* (Generalized ARCH) fue propuesto por Tim Bollerslev en 1986 para generalizar el modelo ARCH. En el modelo GARCH, la varianza condicional depende no solo de los errores pasados, sino también de las varianzas condicionales anteriores.

  El modelo GARCH(p, q) está dado por:

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{7.1}$$

Donde:

- $\omega > 0$,
- $\alpha_i \geq 0$ y
- $\beta_j \geq 0$.

ϵ_{t-i}^2 es el cuadrado de los residuos anteriores. σ_{t-j}^2 es la varianza condicional anterior.

El modelo GARCH(1,1), que es el más común, tiene la forma:

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \tag{7.2}$$

Esto significa que la varianza condicional hoy depende de la varianza condicional de ayer y del error de ayer. A menudo, el modelo GARCH(1,1) captura adecuadamente la volatilidad observada en muchas series financieras.

Biblioteca statsmodels.tsa.regime_switching.markov_regression :

La librería statsmodels en Python incluye el módulo regime_switching. markov_regression, que se utiliza para trabajar con modelos de cambio de régimen basados en cadenas de Markov. Este módulo es útil para modelar series temporales que pueden cambiar entre diferentes estados o regímenes, como las series financieras que pueden experimentar cambios en la volatilidad o en el comportamiento de las series debido a eventos económicos.

- **markov_regression en Modelos de Cambio de Régimen**: Implementa modelos como el Markov Switching Regression Model, que puede cambiar entre diferentes regímenes (o estados) con probabilidades de transición específicas.

  - **1. Modelo de Regresión con Cambio de Régimen**

    En `statsmodels`, el modelo de cambio de régimen se define como una regresión en la que los parámetros pueden cambiar dependiendo del régimen en el que se encuentra el sistema en un momento dado. Matemáticamente, se expresa como:

$$y_t = \beta_{0,s_t} + \beta_{1,s_t} x_t + \epsilon_t \tag{7.3}$$

Donde:

* y_t es la serie temporal de interés.
* x_t son las variables independientes.
* β_{0,s_t} y β_{1,s_t} son los coeficientes de regresión que dependen del régimen s_t.
* ϵ_t es el término de error, que se supone que sigue una distribución normal con varianza que puede depender del régimen.

– **2. Proceso de Markov para los Regímenes**

El régimen s_t sigue un proceso de Markov. Esto significa que la probabilidad de estar en un régimen en el tiempo t depende solo del régimen en el tiempo $t-1$, y no de los regímenes anteriores. Las probabilidades de transición entre regímenes se modelan usando una matriz de transición P:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \tag{7.4}$$

Donde:

* p_{ij} es la probabilidad de transición del régimen i al régimen j.
* La probabilidad de que el régimen cambie de i a j en el siguiente período es p_{ij}.

– **3. Estimación de Parámetros**

La estimación de los parámetros del modelo se realiza mediante el método de máxima verosimilitud. Este proceso incluye:

* Estimación de los parámetros de regresión (β_0, β_1, etc.) para cada régimen.
* Estimación de la varianza de los errores (σ^2) para cada régimen.
* Estimación de las probabilidades de transición entre los regímenes.

La función de verosimilitud para el modelo Markov Switching se calcula considerando las probabilidades de transición y los parámetros de regresión para cada régimen.

– **4. Cálculo de la Verosimilitud**

Para calcular la verosimilitud en un modelo Markov Switching:

* Se asume una distribución normal para los errores ϵ_t con varianza $\sigma^2_{s_t}$ dependiente del régimen s_t.
* La verosimilitud condicional para una observación dada el régimen es:

$$\mathcal{L}(y_t \mid s_t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2_{s_t}}} \exp\left(-\frac{(y_t - (\beta_{0,s_t} + \beta_{1,s_t}x_t))^2}{2\sigma^2_{s_t}}\right) \tag{7.5}$$

* La función de verosimilitud total se obtiene integrando sobre todas las posibles secuencias de regímenes, ponderadas por las probabilidades de transición:

$$\mathcal{L}(\mathbf{y} \mid \theta) = \sum_{s_1, s_2, \ldots, s_T} \left[\prod_{t=1}^{T} \mathcal{L}(y_t \mid s_t, \theta) \cdot P(s_{t-1}, s_t)\right] \tag{7.6}$$

– **5. Predicción**

Una vez que el modelo ha sido ajustado y los parámetros estimados, se pueden realizar predicciones sobre futuros valores de la serie temporal. Estas predicciones consideran tanto los efectos de los regímenes actuales como la probabilidad de transición a otros regímenes.

7.2 Recursos Humanos

El proyecto es llevado a cabo por estudiantes de la Universidad Nacional de Colombia, actualmente inscritos en el curso de Cadenas de Markov y aplicaciones , dentro de las competencias del equipo se encuentran:

- **Conocimientos en Cadenas de Markov:** Competencia en la teoría y aplicación de modelos de Markov, adquirida a través del curso.

- **Habilidades en Programación:** Experiencia en Python y sus bibliotecas para modelización.

- **Capacidades Analíticas:** Habilidad para analizar datos y extraer conclusiones significativas.

- **Conocimientos Financieros:** Entendimiento básico de conceptos financieros aplicables a la modelización de riesgos y rendimientos de activos.

7.3 Datos

Para la implementación y análisis del modelo de Markov con cambio de régimen en el proyecto, se utilizarón datos que proporcionan información esencial sobre los precios y rendimientos de activos financieros.

- **Datos Financieros Históricos:** Se utilizarón datos históricos de precios y rendimientos de activos financieros , como acciones en el mercado cafetero. Estos datos fueron fundamentales para calibrar y validar el modelo de Markov con cambio de régimen.
  - **Fuente:** Los datos fueron obtenidos de Investing.com, que ofrece una amplia base de datos de precios históricos y otros indicadores financieros.
  - **Formato:** Los datos estan disponibles en formatos como CSV y Excel, los cuales fueron importados en Python utilizando bibliotecas como Pandas para su análisis.

Chapter 8

Bibliografía

8.1 Articulos y Trabajos Académicos

- Johannes, M., Polson, N. (2009). Markov Chain Monte Carlo Methods for Financial Asset Pricing. In Handbook of Financial Econometrics: Tools and Techniques, Vol. 1, pp. 1-72. Recuperado de SSRN

  Descripción: Este artículo explora el uso de métodos de Monte Carlo basados en cadenas de Markov para la valoración de activos financieros y la optimización de carteras.

- Ang, A., Timmermann, A. (2012). Regime-Switching Models in Finance. Annual Review of Financial Economics, 4, 313-337. Recuperado de Annual Reviews

  Descripción: Este artículo revisa los modelos de cambio de régimen, que son un tipo específico de cadenas de Markov, aplicados a diferentes problemas financieros, incluida la optimización de carteras.

- Hamilton, J. D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. Econometrica, 57(2), 357-384.

  Descripción: Se introduce un nuevo método para analizar series temporales no estacionarias y los ciclos económicos utilizando modelos de cambio de régimen de Markov. Propone que las fluctuaciones económicas pueden ser modeladas como transiciones entre diferentes estados o regímenes, cada uno con sus propias características

estadísticas.

- Guidolin, M., Timmermann, A. (2007). A Markov Chain Approach to Asset Allocation. Journal of Economic Dynamics and Control, 31(11), 3504-3544. Recuperado de Elsevier

  Descripción: Este trabajo examina el uso de modelos de cadenas de Markov para la asignación de activos y demuestra cómo se pueden aplicar para mejorar la toma de decisiones en la gestión de carteras.

- Maheu, J. M., McCurdy, T. H. (2000). Dynamic Asset Allocation with Regime Switching. International Journal of Forecasting, 16(3), 509-529. Recuperado de Elsevier

  Descripción: Este artículo presenta un modelo de asignación dinámica de activos que incorpora cambios de régimen, utilizando cadenas de Markov para capturar la dinámica del mercado.

- Hardy, M. (2001). Discrete Time Markov Chain Approaches for Financial Market Modelling. North American Actuarial Journal, 5(2), 41-57. Recuperado de JSTOR

  Descripción: Explora cómo las cadenas de Markov en tiempo discreto se pueden utilizar para modelar mercados financieros y optimizar carteras de inversión.

- Markowitz, H. (1952). ”Portfolio Selection”. The Journal of Finance, 7(1), 77-91. doi:10.2307/2975974.

  Descripción: Markowitz introduce el concepto de diversificación y presenta un modelo matemático para la selección de una cartera óptima de activos. La principal contribución del trabajo es el desarrollo del enfoque de media-varianza, donde los inversores pueden minimizar el riesgo (varianza) para un nivel dado de retorno esperado o, alternativamente, maximizar el retorno esperado para un nivel dado de riesgo.

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

8.2 Libros

- Häggström, O (2002) Finite Markov Chains and Algorithmic Applications ,Cambridge University

  Descripción: Este libro ofrece una importante base teórica y asi mismo ejemplos que ilustran de manera adecuada la implementacion de las cadenas de Markov

- Krolzig, H.-M. (1997). Markov-Switching Vector Autoregressions: Modelling, Statistical Inference, and Application to Business Cycle Analysis. Springer.

  Descripción: En este libro,se presenta una extensión de los modelos VAR (Vector AutoRegressions) tradicionales al incorporar regímenes de cambio de Markov. Estos modelos permiten que los parámetros del VAR cambien entre diferentes estados de acuerdo con un proceso de Markov, lo que proporciona una mayor flexibilidad para capturar las dinámicas no lineales y los cambios estructurales en los datos económicos.

- Gagniuc, P. A. (2018). Markov Chains: From Theory to Implementation and Experimentation. Wiley. Recuperado de Wiley

  Descripción: Este libro ofrece una visión completa sobre las cadenas de Markov, desde la teoría hasta su implementación práctica, incluyendo aplicaciones financieras.

- Cont, R., Tankov, P. (2004). Financial Modelling with Jump Processes. CRC Press. Recuperado de CRC Press

  Descripción: Este libro aborda modelos financieros que incluyen procesos de salto y cambios de régimen, aplicables a la optimización de carteras utilizando cadenas de Markov.

8.3 Tesis y Disertaciones

- Srivastava, A. (2009). Markov Chain Models for Financial Market Prediction. Tesis doctoral, Universidad de Waterloo. Recuperado de

Universidad de Waterloo

Descripción: Esta tesis examina el uso de modelos de cadenas de Markov para la predicción de mercados financieros y la optimización de carteras.