INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CONJUNTOS / I-2022

Andrés Villaveces

`Laboratorio / Cardinales, Teorema de Cantor, Teorema de Cantor-Bernstein`

Discusión - Temas sueltos para ir pensando

Problema: ¿son siempre *comparables* los cardinales?

A priori, podríamos tener conjuntos A y B tales que $A \npreceq B$ y $B \npreceq A$. En ese caso, los "cardinales" de A y de B no serían comparables. Más adelante veremos cómo el Axioma de Elección **elimina** esa posibilidad.

Una de las consecuencias que estudiaremos (muy pronto) del Axioma de Elección es que todo conjunto se puede bien-ordenar, y por lo tanto poner en biyección con un ordinal. Un **cardinal** será entonces oficialmente un *ordinal minimal*: κ es cardinal ssi es ordinal y no existe $\alpha < \kappa$ tal que α y κ son equipotentes.

Para lo que sigue, podrás usar sin restricción los teoremas de Cantor (dado A, $A \prec \wp(A)$ pero $A \not\approx \wp(A)$) y de Cantor-Bernstein (si $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A \approx B$).

Laboratorio

Entre los conjuntos siguientes, debes examinar todas las parejas (A, B) y decidir cuáles satisfacen $A \preceq B$, cuáles $A \prec B$, cuáles $A \approx B$. Como ya puedes usar Cantor-Bernstein, el problema es mucho más fácil en caso de equipotencia ($A \approx B$), pues basta exhibir las dos *in*yecciones $f : A \to B$ y $g : B \to A$.

$$\mathbb{R}$$
$$2^{\mathbb{N}}$$
$$Seq(\mathbb{N}) = \bigcup_{n<\omega} \mathbb{N}^n$$
$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$$
$$\mathbb{R}^{\mathbb{Q}}$$
$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}^{\mathbb{R}}}$$
$$\mathbb{C}^{\mathbb{C}}$$
$$\aleph_1^{\aleph_0}$$
$$\beth_\omega$$
$$\{F \subseteq \mathbb{R} \mid F \text{ es cerrado}\}$$
$$\{\alpha \text{ ordinal} \mid \exists f : \alpha \to \mathbb{R} \text{ estrictamente creciente}\}$$
$$\varepsilon_0$$
$$\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid f \text{ es calculable}\}$$
$$[2, 5[$$
$$\mathbb{L} = (]0, 1] \times \omega_1, <_{\text{lex}})$$

$$\wp(\mathbb{R})$$
$$2^{\mathbb{Q}}$$
$$2^{<\omega} = \bigcup_{n<\omega} 2^n$$
$$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$$
$$\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$$
$$2^{2^{2^{\omega}}}$$
$$\bigcup_{n<\omega} \mathbb{R}^n$$
$$\aleph_\omega$$
$$\{U \subseteq \mathbb{R} \mid U \text{ es abierto}\}$$
$$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f'(0) = 0\}$$
$$\{\alpha \text{ ordinal} \mid \exists R \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ con } t.o.(\mathbb{N}, R) = \alpha\}$$
$$\beth_{\beth_0}$$
$$\mathbb{Q}^{\text{alg}}$$
$$[0, 1]$$
$$\{\alpha \text{ ordinal} \mid \exists f : \alpha \to \mathbb{L} \text{ estrictamente creciente}\}$$

La idea de estas preguntas es que

- Ampliamos nuestro cálculo de cardinales a muchos otros dominios,
- Nos vemos obligados a usar de maneras creativas lo que sabemos de otros cursos, para armar las inyecciones o biyecciones (pero Cantor-Bernstein nos simplifica el trabajo),
- Nos obligan a mirar estructura de reales, racionales, etc.

En clase trabajaremos por grupos. Lleven lo máximo que puedan preparado de una vez; en laboratorio mañana intentaremos clasificar todo esto, y aclarar dudas.