Examen final introducción a la teoría de conjuntos

Introducción a la teoría de conjuntos. Segundo Sem., 2020

Grupo Matemonstruos

Christian Camilo Pabón Useche
David Enrique Molina Rodríguez
Edison Camilo Huérfano Villalba
Sebastian Leonardo Molina Diaz

Estudiantes de ciencias de la computación
Universidad Nacional de Colombia Sede Bogotá

Diciembre 12 del 2020

1. Reales y teoría de conjuntos

1. Para los siguientes conjuntos A, diga si son $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ o $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ (o $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$), y encuentre el minimo α tal que A está en la clase correspondiente:

   a) $\mathbb{Q}$

   Solución.

   Sea $r \in \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Observe que en particular, como $(-\infty, r) \cup (r, \infty) \in \mathbf{\Sigma}^0_1$, por definición se tiene que $\{r\} \in \mathbf{\Pi}^0_1$. Además, note que $\bigcup_{r\in\mathbb{Q}}\{r\} = \mathbb{Q}$, luego $\mathbb{Q}$ es la unión contable de conjuntos cerrados —sabemos que $|\,\mathbb{Q}\,| = |\,\mathbb{N}\,|$, entonces hay una cantidad contable de *singletons* $\{r\}$ con elemento $r \in \mathbb{Q}$—. Por lo tanto, $\mathbb{Q} \in \mathbf{\Sigma}^0_2$.

   Note también que $\mathbb{Q}$ no es abierto ni cerrado en $\mathbb{R}$. Si se supone que $\mathbb{Q}$ es abierto, luego para todo $r \in \mathbb{Q}$ existe un $\varepsilon > 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subset \mathbb{Q}$. Pero existe un $q \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$ tal que $q \in (r-\varepsilon, r+\varepsilon) \subset \mathbb{R}$, entonces $(r-\varepsilon, r+\varepsilon) \not\subset \mathbb{Q}$, lo cual es contrario a lo que se supuso anteriormente, y luego $\mathbb{Q}$ no puede ser abierto. Por un argumento similar, se puede ver que $\mathbb{Q}$ tampoco puede ser cerrado. Así, $\mathbb{Q} \notin \mathbf{\Sigma}^0_1$ y $\mathbb{Q} \notin \mathbf{\Pi}^0_1$, por lo tanto el mínimo α posible es $\alpha = 2$. **Nota:** Por el argumento anterior, podemos ver que $\mathbb{I} \in \mathbf{\Pi}^0_2$.

   $\square$

   b) $\mathbb{R}$

   Solución.

   Dado que la jerarquía de Borel se construye sobre el espacio topológico de los reales $(\mathbb{R}, \tau)$, por definición de topología sabemos que $\mathbb{R}$, $\emptyset \in \tau$, donde τ es topología respecto a $\mathbb{R}$. Por lo tanto sabemos que tanto $\mathbb{R}$ como $\emptyset$ son abiertos. Además, el complemento de el conjunto vacío $\emptyset^C = \mathbb{R}$ es cerrado bajo la topología. Como $\mathbb{R}$ es cerrado, entonces $\mathbb{R}^C = \emptyset$ es abierto. Así, $\mathbb{R}$ y $\emptyset$ son abiertos y cerrados al mismo tiempo, por lo cual se les denomina conjuntos *clopen*. Por lo tanto, $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathbf{\Sigma}^0_1$ $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathbf{\Pi}^0_1$ y $\mathbb{R}, \emptyset \in \mathbf{\Delta}^0_1$. Así el mínimo α posible es $\alpha = 1$.

   $\square$

c) $[0,1)$

Solución.

Note que $[0,1)$ lo podemos escribir como la siguiente unión contable de cerrados:

$$[0,1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[0,\ 1-\frac{1}{n+2}\right]$$

Cuando n tiende a infinito, existe $\varepsilon = \frac{1}{n+2}$ que va a ser la distancia entre el extremo derecho del intervalo cerrado y 1, por lo cual, esta unión contable nunca incluirá al 1. Por esta razón, $[0,1) \in \mathbf{\Sigma}^0_2$. Además, $[0,1) \notin \mathbf{\Sigma}^0_1$ porque no es abierto y $[0,1) \notin \mathbf{\Pi}^0_1$ porque $[0,1)$ no es cerrado. Si definimos la siguiente unión contable:

$$(-\infty,0)\cup[1,\infty) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(-\infty,\ 0-\frac{1}{n+2}\right] \cup [1,\infty)$$

podemos ver que $(-\infty,0)\cup[1,\infty) \in \mathbf{\Sigma}^0_2$. Sin embargo, $\mathbb{R}\setminus(-\infty,0)\cup[1,\infty) = [0,1)$, luego $[0,1)\in\mathbf{\Pi}^0_2$. Así, $[0,1)\in\mathbf{\Delta}^0_2$ y el mínimo α posible es $\alpha = 2$.

$\square$

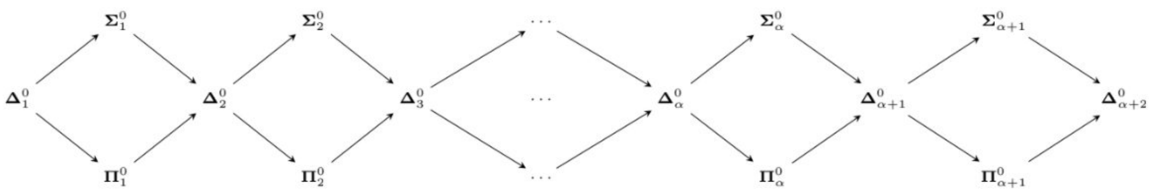
d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right)$

Solución.

Observe que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right) = [\frac{1}{2},1)\cup[\frac{1}{3},\frac{1}{2})\cup[\frac{1}{4},\frac{1}{3})\cup\cdots = (0,1)$. Además, $(0,1)$ es abierto y por lo tanto, $(0,1)\in\mathbf{\Sigma}^0_1$ y $(0,1)\notin\mathbf{\Pi}^0_1$. Así, el mínimo α tal que $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1}\right) \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ es $\alpha = 1$.

$\square$

2. Demuestre que el diagrama siguiente es correcto, si interpreta las flechas como contenencias.



De hecho, esas contenencias son todas estrictas, pero es más difícil demostrarlo en general. Usted puede, sin embargo, verificar que la contenencia entre **abiertos** y **conjuntos** G_δ es estricta (es decir, que $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_2$) mediante un ejemplo; igualmente, es fácil ver que $\mathbf{\Pi}^0_1 \subsetneq \mathbf{\Pi}^0_2$, (es decir que hay conjuntos F_σ que no son cerrados). Encuentre ejemplos de estos. Por último, ¿puede dar un conjunto que esté en $\mathbf{\Delta}^0_2$?

Solución.

Se puede ver que $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_2 = F_\sigma$. En el literal *a)* del punto anterior vimos cómo $\mathbb{Q}\in F_\sigma$ no es abierto ni cerrado y por lo tanto, $\mathbb{Q}\notin\mathbf{\Sigma}^0_1$ y $\mathbb{Q}\notin\mathbf{\Pi}^0_1$. Sin embargo, se puede probar que todo abierto se puede expresar como la unión contable de cerrados, por lo tanto, para todo abierto $A\in\mathbf{\Sigma}^0_1$, $A\in\mathbf{\Sigma}^0_2$. Por el argumento anterior, es claro que $\mathbb{I}\in G_\sigma$ pero $\mathbb{I}\notin\mathbf{\Sigma}^0_1$ y $\mathbb{I}\notin\mathbf{\Pi}^0_1$. Sin embargo, todo cerrado es elemento de G_δ (ya que análogamente, todo cerrado se puede escribir como la intersección contable de abiertos). Por lo tanto, es claro que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Sigma}_1^0 &\subsetneq \mathbf{\Sigma}_2^0 = F_\sigma \\
\mathbf{\Pi}_1^0 &\subsetneq \mathbf{\Sigma}_2^0 = F_\sigma \\
\mathbf{\Sigma}_1^0 &\subsetneq \mathbf{\Pi}_2^0 = G_\delta \\
\mathbf{\Pi}_1^0 &\subsetneq \mathbf{\Pi}_2^0 = G_\delta
\end{aligned}$$

Por lo cual, en $\mathbf{\Delta}_2^0$ podemos encontrar a todos los abiertos y a todos los cerrados respecto a $\mathbb{R}$. Además, como vimos en el literal c) del punto anterior, $[0,1) \in \mathbf{\Delta}_2^0$ es un ejemplo de un conjunto que está en $\mathbf{\Delta}_2^0$.

Con los argumentos anteriores, hemos probado la contenencia para $\alpha = 1$, luego haremos inducción transfinita para probar las contenencias en general:

- *Caso base*: La contenencia se cumple para $\alpha = 1$
- *Caso sucesor*: Suponga que para un ordinal α arbitrario, se tiene que $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0 \subseteq \mathbf{\Sigma}_{\alpha+1}^0$, $\mathbf{\Pi}_\alpha^0 \subseteq \mathbf{\Sigma}_{\alpha+1}^0$, $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0 \subseteq \mathbf{\Pi}_{\alpha+1}^0$ y $\mathbf{\Pi}_\alpha^0 \subseteq \mathbf{\Pi}_{\alpha+1}^0$. Probemos que en efecto, esto se cumple para $\alpha+1$. Por definición, tenemos que:

  $$\mathbf{\Sigma}_{\alpha+2}^0 = \{X = \bigcup_{i<\omega} X_i \mid X_i \in \mathbf{\Pi}_{\alpha_i}^0 \text{ para algún } \alpha_i < \alpha+2\}$$

  En particular, para todo $A \in \mathbf{\Pi}_{\alpha_i}^0$ con $\alpha_i = \alpha+1 < \alpha+2$, entonces $\bigcup_{i<\omega} A = A$ y por lo tanto $A \in \mathbf{\Sigma}_{\alpha+2}^0$. Así $\mathbf{\Pi}_{\alpha+1}^0 \subseteq \mathbf{\Sigma}_{\alpha+2}^0$. Por los complementación de los elementos de $\mathbf{\Sigma}_{\alpha+2}^0$ respecto a $\mathbb{R}$, es fácil de ver que $\mathbf{\Sigma}_{\alpha+1}^0 \subseteq \mathbf{\Pi}_{\alpha+2}^0$. Por esta última razón, por complementación de los elementos de $\mathbf{\Pi}_{\alpha+2}^0$ respecto a $\mathbb{R}$ se puede ver que $\mathbf{\Pi}_{\alpha+1}^0 \subseteq \mathbf{\Sigma}_{\alpha+2}^0$, y similarmente, $\mathbf{\Sigma}_{\alpha+1}^0 \subseteq \mathbf{\Sigma}_{\alpha+2}^0$.
- *Caso límite*: Suponga que las contenencias se cumplen para todo $\alpha < \lambda$ con λ un ordinal límite. Por definición tenemos que:

  $$\mathbf{\Sigma}_\lambda^0 = \{X = \bigcup_{i<\omega} X_i \mid X_i \in \mathbf{\Pi}_{\alpha_i}^0 \text{ para algún } \alpha_i < \lambda\}$$

  Con un razonamiento similar al del caso sucesor, se puede ver que $\mathbf{\Sigma}_{\alpha_i}^0 \subseteq \mathbf{\Sigma}_\lambda^0$, $\mathbf{\Pi}_{\alpha_i}^0 \subseteq \mathbf{\Sigma}_\lambda^0$, $\mathbf{\Sigma}_{\alpha_i}^0 \subseteq \mathbf{\Pi}_\lambda^0$ y $\mathbf{\Pi}_{\alpha_i}^0 \subseteq \mathbf{\Pi}_\lambda^0$ para todo $\alpha_i < \lambda$. Luego se cumple el caso límite.

Para probar que las anteriores contenencias son estrictas en general, se necesita ver que $\mathbb{R}$ con la topología usual es un espacio polaco incontable, y que para todo ordinal $1 \leq \alpha < \omega_1$ existe $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$ que no es $\mathbf{\Pi}_\alpha^0$, para lo cual se necesita de la noción de un conjunto universal y la cerradura de $\mathbf{\Sigma}_\alpha$ —denominadas clases aditivas— en preimágenes continuas (Srivastava, 1998).

□

3. Demuestre que la jerarquía necesariamente se detiene después de ω_1 pasos. Es decir, que $\mathbf{\Sigma}_{\omega_1}^0 = \mathbf{\Sigma}_{\omega_1+1}^0 = \mathbf{\Pi}_{\omega_1}^0 = \mathbf{\Pi}_{\omega_1+1}^0$. Ayuda: use que $\aleph_1$ es un cardinal regular. Es decir, que si toma una unión contable de conjuntos en $\mathbf{\Sigma}_{\alpha_i}^0$ con índices $\alpha_i < \omega_1$, existe $\alpha < \omega_1$ tal que la unión de los conjuntos está en $\mathbf{\Sigma}_\alpha^0$.

   Solución.

   Como es propuesto en (Srivastava, 1998):

   Definición: Un álgebra sobre X es una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de X tal que:

   a) $X \in \mathcal{A}$.

   b) Si $A \in \mathcal{A}$, entonces $X \setminus A \in \mathcal{A}$.

   c) $\mathcal{A}$ es cerrado bajo uniones finitas.

Sí $\mathcal{A}$ es cerrada bajo uniones contables, entonces se le denomina σ-álgebra. Sea X un espacio metrizable, definimos a $\mathfrak{B}_{\mathbb{X}}$ como σ-álgebra de Borel respecto a la topología de X. En particular, $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ es la σ-álgebra respecto a la topología de $\mathbb{R}$. Por inducción transfinita sobre $1 \leq \alpha < \omega_1$, observe que $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha \subseteq \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$ y $\mathbf{\Pi}^0_\alpha \subseteq \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, ya que como caso base todo abierto y todo cerrado está en $\mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. Para probar las otras contenencias, sea:

$$\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$$

Es evidente de nuevo que a). todos los abiertos de $\mathbb{R}$ están en $\mathfrak{B}$, b). por el literal anterior vimos que si $A \in \mathbf{\Sigma}^0_\alpha$, entonces $\mathbb{R} \setminus A = A^C \in \mathbf{\Pi}^0_\alpha \subseteq \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$, luego $\mathfrak{B}$ es cerrado bajo complementación, y c). sea $\{B_n\}$ una secuencia en $\mathfrak{B}$. Si se elige un $1 \leq \alpha_n < \omega_1$ tal que $B_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha_n}$ y $\alpha = \sup\, \alpha_n + 1$, entonces $\bigcup B_n \in \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$ y así, $\mathfrak{B}$ es cerrado bajo uniones contables. Así, $\mathfrak{B}$ es una σ-álgebra tal que $\mathfrak{B} = \bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$. De manera similar se prueba que $\bigcup_{\alpha<\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha = \mathfrak{B}_{\mathbb{R}}$, y por lo tanto se dice que la jerarquía de Borel se estabiliza en ω_1.

□

4. Demuestre que el cardinal de $\mathbf{\Sigma}^0_1$ es $2^{\aleph_0}$. Ayuda: use que los racionales son densos en los reales, y que todo abierto es unión de intervalos con extremos racionales. **Así, el número de conjuntos abiertos es "pequeño" comparado con el número de todos los subconjuntos,** $2^{2^{\aleph_0}}$.

   Solución.

   Como se propone en [5]. Se puede ver que la siguiente es una función inyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbf{\Sigma}^0_1$:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbf{\Sigma}^0_1$$
$$a \to (a, \infty)$$

   También podemos encontrar una función inyectiva de $\mathbf{\Sigma}^0_1$ en $\mathbb{R}$. Observe que si $A \in \mathbf{\Sigma}^0_1$ —esto es, si A es un abierto— entonces se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos con extremos racionales, es decir, si $a, b \in \mathbb{Q}$, entonces $A = \bigcup_{a\in A}(a-b, a+b)$ —intervalos abiertos con centro en a y radio b—. Luego podemos definir:

$$g : \mathbf{\Sigma}^0_1 \to \mathbb{R}$$
$$a \to b$$

   donde $a-b$ y $a+b$ son los extremos racionales de los abiertos que queremos unir. Como existen dichas funciones inyectivas f y g, es fácil de ver por el teorema de Cantor-Bernstein que $|\mathbf{\Sigma}^0_1| = |\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$.

□

Pregunta especial 1A:

1. Demuestre que todo conjunto cerrado no contable debe tener cardinal $2^{\aleph_0}$. Ayuda: puede usar temas de libros de Análisis Real. **Nota importante: lo anterior vale en realidad a lo largo de toda la jerarquía.**

   Para probar dicho teorema es necesario aclarar y entender ciertas definiciones y teoremas. Siguiendo a (Kechris, 2012):

   Definición. Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\{x_n\}$ una sucesión de elementos de X. Dicha sucesión es de Cauchy si $\lim_{m\to n} d(x_m, x_n) = 0$. Se dice que (X, d) es completo si para toda sucesión de Cauchy en X, el límite está en X. Un espacio es completamente metrizable si existe una métrica d tal que (X, d) es completo. Si además este espacio es separable —esto es, que el espacio contiene un conjunto denso—, entonces se denomina **espacio polaco**.

   Definición. Un punto límite de un espacio topológico X es un punto x tal que para toda vecindad abierta U de x, existe un punto $y \in U$ y $x \neq y$. un espacio es perfecto si todos sus puntos son puntos límite. Si $P \subseteq X$, se dice que P es perfecto en X si P es cerrado y perfecto en su topología relativa. Un punto $X \in X$ es punto de condensación si toda vecindad abierta de x es no contable.

Definición. Un esquema de Cantor es una familia de subconjuntos $\{A_s\}_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ de X —$2^{<\mathbb{N}}$ son las sucesiones finitas formadas a partir de 0's y 1's—, tal que:

i) $A_{s1} \cap A_{s0} = \emptyset$, para todo $s \in 2^{<\mathbb{N}}$.

ii) $A_{si} \subseteq A_s$, para todo $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, $i \in \{0, 1\}$.

Teorema. Sea X un espacio polaco no vacío. Si $\mathcal{C} = 2^{\mathbb{N}}$ es el espacio de Cantor —cadenas infinitas de 0's y 1's— entonces hay un encaje (una función $f : \mathcal{C} \to X$ continua y abierta) de $\mathcal{C}$ en X.

Demostración.

Se define un esquema de Cantor $\{U_s\}_{s\in 2^{<\mathbb{N}}}$ en X tal que:

i) U_s es abierto y no vacío.

ii) $\sup\{d(x, y) : x, y \in U_s\} \leq 2^{-|s|}$, donde $|s|$ es la longitud (o cardinalidad) de la sucesión.

iii) $\overline{U_{si}} \subseteq U_s$, para $s \in 2^{<\mathbb{N}}$, $i \in \{0, 1\}$, y $\overline{U_{s-i}}$ es el límite topológico superior de U_{s-i}.

Luego, para $x \in \mathcal{C}$, $\bigcap_n U_{x|n} = \bigcap_n \overline{U_{x|n}}$ es un singleton, ya que es la intersección finita y decreciente —note que $\sup\{d(x, y) : x, y \in U_s\}$ se reduce cuando $|s|$ aumenta—. Así, podemos definir:

$$f : \mathcal{C} \to X$$

$$c \to \bigcap_n U_{x|n}$$

Se puede ver que f es un encaje, y se define el esquema de Cantor en X por inducción sobre $|s|$. Intuituvamente esta construcción es la manera de separar el espacio X a la manera en que se crea el conjunto de Cantor —eliminando un intervalo de "longitudün tercio ubicado a la mitad del intervalo, iteradamente—.

□

Como consecuencia del teorema anterior, se tiene el siguiente corolario, el cual que muestra que cualquier subconjunto perfecto (y por tanto cerrado) tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.

Corolario. Todo espacio polaco perfecto no vacío tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$. Además, todo subconjunto no vacío de un espacio polaco tiene cardinalidad $2^{\aleph_0}$.

2. Demuestre que todo Boreliano es analítico y co-analítico (luego $\boldsymbol{\Delta}^1_1$). De hecho, los borelianos son exactamente la clase $\boldsymbol{\Delta}^1_1$.

   Para probar dicho teorema es necesario aclarar y entender ciertas definiciones y teoremas. Siguiendo a (Kechris, 2012):

   Teorema (Teorema de separación de Suslin). Sea X un espacio de Borel estándar y sean $A, B \subseteq X$ conjuntos analíticos disjuntos. Entonces existe un boreliano $C \subseteq X$ tal que C separa a A y B, esto es, $A \subseteq C$ y $C \cap B = \emptyset$.

   Demostración.

   Se asume que X es un espacio polaco. Sean $P, Q \subseteq X$, se denominan Borel-separables si existe un boreliano R que separa a P y Q.

   □

   Teorema (Teorema de Suslin). Sea X es espacio estándar de Borel. Luego $\mathbf{B}(X) = \boldsymbol{\Delta}^1_1$.

   Demostración.

   Usando el teorema anterior, tome a $B = X \setminus A$ □

2. Topología de ordinales

1. Demuestre que la descripción anterior da lugar a una topología sobre α. Es la "topología del orden" de α.

   Solución.

   Para ver que la descripción dada es en efecto una topología, debemos porobar que se cumplen las condiciones de una topología. Sea τ la familia de los abiertos respecto a α:

   a) $\emptyset, \alpha \in \tau$.
   Sea $\alpha \subseteq \alpha$. Observe que para todo $\beta \neq 0$, $\beta \subset \alpha$ —luego $\beta < \alpha$— existen $\gamma < \beta < \delta$ tales que $(\beta, \delta) \subseteq \alpha$. En particular, tome $S(\gamma) = \beta$ y $S(\beta) = \delta$, luego es claro que $(\gamma, \delta) = \{\beta\} \subset \alpha$.
   En el caso de $\beta = 0$, existe $\delta < \alpha$ tal que $[0, \delta) \subset \alpha$. Por lo cual α es un abierto y está en τ.
   Note que $\emptyset \subset \emptyset$, luego el conjunto vacío es abierto y $\emptyset \in \tau$.

   b) Si $U, V \in \tau$ entonces $U \cap V \in \tau$.
   Sean $U, V \in \tau$, por definición sabemos que $U, V \subseteq \alpha$. Si $U = V$, entonces $U \cap V = U \in \tau$. Ahora, sin pérdida de generalidad, suponga que $U \subset V$. Como $U, V \subseteq \alpha$ son ordinales, entonces $U \cap V = U$, y como U es abierto, $U \in \tau$.

   c) si $\mathfrak{C} \subseteq \tau$ entonces $\bigcup \mathfrak{C} \in \tau$.
   Observe que $\alpha \in \tau$, luego, para que τ no sea cerrado bajo uniones arbitrarias, debe existir $U \in \tau$ tal que $S(\alpha) \in \tau$, es decir $(\alpha \cup \{\alpha\}) \in \tau$ ya que cualquier ordinal mayor a α es recursivamente especificado por α.

   Luego τ es una topología.

   □

Pregunta especial 2:

¿Qué otras propiedades tienen los espacios topológicos sobre ordinales? (¿cuándo son de Hausdorff? ¿cuándo son conexos? ¿cuándo son discretos? ¿cuándo son metrizables?)

Solución.

Para estudiar algunas propiedades sobre las topologías en los ordinales, debemos tener claras algunas definiciones:

Definición: Una métrica (también función distancia) en un conjunto X, es una función $d = X \times X \to [0, \infty)$ tal que para todo $x, y, z \in X$:

$$d(x, y) = 0 \text{ si y solo si } x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \qquad \text{(Desigualdad triangular)}$$

A la pareja (X, d) se le denomina espacio métrico. En particular, si se define d como:

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & e.o.c \end{cases}$$

A la función d se le denomina métrica discreta.

Definición: Sean (X, d) un espacio métrico, $x \in X$ y $r > 0$: Se define una bola abierta en X como:

$$B(x, r) = \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

De manera análoga se define la bola cerrada con la condición de que $d(x, y) \leq r$. Sea τ la familia de las uniones de bolas abiertas en X, luego τ es la topología respecto a X, de la cual ya conocemos sus tres propiedades principales. Se dice que la topología es inducida por una función —en este caso por la métrica d—. En particular, si un espacio topológico es inducido por una métrica —como es el caso anterior—, entonces (X, τ) es un espacio metrizable. Si d es la métrica discreta, entonces se denomina espacio discreto.

$\square$

3. Relojería conjuntística

1. **Teorema de Forma Normal (Kleene).** Existen un predicado $T(e, x, y)$ (llamado el predicado-T Kleene) y una función $U(y)$ que son recursivos (en efecto, recursión primitiva) tal que:

$$\varphi_e(x) = U(\mu y T(e, x, y))$$

Explicación.

El predicado T es una relación que depende de la numeración de Gödel. Recordemos que dado un conjunto enumerable S, una *enumeración de Gödel* es una función:

$$f : S \to \mathbb{N}$$

donde f y su inversa (f^{-1}) son funciones computables. Las *funciones computables* son aquellas funciones que pueden ser calculadas por una maquina de Turing.

Informalmente, el predicado $T(e, x, y)$ afirma que y es el número código de alguna computación de Turing de acuerdo a un programa de Turing P_e con entrada x. Un numero de codigo asignado a P_e esta dado por la siguiente función:

$$y = 2^e \cdot \prod_{i \leq n} p_{i+1}^{\#(c_i)}$$

Para entender qué significa la expresión anterior —$\Pi_{i \leq n} p_{i+1}^{\#(c_i)}$—, debemos remontarnos a cómo funciona una máquina de Turing y qué es un programa de Turing:

Definición. Una máquina de Turing consiste de los siguientes componentes:

a) Un conjunto finito S llamado *alfabeto.*

b) Un elemento $\llcorner\!\lrcorner \in S$.

c) Un conjunto $A \subset S$ llamado *alfabeto externo*, tal que $\llcorner\!\lrcorner \notin A$.

d) Un conjunto finito Q, cuyos elementos son llamados *estados internos* de la máquina.

e) Un *estado* inicial $q_0 \in Q$.

f) Un mapeo parcial, específicamente:

$$\delta = Q \times S \to Q \times S \times \{R, L\}$$

Sea M una máquina de Turing, suponga que esta máquina tiene una cinta de dos caminos infinitos divididas en celdas, un lector que escanea una celda de la cinta a la vez, y un conjunto finito de estados internos. Cada celda puede tener el símbolo $\llcorner\!\lrcorner$ o tener un símbolo $s \in S$. En un solo paso, la máquina puede simultáneamente:

i) cambiar de un estado a otro,

ii) cambiar el símbolo escaneado s por otro símbolo s' teniendo encuenta que $s' \in S = \{1, B\}$, y

iii) mover el lector una celda a la izquiera o derecha de la cinta.

La operación de M es controlada por el mapeo parcial, el cual puede o no estar definido para algunos argumentos. La interpretación se puede entender pensando en que tenemos la quintupla $(q, s, q', s', X) \in \delta$, entonces la maquina M en estado q, escaneando el simbolo s cambia al estado q', reemplazando s por s' y moviendo el escaneo un cuadro a la derecha si $X = R$ o a la izquierda si $X = L$.

Un programa de Turing P con entrada x es una secuencia de configuraciones, $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tal que c_0 representa el máquina en el estado inicial q_1, leyendo el símbolo más a la izquierda de la entrada

x, c_n representa a la máquina en el estado de *halt* q_0, y la transición $c_i \to c_{i+1}$ para todo $i < n$, viene dada por el programa de Turing P. Cada configuración c_i se le asigna un número de cada $(q_i, s_j, q'_k, s'_l, r_m)$, dicho número es obtenido por:

$$p_0^{1+i} p_1^{1+j} p_2^{1+k} p_3^{1+l} p_4^{1+m},$$

Así, obtenemos un conjunto enumerable con los numeros correspondientes de cada configuracion $c_0, c_1, \ldots, c_n$ de P que llamaremos G, luego por enumeración de Gödel tenemos el conjunto G enumerable y por la función $y = 2^e \cdot \prod_{i \leq n} p_{i+1}^{\#(c_i)}$, donde $\prod_{i \leq n} p_{i+1}^{\#(c_i)}$ *es la productoria de todos los números del conjunto* G. Recordando que y es el número de código del programa P podemos concluir que también es un número de Gödel.

Volviendo al predicado $T(e, x, y)$, T es una función total que satisface la siguiente propiedad: $T(e, x, y) = 0$ si y solo si e es la codificación de una máquina de Turing M tal que existe $m \in N$ que es calculado por M con la entrada x en menos de $q(y)$ pasos de cálculo, donde $\lambda y q(y)$ es una función recursiva primitiva fija, independiente de e, x e y.

En cierto sentido, la función T incorpora en su definición a la definición de la función q. Ahora intentaremos definir de la forma más sencilla y compacta lo que es ser una función recursiva primitiva y una función parcial recursiva.

Partimos de que las funciones recursivas primitivas constituyen una clase muy grande de funciones computables que contienen casi todas las funciones en ω que se encuentran comúnmente en matemáticas. La clase de funciones recursivas primitivas es la clase C más pequeña de funciones cerradas bajo los siguientes esquemas:

i. La función sucesora, $\lambda x[x+1]$, está en C.

ii. Las funciones constantes, $\lambda x_1 \ldots x_n[m]$, están en $C, 0 \leq n, m$.

iii. Las funciones de identidad (también llamadas proyecciones), $\lambda x_1 \ldots x_n \left[x_i\right]$, están en C, con $1 \leq n$ y $1 \leq i \leq n$.

iv. (Composición) Si $g_1, g_2, \ldots, g_m, \quad h \in \mathcal{C}$, entonces:

$$f\left(x_1, \ldots, x_n\right) = h\left(g_1\left(x_1, \ldots, x_n\right), \ldots, g_m\left(x_1, \ldots, x_n\right)\right)$$

está en $\mathcal{C}$ donde $g_1, \ldots, g_m$ son funciones de n variables y h es una función de m variables.

v. (Recursión Primitiva) Si $g, h \in C$ y $n \geq 1$ entonces $f \in \mathcal{C}$, donde:

$$f\left(0, x_2, \ldots, x_n\right) = g\left(x_2, \ldots, x_n\right)$$
$$f\left(x_1+1, x_2, \ldots, x_n\right) = h\left(x_1, f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right), x_2, \ldots, x_n\right)$$

El conjunto de todas las funciones recursivas parciales es el conjunto más pequeño de funciones parciales, subconjunto de $\bigcup_{k \geq 0}\left(N^k \to N\right)$, que incluye (1) : (i) la función sucesora, (ii) las funciones cero, y (iii) las funciones de proyección y (2) se cierra con respecto a las siguientes operaciones: (iv) composición, (v) recursividad primitiva y minimalización μ con respecto al subconjunto de las funciones recursivas parciales mismas que son funciones totales.

Así en la expresion $U(\mu y[T(e, x, y) = 0])$ tenemos que para todo $e \geq 0$, U se define como la e-ésima función parcial recursiva de aridad 1. Cada función recursiva parcial de aridad 1 tiene infinitos índices, es decir por cada conjunto de funciones recursivas parciales sea $\varphi : N \to N$ existe un subconjunto infinito E de N tal que paratodo $e \in E$ tenemos que $\varphi(x) = U(\mu y\left[T(e, x, y) = 0\right])$.

□

Referencias

[1] Fraenkel, A., Frankel, P., Bar-Hillel, Y., Lévy, A., van Dalen, D. (1973). *Foundations of Set Theory: Vol. Second Edition.* Elsevier Gezondheidszorg.

[2] Hermes, H., Herman, G. T., Plassmann, O. (2012). *Enumerability · Decidability Computability.* Springer Publishing.

[3] Hrbacek, K., Jech, T. (1999). *Introduction to Set Theory, Revised and Expanded.* Marcel Dekker.

[4] Kechris, A. (2012). *Classical Descriptive Set Theory.* Springer Publishing.

[5] Kitaev, A., Shen, A., Vyalyi, M. (2002). *Classical and Quantum Computation.* Graduate Studies in Mathematics, Volume 47. American Mathematical Society.

[6] Prida, J. (s.d). *Generalización del teorema de la forma normal de Kleene al caso de la recursividad relativa.* https://revistas.ucm.es/index.php/BCCU/article/view/49949/46426

[7] *Prove that the family of open sets in* $\mathbb{R}$ *has cardinality equal to* $2^{\aleph_0}$. (Mayo 8, 2014). Mathematics Stack Exchange. https://math.stackexchange.com/questions/786678/prove-that-the-family-of-open-sets-in-mathbbr-has-cardinality-equal-to-2

[8] Rogers, H. (1987). *Theory of Recursive Functions and Effective Computability.* The MIT Press.

[9] Soare, R. (1999). *Recursively Enumerable Sets and Degrees.* Springer Publishing.

[10] Srivastava, S. M. (1998). *A Course on Borel Sets.* Springer Publishing.