INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CONJUNTOS / I-2022

Andrés Villaveces

`Magistral 8 / Construcción de los reales à la Dedekind / Axioma de Elección`

La vez pasada

Estudiamos el Teorema de Cantor-Bernstein y su impacto en la comparación de conjuntos. Poco a poco, nos adentramos en nociones de cardinales.

1. Números reales

Cortaduras: parejas (A, B) de subconjuntos de $\mathbb{Q}$ tales que $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$, $A \cup B = \mathbb{Q}$, $A \cap B = \emptyset$, y tales que $A < B$.

¡Todo número racional determina *dos* cortaduras!

Brechas: de las cuatro posibilidades ($4 = 2 \times 2$: A tiene máximo o no, B tiene mínimo o no), llamamos *brechas* a aquellas cortaduras tales que A no tiene máximo y B no tiene mínimo. (En realidad no sucede que A tenga máximo y simultáneamente B tenga mínimo.)

Dada una cortadura (A, B), se dice que es *de Dedekind* si A no tiene máximo y se dice que es *brecha* si A no tiene máximo y B no tiene mínimo.

Ejemplo: $\sqrt{2}$ determina una brecha (detalles en clase).

Note: (A, B) es brecha ssi A no tiene supremo.

> <u>Definición:</u> $\mathbb{R} = \{(A, B) \mid (A, B) \text{ es cortadura de Dedekind}\}$
>
> $$(A_1, B_1) \leq (A_2, B_2) \iff A_1 \subseteq A_2$$

La función $i : \mathbb{Q} \to \mathbb{R} : r \mapsto i(r) = (r_i, r^d)$ es inyectiva y respeta el orden ($r_i = \{q \in \mathbb{Q} \mid q < r\}$, $r^d = \{q \in \mathbb{Q} \mid r \leq q\}$).

$(\mathbb{Q}, <)$ no es **completo**, $(\mathbb{R}, <)$ sí lo es. Demostrar en clase.

La suma y el producto se definen más fácilmente usando el concepto (equivalente) de DI-cortadura: $A \subseteq \mathbb{Q}$ es DI-cortadura si es no vacío, acotado superiormente, no tiene máximo y siempre que $c < a \in A$ se tiene $c \in A$.

$A + A' := \{a + a' \mid a \in A \wedge a' \in A'\}$.

Esta suma *extiende* a la suma de los racionales.

2. Producto cartesiano generalizado. Axioma de Elección

Discusión Axioma de Elección y Producto Cartesiano Generalizado:

- Descripción de Russell ($\aleph_0$ zapatos y medias).
- Enunciado de AE:

> **Axioma de Elección (AE-1):**
> $\forall S \exists g\, [g \text{ es función } \wedge \forall X\, ((X \in S \wedge X \neq \emptyset) \to g(X) \in X)]$.

- Versiones equivalentes AE-2 (Dada una familia $\{A_i\}_{i \in I}$ de conjuntos no vacíos, $\prod_{i \in I} A_i \neq \emptyset$).
- Conexión con AE-4: Si $p : E \to X$ es sobreyectiva, entonces existe $s : X \to E$ tal que $p \circ s = 1_X$.