Notas de clase para el curso
Introducción a la Teoría de Conjuntos
I Semestre 2020

Rodrigo De Castro K.
Andrés Villaveces

Capítulo 3

Números Naturales y Recursión

3.1. Axioma del Infinito

3.1.1. Motivación. La manera más conveniente de definir los números naturales es utilizar la idea propuesta por von Neumann de definir 0 como $\varnothing$ (el único conjunto con cero elementos), 1 como $\{0\}$ (un conjunto particular con un elemento), 2 como $\{0,1\}$ (un conjunto particular con dos elementos), y así sucesivamente. Procediendo de esta manera se obtendría:

$$\begin{aligned}
&0 = \varnothing.\\
&1 = \{0\} = 0 \cup \{0\}.\\
&2 = \{0,1\} = \{0\} \cup \{1\} = 1 \cup \{1\}.\\
&3 = \{0,1,2\} = \{0,1\} \cup \{2\} = 2 \cup \{2\}.\\
&4 = \{0,1,2,3\} = \{0,1,3\} \cup \{3\} = 3 \cup \{3\}.\\
&\quad\vdots
\end{aligned}$$

La presencia de los conjuntos $0 \cup \{0\}$, $1 \cup \{1\}$, $2 \cup \{2\}$, $3 \cup \{3\}$, etc. origina la noción de sucesor de un conjunto, definido a continuación.

3.1.2 Definición. Sea x un conjunto cualquiera. El *sucesor de* x, denotado $S(x)$, se define como $S(x) = x \cup \{x\}$.

Intuitivamente, el conjunto de los números naturales debe incluir como elementos a 0, 1, 2, 3, ... y, si n es natural, su sucesor $S(n)$ también debe ser natural. Esto motiva la noción de conjunto inductivo.

3.1.3 Definición. Un conjunto I se llama *inductivo* si

1. $0 \in I$.
2. $\forall x[x \in I \longrightarrow S(x) \in I]$.

Los axiomas enunciados hasta el momento no permiten garantizar la existencia de conjuntos inductivos. Para ello se requiere un nuevo axioma, llamado Axioma del Infinito.

Axioma del Infinito. Existe un conjunto inductivo. Formalmente,

$$\exists A\big[0 \in A \wedge \forall x(x \in A \longrightarrow x \cup \{x\} \in A)\big].$$

Intuitivamente, un conjunto inductivo incluye como elementos a 0, 1, 2, ..., pero posiblemente también a otros elementos adicionales, junto con sus respectivos sucesores. El conjunto de los números naturales debe definirse como el "el menor conjunto inductivo", es decir, un número natural debe pertenecer a todos los conjuntos inductivos.

3.1.4 Definición. $\mathbb{N} = \{x \in A : x \in I$ para todo conjunto inductivo $I\}$, donde A es el conjunto inductivo cuya existencia se postula en el Axioma del Infinito.

De la definición de $\mathbb{N}$ se sigue inmediatamente que $0 \in \mathbb{N}$ y que si $n \in \mathbb{N}$ entonces $S(n) \in \mathbb{N}$. El hecho de que $\mathbb{N}$ sea "el menor conjunto inductivo" se precisa en la siguiente proposición.

3.1.5 Proposición.

1. $\mathbb{N}$ es inductivo.
2. Si I es inductivo, entonces $\mathbb{N} \subseteq I$.

Demostración.

1. $0 \in \mathbb{N}$ porque $0 \in A$ y $0 \in I$ para todo conjunto inductivo I. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \in A$ y $n \in I$ para todo conjunto inductivo I. De la definición de conjunto inductivo se sigue que $S(n) \in A$ y $S(n) \in I$. Así que $S(n) \in \mathbb{N}$.
2. Se sigue inmediatamente de la definición de $\mathbb{N}$. □

La definición 3.1.4 no equivale a decir $\mathbb{N} = \bigcap\{I : I \text{ es inductivo}\}$ ya que el hecho de que exista un conjunto inductivo A (por el Axioma del Infinito) no garantiza la existencia del conjunto $\{I : I \text{ es inductivo}\}$ porque no disponemos de la forma general del Principio de Comprensión. Lo que sí se puede decir es que $\mathbb{N}$ es la intersección de todos los conjuntos inductivos contenidos en A (véase el Ejercicio 3.1.2).

Ejercicios de la sección 3.1

1. (i) Demostrar que si X y Y son conjuntos inductivos, $X \cap Y$ es inductivo.
   (ii) Más en general, demostrar que si $\{X_i\}_{i \in I}$ es una familia de conjuntos inductivos, entonces $\bigcap_{i \in I} X_i$ es inductivo.
2. Demostrar que $\mathbb{N} = \bigcap\{I \subseteq A : I \text{ es inductivo}\}$, donde A es el conjunto postulado en el Axioma del Infinito.

3.2. Principios de Inducción

La Proposición 3.1.5 tiene como consecuencia importante el llamado Principio de Inducción Matemática que es la principal herramienta para demostrar resultados sobre los números naturales. Para enunciarlo de la manera más tradicional, resulta conveniente escribir $S(n)$ como $n+1$ cuando $n \in \mathbb{N}$. En la sección 3.4, una vez se defina la suma de números naturales, se demostrará que $S(n)$ coincide con la suma de n y 1, es decir, con $n+1$. De esta manera, no habrá conflicto de notaciones.

Notación. Para $n \in \mathbb{N}$, $n+1 = S(n) = n \cup \{n\}$.

3.2.1. Principio de Inducción Matemática (PIM). Si una propiedad $P(x)$ se cumple para 0 y, si el hecho de que se cumpla para $n \in \mathbb{N}$ implica que también se cumpla para $n+1$, entonces la propiedad se cumple para todo número natural. Formalmente, sea $P(x)$ una propiedad expresada por medio de una fórmula $\varphi(x)$ con, posiblemente, otras variables no cuantificadas (llamadas parámetros) tal que

1. $P(0)$.
2. $(\forall n \in \mathbb{N})[P(n) \longrightarrow P(n+1)]$.

Entonces $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$.

Demostración. Sea $I = \{n \in \mathbb{N} : P(n)\}$. Usando las hipótesis 1 y 2, es fácil ver que I es inductivo. Por la proposición 3.1.5, $\mathbb{N} \subseteq I$. Como $I \subseteq \mathbb{N}$ por la definición de I, se concluye que $I = \mathbb{N}$. Por consiguiente, $P(n)$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. □

La idea original de von Neumann, que ha motivado la definición de números naturales, también justifica intuitivamente la siguiente definición de la relación $<$ entre naturales.

3.2.2 Definición. Para $m, n \in \mathbb{N}$ se define $m < n \iff m \in n$.

Se demostrará el la Proposición 3.2.5 que $<$ es una relación asimétrica y transitiva y, por lo tanto, $<$ es un orden estricto. De hecho, el orden parcial inducido $(\mathbb{N}, \leq)$ resulta ser un conjunto bien ordenado (Teorema 3.2.11). A continuación se enuncia una consecuencia inmediata de la definición de $<$; por su uso frecuente en otras demostraciones, se presenta como un lema.

3.2.3 Lema. Para $k, n \in \mathbb{N}$ se tiene

(1) $n < n+1$.

(2) $k < n+1$ si y sólo si $k < n$ ó $k = n$.

Demostración.

(1) $n \in \{n\} \Longrightarrow n \in n \cup \{n\} \Longrightarrow n < n \cup \{n\} = S(n) = n+1$.

(2) $k < n+1 \Longleftrightarrow k \in n+1 \Longleftrightarrow k \in n \cup \{n\} \Longleftrightarrow k \in n \vee k \in \{n\} \Longleftrightarrow k < n \vee k = n$.

Nótese que (1) también se obtiene de (2), en la dirección ($\Longleftarrow$). □

En la siguiente proposición se utiliza inducción para demostrar que todo elemento de un número natural es un número natural. Esto permite concluir que un número natural está formado por los naturales que lo preceden, lo cual establece de manera rigurosa la imagen intuitiva de los naturales presentada en 3.1.1.

3.2.4 Proposición.

(1) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n = 0$ ó $0 < n$.

(2) Todo elemento de un número natural es un número natural.

(3) Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene $n = \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$.

(4) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \subseteq \mathbb{N}$.

Demostración.

(1) Demostraremos por inducción que $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$ donde $P(n)$ es la propiedad "$n = 0 \vee 0 < n$". $P(0)$ es inmediato. Para el paso inductivo, tomamos $n \in \mathbb{N}$ y partimos de la hipótesis de inducción $n = 0 \vee 0 < n$. Si $n = 0$, entonces $n+1 = S(0) = \{0\}$, lo cual implica $0 \in n+1$, o sea, $0 < n+1$. Si $0 < n$, entonces $0 \in n \cup \{n\} = n+1$, o sea $0 < n+1$. Esto demuestra $P(n+1)$.

(2) Formalmente, lo que se quiere demostrar es $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k \in n)(k \in \mathbb{N})$ o, equivalentemente, $(\forall n \in \mathbb{N})(\forall k)(k \in n \longrightarrow k \in \mathbb{N})$. Demostraremos por inducción que $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$ donde $P(n)$ es la propiedad "$\forall k(k \in n \longrightarrow k \in \mathbb{N})$". $P(0)$ se cumple trivialmente. Para el paso inductivo, tomamos $n \in \mathbb{N}$ y asumimos como hipótesis de inducción la implicación $\forall k(k \in n \longrightarrow k \in \mathbb{N})$. Debemos demostrar $P(n+1)$, o sea, $\forall k(k \in n+1 \longrightarrow k \in \mathbb{N})$. Si $k \in n+1$, entonces $k \in n \cup \{n\}$, de donde, $k \in n$ ó $k = n$. Si $k \in n$, entonces, por hipótesis de inducción, $k \in \mathbb{N}$. Si $k = n$, entonces $k \in \mathbb{N}$ ya que $n \in \mathbb{N}$.

(3) Las dos contenencias necesarias para establecer la igualdad $n = \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$ se obtienen de la parte (1) y de la definición de $<$.

(4) Es consecuencia de (3). □

3.2.5 Proposición.

(1) $<$ es transitiva, es decir, $k < m$ y $m < n$ implica $k < n$, para todos $k, n, m \in \mathbb{N}$.

(2) Para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \notin n$.

(3) $<$ es asimétrica, es decir, para $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ implica $\neg(n < m)$.

(4) Para $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ implica $m + 1 < n$ ó $m + 1 = n$.

Demostración.

(1) Demostraremos por inducción sobre n que $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$ donde $P(n)$ es el enunciado "$k < m \wedge m < n \longrightarrow k < n$" en el que k y m números naturales fijos (pero arbitrarios). $P(0)$ es trivialmente cierta. Para el paso inductivo, tomamos $n \in \mathbb{N}$ y partimos de la hipótesis de inducción $k < m \wedge m < n \longrightarrow k < n$. Hay que demostrar $P(n+1)$, que es la implicación $k < m \wedge m < n + 1 \longrightarrow k < n + 1$. De $m < n + 1$ se deduce $m < n$ ó $m = n$ (Lema 3.2.3(2)). Si $m < n$, entonces por la hipótesis de inducción, $k < n$. Si $m = n$, entonces también se tiene $k < n$ (ya que $k < m$). Pero $k < n$ implica $k < n + 1$ por el Lema 3.2.3(2). Esto demuestra el paso inductivo.

(2) Demostraremos por inducción que $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$ donde $P(n)$ es el enunciado $n \notin n$. $P(0)$ afirma que $0 \notin 0$ lo cual se cumple porque $0 = \varnothing$. Para el paso inductivo, la hipótesis de inducción es $n \notin n$. Se quiere demostrar $n+1 \notin n+1$, o sea $n+1 \not< n+1$. Razonando por contradicción, asumimos $n + 1 < n + 1$. Del Lema 3.2.3(2) se deduce $n + 1 < n$ ó $n + 1 = n$. Como $n < n + 1$ (Lema 3.2.3(1)), si $n + 1 < n$, se tiene $n < n$ por la transitividad de $<$. Si $n + 1 = n$, entonces $n < n + 1 = n$. En ambos casos se obtiene $n < n$, lo cual contradice la hipótesis de inducción.

(3) Razonando por contradicción, si se tiene $m < n$ y $n < m$, por la transitividad de $<$ (parte (2)) se concluye que $m < m$, lo cual contradice la parte (3).

(4) Sea m un número natural fijo (pero arbitrario). Demostraremos por inducción sobre n que $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$ donde $P(n)$ es el enunciado "$m < n \longrightarrow m + 1 < n \vee m + 1 = n$." $P(0)$ se tiene trivialmente. Para el paso inductivo, suponemos $P(n)$ y vamos a demostrar $P(n + 1)$, o sea, "$m < n + 1 \longrightarrow m + 1 < n + 1 \vee m + 1 = n + 1$." Si $m < n + 1$, entonces (Lema 3.2.3(1)) $m < n$ ó $m = n$. Si $m < n$, por la hipótesis de inducción, $m+1 < n$ ó $m+1 = n$, lo cual implica $m+1 < n+1$ por el Lema 3.2.3(1) y la transitividad de $<$. Si $m = n$, entonces $S(m) = S(n)$, o sea, $m + 1 = n + 1$. Esto demuestra el paso inductivo. $\square$

Por la Proposición 3.2.5, $<$ es un orden estricto; así que la relación inducida $\leq$, definida por $m \leq n \iff m < n \vee m = n$, es un orden parcial (esto es consecuencia de la Proposición 2.6.4). También usaremos el orden inverso $\geq$ en la forma tradicional: $m \geq n \iff n \leq m$. El Lema 3.2.3(2), la Proposición 3.2.4(1) y la Proposición 3.2.5(4) se pueden reescribir entonces en la siguiente forma:

3.2.6 Proposición.

(1) Para $k, n \in \mathbb{N}$, $k < n + 1$ si y sólo si $k \leq n$.

(2) Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n \geq 0$.

(3) Para $m, n \in \mathbb{N}$, $m < n$ implica $m + 1 \leq n$.

3.2.7 Proposición (Tricotomía de $<$). Para $m, n \in \mathbb{N}$, se tiene una y solo una de las siguientes afirmaciones: $m = n$ ó $m < n$ ó $n < m$.

Demostración. Sea m un número natural fijo (pero arbitrario). Demostraremos por inducción sobre n que $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$ donde $P(n)$ es el enunciado "$m = n \vee m < n \vee n < m$." Por la Proposición 3.2.4(1), se sabe que $m \geq 0$; esto muestra $P(0)$. Para el paso inductivo, suponemos $P(n)$ y vamos a demostrar $P(n+1)$, o sea, "$m = n+1 \vee m < n+1 \vee n+1 < m$". Por la hipótesis de inducción, $m = n$ ó $m < n$ ó $n < m$. Si $m \leq n$, entonces $m < n + 1$ por el Lema 3.2.3(2). Si $n < m$, entonces $n + 1 \leq m$ por la Proposición 3.2.5(4). Esto quiere decir que $n + 1 < m$ ó $n + 1 = m$. Se ha demostrado así el paso inductivo.

La unicidad en la disyunción $m = n \vee m < n \vee n < m$ se obtiene razonando por contradicción y utilizando la Proposición 3.2.5(2). Así por ejemplo, $m < n$ y $n < m$ implicaría $m < m$. Los demás casos se tratan de manera similar. □

3.2.8 Corolario. El conjunto $(\mathbb{N}, \leq)$ es un orden lineal.

Demostración. Si $m, n \in \mathbb{N}$, de la tricotomía de $<$ se deduce que $m \leq n$ o $n \leq m$. □

3.2.9. Principio de Inducción Completa (PIC). Sea $P(x)$ una propiedad tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

$$(\forall k < n)P(k) \longrightarrow P(n). \tag{3.2.1}$$

Entonces, $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$.

Demostración. Un detalle importante es que la hipótesis (3.2.1) implica trivialmente $P(0)$. Sea $Q(n)$ la propiedad $(\forall k < n)P(k)$. Se va a demostrar inicialmente que $(\forall n \in \mathbb{N})Q(n)$ razonando por inducción normal, es decir, por el Principio de Inducción Matemática 3.2.1. $Q(0)$ es la afirmación $(\forall k < 0)P(k)$ la cual se cumple trivialmente. Para el paso inductivo, tomamos $n \in \mathbb{N}$ y partimos de la hipótesis de inducción $Q(n)$, que es $(\forall k < n)P(k)$. Se quiere demostrar $Q(n + 1)$, o sea, $(\forall k < n + 1)P(k)$. Por el Lema 3.2.3(2), $k < n + 1$ si y sólo si $k < n$ ó $k = n$. Si $k < n$, la hipótesis de inducción implica $P(k)$. Se tiene entonces $(\forall k < n)P(k)$, y por la hipótesis (3.2.1), se concluye $P(n)$. Esto demuestra $Q(n+1)$. Por el Principio de Inducción Matemática, $(\forall n \in \mathbb{N})Q(n)$. Sea ahora $n \in \mathbb{N}$, un número natural cualquiera. Entonces, $Q(n + 1)$ ya que $n + 1 \in \mathbb{N}$. Esto significa que $(\forall k < n + 1)P(k)$. Como $n < n + 1$, se concluye $P(n)$. Por consiguiente, $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$. □

En 3.2.9 se ha deducido el Principio de Inducción Completa (PIC) a partir del Principio de Inducción Matemática (PIM). Recíprocamente, es posible también deducir el PIM del PIC (véase el Ejercicio 3.2.13). Por consiguiente, estos dos principios de inducción son lógicamente equivalentes. De hecho, podemos reformular el PIC para compararlo más estrechamente con en PIM. Si se cambia n por $n + 1$ en (3.2.1) se obtiene la implicación $(\forall k < n+1)P(k) \longrightarrow P(n+1)$, y se usa luego el hecho de que $k < n+1$ si y sólo si $k \leq n$ (Lema 3.2.3(2)), el PIC se puede presentar de la siguiente manera.

3.2.10. Reformulación del Principio de Inducción Completa. Sea $P(x)$ una propiedad tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$,

1. $P(0)$.
2. $(\forall k \leq n)P(k) \longrightarrow P(n+1)$.

Entonces, $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$.

Una aplicación importante del Principio de Inducción Completa es el llamado Principio del Buen Orden.

3.2.11. Principio del Buen Orden para $\mathbb{N}$. Todo subconjunto no vacío B de $\mathbb{N}$ tiene elemento mínimo. Es decir, existe $b_0 \in B$ tal que $b_0 \leq m$ para todo $m \in B$.

Demostración. Razonamiento por contradicción. Supóngase que B no tiene elemento mínimo. Se va a demostrar que $(\forall n \in \mathbb{N})(n \notin B)$, lo cual implica que $B = \varnothing$, en contradicción con la hipótesis de que B es no vacío. Sea $P(n)$ la propiedad $n \notin B$. Para invocar el Principio de Inducción Completa se demostrará que $(\forall k < n)P(k) \longrightarrow P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La hipótesis de inducción es $(\forall k < n)P(k)$, o sea, $(\forall k < n)(k \notin B)$. Se infiere que $n \notin B$ ya que, de lo contrario, n sería el mínimo de B. Entonces se tiene $P(n)$. Por el Principio de Inducción Completa se concluye que, $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$, es decir, $(\forall n \in \mathbb{N})(n \notin B)$, que era lo que se quería demostrar. $\square$

Se ha demostrado en 3.2.11 que el Principio de Inducción Completa implica el Principio del Buen Orden para $\mathbb{N}$. Se demostrará a continuación que la implicación recíproca también se tiene y, de esta manera, estos dos principios resultan lógicamente equivalentes.

3.2.12 Teorema. El Principio del Buen Orden para $\mathbb{N}$ implica el Principio de Inducción Completa.

Demostración. Sea $P(x)$ una propiedad tal que

$$(\forall k < n)P(k) \longrightarrow P(n). \tag{3.2.2}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Se va a demostrar que $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$ razonando por contradicción. Si $\neg(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$, entonces el conjunto $B = \{n \in \mathbb{N} : \neg P(n)\}$ es no vacío. Por el Principio del Buen Orden para $\mathbb{N}$, B tiene elemento mínimo b_0. Esto implica, en particular, que $\neg P(b_0)$. Como $b_0 = \min(B)$, entonces $(\forall k < b_0)P(k)$. De la hipótesis (3.2.2) se deduce que $P(b_0)$, lo cual contradice $\neg P(b_0)$. Esto demuestra que $(\forall n \in \mathbb{N})P(n)$. $\square$

Ejercicios de la sección 3.2

1. Demostrar que para todo $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$ se cumple $n \geq 1$. Ayuda: no se requiere inducción.
2. Sea $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que no existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n < k < n+1$. Ayuda: no se requiere inducción.

3. Sea $S : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ la función sucesor definida por $S(n) = n + 1$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que S es una función inyectiva.

4. Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$. Demostrar que existe un único $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = k + 1$. Presentar dos demostraciones de este resultado, una por inducción y otra sin usar inducción. Notación: este único k se denota como $n - 1$.

5. Para $m, n \in \mathbb{N}$, demostrar que $m < n \Longleftrightarrow m \subsetneq n$. Ayuda: no se requiere inducción.

6. Para dos números naturales m y n se tiene $m \subseteq n$ o $n \subseteq m$.

7. Demostrar la recíproca de la Proposición 3.2.5(4): para números naturales m y n, si $m + 1 \leq n$ entonces $m < n$.

8. Demostrar que no existe una función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que $f(n + 1) < f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

9. Demostrar que todo subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, acotado superiormente, tiene elemento máximo.

10. Sea $(A, \prec)$ un conjunto ordenado y $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ una función tal que $f(n) \prec f(n + 1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demostrar que $n < m$ implica $f(n) \prec f(m)$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

11. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y sea $P(x)$ una propiedad tal que

    (a) $P(n_0)$.

    (b) $(\forall n \geq n_0)[P(n) \longrightarrow P(n + 1)]$.

    Demostrar que $(\forall n \geq n_0)P(n)$.

12. Inducción Restringida. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ y sea $P(x)$ una propiedad tal que

    (a) $P(0)$.

    (b) $(\forall n < n_0)[P(n) \longrightarrow P(n + 1)]$.

    Demostrar que $(\forall n \leq n_0)P(n)$.

13. Deducir el Principio de Inducción Matemática (PIM) a partir del Principio de Inducción Completa (PIC). *Ayuda:* utilizar la reformulación del (PIC) presentada en la Proposición 3.2.10

3.3. Sucesiones

Las funciones cuyo dominio es $\mathbb{N}$ o n, para algún $n \in \mathbb{N}$, se acostumbran a llamar sucesiones. Esto se precisa en la siguiente definición.

3.3.1 Definición. Una *sucesión finita* es una función cuyo dominio es n, para algún $n \in \mathbb{N}$. Puesto que $n = \{k \in \mathbb{N} : k < n\}$ (por la Proposición 3.2.4), el rango de una función f con dominio n es el conjunto $\{f(0), f(1), \ldots, f(n-1)\}$. Si se define $a_k = f(k)$ para cada $0 \leq k < n$, la sucesión se denota usando alguna de las siguientes notaciones:

$$\langle a_k \rangle_{k<n}, \qquad \langle a_k : k < n \rangle, \qquad \langle a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \rangle.$$

Una sucesión de este tipo también se denomina *sucesión de longitud* n o n*-tupla* y su rango se escribe en una de las siguientes formas: $\{a_k\}_{k<n}$, $\{a_k : k < n\}$, $\{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$. En el caso $n = 0$ se obtiene la llamada sucesión vacía $\langle\ \rangle = \varnothing$.

Si se recuerda que A^B denota el conjunto de todas las funciones de B en A (véase la sección 2.3), entonces A^n representa el conjunto de todas las n-uplas con valores en A. El conjunto de todas las sucesiones finitas con valores en A es $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$ y se denota como A^* o $\mathrm{Suc}(A)$.

Una *sucesión infinita* es una función cuyo dominio es $\mathbb{N}$. Se denota mediante alguna de las siguientes notaciones:

$$\langle a_n \rangle_{n\in\mathbb{N}}, \qquad \langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle, \qquad \langle a_n \rangle_{n=0}^{\infty}, \qquad \langle a_0, a_1, a_2, \ldots \rangle.$$

Su rango se escribe en una de las siguientes formas: $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, $\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}$.

Ejercicios de la sección 3.3

1. Demostrar que la existencia del conjunto de todas las sucesiones finitas con valores en un conjunto dado A, definido como $A^* = \mathrm{Suc}(A) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A^n$, se puede garantizar mediante el Esquema Axiomático de Separación.

3.4. Teoremas de Recursión para $\mathbb{N}$

Una función con dominio $\mathbb{N}$ se dice que está definida por recursión si se conoce el valor $f(0)$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1)$ se define en términos de $f(n)$. Los llamados teoremas de recursión garantizan la existencia y unicidad de funciones definidas recursivamente.

3.4.1. Teorema básico de Recursión para $\mathbb{N}$. Sean A un conjunto dado, $a \in A$ y una función $g : A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$. Existe una única función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que

$$\begin{cases} f(0) = a. \\ f(n+1) = g(f(n), n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.4.1}$$

Demostración. La idea de la demostración es definir "aproximaciones" de f, compatibles dos a dos. Según la Proposición 2.5.3, la unión de tales funciones es una función, que resulta ser precisamente la función buscada f.

Sea $n \in \mathbb{N}$. Se dice que t es una n-aproximación si $t : n+1 \longrightarrow A$ tal que

$$\begin{cases} t(0) = a. \\ t(k+1) = g(t(k), k), \text{ para todo } k, \ 0 \leq k < n. \end{cases} \tag{3.4.2}$$

Intuitivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una única n-aproximación. Así por ejemplo, la única 0-aproximación es la función $t = \{(0, a)\}$. La única 1-aproximación es la función $t : 2 \longrightarrow A$ tal que $t(0) = a$, $t(1) = g(t(0), 0)) = g(a, 0)$. La única 2-aproximación es la función $t : 3 \longrightarrow A$ dada por $t(0) = a$, $t(1) = g(a, 0)$ y $t(2) = g(t(1), 1) = g(g(a, 0), 1)$.

Demostraremos por inducción sobre n que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una n-aproximación. La unicidad se demostrará más adelante. Sea $P(n)$ el enunciado "existe una n-aproximación". Como se mostró arriba, existe una 0-aproximación; así que $P(0)$ se cumple. Para el paso inductivo, suponemos $P(n)$ y vamos a demostrar $P(n+1)$. Por la hipótesis de inducción, sabemos que existe una n-aproximación, o sea, una función $t : n+1 \longrightarrow A$ que satisface (3.4.2). Definimos ahora la función $u : (n+1)+1 \longrightarrow A$ de la siguiente manera:

$$\begin{cases} u(k) = t(k), \quad \text{si } 0 \leq k \leq n. \\ u(n+1) = g(t(n), n) = g(u(n), n). \end{cases}$$

De esta manera, u resulta ser una $n+1$-aproximación, y esto demuestra el paso inductivo.

Demostraremos ahora que las aproximaciones son compatibles dos a dos. Para tal propósito, sea $t : n+1 \longrightarrow A$ una n-aproximación y $u : m+1 \longrightarrow A$ una m-aproximación, con $n, m \in \mathbb{N}$. Por Ejercicio 3.2.6, sabemos que $n+1 \subseteq m+1$ ó $m+1 \subseteq n+1$. Sin pérdida de generalidad, supondremos que $n+1 \subseteq m+1$. Razonando por inducción restringida (Ejercicio 3.2.12) vamos a demostrar que $t(k) = u(k)$ para todo $k \leq n$. Claramente, $t(0) = a = u(0)$. Para el paso inductivo suponemos que $t(k) = u(k)$ para $k < n$. Como t y u son aproximaciones, de (3.4.2) se sigue que $t(k+1) = g(t(k), k) = g(u(k), k) = u(k+1)$. Concluye así el paso inductivo, con lo cual se demuestra que las aproximaciones son compatibles dos a dos. Esto también implica que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una única n-aproximación, ya que dos n-aproximaciones son compatibles y, por lo tanto, coinciden en su dominio común, que es $n+1$.

Denotaremos con t_n la única n-aproximación, $t_n : n+1 \longrightarrow A$. Nótese que $t_n \subseteq \mathbb{N} \times A$, de modo que $t_n \in \wp(\mathbb{N} \times A)$. Podemos entonces invocar el Esquema Axiomático de Separación para definir el conjunto F de todas las n-aproximaciones, a saber,

$$F = \{t_n \in \wp(\mathbb{N} \times A) : t_n \text{ es una } n\text{-aproximación}, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Según la Proposición 2.5.3, $f = \bigcup F$ resulta ser una función tal que $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{N}$ y $\mathrm{rango}(f) \subseteq A$.

A continuación demostraremos que f satisface la recursión (3.4.1). Se tiene $f(0) = a$ ya que toda n-aproximación t satisface $t(0) = a$. Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ arbitrario y sea t la única $(n+1)$-aproximación, $t : (n+1)+1 \longrightarrow A$. Por la parte (3) de la Proposición 2.5.3, $f(k) = t(k)$ para todo $k \in \text{dom}(t)$; en particular, $f(n) = t(n)$ y $f(n+1) = t(n+1)$. Así que,

$$f(n+1) = t(n+1) = g(t(n), n) = g(f(n), n).$$

Esto demuestra (3.4.1).

Finalmente, hay que demostrar la unicidad de f. Sea h una función $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que

$$\begin{cases} h(0) = a. \\ h(n+1) = g(h(n), n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Es fácil demostrar por inducción sobre n que $f(n) = h(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En efecto, es claro que $f(0) = h(0) = a$. Para el paso inductivo, suponemos $n \in \mathbb{N}$ y $f(n) = h(n)$. Entonces

$$f(n+1) = g(f(n), n) = g(h(n), n) = h(n+1). \qquad \square$$

Usando la terminología de sucesiones (sección 3.3), el Teorema básico de Recursión para $\mathbb{N}$ se puede presentar en la siguiente forma. Dados A un conjunto, $a \in A$ y $g : A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$, existe una única sucesión $\langle a_n \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{cases} a_0 = a. \\ a_{n+1} = g(a_n, n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Recursión paramétrica. El Teorema 3.4.1 permite definir recursivamente funciones de $\mathbb{N}$ en A, es decir, funciones de una sola variable natural. Es posible también definir recursivamente funciones de dos variables. La recursión se hace sobre una de las variables; la otra varía sobre un conjunto dado P cuyos elementos se llaman parámetros. Este tipo de recursión sirve, por ejemplo, para definir las operaciones aritméticas entre números naturales, como la suma, el producto y la exponenciación.

3.4.2. Teorema de Recursión, versión paramétrica. Sean A, P conjuntos dados, $h : P \longrightarrow A$, y $g : P \times A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$. Existe una única función $f : P \times \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que

$$\begin{cases} f(p, 0) = h(p), \text{ para todo } p \in P. \\ f(p, n+1) = g(p, f(p, n), n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y todo } p \in P. \end{cases} \tag{3.4.3}$$

Primera Demostración. Puesto que la recursión (3.4.3) se hace con respecto a la segunda variable únicamente, se puede demostrar el teorema modificando adecuadamente la demostración del Teorema de Recursión 3.4.1. Para $n \in \mathbb{N}$ se dice que t es una n-aproximación si $t : P \times (n+1) \longrightarrow A$ tal que

$$\begin{cases} t(p, 0) = h(p), \text{ para todo } p \in P. \\ t(p, k+1) = g(p, t(p, k), k), \text{ para todo } k, \ 0 \leq k < n \text{ y todo } p \in P. \end{cases}$$

Se procede luego como en la demostración del Teorema 3.4.1, *mutatis mutandis*. Concretamente, se demuestra por inducción sobre n que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una n-aproximación; a continuación se demuestra que las aproximaciones son compatibles dos a dos y, por lo tanto, la unión del conjunto de todas las n-aproximaciones resulta ser una función. Tal función es precisamente la función buscada f. La unicidad se demuestra razonando por inducción.

Segunda Demostración. Es también importante resaltar que la recursión paramétrica se puede demostrar como consecuencia del Teorema básico de Recursión. Si el parámetro p se trata como un "subíndice", se puede definir recursivamente una función f_p para cada $p \in P$, y definir luego la función buscada f usando la familia de funciones $\{f_p\}_{p \in P}$.

Específicamente, para cada $p \in P$ (fijo pero arbitrario) se define la función $f_p : \mathbb{N} \longrightarrow A$ mediante la recursión

$$\begin{cases} f_p(0) = h(p). \\ f_p(n+1) = g(p, f_p(n), n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La existencia de f_p se puede asegurar invocando el Teorema de Recursión si se define de antemano la función $g_p : A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$ por medio de $g_p(x, n) = g(p, x, n)$. En efecto, según el Teorema de Recursión, existe una única función $f_p : \mathbb{N} \longrightarrow A$ tal que

$$\begin{cases} f_p(0) = h(p). \\ f_p(n+1) = g_p(f_p(n), n) = g(p, f_p(n), n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Ahora se puede definir $f : P \times \mathbb{N} \longrightarrow A$ por medio de $f(p, n) = f_p(n)$. Se tiene entonces que

$$\begin{cases} f(p, 0) = f_p(0) = h(p) \text{ para todo } p \in P. \\ f(p, n+1) = f_p(n+1) = g_p(f_p(n), n) = g(p, f_p(n), n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \text{ y todo } p \in P. \end{cases} \square$$

Sucesiones dobles. Un caso particular de la recursión paramétrica se presenta cuando el conjunto de parámetros P coincide con $\mathbb{N}$. Una función de dos variables $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow A$, se denomina una *sucesión doble*. Si se denota $f(p, n)$ como $a_{p,n}$, la función f se puede referir como la sucesión doble $\langle a_{p,n} \rangle_{p,n \in \mathbb{N}}$. Utilizando esta notación, la versión paramétrica del Teorema de Recursión, en el caso en el que $P = \mathbb{N}$, se puede presentar en la siguiente forma. Dados un conjunto A y funciones $h : \mathbb{N} \longrightarrow A$, $g : \mathbb{N} \times A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$, existe una única sucesión doble $\langle a_{p,n} \rangle_{p,n \in \mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{cases} a_{p,0} = h(p), \text{ para todo } p \in \mathbb{N}. \\ a_{p,n+1} = g(p, a_{p,n}, n), \text{ para todo } p, n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Definición recursiva de la suma de naturales. La suma $m + n$ se puede definir por recursión sobre n, manteniendo m como parámentro. Con la notación usual, la recursión tiene el siguiente aspecto:

$$\begin{cases} m + 0 = m. \\ m + (n+1) = (m+n) + 1. \end{cases}$$

Utilizando $f(m,n)$ para representar $m+n$, esta recursión se puede escribir como

$$\begin{cases} f(m,0) = m. \\ f(m,n+1) = f(m,n) + 1. \end{cases} \tag{3.4.4}$$

La recursión (3.4.4) se obtiene usando la versión paramétrica del Teorema de Recursión si se toma $A = P = \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(x,y,z) = y+1$ y $h : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dada por $h(m) = m$. En estas condiciones, por el Teorema 3.4.2, existe una única función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{cases} f(m,0) = h(m), \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \\ f(m,n+1) = g(m, f(m,n), n), \text{ para todo } m,n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De manera que

$$\begin{cases} f(m,0) = m, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \\ f(m,n+1) = f(m,n) + 1, \text{ para todo } m,n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.4.5}$$

Hay que recordar que, hasta este momento, se ha escrito $n+1$ como abreviación de $S(n)$, el sucesor de n. La definición recursiva (3.4.5) estrictamente es entonces

$$\begin{cases} f(m,0) = m, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \\ f(m,S(n)) = S(f(m,n)), \text{ para todo } m,n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.4.6}$$

Veamos ahora que $f(m,1) = S(m)$. En efecto, por (3.4.6) se tiene

$$f(m,1) = f(m,S(0)) = S(f(m,0)) = S(m).$$

Esto demuestra que la suma de m y 1, o sea $f(m,1)$, coincide con $S(m)$ y justifica la notación $m+1$ introducida con anterioridad para denotar $S(m)$.

Se usará en lo sucesivo la notación tradicional $m+n$ para denotar $f(m,n)$.

Definición recursiva del producto de naturales. El producto $m \cdot n$ se puede definir por recursión sobre n, manteniendo m como parámetro. Se requiere la suma para definir recursivamente el producto ya que el producto es una suma iterada. Con la notación usual,la recursión necesaria es:

$$\begin{cases} m \cdot 0 = 0. \\ m \cdot (n+1) = m \cdot n + m. \end{cases}$$

Utilizando $f(m,n)$ para representar $m \cdot n$, esta recursión se puede escribir como

$$\begin{cases} f(m,0) = 0. \\ f(m,n+1) = f(m,n) + m. \end{cases} \tag{3.4.7}$$

La recursión (3.4.7) se obtiene de la versión paramétrica del Teorema de Recursión, tomando $A = P = \mathbb{N}$, $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $g(x,y,z) = y + x$ y $h : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por $h(m) = 0$. Según el Teorema 3.4.2, existe una única función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{cases} f(m,0) = h(m), \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \\ f(m,n+1) = g(m, f(m,n), n), \text{ para todo } m,n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

De donde

$$\begin{cases} f(m,0) = 0, \text{ para todo } m \in \mathbb{N}. \\ f(m,n+1) = f(m,n) + m, \text{ para todo } m,n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Recursión Completa. En la recursión básica el valor $f(n+1)$ depende del valor $f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. También es posible definir recursivamente funciones para las cuales $f(n+1)$ depende de todos (o algunos) de los valores previos $f(0), f(1), \ldots, f(n-1)$. Este tipo de recursión se denomina *recursión completa* y se enuncia en el siguiente teorema utilizando la terminología de sucesiones finitas presentada en la sección 3.3. Como se aprecia en la demostración, la recursión completa es consecuencia del Teorema básico de Recursión.

3.4.3. Teorema de Recursión Completa. Sea S un conjunto dado y S^* el conjunto de todas las sucesiones finitas con valores en S. Dada una función $g : S^* \longrightarrow S$, existe una única función $f : \mathbb{N} \longrightarrow S$ tal que

$$f(n) = g(f{\restriction_n}) = g\big(\langle f(0), f(1), \ldots, f(n-1) \rangle\big), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Se entiende que $f(0) = g\big(\langle\ \rangle\big) = g(\varnothing)$.

Demostración. Definimos la función $F : \mathbb{N} \longrightarrow S^*$ por medio de la recursión

$$\begin{cases} F_0 = \langle\ \rangle = \varnothing, \\ F_{n+1} = F_n \cup \big\{(n, g(F_n))\big\}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La existencia de F se puede garantizar mediante el Teorema básico de Recursión tomando $A = S^*$, $a = \langle\ \rangle = \varnothing$ y $G : A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$ definida como

$$G(t,n) = \begin{cases} t \cup \{(n, g(t))\}, & \text{si } t \text{ es una sucesión de longitud } n, \\ \langle\ \rangle = \varnothing, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Razonando por inducción se puede demostrar que $F_n : n \longrightarrow S$ y que $F_n \subsetneqq F_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Ejercicio 3.2.10 se infiere que $F_n \subsetneqq F_m$ si $n < m$. Así que $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una familia de funciones compatibles dos a dos; por la Proposición 2.5.3, $f = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ es una función. Además, $f : \mathbb{N} \longrightarrow S$ y $f\restriction_n = F_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como consecuencia de lo anterior se tiene que

$$f(n) = F_{n+1}(n) = g(F_n) = g(f\restriction_n), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \qquad \square$$

Ejemplo La llamada *sucesión de Fibonacci* es la sucesión de números naturales $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$, definida por la recursión

$$\begin{cases} f(0) = f(1) = 1, \\ f(n+1) = f(n) + f(n-1), \text{ para todo } n \geq 1. \end{cases}$$

La función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ se puede definir por recursión completa por medio de la función $g : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } t \text{ es una sucesión finita de longitud 0 o 1,} \\ t_{n-1} + t_{n-2}, & \text{si } t \text{ es una sucesión finita de longitud} \geq 2. \end{cases}$$

Ejercicios de la sección 3.4

1. Completar los detalles de la primera demostración de la versión paramétrica del Teorema de Recursión, Teorema 3.4.2.

2. Definir recursivamente la función factorial $f(n) = n!$ y justificar su existencia mediante el Teorema básico de Recursión.

3. Definir recursivamente la función exponencial m^n y justificar su existencia mediante la versión paramétrica del Teorema de Recursión.

4. La función súper-exponencial $m \uparrow n$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ se define por medio de la recursión
$$\begin{cases} m \uparrow 0 = m. \\ m \uparrow (n+1) = m^{m\uparrow n}. \end{cases}$$
Justificar la anterior recursión mediante la versión paramétrica del Teorema de Recursión.

5. Siguiendo la idea del ejercicio anterior, definir recursivamente la función súper-súper-exponencial $m \Uparrow n$ y justificar la definición mediante la versión paramétrica del Teorema de Recursión.

6. Utilizar recursión básica, paramétrica o completa para definir las siguientes sucesiones numéricas. Indicar en cada caso las funciones g y h correspondientes al enunciado del teorema de recursión pertinente.

(i) $a_0 = 0$, $a_n = 1 + 2 + \cdots + n$, para $n \geq 1$.

(ii) $a_0 = 3$, $a_n = 3(3+1)(3+2)\cdots(3+n)$, para $n \geq 1$.

(iii) $\langle 1, 2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots \rangle$.

(iv) $\left\langle 2, \frac{2}{3}, \frac{4}{9}, \frac{16}{81}, \frac{256}{6561}, \ldots \right\rangle$.

(v) $a_{m,n} = (0 + 1 + \cdots + m)(0 + 1 + \cdots + n)$, con $m, n \geq 0$.

(vi) $a_{m,n} = (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^m)(3^0 + 3^1 + \cdots + 3^n)$, con $m, n \geq 0$.

7. Sean dados un conjunto X y $h : X \longrightarrow X$ una función. Definir recursivamente la composición
$$h^n = \underbrace{h \circ \cdots \circ h}_{n \text{ veces } h},$$
con $n \in \mathbb{N}$, de tal manera que $h^0 = Id_X$, donde Id_X es la función identidad sobre X. Utilizar el Teorema básico de Recursión para justificar tal definición recursiva.

8. Sean dados un conjunto A y R una relación sobre A (o sea, $R \subseteq A \times A$).

(i) Se define $R^n = \underbrace{R \circ \cdots \circ R}_{n \text{ veces } R}$ mediante la recursión
$$\begin{cases} R^0 = Id_A, \\ R^{n+1} = R^n \circ R, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$
donde Id_A es la relación identidad sobre A. Justificar esta recursión utilizando el Teorema básico de Recursión.

(ii) Demostrar que $R^m \circ R^n = R^{m+n}$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$.

(iii) Demostrar que si R es simétrica, entonces R^n también es simétrica, para todo $n \in \mathbb{N}$.

(iv) Sea $R^t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$. Demostrar que R^t es una relación transitiva.

(v) Demostrar que si S es una relación transitiva sobre A, tal que $Id_A \subseteq S$ y $R \subseteq S$, entonces $R^t \subseteq S$.

(vi) Sea $R^e = (R \cup R^{-1} \cup Id_A)^t$. Demostrar que R^e es una relación de equivalencia sobre A, y que si S es cualquier relación de equivalencia sobre A que contiene a R, entonces $R^e \subseteq S$. Esto quiere decir que R^e es la relación de equivalencia más pequeña que contiene a R.

3.5. Caracterización del conjunto ordenado $(\mathbb{N}, <)$

Hay exactamente tres propiedades que caracterizan el orden $<$ del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales; eso se establece en el siguiente teorema, cuya demostración utiliza el Teorema básico de Recursión.

3.5.1 Teorema. Sea $(A, \prec)$ un conjunto ordenado tal que:

(a) Para todo $p \in A$ existe $q \in A$ tal que $q \succ p$. Es decir, $(A, \prec)$ no tiene elemento máximo.

(b) Todo subconjunto no vacío de A tiene elemento mínimo. Es decir, $(A, \prec)$ es un buen orden.

(c) Todo subconjunto no vacío de A, acotado superiormente, tiene elemento máximo.

Entonces $(\mathbb{N}, <)$ y $(A, \prec)$ son orden-isomorfos.

Demostración. En primer lugar, hay que tener presente que $(\mathbb{N}, <)$ satisface las propiedades (a), (b) y (c). En efecto, (a) se sigue del hecho de que $n < n+1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La propiedad (b) es el Principio del Buen Orden para $\mathbb{N}$ (Teorema 3.2.11), y la propiedad (c) fue establecida en el Ejercicio 3.2.9

Puesto que $(A, \prec)$ es un buen orden, también es un orden lineal. Se puede definir recursivamente un isomorfismo de orden $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ por medio de

$$\begin{cases} f(0) = a = \min(A). \\ f(n+1) = \min\{x \in A : x \succ f(n)\}. \end{cases} \tag{3.5.1}$$

La recursión (3.5.1) se obtiene invocando el Teorema 3.4.1 si se toma $A = \mathbb{N}$ y $g : A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$ dada por

$$g(y, n) = \min\{x \in A : x \succ y\}, \text{ para todo } x \in A, y \in \mathbb{N}.$$

El conjunto $\{x \in A : x \succ y\}$ es siempre no vacío por la condición (a) y su mínimo existe por (b). Claramente, $f(n) \prec f(n+1)$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por el Ejercicio 3.2.10, se deduce que $n < m$ implica $f(n) \prec f(m)$, para todo $m, n \in \mathbb{N}$. Esto muestra que f es inyectiva y es un isomorfismo de orden (véase el Ejercicio 2.6.14).

Solo resta demostrar que $\text{rango}(f) = A$. Razonamos por contradicción: si $A - \text{rango}(f) \neq \varnothing$, existiría $p = \min(A - \text{rango}(f))$ por la condición (b). Sea $B = \{q \in A : q \prec p\}$. B es no vacío ya que, de lo contrario, $p = \min(A) = a = f(0)$. Como B es acotado superiormente, existe $\max(B) = q'$, por la condición (c). Como $q' \prec p$, entonces $q' \in \text{rango}(f)$ y, por tanto, $q' = f(m)$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Se tiene necesariamente que $p = \min\{x \in A : x \succ q'\}$ ya que si existiera $p' \in A$ tal que $q' \prec p' \prec p$ se contradiría la maximalidad de q'. Se tiene entonces que

$$p = \min\{x \in A : x \succ q'\} = \min\{x \in A : x \succ f(m)\} = f(m+1).$$

Esto contradice el hecho de que $p \notin \text{rango}(f)$. □

El anterior teorema se puede describir de la siguiente manera: salvo isomorfismo, $(\mathbb{N}, <)$ es el único conjunto bien ordenado, sin elemento máximo, y en el que todo subconjunto no vacío, acotado superiormente, tiene máximo.

3.6. Recursión general y el Esquema Axiomático de Reemplazo

Para aplicar el Teorema de Recursión 3.4.1 se requiere un conjunto A y una función dada $g : A \times \mathbb{N} \longrightarrow A$. La función $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$ definida recursivamente toma valores en A; así que A debe ser lo "suficientemente grande" para que todos los valores $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $\ldots$, etc. sean elementos de A. Hay recursiones sencillas en las que no es posible determinar de antemano un conjunto A adecuado (con los axiomas disponibles hasta el momento). Por ejemplo, las dos sucesiones

$$\big\langle \varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots \big\rangle$$

y

$$\big\langle \mathbb{N}, S(\mathbb{N}), S(S(\mathbb{N})), S(S(S(\mathbb{N}))), \ldots \big\rangle,$$

se pueden obtener a partir de las recursiones

$$\begin{cases} f(0) = \varnothing. \\ f(n+1) = \{f(n)\}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.6.1}$$

y

$$\begin{cases} h(0) = \mathbb{N}. \\ h(n+1) = S(h(n)), \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, \end{cases} \tag{3.6.2}$$

respectivamente. Sin embargo, la existencia de las funciones f y h no se puede asegurar mediante el Teorema de Recursión 3.4.1 ya que, con los axiomas disponibles hasta el momento, no es posible construir un conjunto A tal que $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots$, etc. sean elementos de A. Tampoco disponemos de un conjunto A que contenga como elementos a $\mathbb{N}, S(\mathbb{N}), S(S(\mathbb{N})), S(S(S(\mathbb{N}))), \ldots$, etc. El Teorema General de Recursión (Teorema 3.6.2), permite definir funciones por medio de recursiones como (3.6.1) y (3.6.2), sin la necesidad de especificar de antemano un conjunto A. La demostración de este teorema requiere, no obstante, un nuevo esquema axiomático, el llamado Esquema Axiomático de Reemplazo.

3.6.1 Definición. Una propiedad, expresada en la lógica de primer orden por medio de una fórmula $\varphi(x, y)$, se dice que es una *propiedad funcional* (con respecto a la variable x) si para todo x existe un único y tal que $\varphi(x, y)$, o sea si se cumple $\forall x\, \exists! y \varphi(x, y)$. La fórmula $\varphi(x, y)$ puede tener otras variables no cuantificadas o parámetros.

Esquema Axiomático de Reemplazo. Sea $\varphi(x, y)$ una propiedad funcional con respecto a la variable x. Dado un conjunto A existe un conjunto formado por los y que satisfacen $\varphi(x, y)$ para algún $x \in A$. Formalmente,

$$\forall A \exists B \forall y \big[y \in B \longleftrightarrow \exists x (x \in A \land \varphi(x, y)) \big].$$

Usando el cuantificador existencial restringido, se puede escribir la anterior expresión más sencillamente:

$$\forall A \exists B \forall y \big[y \in B \longleftrightarrow (\exists x \in A)\varphi(x,y) \big].$$

Por el Axioma de Extensión, B resulta único y se presenta comúnmente como

$$B = \{y : (\exists x \in A)\varphi(x,y)\} = \{y : \varphi(x,y) \text{ para algún } x \in A\}.$$

Con referencia a la propiedad funcional $\varphi(x,y)$, si para x dado, $G(x)$ denota el único y tal que $\varphi(x,y)$, entonces se dice que G es una *operación unitaria*. El axioma de reemplazo implica la existencia de una función $f : A \longrightarrow B$ tal que $f(x) = G(x)$. Como conjunto de parejas f se puede escribir así:

$$f = \{(x,y) \in A \times B : \varphi(x,y)\} = \{(x,y) \in A \times B : y = G(x)\}.$$

En la práctica matemática es usual utilizar subíndices para denotar operaciones unitarias: si y_x denota el único y tal que $\varphi(x,y)$, entonces el conjunto B postulado por el axioma de reemplazo se escribe corrientemente en la forma $B = \{y_x : x \in A\}$.

El término "reemplazo" en este esquema axiomático se puede justificar mediante el siguiente razonamiento: si cada $x \in A$ *se reemplaza* en la fórmula $\varphi(x,y)$, se determina un único y; B es el conjunto formado por todos estos y.

Para enunciar el teorema general de recursión, es necesario considerar operaciones binarias. Sea $\varphi(x,y,z)$ una propiedad funcional con respecto a las variables x y y, es decir, $\forall x\, \forall y\, \exists! z \varphi(x,y,z)$. Si para x y y dados, $G(x,y)$ denota el único z tal que $\varphi(x,y,z)$, entonces se dice que G es una *operación binaria*. La fórmula $\varphi(x,y,z)$ puede tener otras variables no cuantificadas o parámetros.

3.6.2. Teorema General de Recursión. Sea G una operación binaria y a un conjunto dado. Existe una única sucesión $\langle f(n) \rangle_{n \in \mathbb{N}}$ tal que:

$$\begin{cases} f(0) = a. \\ f(n+1) = G(f(n), n), \ \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{3.6.3}$$

Demostración. Esta demostración es una modificación de la demostración del Teorema de Recursión para $\mathbb{N}$ (Teorema 3.4.1). Se trata de reescribir el argumento eliminando las referencias al conjunto A. El esquema Axiomático de Separación ya no será suficiente y habrá que recurrir al Esquema Axiomático de Reemplazo.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ se define una n-aproximación como una función t, con dominio $n+1$, tal que

$$\begin{cases} t(0) = a. \\ t(k+1) = G(t(k), k), \ \text{para todo } k, \ 0 \leq k < n. \end{cases}$$

Hay que pensar en t como un conjunto de parejas; su dominio es $n+1$ pero no es necesario especificar explícitamente su rango. Intuitivamente, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una única n-aproximación. Así, la única 0-aproximación es la función $t = \{(0,a)\}$, cuyo dominio es $\{0\}$.

La única 1-aproximación es la función $t = \{(0, a), (1, G(a, 0))\}$, cuyo dominio es $\{0, 1\}$. La única 2-aproximación es la función $t = \{(0, a), (1, G(a, 0)), (2, G(G(a, 0), 1))\}$, cuyo dominio es $\{0, 1, 2\}$. Al igual que en el Teorema 3.4.1, se puede demostrar por inducción sobre n que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una única n-aproximación. En el paso inductivo asumimos que existe una n-aproximación t y construimos una $n + 1$-aproximación añadiendo a t una pareja más: $t \cup \{(n+1, G(t(n), n))\}$. Luego, utilizando inducción restringida, se puede demostrar que las aproximaciones son compatibles dos a dos. Se sigue que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una única n-aproximación, ya que dos n-aproximaciones son compatibles y, por lo tanto, coinciden en su dominio común, que es $n + 1$. Denotaremos con t_n la única n-aproximación. Se define ahora el conjunto de todas las n-aproximaciones, esto es,

$$T = \{t_n : t_n \text{ es una } n\text{-aproximación para algún } n \in \mathbb{N}\}.$$

La existencia de T no se puede asegurar mediante el esquema Axiomático de Separación porque no disponemos *a priori* de un conjunto X tal que $t_n \in X$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sin embargo, se puede afirmar que T existe si se invoca el Esquema Axiomático de Reemplazo con la propiedad $\varphi(n, y)$ dada por

$$(n \in \mathbb{N} \longrightarrow y \text{ es una } n\text{-aproximación}) \wedge (n \notin \mathbb{N} \longrightarrow y = \varnothing).$$

Obsérvese que $\varphi(n, y)$ es una propiedad funcional ya que $\forall n \exists! y\, \varphi(n, y)$. Por Reemplazo existe entonces el conjunto $B = \{y : (\exists n \in \mathbb{N})\varphi(n, y)\}$. Se tiene que

$$\begin{aligned} B &= \{y : (\exists n \in \mathbb{N})\varphi(n, y)\} \\ &= \{y : (\exists n \in \mathbb{N})(y \text{ es una } n\text{-aproximación})\} \\ &= \{t_n : (\exists n \in \mathbb{N})(t_n \text{ es una } n\text{-aproximación})\} \\ &= \{t_n : t_n \text{ es una } n\text{-aproximación para algún } n \in \mathbb{N}\} \\ &= T. \end{aligned}$$

Una vez justificada la existencia de T, se puede definir $f = \bigcup T$. Como las aproximaciones son compatibles dos a dos, $\bigcup T$ es una función cuyo dominio es $\mathbb{N}$, según la Proposición 2.5.3. Para demostrar que f es la única función que satisface la recursión (3.6.3) se procede como en la demostración del Teorema 3.4.1 (omitiendo las referencias al conjunto A). □

Ejemplo Para garantizar la existencia de la sucesión

$$\langle \varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\}, \ldots \rangle,$$

basta la siguiente recursión:

$$\begin{cases} f(0) = \varnothing. \\ f(n+1) = \{f(n)\}, \text{ para todo } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

La existencia de f se puede asegurar aplicando el Teorema General de Recursión con la operación $G(x,y)=\{x\}$ y tomando $a=\varnothing$. En efecto, según el teorema, existe una única sucesión $\langle f(n)\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{cases} f(0)=a=\varnothing. \\ f(n+1)=G(f(n),n)=\{f(n)\}, \text{ para todo } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Dado que existe la función f, también existe su rango, es decir, el conjunto

$$\{f(n):n\in\mathbb{N}\}=\big\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\{\{\varnothing\}\}\},\ldots\big\}.$$

Ejemplo La sucesión

$$\big\langle \mathbb{N},S(\mathbb{N}),S(S(\mathbb{N})),S(S(S(\mathbb{N}))),\ldots\big\rangle,$$

se puede obtener a partir de la siguiente recursión:

$$\begin{cases} f(0)=\mathbb{N}. \\ f(n+1)=S(f(n)), \text{ para todo } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

La existencia de f se puede asegurar aplicando el Teorema General de Recursión con la operación $G(x,y)=S(x)$ y tomando $a=\mathbb{N}$. En efecto, según el teorema, existe una única sucesión $\langle f(n)\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ tal que

$$\begin{cases} f(0)=a=\mathbb{N}. \\ f(n+1)=G(f(n),n)=S(f(n)), \text{ para todo } n\in\mathbb{N}. \end{cases}$$

Dado que existe la función f, también existe su rango, es decir, el conjunto

$$\{f(n):n\in\mathbb{N}\}=\big\{\mathbb{N},S(\mathbb{N}),S(S(\mathbb{N})),S(S(S(\mathbb{N}))),\ldots\big\}.$$

Ejercicios de la sección 3.6

1. Demostrar la existencia de la sucesión $\big\langle\varnothing,\wp(\varnothing),\wp(\wp(\varnothing)),\wp(\wp(\wp(\varnothing))),\ldots\big\rangle$ y del conjunto $\{\varnothing,\wp(\varnothing),\wp(\wp(\varnothing)),\wp(\wp(\wp(\varnothing))),\ldots\}$.

2. Construir un conjunto inductivo diferente de $\mathbb{N}$ y justificar su existencia.

3. Demostrar que la versión básica del Esquema Axiomático de Separación se puede deducir del Esquema Axiomático de Reemplazo.