Universidad Nacional de Colombia / INTROTEOCONJ / Examen Final /
26 I-2022

Fecha y hora de entrega: ~~25~~ de junio, 11 am vía Classroom.

- **Código de honor:** NO consultarán con otros grupos ni con nadie externo (ni en la red, ni fuera de ella).
- **Pueden** usar la red, pero deben *dar crédito* a las página que consulten o usen.
- *Deben* participar todos/as los/as estudiantes del grupo; cada uno/a es responsable de lo que el grupo entrega. Posiblemente, habrá presentación de partes del examen en tablero (presencial o virtual) por parte de estudiantes de cada grupo escogidos/as al azar. Les pido que en el trabajo especifiquen qué aportó exactamente cada integrante del grupo.
- En esta época más que nunca parte de su formación pasa por el respeto de este código de honor; seré **generoso** con la nota *si veo que trabajan bien y hacen un genuino esfuerzo*; por otro lado, si detecto que han infringido el código la nota será sencillamente 00 y habrá **carta al Decano de la Facultad (copia al Departamento)** sobre el grupo que infrinja el código del honor.
- Las respuestas pueden ser manuscritas o en LaTeX.
- Pueden hacerme DOS preguntas por grupo máximo.
- Hay cuatro partes generales en el parcial, y una pregunta especial para cada grupo (la *relojería conjuntística*). Cada parte tiene al final preguntas especiales. **Obligatorio para todos es contestar dos de los puntos 1, 2, 3 y 4, excepto las preguntas especiales. Las preguntas especiales (1A, 1B, 2, 3, 4) al final de cada sección son opcionales. Requieren más material que el visto en clase. Todo grupo deberá intentar al menos una de las preguntas especiales y registrar lo que logren. Naturalmente, si responden más de una de las preguntas especiales, eso tendrá bonus.** Obligatorio es para cada grupo su pregunta 5 (relojería).
- Además del tema especial de cada grupo (punto 5), el parcial toca cuatro temas importantes de interacción entre la teoría de conjuntos y otras áreas. Si lo hacen cuidadosa y seriamente, aprenderán no solamente buena teoría de conjuntos sino algo de análisis, algo de topología y algo de la prueba del famoso back-and-forth (vaivén) de Cantor, algo de combinatoria, todos estos temas cruciales en la matemática del siglo XX y XXI. Usen el parcial para revisar su matemática y aprender mucho.

1. Reales y teoría de conjuntos

Definición 1 ((Jerarquía de Borel)). Definimos por inducción transfinita la siguiente jerarquía de subconjuntos de $\mathbb{R}$:

- $\boldsymbol{\Sigma}^0_1 := \{X \in \mathbb{R} \mid X \text{ es abierto}\}$
- $\boldsymbol{\Pi}^0_\alpha := \{\mathbb{R} \setminus X \mid X \in \boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha\}$,
- Para $\alpha > 1$, $\boldsymbol{\Sigma}^0_\alpha := \{X = \bigcup_{i<\omega} X_i \mid X_i \in \boldsymbol{\Pi}^0_{\alpha_i} \text{ para algún } \alpha_i < \alpha\}$,

- $\mathbf{\Delta}^0_\alpha := \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha$.

Observa que ya conocías de cursos anteriores los dos primeros niveles de las dos jerarquías $\mathbf{\Sigma}$ y $\mathbf{\Pi}$: los conjuntos $\mathbf{\Sigma}^0_1$ son los abiertos, los $\mathbf{\Pi}^0_1$ son los cerrados, los $\mathbf{\Sigma}^0_2$ las uniones enumerables de cerrados (también llamados "conjuntos F_σ") y los $\mathbf{\Pi}^0_2$ son los complementos de los anteriores, es decir las intersecciones enumerables de abiertos (también llamados "conjuntos G_δ" clásicamente). Los niveles $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha, \mathbf{\Pi}^0_\alpha, \mathbf{\Delta}^0_\alpha$ con $\alpha > 2$ sí son probablemente nuevos para tí.

1. Para los siguientes conjuntos A, dí si son $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ o $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$ (o $\mathbf{\Delta}^0_\alpha$), y *encuentra* el mínimo α tal que A está en la clase correspondiente:
   a) $\mathbb{Q}$,
   b) $\mathbb{R}$,
   c) $[0, 1)$,
   d) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n+1})$
2. Demuestra que el diagrama siguiente es correcto, si interpretas las flechas como inclusiones $\subseteq$.

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbf{\Sigma}^0_1 \arrow[dr] & & \mathbf{\Sigma}^0_2 \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dr] & & \mathbf{\Sigma}^0_\alpha \arrow[dr] & & \mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1} \arrow[dr] & \\
\mathbf{\Delta}^0_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{\Delta}^0_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{\Delta}^0_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots & \mathbf{\Delta}^0_\alpha \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+2} \\
 & \mathbf{\Pi}^0_1 \arrow[ur] & & \mathbf{\Pi}^0_2 \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & \mathbf{\Pi}^0_\alpha \arrow[ur] & & \mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

   De hecho, esas inclusiones son todas estrictas, pero es más difícil demostrarlo en general. Puedes, sin embargo, verificar que la contenencia entre abiertos y conjuntos G_δ es estricta (es decir, que $\mathbf{\Sigma}^0_1 \subsetneq \mathbf{\Sigma}^0_2$) mediante un ejemplo; igualmente, es fácil ver que $\mathbf{\Pi}^0_1 \subsetneq \mathbf{\Pi}^0_2$, es decir que hay conjuntos F_σ que no son cerrados). Encuentra ejemplos de estos. Por último, ¿puedes dar un conjunto que esté en $\mathbf{\Delta}^0_2$?
3. Demuestra que la jerarquía necesariamente se detiene después de ω_1 pasos. Es decir, que $\mathbf{\Sigma}^0_{\omega_1} = \mathbf{\Sigma}^0_{\omega_1+1} = \mathbf{\Pi}^0_{\omega_1} = \mathbf{\Pi}^0_{\omega_1+1}$. [Ayuda: usa que $\aleph_1$ es un cardinal regular. Es decir, que si tomas una unión contable de conjuntos en $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha_i}$ con índices $\alpha_i < \omega_1$, existe $\alpha < \omega_1$ tal que la unión de los conjuntos está en $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$.]
4. Demuestra que el cardinal de $\mathbf{\Sigma}^0_1$ es $2^{\aleph_0}$. Ayuda: usa que los racionales son densos en los reales, y que todo abierto es unión de intervalos con extremos racionales. Así, el número de conjuntos abiertos es "pequeño" comparado con el número de todos los subconjuntos, $2^{2^{\aleph_0}}$.
5. Demuestra que lo anterior en realidad vale a lo largo de toda la jerarquía: por inducción en $\alpha < \omega_1$, ver que si $|\mathbf{\Sigma}^0_\alpha| = 2^{\aleph_0}$ entonces $|\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}| = 2^{\aleph_0}$. Por lo tanto, se puede concluir que toda la jerarquía de Borel tiene cardinal $2^{\aleph_0}$.
6. Da ejemplos de $\omega + \omega$-sucesión creciente, de ω^2-sucesión creciente, de ω^ω-sucesión creciente (en $\mathbb{R}$).

Pregunta especial 1A: la "Hipótesis del continuo" en borelianos

1. Demuestra que todo conjunto cerrado no contable debe tener cardinal $2^{\aleph_0}$. Ayuda: puedes usar temas de libros de Análisis Real. **Nota importante: lo anterior vale en realidad a lo largo de toda la jerarquía.**
2. Algo de historia de la matemática: Cantor demostró que la "hipótesis del continuo" vale para conjuntos cerrados (ese es el contenido del punto anterior). Su prueba fue generalizada a toda la jerarquía boreliana. Suslin y su estudiante de pregrado Luzin demostraron en Moscú en 1917 que si se toma una **imagen continua** de un conjunto cerrado (por una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$) la imagen NO necesariamente es un boreliano. Estos conjuntos de reales de la forma

$$f(B)$$

donde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua y B es un boreliano se llaman **conjuntos analíticos**. Suslin y Luzin demostraron dos cosas más:
   - El complemento de un conjunto analítico (llamado *co-analítico*) no necesariamente es analítico.
   - La imagen continua de un co-analítico no necesariamente es analítica ni co-analítica.

   Con lo anterior, aparece una nueva jerarquía (llamada "jerarquía proyectiva") de conjuntos *arriba de la jerarquía de Borel* (note que a diferencia de la jerarquía de Borel, la jerarquía proyectiva tiene solo ω niveles):

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \boldsymbol{\Sigma}^1_1 \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Sigma}^1_2 \arrow[dr] & & \cdots \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Sigma}^1_n \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Sigma}^1_{n+1} \arrow[dr] & \\
\boldsymbol{\Delta}^1_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Delta}^1_2 \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Delta}^1_3 \arrow[ur] \arrow[dr] & \cdots & \boldsymbol{\Delta}^1_n \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Delta}^1_{n+1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boldsymbol{\Delta}^1_{n+2} \\
& \boldsymbol{\Pi}^1_1 \arrow[ur] & & \boldsymbol{\Pi}^1_2 \arrow[ur] & & \cdots \arrow[ur] & & \boldsymbol{\Pi}^1_n \arrow[ur] & & \boldsymbol{\Pi}^1_{n+1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

   En la jerarquía, los analíticos son los $\boldsymbol{\Sigma}^1_1$, los co-analíticos los $\boldsymbol{\Pi}^1_1$. Al igual que en la primera jerarquía, $\boldsymbol{\Delta}^1_n := \boldsymbol{\Sigma}^1_n \cap \boldsymbol{\Pi}^1_n$, y $\boldsymbol{\Pi}^1_n$ es la clase de los complementos de los conjuntos en la clase $\boldsymbol{\Sigma}^1_n$.

   Demuestra que todo Boreliano es analítico Y co-analítico (luego $\boldsymbol{\Delta}^1_1$). De hecho, los borelianos son exactamente la clase $\boldsymbol{\Delta}^1_1$.

   Averigua donde está la "frontera en ZFC" de la Hipótesis del Continuo, con respecto a las dos jerarquías.

Pregunta especial 1B: Reales y sucesiones largas

Demuestra que NO existe ninguna ω_1-sucesión creciente en $\mathbb{R}$. [Ayuda: usa la propiedad arquimedeana de los reales. Primero supón que $s : \omega_1 \to \mathbb{R}$ es creciente. Considera los números reales $s(\alpha + 1) - s(\alpha)$ para $\alpha < \omega_1$, y nota que si

$$D_n = \left\{ \alpha < \omega_1 \mid s(\alpha + 1) - s(\alpha) < \frac{1}{n} \right\}$$

existe n_0 tal que $|D_{n_0}| = \aleph_1$ debe tener cardinal $\aleph_1$ (usa el principio del palomar para este paso y la regularidad de ω_1). Pero ahora busca una contradicción a la propiedad arquimedeana examinando los reales $s(\alpha+1) - s(\alpha)$ para $\alpha \in D_{n_0}$.]

2. Topología de ordinales

Una *topología* sobre un conjunto X es un conjunto $\tau \subseteq \wp(X)$ tal que

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. si $U, V \in \tau$ entonces $U \cap V \in \tau$ (τ es "cerrado bajo intersecciones finitas"),
3. si $\mathfrak{C} \subseteq \tau$ entonces $\bigcup \mathfrak{C} \in \tau$ (τ es "cerrado bajo uniones arbitrarias")

Los elementos de τ se llaman "abiertos de la topología τ" (o simplemente "abiertos" si no hay ambigüedad). Los complementos de elementos de τ se llaman "cerrados".

Una **base** $\mathfrak{B}$ para la topología τ es un conjunto de subconjuntos de X tal que *todo abierto de* τ es una unión de una familia de conjuntos incluida en $\mathfrak{B}$.

Por ejemplo, la topología usual de los reales tiene como base los intervalos de extremos racionales.

Sea ahora $\alpha > 0$ un ordinal. Decimos que $U \subseteq \alpha$ es abierto en α ssi para todo $\beta \in U$ (con $\beta \neq 0$) existen $\gamma < \beta < \delta$ tales que el *intervalo abierto de ordinales* (γ, δ) está incluido en U, y si $\beta = 0$ pedimos que exista un $\delta > 0$ tal que $[0, \delta) \subseteq U$.

1. Demuestra que la descripción anterior da lugar a una topología sobre α. Es la "topología del orden" de α.
2. Muestra que si $\alpha = \omega$, la topología del orden es la trivial ($\wp(\omega)$).
3. Muestra que si $\alpha = \omega + 1$, la topología da lugar a un "espacio topológico compacto", es decir, para toda familia de abiertos $\mathfrak{R}$ tal que $\bigcup \mathfrak{R} = \omega + 1$ existe $\mathfrak{R}_0 \subseteq \mathfrak{R}$ **finita** tal que $\bigcup \mathfrak{R}_0 = \omega + 1$. Ayuda: usa que en un ordinal no hay $\in$-cadenas descendentes infinitas.
4. Nota: lo anterior vale en realidad para todo ordinal sucesor: **la topología del orden de todo ordinal sucesor es compacta.** Y falla para los límites (por ejemplo, en ω la topología del orden es la discreta; lejos de ser compacta). Pero en $\omega + \omega$ y en general en cualquier límite NO es compacta. ¿Por qué? (Ayuda: construye una sucesión de abiertos de abajo hacia arriba en el ordinal límite de tal manera que no haya subsucesión finita que pueda recubrir el ordinal.)
5. Si (X_1, τ_1) y X_2, τ_2 son espacios topológicos, decimos que $f : X_1 \to X_2$ es **continua** ssi para todo $U \in \tau_2$, $f^{-1}(U) \in \tau_1$ ("pre-imagen de abierto es abierto"). Demuestra que cuando X_1 y X_2 son ordinales, con sus topologías de orden, f es continua ssi

$$f(\sup \alpha_i) = \sup f(\alpha_i)$$

para toda familia **creciente** de ordinales $\alpha_i \in X_1$.

Pregunta especial 2: ¿qué otras propiedades tienen los espacios topológicos sobre ordinales? (¿cuándo son de Hausdorff? ¿cuándo son conexos? ¿cuándo son discretos? ¿cuándo son metrizables?)

3. El vaivén de Cantor

Cantor demostró el siguiente teorema:

Teorema 2. Si $(A, <_A)$ es un conjunto linealmente ordenado, denso y sin extremos, contable, entonces $(A, <_A) \approx (\mathbb{Q}, <)$ (es decir, existe un isomorfismo de orden entre $(A, <_A)$ y $(\mathbb{Q}, <)$).

Para demostrarlo, Cantor llevó a cabo lo siguiente (la primera parte del ejercicio consiste en justificar los siguientes pasos):

- Escribimos A como $\{a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots\}$ y escribimos $\mathbb{Q}$ como $\{q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots\}$
- Definimos $f_0 = \{(a_0, q_0)\}$.
- Supongamos que ya hemos definido f_k. Si k es par buscamos el mínimo índice i tal que $q_i \notin \text{im}(f_k)$ y buscamos un elemento $a \in A$ **que esté en la misma posición relativa con respecto al dominio de f_k que q_i con respecto a la imagen de f_k.** Definimos $f_{k+1} = f_k \cup \{(a, q_i)\}$. Entonces f_{k+1} es función, su definición se puede llevar a cabo y es un **isomorfismo parcial** entre su dominio (finito) y su imagen.
- Si k es impar buscamos el mínimo índice i tal que $a_i \notin \text{dom}(f_k)$ y buscamos un elemento $q \in \mathbb{Q}$ **que esté en la misma posición relativa con respecto a la imagen de f_k que a_i con respecto al dominio de f_k.** Definimos $f_{k+1} = f_k \cup \{(a_i, q)\}$. Entonces f_{k+1} es función, su definición se puede llevar a cabo y es un **isomorfismo parcial** entre su dominio (finito) y su imagen.
- Dibuja las dos construcciones anteriores y explique por qué son posibles.
- Al final de la inducción obtenemos

  $$f_0 \subseteq f_1 \subseteq \cdots \subseteq f_k \subseteq \cdot$$

  Por lo tanto, podemos definir $f = \bigcup_{k<\omega} f_k$.
- f es función, $\text{dom}(f) = A$, $\text{im}(f) = \mathbb{Q}$ y f respeta el orden ($a_1 <_A a_2 \leftrightarrow f(a_1) < f(a_2)$).

Lo anterior completa una de las demostraciones más importantes de la matemática de la segunda mitad del siglo XIX.

¿Vale el vaivén de Cantor si cambiamos "contable" por "del tamaño del continuo" y $\mathbb{Q}$ por $\mathbb{R}$? ¿Qué puede fallar? (Ayuda: usa reales y racionales (en copias disyuntas) y haga suma de órdenes, $\oplus$.)

Pregunta especial 3: ¿Qué propiedad se te ocurre que se podría agregar a la densidad (sin extremos) de un orden lineal para "capturar" los reales? ¿Es decir, qué propiedad **P** podría usted usar para demostrar que si $(A, <_A)$ es un orden lineal denso del tamaño del continuo que tiene la propiedad **P** entonces $(A, < A)$ es isomorfo a $(\mathbb{R}, <)$? ¿Es suficiente decir que el orden en completo? [Ayuda 1: observa que la "recta larga" $\mathbb{L}$ que consta de ω_1 copias de $]0, 1]$ sumadas

$$S = \sum_{i<\omega_1}]0, 1]$$

con el orden de suma $\oplus$ es un orden denso sin extremos de cardinal del continuo, completo. ¿Es isomorfo a $(\mathbb{R}, <)$?
Ayuda 2: ensaya la propiedad **P** dada por "tener un subconjunto contable denso".]

4. Combinatoria de Ramsey

Recuerda el Teorema de Ramsey

$$\aleph_0 \to (\aleph_0)^n_m,$$

para todo par de naturales positivos n, m. Es decir, dada cualquier coloración de los subconjuntos de tamaño n de un conjunto enumerable en m colores $c : [A]^n \to m$, existe un subconjunto monocromático M de tamaño $\aleph_0$: $c \restriction [M]^n$ es constante, $|M| = \aleph_0$.

- Demuestra que todo orden parcial infinito $(A, \prec)$ contiene una cadena infinita o una anticadena infinita (es decir, contiene un subconjunto infinito M totalmente ordenado por $\prec$, o contiene un subconjunto infinito de elementos $\prec$-incomparables). [Ayuda: colorea los pares de A con 0 si son comparables, 1 si no lo son, y aplica Ramsey.]
- Demuestra que dado un subconjunto infinito $X \subseteq \mathbb{R}^2$, existe un subconjunto infinito *convexo* $Y \subseteq X$ (es decir, ningún punto de Y está en el interior del triángulo formado por otros tres puntos de Y). [Ayuda: demuestra primero que todo subconjunto del plano que tenga 5 puntos contiene algún subconjunto de 4 puntos que es convexo. Colorea los cuartetos de X con 0 si forman un cuarteto convexo, con 1 en caso contrario. Por la observación anterior, no hay subconjunto monocromático con 5 elementos. Por Ramsey, existe un conjunto monocromático infinito con color 0. Concluye.]

Pregunta especial 4:
Sea κ un cardinal tal que

- $\kappa > \aleph_0$,
- $\kappa \to (\kappa)^2_2$.

Demuestra que

- κ es *límite fuerte* (es decir, dado $\lambda < \kappa$, $2^\lambda < \kappa$),
- κ es *regular* (es decir, $\operatorname{cf} \kappa = \kappa$).

Cardinales mayores que $\aleph_0$ que satisfacen estas dos propiedades (ser regulares, límites fuertes) se llaman *inaccesibles*. Su existencia no se puede demostrar en ZFC (pues si κ es inaccesible, entonces $V_\kappa \models ZFC$; el famoso teorema de Gödel dice que ZFC no puede demostrar su propia consistencia. Si en ZFC se pudiese demostrar la existencia de inaccesibles, entonces ZFC permitiría construir un modelo de ZFC, y esto contradiría el teorema de Gödel).

5. Relojería conjuntística

Este punto es totalmente distinto de los anteriores, y es *obligatorio*.

Cada grupo deberá escoger UN teorema o UNA construcción de un tema cercano a *su carrera* (si la mayoría del grupo es de física deberán escoger temas como *la función de espín*,...; si son de estadística deberán escoger temas como probabilidad kolmogoroviana o no kolmogoroviana, etc.; si son de computación deberán escoger temas como el teorema SMN de recursión, o el teorema de punto fijo de funciones recursivas, etc.; si son de matemáticas deberán escoger UN teorema de análisis, álgebra o topología que use recursión infinita o axioma de elección o cualquier otro tema visto en este curso). Ese tema lo deberán *desmontar conjuntísticamente* en UNA página, en forma de *diagrama de pensamiento.*

El diagrama de pensamiento deberá tener un análisis conjuntístico milimétrico del tema o teorema seleccionado por el grupo, con todo el material visto en clase.