INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CONJUNTOS / I-2022

Andrés Villaveces

`Magistral 9 / Axioma de Elección, Lema de Zorn, Principio de Buen Orden`

La vez pasada

Cortes de Dedekind, construcción de los reales, inmersión de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. Inicio Axioma de Elección.

1. Axioma de Elección: variantes cercanas. Producto cartesiano generalizado.

- Descripción de Russell (la diferencia entre escoger uno de cada par de $\aleph_0$ zapatos y hacer lo mismo con $\aleph_0$ medias).
- AE-1:

> **Axioma de Elección (AE-1):**
> $\forall S \exists g\, [g \text{ es función } \wedge \forall X\, ((X \in S \wedge X \neq \varnothing) \to g(X) \in X)].$

- AE-2 (Dada una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de conjuntos no vacíos, $\prod_{i\in I} A_i \neq \varnothing$).
- AE-4: Si $p : E \to X$ es sobreyectiva, entonces existe $s : X \to E$ tal que $p \circ s = 1_X$. (Para Laboratorio del Martes próximo.)

2. Equivalencia con principios menos cercanos

El más famoso y más usado en aplicaciones a temas matemáticos: Lema de Zorn (LZ).

> **Lema de Zorn (LZ)** Dado un *conjunto* parcialmente ordenado $(D, \leq)$ tal que **toda cadena es mayorada** (es decir, dado $C \subseteq D$ tal que $(C, \leq)$ es un orden *total*, existe $d \in D$ tal que $c \leq d$ para todo $c \in C$), **existe** un elemento maximal de D.

Inicialmente, LZ parece muy distinto de AE, pero observamos inicialmente que ambos enunciados «arrojan» (existe...) un objeto (función selectora o elemento maximal).

Vimos en detalle que LZ implica que **todo espacio vectorial tiene alguna base**:

- Identificamos la posible base B como un conjunto lin. indep. *maximal*. Esto nos indica que debemos lograr armar un $(D, \leq)$ donde la maximalidad corresponda a lo que buscamos.
- Observamos que $(D, \leq)$ dado como el conjunto de todos los subconjuntos lin. indep. de V, con $\leq = \subseteq$, serviría.
- Demostramos que toda cadena en $(D, \leq)$ es mayorada. (Si C es cadena, el conjunto $\bigcup C$ es lin. indep. y contiene a C, luego lo mayora.) Concluimos.

Luego demostramos (de manera similar) que LZ implica AE (produjimos la función selectora como una *selectora parcial maximal*).

El tercer enunciado equivalente a AE (pero de nuevo, distinto en estilo) es extremadamente importante y útil:

> **Principio de Buen Orden (PBO)** Todo conjunto se puede bien-ordenar.

Es decir, dado un conjunto A existe $\leq \subseteq A \times A$ tal que $(A, \leq)$ es un buen orden.

Dentro de poco veremos que todo buen orden es isomorfo a un (¡¡¡único!!!) ordinal. De modo que, con AE, todo conjunto está en biyección con algún ordinal; el mínimo ordinal con el cual está en biyección es su *cardinal*, $|A|$.