5,0

Taller en Grupo #1 - Teoria de Conjuntos.

* Jose Miguel Acuña Hernandez - jacunah@unal.edu.co - 1000143264
* Juan Felipe Cadena Parrado - jcadenap@unal.edu.co - 1000150703
* María Sol Botello León - mbotello@unal.edu.co - 1002528269
* Cristian Camilo Barreto Bejarano - cbarreto@unal.edu.co - 1000688640
* Samuel Alvarez - salvarezt@unal.edu.co - 1027522564

¡Muy bien!

ejercicio

~~Teorema~~ 1: Sean $\emptyset \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos. Si B esta acotado inferiormente, entonces $\inf B \leq \inf A$.
Si además para todo $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $a \leq b$, entonces $\inf B = \inf A$.

ejercicio

~~Teorema~~ 2: Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $x + 0 = x$.

Lema 1: Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ no vacío. Si A esta acotado inferiormente, entonces A tiene infimo.

Prueba 1: Sean $A \subseteq \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}$ tales que $A \neq \emptyset$ y para todo $a \in A$, $x \leq a$. Sea $I := \{y \in \mathbb{R} : y \text{ es cota inferior de } A\}$, vemos que $x \in I$ luego $I \neq \emptyset$. como $I \subseteq \mathbb{R}$ por su definición, como $(\mathbb{R}, \leq)$ es completo, I tiene supremo, llamemoslo s ($s = \sup I$). Esto significa para todo $i \in I$, $s \geq i$. Por absurdo pensemos que s no es cota inferior de A, esto significa que existe $l \in A$ tal que $l < s$, pero como $l \in A$, por la definición de I, tenemos que para todo $i \in I$, $i \leq l$, es decir, que l es cota superior de I y además, $l < s$, lo cual es una contradicción, ya que $s = \sup I$. Por reducción al absurdo concluimos que s es cota inferior de A, y como para todo $i \in I$, $i \leq s$, tenemos que es la mayor cota inferior de A luego $s = \operatorname{Inf} A$. Se concluye que A tiene ínfimo. ∎

Demostración 1 Sean $\phi \neq A \subseteq B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos y $x \in \mathbb{R}$ cota inferior de B, por el lema 1 concluimos que existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $K = \inf B$. Ahora, sea $a \in A$, como $A \subseteq B$, $a \in B$, luego, por definición de ínfimo tenemos que $K \leq a$. Esto significa que K es cota inferior de A. Nuevamente, por el lema 1 concluimos que existe $q \in A$ tal que $q = \operatorname{Inf} A$ y, por definición de ínfimo, q es mayor que toda cota inferior de A, en particular, $q \geq K$, es decir, $\operatorname{Inf} B \leq \operatorname{Inf} A$.

(1) 5,0

Supongamos ahora, que para todo $b \in B$, ~~existe~~ $a \in A$ tal que $a \leq b$. Como el ínfimo de A es cota inferior de A, para todo $h \in A$, $\operatorname{inf} A \leq h$. Sea $\beta \in B$, por ~~la~~ ~~suposición~~ el supuesto, existe $\alpha \in A$ tal que $\alpha \leq \beta$, y por lo anterior $\operatorname{Inf} A \leq \alpha$. Por la transitividad de $\leq$ tenemos que $\operatorname{Inf} A \leq \beta$, luego, $\operatorname{Inf} A$ es cota inferior de B, y por definición de ínfimo $\operatorname{Inf} A \leq \operatorname{Inf} B$. Finalmente por la anti-simetría de $\leq$ tenemos que $\operatorname{Inf} B = \operatorname{Inf} A$ ∎

Lema 2: Para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que

$x = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \leq r\}$

Prueba: Sea $x \in \mathbb{R}$, como $\mathbb{Q}$ es conjunto y $P(r)$: "$r \geq x$" es propiedad conjuntista, por el esquema axiomático de separación, $A = \{r \in \mathbb{Q} : x \leq r\}$ es conjunto. Ademas, por construcción, x es cota inferior de A. Como $A \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$, y $x \in A$, por el lema 1 A tiene ínfimo.

Ok

Usen tricotomía

Reducción al

Por Absurdo pensemos que $x \neq \inf A$, entonces existe $y \in \mathbb{R}$ tal que y es cota inferior de A y $x < y$. Ahora, como se vio en clase, entre dos reales cualesquiera existe un racional, en particular, existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $x < q < y$. Observe $q \in A$ pero $q < y$, lo cual es una contradicción porque y es cota inferior de A. Se concluye por reducción al absurdo que $x = \inf A$ es decir, $x = \inf\{r \in \mathbb{Q} : x \leq r\}$ ∎

Ok.

Demostración 2: Queremos ver que para todo $x \in \mathbb{R}$, $x + 0 = x$, lo cual, por definición de suma y por el lema 2 es equivalente a que dado $x \in \mathbb{R}$ y los conjuntos $A = \{r \in \mathbb{Q} : x \leq r\}$, $B = \{r \in \mathbb{Q} : \text{existen } s, t \in \mathbb{Q},\ s + t = r,\ x \leq s,\ 0 \leq t\}$ $\inf A = \inf B$. Para eso vamos a utilizar el teorema 1.

(2) 5,0

??

Omitiré errores "pequeños"

1) $A, B \neq \emptyset$: como $\mathbb{R}$ no tiene extremos, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $x < y$ y por el lema 4 tenemos que existe $r \in \mathbb{Q}$, $x < r < y$ luego $r \in A$. Observe que, ya que $r, 0 \in \mathbb{Q}$, $r + 0 = r$, ademas $x \leq r$ y $0 \leq 0$ luego $r \in B$, es decir $A, B \neq \emptyset$.

2) $A \subseteq B$: Sea $q \in A$, esto significa que $q \in \mathbb{Q}$ y $q \geq x$.

Observe que cómo $q, 0 \in \mathbb{Q}$, $q+0=q$, y además $0 \leq 0$ y $x \leq q$, luego $q \in B$, es decir, $A \subseteq B$.

¿? Anteriormente.

3) B acotado por abajo: Sea $q \in B$, existen $s, t \in \mathbb{Q}$ tales que $s+t=q$, $x \leq s$ y $0 \leq t$, por el lema 3 $s \leq s+t$. y por transitividad de $\leq$, $x \leq q$, es decir, x es cota inferior de B.

¿? Colocar ANTES

4) Para todo $b \in B$, existe $a \in A$, $a \leq b$: Sea $b \in B$, esto significa que existen $s, t \in \mathbb{Q}$ tales que $s \geq x$, $t \geq 0$ y $s+t=b$. Por el lema 3, $s \leq s+t = b$ luego $s \leq b$ y como $s \geq x$ y $s \in \mathbb{Q}$ entonces $s \in A$. Justo lo que se quería.

Por el teorema 1 concluimos que $\inf A = \inf B$ es decir, $x = x+0$. ∎

Lema 3: Dados $s, t \in \mathbb{Q}$. Si $0 \leq t$ entonces $s \leq s+t$.

Prueba: Sean $s, t \in \mathbb{Q}$ con $0 \leq t$, esto significa que existen $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tales que $b, d >_{\mathbb{Z}} 0$, $c \geq_{\mathbb{Z}} 0$ y $s = [(a,b)]_{\sim}$, $t = [(c,d)]_{\sim}$. Observe que cómo, $b, c \geq_{\mathbb{Z}} 0$, $b \cdot_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} c \geq_{\mathbb{Z}} 0$, luego, $a \cdot_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} d \leq a \cdot_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} d +_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} b \cdot_{\mathbb{Z}} c$, luego; $a \cdot_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} c) \leq_{\mathbb{Z}} ((a \cdot_{\mathbb{Z}} d) +_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} c)) \cdot_{\mathbb{Z}} b$,

luego, $[(a,b)]_{\sim} \leq [((a \cdot_{\mathbb{Z}} d) +_{\mathbb{Z}} (b \cdot_{\mathbb{Z}} c))]_{\sim}$

luego, $s \leq s+t$ ∎

Nota: Cabe aclarar que el conjunto $\mathbb{Q}$ que se utiliza en las demostraciones del lema y teorema 2 es la copia isomorfa de los números racionales contenida en $\mathbb{R}$, cuya existencia está garantizada porque $(\mathbb{R}, \leq)$ es el completado de los racionales. Mientras que el conjunto $\mathbb{Q}$ que se utiliza en la demostración del lema 3, es el conjunto de los números racionales.

Lema 4: Sean $x, y \in \mathbb{R}$, si $x<y$ entonces existe $r \in \mathbb{Q}$ (copia isomorfa de los racionales) tal que $x<r<y$.

Prueba: Sean $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $x<y$. Como $\mathbb{R}$ es el conjunto de las cortaduras de Dedekind en $\mathbb{Q}$, tenemos que existen $(A,B), (C,D)$ cortaduras de Dedekind tales que $x=(A,B)$, $y=(C,D)$, donde $A \subset C$, luego existe $c \in C$ tal que $c \notin A$ y por definición de cortadura, $c \in B$. Observe que podemos tomar c de tal forma que $c \neq \min B$, ya que si $C = A \cup \{c\}$ como $c \in B$, por la definición de cortadura para todo $c' \in C$, $c' \leq c$ luego $c = \max C$ lo cual contradice que (C,D) es cortadura. Por lo anterior vemos que por lo menos hay otro elemento fuera del mínimo de B en C, ese es el c que tomaremos, es decir, $c \neq \min B$.

Por la definición del isomorfismo de $\mathbb{Q}$ contenido en $\mathbb{R}$, sabemos que $[c]$ pertenece a la copia isomorfa de $\mathbb{Q}$ contenida en $\mathbb{R}$. Esto porque $c \in B$ y $B \subseteq \mathbb{Q}$. Considere los siguientes conjuntos.

$A_c = \{q \in \mathbb{Q} : q <_{\mathbb{Q}} c\}$ y $B_c = \{q \in \mathbb{Q} : c \leq_{\mathbb{Q}} q\}$. Podemos ver que $[c] = (A_c, B_c)$ es cortadura y pertenece a la copia isomorfa de los racionales contenida en $\mathbb{R}$. Pero ademas como $c \in B$, para todo $a \in A$, $a <_{\mathbb{Q}} c$ luego $A \subseteq A_c$. Como $c \neq \min B$, existe $k \in B$ tal que $k <_{\mathbb{Q}} c$ luego $k \in A_c$ pero $k \notin A$ luego $A \subset A_c$ luego $(A,B) < [c]$ es decir, $\boxed{x < [c]}$

Ahora, sea $x \in A_c$, Por absurdo asumimos que $x \notin C$ por lo cual $x \in D$ por definición de cortadura, Observe que como $x \in A_c$, $x <_{\mathbb{Q}} c$, pero como $c \in C$, por la definición de cortadura, $c <_{\mathbb{Q}} x$, lo cual contradice la asimetría de $\leq_{\mathbb{Q}}$, luego, $x \in C$. De lo anterior se concluye que $A_c \subseteq C$, solo falta ver que $c \in C$ pero $c \notin A_c$ porque $<_{\mathbb{Q}}$ es irreflexivo luego $A_c \subset C$. es decir $(A_c, B_c) < (C, D)$ luego $[c] < y$.

Vemos que $[c]$ pertenece a la copia isomorfa de $\mathbb{Q}$ contenida en $\mathbb{R}$, pero ademas $x < [c] < y$. ∎