Notas de clase para el curso
Introducción a la Teoría de Conjuntos
I Semestre 2020

Rodrigo De Castro K.
Andrés Villaveces

Capítulo 1

Paradojas y Axiomas

1.1. Paradojas de la teoría intuitiva de conjuntos

La mayoría de los conceptos y resultados de la matemática actual se pueden presentar en el lenguaje de la teoría de conjuntos. No obstante, un tratamiento intuitivo y poco riguroso de la noción de conjunto conduce rápidamente a contradicciones. Históricamente, estos razonamientos "problemáticos" se conocen como paradojas o antinomias de la teoría intuitiva de conjuntos. Destacaremos dos de las más elementales y conocidas, la paradoja de Russell y la paradoja de Berry, que surgen al adoptar sin restricciones el llamado *Principio de Comprensión* o *Principio de Abstracción* según el cual, dada una propiedad $P(x)$, existe el conjunto de todos los objetos que satisfacen $P(x)$. Este conjunto se denota corrientemente mediante las notaciones $\{x : P(x)\}$ o $\{x \mid P(x)\}$.

La paradoja de Russell. Si se considera la propiedad $P(x)$ dada por $x \notin x$, el Principio de Compresión garantiza la existencia del conjunto

$$R = \{x : x \notin x\}.$$

Inmediatamente se concluye que $R \in R \longleftrightarrow R \notin R$, lo cual es una contradicción ya que $\varphi \longleftrightarrow \neg\varphi$ es falso cualquiera sea el enunciado φ. Es importante resaltar que la paradoja de Russell se presenta sin importar que existan o no objetos x que satisfagan la propiedad $x \notin x$.

La paradoja de Berry. Sea C el conjunto de todos los números naturales que se pueden describir con veinte palabras o menos del idioma español. Este conjunto existe si se invoca el Principio de Comprensión, tomando $P(x)$ como la propiedad "x es un número natural que se puede describir con veinte palabras o menos del idioma español". Como el número de palabras del español es finito, también lo será el número de posibles descripciones que utilicen veinte palabras o menos. Por consiguiente, C es finito, lo cual implica que existen números naturales que no están en C. Sea m el mínimo número natural que no está en C. Se tiene que $m \notin C$, pero también se tiene que $m \in C$ ya que se puede describir con menos de veinte palabras: m es "el menor número natural que no se puede describir con veinte palabras o menos del idioma español". De esta forma se llega a una contradicción.

Otra versión de la paradoja de Berry se obtiene considerando el máximo número natural M que está en C (M existe porque C es finito). Sea q el sucesor de M, es decir, $q = M + 1$. Como M es el máximo de C, $q \notin C$. Pero por otro lado, podemos describir a q como "el sucesor del máximo número natural que se puede describir con veinte palabras o menos del idioma español". Ya que esta descripción de q utiliza menos de veinte palabras, se concluye que $q \in C$. Así que $q \in C$ y $q \notin C$, lo cual es una contradicción.

1.2. Teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel

Paradojas como las de Russell y Berry muestran que el Principio de Comprensión no se puede adoptar en toda su generalidad. Para eliminar estas y otras paradojas similares, Zermelo propuso en 1908 un enfoque axiomático riguroso para la teoría de conjuntos, la cual había sido descrita previamente por Georg Cantor de manera intuitiva. Con las modificaciones realizadas en el período 1908–1925, principalmente por Skolem y Fraenkel, esta teoría se conoce actualmente como la teoría axiomática de Zermelo-Fraenkel. Sus axiomas se presentan en el marco de la lógica de predicados, o lógica de primer orden, y sus principales características se describen a continuación.

1. Hay un único término no-definido, que es "conjunto", y una única relación (binaria) no definida, que es la relación de pertenencia $\in$. Frecuentemente se utilizan las palabras "clase" o "colección" como sinónimos de "conjunto". Es preciso advertir que en otras versiones formales de la teoría de conjuntos, siguiendo el enfoque de von Neumann, se distingue entre "conjunto" y "clase".

2. El lenguaje formal para la teoría de conjuntos incluye los símbolos que aparecen en la siguiente tabla:

Variables:	$x, y, z, \dots A, B, C, \dots$
Símbolos relacionales:	$=$ (igualdad), $\in$ (pertenencia).
Conectivas lógicas:	$\neg$ (negación), $\wedge$ (conjunción), $\vee$ (disyunción),
	$\longrightarrow$ (implicación), $\longleftrightarrow$ (doble implicación).
Cuantificadores:	$\forall$ (cuantificador universal o 'para todo').
	$\exists$ (cuantificador existencial o 'existe').
Paréntesis:	( ).

3. Todas las variables x, y, z, $\dots$, A, B, C, $\dots$ representan conjuntos. De hecho, se supone que los únicos objetos considerados son conjuntos; los elementos de los conjuntos también son conjuntos. *¡No hay nada más que conjuntos!*

4. La relación de igualdad $=$ y sus propiedades básicas, a saber, reflexividad, simetría, transitividad y sustitución de iguales por iguales, se consideran parte de la lógica y se asumen de antemano. Esto se expresa diciendo que la lógica subyacente es la lógica de primer orden con igualdad.

5. Los símbolos del lenguaje se utilizan para construir *enunciados formales* o *fórmulas*. Las fórmulas más sencillas son las llamadas fórmulas atómicas, que son de la forma $(A = B)$ o $(x \in A)$, donde A, B y x son variables. La fórmula $A = B$ se lee, como es tradicional, "A es igual a B" mientras que la fórmula $x \in A$ se lee "x pertenece a A" o "x es elemento de A".

6. A partir de las fórmulas atómicas se pueden obtener todas las fórmulas permitidas. Si φ y ψ son fórmulas, también lo son las siguientes:

   $$\neg\varphi, \quad (\varphi \vee \psi), \quad (\varphi \wedge \psi), \quad (\varphi \longrightarrow \psi), \quad (\varphi \longleftrightarrow \psi), \quad \forall x\varphi, \quad \exists x\varphi,$$

   donde x es una variable cualquiera. Es decir, nuevas fórmulas se construyen a partir de fórmulas dadas utilizando las conectivas proposicionales y los cuantificadores. El propósito de los paréntesis es evitar ambigüedades en la construcción de fórmulas más complejas, pero en la práctica se suprimen paréntesis cuando no haya peligro de confusión.

   Formalmente, solo hay un par de paréntesis ( ) pero permitiremos los paréntesis angulares [ ] para hacer más legibles las fórmulas con múltiples paréntesis anidados.

7. Solamente se puede cuantificar sobre las variables, que representan, como se dijo antes, conjuntos arbitrarios (esto hace que la lógica considerada sea de "primer orden"). En particular, en expresiones formales no se permite cuantificar sobre fórmulas ni sobre propiedades. Así, *no se admiten* fórmulas de la forma $\forall\varphi(\cdots\varphi\cdots)$ ni de la forma $\forall P(x)[\cdots P(x)\cdots]$.

8. Se dice que las fórmulas, tal como han sido definidas, están escritas en el *lenguaje formal* o *lenguaje objeto*. Se debe distinguir entre el lenguaje formal y el llamado *metalenguaje*, que es el idioma español, en el cual se describe la teoría axiomática.

9. Se escribe $(A \neq B)$ como abreviación de $\neg(A = B)$ y $(x \notin A)$ como abreviación de $\neg(x \in A)$.

10. Al escribir $\varphi(x)$ se entiende que φ es una fórmula en la que x es una variable libre, es decir, x no está cuantificada. Para simplificar ciertas expresiones se utilizan los llamados *cuantificadores restringidos, localizados o acotados*:

$$\begin{array}{lll} (\forall x \in A)\varphi(x) & \text{es una abreviación de} & \forall x[x \in A \longrightarrow \varphi(x)], \\ (\exists x \in A)\varphi(x) & \text{es una abreviación de} & \exists x[x \in A \wedge \varphi(x)]. \end{array}$$

    También es frecuente escribir $(\forall x, y)\varphi(x, y)$ como abreviación de $(\forall x \forall y)\varphi(x, y)$, y análogamente, $(\exists x, y)\varphi(x, y)$ como abreviación de $(\exists x \exists y)\varphi(x, y)$.

La teoría axiomática expuesta en el presente libro consta de diez axiomas; algunos de ellos son, en realidad, esquemas axiomáticos o familias de axiomas. Zermelo introdujo en 1908 los Axiomas de Existencia (o del Conjunto Vacío), Extensión, Separación, Conjunto Binario, Partes, Unión, Infinito[1] y el Axioma de Elección. El Axioma de Regularidad fue propuesto por Hausdorff en 1920, y el Axioma de Reemplazo (o Sustitución) por Skolem y Fraenkel en 1921-22. Skolem propuso en 1925 que la formulación de la teoría se hiciera en el lenguaje de la lógica de primer orden.

El objetivo fundamental de esta teoría axiomática es formalizar los procedimientos para obtener conjuntos legítimos: los únicos conjuntos cuya existencia se permite son los que se obtienen invocando los axiomas. Los axiomas se pueden clasificar en cuatro grupos:

1. Axiomas que postulan la existencia de conjuntos concretos (Axioma del Conjunto Vacío, Axioma del Infinito).

2. Axiomas que establecen las propiedades básicas de la relación de pertenencia (Axioma de Extensión y Axioma de Regularidad).

3. Axiomas que permiten obtener (o definir) conjuntos nuevos a partir de conjuntos dados (Axiomas del Conjunto Binario, Partes, Unión, y Esquemas Axiomáticos de Separación y Reemplazo).

4. Axioma de Elección. Por su carácter no constructivo y algunas consecuencias contra-intuitivas, éste ha sido siempre un axioma controversial. En la práctica matemática, su uso se señala de manera explícita.

Los axiomas incluidos en los grupos 1 a 3 conforman la denominada teoría ZF mientras que ZFC denota la teoría que incluye adicionalmente el Axioma de Elección; en otras palabras, ZFC = ZF + Axioma de Elección[2].

---

[1] La versión del Axioma del Infinito que se presenta en este curso difiere del propuesto originalmente por Zermelo.

[2] La C en ZFC proviene de la expresión en inglés *Axiom of Choice* (Axioma de Elección).

Notación. A lo largo del presente libro utilizaremos la flecha $\Longrightarrow$ como sinónimo de "implica", y la flecha doble $\Longleftrightarrow$ como abreviación de "si y sólo si". El estudiante debe tener presente que $\Longrightarrow$ y $\Longleftrightarrow$ hacen parte del metalenguaje y se deben distinguir de las conectivas lógicas $\longrightarrow$ y $\longleftrightarrow$ utilizadas en el lenguaje formal de la teoría de primer orden descrita arriba.

1.3. Los primeros axiomas de la Teoría de Conjuntos de Zermelo-Fraenkel

Axioma de la Existencia (o Axioma del Conjunto Vacío). Existe un conjunto que no tiene elementos.

En el lenguaje formal de la teoría axiomática de conjuntos este axioma se puede expresar por medio de la siguiente fórmula:

$$\exists A \forall x (x \notin A).$$

Axioma de Extensión. Dos conjuntos son iguales si y sólo si tienen los mismos elementos.

Formalmente,

$$\forall A \forall B \big[A = B \longleftrightarrow \forall x (x \in A \longleftrightarrow x \in B)\big].$$

Utilizando las propiedades de la igualdad, más exactamente, la propiedad de sustitución de iguales por iguales, se tiene que

$$\forall A \forall B \big[A = B \longrightarrow \forall x (x \in A \longleftrightarrow x \in B)\big].$$

Por lo tanto, para presentar el axioma de extensión bastaría en realidad la implicación recíproca,

$$\forall A \forall B \big[\forall x (x \in A \longleftrightarrow x \in B) \longrightarrow A = B\big].$$

Aplicando el axioma de extensión se puede demostrar que existe un único conjunto que no tiene elementos. En efecto, si A y A' son conjuntos que satisfacen $\forall x(x \notin A)$ y $\forall x(x \notin A')$, respectivamente, se tendrá $\forall x(x \in A \longleftrightarrow x \in A')$ ya que para todo x, tanto $x \in A$ como $x \in A'$ son falsos. De modo que $A = A'$. Esto nos permite hablar de "el conjunto vacío", que es el único conjunto sin elementos.

Notación. El conjunto vacío se denota como $\varnothing$ o como $\{\ \}$. Podemos entonces concluir que $\forall x(x \notin \varnothing)$.

Forma básica del Esquema Axiomático de Separación. Sea A un conjunto dado y P una propiedad determinada. Existe un conjunto formado por los elementos de A que satisfacen la propiedad P. Si se escribe $P(x)$ para indicar que x satisface la propiedad P, el axioma afirma que, dado un conjunto A, existe un conjunto formado por todos los elementos x de A tales que $P(x)$.

Para presentar este axioma en el lenguaje formal es necesario precisar qué es exactamente una "propiedad sobre x". Rigurosamente, $P(x)$ se expresa como una fórmula o enunciado $\varphi(x)$ (en la lógica de primer orden) en la cual x es la única variable libre (es decir, x es la única variable no cuantificada en φ). Con esta precisión, el axioma adquiere la forma

$$\forall A \exists C \forall x \big[x \in C \longleftrightarrow (x \in A \wedge P(x)) \big].$$

El anterior es un esquema axiomático y no simplemente un axioma, porque hay un axioma por cada propiedad P. En la lógica de primer orden *no se permite escribir*

$$\forall P \forall A \exists C \forall x \big[x \in C \longleftrightarrow (x \in A \wedge P(x)) \big].$$

Es decir, no se permite cuantificar sobre propiedades o fórmulas. El conjunto C resulta único ya que si C' es otro conjunto tal que

$$\forall x \big[x \in C' \longleftrightarrow (x \in A \wedge P(x)) \big],$$

se tendrá que $\forall x \big(x \in C \longleftrightarrow x \in C' \big)$ y, por el axioma de extensión, $C = C'$. Este único conjunto C se denota utilizando alguna de las siguientes notaciones:

$$C = \{x \in A : P(x)\} \quad \text{o} \quad C = \{x \in A \mid P(x)\} \quad \text{o} \quad C = \{x : x \in A \wedge P(x)\}.$$

El conjunto C se obtiene "separando" de A los elementos que satisfacen la propiedad P.

Eliminación de la paradoja de Russell. Con la restricción impuesta sobre el Principio de Comprensión por el Esquema Axiomático de Separación, el argumento de Russell ya no da lugar a contradicciones. De hecho, el argumento conduce ahora a la importante conclusión de que *no existe un conjunto cuyos elementos sean todos los conjuntos*. En efecto, sea A un conjunto dado; por el Esquema Axiomático de Separación, aplicado a la propiedad $P(x)$ expresada por $x \notin x$, existe el conjunto

$$R = \{x \in A : x \notin x\}.$$

Se tiene entonces que $\forall x (x \in R \longleftrightarrow x \in A \wedge x \notin x)$. Tomando $x = R$ en esta última fórmula se concluye que

$$R \in R \longleftrightarrow R \in A \wedge R \notin R. \tag{1.3.1}$$

Nótese que $R \notin R$ no implica $R \in R$, como sí sucede en la paradoja de Russell. De (1.3.1) se deduce que $R \in R$ no puede ser verdadero (ya que en ese caso se concluiría que $R \notin R$, lo cual es una contradicción). Entonces $R \in R$ es falso, es decir, se tiene que $R \notin R$. Por lo tanto, $R \in A$ no puede ser verdadero porque, de serlo, de (1.3.1) se deduciría $R \in R$, lo cual contradice que $R \notin R$. Se concluye así que $R \notin A$.

Este argumento muestra que para todo conjunto A existe un conjunto R que no es elemento de A, a saber $R = \{x \in A : x \notin x\}$. De esto se deduce también que no puede existir un conjunto que contenga como elementos a todos los conjuntos. En conclusión, *no existe el conjunto de todos los conjuntos.*

Eliminación de la paradoja de Berry. A diferencia de lo que sucede en la paradoja de Russell, en la paradoja de Berry hay una mezcla entre objetos matemáticos (los números naturales) y objetos externos a la matemática (las palabras del idioma español). Este tipo de antinomias se conocen como *paradojas semánticas* para distinguirlas de las *paradojas lógicas*, como la de Russell. Las paradojas semánticas quedan eliminadas de un tajo en el enfoque axiomático por la exigencia de que las propiedades $P(x)$ deben ser fórmulas del lenguaje formal. Aquellas propiedades que involucren objetos ajenos o externos al presente marco formal están excluidas por el Esquema Axiomático de Separación.

Forma general (o paramétrica) del Esquema Axiomático de Separación. Sea $P(x, A_1, A_2, \ldots, A_n)$ una propiedad expresada formalmente por medio de la fórmula (en la lógica de primer orden) $\varphi(x, A_1, A_2, \ldots, A_n)$, en la cual las variables x, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son las únicas variables libres (es decir, no cuantificadas). Dado un conjunto A y los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, existe un conjunto formado por los elementos de A que satisfacen la propiedad $P(x, A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Formalmente

$$\forall A_1 \forall A_2 \cdots \forall A_n \forall A \exists C \forall x [x \in C \longleftrightarrow x \in A \wedge P(x, A_1, \ldots, A_n)].$$

Como en el caso de la forma básica del esquema axiomático, el axioma de extensión permite concluir que C es único ya que la propiedad que caracteriza a un elemento x de C, a saber, $x \in A \wedge P(x, A_1, \ldots, A_n)$, no depende de C. Para este único C se usan las notaciones

$$C = \{x \in A : P(x, A_1, A_2, \ldots, A_n)\} \quad o \quad C = \{x : x \in A \wedge P(x, A_1, A_2, \ldots, A_n)\}.$$

El conjunto C se obtiene “separando” de A los elementos que satisfacen la propiedad P. Los conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ se llaman *parámetros* y representan conjuntos dados de antemano. Obsérvese que los subíndices 1, 2, $\ldots$, n que aparecen en los parámetros $A_1, A_2, \ldots, A_n$ representan números naturales, pero aquí hacen parte del metalenguaje y no del lenguaje objeto (o lenguaje formal). El conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales no se ha definido todavía pero no es necesario hacerlo para presentar formal y rigurosamente el Esquema Axiomático de Separación.

En el caso en que P tenga un sólo un parámetro B, es decir, P sea la propiedad $P(x, B)$, el esquema axiomático adquiere la forma

$$\forall B \forall A \exists C \forall x [x \in C \longleftrightarrow (x \in A \wedge P(x, B))].$$

El conjunto C postulado aquí es único y se denota como $C = \{x \in A : P(x, B)\}$ o $C = \{x : x \in A \wedge P(x, B)\}$. Esta es la forma requerida para los dos ejemplos siguientes.

$\boxed{\textbf{\textit{Ejemplo}}}$ Sean A y B conjuntos dados. Utilizando la forma general del Esquema Axiomático de Separación, existe el conjunto $C = \{x \in A : x \in B\}$. En este caso, $P(x, B)$ es la fórmula $x \in B$, en la cual B aparece como parámetro. El conjunto C (único) se denota como $A \cap B$ y se llama la *intersección* de A y B. De modo que,

$$A \cap B := \{x \in A : x \in B\}.$$

$\boxed{\textbf{\textit{Ejemplo}}}$ Sean A y B conjuntos dados. De manera análoga al ejemplo anterior, podemos aplicar la forma general del Esquema Axiomático de Separación para asegurar la existencia del conjunto $D = \{x \in A : x \notin B\}$. En este caso, $P(x, B)$ es la fórmula $x \notin B$, con parámetro B. El conjunto D (único) se denota como $A - B$ y se llama la *diferencia* entre A y B. Otra notación utilizada para la diferencia es $A \smallsetminus B$. Es decir,

$$A - B = A \smallsetminus B := \{x \in A : x \notin B\}.$$

Axioma del Conjunto Binario. Dados dos conjuntos A y B, existe un conjunto cuyos elementos son precisamente A y B.

Formalmente,

$$\forall A \forall B \exists C \forall x (x \in C \longleftrightarrow (x = A \vee x = B)).$$

Por el axioma de extensión, C resulta único y se denota como $\{A, B\}$. En el caso particular en que $A = B$, se tiene $\{A, B\} = \{A, A\}$ y este conjunto se denota simplemente por $\{A\}$. Los conjuntos que tienen un solo elemento se llaman *conjuntos unitarios*, (*singletons*, en inglés).

Subconjuntos. Se dice que A *es un subconjunto* de B, o que A *está contenido en* B, si todo elemento de A es también un elemento de B. Esta relación se denota como $A \subseteq B$. Así que,

$$A \subseteq B \text{ si y sólo si } \forall x (x \in A \longrightarrow x \in B).$$

$A \subseteq B$ también se escribe en la forma $B \supseteq A$, la cual se expresa como "B contiene a A". Se dice que A es un *subconjunto propio* de B, notado $A \subset B$ ó $A \subsetneqq B$, si $A \subseteq B$ pero $A \neq B$.

La negación de $A \subseteq B$ se escribe $A \nsubseteq B$. Nótese que $A \nsubseteq B$ si y solo si existe un elemento en A que no está en B; esto es,

$$A \nsubseteq B \text{ si y sólo si } \exists x (x \in A \wedge x \notin B).$$

En la siguiente proposición se enuncian las propiedades básicas de $\subseteq$.

1.3.1 Proposición. Para conjuntos arbitrarios A, B, C se tiene:

(1) $A \subseteq A$.

(2) $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longrightarrow A = B$.

(3) $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$.

(4) $\varnothing \subseteq A$. En palabras: $\varnothing$ está contenido en cualquier conjunto.

(5) $A \subseteq \varnothing \Longrightarrow A = \varnothing$.

Demostración. Las propiedades (1) y (3) se siguen directamente de la definición de $\subseteq$. La propiedad (2) es consecuencia del axioma de extensión.

(4) Por definición de $\subseteq$, $\varnothing \subseteq A$ si y sólo si $\forall x(x \in \varnothing \longrightarrow x \in A)$. Puesto que $x \in \varnothing$ es falso para cualquier x, la implicación $x \in \varnothing \longrightarrow x \in A$ es siempre verdadera.

También podemos demostrar que $\varnothing \subseteq A$ razonando por contradicción: si $\varnothing \nsubseteq A$, existiría $x \in \varnothing$ tal que $x \notin A$. Pero esto contradice el hecho de que $\forall x(x \notin \varnothing)$.

(5) Por (4) se sabe que $\varnothing \subseteq A$. Si, además, $A \subseteq \varnothing$, entonces $A = \varnothing$ por (2). $\square$

Axioma del Conjunto de Partes. Dado un conjunto A, existe un conjunto cuyos elementos son precisamente los subconjuntos de A.

Formalmente,

$$\forall A \exists B \forall X(X \in B \longleftrightarrow X \subseteq A).$$

Teniendo en cuenta el significado de $X \subseteq A$, el axioma puede escribirse como

$$\forall A \exists B \forall X \big[X \in B \longleftrightarrow \forall x(x \in X \longrightarrow x \in A)\big].$$

Por el axioma de extensión, B resulta único; se denota como $\wp(A)$ y se denomina el *conjunto de partes de* A. De modo que

$$\wp(A) := \{X : X \subseteq A\}.$$

Axioma de la Unión. Dado un conjunto S, existe un conjunto formado por todos los elementos de los elementos de S. En otras palabras, dado un conjunto S, existe un conjunto cuyos elementos son los que pertenecen a algún conjunto de S.

Formalmente,

$$\forall S \exists B \forall x \big[x \in B \longleftrightarrow \exists A(A \in S \wedge x \in A)\big].$$

Por el axioma de extensión B es único; se denota como $\bigcup S$ y se llama la *unión* de S. Tenemos entonces

$$\begin{aligned} \bigcup S &= \{x : \exists A(A \in S \wedge x \in A)\} \\ &= \{x : (\exists A \in S)(x \in A)\} \\ &= \{x : x \in A \text{ para algún } A \in S\}. \end{aligned}$$

En el caso particular en que $S = \{A, B\}$, la unión $\bigcup S = \bigcup\{A, B\}$ se denota simplemente como $A \cup B$. Se tiene entonces que

$$A \cup B := \{x : x \in A \vee x \in B\}.$$

Por ejemplo, a partir de los conjuntos $A = \{x, y\}$ y $B = \{z\}$ se puede formar el conjunto $A \cup B$, comúnmente denotado por $\{x, y, z\}$.

Nótese que del significado de $\bigcup S$ se sigue inmediatamente que

$$A \in S \Longrightarrow A \subseteq \bigcup S.$$

La implicación recíproca, $A \subseteq \bigcup S \Longrightarrow A \in S$, es falsa en general (véase el Ejercicio 1.3.8).

Ejemplos

1. $\bigcup \varnothing = \varnothing$.
2. $\bigcup\{\varnothing\} = \varnothing$.
3. $\bigcup\{A\} = A$, para cualquier conjunto A.
4. $\bigcup\big\{\varnothing, \{\varnothing\}\big\} = \{\varnothing\}$.
5. $\bigcup\big\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\big\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$.
6. $\bigcup\big\{\{a, b\}, \{a\}, \{a, x, y\}, \varnothing\big\} = \{a, b, x, y\}$.
7. Si $\{x, y\} \in A$, entonces $x, y \in \bigcup A$.

La siguiente proposición contiene las propiedades básicas de la unión, la intersección y la diferencia.

1.3.2 Proposición. Para conjuntos arbitrarios A, B y C se cumplen las siguientes propiedades:

1. Idempotencia

$$A \cup A = A,$$
$$A \cap A = A.$$

2. Conmutatividad

$$A \cup B = B \cup A,$$
$$A \cap B = B \cap A.$$

3. Asociatividad

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C,$$

4. Distributividad

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C),$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$

5. Leyes de De Morgan

$$C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B),$$
$$C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B).$$

Demostración. A continuación demostraremos la propiedad distributiva de la intersección con respecto a la unión. El argumento utiliza el hecho de que la conjunción es distributiva con respecto a la disyunción.

$$\begin{aligned} x \in A \cap (B \cup C) &\Longleftrightarrow x \in A \wedge x \in (B \cup C) \\ &\Longleftrightarrow x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C) \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C) \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C) \\ &\Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C). \end{aligned}$$

Las demostraciones de las demás propiedades se dejan como ejercicio para el estudiante. □

Ejemplo Demostraremos que la igualdad $\bigcup(S \cup T) = (\bigcup S) \cup (\bigcup T)$ es válida para conjuntos arbitrarios S y T. Otras propiedades análogas se enuncian en los ejercicios que aparecen al final de la presente sección.

$$\begin{aligned} x \in \bigcup(S \cup T) &\Longleftrightarrow (\exists A \in S \cup T)(x \in A) \\ &\Longleftrightarrow (\exists A \in S)(x \in A) \vee (\exists A \in T)(x \in A) \\ &\Longleftrightarrow (x \in \bigcup S) \vee (x \in \bigcup T) \\ &\Longleftrightarrow x \in (\bigcup S) \cup (\bigcup T). \end{aligned}$$

La anterior demostración también se puede presentar de manera semi-informal:

$$\begin{aligned} x \in \bigcup(S \cup T) &\Longleftrightarrow x \in A \quad \text{para algún } A \in S \cup T \\ &\Longleftrightarrow (x \in A \text{ para algún } A \in S) \quad \text{o} \quad (x \in A \text{ para algún } A \in T) \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcup S \quad \text{o} \quad x \in \bigcup T \\ &\Longleftrightarrow x \in (\bigcup S) \cup (\bigcup T). \end{aligned}$$

Complementos. Dado un conjunto A, el conjunto $B = \{x : x \notin A\}$, formado por todos los elementos que no pertenecen a A, no existe ya que, en caso contrario, existiría la unión

$$C = A \cup B = A \cup \{x : x \notin A\},$$

y se tendría que $\forall x(x \in C)$. Es decir, C sería el conjunto de todos los conjuntos cuya existencia ha sido descartada. Por consiguiente, no se puede definir el complemento absoluto de A. No obstante, si en una situación particular se considera un conjunto universal de referencia X, se puede definir el *complemento de A con respecto a X*, para cualquier $A \subseteq X$, como

$$\overline{A} := X - A = \{x \in X : x \notin A\}.$$

Las leyes de De Morgan (Proposición 1.3.2) adquieren en este contexto la siguiente forma: para $A, B \subseteq X$,

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B},$$
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Notaciones alternativas para $\overline{A}$ son A^c o A'.

Diferencia simétrica. La diferencia simétrica entre dos conjuntos dados A y B se define utilizando la conectiva lógica $\veebar$, conocida como la disyunción excluyente (o exclusiva):

$$\begin{aligned} A \vartriangle B &= \{x : x \in A \veebar x \in B\} = \{x : x \in A \text{ o } x \in B, \text{pero no ambas}\} \\ &= \{x : \text{ o bien } x \in A, \text{ o bien } x \in B\}. \end{aligned}$$

La existencia de $A \vartriangle B$ está garantizada por el Esquema Axiomático de Separación: $A \vartriangle B = \{x \in A \cup B : x \notin A \cap B\}$. Esta operación no es fundamental porque se puede expresar por medio de uniones, intersecciones y diferencias, pero resulta con frecuencia útil como fuente de ejemplos y contra-ejemplos. Las propiedades más importantes de $\vartriangle$ aparecen en la siguiente proposición; las demostraciones se dejan como ejercicio para el estudiante.

1.3.3 Proposición. Para conjuntos arbitrarios A, B, C, se tiene:

(1) $A \vartriangle B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

(2) $A \vartriangle A = \varnothing$.

(3) $A \vartriangle \varnothing = A$.

(4) $A \vartriangle B = B \vartriangle A$.

(5) $(A \vartriangle B) \vartriangle C = A \vartriangle (B \vartriangle C)$.

(6) $A = B \Longleftrightarrow A \vartriangle B = \varnothing$.

Definición de $\bigcap S$. Para definir $\bigcap S$ no se requiere un axioma adicional pero sí una restricción sobre S: S debe ser diferente de $\varnothing$. La razón por la cual $\bigcap \varnothing$ no se define quedará clara después de la siguiente proposición.

1.3.4 Proposición. Dado un conjunto $S \neq \varnothing$, existe un conjunto B tal que para todo x,

$$x \in B \longleftrightarrow \forall A(A \in S \longrightarrow x \in A). \tag{1.3.2}$$

Demostración. Como $S \neq \varnothing$, existe $C \in S$. Por el Esquema Axiomático de Separación existe el conjunto

$$B = \big\{x \in C : \forall A(A \in S \longrightarrow x \in A)\big\}.$$

Se ha utilizado la propiedad $P(x, S)$ expresada por la fórmula $\forall A(A \in S \longrightarrow x \in A)$, con parámetro S. Veamos que B satisface (1.3.2) para todo x. La dirección ($\longrightarrow$) se sigue inmediatamente de la definición de B. Para establecer la otra dirección ($\longleftarrow$), asumamos que

$$\forall A(A \in S \longrightarrow x \in A) \tag{1.3.3}$$

Debemos concluir que $x \in B$, lo cual se cumple si logramos mostrar que $x \in C$. Como $C \in S$, tomando $A = C$ en (1.3.3) se concluye que $x \in C$. □

Por el axioma de extensión, el conjunto B de la proposición anterior es único y se denota como $\bigcap S$. Tenemos entonces que si $S \neq \varnothing$,

$$\begin{aligned} \bigcap S &= \{x : \forall A(A \in S \longrightarrow x \in A)\} \\ &= \{x : (\forall A \in S)(x \in A)\} \\ &= \{x : x \in A \text{ para todo } A \in S\}. \end{aligned} \tag{1.3.4}$$

En el caso particular en el que $S = \{A, B\}$, se tiene que

$$\bigcap S = \bigcap \{A, B\} = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Este conjunto coincide con $A \cap B = \{x \in A : x \in B\}$, tal como fue definido, utilizando el axioma de separación.

Si se utilizara descripción de $\bigcap S$ dada por (1.3.4) con $S = \varnothing$, se tendría

$$\bigcap \varnothing = \{x : \forall A(A \in \varnothing \longrightarrow x \in A)\}.$$

Como $A \in \varnothing$ es falso para todo A, la implicación $A \in \varnothing \longrightarrow x \in A$ es siempre verdadera y, por lo tanto, se concluiría que $\forall x(x \in \bigcap \varnothing)$. Es decir, $\bigcap \varnothing$ sería el conjunto de todos los conjuntos. Esta es la razón por la cual $\bigcap \varnothing$ no se define.

No obstante, hay contextos en los que $\bigcap \varnothing$ adquiere sentido; por ejemplo, si se considera un conjunto universal de referencia pre-determinado. Concretamente, sea X un conjunto de referencia dado y sea $S \subseteq \wp(X)$. Si $S \neq \varnothing$, es fácil demostrar que $\bigcap S \subseteq X$ (véase el ejercicio 1.3.19). Por lo tanto, podemos escribir

$$\bigcap S = \{x \in X : \forall A(A \in S \longrightarrow x \in A)\}. \tag{1.3.5}$$

Si en (1.3.5) permitimos que $S = \varnothing$, se tendría

$$\bigcap \varnothing = \{x \in X : \forall A(A \in \varnothing \longrightarrow x \in A)\} = X$$

ya que $A \in \varnothing$ es siempre falso y, por lo tanto, la implicación $A \in \varnothing \longrightarrow x \in A$ es siempre verdadera. De modo que se puede definir $\bigcap \varnothing = X$. Esta situación se presenta, por ejemplo, en la definición de retículo completo (sección 2.6) y también en el concepto de topología sobre un conjunto (o espacio) X dado.

Ejercicios de la sección 1.3

1. Demostrar las propiedades enunciadas en las Proposiciones 1.3.2 y 1.3.3.

2. Para conjuntos arbitrarios A, B, X, demostrar que

   (i) $A \subseteq A \cup B$ y $B \subseteq A \cup B$.

   (ii) $A \cup B \subseteq X \iff \big(A \subseteq X \wedge B \subseteq X\big)$.

   De aquí se concluye que la unión $A \cup B$ es el conjunto más pequeño que contiene tanto a A como a B.

3. Para conjuntos arbitrarios A, B, X, demostrar que

   (i) $A \cap B \subseteq A$ y $A \cap B \subseteq B$.

   (ii) $X \subseteq A \cap B \iff \big(X \subseteq A \wedge X \subseteq B\big)$.

   De aquí se concluye que la intersección $A \cap B$ es el conjunto más grande contenido tanto en A como en B.

4. Para conjuntos arbitrarios A, B, C, demostrar las siguientes propiedades:

   (i) $A \subseteq B \iff A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff A - B = \varnothing$.

   (ii) $A \cup (A \cap B) = A$ y $A \cap (A \cup B) = A$. Estas son las llamadas leyes de absorción.

   (iii) $A \subseteq B \Longrightarrow A = B - (B - A)$.

   (iv) $A \cup B = A \cup (B - A) = B \cup (A - B)$.

   (v) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$.

   (vi) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.

   (vii) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - C$.

5. Demostrar que si $S \subseteq T$, entonces $\bigcup S \subseteq \bigcup T$.

6. Demostrar que si $B \subseteq A \in S$, entonces $B \subseteq \bigcup S$.

7. Demostrar que si $S \neq \varnothing$, entonces $\bigcap S \subseteq A$ para todo $A \in S$.

8. Encontrar un contraejemplo para la implicación $A \subseteq \bigcup S \Longrightarrow A \in S$.

9. Sea S un conjunto dado. Demostrar que

   (i) $A \subseteq \bigcup S$ para todo $A \in S$.

   (ii) Si $A \subseteq X$ para todo $A \in S$, entonces $\bigcup S \subseteq X$.

   Esto quiere decir que $\bigcup S$ es el conjunto más pequeño que contiene a todos los elementos de S, lo cual generaliza el Ejercicio 2.

10. Sea S un conjunto dado. Demostrar que

    (i) $\bigcap S \subseteq A$ para todo $A \in S$.

    (ii) Si $X \subseteq A$ para todo $A \in S$, entonces $X \subseteq \bigcap S$.

    Esto quiere decir que $\bigcap S$ es el conjunto más grande contenido en todos los elementos de S, lo cual generaliza el Ejercicio 3.

11. Sean A y B conjuntos dados. Demostrar que la existencia de los siguientes conjuntos se puede garantizar mediante el Esquema Axiomático de Separación:

    (i) $\big\{\{x\} : x \in A\big\}$.

    (ii) $\big\{\{\{x\}\} : x \in A\big\}$.

    (iii) $\{A \cap C : C \in B\}$.

    (iv) $\{A \cup C : C \subseteq B\}$.

    (v) $\{A \cap C : C \in B\}$.

    (vi) $\{\wp(C) : C \in A\}$.

12. Demostrar que si $S \neq \varnothing$, entonces $\bigcap S \subseteq \bigcup S$.

13. Demostrar que si $A \in S$ y $A \subseteq X$, entonces $\bigcap S \subseteq X$.

14. Demostrar que si $S \neq \varnothing$ y $T \neq \varnothing$, entonces $\bigcap(S \cup T) = (\bigcap S) \cap (\bigcap T)$.

15. Sean $S \neq \varnothing$, $T \neq \varnothing$ y $S \cap T \neq \varnothing$.

    (i) Demostrar que $(\bigcap S) \cap (\bigcap T) \subseteq \bigcap(S \cap T)$.

    (ii) Encontrar un contraejemplo para la contenencia $\bigcap(S \cap T) \subseteq (\bigcap S) \cap (\bigcap T)$.

16. Demostrar que para cualquier conjunto A se cumple que

    (i) $\bigcup \wp(A) = A$.

(ii) $A \neq \wp(A)$.

17. Para conjuntos arbitrarios A y B demostrar que

    (i) $A \subseteq B \iff \wp(A) \subseteq \wp(B)$.

    (ii) $\wp(A \cap B) = \wp(A) \cap \wp(B)$.

    (iii) $\wp(A) \cup \wp(B) \subseteq \wp(A \cup B)$.

18. Encontrar un contraejemplo para la contenencia $\wp(A \cup B) \subseteq \wp(A) \cup \wp(B)$.

19. Sea X un conjunto dado y sea $S \subseteq \wp(X)$. Demostrar que

    (i) $\bigcup S \subseteq X$.

    (ii) Si $S \neq \varnothing$, entonces $\bigcap S \subseteq X$.

20. Entre las dos contenencias $\wp(\bigcup A) \subseteq A$ y $A \subseteq \wp(\bigcup A)$, una es siempre verdadera y la otra es falsa, en general. Demostrar la contenencia verdadera y encontrar un contraejemplo para la falsa.

21. ¿Es válida la igualdad $\wp(A - B) = \wp(A) - \wp(B)$ para todos los conjuntos A y B?