Entrega #3 / Grupo 1 / Introducción a la Teoría de Conjuntos.

- Jose Miguel Acuña Hernandez, 1000143264, jacunah@unal.edu.co
- Samuel Alvarez, 1027522564, salvarezt@unal.edu.co
- Juan Felipe Cadena, 1000150703, jcadenap@unal.edu.co
- Maria Sol Botello, 1002528269, mbotello@unal.edu.co
- Cristian Camilo Barreto, 1000688640, cbarreto@unal.edu.co

4,1

1 | (a) Demuestre que la función $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ definida por $f((k,n)) := 2^k(2n+1)$ es inyectiva:

Haver directo

Prueba: Sean $(k,n), (l,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tales que $f((k,n)) = f((l,m))$, es decir, $2^k(2n+1)-1 = 2^l(2m+1)-1$. Por absurdo pensemos que

(1) 4,3

Usar Tma. Fund de la aritmética

$k \neq l$, como $(\mathbb{N}, <)$ es un orden total, tenemos que $k<l$ o $k>l$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $k<l$, entonces existe $t \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$ tal que $l = k+t$, remplazando en nuestra hipótesis tenemos que $2^k(2n+1)-1 = 2^{k+t}(2m+1)-1$, como $2^{k+t} = 2^k \cdot 2^t$ y por la unicidad del sucesor tenemos que $2^k(2n+1) = (2^k \cdot 2^t)(2m+1)$, por la asociatividad del producto $2^k(2n+1) = 2^k(2^t(2m+1))$. Como $k \in \mathbb{N}$, $2^k > 0$ y por la propiedad cancelativa del producto $2n+1 = 2^t(2m+1)$,

¿Dónde?

OK

NO SE DEMOSTRÓ PROBAR

pero esto es una contradicción, ya que $2n+1$ es impar y $2^t(2m+1)$ es par, por la reprecentación única que garantiza el teorema fundamental de la aritmética, un par no puede ser igual a un impar. Por reducción al absurdo tenemos que $k = l$.

(a) 3,0

Volviendo a la hipótesis $2^k(2n+1) = 2^l(2m+1)-1$, por la conclusión anterior por la unicidad del sucesor y utilizando la propiedad cancelativa del producto tenemos que $2n+1 = 2m+1$. Finalmente por la propiedad cancelativa de la suma y el producto tenemos que $m = n$, luego, $(k,n) = (l,n)$. Esto significa que f es inyectiva.

PROBARLA

☑

(b) Demuestre que $\mathbb{N} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ¿Porqué?

Prueba: Considere la función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $n \mapsto f(n) := (n,n)$.

Sean $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $n \neq m$, esto significa que $(n,n) \neq (m,m)$ es decir, $f(n) \neq f(m)$, luego f es inyectiva, Por lo tanto $\mathbb{N} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ☐

(b) 5,0

(c) De lo anterior concluya que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, justificando completamente su respuesta:

Prueba: del punto (a) sabemos que la función $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tal que $(k,n) \mapsto f((k,n)) := 2^k(2n+1) - 1$ es inyectiva, luego, $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \preceq \mathbb{N}$. Y del punto (b) tenemos que $\mathbb{N} \preceq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Por el teorema de Cantor-Berstein concluimos que $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. ☐

(c) 5,0

2| (AC) Dado $S := \{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ una familia de conjuntos a lo sumo contables, demuestre que existe una sucesión $\langle a_n : n \in \mathbb{N} \rangle$ donde cada a_n es una enumeración de A_n ($n \in \mathbb{N}$).

(2,3.0)

0/1

Prueba: Sea $S := \{A_n : \cancel{n \in \mathbb{N}}\}$ una familia de conjuntos a lo sumo contables, note que cada A_n ~~puede ser~~ finito o contable. Si A_n es finito, entonces existe $f : K \to A_n$ función biyectiva para algún $K \in \mathbb{N}$, así $f \in Seq(A_n)$. Si A_n es contable, existe una biyección $f : \mathbb{N} \to A_n$, luego, $f \in A_n^{\mathbb{N}}$.

Defina $Seq^*(A_n) := Seq(A_n) \cup A_n^{\mathbb{N}}$ y ahora defina para cada A_n el conjunto

¿Por qué es conjunto?

$\mathcal{F}_{A_n} := \{f \in Seq^*(A_n) : f \text{ es biyectiva}\}$. Observe que por lo dicho atrás, sin importar si A_n es ~~finito o contable~~, $\mathcal{F}_{A_n} \neq \emptyset$.

Ahora Considere el conjunto $Q := \{\mathcal{F} \in \wp(\wp(\mathbb{N} \times \cup S)) : \mathcal{F} = \mathcal{F}_{A_n}$ para algún $A_n \in S\}$. ¿?

Como para cada A_n tenemos que $\mathcal{F}_{A_n} \neq \emptyset$, entonces $\emptyset \notin Q$ ¿?

y Por el axioma de elección sabemos que existe una función g de elección sobre Q tal que $g(\mathcal{F}_{A_n}) \in \mathcal{F}_{A_n}$ para cada $A_n \in S$.

Definimos ahora la sucesión $a_n := g(F_{A_n})$, como $g(F_{A_n}) \in F_{A_n}$ tenemos que $a_n \in seq^*(A_n)$ y a_n es biyectiva. Note que si A_n es finito, $a_n \in Seq(A_n)$ y si A_n es contable $a_n \in A_n^{\mathbb{N}}$. como a_n es biyectiva tendremos que a_n es una enumeración de A_n. esto es para cada $n \in \mathbb{N}$.

¿Cual es $g : \mathbb{N} \to \bigcup_{n \in \omega} F_{A_n}$?

¿Por qué es conjunto?

$\exists$

3| Demuestre justificando completamente su respuesta, que si κ, λ y μ son cardinales, entonces $\kappa^{\lambda+\mu} = \kappa^{\lambda} \cdot \kappa^{\mu}$ ¿Porqué?

Prueba: Sean A, B, C conjuntos tales que $|A| = \kappa$, $|B| = \lambda$ y $|C| = \mu$ y $B \cap C = \emptyset$, observe que si $f \in A^B$ y $g \in A^C$, entonces $f \cap g = \emptyset$, de no ser así, existiría un par $(a,b) \in f, g$, luego, $a \in B, C$ lo que implicaría que $a \in B \cap C$ lo que contradice que $B \cap C = \emptyset$. Por el análisis anterior podemos definir la siguiente función: $F : A^B \times A^C \longrightarrow A^{B \sqcup C}$ dada por $F((f,g)) := f \sqcup g$, veamos que es biyectiva: ¿Porqué?

(3) 5/10

• 1-1: Sean $(f,g), (h,k) \in A^B \times A^C$ tales que $F((f,g)) = F((h,k))$, es decir, $f \sqcup g = h \sqcup k$. Si $f \neq h$, sin pérdida de generalidad, existe $(a,b) \in f$ tal que $(a,b) \notin h$, observe que $a \in B$, luego, $a \notin C$, por lo cual $(a,b) \notin g, k$ ya que $g, k \in A^C$. Tenemos que $(a,b) \in f$, luego, $(a,b) \in f \sqcup g$ y $(a,b) \notin h, k$, luego, $(a,b) \notin h \sqcup k$, esto contradice el axioma 2 de igualdad, por lo tanto concluimos que $f = h$. Si $g \neq k$, sin pérdida de generalidad, existe $(x,y) \in g$ tal que $(x,y) \notin k$, observe que $x \in C$ luego $x \notin B$, por lo cual $(x,y) \notin f, h$ ya que $f, h \in A^B$. Tenemos que $(x,y) \in g$, luego, $(x,y) \in f \sqcup g$ y $(x,y) \notin h, k$, luego, $(x,y) \notin h \sqcup k$, esto contradice el axioma 2 de igualdad, por lo tanto concluimos que $g = k$. Como $f = h$ y $g = k$. tenemos que $(f,g) = (h,k)$, luego, F es inyectiva.

- **Sobre**: Sea $\varphi \in A^{B \sqcup C}$, obsérvese que $\varphi = \varphi|_B \sqcup \varphi|_C$:

- $\subseteq$) Sea $(x,y) \in \varphi$, sabemos que $x \in B \sqcup C$, si $x \in B$, $(x,y) \in \varphi|_B$, luego, $(x,y) \in \varphi|_B \cup \varphi|_C$. Si $x \in C$, $(x,y) \in \varphi|_C$, luego, $(x,y) \in \varphi|_B \cup \varphi|_C$. En cualquier caso vemos que $\varphi \subseteq \varphi|_B \cup \varphi|_C$.

- $\supseteq$) Sea $(x,y) \in \varphi|_B \cup \varphi|_C$, si $(x,y) \in \varphi|_B$ tenemos que $x \in B$, luego, $x \in B \sqcup C$ por lo cual $(x,y) \in \varphi$ y si $(x,y) \in \varphi|_C$, $x \in C$ luego, $x \in B \sqcup C$ Por lo cual $(x,y) \in \varphi$. En cualquier caso vemos que $\varphi|_B \cup \varphi|_C = \varphi$.

- Por el análisis realizado al inicio de la demostración, como $\varphi|_B \in A^B$ y $\varphi|_C \in A^C$ tenemos que $\varphi|_B \cap \varphi|_C = \emptyset$, luego, su unión es disyunta.

Por lo anterior y por el axioma de extención tenemos que $\varphi = \varphi|_B \sqcup \varphi|_C$, es decir, $\varphi = F((\varphi|_B, \varphi|_C))$, por lo tanto F es sobreyectiva.

Concluimos que F es biyectiva, así $\kappa^\lambda \cdot \kappa^\mu = |A^B \times A^C| = |A^{B \sqcup C}| = \kappa^{\lambda+\mu}$.

$\boxed{V}$