Notas de clase para el curso
Introducción a la Teoría de Conjuntos
I Semestre 2020
Rodrigo De Castro K.
Andrés Villaveces

Capítulo 2

Relaciones y Funciones

En este capítulo se hace un estudio formal de dos tipos fundamentales de conjuntos: las relaciones y las funciones.

2.1. Relaciones

Para definir relaciones y funciones como conjuntos particulares es necesario definir primero el concepto de pareja ordenada.

2.1.1 Definición. Para conjuntos a y b se define $(a, b) := \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$.

Esta definición fue propuesta por Kuratowski en 1921 y, aunque no es obvia ni natural, resulta adecuada para distinguir $\{a, b\}$ de (a, b). En el siguiente teorema se demuestra la propiedad característica de las parejas ordenadas.

2.1.2 Teorema. Si $(a, b) = (a', b')$ si y solo si $a = a'$ y $b = b'$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Se parte de la igualdad

$$\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{a'\}, \{a', b'\}\big\}.$$

Caso 1. $a = b$. Entonces $\big\{\{a\}, \{a, b\}\big\} = \big\{\{a\}\big\} = \big\{\{a'\}, \{a', b'\}\big\}$. Por lo tanto $a' = b'$. Se concluye que $a = a' = b = b'$.

Caso 2. $a \neq b$. Entonces $a' \neq b'$ (de lo contrario, se podría repetir el argumento del caso 1 y se concluiría $a = a' = b = b'$). Esto implica que $\{a\} = \{a'\}$, o sea, $a = a'$. Así que $\{a, b\} = \{a', b'\}$. Ahora bien, $b \in \{a, b\}$ entonces $b \in \{a, b'\}$, de donde $b = b'$.

($\Longleftarrow$) Esta dirección es inmediata por las propiedades de la igualdad. $\square$

Por este teorema, $(a, b) = (b, a)$ si y solo si $a = b$.

En la pareja ordenada (a, b), a se denomina la primera componente o coordenada y b la segunda componente o coordenada.

Producto Cartesiano. Dados dos conjuntos A y B, el producto cartesiano de A y B, notado $A \times B$, es el conjunto formado por todas las parejas (a, b) en las que la primera coordenada es elemento de A y la segunda coordenada es elemento de B. Para justificar la existencia de $A \times B$, por medio del axioma de separación, se requiere encontrar un conjunto suficientemente grande que incluya entre sus elementos todas estas parejas. Obsérvese que

$$\begin{aligned} a \in A \wedge b \in B \Longrightarrow \{a\}, \{a,b\} \subseteq A \cup B &\Longrightarrow \{a\}, \{a,b\} \in \wp(A \cup B) \\ &\Longrightarrow \big\{\{a\}, \{a,b\}\big\} \subseteq \wp(A \cup B) \\ &\Longrightarrow \big\{\{a\}, \{a,b\}\big\} \in \wp(\wp(A \cup B)) \\ &\Longrightarrow (a,b) \in \wp(\wp(A \cup B)). \end{aligned}$$

La definición formal de producto cartesiano $A \times B$ es entonces

$$A \times B := \big\{(a,b) \in \wp(\wp(A \cup B)) : a \in A \wedge b \in B\big\}.$$

En realidad, para ser más precisos, se debería escribir

$$A \times B := \big\{x \in \wp(\wp(A \cup B)) : \exists a \exists b\big[a \in A \wedge b \in B \wedge x = (a,b)\big]\big\}.$$

Una vez que se ha justificado rigurosamente la existencia de $A \times B$, es suficiente escribir

$$A \times B := \big\{(a,b) : a \in A \wedge b \in B\big\}.$$

Relaciones. Dados dos conjuntos A y B, una *relación de A en B* es un subconjunto de $A \times B$. Denotaremos las relaciones con letras como $R, S, T, \ldots$

Si R es una relación de A en B ($R \subseteq A \times B$), se definen el dominio de R, notado $\mathrm{dom}(R)$, y el rango de R, notado $\mathrm{rango}(R)$ de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(R) &:= \big\{a \in A : (\exists b \in B)\big[(a,b) \in R\big]\big\}, \\ \mathrm{rango}(R) &:= \big\{b \in B : (\exists a \in A)\big[(a,b) \in R\big]\big\}. \end{aligned}$$

El campo de R se define como

$$\mathrm{campo}(R) := \mathrm{dom}(R) \cup \mathrm{rango}(R).$$

Si R es una relación de A en A (o sea, $R \subseteq A \times A$), se dice preferiblemente que R es una relación sobre A.

Si R es un conjunto de parejas ordenadas, también se dice que R es una relación. En este caso, para definir rigurosamente el dominio y el rango de R es necesario encontrar primero un conjunto suficientemente grande que incluya entre sus elementos tanto las primeras como las segundas componentes de todas las parejas de R. Obsérvese que

$$\begin{aligned}(a,b)\in R &\Longrightarrow \big\{\{a\},\{a,b\}\big\}\in R \Longrightarrow \{a\},\{a,b\}\in \bigcup R\\ &\Longrightarrow a,b\in \bigcup\big(\bigcup R\big).\end{aligned}$$

Por consiguiente, se puede definir

$$\begin{aligned}\operatorname{dom}(R) &:= \big\{a\in \bigcup\big(\bigcup R\big) : \exists b\big[(a,b)\in R\big]\big\},\\ \operatorname{rango}(R) &:= \big\{b\in \bigcup\big(\bigcup R\big) : \exists a\big[(a,b)\in R\big]\big\}.\end{aligned}$$

De manera que si R es un conjunto de parejas ordenadas, entonces $R\subseteq \bigcup\big(\bigcup R\big)\times\bigcup\big(\bigcup R\big)$.

Notación. $(a,b)\in R$ se escribe usualmente en la forma aRb y se expresa diciendo que "a está relacionado con b".

Inversa de una relación. Si R es una relación, la relación inversa se define como

$$R^{-1} := \{(b,a) : (a,b)\in R\}.$$

Si R es una relación de A en B, claramente R^{-1} es una relación de B en A.

Las siguientes propiedades se demuestran fácilmente:

1. $(R^{-1})^{-1} = R$.
2. $\operatorname{dom}(R^{-1}) = \operatorname{rango}(R)$ y $\operatorname{rango}(R^{-1}) = \operatorname{dom}(R)$.
3. Si R y S son relaciones, entonces

$$\begin{aligned}(R\cup S)^{-1} &= R^{-1}\cup S^{-1},\\ (R\cap S)^{-1} &= R^{-1}\cap S^{-1}.\end{aligned}$$

Composición de relaciones. Sea R una relación de A en B y S una relación de B en C, la relación compuesta $S\circ R$ se define como

$$S\circ R := \big\{(a,c)\in A\times C : (\exists b\in B)\big[(a,b)\in R\wedge (b,c)\in S\big]\big\}.$$

$S\circ R$ es entonces una relación de A en C. Esta definición también cobija los casos en que R no sea una relación de A en B o S no sea una relación de B en C; en tales situaciones simplemente se tendrá $S\circ R=\varnothing$.

Ejemplo Sean $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{0,1,2,3,4,5\}$ y $C=\{x,y,z\}$. Si R y S son las relaciones

$$\begin{aligned}R &= \big\{(a,3),(a,4),(b,1),(d,0),(d,4),(d,5)\big\},\\ S &= \big\{(0,y),(0,z),(2,z),(3,x),(3,y),(4,z),(5,x),(5,z)\big\},\end{aligned}$$

entonces $S\circ R=\big\{(a,x),(a,y),(a,z),(d,y),(d,z),(d,x)\big\}$.

La propiedad más importante de la composición de relaciones es la asociatividad, como lo establece el siguiente teorema.

2.1.3 Teorema. Sean T una relación de A en B, S una relación de B en C y R una relación de C en D. Entonces

$$R \circ \big(S \circ T\big) = \big(R \circ S\big) \circ T.$$

Demostración. Como $S \circ T \subseteq A \times C$ y $R \circ S \subseteq B \times D$, tanto $R \circ (S \circ T)$ como $(R \circ S) \circ T$ son relaciones de A en D. Sean $a \in A$ y $d \in D$; se tiene que

$$\begin{aligned}(a,d) \in R \circ \big(S \circ T\big) &\Longleftrightarrow (\exists c \in C)\big[(a,c) \in S \circ T \wedge (c,d) \in R\big] \\ &\Longleftrightarrow (\exists c \in C)(\exists b \in B)\big[(a,b) \in T \wedge (b,c) \in S \wedge (c,d) \in R\big] \\ &\Longleftrightarrow (\exists b \in B)(\exists c \in C)\big[(a,b) \in T \wedge (b,c) \in S \wedge (c,d) \in R\big] \\ &\Longleftrightarrow (\exists b \in B)\big[(a,b) \in T \wedge (b,d) \in R \circ S\big] \\ &\Longleftrightarrow (a,d) \in (R \circ S) \circ T. \qquad \square\end{aligned}$$

La propiedad asociativa permite escribir la composición de tres o más relaciones sin utilizar paréntesis. Así, tanto $R \circ S \circ T$ como $R \circ S \circ T \circ U$ representan composiciones de relaciones sin ninguna ambigüedad.

Triplas ordenadas. Para a, b, c conjuntos se define la tripla ordenada (a, b, c) como $(a, b, c) := ((a, b), c)$. Se tiene inmediatamente que $(a, b, c) = (a', b', c')$ si y solo si $a = a'$, $b = b'$ y $c = c'$.

Dados los conjuntos A, B, C se define el producto cartesiano $A \times B \times C$ como

$$\begin{aligned}A \times B \times C = (A \times B) \times C &= \big\{((a, b), c) : a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\big\} \\ &= \big\{(a, b, c) : a \in A \wedge b \in B \wedge c \in C\big\}.\end{aligned}$$

Siguiendo esta idea se pueden definir a continuación cuádruplas, quíntuplas, etc, pero una definición general del concepto de n-tupla requiere haber definido previamente el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. Esto se hará detalladamente en el Capítulo 3. La noción de producto cartesiano también se puede extender a una colección arbitraria de conjuntos, pero un tratamiento general depende del Axioma de Elección (véase el Capítulo 5).

Ejercicios de la sección 2.1

Nota. Los conjuntos de números, $\mathbb{N}$ (naturales), $\mathbb{Z}$ (enteros), $\mathbb{Q}$ (racionales) y $\mathbb{R}$ (reales) se definirán rigurosamente en el Capítulo 4, en el marco de la teoría axiomática. No obstante, se incluyen en esta y otras secciones algunos ejercicios que involucran estos conjuntos; el estudiante debe usar su conocimiento intuitivo previo de ellos.

1. Utilizando las definiciones de producto cartesiano y de pareja ordenada demostrar que $\{a\} \times \{a\} = \{\{\{a\}\}\}$ para cualquier conjunto a.

2. Demostrar las siguientes propiedades del producto cartesiano:

(i) $A \times B = \varnothing \Longleftrightarrow A = \varnothing \vee B = \varnothing$.

(ii) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$.

(iii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$,
$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A)$.

(iv) $A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$,
$(B - C) \times A = (B \times A) - (C \times A)$.

(v) $A \times (B \vartriangle C) = (A \times B) \vartriangle (A \times C)$,
$(B \vartriangle C) \times A = (B \times A) \vartriangle (C \times A)$.

3. Demostrar o refutar: Si A, B, C y D son conjuntos no vacíos, entonces

$$A \times B \subseteq C \times D \Longrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq D.$$

4. Si R y S son relaciones, demostrar que $(R \cup S)^{-1} = R^{-1} \cup S^{-1}$ y $(R \cap S)^{-1} = R^{-1} \cap S^{-1}$.

5. ¿Puede suceder que $R \circ S = R$ o que $R \circ S = S$ para relaciones particulares R y S?

6. Sean $\leq$ y $\geq$ las relaciones usuales "menor o igual que" y "mayor o igual que" definidas sobre el conjunto de los números reales $\mathbb{R}$.

   (i) Demostrar que $\geq \circ \leq = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

   (ii) Demostrar que $\leq \circ \leq = \leq$.

   (iii) Hallar las compuestas $\leq \circ \geq$ y $\geq \circ \geq$.

7. Sean S y T relaciones de A en B, y R una relación de B en C.

   (i) Demostrar que $R \circ (S \cup T) = (R \circ S) \cup (R \circ T)$.

   (ii) Demostrar que $R \circ (S \cap T) \subseteq (R \circ S) \cap (R \circ T)$.

   (iii) Encontrar un contraejemplo para $(R \circ S) \cap (R \circ T) \subseteq R \circ (S \cap T)$.

8. Sean R, S relaciones de B en C, y T una relación de A en B.

   (i) Demostrar que $(R \cup S) \circ T = (R \circ T) \cup (S \circ T)$.

   (ii) Demostrar que $(R \cap S) \circ T \subseteq (R \circ T) \cap (S \circ T)$.

   (iii) Encontrar un contraejemplo para $(R \circ T) \cap (S \circ T) \subseteq (R \cap S) \circ T$.

9. Si $R \subseteq A \times B$ y $S \subseteq B \times C$, demostrar que $\big(S \circ R\big)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

2.2. Relaciones de equivalencia

2.2.1 Definición. Sea R una relación sobre A ($R \subseteq A \times A$).

1. R es *reflexiva* si todo elemento de A está relacionado consigo mismo, es decir, si $\big(\forall a \in A\big)\big[(a,a) \in R\big]$.
2. R es *simétrica* si
$$\big(\forall a, b \in A\big)\big[(a,b) \in R \longrightarrow (b,a) \in R\big].$$
3. R es *transitiva* si
$$\big(\forall a, b, c \in A\big)\big[(a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \longrightarrow (a,c) \in R\big].$$
4. R es una *relación de equivalencia sobre* A si R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Hay dos relaciones de equivalencia triviales sobre A, a saber, $Id_A = \{(a,a) : a \in A\}$ (llamada la *relación identidad sobre* A) y $A \times A$.

Si R es una relación de equivalencia sobre A y $a \in A$, se define la clase de equivalencia de a, notada $[a]_R$, como
$$[a]_R := \big\{x \in A : aRx\big\} = \big\{x \in A : xRa\big\}.$$
Si no hay peligro de confusión, se escribe $[a]$ en lugar de $[a]_R$. Como aRa, $a \in [a]$; por consiguiente, las clases de equivalencia son conjuntos no vacíos. La siguiente proposición establece las propiedades fundamentales de las clases de equivalencia.

2.2.2 Proposición. Sea R una relación de equivalencia sobre A y a, b elementos de A.

(1) $aRb \Longleftrightarrow [a] = [b]$.

(2) $[a] = [b]$ ó $[a] \cap [b] = \varnothing$. Es decir, dos clases de equivalencia son iguales o disyuntas.

Demostración.

1. ($\Longrightarrow$) Si $x \in [a]$, entonces xRa. Como aRb, por la transitividad de R se sigue que xRb, de donde $x \in [b]$. Esto muestra que $[a] \subseteq [b]$. Análogamente se demuestra que $[b] \subseteq [a]$.

   ($\Longleftarrow$) Sea $[a] = [b]$. Como $a \in [a]$, entonces $a \in [b]$; de donde aRb.
2. Si $[a] \cap [b] = \varnothing$ no hay nada que demostrar. Si $[a] \cap [b] \neq \varnothing$, existe $x \in [a] \cap [b]$. Entonces, $x \in [a]$ y $x \in [b]$. Por la simetría de R, aRx y xRb. Por transitividad, aRb y por (1), $[a] = [b]$. □

Toda relación de equivalencia determina una partición de A, concepto definido a continuación.

2.2.3 Definición. Una partición de un conjunto no vacío A es una colección de subconjuntos no vacíos de A, disyuntos dos a dos, cuya unión es A. Formalmente, P es una partición de A si

(1) $P \subseteq \wp(A)$ y $X \neq \varnothing$ para todo $X \in P$.

(2) $X, Y \in P$ y $X \neq Y \Longrightarrow X \cap Y = \varnothing$.

(3) $\bigcup P = A$.

2.2.4 Teorema. Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A, la colección de todas las clases de equivalencia es una partición de A. Esta colección se denomina el *conjunto cociente de A por R* y se denota por A/R:

$$A/R := \big\{[a]_R : a \in A\big\}.$$

Demostración. La propiedad (1) de la Definición 2.2.3 se tiene porque $[a] \subseteq A$ y $a \in [a]$ para todo $a \in A$. Esto mismo permite concluir que $\bigcup A/R = A$, que es la propiedad (3). La propiedad (2) se sigue de la proposición 2.2.2 (2). □

El recíproco del Teorema 2.2.4 es también válido.

2.2.5 Teorema. Toda partición P de un conjunto A determina una relación de equivalencia R sobre A tal que $A/R = P$.

Demostración. Sobre A se define la relación R por medio de

$$aRb \Longleftrightarrow \big(\exists X \in P\big)\big(a \in X \wedge b \in X\big).$$

Como $\bigcup P = A$, R es claramente reflexiva. La simetría de R es inmediata. Para demostrar que R es transitiva, consideramos $a, b, c \in A$ tales que aRb y bRc. Entonces existen $X_1, X_2 \in P$ de tal manera que $a, b \in X_1$ y $b, c \in X_2$. Por lo tanto, $b \in X_1 \cap X_2$. Como los elementos de P son disyuntos dos a dos, necesariamente $X_1 = X_2$. Por lo tanto, aRc. Comprobar que $A/R = P$ se deja como ejercicio. □

Los procedimientos de los Teoremas 2.2.4 y 2.2.5 son mutuamente reversibles (véase el Ejercicio 2.2.6).

Ejercicios de la sección 2.2

1. (i) Demostrar que existen relaciones reflexivas y simétricas pero no transitivas.
   (ii) Demostrar que existen relaciones reflexivas y transitivas pero no simétricas.
   (iii) Demostrar que existen relaciones simétricas y transitivas pero no reflexivas.
   (iv) Demostrar que existen relaciones reflexivas pero no simétricas ni transitivas.
   (v) Demostrar que existen relaciones simétricas pero no reflexivas ni transitivas.

(vi) Demostrar que existen relaciones transitivas pero no reflexivas ni simétricas.

2. Encontrar la falacia en el siguiente argumento mediante el cual se "demuestra" que si una relación R sobre A es simétrica y transitiva, entonces también es reflexiva. Si $(a,b) \in R$ entonces $(b,a) \in R$ (porque R es simétrica). De $(a,b) \in R$ y $(b,a) \in R$ se deduce que $(a,a) \in R$ (porque R es transitiva). Por lo tanto, $(a,a) \in R$, lo cual significa que R es reflexiva.

3. Sea R una relación sobre A.

   (i) Demostrar que R es transitiva si y sólo si $R \circ R \subseteq R$.

   (ii) Demostrar que si R es reflexiva y transitiva entonces $R \circ R = R$.

4. Sean R y S relaciones sobre A. Demostrar que si R y S son transitivas y si $R \circ S = S \circ R$, entonces $R \circ S$ es transitiva.

5. Sea R una relación reflexiva sobre A. Demostrar que R es una relación de equivalencia sobre A si y sólo si

$$\big(\forall a,b,c,d \in A\big)\big[(a,b) \in R \wedge (c,b) \in R \wedge (c,d) \in R \longrightarrow (a,d) \in R\big].$$

6. Sea R_P la relación de equivalencia determinada por una partición P, de acuerdo con el Teorema 2.2.5.

   (i) Dada una relación de equivalencia R sobre un conjunto A, demostrar que $R_{A/R} = R$.

   (ii) Dada una partición de P de un conjunto A demostrar que $A/R_P = P$.

7. Sean R_1 y R_2 relaciones de equivalencia sobre A. Demostrar o refutar:

   (i) $R_1 \cup R_2$ es una relación de equivalencia sobre A.

   (ii) $R_1 \cap R_2$ es una relación de equivalencia sobre A.

   (iii) $R_1 - R_2$ es una relación de equivalencia sobre A.

   (iv) $R_1 \bigtriangleup R_2$ es una relación de equivalencia sobre A.

8. Sea R una relación de equivalencia sobre A y S una relación de equivalencia sobre B. Sea $\sim$ la siguiente relación definida sobre $A \times B$:

$$(a_1,b_1) \sim (a_2,b_2) \Longleftrightarrow (a_1,a_2) \in R \ \wedge \ (b_1,b_2) \in S.$$

   (i) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre $A \times B$.

   (ii) Para $(a,b) \in A \times B$, describir la clase de equivalencia $[(a,b)]_\sim$ en términos de las clases de equivalencia $[a]_R$ y $[b]_S$.

9. Sobre el conjunto $\mathbb{Z}$ de los enteros se define la siguiente relación R:

$$nRm \iff n = \pm m.$$

Demostrar que R es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

10. Sobre el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se define la siguiente relación R:

$$aRb \iff a - b \in \mathbb{Z}.$$

(i) Demostrar que R es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$.

(ii) Hallar las siguientes clases de equivalencia: $[1.3]$, $[3.42]$, $[-3.57]$ y $[-5]$.

11. Sobre el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales se define la siguiente relación S:

$$aSb \iff a - b \in \mathbb{Q}.$$

(i) Demostrar que S es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{R}$.

(ii) Sea $x \in \mathbb{R}$. Establecer la conexión existente entre las clases de equivalencia $[x]_R$ y $[x]_S$, donde R es la relación definida en el Ejercicio 2.2.10

12. Sea $\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}$ el conjunto de los enteros no nulos. Sobre $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$ se define la siguiente relación:

$$(a, b)R(c, d) \iff ad = bc.$$

(i) Demostrar que R es una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}^*$.

(ii) Describir las clases de equivalencia determinadas por R.

2.3. Funciones

Una *función* es una relación (conjunto de parejas ordenadas) con la propiedad de que no hay dos parejas diferentes con la misma primera componente. Formalmente, una función f es un conjunto de parejas ordenadas tal que

$$\forall a \forall b \forall c \big[(a, b) \in f \wedge (a, c) \in f \longrightarrow b = c\big]. \tag{2.3.1}$$

Si f es una función tal que $\mathrm{dom}(f) = A$ y $\mathrm{rango}(f) \subseteq B$, se dice que f *es una función de A en B*, lo cual se denota como $f : A \longrightarrow B$ o como $A \xrightarrow{f} B$. Por lo tanto, f es una función de A en B si para todo $a \in A$, existe un único $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$. Esto se puede expresar formalmente usando el cuantificador $\exists!$. En general, $\exists! x\, \varphi(x)$ se lee "existe un único x tal que $\varphi(x)$" y significa

$$\exists x\, \varphi(x) \wedge \forall u \forall v [\varphi(u) \wedge \varphi(v) \longrightarrow u = v].$$

De modo que f es una función de A en B si y sólo si $f \subseteq A \times B$ y

$$(\forall a \in A)(\exists! b \in B)\big[(a,b) \in f\big]. \tag{2.3.2}$$

Si $(a,b) \in f$, se escribe $f(a) = b$ y se dice que b es *la imagen de a por f*. También es corriente representar la igualdad $f(a) = b$ en la forma $a \xmapsto{f} b$, o simplemente $a \longmapsto b$, si se sobre-entiende la función f. Cuando $f(a) = b$ se dice también que a es una *pre-imagen* de b.

De acuerdo con las anteriores definiciones, $\varnothing$ es una función ya que (2.3.1) es trivialmente verdadero cuando $f = \varnothing$. Además, $\varnothing$ es una función de A en B si y sólo si $A = \varnothing$ (esto se deduce de la caracterización (2.3.2)). En tales situaciones se dice que $\varnothing$ es la *función vacía.*

El conjunto de todas las funciones de A en B se denota corrientemente por B^A. Nótese que $B^A \subseteq \wp(A \times B)$. Como caso particular, $B^\varnothing = \{\varnothing\}$. Otras notaciones alternativas para B^A son ${}^AB$ y $(A \longrightarrow B)$.

Dado un conjunto A, la *función identidad sobre A*, denotada Id_A o id_A es la función de A en A tal que $Id_A(a) = a$, para todo $a \in A$.

2.3.1 Definición. Sea $f : A \longrightarrow B$.

1. f es *inyectiva o 1 a 1* si elementos diferentes de A tienen imágenes diferentes en B. Formalmente,
$$(\forall a_1, a_2 \in A)\big[a_1 \neq a_1 \longrightarrow f(a_1) \neq f(a_2)\big].$$
Utilizando la implicación contrarecíproca se puede escribir equivalentemente,
$$(\forall a_1, a_2 \in A)\big[f(a_1) = f(a_2) \longrightarrow a_1 = a_2\big].$$

2. f es *sobreyectiva o sobre* si todo elemento de B es imagen de por lo menos un elemento de A. Formalmente,
$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)\big[f(a) = b\big].$$
Equivalentemente, f es sobreyectiva si $\text{rango}(f) = B$.

3. f es *biyectiva* si es tanto inyectiva como sobreyectiva.

Algunos autores escriben $f : A \rightarrowtail B$ para indicar que $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva. Por otro lado, $f : A \twoheadrightarrow B$ indica que f es sobreyectiva, y $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$ que f es biyectiva.

Si $f : A \longrightarrow B$ es una función, la relación inversa f^{-1} no necesariamente es una función. El siguiente teorema establece que una condición necesaria y suficiente para que f^{-1} sea función es que f sea inyectiva.

2.3.2 Teorema. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función. La relación f^{-1} es una función si y sólo si f es inyectiva. En este caso, $f^{-1} : \text{rango}(f) \longrightarrow A$.

Demostración. ($\Longrightarrow$) Si $f(a_1) = f(a_2) = b$, entonces $(a_1, b) \in f$ y $(a_2, b) \in f$. Así que, $(b, a_1) \in f^{-1}$ y $(b, a_2) \in f^{-1}$. De donde, $a_1 = a_2$ por ser f^{-1} función.
($\Longleftarrow$) Si $(a, b) \in f^{-1}$ y $(a, c) \in f^{-1}$, entonces $(b, a) \in f$ y $(c, a) \in f$. Así que, $f(b) = f(c)$. De donde, $b = c$ por ser f inyectiva. □

El siguiente teorema establece que la composición de dos funciones resulta ser una función.

2.3.3 Teorema. Sean $f : A \longrightarrow B$ y $g : B \longrightarrow C$ dos funciones. Entonces $g \circ f$ es una función de A en C. Además, $(g \circ f)(a) = g(f(a))$ para todo $a \in A$.

Demostración. Si $(a, c) \in g \circ f$ y $(a, d) \in g \circ f$, entonces existe un $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$ y $(b, c) \in g$, y existe un $b' \in B$ tal que $(a, b') \in f$ y $(b', d) \in g$. Como f es una función, $b = b'$; se sigue que $c = d$ ya que g es función. Esto muestra que $g \circ f$ es una función.

Por otro lado, si $(a, c) \in g \circ f$, entonces $(g \circ f)(a) = c$ y, por definición de composición, existe un $b \in B$ tal que $(a, b) \in f$ y $(b, c) \in g$. De donde, $f(a) = b$, $g(b) = c$. Por consiguiente,

$$(g \circ f)(a) = c = g(b) = g(f(a)).$$ □

El siguiente teorema presenta caracterizaciones (es decir, condiciones necesarias y suficientes) de las nociones de función inyectiva, función sobreyectiva y función biyectiva.

2.3.4 Teorema. Sea $A \neq \varnothing$ y $f : A \longrightarrow B$.

(1) f es inyectiva si y sólo si f tiene un *inverso a izquierda*, es decir, existe una función $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = Id_A$.

(2) f es sobreyectiva si y sólo si f tiene un *inverso a derecha*, es decir, existe una función $h : B \longrightarrow A$ tal que $f \circ h = Id_B$.

(3) f es biyectiva si y sólo si f es *invertible*, es decir, si existe una función $g : B \longrightarrow A$ tal que $g \circ f = Id_A$ y $f \circ g = Id_B$.

Demostración. (1) ($\Longrightarrow$) Como f es inyectiva, por el Teorema 2.3.2, f^{-1} es una función de rango(f) en A, o sea, f^{-1} : rango(f) $\longrightarrow A$. Se define la función $g : B \longrightarrow A$ como

$$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b), & \text{si } b \in \text{rango}(f), \\ a_0, & \text{si } b \notin \text{rango}(f), \end{cases}$$

donde a_0 es un elemento particular (fijo) de A; usamos aquí que $A \neq \varnothing$.

Mostraremos que $(g \circ f)(a) = a$ para todo $a \in A$. Sea a un elemento arbitrario de A tal que $f(a) = b$. Entonces $f^{-1}(b) = a$ y se tiene

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(b) = f^{-1}(b) = a.$$

($\Longleftarrow$) Si $g \circ f = Id_A$ y $f(a_1) = f(a_2)$, entonces

$$a_1 = (g \circ f)(a_1) = g(f(a_1)) = g(f(a_2) = (g \circ f)(a_2) = a_2.$$

Esto muestra que f es inyectiva.

(2) ($\Longrightarrow$) En esta dirección el argumento *requiere el Axioma de Elección* y se demostrará en el Capítulo 5. De hecho, se demostrará que el enunciado (2) ($\Longrightarrow$) es equivalente al Axioma de Elección.

($\Longleftarrow$) Si $f \circ h = Id_B$, entonces $f(h(b)) = b$ para todo $b \in B$. Esto significa que todo elemento $b \in B$ es imagen, por la función f, del elemento $h(b) \in A$ y, por lo tanto, f es sobreyectiva.

(3) ($\Longrightarrow$) Como f es inyectiva y sobreyectiva, $g = f^{-1}$ es una función de B sobre A por el Teorema 2.3.2. Es fácil chequear que $g \circ f = Id_A$ y $f \circ g = Id_B$. Este argumento *no requiere el Axioma de Elección* porque g se define como f^{-1} y no utilizando la construcción requerida para (2) en la dirección ($\Longrightarrow$).

($\Longleftarrow$) Se sigue de las direcciones ($\Longleftarrow$) de (1) y (2). □

Es importante resaltar que si $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva, un inverso a izquierda de f es diferente de la función f^{-1}, a menos que rango(f) sea B (esto es, cuando f sea biyectiva). Según la demostración del Teorema 2.3.4, una función inyectiva puede tener muchos inversos a izquierda (dependiendo de la escogencia del elemento $a_0 \in A$). Análogamente, se verá en el Capítulo 5 que una función sobreyectiva puede tener varios inversos a derecha.

Imagen directa e imagen recíproca. Dada una función $f : A \longrightarrow B$ y $X \subseteq A$, la *imagen directa* de X por medio de la función f se define como

$$\begin{aligned} f[X] := \{f(a) : a \in X\} &= \{b \in B : (\exists a \in X)[f(a) = b]\} \\ &= \{b \in B : b = f(a) \text{ para algún } a \in X\}. \end{aligned}$$

Es decir, $f[X]$ es el conjunto de las imágenes de elementos de X. En la práctica matemática es corriente escribir $f(X)$ en lugar de $f[X]$. También se usa la notación $f''X$.

Si $Y \subseteq B$, la *imagen recíproca o imagen inversa* de Y por medio de la función f se define como

$$f^{-1}[Y] := \{a \in A : f(a) \in Y\}.$$

Es decir, $f^{-1}[Y]$ es el conjunto de las pre-imágenes de elementos de Y. Frecuentemente se escribe $f^{-1}(Y)$ en lugar de $f^{-1}[Y]$.

NOTA. Obsérvese que si $f : A \longrightarrow B$ es una función, la notación f^{-1} se ha empleado en tres contextos diferentes que no deben confundirse entre sí:

1. f^{-1} denota la relación inversa obtenida a partir de la relación f. Como relación, f^{-1} *siempre existe.*

2. $f^{-1}(b)$, denota la función inversa de f, calculada en cierto $b \in$ rango(f). Pero f^{-1} es una función si y sólo si f es inyectiva (Teorema 2.3.2). Por lo tanto, $f^{-1}(b)$ *no siempre existe.*

3. $f^{-1}[Y]$ denota la imagen recíproca o inversa de $Y \subseteq B$ por medio de la función f. La imagen recíproca *siempre existe.*

Restricción y extensión de funciones. Dada una función $f : A \longrightarrow B$ y $X \subseteq A$, se define la *restricción* de f a X como

$$f|_X = f\restriction_X = f \cap (X \times B).$$

De esta manera, $f|_X = f\restriction_X$ es una función de X en B.

Si f y g son funciones y $f \subseteq g$, se dice que g es una *extensión* de f. Obsérvese que g es una extensión de f si y sólo si $\mathrm{dom}(f) \subseteq \mathrm{dom}(g)$ y $f(a) = g(a)$ para todo $a \in \mathrm{dom}(f)$.

Ejercicios de la sección 2.3

1. Demostrar que la composición de funciones inyectivas es inyectiva y que la composición de funciones sobreyectivas es sobreyectiva.
2. Sea $R \subseteq A \times A$. Demostrar que si $R \circ R = \{(a, a) : a \in A\}$, entonces R es una función biyectiva de A en A.
3. Sea $f : A \longrightarrow B$ una función con un inverso a la izquierda $g : B \longrightarrow A$ y con un inverso a la derecha $h : B \longrightarrow A$. Demostrar que f es biyectiva y que $g = h = f^{-1}$. Es decir, si f es biyectiva, f tiene un único inverso a izquierda y un único inverso a derecha que coinciden precisamente con f^{-1}.
4. (i) Dar un ejemplo de una función $f : A \longrightarrow A$, diferente de la función identidad, tal que $f \circ f = f$.

   (ii) Sea $f : A \longrightarrow A$ una función, diferente de la función identidad, tal que $f \circ f = f$. Demostrar que f^{-1} no es una función.
5. (i) Dar un ejemplo de una función $f : A \longrightarrow A$, diferente de la función identidad, tal que $f \circ f \circ f = f \circ f$.

   (ii) Sea $f : A \longrightarrow A$ una función, diferente de la función identidad, tal que $f \circ f \circ f = f \circ f$. Demostrar que f no es ni inyectiva ni sobreyectiva.
6. Sea $f : A \longrightarrow B$, y sean $X_1, X_2 \subseteq A$, $Y_1, Y_2 \subseteq B$. Demostrar que

   (i) $f[X_1 \cup X_2] = f[X_1] \cup f[X_2]$.

   (ii) $f[X_1 \cap X_2] \subseteq f[X_1] \cap f[X_2]$.

   (iii) $f[X_1] - f[X_2] \subseteq f[X_1 - X_2]$.

   (iv) $f^{-1}[Y_1 \cup Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cup f^{-1}[Y_2]$.

   (v) $f^{-1}[Y_1 \cap Y_2] = f^{-1}[Y_1] \cap f^{-1}[Y_2]$.

   (vi) $f^{-1}[Y_1 - Y_2] = f^{-1}[Y_1] - f^{-1}[Y_2]$.
7. Demostrar que $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva si y sólo si para todo par de subconjuntos X_1, X_2 de A se tiene $f[X_1 \cap X_2] = f[X_1] \cap f[X_2]$.

8. Sea $f : A \longrightarrow B$ y $Y \subseteq B$. Demostrar que $f^{-1}[Y] = A - f^{-1}[B - Y]$.

9. Sea $f : A \longrightarrow B$.

   (i) Demostrar que si $X \subseteq A$, entonces $f^{-1}[f[X]] \supseteq X$.

   (ii) Demostrar que f es inyectiva si y sólo si $f^{-1}[f[X]] = X$ para todo subconjunto X de A.

   (iii) Demostrar que si $Y \subseteq B$, entonces $f[f^{-1}[Y]] \subseteq Y$.

   (iv) Demostrar que f es sobreyectiva si y sólo si $f[f^{-1}[Y]] = Y$ para todo subconjunto Y de B.

10. Dada una función $f : A \longrightarrow B$, se define la función $g : \wp(A) \longrightarrow \wp(B)$ como $g(X) = f[X]$, para todo $X \in \wp(A)$. Demostrar que f es inyectiva si y sólo si g es inyectiva.

11. Dada una función $f : A \longrightarrow B$, se define la función $g : B \longrightarrow \wp(A)$ como $g(b) = f^{-1}[\{b\}]$, para todo $b \in B$.

    (i) Demostrar que si f es sobreyectiva, entonces g es inyectiva.

    (ii) Si g es inyectiva, ¿se puede concluir que f es sobreyectiva?

2.4. Familias de conjuntos

Una familia de conjuntos, indexada por un conjunto no vacío de índices I, es el rango de una función con dominio I. Si a cada índice $i \in I$ le corresponde el conjunto A_i, la familia se denota de alguna de las dos siguientes formas:

$$\{A_i\}_{i\in I} = \{A_i : i \in I\}.$$

La unión y la intersección de esta familia están dadas por:

$$\bigcup\{A_i : i \in I\} = \bigcup_{i\in I} A_i = \{x : (\exists i \in I)(x \in A_i)\} = \{x : x \in A_i \text{ para algún } i \in I\},$$

$$\bigcap\{A_i : i \in I\} = \bigcap_{i\in I} A_i = \{x : (\forall i \in I)(x \in A_i)\} = \{x : x \in A_i \text{ para todo } i \in I\}.$$

Puesto que en la definición de familia se ha exigido que el conjunto de índices I sea no vacío, entonces $\{A_i : i \in I\} \neq \varnothing$ y, por lo tanto, $\bigcup_{i\in I} A_i$ y $\bigcap_{i\in I} A_i$ siempre existen.

Resulta conveniente utilizar familias para presentar ciertas nociones matemáticas. Por ejemplo, la noción de partición (véase la Definición 2.2.3) se puede definir de la siguiente manera.

2.4.1 Definición. Una partición de un conjunto no vacío A es una familia $\{A_i\}_{i\in I}$ de subconjuntos de A tal que:

(1) $A_i \neq \varnothing$ para todo $i \in I$.

(2) $i, j \in I,\ i \neq j \Longrightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$.

(3) $\bigcup_{i\in I} A_i = A$.

Familias doblemente indexadas. Una familia doblemente indexada es una familia cuyo conjunto de índices es de la forma $I \times J$, donde $I, J \neq \varnothing$. En lugar de denotar una tal familia en la forma $\{A_{(i,j)}\}_{(i,j)\in I\times J}$, son corrientes las notaciones más cómodas

$$\{A_{i,j}\}_{\substack{i\in I\\ j\in J}} = \{A_{i,j}\}_{i\in I, j\in J}.$$

Para una familia doblemente indexada $\{A_{i,j}\}_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ la unión y la intersección se pueden expresar como

$$\bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{i,j} = \{x : (\exists i \in I)(\exists j \in J)(x \in A_{i,j})\},$$
$$\bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{i,j} = \{x : (\forall i \in I)(\forall j \in J)(x \in A_{i,j})\}.$$

Se tiene que

$$\bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j} = \bigcup_{j\in J}\bigcup_{i\in I} A_{i,j} = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{i,j}.$$

ya que

$$\begin{aligned} x \in \bigcup_{i\in I}\bigcup_{j\in J} A_{i,j} &\Longleftrightarrow (\exists i \in I)\Big(x \in \bigcup_{j\in J} A_{i,j}\Big) \Longleftrightarrow (\exists i \in I)(\exists j \in J)(x \in A_{i,j}) \\ &\Longleftrightarrow x \in \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{i,j}. \end{aligned}$$

La otra igualdad se deduce de manera similar.

Análogamente, se cumple que

$$\bigcap_{i\in I}\bigcap_{j\in J} A_{i,j} = \bigcap_{j\in J}\bigcap_{i\in I} A_{i,j} = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} A_{i,j}.$$

Ejercicios de la sección 2.4

1. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ dos familias de conjuntos indexadas por el mismo conjunto de índices I. Demostrar que si $A_i \subseteq B_i$ para todo $i \in I$, entonces $\bigcup_{i\in I} A_i \subseteq \bigcup_{i\in I} B_i$ y $\bigcap_{i\in I} A_i \subseteq \bigcap_{i\in I} B_i$.

2. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{i\in J}$ familias arbitrarias de conjuntos. Demostrar que

   (i) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cup B_j)$.

   (ii) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j)$.

3. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_j\}_{i\in J}$ familias arbitrarias de conjuntos y B un conjunto cualquiera. Demostrar las siguientes propiedades distributivas.

   (i) $B \cup \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \cup A_i)$.

   (ii) $B \cap \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \cap A_i)$.

   (iii) $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{j\in J} B_j\right) = \bigcap_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cup B_j)$.

   (iv) $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j\in J} B_j\right) = \bigcup_{\substack{i\in I\\ j\in J}} (A_i \cap B_j)$.

4. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y B un conjunto cualquiera. Demostrar las siguientes propiedades distributivas del producto cartesiano con respecto a uniones e intersecciones:

   (i) $B \times \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B \times A_i)$.

   (ii) $B \times \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B \times A_i)$.

5. Sea $\{A_i\}_{i\in I}$ una familia de conjuntos y B un conjunto cualquiera. Demostrar la forma general de las leyes de De Morgan:

   (i) $B - \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(B - A_i)$.

   (ii) $B - \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(B - A_i)$.

6. Demostrar la siguiente forma de las leyes de De Morgan, para el caso en que existe un conjunto universal de referencia X, tal que $A_i \subseteq X$ para todo $i \in I$, y los complementos se toman con respecto a X:

   (i) $\overline{\bigcup_{i\in I} A_j} = \bigcap_{i\in I} \overline{A_i}$.

   (ii) $\overline{\bigcap_{i\in I} A_j} = \bigcup_{i\in I} \overline{A_i}$.

7. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ y $\{B_i\}_{i\in I}$ dos familias de conjuntos indexadas por el mismo conjunto de índices I.

   (i) Demostrar que $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A_i \times B_i)$.

   (ii) Demostrar que $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \supseteq \bigcup_{i\in I}(A_i \times B_i)$.

   (iii) Encontrar un contraejemplo para $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \times \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) \subseteq \bigcup_{i\in I}(A_i \times B_i)$.

8. Sean $f : A \longrightarrow B$, $\{X_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de A y $\{Y_i\}_{i\in I}$ una familia de subconjuntos de B. Demostrar que

(i) $f\left[\bigcup_{i\in I} X_i\right] = \bigcup_{i\in I} f[X_i]$.
(ii) $f\left[\bigcap_{i\in I} X_i\right] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[X_i]$.
(iii) $f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} Y_i\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[Y_i]$.
(iv) $f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} Y_i\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[Y_i]$.

¿Qué condiciones debe satisfacer f para que se tenga la igualdad en (ii)?

9. Sean $\{A_i\}_{i\in I}$ una partición de A y $\{B_j\}_{j\in J}$ una partición de B. Demostrar que $\{A_i \times B_j\}_{\substack{i\in I\\ j\in J}}$ es una partición de $A \times B$.

2.5. Funciones compatibles

La unión de dos funciones es un conjunto de parejas pero no necesariamente es una función. Esto es bastante claro ya que si f y g son funciones y $(a, b) \in f$, $(a, c) \in g$, donde $b \neq c$, entonces las parejas (a, b) y (a, c) están en $f \cup g$, lo cual hace que $f \cup g$ no sea una función. Una pregunta muy natural es: ¿bajo qué condiciones la unión de dos funciones es una función? Más en general, ¿bajo qué condiciones la unión de una colección de funciones es una función? La noción de "funciones compatibles" se introduce para responder a estas preguntas.

2.5.1 Definición. Dos funciones f y g son compatibles si $f(x) = g(x)$ para todo $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$.

En particular, si $f \cap g = \varnothing$, entonces f y g son compatibles. El hecho de que dos funciones f y g sean compatibles resulta ser una condición necesaria y suficiente para que la unión $f \cup g$ sea una función. La demostración, que es muy sencilla, aparece en la siguiente proposición.

2.5.2 Proposición. La unión $f \cup g$ de dos funciones f y g es una función si y sólo si f y g son compatibles.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Supongamos que $f \cup g$ es una función. Sea $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$; se quiere demostrar que $f(x) = g(x)$. Existen y, z tales que $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in g$. Esto significa que $f(x) = y$ y $g(x) = z$. Como las parejas (x, y) y (x, z) están en $f \cup g$, y como $f \cup g$ es una función, se concluye que $y = z$. Esto es, $f(x) = g(x)$, que era lo que se quería demostrar.

$(\Leftarrow)$ Supongamos que f y g son compatibles. Para demostrar que $f \cup g$ es una función, tomamos dos parejas (x, y) y (x, z) en $f \cup g$ con el objeto de concluir que $y = z$. Se tiene que, o ambas parejas están en f, o ambas están en g, o una está en f y la otra en g. En los dos primeros casos se concluye inmediatamente que $y = z$ porque tanto f como g son funciones. En el tercer caso tenemos $(x, y) \in f$ y $(x, z) \in g$ (o viceversa). Esto significa que $x \in \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g)$, y como f y g son compatibles, se tiene que $f(x) = g(x)$. Es decir, $y = z$, que era lo que se quería demostrar. $\square$

2.5.3 Proposición. Sea F un conjunto de funciones compatibles dos a dos (es decir, si dos funciones f y g pertenecientes a F son compatibles). Entonces $g = \bigcup F$ es una función. Se tiene además que:

(1) $\mathrm{dom}(g) = \bigcup\{\mathrm{dom}(f) : f \in F\}$.

(2) $\mathrm{rango}(g) = \bigcup\{\mathrm{rango}(f) : f \in F\}$.

(3) Para cualquier función $f \in F$, si $x \in \mathrm{dom}(f)$, se tiene $g(x) = f(x)$.

Demostración. Para demostrar que $g = \bigcup F$ es una función, tomamos dos parejas (x, y) y (x, z) en g con el objeto de concluir que $y = z$. Por definición de unión, existen funciones f_1 y f_2 en F tales que $(x, y) \in f_1$ y $(x, z) \in f_2$. Esto significa que $x \in \mathrm{dom}(f_1) \cap \mathrm{dom}(f_2)$; como f_1 y f_2 son compatibles, se tiene que $f_1(x) = f_2(x)$. Es decir, $y = z$, que era lo que se quería demostrar.

Las partes (1) y (2) se obtienen inmediatamente de las definiciones de dominio, rango y unión. Para demostrar (3), tomamos $f \in F$ y $x \in \mathrm{dom}(f)$. Entonces $(x, f(x)) \in f$ y, por lo tanto, $(x, f(x)) \in \bigcup F = g$. Como g es función, se tiene necesariamente que $g(x) = f(x)$. □

La recíproca de la Proposición 2.5.3 también es válida (véase el Ejercicio 2.5.2).

La Proposición 2.5.3 es una herramienta bastante útil cuando se pretende definir una función mediante la unión de una colección de funciones.

Ejercicios de la sección 2.5

1. Sea F un conjunto de funciones. Encontrar un conjunto A tal que $\mathrm{dom}(f) \in A$ y $\mathrm{rango}(f) \in A$ para toda función $f \in F$.

2. Si F es un conjunto de funciones tal que $\bigcup F$ es una función, demostrar que las funciones de F son compatibles dos a dos.

3. Sea F un conjunto de funciones tal que para cualquier par de funciones f y g en F se tiene $f \subseteq g$ o $g \subseteq f$. Demostrar que $\bigcup F$ es una función.

2.6. Relaciones de orden

2.6.1 Definición. Sea R una relación sobre A (o sea, $R \subseteq A \times A$).

1. R es *antisimétrica* si

$$\big(\forall a, b \in A\big)\big[(a, b) \in R \wedge (b, a) \in R \longrightarrow a = b\big].$$

Equivalentemente,

$$\big(\forall a, b \in A\big)\big[aRb \wedge bRa \longrightarrow a = b\big].$$

2. R es una *relación de orden sobre* A o *orden parcial sobre* A si R es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Si se considera la implicación contrarrecíproca en la Definición 2.6.1, se tiene que R es antisimétrica si y sólo si

$$\big(\forall a, b \in A\big)\big[a \neq b \longrightarrow (a, b) \notin R \vee (b, a) \notin R\big].$$

De manera que una relación es antisimétrica si y sólo si no contiene simultáneamente las parejas simétricas (a, b) y (b, a), a menos que $a = b$. Debe ser claro que "ser antisimétrica" no es la negación de "ser simétrica"; por ejemplo, la relación $R = \{(b, b), (c, c)\}$ es tanto simétrica como antisimétrica sobre el conjunto $A = \{a, b, c\}$ (véase al respecto el Ejercicio 2.6.1). De hecho, las nociones de simetría y antisimetría son independientes entre sí (Ejercicio 2.6.2).

Si R es una relación de orden sobre A, se dice que (A, R) es un *conjunto parcialmente ordenado* o, simplemente, un *conjunto ordenado* o un *orden*. Se acostumbra denotar R con el símbolo $\leq$ ya que la relación $\leq$ entre números reales resulta ser una relación de orden, la más tradicional en matemáticas. Se tiene entonces que $(A, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado si

1. $(\forall a \in A)[a \leq a]$ (Reflexividad).
2. $(\forall a, b \in A)[a \leq b \wedge b \leq a \longrightarrow a = b]$ (Antisimetría).
3. $(\forall a, b, c \in A)[a \leq b \wedge b \leq c \longrightarrow a \leq c]$ (Transitividad).

En el contexto general, $a \leq b$ también se lee "a es menor o igual que b".

Ejemplo La relación de orden más importante en matemáticas es la relación de contenencia $\subseteq$ entre subconjuntos. Concretamente, dado un conjunto X, $(\wp(X), \subseteq)$ es un conjunto ordenado (las propiedades reflexiva, antisimétrica y transitiva de $\subseteq$ se establecieron en la Proposición 1.3.1). Para subconjuntos arbitrarios A, B y C de X se tiene

1. $A \subseteq A$ (Reflexividad).
2. $A \subseteq B \wedge B \subseteq A \Longrightarrow A = B$ (Antisimetría).
3. $A \subseteq B \wedge B \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq C$ (Transitividad).

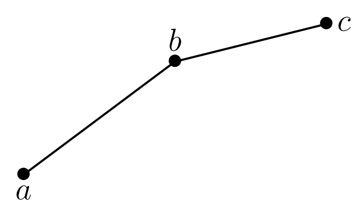
La siguiente proposición indica cómo se pueden obtener nuevas relaciones de orden a partir de una relación de orden dada. La proposición se sigue directamente de las definiciones.

2.6.2 Proposición. Sea R es una relación de orden sobre A. Entonces

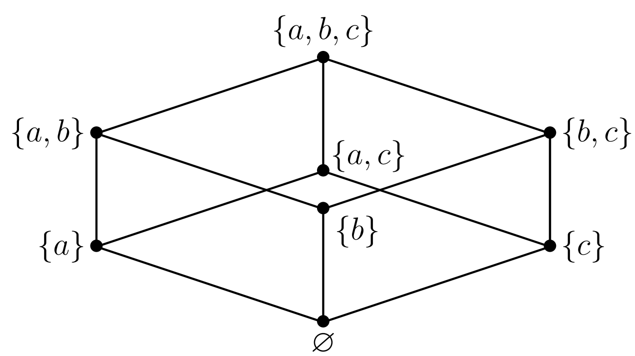
1. La relación inversa R^{-1} también es una relación de orden sobre A. Si R se denota por $\leq$, la inversa R^{-1} se denota por $\geq$. En general, $a \geq b$ también se lee "a es mayor o igual que b".

2. Si $B \subseteq A$, entonces $R \cap (B \times B)$ es una relación de orden sobre B, llamada la *restricción de* R *a* B. Si R se denota por $\leq$, su restricción a B también se denota por $\leq$. Es decir, si $(A, \leq)$ es un conjunto ordenado, la restricción $(B, \leq)$ también es un conjunto ordenado. Se dice que el orden de B es *inducido* por el orden de A.

Diagramas de Hasse. Los llamados diagramas de Hasse se utilizan para representar gráficamente conjuntos ordenados $(A, \leq)$ (cuando A es un conjunto finito[3]). Cada elemento de A se representa por un punto en el plano, y si $a \leq b$, el punto a se coloca debajo del punto b y se unen por un segmento de recta (no necesariamente vertical) siempre y cuando b cubra a a, es decir, si no existe $x \in A$ tal que $a \leq x$, $x \leq b$, $x \neq a$ y $x \neq b$. De modo que si b cubre a a y c cubre a b, entonces $a \leq c$, pero el segmento que une a con c no se dibuja, como se aprecia en la siguiente gráfica:



Ejemplo A continuación se exhibe un diagrama de Hasse para el conjunto de subconjuntos de $\{a, b, c\}$, ordenado por contenencia, es decir, para el orden $(\wp(\{a, b, c\}), \subseteq)$.



Dado un conjunto ordenado $(A, \leq)$, un diagrama de Hasse para la relación inversa $(A, \geq)$ se obtiene invirtiendo verticalmente el diagrama de $(A, \leq)$.

Orden estricto. Se ha definido la noción de orden parcial $\leq$ sobre un conjunto. Alternativamente, se puede definir primero la noción de orden estricto $<$. Todo orden parcial $\leq$ induce un orden estricto $<$ y, recíprocamente, todo orden estricto $<$ induce el correspondiente orden parcial $\leq$, tal como sucede en el caso de los números reales. Para precisar estos procedimientos en el contexto más general se requiere definir la noción de relación asimétrica.

[3]Las nociones de finito e infinito se definirán rigurosamente en el Capítulo 6. Aquí se apela al concepto intuitivo de finitud.

2.6.3 Definición. Sea R una relación sobre A (o sea, $R \subseteq A \times A$).

1. R es *asimétrica* si
$$\big(\forall a, b \in A\big)\big[aRb \longrightarrow \neg(bRa)\big].$$

2. R es una *relación de orden estricto sobre* A o *orden estricto sobre* A si R es asimétrica y transitiva.

Si R es asimétrica, entonces para cualquier $a \in A$, se tiene $\neg(aRa)$. Nótese además que toda relación asimétrica es necesariamente antisimétrica (ya que no hay parejas simétricas), pero no recíprocamente. Por ejemplo, $R = \{(a, b), (b, b)\}$ es antisimétrica pero no es asimétrica, sobre el conjunto $A = \{a, b\}$.

2.6.4 Proposición. (1) Sea $\leq$ una relación de orden sobre un conjunto A. La relación $<$ definida sobre A por medio de

$$a < b \Longleftrightarrow a \leq b \wedge a \neq b$$

es un orden estricto. Es decir, $<$ es asimétrica y transitiva. $a < b$ se lee "a es estrictamente menor que b".

(2) Si R es una relación asimétrica y transitiva sobre A, entonces la relación $\leq$ definida sobre A por medio de
$$a \leq b \Longleftrightarrow aRb \vee a = b$$
es una relación de orden, es decir, $\leq$ es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

Demostración.

1. Para concluir que $<$ es asimétrica hay que demostrar que $a < b \Longrightarrow \neg(b < a)$. Razonando por contradicción, se supone que $b < a$. Entonces se tiene que $a \leq b$ y $b \leq a$; de donde $a = b$, ya que $\leq$ es antisimétrica. Se llega a la contradicción $a = b \wedge a \neq b$. Para demostrar que $<$ es transitiva se comienza con $a < b$ y $b < c$. Entonces $a \leq b$ y $b \leq c$; de donde $a \leq c$ porque $\leq$ es transitiva. Pero $a \neq c$ ya que, de lo contrario, se tendría $a \leq b$ y $b \leq a$, lo que implicaría $a = b$, contradiciendo así que $a < b$. Por lo tanto, $a \leq c$ y $a \neq c$; de donde $a < c$.

2. Ejercicio. □

Los procedimientos de la Proposición 2.6.4 son mutuamente reversibles (véase el Ejercicio 2.6.4).

2.6.5 Definición. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado.

1. Un elemento $m \in A$ es *minimal* si $(\forall a \in A)[a \leq m \longrightarrow a = m]$.

2. Un elemento $m \in A$ es *maximal* si $(\forall a \in A)[m \leq a \longrightarrow a = m]$.

3. Un elemento $m \in A$ es *mínimo* si $(\forall a \in A)[m \leq a]$.

4. Un elemento $m \in A$ es *máximo* si $(\forall a \in A)[a \leq m]$.

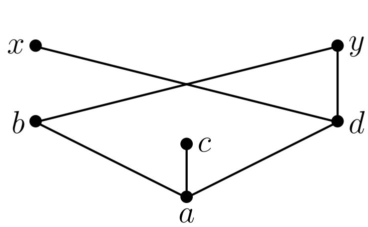
Que m sea un elemento minimal se puede escribir de manera equivalente así:

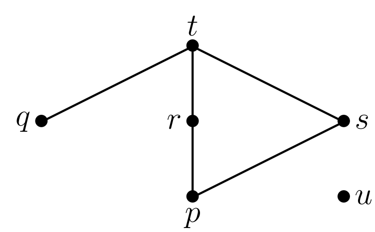
$$\begin{aligned}(\forall a \in A)[a \leq m \longrightarrow a = m] &\Longleftrightarrow \neg\neg(\forall a \in A)[a \leq m \longrightarrow a = m]\\ &\Longleftrightarrow \neg(\exists a \in A)[a \leq m \wedge a \neq m]\\ &\Longleftrightarrow \neg(\exists a \in A)[a < m].\end{aligned}$$

Esto quiere decir que m es minimal si no existe en A un elemento que sea estrictamente menor que m. Análogamente, m es maximal si no existe en A un elemento que sea estrictamente mayor que m, es decir, si $\neg(\exists a \in A)[m < a]$.

Si $(A, \leq)$ tiene un elemento mínimo m, éste debe ser único ya que si m' es también mínimo, se tendrá $m \leq m'$ y $m' \leq m$ y, por lo tanto, $m = m'$ por la propiedad antisimétrica. En tal caso, se dice que m es *el mínimo* de $(A, \leq)$ y se escribe $m = \min(A)$. Similarmente, si $(A, \leq)$ tiene un elemento máximo m, éste es único y se denota por $m = \max(A)$. Se acostumbra denotar el máximo por $\top$ y el mínimo por $\perp$ (cuando estos existen, por supuesto). Nótese además que si $m = \min(A)$ existe, entonces m es el único elemento minimal de $(A, \leq)$, y si $m = \max(A)$ existe, entonces m es el único elemento maximal de $(A, \leq)$.

Ejemplo Considérense los conjuntos $A = \{a, b, c, d, x, y\}$ y $B = \{p, q, r, s, t, u\}$, ordenados como lo muestran los siguientes diagramas.





Se tiene que $\min(A) = a$, así que a es el único elemento minimal de A. Los elementos maximales de $(A, \leq)$ son c, x y y. $(A, \leq)$ no tiene máximo. Por otro lado, $(B, \leq)$ no tiene ni mínimo ni máximo. Sus elementos minimales son son p, q, u; sus maximales son u y t. Estos ejemplos ilustran que el máximo o el mínimo no siempre existen, y que un elemento puede ser tanto minimal como maximal.

2.6.6 Definición. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y $B \subseteq A$.

1. El *mínimo de B, como subconjunto de A*, es simplemente el mínimo del conjunto $(B, \leq)$ con el orden $\leq$ restringido de A a B. Si existe, se denota $\min(B)$. De manera análoga se define $\max(B)$.

2. Un elemento $a \in A$ es una *cota inferior* de B si $(\forall x \in B)[a \leq x]$.

3. Un elemento $a \in A$ es una *cota superior* de B si $(\forall x \in B)[x \leq a]$.

4. Un elemento $a \in A$ es una *máxima cota inferior de* B (o *ínfimo* de B) cuando se cumple que
   (i) a es cota inferior de B, es decir, $(\forall x \in B)[a \leq x]$.
   (ii) Si a' es cota inferior de B, entonces $a' \leq a$.
5. Un elemento $a \in A$ es una *mínima cota superior de* B (o *supremo* de B) cuando se cumple que
   (i) a es cota superior de B, es decir, $(\forall x \in B)[x \leq a]$.
   (ii) Si a' es cota superior de B, entonces $a \leq a'$.

Obsérvese que si B tiene un ínfimo, éste debe ser único ya que si a y a' son ambos ínfimos de B, tanto a como a' son cotas inferiores de B y, por la propiedad (ii) de la definición, se tendrá $a \leq a'$ y $a' \leq a$. En tal caso, el ínfimo de B se denota por $\inf(B)$. Similarmente, si B tiene un supremo éste debe ser único y se denota por $\sup(B)$. Se puede entonces escribir

$$\inf(B) = \max\{u : u \text{ es cota inferior de } B\},$$
$$\sup(B) = \min\{v : v \text{ es cota superior de } B\}.$$

Recalcamos que, dado un subconjunto $B \subseteq A$, $\inf(B)$ y $\sup(B)$ no siempre existen.

Cuando $B = \{a, b\}$, el ínfimo de B y el supremo de B, si existen, se denotan por

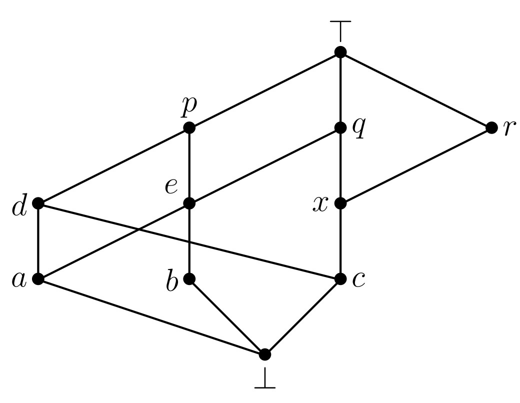
$$\inf(\{a, b\}) = a \wedge b, \qquad \sup(\{a, b\}) = a \vee b,$$

respectivamente. Esta notación proviene del hecho de que en el conjunto parcialmente ordenado $(\wp(X), \subseteq)$ se tiene, para $A, B \in \wp(X)$,

$$\inf(\{A, B\}) = A \cap B, \qquad \sup(\{A, B\}) = A \cup B.$$

Esto se deduce de los Ejercicios 1.3.2 y 1.3.3. Estas igualdades se pueden expresar verbalmente: $A \cap B$ es el conjunto más grande contenido tanto en A como en B, y $A \cup B$ es el conjunto más pequeño que contiene tanto a A como a B.

$\boxed{\textbf{\textit{Ejemplo}}}$ Sea A el conjunto $A = \{\bot, a, b, c, d, e, x, p, q, r, \top\}$ ordenado como se muestra en el siguiente diagrama.



Se tiene $a \vee b = e$, $e \vee x = q$, $d \vee x = \top$, $d \wedge x = c$, $q \wedge r = x$ y $a \wedge r = \perp$. Podría pensarse que $b \vee c = q$ pero, en realidad, $b \vee c$ no existe ya que las cotas superiores de $\{b, c\}$ son p, q y $\top$, y no hay una mínima cota superior (no existe $\min\{p, q, \top\}$). Por tal razón, este conjunto ordenado no es un retículo.

Ejemplo Considérese el conjunto ordenado $(\wp(X), \subseteq)$ y sea $S \subseteq \wp(X)$. Según las propiedades establecidas en el Ejercicio 1.3.9, $\bigcup S$ es el subconjunto más pequeño de X que contiene a todos los elementos de S; esto quiere decir que $\sup(S) = \bigcup S$. De manera análoga, si $S \neq \varnothing$, $\bigcap S$ es el subconjunto más grande de X que está contenido en todos los elementos de S (Ejercicio 1.3.10), de donde $\inf(S) = \bigcap S$. En este contexto se define $\bigcap \varnothing = X$ (véase la discusión sobre $\bigcap S$ en el Capítulo 1).

Notación. Teniendo en cuenta que $\bigcap S$ y $\bigcup S$ coinciden con $\inf(S)$ e $\sup(S)$, respectivamente, para el orden $(\wp(X), \subseteq)$, se acostumbra denotar $\bigwedge B = \inf(B)$ y $\bigvee B = \sup(B)$ para el caso general de un subconjunto B de un conjunto ordenado $(A, \leq)$, cuando estos existen.

2.6.7 Definición. Se dice que un conjunto ordenado $(A, \leq)$ es un *retículo*[4] si existen $a \wedge b$ y $a \vee b$ para cualquier par de elementos $a, b \in A$. Se dice que $(A, \leq)$ es un *retículo completo* si existen $\bigwedge B$ y $\bigvee B$ para todo subconjunto B de A.

Por lo que ha sido mencionado arriba, $(\wp(X), \subseteq)$ es un retículo completo ya que todo subconjunto S de $\wp(X)$ tiene supremo e ínfimo, dados por

$$\bigvee S = \bigcup S, \qquad \bigwedge S = \bigcap S,$$

considerando $\bigcap \varnothing = X$.

2.6.8 Definición. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado.

1. Se dice que $(A, \leq)$ es *totalmente ordenado* (o *linealmente ordenado*) si dos elementos cualesquiera son comparables, es decir, si se tiene $(\forall a, b \in A)[a \leq b \vee b \leq a]$. También se dice que $\leq$ es un *orden lineal*.

2. Si un subconjunto no vacío B de A es totalmente ordenado (con el orden inducido por $\leq$) se dice que $(B, \leq)$ es una *cadena* de $(A, \leq)$.

3. Se dice que $(A, \leq)$ es *bien ordenado* (o que es un *buen orden*) si todo subconjunto no vacío de A tiene elemento mínimo. Es decir, si para todo $B \subseteq A$ y $B \neq \varnothing$, existe $\min(B)$.

Nótese que todo conjunto bien ordenado necesariamente es totalmente ordenado ya que, dados $a, b \in A$, el subconjunto no vacío $\{a, b\}$ debe tener elemento mínimo y, por lo tanto, se tendrá $a \leq b$ o $b \leq a$. Pero, no todo conjunto totalmente ordenado es bien ordenado, como se mostrará más adelante.

[4] En castellano, retículo significa "que tiene forma de red".

Isomorfismo entre conjuntos ordenados. Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \preccurlyeq)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. Un *isomorfismo de orden* (o simplemente un *isomorfismo*) entre P y Q es una función inyectiva $h : P \longrightarrow Q$ tal que

$$(\forall x_1, x_2 \in P)[x_1 \leq x_2 \Longleftrightarrow h(x_1) \preccurlyeq h(x_2)]. \tag{2.6.1}$$

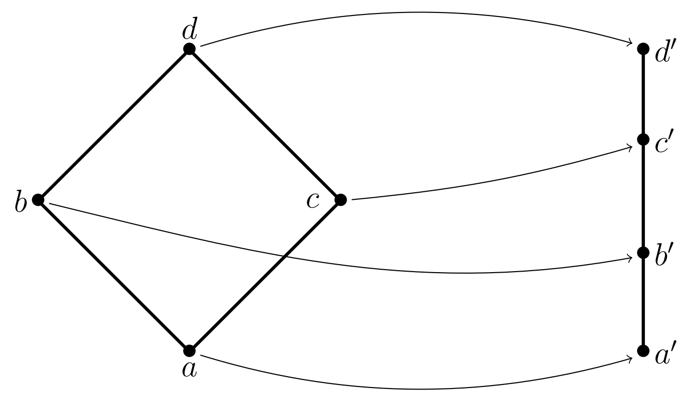
Si h es biyectiva se dice que $(P, \leq)$ y $(Q, \preccurlyeq)$ son *isomorfos* (o también *orden-isomorfos*). El enunciado (2.6.1) es equivalente a

$$(\forall x_1, x_2 \in P)[x_1 < x_2 \Longleftrightarrow h(x_1) \prec h(x_2)]. \tag{2.6.2}$$

(Véase el Ejercicio 2.6.9). Intuitivamente, si $(P, \leq)$ y $(Q, \preccurlyeq)$ son isomorfos, entonces son idénticos como conjuntos ordenados (salvo el nombre de sus elementos). Para capturar acertadamente esta idea, en la condición (2.6.1) la doble implicación no se puede reemplazar por una implicación simple; es decir, si se cumple

$$(\forall x_1, x_2 \in P)[x_1 \leq x_2 \Longrightarrow h(x_1) \preccurlyeq h(x_2)], \tag{2.6.3}$$

no podemos concluir que, como conjuntos ordenados, $(P, \leq)$ y $(Q, \preccurlyeq)$ son idénticos (orden-isomorfos). Por ejemplo, para los conjuntos $P = \{a, b, c, d\}$ y $Q = \{a', b', c', d'\}$, ordenados como se muestra en la siguiente gráfica, la función h definida por $h(a) = a'$, $h(b) = b'$, $h(c) = c'$ y $h(d) = d'$, satisface (2.6.3) pero no (2.6.1). Se observa que $(P, \leq)$ y $(Q, \preccurlyeq)$ no son isomorfos.



En el caso en que $(P, \leq)$ y $(Q, \preccurlyeq)$ sean linealmente ordenados, las condiciones (2.6.1) y (2.6.3) sí resultan equivalentes (véase el Ejercicio 2.6.14).

Ejercicios de la sección 2.6

1. Sea A un conjunto dado. Demostrar que una relación R sobre A es simétrica y antisimétrica si y sólo si $R \subseteq \{(a, a) : a \in A\}$.

2. Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$, encontrar ejemplos de relaciones R sobre A de tal manera que:

(i) R sea simétrica y antisimétrica.

(ii) R sea simétrica pero no antisimétrica.

(iii) R sea antisimétrica pero no simétrica.

(iv) R no sea simétrica ni antisimétrica.

3. Sea R una relación sobre A, $R \neq \varnothing$. Demostrar o refutar:

   (i) Si R no es simétrica, entonces R es asimétrica.

   (ii) Si R es asimétrica, entonces R es no es simétrica.

   (iii) Si R es antisimétrica entonces $R - \{(a,a) : a \in A\}$ es asimétrica.

4. Dada una relación de orden parcial R sobre un conjunto A, la relación R' definida por $aR'b \iff (aRb \wedge a \neq b)$ es un orden estricto sobre A, según la parte (1) de la Proposición 2.6.4. Por otro lado, si R es una relación de orden estricto sobre A, la relación $\overline{R}$ definida por $a\overline{R}b \iff (aRb \vee a = b)$ es un orden parcial sobre A, según la parte (2) Proposición 2.6.4. Demostrar que estos procedimientos son mutuamente reversibles, es decir,

   (i) Si R es un orden parcial, entonces $\overline{R'} = R$.

   (ii) Si R es un orden estricto, entonces $\left(\overline{R}\right)' = R$.

5. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y B un conjunto cualquiera. Sobre B^A se define la relación $\preceq$ por medio de

   $$f \preceq g \text{ si y sólo si } f(a) \leq g(a), \text{ para todo } a \in A.$$

   Demostrar que $(B^A, \preceq)$ es un conjunto ordenado.

6. Sea A un conjunto. Una relación $\leq$ sobre A se llama un preorden si $\leq$ es reflexiva y transitiva. Se dice que $(A, \leq)$ un conjunto preordenado, o simplemente, un preorden.

   Supóngase que $(A, \leq)$ es un preoden. Sobre A se define la relación $\sim$ por medio de

   $$a \sim b \text{ si y sólo si } a \leq b \text{ y } b \leq a.$$

   (i) Demostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia sobre A.

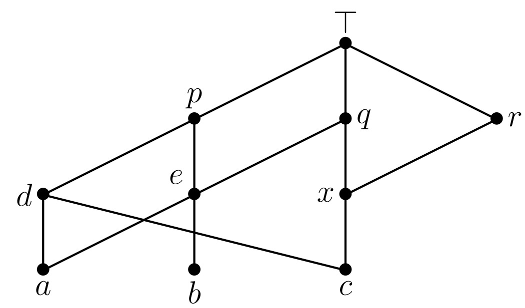
   (ii) Sobre el conjunto cociente $A/\sim$ se define la relación $\preceq$ por medio de

   $$[a] \preceq [b] \text{ si y sólo si } a \leq b.$$

   Demostrar que $\preceq$ que está bien definida, es decir, no depende de los representantes a y b de las clases $[a]$ y $[b]$, respectivamente.

   (iii) Demostrar que $\preceq$ es una relación de orden sobre $A/\sim$.

7. Sea $A = \{a, b, c, d, e, x, p, q, r, \top\}$ el conjunto ordenado según se muestra en el siguiente diagrama:



Hallar los siguientes sups e infs (si existen):

(i) $p \wedge q$. (ii) $a \vee c$. (iii) $a \vee x$. (iv) $a \wedge x$. (v) $d \wedge r$.

(vi) $\sup(\{d, e, x\})$. (vii) $\inf(\{p, q, x\})$. (viii) $\inf(\{d, e, x, r\})$.

8. Sea F es un conjunto de funciones. Demostrar que si $(F, \subseteq)$ es un conjunto totalmente ordenado, entonces $\bigcup F$ es una función.

9. Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \preccurlyeq)$ dos conjuntos parcialmente ordenados y $h : P \longrightarrow Q$. Demostrar que los enunciados (2.6.1) y (2.6.2) son equivalentes.

10. Sea $(A, \leq)$ un conjunto ordenado y sea $f : A \longrightarrow \wp(A)$ la función definida por $f(a) = \{x \in A : x \leq a\}$, para cada $a \in A$. Demostrar que f es un isomorfismo de orden entre $(A, \leq)$ y $(\wp(A), \subseteq)$.

11. Demostrar que si $(P, \leq)$ y $(Q, \preccurlyeq)$ son isomorfos y $\leq$ es un orden lineal, entonces $\preccurlyeq$ es un orden lineal.

12. Demostrar que si h es un isomorfismo de $(P, \leq)$ sobre $(Q, \preccurlyeq)$, entonces h^{-1} es un isomorfismo de $(Q, \preccurlyeq)$ sobre $(P, \leq)$.

13. Demostrar que la compuesta de isomorfismos es un isomorfismo: si f es un isomorfismo entre $(P_1, \leq_1)$ y $(P_2, \leq_2)$ y g es un isomorfismo entre $(P_2, \leq_2)$ y $(P_3, \leq_3)$, entonces $g \circ f$ es un isomorfismo entre $(P_1, \leq_1)$ y $(P_3, \leq_3)$.

14. Sean $(P, \leq)$ y $(Q, \preccurlyeq)$ linealmente ordenados y $h : P \longrightarrow Q$ una función inyectiva. Demostrar que las condiciones (2.6.1) y (2.6.3) son equivalentes.

15. Sean $(A, \leq_1)$ y $(B, \leq_2)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. Sobre el producto cartesiano $A \times B$ se define la relación $\leq$ de la siguiente manera:

$$(a, b) \leq (a', b') \Longleftrightarrow a \leq_1 a' \wedge b \leq_2 b',$$

para todo $a, a' \in A$ y $b, b' \in B$.

(i) Demostrar que $\leq$ es una relación de orden sobre $A \times B$. Este orden se denomina *orden puntual.*

(ii) Demostrar o refutar: Si $(A, \leq_1)$ y $(B, \leq_2)$ son conjuntos linealmente ordenados, entonces $(A \times B, \leq)$ es linealmente ordenado.

(iii) Demostrar o refutar: Si $(A, \leq_1)$ y $(B, \leq_2)$ son conjuntos bien ordenados, entonces $(A \times B, \leq)$ es bien ordenado.

(iv) Sean $C \subseteq A$, $D \subseteq B$, $\sup(C) = a$, $\sup(D) = b$. Demostrar que $\sup(C \times D) = (a, b)$.

16. Sean $(A, \leq_1)$ y $(B, \leq_2)$ dos conjuntos parcialmente ordenados. Sobre el producto cartesiano $A \times B$ se define la relación $\prec$ de la siguiente manera:

$$(a, b) \prec (a', b') \iff a <_1 a' \vee (a = a' \wedge b <_2 b'),$$

para todo $a, a' \in A$ y $b, b' \in B$.

(i) Demostrar que la relación $\prec$ es un orden estricto sobre $A \times B$. El orden estricto $\prec$ (o el orden parcial inducido $\preccurlyeq$) se denomina *orden lexicográfico.*

(ii) Demostrar que si $(A, \leq_1)$ y $(B, \leq_2)$ son bien ordenados, entonces $(A \times B, \preccurlyeq)$ es también un buen orden.