# INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE CONJUNTOS / I-2022

**Andrés Villaveces**

`Laboratorio / Axioma de Elección`

Las siguientes «construcciones matemáticas» pueden requerir, o no requerir, el Axioma de Elección. Investiga cuáles sí lo requieren y cuáles no, y explica por qué.

(1) Definir una *función selectora* $s : \mathcal{F} \to \bigcup \mathcal{F}$ (es decir, $f(A) \in A$ para cada $A \in \mathcal{F}$ ):
- $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ es infinito}\}$,
- $\mathcal{F} = \{[a, b] \subseteq \mathbb{R} : a < b\}$,
- $\mathcal{F} = \{]a, b[ \subseteq \mathbb{R} : a < b\}$,
- $\mathcal{F} = \{U \subseteq \mathbb{R} : U \neq \varnothing, U \text{ abierto}\}$,
- $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{Z} : A \text{ es infinito}\}$,
- $\mathcal{F} = \{Q \subseteq \mathbb{R}^2 : |Q| = 5\}$,
- $\mathcal{F} = \{Q \subseteq \mathbb{R} : |Q| = 5\}$,
- $\mathcal{F} = \{B \subseteq V : B \text{ es base de } V\}$, para un espacio vectorial $V$,
- $\mathcal{F} = \{B \subset \omega_1 : |B| = \aleph_0\}$.

(2) Construir una base para $\mathbb{R}^n$.
(3) Construir una base para un espacio vectorial arbitrario $V$.
(4) Extender un filtro a un ultrafiltro (¡busca las definiciones!).
(5) Construir una función continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.
(6) Construir una función $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ no calculable algorítmicamente (es decir, dado cualquier programa de computador $A$ en cualquier lenguaje que calcule una función $f_A : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se tenga $f \neq f_A$).