Notas de introducción al análisis real

Serafín Bautista
Leonardo Rendón

26 de julio de 2022

Introducción

Estas notas de clase buscan cubrir el contenido del curso Introducción al análisis real, nos basamos fuertemente en los textos de la bibliografía sin pretender con esto que el estudiante no busque otras fuentes de información. Las notas estan divididas en seis capítulos. Al finalizar cada sección hay una prueba corta que llama la atención de ciertos puntos importantes de la lectura. Igualmente pensamos que los ejercicios son parte fundamental en el aprendizaje e invitamos a que se aborden en su totalidad.
En el capítulo uno hacemos una presentación de los números reales desde un punto de vista axiomático, en el capítulo dos se hace un breve recuento de la teoría de conjuntos resaltando únicamente los resultados que serán de utilidad a lo largo del curso, en el capítulo tres se dan todas las herramientas básicas para el manejo de los espacios métricos, en el capítulo cuatro se estudian funciones entre espacios métricos resaltando los homeomorfismos, en el capítulo cinco se estudia el concepto de derivada en el conjunto de los números reales y en el capítulo seis se extiende el concepto de derivada a funciones en varias variables reales y se prueban los teoremas de la función inversa e implícita. Las notas deben entenderse como una guía que busca poner al estudiante en contexto del material del curso mostrando un enfoque personal, sin desconocer la existencia de la excelente bibliografía presente en el mercado. [Apo74, Lim04a, Lim04b, Lim99, Lim03, Ros68, Rud64]

Índice general

Capítulo 1

Sistema de los números reales

Hay varios enfoques para abordar el conjunto de los números reales en estas notas escogemos el enfoque axiomático; es decir, asumimos la existencia del conjunto evitando su construcción.

1.1. Axiomas de cuerpo

Asumimos la existencia de un conjunto $\mathbb{R}$ (que llamaremos de números reales) dotado de dos operaciones binarias cerradas llamadas adición y multiplicación. Esto es, asumimos la existencia de un sistema $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ donde:

$$\begin{array}{cccc} + : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & a+b \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cdot : & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (a,b) & \mapsto & a\cdot b \end{array}$$

Estas operaciones cumplen las siguientes propiedades *(axiomas de cuerpo)*:

(C_1) (Conmutativa) Para todo $x, y \in \mathbb{R}$: $x + y = y + x$ y $x \cdot y = y \cdot x$

(C_2) (Asociativa) Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$: $(x+y)+z = x+(y+z)$ y $(x \cdot y)\cdot z = x\cdot(y\cdot z)$

(C_3) (Distributiva) Para todo $x, y, z \in \mathbb{R}$: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

(C_4) (Existencia de elementos neutros) Existen elementos $0, 1 \in \mathbb{R}$ con $0 \neq 1$, llamados elementos neutros, tales que para todo x en $\mathbb{R}$: $x+0 = 0+x = x$ y $x\cdot 1 = 1\cdot x = x$

(C_5) (Existencia de inversos) Para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $\overline{x} \in \mathbb{R}$, llamado el inverso aditivo de x, tal que $x+\overline{x} = \overline{x}+x = 0$. Además, para todo $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ existe $x^* \in \mathbb{R}$, llamado el inverso multiplicativo de x, tal que $x \cdot x^* = x^* \cdot x = 1$

1.1.1. Algunas consecuencias de los axiomas de cuerpo.

(c_1) Sean $u, v, w \in \mathbb{R}$. Si $u \cdot v = u \cdot w$ con $u \neq 0$, entonces $v = w$. En efecto, $v = 1 \cdot v = (u^* \cdot u) \cdot v = u^* \cdot (u \cdot v) = u^* \cdot (u \cdot w) = (u^* \cdot u) \cdot w = 1 \cdot w = w$

(c_2) Sean $u, v, w \in \mathbb{R}$. Si $u + v = u + w$, entonces $v = w$. En efecto, $v = 0 + v = (\overline{u} + u) + v = \overline{u} + (u + v) = \overline{u} + (u + w) = (\overline{u} + u) + w = 0 + w = w$

(c_3) Los elementos neutros $0, 1$ son únicos. En efecto, si asumimos la existencia de otro elemento neutro multiplicativo, digamos $1^{'}$, tenemos $1 = 1 \cdot 1^{'} = 1^{'}$. Lo propio para el elemento neutro aditivo. Si existe otro elemento neutro, digamos $0^{'}$, tenemos $0 = 0 + 0^{'} = 0^{'}$

(c_4) Los inversos multiplicativos y aditivos son únicos. En efecto, supongamos que $\overline{x}$ y $\widetilde{x}$ son inversos aditivos de x. Entonces $\overline{x} = \overline{x} + 0 = \overline{x} + (x + \widetilde{x}) = (\overline{x} + x) + \widetilde{x} = 0 + \widetilde{x} = \widetilde{x}$. Análogo para el inverso multiplicativo, es decir, supongamos que x^{**} y $x^{\star}$ son inversos multiplicativos de $x \neq 0$, entonces $x^{**} = x^{**} \cdot 1 = x^{**} \cdot (x \cdot x^{\star}) = (x^{**} \cdot x) \cdot x^{\star} = 1 \cdot x^{\star} = x^{\star}$

Definición 1 (División). *Para todo a, b números reales con $b \neq 0$,* $\dfrac{a}{b} := a \cdot b^*$

Observe que $\dfrac{1}{b} = 1 \cdot b^* = b^*$

Definición 2 (Resta). *Para todo a, b números reales,* $a - b := a + \overline{b}$

Observe que $0 - b = 0 + \overline{b} = \overline{b}$.

De ahora en adelante, vamos a denotar el inverso aditivo $\overline{x}$ de x como $-x$, y el inverso multiplicativo x^* de $x \neq 0$ como x^{-1}.

(c_5) Para todo $a \in \mathbb{R}$: $a \cdot 0 = 0$. En efecto, $(a \cdot 0) + (a \cdot 0) = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 = (a \cdot 0) + 0$, entonces $a \cdot 0 = 0$

(c_6) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.

(c_7) Para todo $a \in \mathbb{R}$: $-(-a) = a$. En efecto, como $-a + (-(-a)) = 0 = -a + a$, entonces $-(-a) = a$

(c_8) Para todo $a, c \in \mathbb{R}$: $-(a + c) = -a - c$.

(c_9) Para todo $a, c \in \mathbb{R}$ con $c \neq 0$, $a \neq 0$: $(a \cdot c)^{-1} = a^{-1} \cdot c^{-1}$.

(c_{10}) Para todo $a \in \mathbb{R}$: $\overline{a} = \overline{1} \cdot a$. En efecto, como $a + \overline{a} = 0 = 0 \cdot a = (1 + \overline{1}) \cdot a = (1 \cdot a) + (\overline{1} \cdot a) = a + (\overline{1} \cdot a)$, entonces $\overline{a} = \overline{1} \cdot a$

(c_{11}) Para todo $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$, $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{(a \cdot d) + (b \cdot c)}{b \cdot d}$$

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}, \quad \text{si además} \quad c \neq 0.$$

Sean $a, b \in \mathbb{R}$. De ahora en adelante vamos denotar $a \cdot b = ab$.

1.2. Axiomas de orden

Existe un subconjunto $\mathbb{R}^+$ de $\mathbb{R}$ tal que:

(O_1) Para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$ se tiene $x + y \in \mathbb{R}^+$ y $xy \in \mathbb{R}^+$.

(O_2) Para todo $x \in \mathbb{R}$ una y solo una de las siguientes opciones es verdadera: $x \in \mathbb{R}^+$, $x = 0$, ó $\overline{x} \in \mathbb{R}^+$.

Los elementos a tales que $a \in \mathbb{R}^+$ serán llamados *reales positivos*.

Definición 3 *Para $a, b \in \mathbb{R}$ definimos:*

$$\begin{aligned} &a < b \ \textit{si} \ \ b - a \in \mathbb{R}^+, \\ &a \leq b \ \textit{si} \ \ b - a \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}, \\ &a > b \ \textit{si} \ \ b < a, \\ &a \geq b \ \textit{si} \ \ b \leq a. \end{aligned}$$

Observación 1 *De la anterior definición se observa que $a \in \mathbb{R}^+$ si y solo si $a > 0$.*

1.2.1. Algunas consecuencias de los axiomas de orden

(o_1) (Tricotomía) Si $a, b \in \mathbb{R}$, entonces una y solo una de las siguientes opciones es verdadera: $a > b$, $a = b$, ó $a < b$.

(o_2) (Transitividad) Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$.

(o_3) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si $a > b$ y $c \geq d$, entonces $a + c > b + d$.

(o_4) Sean $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Si $a > b > 0$ y $c \geq d > 0$, entonces $ac > bd$. En efecto. como $c - d \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, luego $b(c - d) \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. Además, $c(a - b) \in \mathbb{R}^+$. Entonces $(bc - bd) + (ac - bc) \in \mathbb{R}^+$, es decir, $ac - bd \in \mathbb{R}^+$.

(o_5) Sean $a, c \in \mathbb{R}$. Si $a > 0$ y $c > 0$, entonces $\overline{a}\,\overline{c} > 0$, $\overline{a}c < 0$ y $\overline{a} + \overline{c} < 0$.

(o_6) Para todo $a \in \mathbb{R}$ se tiene $(a^2 \geq 0)$. Además $a^2 = 0$ si y solo si $a = 0$. De ésto se sigue que $1 > 0$.

(o_7) Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $a > 0$, entonces $\dfrac{1}{a} > 0$.

(o_8) Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a > b > 0$, entonces $\dfrac{1}{a} < \dfrac{1}{b}$.

(o_9) Dados $a, b \in \mathbb{R}$, si para todo $\varepsilon > 0$ se tiene $a < b + \varepsilon$, entonces $a \leq b$. En efecto: supongamos que $a > b$ y tomemos $\varepsilon = \dfrac{a-b}{2}$. Luego si $a < b + \varepsilon$, entonces $a < b + \dfrac{a-b}{2}$, entonces $a < \dfrac{b+a}{2} < \dfrac{2a}{2} = a$ y por lo tanto $a < a$ lo cual es una contradicción.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, usaremos las siguientes notaciones para representar tipos especiales de conjuntos de números reales, llamados *intervalos*:

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Quiz 1 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.*

1. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$. Si $ab = ac$, entonces $b = c$.*
2. *Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que $a > b > 0$ y $c \geq d$ con $c > 0$. Entonces $ac > bd$.*
3. *Sea $a \in \mathbb{R}$. Si $a^3 > 0$, entonces $a > 0$.*
4. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a^2 + b^2 = 0$, entonces $a = b = 0$.*
5. *Sean $a, b \in \mathbb{R}$. Si $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, entonces $a = 0$ ó $b = 0$.*
6. $\{x \in \mathbb{R} : \dfrac{4}{x} - 3 > \dfrac{2}{x} - 7\} = (-\infty, -\dfrac{1}{2}) \cup (0, \infty)$.
7. $\{x \in \mathbb{R} : (x-3)(x-5) > 0\} = (-\infty, -5) \cup (3, \infty)$.

1.3. Los números enteros y racionales

Definición 4 *Un conjunto* $S \subset \mathbb{R}$ *es un* conjunto inductivo *si:*

i) $1 \in S$,

ii) Si $x \in S$, *entonces* $x + 1 \in S$.

Ejemplo 1 *Los conjuntos numéricos* $\mathbb{R}$ *y* $\mathbb{R}^+$ *son conjuntos inductivos.*

Definimos

$$\mathbb{Z}^+ := \bigcap_{S \in \mathcal{Q}} S,$$

donde $\mathcal{Q} := \{S \subset \mathbb{R} : S \text{ es inductivo }\}$.

El conjunto $\mathbb{Z}^+$ es inductivo, además es el menor conjunto inductivo en el siguiente sentido: si S es un conjunto inductivo, entonces $\mathbb{Z}^+ \subset S$. Este conjunto es el conjunto de los *números enteros positivos* o *números naturales* y se acostumbra también denotarse por $\mathbb{N}$.

Principio de inducción: Si $S \subset \mathbb{Z}^+$ y S es inductivo, entonces $S = \mathbb{Z}^+$. En efecto, como S es inductivo, entonces $\mathbb{Z}^+ \subset S$. Pero por hipótesis $S \subset \mathbb{Z}^+$, luego $S = \mathbb{Z}^+$.

El principio de inducción matemáticas se usa de la siguiente manera: sea $P(n)$ un proposición donde $n \in \mathbb{N}$ y tome el conjunto $S = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es verdadero}\}$. Si $P(1)$ es verdadero (es decir, $1 \in S$) y asuma que $P(n)$ es verdadero (es decir, $n \in S$) la cual es la hipótesis de inducción, entonces muestre que $P(n+1)$ es verdadero (es decir, $(n+1) \in S$). Por lo tanto $S = \mathbb{N}$ y así $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 2 *Demostrar que para todo* $n \in \mathbb{N}$, $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$. *Sea* $S = \{n \in \mathbb{N} : 1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2\}$. *Tenemos que* $1 \in S$, *es decir* $1 = 2(1)-1 = 1^2$, *luego la afirmación es cierta para* $n = 1$. *Hipótesis de inducción: suponer que* $n \in S$ *(es decir,* $1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = n^2$*). Debemos probar que* $(n + 1) \in S$. *En efecto,*

$$\begin{aligned}
1 + 3 + \cdots + (2n-1) + (2(n+1) - 1) &= [1 + 3 + \cdots + (2n-1)] + (2(n+1) - 1) \\
&= n^2 + (2(n+1) - 1) \text{ (hipótesis de inducción)} \\
&= n^2 + 2n + 2 - 1 \\
&= n^2 + 2n + 1 \\
&= (n+1)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $(n + 1) \in S$. *Así, por el principio de inducción tenemos que* $S = \mathbb{N}$.

Definición 5 *Definimos como* $\mathbb{Z}^- := \{a \in \mathbb{R} \mid -a \in \mathbb{Z}^+\}$, *el conjunto de los* números enteros negativos *y como* $\mathbb{Z} := \mathbb{Z}^- \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^+$ *el conjunto de* números enteros.

Proposición 1 (Principio del buen orden). *Todo subconjunto no vacío de números enteros positivos tiene un elemento mínimo. Esto es, si $A \subset \mathbb{Z}^+$ y $A \neq \emptyset$, entonces existe $y \in A$ tal que $y \leq x$ para todo $x \in A$.*

Demostración. Definimos $B = \{y \in \mathbb{Z}^+ : y \leq x, \text{ para todo } x \in A\}$.

i) $1 \in B$ pues $1 \leq x$ para todo $x \in A \subset \mathbb{Z}^+$.

ii) Existe y número entero positivo tal que $y \notin B$, dado que $A \neq \emptyset$ luego existe $z \in A$ y por lo tanto $y = z + 1 \notin B$.

iii) Existe un único $h \in B$ tal que $h+1 \notin B$. Probemos la existencia por contradicción. Supongamos que para todo $h \in B$ tenemos que $h+1 \in B$. Entonces por el principio de inducción tenemos que $B = \mathbb{Z}^+$ lo cual es una contradicción. Probemos ahora la unicidad. Supongamos que existen h_1, h_2 con $h_1 < h_2$ tales que $h_1 \in B$ y $h_1+1 \notin B$, por otro lado $h_2 \in B$ y $h_2 + 1 \notin B$. Como $h_1 < h_2$, entonces $h_1 + 1 \leq h_2$ (¿por qué?). El conjunto B tiene la propiedad de que si $h \in B$, entonces todos los enteros positivos menores o iguales a h también están en B. Luego $h_1 + 1 \in B$ lo cual es una contradicción.

iv) Veamos que $h \in A$. En efecto, si $h \notin A$, entonces para todo $x \in A$ tenemos $h < x$. Entonces $h + 1 \leq x$ implica que $h + 1 \in B$ lo cual es una contradicción.

Esto prueba la proposición. ■

Teorema 1 (Segunda forma del principio de inducción). *Sea $X \subset \mathbb{N}$. Si X tiene las siguientes propiedades:*

1. $1 \in X$ *y*

2. Dado $n \in \mathbb{N}$, *si* $1, 2, ..., n \in X$ *entonces* $n + 1 \in X$;

entonces $X = \mathbb{N}$.

Demostración. Sea $Y = \mathbb{N} \setminus X$. Debemos probar que $Y = \emptyset$. Supongamos que $Y \neq \emptyset$. Como $1 \in X$ y Y posee un elemento mínimo m, sea $m = n + 1 = \text{mín}(Y)$. Por lo tanto, los elementos anteriores al mínimo no están en Y, es decir, están en X. Así dado $1 \leq k \leq n$, $k \in X$, y por hipótesis de inducción $(n + 1) \in X$, lo cual contradice el ítem 2. de las hipótesis. ■

Teorema 2 (Tercera forma del principio de inducción). *Sean $X \subset \mathbb{N}$ y $k_0 \in \mathbb{N}$. Si X tiene las siguientes propiedades:*

1. $k_0 \in X$, *y*

2. Dado $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $k_0 \leq n$, *si* $k_0, k_0 + 1, ..., n \in X$ *entonces* $n + 1 \in X$;

entonces $\{n \in \mathbb{N} : k_0 \leq n\} \subset X$.

Demostración. La demostración es análoga a la del segundo principio. ■

Si n y d son enteros y si $n = cd$ para algún entero c, decimos que d es un *divisor* de n o que n es un *múltiplo* de d, lo cual se denota por $d|n$. Un entero $n > 1$ es *primo* si sus únicos divisores enteros positivos son 1 y n.

Proposición 2 *Cada entero $n > 1$ es primo o producto de primos.*

Demostración. La demostración se hará por inducción usando su tercera forma: Para $n = 2$ es evidente que vale el enunciado del teorema. Supongamos que el enunciado del teorema es válido para k con $2 \leq k \leq n$ y veamos que vale para $n+1$. Si $n+1$ no es primo, existen $d, c \in \mathbb{N}$ con $d < n+1$ y $c < n+1$ tales que $n+1 = cd$, y usando la hipótesis de inducción sobre d, c se concluye que $n+1$ es producto de primos. ■

Proposición 3 *Cada par de enteros a y b admiten un divisor común d de la forma $d = ax + by$ con $x, y \in \mathbb{Z}$, y cada divisor común de a y b divide a d.*

Demostración. Si $a = b$ el teorema vale. En efecto, coloque $x = 1, y = 0$ y $d = a$. Sin pérdida de generalidad supongamos que $a > b$. Consideremos el caso en que $b \geq 0$, y usemos la segunda forma de inducción para $n = a + b$. Si $n = 1$, entonces $a = 1$ y $b = 0$, luego el resultado del teorema se tiene. Supongamos que el teorema vale para todo k con $1 \leq k \leq n$. Sean $a, b \in \mathbb{Z}$ tales que $n + 1 = a + b$. Como $a - b$ y b son menores que $n + 1$, existe d divisor común de $a - b$ y b (hipótesis de inducción) de la forma $d = x(a-b) + y(b)$ con $x, y \in \mathbb{Z}$. Ahora, como $d|(a-b)$ y $d|b$, entonces $d|a$ (ya que d divide cualquier combinación de $a - b$ y b). Así, $d|a$, $\quad d|b$, y $d = ax + b(y - x)$. Sea m un divisor de a y b, luego $m|ax + b(y - x)$, es decir, $m|d$. En el caso que a sea negativo trabajamos con $-a$ y lo propio para b. ■

Si d es un divisor común de a y b de la forma $d = ax + by$ con $x, y \in \mathbb{Z}$, entonces $-d = a(-x) + b(-y)$. De estos dos divisores comunes el no negativo lo denominaremos *máximo común divisor* de a y b y lo denotamos por $\text{mcd}(a, b)$.

Lema 1 Lema de Euclides *Sean $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Si $a|bc$ y $mcd(a, b) = 1$, entonces $a|c$.*

Demostración. Como $a|bc$, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $bc = na$. Como $mcd(a, b) = 1$, existen $x, y \in \mathbb{Z}$ tales que:

$$\begin{aligned} 1 &= ax + by \\ c &= acx + bcy \\ c &= acx + nay = a(cx + ny) \end{aligned}$$

Esto significa que $a|c$. ■

Corolario 1 *Sean $a, b, p \in \mathbb{Z}$ con p primo. Si $p|ab$, entonces $p|a$ ó $p|b$. En general, si p es un número primo y $p|a_1 \cdots a_n$, entonces $p|a_i$ para algún i.*

Teorema 3 *Cada entero $n > 1$ es primo o es producto de números primos y esta descomposición es única, salvo el orden.*

Demostración. Por la proposición 2 sabemos que existe la descomposición. Veamos la unicidad por inducción. Si $n = 2$, es evidente puesto que 2 es primo. Supongamos que es válido para $2 \leq k \leq n$ y veamos que es válido para $n + 1$.

1. Si $n + 1$ es primo, se cumple.

2. Supongamos que $n + 1$ no es primo y que existen dos descomposiciones de $n + 1$ en factores primos, es decir, $q_1 \cdots q_s = n + 1 = p_1 \cdots p_r$ con cada p_i y q_j números primos. Veamos que $r = s$ y que cada p_i es igual a algún q_j. Como $q_1 \cdots q_s = p_1 \cdots p_r$, entonces $p_1 | q_1 \cdots q_s$. Luego $p_1 | q_j$ para algún q_j, y así $p_1 = q_j$. Reindexando (haciendo $q_1\prime := q_j$, $\ q_j\prime := q_1\ $ y $q_i\prime := q_i$ para $i \neq 1, j$) tenemos: $p_1 q_2\prime \cdots q_s\prime = p_1 \cdots p_r$, por lo tanto $\dfrac{n+1}{p_1} = q_2\prime \cdots q_s\prime = p_2 \cdots p_s$. Pero $\dfrac{n+1}{p_1} \leq n$, aplicando la hipótesis de inducción obtenemos lo deseado.

De esta forma queda probado el teorema. ■

Definimos $\mathbb{Q} := \left\{ \dfrac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$, el conjunto de los *números racionales*. Este conjunto satisface los axiomas de *orden* y de *campo*. Además es un conjunto *inductivo*.

Si $a \in \mathbb{R}$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, notamos $a^n = a \cdot ... \cdot a$ (n veces a), $a^0 = 1$ (si $a \neq 0$) y $a^{-n} = (a^n)^{-1}$ (si $a \neq 0$).

1.4. Valor absoluto, existencia de raíces cuadradas y números irracionales

Definición 6 *Sea $a \in \mathbb{R}$. Definimos el valor absoluto de a como*

$$|a| = \begin{cases} a & si\ a \geq 0 \\ -a & si\ a < 0 \end{cases}$$

Propiedades:

(i) Para todo $a \in \mathbb{R}$, $\quad |a| \geq 0$. Además, $|a| = 0$ si y solo si $a = 0$.

(ii) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad |ab| = |a||b|$.

(iii) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$ con $b \neq 0$, $\quad \left| \dfrac{a}{b} \right| = \dfrac{|a|}{|b|}$.

(iv) Para todo $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad |a + b| \leq |a| + |b|$. (Desigualdad triangular)

(v) Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $\varepsilon > 0$, $\quad |x| < \varepsilon$ si y solo si $-\varepsilon < x < \varepsilon$.

(vi) Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $\varepsilon > 0$, $\quad |x| > \varepsilon$ si y solo si ($\varepsilon < x\ $ ó $\ x < -\varepsilon$).

Definición 7 *(Cota superior y sup).*

- *Decimos que* $a \in \mathbb{R}$ *es una* cota superior *para* $S \subset \mathbb{R}$ *si para todo* $x \in S$ *se tiene* $x \leq a$.
- *El conjunto* $S \subset \mathbb{R}$ *es* acotado superiormente *si existe* $a \in \mathbb{R}$ *cota superior de* S.
- *Diremos que* $y \in \mathbb{R}$ *es el* supremo *de* S*, notado por* $\sup(S)$ *si:*
    1. *y es cota superior de S.*
    2. *Si z es cota superior de S, entonces $y \leq z$.*

Definición 8 *(Cota inferior e inf).*

- *Decimos que* $a \in \mathbb{R}$ *es una* cota inferior *para* $S \subset \mathbb{R}$ *si para todo* $x \in S$ *se tiene* $x \geq a$.
- *El conjunto $S \subset \mathbb{R}$ es acotado inferiormente si existe $a \in \mathbb{R}$ cota inferior de S.*
- *Diremos que* $y \in \mathbb{R}$ *es el* ínfimo *de* S*, notado por* $\inf(S)$ *si:*
    1. *y es cota inferior de S.*
    2. *Si z es cota inferior de S, entonces $y \geq z$.*

Proposición 4 *Si existe* $z = \sup(S)$*, entonces:*

(i) $\sup(S)$ *es único.*

(ii) Para todo $\varepsilon > 0$ *existe* $y \in S$ *tal que* $\sup(S) - \epsilon < y$.

Demostración. La segunda afirmación puede ser constatada por reducción al absurdo: supongamos que existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $y \in S$ se tiene $\sup(S) - \epsilon \geq y$. Luego $\sup(S) - \epsilon$ es también una cota superior del conjunto S, lo cual es un absurdo. ∎

Axioma 1 (de Completez) *Todo subconjunto no vacío de números reales acotado superiormente tiene* sup.

Consecuencias:

1. Si $S \subset \mathbb{R}$, $S \neq \emptyset$ y S acotado inferiormente, entonces S tiene ínf.

2. Los números naturales no son acotados superiormente, esto es, para todo $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > x$.

   Demostración. Por reducción al absurdo. Supongamos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n \leq x$. Luego existe $a = \sup(\mathbb{N})$. Como para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n + 1 \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \leq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De esto, se obtiene que $n \leq a - 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, con lo que $a - 1$ sería una cota superior de $\mathbb{N}$ menor que a lo cual es una contradicción. ∎

3. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $nx > y$.

4. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$.

   Los ítems 2. , 3. y 4. son equivalentes, y se les conoce como la **propiedad Arquimidiana** de los números reales.

5. Par todo $x \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $n \leq x < n + 1$.

   Demostración. Dado $x \in \mathbb{R}$, sea $S_x = \{n \in \mathbb{Z} : x < n\}$.

   (i) Supongamos que $x > 0$. Como $S_x \neq \emptyset$ y $S_x \subset \mathbb{N}$, por el *Principio del buen orden*, existe el mínimo de S_x, que denotaremos por m, tal que $x < m$. Entonces $x \geq m - 1$. Tomando $n = m - 1$, $n \leq x < n + 1$.

   (ii) Si $x = 0$, es inmediato.

   (iii) Si $x < 0$, entonces por (i) existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq -x < m + 1$. Así, $-(m + 1) < x \leq -m$. En este caso, si $x = -m$ tome $n = -m$, ó si $x < -m$ tome $n = -(m + 1)$.

   Con esto queda probado la afirmación. ∎

6. Para todo $x \in \mathbb{R}$ y todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que $\dfrac{n}{N} \leq x < \dfrac{n+1}{N}$.

7. Sean $A, B \subset \mathbb{R}$. Se define $A + B = \{a + b : a \in A \wedge b \in B\}$. Si existen $\sup(A)$ y $\sup(B)$, entonces $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

   Demostración. Dados $a \in A$ y $b \in B$, entonces $a \leq \sup(A)$ y $b \leq \sup(B)$. Por lo tanto $a + b \leq \sup(A) + \sup(B)$, es decir, $\sup(A) + \sup(B)$ es cota superior de $A + B$, y de ahí que $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.

   Dado $\varepsilon > 0$ existen $a \in A$ y $b \in B$ tales que $\sup(A) - \frac{\varepsilon}{2} < a$ y $\sup(B) - \frac{\varepsilon}{2} < b$. Así, $\sup(A) + \sup(B) - \varepsilon < a + b \leq \sup(A + B)$, esto es, $\sup(A) + \sup(B) < \sup(A + B) + \varepsilon$. Entonces $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$. ∎

8. Sean $A, B \subset \mathbb{R}^+$ no vacíos y acotados superiormente. Se define $A \cdot B := \{ab : a \in A \wedge b \in B\}$. Entonces $\sup(A \cdot B) = \sup(A)\ \sup(B)$ e $\inf(A \cdot B) = \inf(A)\ \inf(B)$.

   Demostración. Como $a \leq \sup(A)$ para todo $a \in A$, y $b \leq \sup(B)$ para todo $b \in B$, entonces $ab \leq \sup(A) \sup(B)$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. Luego $A \cdot B$ es acotado superiormente y $\sup(A \cdot B) \leq \sup(A) \sup(B)$.

   Ahora $ab \leq \sup(A \cdot B)$ para todo $a \in A$ y todo $b \in B$. Fije cualquier $b \in B$. Entonces $a \leq \dfrac{\sup(A \cdot B)}{b}$ para todo $a \in A$.

Por lo tanto, $\sup(A) \leq \dfrac{\sup(A\cdot B)}{b}$ para cada $b \in B$. De lo anterior se sigue que $b \leq \dfrac{\sup(A\cdot B)}{\sup(A)}$ para todo $b \in B$, y por consiguiente $\sup(B) \leq \dfrac{\sup(A\cdot B)}{\sup(A)}$.

Para el ínfimo, se razona de manera análoga. ■

9. Si $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, entonces existe $q \in \mathbb{Q}$ tal que $a < q < b$.

   Demostración. Como $a < b$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(b-a)n > 1$ (por ítem 3.). Tomemos $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m-1 \leq na < m$ (por ítem 5.). Así, $na < m \leq na+1 < nb$, luego $a < \dfrac{m}{n} < b$. ■

Definición 9 *Dado $a \in \mathbb{R}$ no negativo, decimos que b es una* raíz cuadrada *de a si $b^2 = a$.*

Proposición 5 *Dada $a \in \mathbb{R}^+$, existe un único $y \in \mathbb{R}^+$ tal que $y^2 = a$.*

Demostración. Sea $S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^2 \leq a\}$. Observe que $S \neq \emptyset$ ya que $0 \in S$. El conjunto S es acotado superiormente por $\max\{1,a\}$. En efecto: primero observe que $(\max\{1,a\})^2 \geq a \cdot 1 = a$. Si $\max\{1,a\}$ no fuese cota superior de S, existe $z \in S$ tal que $0 < \max\{1,a\} < z$, entonces $a \leq (\max\{1,a\})^2 < z^2$ lo cual es una contradicción.

Como S es un conjunto no vacío y es acotado superiormente, por el *Axioma de completez* existe $y = \sup(S)$. Además, $y > 0$ ya que $0 < \min\{1,a\} \in S$. En efecto, $(\min\{1,a\})^2 \leq a \cdot 1 = a$.

Veamos que $y^2 = a$. Dado $0 < \varepsilon < y$, existe $s \in S$ tal que $0 < y - \varepsilon < s$. Luego

$$\begin{aligned} (y-\varepsilon)^2 &< s^2 \\ &\leq a \\ &< (y+\varepsilon)^2 \text{ (pues } y+\varepsilon \notin S) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$y^2 - 2\varepsilon y + \varepsilon^2 < a < y^2 + 2\varepsilon y + \varepsilon^2 \qquad (*)$$

Como $y - \varepsilon > 0$, entonces $0 < y - \varepsilon < y < y + \varepsilon$. Luego,

$$\begin{gathered} (y-\varepsilon)^2 < y^2 < (y+\varepsilon)^2 \\ y^2 - 2\varepsilon y + \varepsilon^2 < y^2 < y^2 + 2\varepsilon y + \varepsilon^2. \qquad (**) \end{gathered}$$

Entonces multiplicando por -1 la relación (**) y sumando miembro a miembro con (*) se obtiene:

$$\begin{gathered} -4\varepsilon y < a - y^2 < 4\varepsilon y \\ |a - y^2| < 4\varepsilon y = \delta. \end{gathered}$$

Así, $0 \le |a - y^2| < \delta$ para todo $\delta > 0$, por lo tanto $a = y^2$. ■

Si $a > 0$, la única raíz cuadrada positiva de a la denotaremos por $\sqrt{a}$.

Proposición 6 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Demostración. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. Es decir, existen $p, q \in \mathbb{Z}$ con $q \neq 0$ tales que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Podemos suponer que $\operatorname{mcd}(p,q) = 1$. Así, $2 = \frac{p^2}{q^2}$, esto es, $2q^2 = p^2$ y por lo tanto p^2 es par (múltiplo de 2) y de esto se sigue que p es par (¿por qué?). Luego existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $p = 2k$. Luego $2q^2 = 4k^2$ y así q^2 es par. Por tanto lo es también q lo cual es una contradicción. ■

Definición 10 *Definimos* $\mathbb{I} := \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, *el conjunto de los* números irracionales.

Vamos a generalizar ahora la idea de raiz cuadrada

Definición 11 *Dado* $a \in \mathbb{R}$ *no negativo y* $n \in \mathbb{N}$, *decimos que* b *es una* raíz n-ésima *de* a *si* $b^n = a$.

Lema 2 *Dados* $x > 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$ *existe un número real positivo* a_n *(el cual depende de* x*) tal que para todo* $0 < \delta < 1$, $(x+\delta)^n \le x^n + a_n\delta$

Demostración. Haremos la demostración usando inducción.

Para $n = 1$ el resultado se tiene con $a_1 = 1$.

Asuma válido para n (hipótesis de inducción). Veamos que también es válido para $n+1$. En efecto,

$$\begin{aligned}
(x+\delta)^{n+1} &= (x+\delta)(x+\delta)^n \\
&\le (x^n + a_n\delta)(x+\delta) \text{ (hipótesis de inducción)} \\
&= x^{n+1} + x^n\delta + a_n\delta x + a_n\delta^2 \\
&= x^{n+1} + (x^n + a_n x + a_n\delta)\delta \\
&< x^{n+1} + (a_n x + x^n + a_n)\delta \quad \textit{(ya que } 0 < \delta < 1)
\end{aligned}$$

Hagamos $a_{n+1} = a_n x + x^n + a_n$, y con esto se prueba el resultado. ■

Teorema 4 *Dado* $a > 0$ *y* $n \in \mathbb{N}$, *existe un único* $b > 0$ *tal que* $b^n = a$.

Demostración. Definamos $X = \{x \in \mathbb{R} : x \ge 0,\ x^n \le a\}$. Tenemos que $X \neq \emptyset$, pues $0 \in X$. Además X es acotado superiormente, ya que si $a \le 1$, 1 es cota superior de X; y si $a > 1$, a es cota superior de X. Sea $b = \sup(X)$. Veamos que $b^n = a$. En efecto, caso contrario tenemos $b^n < a$ ó $b^n > a$.

Si $b^n < a$, por el lema anterior, tomando $0 < \delta < \min\left\{\frac{a - b^n}{a_n}, 1\right\}$ tenemos que $(b+\delta)^n < b^n + a_n\delta \le a$. Esto es una contradicción, ya que por un lado tendríamos que $b + \delta \in X$ y por otro $b + \delta > b$.

Si $b^n > a$, dado $0 < \delta < b$ tenemos que $(b-\delta)^n = b^n\left(1-\frac{\delta}{b}\right)^n \geq b^n\left(1-n\frac{\delta}{b}\right)$ $= b^n - nb^{n-1}\delta$ (por la desigualdad de Bernoulli). Si tomamos $0 < \delta < \dfrac{b^n-a}{nb^{n-1}}$ tenemos que $b^n - nb^{n-1}\delta > a$ y por tanto $(b-\delta)^n > a$. Esto es otra contradicción, ya que dado $x \in X$, $x^n \leq a < (b-\delta)^n$. ■

Quiz 2 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.*

1. *Si* $a, b \in \mathbb{Q}$ *con* $(a \neq -b)$ *y* $c \in \mathbb{I}$ *entonces* $(a+b)c \in \mathbb{I}$.
2. *Si* $c, d \in \mathbb{I}$ *entonces* $c + d \in \mathbb{I}$.
3. *Si* $c, d \in \mathbb{I}$ *entonces* $cd \in \mathbb{I}$.
4. *Sean* $A, B \subset \mathbb{R}$ *no vacíos y acotados superiormente. Si* $A \subset B$, *entonces* $\sup(A) \leq \sup(B)$.
5. *Sean* $A, B \subset \mathbb{R}$ *no vacíos y acotados inferiormente. Si* $A \subset B$, *entonces* $\inf(A) \leq \inf(B)$.
6. *Existen* $a, b \in \mathbb{R}$ *tales que para todo* $\varepsilon > 0$, $a + \varepsilon < b$.
7. *Sean* $a, b \in \mathbb{R}$. *Entonces* $\max\{a,b\} = \dfrac{a+b+|b-a|}{2}$ *y* $\min\{a,b\} = \dfrac{a+b-|b-a|}{2}$.
8. $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 1

1. *Demuestre todos los resultados que no fueron probados en las lecciones.*
2. *Muestre por inducción que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$ *y que* $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
3. *Dados* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$, *vea que existe* $c \in \mathbb{I}$ *tale que* $a < c < b$.
4. *Dados* $A, B \subset \mathbb{R}^+$ *tales que* $\sup(A)$ *existe e* $\inf(B) > 0$, *vea que* $\sup\left(\dfrac{A}{B}\right) = \dfrac{\sup(A)}{\inf(B)}$, *donde* $\dfrac{A}{B} := \left\{\dfrac{a}{b} : a \in A \wedge b \in B\right\}$.
5. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *no vacío y acotado inferiormente. Vea que* $\sup(-A) = -\inf(A)$.
6. *Dados* A, B *conjuntos de números reales positivos, vea que* $\inf(A \cdot B) = \inf(A)\ \inf(B)$.
7. *Sean* $m, n \in \mathbb{N}$. *Si* $m < n$ *entonces existe* $p \in \mathbb{N}$ *tal que* $m + p = n$.
8. *Dados* $a, b \in \mathbb{Z}$ *con* $a \neq 0$, *muestre que existen enteros* q *(cociente) y* r *(residuo) únicos tales que* $b = qa + r$ *con* $0 \leq r < |a|$

9. *Encuentre el máximo común divisor de los números* $-765, 225$ *y expréselo como una combinación lineal de los números dados.*

10. *Sea* $n \in \mathbb{N}$. *Vea que:*

    (1) *Si* $2^n - 1$ *es primo, entonces* n *es primo.*

    (2) *Si* $2^n + 1$ *es primo, entonces* $n = 2^k$ *para algún* $k \in \mathbb{N}$.

11. *Muestre que el conjunto de los números primos no es acotado superiormente.*

12. *Ver que para todo* $x \in \mathbb{R}$ *y todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $r \in \mathbb{Q}$ *tal que* $x - \varepsilon < r < x + \varepsilon$.

13. *Muestre que si* $n \in \mathbb{Z}^+$ *y* $n \neq k^2 \, \forall n \in \mathbb{N}$ *entonces* $\sqrt{n} \in \mathbb{I}$

14. *Sea* $L = \{q \in \mathbb{Q} : q \geq 0 \text{ y } q^2 \leq 2\}$. *Muestre que* $\sup(L) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. *Luego* $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ *satisface los axiomas de orden y campo, mas no el de completez.*

15. *Sean* $a, b \in \mathbb{Q}^+$. *Entonces,* $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in \mathbb{Q}$ *si y solo si* $\sqrt{a} \in \mathbb{Q}$ *y* $\sqrt{b} \in \mathbb{Q}$.

16. *Dado* $a > 0$, $\dfrac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ $(p \in \mathbb{Z}$ *y* $q \in \mathbb{N})$, *definimos* $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$. *Demuestre que:* *Dados* $r, s \in \mathbb{Q}$, $a^r a^s = a^{r+s}$ *y* $(a^r)^s = a^{rs}$.

17. *Encuentre un racional* r *tal que su expresión decimal sea* $0,33444\ldots$.

18. *Dados* $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *y* $m, n \in \mathbb{Z}$, *muestre que:*

    (1) $a^n a^m = a^{n+m}$

    (2) $(ab)^n = a^n b^n$

    (3) $(a^m)^n = a^{mn}$

    (4) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

    Sugerencia: Use inducción.

19. *Para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $x \geq -1$, $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ *(Desigualdad de Bernoulli).*

20. *Si* $P(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *con* $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$ *y* $P(\frac{r}{s}) = 0$ *(* $r, s \in \mathbb{Z}$, $(r, s) = 1$ *y* $s \neq 0$*) entonces* $r | a_0$ *y* $s | a_n$

Capítulo 2

Nociones básicas de conjuntos

En este capítulo damos algunas nociones básicas de conjuntos, centrando el interés en los conjuntos enumerables y en los no enumerables.

2.1. Conjuntos

Definición 12 *Dos conjuntos $A, B \subset \mathbb{R}$ se dicen* equipotentes *si existe una función biyectiva de A en B. Esto es denotado por $A \sim B$.*

Teorema 5 (Cantor-Bernstein-Schröder) *Sean A y B conjuntos. Si existen $f : A \to B$ y $g : B \to A$ funciones inyectivas entonces $A \sim B$*

Demostración. Definamos

$$A_0 = A - g(B),\ A_{n+1} = g(f(A_n)), \forall n \geq 1 \text{ y } A_\infty = \cup_{n\geq 0} A_n.$$

Mostremos que

$$\begin{aligned} h : A \quad &\to \quad B \\ x \mapsto \quad &h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in A_\infty \\ g^{-1}(x) & \text{si } x \in A - A_\infty \end{cases} \end{aligned}$$

es una función biyectiva.
Veamos que h es inyectiva. Supongamos que $h(x) = h(y)$; si $x, y \in A_\infty$ entonces $x = y$ por la inyectividad de f, si $x, y \in A - A_\infty$ entonces $x = y$ por la inyectividad de g^{-1}, si $x \in A_\infty$ y $y \in A - A_\infty$ entonces $x \in A_n$ para algún $n \in \mathbb{N}$ luego $f(x) = g^{-1}(y)$ y por lo tanto $y = g(f(x))$ es decir $y \in g(f(A_n)) = A_{n+1}$ (absurdo).
Veamos que h es sobreyectiva. Sean $z \in B$ y $x = g(z)$. Si $x \in A - A_\infty$ entonces $h(x) = g^{-1}(x) = z$, si $x \in A_\infty$ entonces $x \in A_n$ para algún n, con $n \geq 0$, luego $x = g(f(w))$ para algún $w \in A_{n-1}$ y $z = g^{-1}(x) = f(w) = h(w)$.
∎

2.2. Conjuntos finitos

Definición 13 *Un conjunto S es* finito *cuando $S = \phi$ ó $S \sim I_n$, donde $I_n = \{1, \cdots, n\}$.*

Proposición 7 *Si A es subconjunto propio de I_n, entonces no existe una biyección $f : A \to I_n$.*

Demostración. Supongamos que existen A subconjunto propio de I_n y una biyección $f : A \to I_n$. Consideremos $n_0 \in \mathbb{N}$ el menor número natural para el cual existen A subconjunto propio de I_{n_0} y $f : A \to I_{n_0}$ biyección.

Si $n_0 \in A$, entonces existe una biyección $g : A \to I_{n_0}$ con $g(n_0) = n_0$. Entonces, $A \setminus \{n_0\}$ es subconjunto propio de I_{n_0-1} y la restricción de g a $A \setminus \{x_0\}$ es una biyección entre $A \setminus \{x_0\}$ e I_{n_0-1} lo cual es una contradicción.

Si $n_0 \notin A$, entonces existe $a \in A$ con $f(a) = n_0$. Entonces $A \setminus \{a\}$ es un subconjunto propio de I_{n_0-1} y la restricción de f a $A \setminus \{a\}$ es una biyección entre $A \setminus \{a\}$ e I_{n_0-1}. ∎

Corolario 2 *Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) *Si $I_m \sim I_n$, entonces $m = n$.*

(ii) *Si $X \sim I_m$ y $X \sim I_n$, entonces $m = n$.*

(iii) *No puede existir una biyección entre un conjunto finito y uno de sus subconjuntos propios.*

Demostración. Supongamos (i) y probemos (ii). Si $X \sim I_m$ y $X \sim I_n$, entonces $I_n \sim I_m$. Luego $n = m$.

Supongamos (ii) y probemos (iii). Por contradicción, supongamos que existen X conjunto finito, A subconjunto propio de X y $f : X \to A$ función biyectiva. Como X es un conjunto finito, entonces A también lo es. Luego existen $m, n \in \mathbb{N}$ diferentes tales que $X \sim I_n$ y $A \sim I_m$. Por consiguiente $X \sim I_n$ y $X \sim I_m$. Luego $m = n$, lo cual es una contradicción.

Finalmente supongamos (iii) y probemos (i). Por contradicción, asumamos que existen $n, m \in \mathbb{N}$, distintos, tales que $I_m \sim I_n$. Sin perdida de generalidad supongamos $n < m$, entonces existe una biyección entre el conjunto finito I_m y el subconjunto propio I_n de I_m, lo cual es una contradicción. ∎

2.3. Conjuntos enumerables y no enumerables

Definición 14 *Un conjunto $S \subset \mathbb{R}$ es* infinito *si S no es finito.*

Proposición 8 *Si X es infinito, entonces existe $f : \mathbb{N} \to X$ inyectiva.*

Demostración. Observe que para cada $A \subset X$ no vacío podemos escoger un elemento $x_A \in A$. Se define f inductivamente:

$f(1) = x_X$

Suponemos definidos $f(1), \cdots, f(n)$; tomamos $A_n = X \setminus \{f(1), \cdots, f(n)\} \neq \emptyset$ y definimos $f(n+1) = x_{A_n}$. La función f definida así es inyectiva: Sean $m < n$, $f(m) \in \{f(1), \cdots, f(n-1)\}$ y $f(n) \in A_{n-1} = X \setminus \{f(1), \cdots, f(n-1)\}$, luego $f(m) \neq f(n)$. ■

Como consecuencia de la proposición anterior es que todo conjunto infinito tiene un subconjunto enumerable infinito.

Corolario 3 *Un conjunto X es infinito si y solo si existe una biyección $\varphi : X \to Y$ con Y subconjunto propio de X.*

Demostración. Si existe tal biyección entre X infinito y un subconjunto propio de X, entonces por el corolario de la Sección 2.1., item (iii) concluimos que X no es finito, es decir, es infinito.

Recíprocamente, como X es infinito, entonces existe $f : \mathbb{N} \to X$ inyectiva. Para todo $n \in \mathbb{N}$ escribimos $f(n) = x_n$. Tomemos $Y = X \setminus \{x_1\}$, y definamos la biyección:

$$\begin{aligned} \varphi : X \quad &\to \quad Y \\ x \mapsto \quad &\varphi(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \notin \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\} \\ x_{n+1} & \text{si } x = x_n \end{cases} \end{aligned}$$

Esto muestra el Corolario. ■

Definición 15 *Un conjunto X se dice* enumerable *si es finito, o si $X \sim \mathbb{N}$.*

Teorema 6 *Si $X \subset \mathbb{N}$, entonces X es enumerable.*

Demostración. Si X es finito, no hay nada que demostrar. Supongamos X infinito luego por proposición anterior existe $f : \mathbb{N} \to X$ inyectiva; además $i : X \to \mathbb{N}$ con $i(x) = x$ es inyectiva luego por el teorema de C.B.S $X \sim \mathbb{N}$ ■

Corolario 4 *Si $f : X \to Y$ es inyectiva y Y es enumerable, entonces X es enumerable. Como caso particular, todo subconjunto de un conjunto enumerable es enumerable.*

Demostración. Si Y es finito, entonces X es finito y por tanto enumerable.

Consideremos el caso en que existe una biyección $\varphi : Y \to \mathbb{N}$. Por lo tanto $\varphi \circ f : X \to \mathbb{N}$ es inyectiva, luego X es equipotente con un subconjunto de $\mathbb{N}$ y así X es enumerable.

Para el caso particular en que $X \subset Y$ tomamos f como la aplicación *inclusión.* ■

Corolario 5 *Si $f : X \to Y$ es sobreyectiva y X es enumerable, entonces Y es enumerable.*

Demostración. Para cada $y \in Y$ escojamos un $x = g(y) \in X$ tal que $f(x) = y$. Así definimos $g : Y \to X$ tal que $f(g(y)) = y$ para todo $y \in Y$. Se tiene que g es inyectiva: Si $g(y_1) = g(y_2)$, se tiene que $y_1 = f(g(y_1)) = f(g(y_2)) = y_2$. ■

Teorema 7 *El conjunto $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable.*

Demostración. Defina,

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (n, m) & \mapsto & 2^n 3^m. \end{array}$$

Vemos que f es inyectiva (por la descomposición única en factores primos). Luego por Corolario 4 anterior, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ es enumerable. ■

Proposición 9 $\mathbb{R}$ *no es enumerable.*

Demostración. Basta probar que $(0, 1)$ no es enumerable. Supongamos que lo sea, luego $(0, 1) := \{u_1, \cdots, u_n, \cdots\}$, donde $u_n := 0, v_{1n} v_{2n} \cdots v_{nn} \cdots$ con v_{in} dígito y no usamos la expresión decimal que termina con una sucesión infinita de nueves.

Definimos $v := 0, v_1 \cdots v_n \cdots$ donde:

$$v_n = \begin{cases} 1, & \text{si } v_{nn} \neq 1 \\ 0, & \text{si } v_{nn} = 1. \end{cases}$$

Entonces $v_n \neq v_{nn}$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Así, $v \in (0, 1)$ pero $v \notin \{u_1, \cdots, u_n \cdots\}$. ■

Definición 16 *Si $(A_i)_{i \in I}$ es una colección arbitraria de conjuntos, definimos:*

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \textit{ para algún } i \in I\},$$

y

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : x \in A_i \textit{ para todo } i \in I\}.$$

Teorema 8 *Unión enumerable de conjuntos enumerables, es enumerable. Es decir, si $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ es una colección de conjuntos enumerables, entonces $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ es enumerable.*

Demostración. Como X_i es enumerable existe $f_i : \mathbb{N} \to X_i$ sobreyectiva (¿por qué?).

Si $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i$ definimos:

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \to & X \\ (m, n) & \mapsto & f_n(m) \end{array}$$

Observe que f es sobreyectiva, porque para $x \in X$ se tiene que $x \in X_i$ para algún $i \in \mathbb{N}$, y como se sabe que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $f_i(m) = x$ (por ser sobreyectiva), se tiene que $f(m, i) = x$. ■

Ejemplo 3 *Si $\mathcal{F}$ es una familia de intervalos abiertos, no vacíos de $\mathbb{R}$ dos a dos disjuntos, entonces $\mathcal{F}$ es enumerable.*

Como en cada intervalo abierto existe un número racional, podemos construir una función inyectiva de $\mathcal{F}$ en $\mathbb{Q}$ (¿por qué?). Como $\mathbb{Q}$ es enumerable, entonces $\mathcal{F}$ es enumerable.

Quiz 3 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. *Sean A, B conjuntos. Si A es enumerable y B no es enumerable, entonces $A \setminus B$ es enumerable.*
2. *Si $A \subset \mathbb{R}$ es enumerable entonces A tiene elemento máximo.*
3. *Si $A \subset \mathbb{R}$ es enumerable entonces A es acotado.*
4. *Si A es enumerable, el conjunto de todas las sucesiones finitas de elementos de A es enumerable.*
5. *El conjunto de las progresiones aritméticas en $\mathbb{N}$ es enumerable.*
6. *Si Y es un conjunto infinito y $f : X \to Y$ una función inyectiva, entonces X es infinito.*
7. *$\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$ es equipotente a $\mathbb{N}$.*
8. *La intersección finita de conjuntos no enumerables es no enumerable.*

Ejercicio 2

1. *Si X es finito, vea que el número de elementos de $\mathcal{P}(X) = \{S : S \subset X\}$ es igual a 2^k, donde k es el número de elementos de X.*
2. *Escriba $\mathbb{N} = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$, donde N_i es infinito y $N_i \cap N_j = \emptyset$, si $i \neq j$.*
3. *Vea que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ no es enumerable.*
4. *Dada $f : A \to B$, consideremos $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ familia de subconjuntos de A y $(B_\mu)_{\mu \in M}$ familia de subconjuntos de B. Muestre que:*
   (a) $f\left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L} f(A_\lambda)$.
   (b) $f\left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) \subset \bigcap_{\lambda \in L} f(A_\lambda)$.
   (c) $f^{-1}\left(\bigcup_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcup_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$.
   (d) $f^{-1}\left(\bigcap_{\mu \in M} B_\mu\right) = \bigcap_{\mu \in M} f^{-1}(B_\mu)$.
   (e) $A \setminus \left(\bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in L}(A \setminus A_\lambda)$.
   (f) $A \setminus \left(\bigcap_{\lambda \in L} A_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in L}(A \setminus A_\lambda)$.
5. *Dada $f : A \to B$, muestre que:*

(i) $f^{-1}(f(X)) \supset X$, *para todo* $X \subset A$.

(ii) f *es inyectiva si y solo si* $f^{-1}(f(X)) = X$.

6. *Vea que* $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$ *y que* $(0,1) \sim (-\infty, \infty)$ *(construyendo la biyección).*

7. *Si* X *es un conjunto arbitrario e* Y *un conjunto, por lo menos con dos elementos, entonces ninguna función* $\phi : X \to \boldsymbol{F}(X,Y)$ *es sobre, donde* $\boldsymbol{F}(X,Y) := \{f : X \to Y : f$ *es función*$\}$.

8. *Si* A *es numerable y* B *es no numerable, entonces* $B - A \sim B$.

9. *Un número es algebraico, si es raíz de un polinomio* $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$, *con* $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, \cdots, n$. *Muestre que el conjunto de números algebraicos es enumerable.*

10. *Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.*

11. *Si* $X \subset \mathbb{N}$, *las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

    (i) X *es finito.*

    (ii) X *es acotado superiormente.*

    (iii) X *posee elemento máximo.*

12. *Sean* $A, B \subset \mathbb{R}$ *enumerables. Entonces* $A \times B$ *es enumerable.*

13. $\mathbb{Q}$ *es enumerable.*

14. *El producto enumerable de conjuntos enumerables, no es enumerable.*

15. *El conjunto de los subconjuntos finitos de un conjunto enumerable es enumerable.*

Capítulo 3

Espacios métricos

En este capítulo se brindan las herramientas fundamentales en el estudio de la topología de los espacios métricos, es fundamental que el lector se apropie de los conceptos; así como, de ejemplos y contra ejemplos que le ayuden a contextualizar los resultados

3.1. Definición y ejemplos

Definición 17 *Una* métrica *en un conjunto E no vacío, es una función*

$$\begin{array}{rcl} d : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (p,q) & \mapsto & d(p,q) \end{array}$$

la cual satisface:

(i) $d(p,q) \geq 0$ *para todo* $p,q \in E$.

(ii) $d(p,q) = 0$ *si y solo si* $p = q$.

(iii) $d(p,q) = d(q,p)$ *para todo* $p,q \in E$.

(iv) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$ *para todo* $p,q,r \in E$ *(Desigualdad triangular).*

Un espacio métrico *es un par* (E,d), *donde* E *es un conjunto no vacío y* d *es una métrica en* E.

Diremos simplemente que E es un espacio métrico cuando la métrica es sobrentendida.

Ejemplo 4 1. *Si* $E = \mathbb{R}$, *tomamos la métrica usual*

$$\begin{array}{rcl} d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{array}$$

2. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$, *definimos* $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ *(n veces). Por lo tanto,* $\mathbb{R}^n = \{(a_1, \cdots, a_n) : a_k \in \mathbb{R}\}$. *Además,* $(a_1, \cdots, a_n) = (b_1, \cdots, b_n)$ *si y solo si* $a_k = b_k,\ k = 1, 2, ..., n$.

$$
\begin{aligned}
d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R} \\
(x,y) &\mapsto d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - y_k)^2}
\end{aligned}
$$

es la métrica euclidiana.

3. *Sea $E = \mathbb{R}^n$ y considere las métricas:*

$$d_1(p,q) = \sum_{k=1}^{n} |p_k - q_k|$$

y

$$d_\infty(p,q) = \max_{1 \leq k \leq n} |p_k - q_k|.$$

Como ejercicio, demostrar que en efecto $(\mathbb{R}^n, d_1)$ y $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ son espacios métricos.

Observe que dados $p, q \in \mathbb{R}^n$ se tiene que

$$d_\infty(p,q) \leq d_2(p,q) \leq d_1(p,q) \leq n \cdot d_\infty(p,q)$$

4. *Sea X un conjunto no vacío y $f : X \to \mathbb{R}$. Diremos que f es una* función acotada *si existe $k > 0$ tal que para todo $x \in X$ se tiene $|f(x)| \leq k$. Consideremos el conjunto $B(X) = \{f : X \to \mathbb{R} : f \text{ es acotada}\}$. Definamos:*

$$
\begin{aligned}
d : B(X) \times B(X) &\to \mathbb{R} \\
(f,g) &\mapsto d(f,g)
\end{aligned}
$$

donde $d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in X\} = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$. Entonces $(B(X), d)$ es un espacio métrico.

5. *Sea X un conjunto no vacío, cualquiera.*

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y. \end{cases}$$

A d se le denomina la métrica discreta*, y la notaremos por d_d.*

6. *Si (E,d) es un espacio métrico, y $E_1 \subset E$, entonces $(E_1, d|_{E_1 \times E_1})$ es un espacio métrico. Denotaremos por d^* a la métrica restringida al subespacio E_1.*

Proposición 10 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz.)

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2 .$$

Demostración. Dado $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 = x^2 \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2x \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2$. Es decir: $0 \leq Ax^2 + 2Bx + C$, con $A = \sum_{k=1}^{n} a_k^2$, $B = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ y $C = \sum_{k=1}^{n} b_k^2$.

Si $A = 0$, entonces $a_k = 0$ para $k = 1, \cdots, n$ y claramente tenemos la relación deseada.

Si $A \neq 0$, tomemos $x = -\frac{B}{A}$. Entonces $A\left(\frac{-B}{A}\right)^2 + 2B\left(\frac{-B}{A}\right) + C = \frac{B^2}{A} - 2\frac{B^2}{A} + C \geq 0$, luego $C - \frac{B^2}{A} \geq 0$, de donde $B^2 \leq AC$. ■

Veamos ahora la desigualdad triangular para d_2: Si $x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n)$ y $z = (z_1, \cdots, z_n)$ son elementos de $\mathbb{R}^n$, entonces

$$\begin{aligned}
d_2(x,y) &= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - z_k + z_k - y_k\right)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2 + 2(x_k - z_k)(z_k - y_k) + (z_k - y_k)^2} \\
&\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2\right)} + \sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(x_k - z_k)^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n}(z_k - y_k)^2} \\
&= d_2(x,z) + d_2(z,y).
\end{aligned}$$

3.2. Conjuntos abiertos y cerrados

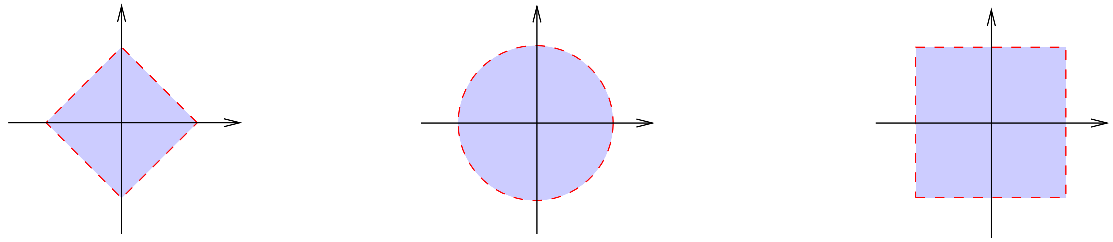
Definición 18 *Sean (E, d) un espacio métrico, $p \in E$ y $r > 0$. Definimos,*

$$B_E(p,r) = \{x \in E : d(p,x) < r\}$$

y

$$B_E[p,r] = \{x \in E : d(p,x) \leq r\}$$

respectivamente la bola abierta *y la* bola cerrada *en E con centro en p y radio r.*



$B(0,1)$ en $(\mathbb{R}^2, d_1)$ $\quad$ $B(0,1)$ en $(\mathbb{R}^2, d_2)$ $\quad$ $B(0,1)$ en $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$

Figura 3.1: Bolas abiertas

En adelante vamos a escribir las bolas $B_E(p,r)$ y $B_E[p,r]$ como $B(p,r)$ y $B[p,r]$ respectivamente, caso se entienda donde están estas bolas.

Definición 19 *Sea (E,d) un espacio métrico y $S \subset E$. Se dice que $a \in S$ es un* punto interior *de S en (E,d) si existe $r > 0$ tal que $B_E(a,r) \subset S$. El* interior *de S es el conjunto $Int(S) = \{a \in S : a \ \text{ es punto interior de } \ S\}$.*

Definición 20 *Un subconjunto $S \subset E$ es* abierto *si todo punto de S es un punto interior, es decir, para todo $s \in S$ se tiene que $s \in Int(S)$.*

Es claro que S es abierto si y solo si $S = \text{Int}(S)$.

Ejemplo 5

1. *Dado (E,d) un espacio métrico, toda bola abierta es un conjunto abierto. En efecto, dados $B_E(p,r)$ (con $r > 0$ y $p \in E$) y $q \in B_E(p,r)$, tomamos $r' = r - d(p,q)$ de donde se tiene que $B_E(q,r') \subset B_E(p,r)$ (verifique esta contenencia como ejercicio).*

2. *Si $E = \mathbb{R}$ con $d(x,y) = |x-y|$ el conjunto $\left[0, \frac{1}{3}\right)$ no es abierto en $\mathbb{R}$ pero es abierto en $(E_1, d|_{E_1 \times E_1})$ con $E_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right)$. Simplemente observe que $B_{E_1}(0, \frac{1}{3}) = \left[0, \frac{1}{3}\right)$.*

Es importante observar que si (E,d) es un espacio métrico y $(E_1, d|_{E_1 \times E_1})$ un subespacio métrico, entonces $B_{E_1}(p,r) = B_E(p,r) \cap E_1$.

Proposición 11 *Dado (E,d) espacio métrico:*

(i) Los conjuntos $\emptyset$ y E son conjuntos abiertos.

(ii) Unión arbitraria de conjuntos abiertos en (E,d) es un conjunto abierto.

(iii) Intersección finita de conjuntos abiertos de (E,d) es abierto en (E,d).

Demostración.

(i) Es inmediato de la definición de conjunto abierto.

(ii) Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos abiertos en un espacio métrico, y veamos que $\cup_{i\in I}A_i$ es un conjunto abierto .

Si $x \in \bigcup_{i\in I} A_i$ entonces existe $i \in I$ tal que $x \in A_i$. Como A_i es un conjunto abierto existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A_i$. Luego $B(x, r) \subset A_i \subset \bigcup_{i\in I} A_i$, es decir, x es un punto interior de $\bigcup_{i\in I} A_i$.

(iii) Sea $(A_i)_{i\in I_n}$, $n \in \mathbb{N}$, una familia finita de conjuntos abiertos, y veamos que $\bigcap_{i\in I_n} A_i$ es un conjunto abierto.

Si $x \in \bigcap_{i\in I_n} A_i$ entonces existen $r_1, \cdots, r_n$ números positivos tales que $B(x, r_i) \subset A_i$, para cada $i \in I_n$. Si tomamos r como el mínimo de esos radios tenemos que $B(x, r) \subset \bigcap_{i\in I_n} A_i$, es decir, x es un punto interior de $\bigcap_{i\in I_n} A_i$.

Así queda demostrada la proposición. ■

Como una consecuencia directa de la definición de abierto y de la parte (ii) de la proposición anterior tenemos que $S \subset E$ es abierto si y solo si S es unión de bolas abiertas. En efecto, si S es abierto, para cada $x \in S$ existe $r_x > 0$ tal que $\{x\} \subset B_E(x, r_x) \subset S$. Entonces $\bigcup_{x\in S} B_E(x, r_x) = S$.

Proposición 12 *Sea $S \subset E$. Si $(A_i)_{i\in I}$ es la familia de todos los abiertos en E contenidos en S, tenemos que Int$(S) = \bigcup_{i\in I} A_i$.*

Demostración. Sea $A = \bigcup_{i\in I} A_i \subset S$ y veamos que $A = \mathrm{Int}(S)$. Si $x \in A$, entonces $x \in A_i$ para algún $i \in I$. Como A_i es abierto, existe $r > 0$ tal que $B_E(x, r) \subset A_i \subset S$. Entonces $x \in \mathrm{Int}(S)$. Recíprocamente, si $x \in \mathrm{Int}(S)$ entonces existe $r > 0$ tal que $B_E(x, r) \subset S$. Como $B_E(x, r)$ es un abierto en E contenido en S y $x \in B_E(x, r)$, entonces $x \in A$. ■

Observe que la proposición 12 nos dice que $\mathrm{Int}(S)$ es el mayor abierto en E contenido en S.

Proposición 13 *Sea $(E_1, d|_{E_1\times E_1})$ un subespacio métrico de (E, d) y sea $X \subset E_1$. Entonces X es abierto en E_1 si y solo si existe A abierto de E tal que $X = A \cap E_1$.*

Demostración. Veamos que si X es abierto en E_1, entonces existe A abierto de E tal que $X = A \cap E_1$. En efecto, dado $x \in X$, existe $r_x > 0$ tal que $B_{E_1}(x, r_x) \subset X$, así $X = \bigcup_{x\in X} B_{E_1}(x, r_x)$. Como $B_{E_1}(x, r_x) = B_E(x, r_x) \cap E_1$, entonces $X = \bigcup_{x\in X} (B_E(x, r_x) \cap E_1) = E_1 \cap \left(\bigcup_{x\in X} B_E(x, r_x)\right)$. Tome $A = \bigcup_{x\in X} B_E(x, r_x)$.

Recíprocamente, veamos que si $X = A \cap E_1$ con A abierto en E, entonces X es abierto en E_1. En efecto, dado $x \in X$, entonces $x \in A \cap E_1$. Luego existe $r_x > 0$ tal que $B_E(x, r_x) \subset A$ y por lo tanto $B_E(x, r_x) \cap E_1 \subset A \cap E_1 = X$. Es decir, $B_{E_1}(x, r_x) \subset X$, luego X es abierto en $(E_1, d|_{E_1\times E_1})$. ■

Definición 21 *Dado* (E,d) *espacio métrico y* $S \subset E$*, se dice que* S *es* cerrado *en* (E,d)*, si* $E \setminus S$ *es abierto en* (E,d).

Proposición 14 *Toda bola cerrada en un espacio métrico es un conjunto cerrado.*

Demostración. Dada $B[p,r]$, veamos que $E \setminus B[p,r]$ es abierto. Si $x \in E \setminus B[p,r]$, entonces $d(p,x) > r$. Tomemos $r' = d(p,x) - r$ y veamos que $B(x,r') \subset E \setminus B[p,r]$. Si $y \in B(x,r')$, entonces

$$\begin{aligned} d(p,y) &= d(p,y) + d(x,y) - d(x,y) \\ &\geq d(p,x) - d(x,y) \\ &> d(p,x) - (d(p,x) - r) = r. \end{aligned}$$

Luego $y \in E \setminus B[p,r]$. ■

Teorema 9 *Dado* (E,d) *un espacio métrico, tenemos que:*

(i) E *es cerrado.*

(ii) $\emptyset$ *es cerrado.*

(iii) Unión finita de cerrados es cerrada.

(iv) Intersección arbitraria de cerrados es cerrada.

Demostración. Ejercicio. ■

Proposición 15 *En un espacio métrico* (E,d)*, cualquier subconjunto* S *finito es cerrado.*

Demostración. Si $p \in S$, se tiene que $\{p\} = \bigcap_{r>0} B_E[p,r]$ (Ejercicio). Además, $S = \bigcup_{p\in S}\{p\}$, de donde se sigue el resultado.

Otra manera de demostrar que $\{p\}$ es cerrado en todo espacio métrico E, es ver que su complemento $E \setminus \{p\}$ es abierto. Sea $x \in E \setminus \{p\}$. Entonces $x \in E$, $x \neq p$ y $d(p,x) > 0$. Tome $r = \dfrac{d(p,x)}{2}$ y verifique que $B_E(x,r) \subset E \setminus \{p\}$. ■

Observación 2 *En un espacio métrico existen conjuntos que son abiertos y cerrados simultáneamente. Además pueden existir conjuntos que no son abiertos ni cerrados, como el caso del conjunto* $[1,2)$ *en* $(\mathbb{R},d)$.

Definición 22 *Un conjunto* $S \subset E$ *donde* (E,d) *es espacio métrico, se dice* acotado *si existe* $p \in E$ *y* $r > 0$ *tal que* $S \subset B(p,r)$.

Lema 3 *Sea* (E,d) *espacio métrico y* $S \subset E$ *acotado. Entonces, dado* $q \in E$*, existe un* $r' > 0$ *tal que* $S \subset B(q,r')$.

Demostración. Puesto que S es acotado, existen $r > 0$ y $p \in E$ tales que $S \subset B(p,r)$. Tomemos $r' = r + d(q,p)$. Si $y \in S$, entonces $d(y,q) \leq d(y,p) + d(p,q) < r + d(q,p) = r'$. Por lo tanto, $S \subset B(q,r')$: ■

Proposición 16 *Unión finita de conjuntos acotados es acotado.*

Demostración. Sean $S_1, \cdots, S_n$ acotados en (E,d). Por lo tanto, dado $q \in E$ existen $r_1, \cdots, r_n \in \mathbb{R}^+$ tales que $S_i \subset B(q, r_i)$ para $i = 1, \cdots, n$. Así, $\bigcup_{i=1}^n S_i \subset B(q, \max\limits_{i=1,\cdots,n}\{r_i\})$, y por lo tanto $\bigcup_{i=1}^n S_i$ es acotado. ■

Proposición 17 *Sea $F \subset \mathbb{R}$, $F \neq \emptyset$, F cerrado en $(\mathbb{R}, d)$ con $d(x,y) = |x-y|$.*

1. *Si F es acotado superiormente, entonces F admite un máximo.*
2. *Si F es acotado inferiormente, entonces F admite un mínimo.*

Demostración.

1. Supongamos que F es acotado superiormente en $\mathbb{R}$, entonces existe $s = \sup(F)$. Veamos que $s \in F$. Supongamos que $s \notin F$, así $s \in \mathbb{R} \setminus F$ donde $\mathbb{R} \setminus F$ es abierto (ya que F es cerrado). Por lo tanto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus F$. Por otro lado, como $s = \sup(F)$ existe $b \in F$ tal que $s - \varepsilon < b \leq s$, luego $b \in (s-\varepsilon, s+\varepsilon) \subset \mathbb{R} \setminus F$ lo cual es una contradicción.
2. El argumento es similar al del ítem 1.

Así queda probada la proposición. ■

Quiz 4 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.*

1. *$\mathbb{Q}$ es abierto en $(\mathbb{R}, d_1)$.*
2. *$\mathbb{Q}$ es abierto en $(\mathbb{R}, d_d)$.*
3. *$B(0, \frac{1}{2}) = B[0, \frac{1}{4}]$ en $(\mathbb{R}, d_d)$.*
4. *$\mathbb{N}$ es cerrado en $(\mathbb{R}, d_1)$.*
5. *Todo conjunto es abierto y cerrado en $(\mathbb{R}, d_d)$.*
6. *El conjunto $[0, \frac{1}{4})$ es cerrado en $([0, \frac{1}{2}), d_1|_{[0,\frac{1}{2})\times[0,\frac{1}{2})})$.*
7. *Sean (E,d) un espacio métrico, $A \subset E_1 \subset E$. Si A es abierto en $(E_1, d|_{E_1 \times E_1})$, entonces A es abierto en (E,d).*
8. *Sean (E,d) un espacio métrico, $A \subset E_1 \subset E$. Si A es abierto en (E,d), entonces A es abierto en $(E_1, d|_{E_1 \times E_1})$.*

3.3. Los conceptos de clausura, derivado y frontera de un conjunto

Definición 23 *Sea (E, d) un espacio métrico y $S \subset E$.*

1. *Un punto $p \in E$ es un* punto adherente *de S en (E, d), si para todo $r > 0$ se tiene que $B_E(p, r) \cap S \neq \emptyset$. Se define la* clausura *de S, notado por $\overline{S}$, como $\overline{S} = \{p \in E : p$ es punto adherente de $S\}$.*

2. *Un punto $p \in E$ es un* punto de acumulación *de S en (E, d), si para todo $r > 0$ se tiene que $(B_E(p, r) \setminus \{p\}) \cap S \neq \emptyset$. Se define el* derivado *de S, notado por S', como $S' = \{p \in E : p$ es punto de acumulación de $S\}$.*

3. *Un punto $p \in E$ es un* punto frontera *de S en (E, d), si para todo $r > 0$ se tiene que $B_E(p, r) \cap S \neq \emptyset$ y $B_E(p, r) \cap (E \setminus S) \neq \emptyset$. Se define la* frontera *de S, notado por ∂S, como $\partial S = \{p \in E : p$ es punto frontera de $S\}$.*

Un punto $p \in S \subset E$ es *aislado* si existe $r > 0$ tal que $B_E(p, r) \cap S = \{p\}$. Un conjunto S es *discreto* si todos sus puntos son aislados. Un conjunto S es *denso* en E si $\overline{S} = E$.

Observe que $p \in S$ es aislado si y solo si $p \notin S'$, y que $S \subset \overline{S}$. En efecto, $p \in E$ es un punto aislado $\Leftrightarrow$ existe $r > 0$ tal que $B_E(p, r) \cap S = \{p\} \Leftrightarrow$ existe $r > 0$ tal que $(B_E(p, r) \setminus \{p\}) \cap S = \emptyset \;\Leftrightarrow\; p \notin S'$. La relación $S \subset \overline{S}$ es inmediata de la definición de punto adherente, pues si $p \in S$ y dado que $\{p\} \subset B_E(p, r)$ para todo $r > 0$, se tiene que $B_E(p, r) \cap S \neq \emptyset$ para todo $r > 0$.

Si $p \in S'$, entonces para todo $r > 0$ tenemos que en la bola $B(p, r)$ existen infinitos elementos de S. En efecto, sabemos que existe $q \in B(p, r) \cap S$ con $q \neq p$. Si tomamos $r_1 = d(p, q)$ vemos que $B(p, r_1) \subset B(p, r)$. Como $p \in S'$ existe $q_1 \in B(p, r_1) \cap S$, con $q_1 \neq p$. Tomando $r_2 = d(p, q_1)$ vemos que existe $q_2 \in B(p, r_2) \cap S$, con $q_2 \neq p$. Razonando inductivamente encontramos un conjunto infinito de elementos de S en $B(p, r)$.

Propiedades. Sea $S \subset E$, donde (E, d) es un espacio métrico.

i) $\overline{S} = E \setminus \mathrm{Int}(E \setminus S)$.
En efecto, $x \in \overline{S} \;\Leftrightarrow\;$ para todo $r > 0$ se tiene $B_E(x, r) \bigcap S \neq \emptyset \Leftrightarrow$ para todo $r > 0$ se tiene que $B_E(x, r)$ no está contenida en $E \setminus S \Leftrightarrow\; x \notin \mathrm{Int}(E \setminus S) \;\Leftrightarrow\; x \in E \setminus \mathrm{Int}(E \setminus S)$.
Esta propiedad muestra que $\overline{S}$ es cerrado por ser el complemento de un conjunto abierto.

ii) $\overline{S} = \bigcap_{i \in I} F_i$, donde $(F_i)_{i \in I}$ es la familia de todos los conjuntos cerrados de (E, d) que contienen a S.
En efecto, la familia $(A_i)_{i \in I}$ donde $A_i = E \setminus F_i$, son todos los abiertos de E contenidos en $E \setminus S$. Como $\mathrm{Int}(E \setminus S) = \bigcup_{i \in I} A_i$, entonces

$$\overline{S} = E \setminus \mathrm{Int}(E \setminus S) = E \setminus \bigcup_{i \in I} A_i = \bigcap_{i \in I} (E \setminus A_i) = \bigcap_{i \in I} F_i.$$

Esta propiedad muestra que $\overline{S}$ es el cerrado más pequeño en E que contiene a S.

iii) $\partial S = \overline{S} \cap \overline{E \setminus S}$.
En efecto, $x \in \partial S \;\Leftrightarrow\;$ para todo $r > 0$ se tiene que $B_E(p,r) \cap S \neq \emptyset$ y $B_E(p,r) \cap (E \setminus S) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{S}$ y $x \in \overline{E \setminus S}$.

iv) S es cerrado en E si y solo si $\overline{S} = S$.
En efecto, si S es cerrado en E, entonces S pertenece a la familia $(F_i)_{i \in I}$ de todos los conjuntos cerrados de E que contienen a S, y por lo tanto $\overline{S} = \bigcap_{i \in I} F_i \subset S$. Como siempre tenemos que $S \subset \overline{S}$, entonces $S = \overline{S}$. Recíprocamente, si $S = \overline{S}$ y como $\overline{S}$ es cerrado, entonces S es cerrado.

v) S es cerrado en E si y solo si $\partial\, S \subset S$.
En efecto, si S es cerrado en E, entonces $S = \overline{S}$, y como $\partial S = \overline{S} \cap \overline{E \setminus S}$, entonces $\partial\, S \subset S$. Recíprocamente, sea $\partial\, S \subset S$ y supongamos que S no es cerrado en E. Luego S es subconjunto propio de $\overline{S}$. Sea $p \in \overline{S} \setminus S \subset E \setminus S \subset \overline{E \setminus S}$. Entonces $p \in \overline{S} \bigcap \overline{E \setminus S} = \partial S$ y como $\partial S \subset S$, entonces $p \in S$ lo cual es una contradicción.

vi) S es abierto en E si y solo si $S \cap \partial S = \emptyset$.
En efecto, si S es abierto en E, dado $p \in S$, existe $r > 0$ tal que $B(p,r) \subset S$. Luego $B(p,r) \bigcap (E \setminus S) = \emptyset$ lo cual implica que $p \notin \overline{E \setminus S}$ y por lo tanto $p \notin \partial S$. Así, $S \cap \partial S = \emptyset$. Recíprocamente, sea $S \cap \partial S = \emptyset$, entonces $\partial S \subset E \setminus S$. Supongamos que S no es abierto, esto es, existe $s \in S$ tal que para todo $r > 0$ se tiene $B(s,r) \not\subset S$. Luego $B(s,r) \cap S \neq \emptyset$ para todo $r > 0$ y $B(s,r) \cap (E \setminus S) \neq \emptyset$ para todo $r > 0$. Por lo tanto, $s \in \overline{S}$ y $s \in \overline{E \setminus S}$, entonces $s \in \partial S$ lo cual es una contradicción.

vii) $\overline{S} = S \cup S'$.
En efecto, si $x \in \overline{S}$, entonces hay dos posibilidades: (i) $x \in S$ ó (ii) $x \notin S$ y para todo $r > 0$ se tiene que $B(x,r) \cap S \neq \emptyset$. Entonces para todo $r > 0$ se tiene que $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap S \neq \emptyset$. Luego $x \in S'$. Por lo tanto, $\overline{S} \subset S \cup S'$. Para demostrar la otra contenencia, observe que si $x \in S'$, entonces para todo $r > 0$ se tiene que $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap S \neq \emptyset$, lo cual implica que $B(x,r) \cap S \neq \emptyset$ y por lo tanto $x \in \overline{S}$. Así, $S' \subset \overline{S}$, y como $S \subset \overline{S}$, entonces $S \cup S' \subset \overline{S}$.

viii) S es cerrado si y solo si $S' \subset S$.
En efecto, S es cerrado $\;\Leftrightarrow\; S = \overline{S} = S \cup S' \;\Leftrightarrow S' \subset S$.

ix) $x \in S'$ si y solo si $x \in \overline{S - \{x\}}$.
En efecto, $x \in S' \;\Leftrightarrow\;$ para todo $r > 0$ se tiene que $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap S = B(x,r) \cap (S \setminus \{x\}) \neq \emptyset \;\Leftrightarrow\; x \in \overline{S - \{x\}}$.

x) S' es cerrado.
En efecto, es suficiente demostrar que $(S')' \subset S'$. Si $z \in (S')'$, entonces para todo $r > 0$ existe $y \in B(z,r) \cap S'$ con $y \neq z$. Sea $r' = \text{mín}\{d(y,z), r - d(y,z)\}$. Entonces $z \notin B(y,r') \subset B(z,r)$. Como $y \in S'$, existe $x \in B(y,r') \cap S$ (para esta demostración no es necesario que $x \neq y$, aunque se puede tomar así). Luego $x \in B(z,r) \cap S$ con $x \neq z$. Por lo tanto, $z \in S'$.

Lema 4 *Sea* $(I_\lambda)_{\lambda\in L}$ *una familia de intervalos abiertos, todos conteniendo el punto* $p \in \mathbb{R}$*. Entonces* $\bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda$ *es un intervalo abierto.*

Demostración. Para todo $\lambda \in L$, sea $I_\lambda = (a_\lambda, b_\lambda)$. Observe que $a_\lambda < b_\mu$ para todo $\lambda, \mu \in L$. Por lo tanto, si tomamos $a = \inf\{a_\lambda : \lambda \in L\}$ y $b = \sup\{b_\lambda : \lambda \in L\}$ tenemos que $a < b$ (puede ocurrir que $a = -\infty$ ó $b = \infty$). Veamos que $(a, b) = \bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda$. La inclusión $\bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda \subset (a, b)$ es inmediata. Para la otra inclusión, sea $a < x < b$. Entonces por las definiciones de sup e ínf, existen $\lambda, \mu \in L$ tales que $a_\lambda < x < b_\mu$. Si $x < b_\lambda$, tendremos que $x \in I_\lambda$. Si $b_\lambda \leq x$, entonces $a_\mu < b_\lambda \leq x < b_\mu$, o sea $x \in I_\mu$. En cualquiera de los dos casos tenemos que $x \in \bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda$ y por lo tanto $(a, b) \subset \bigcup_{\lambda\in L} I_\lambda$. ■

Proposición 18 *Sea* A *un conjunto abierto y no vacío en* $(\mathbb{R}, d_1)$*, entonces* A *es unión enumerable de intervalos abiertos dos a dos disyuntos.*

Demostración. Para cada $x \in A$, sea I_x la unión de todos los intervalos abiertos que contienen a x y están contenidos en A. Por el lema anterior, I_x es un intervalo abierto y evidentemente $x \in I_x \subset A$. Además I_x es el mayor intervalo abierto que contiene a x y está contenido en A. Dados $x, y \in A$ se tiene solo una de las siguientes situaciones: $I_x \cap I_y = \emptyset$ ó $I_x = I_y$ en el caso $I_x \cap I_y \neq \emptyset$. En efecto, si $z \in I_x \cap I_y$, entonces $I = I_x \cup I_y$ es un intervalo que contiene a los números x, y y está contenido en A. Por lo tanto, $I_x \cup I_y = I \subset I_x$ e $I_x \cup I_y = I \subset I_y$. Así $I_y \subset I_x$ e $I_x \subset I_y$ lo que implica que $I_x = I_y$. Esto permite afirmar que los intervalos I_x son dos a dos disyuntos. Además, $A = \bigcup_{x\in A} I_x$ ya que $x \in I_x \subset A$ para todo $x \in A$. De esta manera queda demostrado que todo conjunto abierto A en $(\mathbb{R}, d_1)$ se puede descomponer como reunión de intervalos abiertos dos a dos disyuntos, llamados *intervalos componentes* de A.

Para demostrar que la colección de los intervalos componentes de A es enumerable, basta definir una función de esta colección a los números racionales de la siguiente forma: a cada componente J le asignamos un número racional $r(J) \in J$. Esta función así definida es inyectiva, pues si $J \neq J'$, entonces $J \cap J' = \emptyset$, entonces $r(J) \neq r(J')$. Como $\mathbb{Q}$ es enumerable, entonces la colección de los intervalos componentes de A es enumerable. ■

Ejemplo 6 *Consideremos* $\mathbb{R}$ *con la métrica usual, entonces:*

1. $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$*, pues dado* $x \in \mathbb{R}$ *y* $r > 0$ *existe un racional en* $(x - r, x + r)$*.*
2. *Igualmente* $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$*. Además,* $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$*, pues dado* $x \in \mathbb{R}$ *y* $r > 0$ *existe un racional* q *en* $(x - r, x + r)$*, con* $q \neq x$*.*
3. $\partial\, \mathbb{Q} = \mathbb{R}$*.*
4. $\partial\, \mathbb{I} = \mathbb{R}$*.*

El conjunto de Cantor. El conjunto de Cantor K es un subconjunto del intervalo $[0, 1]$ obtenido de la siguiente forma: se retira del intervalo $[0, 1]$ su tercio medio abierto $(1/3, 2/3)$. Después se retira el tercio medio abierto de cada uno de los intervalos $[0, 1/3]$ y

$[2/3, 1]$. Entonces queda $[0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$. A continuación se retira el tercio medio abierto de cada uno de estos cuatro intervalos. Se repite este proceso indefinidamente. El conjunto K de los puntos no retirados es el conjunto de Cantor. *Este conjunto: i) es cerrado y acotado, ii) tiene interior vacío (no contiene intervalos), iii) no tiene puntos aislados (todos sus puntos son puntos de acumulación) y iv) no es enumerable.*

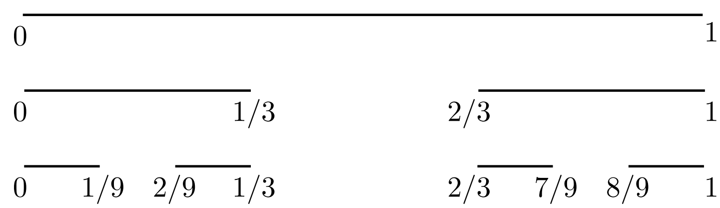


Figura 3.2: Construcción del conjunto de Cantor

i) El conjunto K es cerrado porque si indicamos con $I_1, I_2, ..., I_n, ...$ los intervalos abiertos retirados, tenemos

$$K = [0, 1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [0, 1] \cap \left(\mathbb{R} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right).$$

El conjunto K es acotado porque está contenido en el intervalo $[0, 1]$.

ii) El conjunto K tiene interior vacío dado que después de la etapa n-ésima de la construcción sólo quedan intervalos de longitud $1/3^n$. Por tanto, dado cualquier intervalo $J \subset [0, 1]$ de longitud $c > 0$, si tomamos n tal que $1/3^n < c$, el intervalo J habrá sido subdividido después de la n-ésima etapa de la construcción de K. Así, K no contiene intervalos.

La demostración de las propiedades iii) y iv) son dejadas como ejercicio. Note que los puntos extremos de los intervalos retirados como $1/3, 2/3, 1/9, 2/9, 7/9, 8/9, ...$ pertenecen al conjunto de Cantor.

Quiz 5 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.*

1. $\mathbb{Q}' = \emptyset$ *en* $(\mathbb{R}, d_d)$.

2. $\overline{\mathbb{N}} = \emptyset$ *en* $(\mathbb{R}, d_1)$.

3. $\partial \mathbb{Q} = \emptyset$ *en* $(\mathbb{R}, d_1)$.

4. $[0, 1)' = [0, 1)$ *en* $([0, 1), d_1|_{[0,1)\times[0,1)})$.

5. $\partial \mathbb{R} = \emptyset$ *en* $(\mathbb{R}, d_1)$.

6. $\mathbb{R}' = \emptyset$ *en* $(\mathbb{R}, d_d)$.

7. *Sean* (E,d) *espacio métrico,* $a \in E$ *y* $r > 0$. *Entonces* $\overline{B(a,r)} = B[a,r]$.

8. $\mathbb{N}$ *es cerrado en* $(\mathbb{R}, d_\infty)$.

9. *Si* $A \subset \mathbb{R}^n$ *es cerrado en* $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$, *entonces* A *es cerrado en* $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

3.4. Sucesiones

Definición 24 *Sea* (E,d) *un espacio métrico. Una* sucesión *es una función del tipo:*

$$\begin{array}{rcl} a : \mathbb{N} & \to & E \\ n & \mapsto & a(n) = a_n \end{array}$$

Otras notaciones: $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Definición 25 *Sea* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* (E,d). *Un punto* $p \in E$ *es el* límite *para* (x_n) *si para todo* $\varepsilon > 0$, *existe un* $N \in \mathbb{Z}^+$ *tal que* $d(p, x_n) < \varepsilon$ *para cada* $n \geq N$.

Una sucesión en un espacio métrico, tiene *a lo más* un límite.

Proposición 19 *Si existe un límite de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* (E,d), *este es único.*

Demostración. Supongamos que p_1 y p_2 son límites de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dado $\varepsilon > 0$, existen $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ tales que si $n \geq N_1$ entonces $d(p_1, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$, y si $n \geq N_2$ entonces $d(p_2, a_n) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Sea $N = \max\{N_1, N_2\}$. Por lo tanto, si $n \geq N$, tenemos: $d(p_1, p_2) \leq d(p_1, a_n) + d(a_n, p_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, esto para todo $\varepsilon > 0$. Por lo tanto, $d(p_1, p_2) = 0$, luego $p_1 = p_2$. ■

Por esta razón, tiene sentido hablar *del límite* (en vez de *un límite*) de una sucesión, el cual se notará por $\lim_{n\to\infty} a_n$ (si este existe).

Definición 26 *Una sucesión* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es* acotada *en* (E,d) *si el conjunto* $\{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$ *es acotado en* (E,d).

Proposición 20 *Toda sucesión convergente en* (E,d) *es acotada.*

Demostración. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión convergente en (E,d). Por lo tanto, existe $p \in E$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Luego para $\varepsilon > 0$ fijo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $d(p, x_n) < \varepsilon$. Tomemos $r > \max\{\epsilon, d(p, x_1), \cdots, d(p, x_{N-1})\}$, de esta manera $B(p,r) \supset \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$. ■

Definición 27 *Sean* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* (E,d), *y* $\{n_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de números naturales, tales que* $n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$. *A la sucesión definida por* $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *se le denomina una* subsucesión *de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. *En otras palabras, si* $n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *es estrictamente creciente, se tiene que* $a \circ n$ *es una subsucesión de* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Observación 3 *Es fácil demostrar que:*

1. $n_k \geq k$, $\forall k \in \mathbb{N}$
2. *Toda subsucesión de una sucesión convergente, es convergente. En efecto, si* $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, *entonces dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N$, *entonces* $d(p, x_n) < \varepsilon$. *Si* $k \geq N$ *entonces* $n_k \geq k \geq N$ *y por lo tanto* $d(p, x_{n_k}) < \varepsilon$.
3. *Toda subsucesión de una sucesión acotada, es acotada. En efecto,* $\{x_{n_1}, x_{n_2}, ...\} \subset \{x_1, x_2, ...\}$.

Teorema 10 *Sea* (E, d) *espacio métrico. Un conjunto* $S \subset E$ *(no vacío) es cerrado en* (E, d) *si y sólo si* S *contiene todos los límites de las sucesiones convergentes en* E *formadas por puntos de* S.

Demostración. Sea S un conjunto no vacío y cerrado en (E, d). Supongamos que existen $p \in E$ y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de puntos en S, tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = p \notin S$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d(p, x_n) < \varepsilon$. Entonces $x_N \in B(p, \varepsilon)$ con $x_N \neq p$ porque $p \notin S$ y cada $x_n \in S$. Así, p es punto de acumulación de S, que no está en S, luego S no es cerrado lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, asuma que S contiene todos los límites de las sucesiones convergentes en E formadas por puntos de S y supongamos que S no es cerrado, esto es, existe $p \in \overline{S}$ tal que $p \notin S$, entonces existe $x_n \in S$ tal que $x_n \in B(p, \frac{1}{n})$ para cada $n \in \mathbb{N}$. De esta manera, $\lim_{n\to\infty} x_n = p$, pero $p \notin S$ lo cual es una contradicción. ∎

Proposición 21 *Dada* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* (E, d), $a \in E$ *es límite de alguna subsucesión de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si y solo si dado* $\varepsilon > 0$ *el conjunto* $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_E(a, \varepsilon)\}$ *es infinito.*

Demostración. Supongamos inicialmente que a es límite de alguna subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N$ entonces $x_{n_k} \in B_E(a, \varepsilon)$. Luego el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_E(a, \varepsilon)\}$ es infinito.

Supongamos ahora que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_E(a, \varepsilon)\}$ es infinito. Para $\varepsilon = 1$ existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in B_E(a, 1)$. Para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existe $n_2 \in \mathbb{N}$, con $n_2 > n_1$ (dado que I_{n_1} es finito) tal que $x_{n_2} \in B_E(a, \frac{1}{2})$. Razonando de igual forma para $\varepsilon = \frac{1}{k}$, con $k = 3, 4 \ldots$ encontramos $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge a a. ∎

Sucesiones de números reales.

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es *creciente* si $x_1 \leq x_2 \leq \cdots x_n \leq \cdots$ (es decir, $x_n \leq x_m$ si $n \leq m$), es *decreciente* si $x_1 \geq x_2 \geq \cdots x_n \geq \cdots$ (es decir, $x_n \geq x_m$ si $n \leq m$), y es *monótona* si es creciente o decreciente.

Proposición 22 *Toda sucesión monótona y acotada es convergente en* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Demostración. Supongamos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión creciente y acotada en $(\mathbb{R}, d_1)$. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, entonces es acotada superiormente y por lo tanto existe $L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. Dado $\varepsilon > 0$, por la propiedad de aproximación, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < a_N$. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente, tenemos que

$$L - \varepsilon < a_N \leq a_n, \text{ si } n \geq N.$$

De otro lado, $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ (ya que $L = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$). Así, $|a_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq N$, luego $\lim_{n\to\infty} a_n = L$. ■

Proposición 23 *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $(\mathbb{R}, d_1)$. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ son convergentes, entonces:*

1. *$(a_n \pm b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$.*
2. *$(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente y $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$.*
3. *Si $b_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$, entonces $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_n}{b_n}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}$.*

Demostración. Sean $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ y $b = \lim_{n\to\infty} b_n$.

1. Se deja como ejercicio.
2. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada, existe $K > 0$ tal que $|a_n| < K$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos $M = \max\{K, |b|\} > 0$. Como $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente, dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $|a_n - a| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, y existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$ entonces $|b_n - b| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. Así, si $N = \max\{N_1, N_2\}$, tenemos que para $n \geq N$:

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \\ &< M\left(\frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2M}\right) = \varepsilon \end{aligned}$$

3. Basta mostrar que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{b_n} = \dfrac{1}{b}$. Observe que

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b - b_n|}{|b||b_n|}.$$

Para $\dfrac{|b|}{2} > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_1$ entonces $|b_n - b| < \dfrac{|b|}{2}$. Como $|b| - |b_n| \leq |b_n - b|$, entonces $\dfrac{|b|}{2} \leq |b_n|$ y por lo tanto $\dfrac{1}{|b_n|} \leq \dfrac{2}{|b|}$. Luego $\dfrac{|b - b_n|}{|b||b_n|} <$

$\dfrac{2|b-b_n|}{|b|^2}$, si $n \geq N_1$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N_2$, entonces $|b_n - b| < \dfrac{|b|^2}{2}\varepsilon$. Sea $N = \text{máx}\{N_1, N_2\}$. De esta manera, si $n \geq N$ se tiene que:

$$\left|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{|b-b_n|}{|b||b_n|} < \frac{2|b-b_n|}{|b|^2} < \varepsilon$$

De esta manera queda demostrada la proposición. ■

Proposición 24 *Sean $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones en $\mathbb{R}$. Si $a_n \leq c_n \leq b_n \, \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = L$ entonces $\lim_{n\to\infty} c_n = L$.*

Demostración. Dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$ entonces $|a_n - L| < \epsilon$ y $|b_n - L| < \epsilon$. Luego si $n > N$ entonces

$$-\epsilon < a_n - L \leq c_n - L \leq b_n - L < \epsilon$$

■

Ejemplo 7

1. *$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. En efecto dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > \frac{1}{\epsilon^2}$. Luego si $n > N$ entonces $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N}} < \epsilon$*

2. *Si $0 < a < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. En efecto la sucesión es decreciente y acotada inferiormente luego es convergente. Consideremos la subsucesión $(a^{2n})_{n\in\mathbb{N}}$. Por lo tanto $L = \lim_{n\to\infty} a^{2n} = \lim_{n\to\infty} a^n \lim_{n\to\infty} a^n = L^2$. Luego $L = 0$.*

3. *Si $0 < a < 1$ entonces $\lim_{n\to\infty}(1 + a + a^2 + \cdots + a^n) = \frac{1}{1-a}$. Basta observar que $1 - a^{n+1} = (1-a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^n)$ y usar el ítem anterior*

4. *Si $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} = L$. En efecto:*
   Dado $\epsilon > 0$ existen $M > 0$ y $,N \in \mathbb{N}$ tales que:
   $|a_n - L| < M \; \forall n \in \mathbb{N}, |a_n - L| < \frac{\epsilon}{2}$ y $\frac{M}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ si $n \geq N$.
   Ahora si $n \geq N^2$ entonces $|\frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n} - L| \leq \frac{\sum_{i=1}^n |a_i - L|}{n} \leq \frac{\sum_{i=1}^N |a_i-L|}{n} + \frac{\sum_{i=N+1}^n |a_i-L|}{n} < \frac{M}{N^2}.N + \frac{\epsilon}{2}\frac{(n-N)}{n} < \frac{M}{N} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$

5. *La sucesión $a_n = 1+1+\cdots+\frac{1}{n!}$ es creciente y además $a_n \leq 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}\cdots+\frac{1}{2^n} < 3$ por lo tanto $\lim_{n\to\infty} a_n$ existe y su valor lo llamaremos e (Número de Euler).*

6. *$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = e$. En efecto*
   $b_n = (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j}(\frac{1}{n})^{n-j} \leq 1 + \sum_{j=0}^n \frac{1}{j!} \leq a_n$. (del ejemplo anterior).
   Además $(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$.
   Por lo tanto es una sucesión creciente.
   De otro lado, dado $p \in \mathbb{N}$ si tomamos $n \in \mathbb{N}$ $, n > p$ entonces
   $(1 + \frac{1}{n})^n \geq 1 + 1 + \frac{1}{2!}(1 - \frac{1}{n}) + \frac{1}{3!}(1 - \frac{1}{n})(1 - \frac{2}{n}) + \cdots + \frac{1}{p!}(1 - \frac{1}{n})\cdots(1 - \frac{p-1}{n})$.
   Así $a_p \leq b_n \leq a_n$ concluyendo lo deseado.(Ejercicio)

3.5. Límite superior y límite inferior

Dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ acotada en $\mathbb{R}$ existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que $\alpha \leq x_n \leq \beta$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $X_n = \{x_k : k \geq n\}$ tomamos

$$\begin{aligned} b_n &= \sup X_n, \text{ y} \\ a_n &= \text{ínf}\, X_n. \end{aligned}$$

De esta forma tenemos que

$$\alpha \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq a_n \leq \cdots \leq b_n \leq b_{n-1} \leq \cdots \leq b_1 \leq \beta.$$

Definición 28 *Definimos el límite inferior (notado por* $\text{lím inf}\, x_n$*) y el límite superior (notado por* $\text{lím sup}\, x_n$*) de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *como*

$$\begin{aligned} \text{lím inf}\, x_n &= \sup a_n = \text{lím}_{n\to\infty} a_n, \quad y \\ \text{lím sup}\, x_n &= \text{ínf}\, b_n = \text{lím}_{n\to\infty} b_n. \end{aligned}$$

Teorema 11 *Sea* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión acotada en* $\mathbb{R}$*. Entonces* $\text{lím inf}\, x_n$ *es el mínimo de todos los límites de subsucesiones convergentes de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*. Análogamente se tiene que* $\text{lím sup}\, x_n$ *es el máximo de todos los límites de subsucesiones convergentes de* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Demostración. Sea $a = \text{lím inf}\, x_n$.

- Veamos que existe una subsucesión que converge a a. Dados $\varepsilon > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, mostraremos que existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ y $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. En efecto, como $a = \text{lím}_{n\to\infty} a_n$, existe $n_1 > n_0$ tal que $a - \varepsilon < a_{n_1} < a + \varepsilon$. Como $a_{n_1} = \text{ínf}\, X_{n_1}$, se sigue de la última desigualdad que $a + \varepsilon$ no es cota inferior de X_{n_1}. Luego existe $n \geq n_1$ tal que $a_{n_1} \leq x_n < a + \varepsilon$. Luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ y $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Entonces por la proposición 21 anterior se garantiza que existe una subsucesión de $\{x_n\}$ que converge a a.

- Veamos que ningún $c < a$ no puede ser límite de una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En efecto, como $a = \text{lím}_{n\to\infty} a_n$ siendo $c < a$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c < a_{n_0} \leq a$. Como $a_{n_0} = \text{ínf}\, X_{n_0}$ tenemos que si $n \geq n_0$, entonces $c < a_{n_0} \leq x_n$. Tomando $\varepsilon = a_{n_0} - c$ para todo $n \geq n_0$ se tiene que $x_n \notin (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Esto significa que $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ tiene un número finito de elementos x_n, luego por la proposicón 21 no existe una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converja a c.

De manera análoga se prueba para $\text{lím sup}\, x_n$. ■

Corolario 6 *Toda sucesión acotada en* $\mathbb{R}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. En efecto, si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R}$, existe $a = \text{lím inf}\, x_n$ el cual es el límite de una subsucesión convergente. ■

Corolario 7 *Toda sucesión acotada en* $(\mathbb{R}^m, d_2)$ *tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Observe que si la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotada en $\mathbb{R}^m$, entonces las m sucesiones componentes del vector x_n son acotadas en $\mathbb{R}$. Los detalles de la demostración queda como ejercicio. ■

Corolario 8 *Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión de números reales entonces (x_n) es convergente en $\mathbb{R}$ si y solo si $\limsup x_n = \liminf x_n$.*

Demostración. Si (x_n) es convergente en $\mathbb{R}$, entonces $\limsup x_n = \lim x_n = \liminf x_n$.

Recíprocamente, supongamos que $\liminf x_n = L = \limsup x_n$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < a_{n_0} \leq L \leq b_{n_0} < L + \varepsilon$ (ya que existen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $L - \varepsilon < a_{n_1} < L + \varepsilon$ y $L - \varepsilon < b_{n_2} < L + \varepsilon$, tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ y $a_{n_0} \leq b_{n_0}$ siempre se tiene).

Si $n \geq n_0$, veamos que

$$L - \varepsilon < a_{n_0} \leq x_n \leq b_{n_0} < L + \varepsilon.$$

Esto se tiene puesto que $x_n \in X_n$, y por tanto $a_{n_0} \leq x_n \leq b_{n_0}$. Por lo tanto, $|x_n - L| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$, es decir, x_n converge a L. ■

Quiz 6 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso.*

1. *Sean (a_n) sucesión acotada en $(\mathbb{R}^m, d_\infty)$ y (b_n) una sucesión convergente en $(\mathbb{R}^m, d_2)$. Entonces $(a_n + b_n)$ es acotada en $(\mathbb{R}^m, d_2)$.*

2. *Si la sucesión (a_n) es convergente, con límite no nulo, en $(\mathbb{R}, d_2)$ y $a_{n+1} = 2(a_n)^2 - a_{n-1}$ para $n \geq 3$, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.*

3. *Sean (E, d) espacio métrico, (a_n) y (b_n) sucesiones en (E, d). Si $a_n = b_n$ para $n \geq m$ con $m \in \mathbb{N}$ y (a_n) es convergente, entonces (b_n) es convergente.*

4. *Si la sucesión (a_n) es convergente en $(\mathbb{R}^m, d_2)$, entonces $((-1)^n a_n)$ es convergente.*

5. $\limsup \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$

6. $\liminf \dfrac{(-1)^n n}{n+1} = 1.$

7. $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0.$

8. *Si $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$*

3.6. Completez

Definición 29 *Decimos que la sucesión* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *en* (E,d) *es de* Cauchy *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n, m \geq N$ *entonces* $d(a_n, a_m) < \varepsilon$.

Proposición 25 *Dada* (x_n) *sucesión en* (E,d) *espacio métrico:*

1. *Si* (x_n) *es una sucesión de Cauchy, entonces* (x_n) *es una sucesión acotada en* (E,d).
2. *Si* (x_n) *es una sucesión convergente, entonces* (x_n) *es una sucesión de Cauchy.*
3. *Si* (x_n) *es una sucesión de Cauchy, entonces toda subsucesión también es de Cauchy.*
4. *Si* (x_n) *es una sucesión de Cauchy y tiene una subsucesión convergente, entonces* (x_n) *es convergente.*

Demostración.

1. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $m, n > N$, entonces $d(x_m, x_n) < \varepsilon$. Fijemos $n_0 \geq N$. Luego para $m \geq N$ se tiene que $d(x_{n_0}, x_m) < \varepsilon$. Esto es, $x_m \in B(x_{n_0}, \varepsilon)$ para todo $m \geq N$. Por lo tanto, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es acotado en (E,d).
2. Ejercicio.
3. Ejercicio.
4. Sea (x_{n_k}) una subsucesión convergente de (x_n), que converge a $L \in E$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq N_1$, entonces $d(x_{n_k}, L) < \frac{\varepsilon}{2}$. Además, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N_2$, entonces $d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2}$. Como (n_k) es estrictamente creciente, entonces $n_k \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Tomando $N = \max\{N_1, N_2\}$, para $n \geq N$ y $n_N \geq N$ se tiene que $d(x_{n_N}, L) < \frac{\varepsilon}{2}$ y $d(x_n, x_{n_N}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $d(x_n, L) \leq d(x_n, x_{n_N}) + d(x_{n_N}, L) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Es decir, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a L.

De esta manera queda demostrada la proposición. ■

Definición 30 *Un espacio métrico es* completo *si toda sucesión de Cauchy converge a un punto del espacio.*

Proposición 26 $\mathbb{R}$ *con la métrica usual es un espacio métrico completo.*

Demostración. Sea (x_n) sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}, d_1)$. Por lo tanto, (x_n) es acotada, y por ser acotada existe una subsucesión que converge a $\limsup x_n$. Luego, utilizando la parte 4) de la proposición anterior, se tiene que (x_n) es convergente. ■

Corolario 9 $(\mathbb{R}^m, d_2)$ *es un espacio métrico completo.*

Demostración. Dados $X = (x^{(1)}, \cdots, x^{(m)})$, $Y = (y^{(1)}, \cdots, y^{(m)})$ elementos de $\mathbb{R}^m$, $d_2(X, Y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x^{(i)} - y^{(i)}|^2}$. Sea $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $(\mathbb{R}^m, d_2)$. Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $k, n \geq N$

$$d_2(X_k, X_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \left|x_k^{(i)} - x_n^{(i)}\right|^2} < \varepsilon.$$

Como $\left|x_k^{(i)} - x_n^{(i)}\right| \leq d_2(X_k, X_n) < \varepsilon$ (para $i = 1, \cdots, m$), luego $\left(x_n^{(i)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (R, d_1), para cada $i = 1, \cdots m$. Así, existe $y^{(i)} \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \cdots, m)$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n^{(i)} = y^{(i)}$. Veamos que $\lim_{n\to\infty} X_n = Y = (y^{(1)}, \cdots y^{(n)})$: En efecto, dado $\varepsilon > 0$, existen $N^{(i)} \in \mathbb{N}$ $(i = 1, \cdots, m)$ tales que si $n \geq N^{(i)}$, entonces $\left|x_n^{(i)} - y^{(i)}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{m}}$, para $i = 1, \cdots, m$. Sea $N = \max\left\{N^{(1)}, \cdots, N^{(m)}\right\}$. Si $n \geq N$, se tiene que $d_2(X_n, Y) < \varepsilon$, luego $\lim_{n\to\infty} X_n = Y$. ■

Si (E, d) es un espacio métrico y $S \subset E$, definimos el *diámetro* de S, notado por $\delta(S)$, como

$$\delta(S) = \sup\{d(x, y) : x, y \in S\}.$$

Proposición 27 *Un espacio métrico (E, d) es completo si y solo si para todo sucesión decreciente $E_1 \supset E_2 \supset ... \supset E_n \supset ...$ de subconjuntos cerrados no vacíos $E_n \subset E$, con $\lim_{n\to\infty} \delta(E_n) = 0$, existe un punto $a \in E$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{a\}$.*

Demostración. Supongamos que E es completo y sea $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión decreciente de subconjuntos cerrados no vacíos con $\lim_{n\to\infty} \delta(E_n) = 0$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, escojamos un punto $x_n \in E_n$. Esto define una sucesión (x_n) en E, tal que si $m, n \geq k$ entonces $x_m, x_n \in E_k$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\delta(E_N) < \varepsilon$. Por lo tanto, si $m, n \geq N$ entonces $d(x_m, x_n) < \varepsilon$, y por tanto (x_n) es una sucesión de Cauchy en E. Sea $\lim_{n\to\infty} x_n = a \in E$. Dado cualquier $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $x_n \in E_n$ para todo $n \geq k$, y como cada E_n es cerrado se tiene que $a \in E_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, o sea, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$. Evidentemente, no puede existir dos puntos $a \neq b$ en esta intersección porque esto obliga a que $0 < d(a, b) \leq \delta(E_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n = \{a\}$.

Recíprocamente, si la intersección de toda sucesión decreciente de cerrados no vacíos cuyos diámetros tienden a cero es un punto de E, demostremos que E es completo. En efecto, sea (x_n) una sucesión de Cauchy en E. Para todo $n \in \mathbb{N}$, sea $X_n = \{x_n, x_{n+1}, ...\}$. Entonces $(\overline{X_n})$ es una sucesión decreciente de conjuntos cerrados no vacíos en E. Como $\delta S = \delta(\overline{S})$ para todo subconjunto S de E, se tiene que $0 = \lim_{n\to\infty} \delta(\overline{X_n})$. Luego existe $a \in E$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} = \{a\}$. Como $a \in \overline{X_n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se sigue que para todo $\varepsilon > 0$ el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_E(a, \varepsilon)\}$ es infinito, o sea, a es límite de una subsucesión de (x_n). Como la sucesión es de Cauchy, concluimos que $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. ■

Teorema 12 (Baire) *Sean (E, d) espacio métrico completo y $(F_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una familia de conjuntos cerrados en (E, d) tales que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k = E$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $Int(F_k) \neq \emptyset$*

Demostración. Supongamos que $\text{Int}(F_k) = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, luego el conjunto abierto $A_k = E \setminus F_k$ tiene la propiedad que cualquier bola abierta del espacio intersecta A_k, para todo $k \in \mathbb{N}$. Consideremos $B(x_0, \delta_0)$ una bola abierta del espacio, luego existe $x_1 \in B(x_0, \delta_0) \cap A_1$. Como $B(x_0, \delta_0) \cap A_1$ es un conjunto abierto, existe $\delta_1 > 0$ tal que $B[x_1, \delta_1] \subset B(x_0, \delta_0) \cap A_1$.

De igual manera vemos que existe x_2 tal que $x_2 \in B(x_1, \delta_1) \cap A_2$ y por lo tanto existe δ_2 tal que $B[x_2, \delta_2] \subset B(x_1, \delta_1) \cap A_2$. Razonando de esta manera obtenemos una sucesión de bolas cerradas $(B[x_k, \delta_k])_{k\in\mathbb{N}}$, tal que $B[x_{k+1}, \delta_{k+1}] \subset B[x_k, \delta_k]$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la Proposición 27 existe $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} B[x_k, \delta_k]$, es decir, $a \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k$ lo cual es un absurdo dado que $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k = \emptyset$. ■

Quiz 7 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. $\mathbb{Z}$ *es completo con la métrica usual.*
2. *Toda sucesión de Cauchy en* $\mathbb{Z}$ *con la métrica discreta es convergente.*
3. $\mathbb{Q}$ *no es completo con la métrica usual.*
4. *Si* (a_n) *es de Cauchy en* $(\mathbb{R}^m, d_2)$ *y* (b_n) *es convergente en* $(\mathbb{R}^m, d_2)$*, entonces* $(a_n + b_n)$ *es de Cauchy.*
5. $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ *es un espacio métrico completo.*

3.7. Compacidad

Una familia de conjuntos $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un *cubrimiento* para S si $S \subset \bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha$. Sea (E, d) un espacio métrico, $S \subset E$ y $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ una colección de abiertos de (E, d). Si $S \subset \bigcup_{\alpha\in I} S_\alpha$, decimos que $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ es un *cubrimiento abierto* de S.

Definición 31 *Sea* (E, d) *espacio métrico y* $S \subset E$*. Decimos que* S *es* compacto *en* (E, d) *si todo cubrimiento abierto de* S *admite un subcubrimiento finito, es decir, si* $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ *es cubrimiento abierto de* S*, entonces existen* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I$ *tales que* $S \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_{\alpha_k}$*. Si* E *es compacto en* (E, d)*, decimos que* (E, d) *es un* espacio métrico compacto.

Ejemplo 8 *El intervalo* $(0, 1)$ *no es compacto en* $(\mathbb{R}, d_1)$*. Consideremos el cubrimiento* $\bigcup\limits_{n=2}^{\infty} (\frac{1}{n}, 1) = (0, 1)$*. Si tomamos un número finito de abiertos de la forma* $(\frac{1}{n_1}, 1), \cdots, (\frac{1}{n_j}, 1)$*, definiendo* $m = \max\{n_1, \cdots, n_j\}$*, vemos que* $\bigcup\limits_{i=1}^{j} (\frac{1}{n_i}, 1) = (\frac{1}{m}, 1) \neq (0, 1)$

Ejemplo 9 *Ningún conjunto infinito en* $(\mathbb{R}, d_d)$ *es compacto. Dado* $S \subset \mathbb{R}$ *infinito, consideremos* $\{\{s\} : s \in S\}$ *cubrimiento abierto de* S*. Claramente este cubrimiento no admite un subcubrimiento finito.*

Proposición 28 *Todo subconjunto finito de un espacio métrico es compacto.*

Demostración. Sea $S = \{x_1, \cdots, x_n\}$ subconjunto finito de (E, d). Si $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ es cubrimiento abierto de S, entonces cada $x_i \in S$ debe estar contenido en un abierto S_{α_i}. Por lo tanto, $S \subset \bigcup_{i=1}^{n} S_{\alpha_i}$. ■

Proposición 29 *Si $(E_1, d|_{E_1 \times E_1})$ es un subespacio de (E, d) y $S \subset E_1$ entonces S es compacto en $(E_1, d|_{E_1 \times E_1})$ si y solo si S es compacto en (E, d).*

Demostración. Suponga que S es compacto en $(E_1, d|_{E_1 \times E_1})$. Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un cubrimiento abierto de S en (E, d), es decir, $S \subset \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$. Como $S = S \cap E_1 \subset \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \cap E_1$, entonces $\{S_\alpha \cap E_1\}_{\alpha \in I}$ es un cubrimiento abierto de S en $(E_1, d|_{E_1 \times E_1})$. Luego existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I$ tales que $S \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_{\alpha_k} \cap E_1 \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_{\alpha_k}$. Por lo tanto, S es compacto en (E, d).

Recíprocamente, supongamos ahora que S es compacto en (E, d), y veamos que S es compacto en $(E_1, d|_{E_1 \times E_1})$. Sea $\{T_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un cubrimiento abierto de S en $(E_1, d_{|E_1 \times E_1})$. Como cada T_α es abierto en $(E_1, d_{|E_1 \times E_1})$, para cada $\alpha \in I$ existe un S_α abierto en (E, d) tal que $T_\alpha = S_\alpha \cap E_1$. Luego $S \subset \bigcup_{\alpha \in I} T_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (S_\alpha \cap E_1) \subset \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$. Así, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I$ tales que $S \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_{\alpha_k}$, y por lo tanto $S \subset \bigcup_{k=1}^{n} T_{\alpha_k}$. ■

Proposición 30 *Todo subconjunto cerrado de un espacio métrico compacto es compacto.*

Demostración. Sea (E, d) espacio métrico compacto, y $S \subset E$ cerrado en (E, d). Sea $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un cubrimiento abierto de S. Luego $\{S_\alpha\}_{\alpha \in I} \cup \{S^c\}$ es un cubrimiento abierto para E, esto es, $E \subset \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \cup S^c$. Como E es compacto, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_k \in I$ tales que $E = \bigcup_{k=1}^{n} S_{\alpha_k} \cup S^c$. Así, $S = (\bigcup_{k=1}^{n} S_{\alpha_k} \cup S^c) \cap S = \bigcup_{k=1}^{n} (S_{\alpha_k} \cap S) \cup (S^c \cap S) = \bigcup_{k=1}^{n} (S_{\alpha_k}) \cap S \subset \bigcup_{k=1}^{n} S_{\alpha_k}$, Y por lo tanto S es compacto. ■

Proposición 31 *Un subconjunto compacto de un espacio métrico, es acotado.*

Demostración. Sean (E, d) espacio métrico y $S \subset E$ compacto en (E, d). Entonces $\{B(p, 1)\}_{p \in S}$ es un cubrimiento abierto de S en (E, d). Como S es compacto, existen $p_1, \cdots, p_n \in S$ tales que $S \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(p_i, 1)$. Así que S es acotado por estar contenido en una unión finita de conjuntos acotados. ■

Teorema 13 *Si $S_1 \cdots, S_n, \cdots$ es una sucesión de conjuntos cerrados no vacíos de un espacio métrico compacto tales que $S_1 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots$, entonces $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i = \emptyset$. Por lo tanto, $\left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}} S_i\right)^c = E$. Esto es, $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} S_i^c = E$. Como E es compacto, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{N}$ tales que $E = \bigcup_{k=1}^{n} S_{\alpha_k}^c = S_{\alpha_p}^c$ para algún $1 \leq p \leq n$. Así, $E = S_{\alpha_p}^c$, y por lo tanto $E^c = S_{\alpha_p} = \emptyset$ lo cual es una contradicción. ■

Teorema 14 (Teorema de Bolzano) *Todo subconjunto infinito de un espacio métrico compacto admite al menos un punto de acumulación.*

Demostración. Sea (E,d) espacio métrico compacto y $S \subset E$ infinito. Supongamos que S no tiene puntos de acumulación en (E,d). Esto significa que para todo $p \in E$, existe $r_p > 0$ tal que $B(p,r_p) \cap S$ ó es vacío ó es un conjunto unitario. Observe que $\{B(p,r_p)\}_{p\in E}$ es un cubrimiento abierto de E en (E,d), y como E es compacto existen $p_1, \cdots, p_n$ tales que $E = \bigcup_{k=1}^{n} B(p_k, r_{p_k})$. Así $S = \bigcup_{k=1}^{n} B(p_k, r_{p_k}) \cap S$, y como $\bigcup_{k=1}^{n} B(p_k, r_{p_k}) \cap S$ es un conjunto finito, entonces S es finito, lo cual es una contradicción. ■

Corolario 10 *Toda sucesión de puntos de un espacio métrico compacto, tiene una subsucesión convergente.*

Demostración. Sean (E,d) un espacio métrico compacto y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (E,d). Consideremos $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

1. Si A es finito, observe que existe $p \in A$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe $n > N$ tal que $x_n = p$. Así, para:
   $N = 1$, existe $n_1 > 1$ tal que $x_{n_1} = p$.
   $N = n_1$, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} = p$.
   $\vdots$
   $N = n_{k-1}$, existe $n_k > n_{k-1}$ tal que $x_{n_k} = p$.
   Luego $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ es una subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p$.

2. Si A es infinito, por el Teorema de Bolzano, A tiene un punto de acumulación $p \in E$.
   Como $B(p,1) \cap A$ es infinito, existe $x_{n_1} \in B(p,1) \cap A$.
   Como $B(p,\frac{1}{2}) \cap A$ es infinito, existe $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in B(p,\frac{1}{2}) \cap A$.
   $\vdots$
   Como $B(p,\frac{1}{k}) \cap A$ es infinito, existe $n_k > n_{k-1}$ tal que $x_{n_k} \in B(p,\frac{1}{k}) \cap A$.
   Consideremos la subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p$.

De esta manera queda demostrado el corolario. ■

Corolario 11 *Todo espacio métrico compacto es completo.*

Demostración. Sea (E,d) un espacio métrico compacto. Si (x_n) es una sucesión de Cauchy en E, entonces por el Corolario 10 ésta tiene una subsucesión convergente. Así (x_n) es una sucesión convergente y por lo tanto (E,d) es completo. ■

Corolario 12 *Todo subconjunto compacto de un espacio métrico es cerrado.*

Demostración. Sean (E,d) espacio métrico y $S \subset E$ compacto en (E,d). Sea $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de puntos de S en (E,d) tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = p \in E$. Veamos que $p \in S$. Por el Corolario 11, $(S, d|_{S\times S})$ es espacio métrico completo. Como $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $(S, d|_{S\times S})$, existe $q \in S$ tal que $\lim_{n\to\infty} s_n = q$. Por la unicidad de este límite tenemos que $q = p$. Luego $p \in S$. ■

Lema 5 *Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es acotado en $(\mathbb{R}^n, d_2)$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, S está contenido en la unión de un número finito de bolas cerradas de radio ε.*

Demostración. Dado $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $m \in \mathbb{N}$ fijo, existen enteros $a_1, a_2, \cdots, a_n$ tales que $\frac{a_i}{m} \leq x_i < \frac{a_i+1}{m}$ para $i = 1, \cdots, n$. Entonces,

$$d_2\Big((x_1, \cdots, x_n), (\frac{a_1}{m}, \cdots, \frac{a_n}{m})\Big) = \sqrt{\Big(x_1 - \frac{a_1}{m}\Big)^2 + \cdots + \Big(x_n - \frac{a_n}{m}\Big)^2} <$$

$$\sqrt{\frac{1}{m^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}} = \frac{\sqrt{n}}{m}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ escojamos $m > 0$ número entero de tal manera que $\frac{\sqrt{n}}{m} < \varepsilon$. Sea $S \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Entonces existe $r > 0$ tal que $S \subset B(0, r)$. Ahora, si $(x_1, \cdots, x_n) \in S$ existen $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{Z}$ con $\frac{a_i}{m} \leq x_i < \frac{a_i+1}{m}$ tales que $\left|\frac{a_i}{m}\right| = \left|x_i + \left(\frac{a_i}{m} - x_i\right)\right| \leq |x_i| + \left|\frac{a_i}{m} - x_i\right| < r + \frac{1}{m}$. Entonces cada $|a_i| < rm + 1$. Luego $S \subset \bigcup_{c \in C} B[c, \varepsilon]$, donde $C = \left\{(\frac{a_1}{m}, \cdots, \frac{a_n}{m}) : a_i \in \mathbb{Z} \ \text{ y } \ |a_i| < mr + 1\right\}$. Observe que C es finito porque m es fijo y los enteros a_i pueden tomar un número finito de datos. ■

Teorema 15 (Heine-Borel) *S es compacto en $\mathbb{R}^n$ si y solo si S es cerrado y acotado.*

Demostración. Si S es compacto en $\mathbb{R}^n$, entonces es cerrado por Corolario 12 y acotado por la Proposición 31.

Recíprocamente, supongamos que S es cerrado, acotado y no es compacto. Por lo tanto, existe $\mathcal{F} = \{S_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento abierto de S en $\mathbb{R}^n$ tal que ningún subcubrimiento finito de $\mathcal{F}$ cubre a S. Aplicando el Lema anterior a S para $\varepsilon = \frac{1}{2}$, tenemos que $S = (S \cap B_1) \cup \cdots \cup (S \cap B_k)$, donde $B_1, \cdots, B_k$ son bolas cerradas en $(\mathbb{R}^n, d_2)$ de radio $\frac{1}{2}$. Entonces para algún $j_0 \in \{1, \cdots, k\}$, $S \cap B_{j_0}$ no es cubierto por subcubrimientos finitos de $\mathcal{F}$. Llamamos $\tilde{S_1} = S \cap B_{j_0}$. Por lo tanto, $\tilde{S_1}$ es cerrado, acotado con diámetro $\delta(\tilde{S_1}) \leq 1$. Aplicando nuevamente el Lema anterior a $\tilde{S_1}$ para $\varepsilon = \frac{1}{4}$, y repitiendo el razonamiento anterior, vemos que existe $\tilde{S_2} \subset \tilde{S_1}$, $\tilde{S_2}$ cerrado, acotado con $\delta(\tilde{S_2}) \leq \frac{1}{2}$ tal que ningún subcubrimiento finito de $\mathcal{F}$ cubre a $\tilde{S_2}$.

Continuando, encontraríamos $S \supset \tilde{S_1} \supset \tilde{S_2} \supset \cdots \supset \tilde{S_m} \supset \cdots$ tal que cada $\tilde{S_m}$ es cerrado, acotado con $\delta(\tilde{S_m}) \leq \frac{1}{2^{m-1}}$, y ningún subcubrimiento finito de $\mathcal{F}$ cubre a $\tilde{S_m}$, para todo $m \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{R}^n$ es completo existen $p \in S \cap \cap_{j=1}^{\infty} \tilde{S_j}$ e $i_0 \in I$ tales que $p \in S_{i_0}$. Siendo S_{i_0} abierto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(p, \varepsilon) \subset S_{i_0}$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$. Si $q \in \tilde{S_N}$, entonces $d(p, q) \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \varepsilon$
Así, $q \in B(p, \varepsilon)$ y por lo tanto $\tilde{S_N} \subset B(p, \varepsilon)$. Luego $\tilde{S_N} \subset S_{i_0}$ lo cual es una contradicción, (ya que $\tilde{S_N}$ no se deja cubrir por un subcubrimiento finito de $\mathcal{F}$). ■

Por ejemplo, $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ es un conjunto cerrado y acotado en $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Entonces S^1 es un subconjunto compacto del plano. De igual manera, el toro T^2 en el espacio que se obtiene al rotar la circunferencia $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ con $a > r > 0$ alrededor del eje y, es un conjunto cerrado y acotado en $\mathbb{R}^3$. Entonces T^2 es un subconjunto compacto del espacio.

Definición 32 *Un espacio métrico es* secuencialmente compacto *si toda sucesión tiene una subsucesión convergente.*

Definición 33 *Un espacio métrico es* totalmente acotado *si para todo $\varepsilon > 0$ el espacio métrico es la unión de un número finito de bolas cerradas de radio ε.*

Teorema 16 *Sea (E, d) un espacio métrico. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) E es compacto.

b) Todo subconjunto infinito de E tiene un punto de acumulación

c) E es secuencialmente compacto.

d) E es totalmente acotado y completo.

Demostración. a) $\Rightarrow$ b): Teorema de Bolzano.

b) $\Rightarrow$ c): Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de (E, d). Tome $A = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Si A es finito, existen $a \in A$ y una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_{n_k} = a$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Si A es infinito, entonces existe $p \in E$ tal que $p \in A'$. Luego existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = p$.

c) $\Rightarrow$ d): Veamos primero que E es completo. Dada (x_n) una sucesión de Cauchy en E, por hipótesis ésta tiene una subsucesión convergente y por lo tanto (x_n) es convergente. Así (E, d) es completo.

Veamos ahora, que E es totalmente acotado. Dado $\varepsilon > 0$ escojamos un punto $x_1 \in E$. Si $E = B[x_1, \varepsilon]$ el resultado está probado. Caso contrario, existe $x_2 \in E$ tal que $d(x_2, x_1) > \varepsilon$. Si $E = B[x_1, \varepsilon] \cup B[x_2, \varepsilon]$ el resultado está probado. Caso contrario, existe $x_3 \in E$ con $d(x_3, x_2) > \varepsilon$ y $d(x_3, x_1) > \varepsilon$. Continuando con el mismo razonamiento llegamos a que existe un $n \in \mathbb{N}$ tal que $E = B[x_1, \varepsilon] \cup \cdots \cup B[x_n, \varepsilon]$ o caso contrario existe una sucesión (x_n) en E tal que $d(x_m, x_n) > \varepsilon$ para $m \neq n$ cualesquiera. En este caso, (x_n) no tiene alguna subsucesión convergente, lo cual contradice la hipótesis de que E es secuencialmente compacto.

d) $\Rightarrow$ a): Por contradicción, supongamos que (E, d) no es compacto. Luego existe $\mathcal{F} = \{S_i\}_{i\in I}$ cubrimiento abierto de E tal que ningún subcubrimiento finito de $\mathcal{F}$ cubre a E. Como E es totalmente acotado, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ existen $x_1 \cdots, x_n \in E$ tales que $E = \bigcup_{k=1}^{n} B[x_k, \varepsilon]$. Por lo menos una de estas bolas, llamémola B_1, es tal que $B_1 \subset \bigcup_{i\in I} S_i$ y ningún subcubrimiento finito de $\mathcal{F}$ cubre a B_1. Observe que $\delta(B_1) \leq \frac{1}{2^0}$. Como B_1 es también totalmente acotado, para $\varepsilon = \frac{1}{4}$ existe $y_1 \cdots, y_m \in B_1$ tales que $B_1 = \bigcup_{l=1}^{m} B[y_l, \varepsilon] \cap B_1$. Alguno de estos conjuntos cerrados, llamémosla B_2, es tal que $B_2 \subset \bigcup_{i\in I} S_i$ y ningún subcubrimiento finito de $\mathcal{F}$ cubre a B_2. Observe que $\delta(B_2) \leq \frac{1}{2^1}$.

Razonando de igual manera obtenemos $B_1 \supset B_2 \supset \cdots \supset B_n \supset \cdots$ tales que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos que B_n es cerrado, $\lim_{n\to\infty} \delta(B_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ y B_n no está contenido en un subcubrimiento finito de $\mathcal{F}$. Como E es completo existe $a \in E$ tal que $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \{a\}$. Luego $a \in S_{i_0}$ para algún $i_0 \in I$. Como S_{i_0} es abierto existe $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande tal que $B(a, \frac{1}{N}) \subset S_{i_0}$. Como $a \in B_N$ y $\delta(B_N) \leq \frac{1}{2^{N-1}} < \frac{1}{N}$, entonces $B_N \subset B(a, \frac{1}{N}) \subset S_{i_0}$, lo cual contradice que B_N no está contenido en un subcubrimiento finito de $\mathcal{F}$. ■

Ejemplo 10 *Si un espacio métrico (E, d) es compacto entonces es separable (es decir existe un subconjunto A contable tal que $\overline{A} = E$).*
Como E es totalmente acotado dado $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n = \{x_1^{(n)} \cdots, x_m^{(n)}\}$ tales que $E = \cup_{j=1}^{m} B[x_j^{(n)}, \frac{1}{n}]$. Defina $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$. A es contable, además para $x \in E$ y $\epsilon > 0$ existen $j, m \in \mathbb{N}$ tales que $\frac{1}{m} < \frac{\epsilon}{2}$ y $x \in B[x_j^{(m)}, \frac{1}{m}]$. Por lo tanto $x_j^{(m)} \in B(x, \epsilon)$

Quiz 8 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. *Sean (E, d) espacio métrico y $F \subset E$. Si todo cubrimiento por conjuntos cerrados de F admite un subcubrimiento finito, entonces F es compacto.*
2. *El conjunto $(0, 1]$ no es compacto en $\mathbb{R}$ con la métrica usual.*
3. *Todo conjunto totalmente acotado es completo.*
4. *Todo conjunto completo es totalmente acotado.*
5. *Todo espacio métrico secuencialmente compacto es completo.*
6. *Todo espacio métrico completo es compacto.*
7. *Todo subconjunto cerrado y acotado de un espacio métrico es compacto.*

3.8. Conexidad

Definición 34 *Un espacio métrico (E, d) es* conexo *si los únicos subconjuntos que son simultáneamente abiertos y cerrados en (E, d) son E y $\emptyset$. Decimos que $S \subset E$ es* conexo, *si $(S, d|_{S\times S})$ es conexo.*

Un espacio métrico (E, d) no es conexo, si existe $A \neq \emptyset$ y $A \neq E$ tal que A es abierto y cerrado en E. Por lo tanto, $E = A \cup A^c$ con A y A^c abiertos no vacíos y disyuntos. Luego, (E, d) no es conexo si existen A, B abiertos en (E, d) no vacíos y disyuntos, tales que $E = A \cup B$. En consecuencia, si se quiere probar que E es conexo, se toma $E = A \cup B$ con A, B abiertos disyuntos, y se debe probar que $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$.

Intuitivamente, un espacio métrico conexo es constituido de "*un solo pedazo*". Un espacio discreto con más de un punto, por ejemplo, es disconexo (no conexo). En efecto, cualquier subconjunto es simultáneamente abierto y cerrado. El conjunto $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ con la métrica usual en la recta también es un espacio métrico disconexo pues el subconjunto de los números negativos es abierto y cerrado en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Proposición 32 *Sea* $\{S_i\}_{i\in I}$ *una familia de subconjuntos conexos de un espacio métrico* (E,d). *Si existe* $i_0 \in I$ *tal que* $S_{i_0} \cap S_i \neq \emptyset$ *para todo* $i \in I$, *entonces* $S = \bigcup_{i\in I} S_i$ *es conexo en* (E,d).

Demostración. Supongamos que $S = A \cup B$ con A, B abiertos disyuntos en S. Debemos ver que $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$. Entonces $S_i = S \cap S_i = (A \cap S_i) \cup (B \cap S_i)$ para todo $i \in I$. Observe que $A \cap S_i$ y $B \cap S_i$ son abiertos y disyuntos en S_i. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer en particular que $S_{i_0} = A \cap S_{i_0} \subset A$, por ser S_{i_0} conexo. Ahora, como $S_i \cap S_{i_0} \neq \emptyset$ y $S_{i_0} \subset A$, se tiene que $S_i \subset A$ para cada $i \in I$. De lo contrario, existirían $i \in I$ y $x \in S_i$ tales que $x \notin A$. Entonces $x \in B$ lo que implicaría que $A \cap S_i$ y $B \cap S_i$ son no vacíos, lo que contradice la conexidad de S_i. Por lo tanto, $S \subset A$ y $B = \emptyset$. Es decir, S es conexo. ■

Proposición 33 *Sean* (E,d) *espacio métrico y* S *un subconjunto de* E *tal que* $\overline{S} = E$. *Si* S *es conexo, entonces* (E,d) *es conexo.*

Demostración. Para todo subconjunto A abierto en E y no vacío tenemos que $A \cap S$ es abierto en S y no vacío porque S es denso en E. Si suponemos que E no es conexo, existiría una descomposición $E = A \cup B$, con A y B abiertos en E no vacíos y disyuntos. Entonces $S = E \cap S = (A \cap S) \cup (B \cap S)$, (Nótese que $A \cap S \neq \phi$ y $B \cap S \neq \phi$ ¿por qué?) lo que implica que S no es conexo (contradicción). Por lo tanto, (E,d) es conexo. ■

Ejemplo 11 *Una aplicación de la Proposición 33 es la siguiente. Sea* E *el subespacio métrico de* $(\mathbb{R}^2, d_2)$ *dado por*

$$E = \{(0,x) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1/n, y) : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\} \cup \{(0,1)\}$$

y $S \subset E$ *dado por*

$$S = \{(0,x) : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(1/n, y) : n \in \mathbb{N}, 0 \leq y \leq 1\}.$$

Si aceptamos que S *es conexo (*un peine formado por un solo pedazo*) y como* $\overline{S} = E$, *entonces* (E, d_2) *es conexo.*

Lema 6 *Sean* (E,d) *espacio métrico y* $(E_1, d|_{E_1\times E_1})$ *subespacio de* (E,d). *Si* $F \subset E_1$ *es cerrado en* $(E_1, d|_{E_1\times E_1})$, *entonces existe* G *cerrado de* (E,d) *tal que* $F = G \cap E_1$.

Demostración. $E_1 \setminus F$ es abierto en $(E_1, d|_{E_1\times E_1})$. Luego existe W abierto en (E,d), tal que $E_1 \setminus F = W \cap E_1$. Es decir, $E_1 \cap F^c = W \cap E_1$. Por lo tanto, $(E_1)^c \cup F = W^c \cup (E_1)^c$. Intersectando con E_1, tenemos que $F = F \cap E_1 = W^c \cap E_1$. Tomando $G = W^c$, se tiene el resultado. ■

Definición 35 *Sean* $a, b, c \in \mathbb{R}$. *Se dice que* c *está entre* a *y* b, *si* $a < c < b$ *ó* $b < c < a$.

Teorema 17 *Si* $S \subset \mathbb{R}$ *es tal que contiene todos los puntos entre dos cualesquiera de sus puntos, entonces* S *es conexo en* $(\mathbb{R}, d_1)$.

Demostración. Supongamos que S no es conexo, esto es, $S = A \cup B$ con A, B abiertos no vacíos y disyuntos en S. Sean $a, b \in S$ con $a < b$ tales que $a \in A$ y $b \in B$. Así, $[a, b] = S \cap [a, b] = (A \cap [a, b]) \cup (B \cap [a, b])$ dado que $[a, b] \subset S$. Como A es cerrado en S, existe F cerrado en $\mathbb{R}$ tal que $A = F \cap S$. Por lo tanto, $A \cap [a, b] = (F \cap S) \cap [a, b] = F \cap [a, b]$ el cual es cerrado en $(\mathbb{R}, d_1)$. Como $A \cap [a, b]$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}$, existe $c = \max A \cap [a, b]$, donde $c < b$ ya que $b \notin A$. Como $A_1 = A \cap [a, b]$ es abierto en $[a, b]$ y $c \in A_1$, entonces existe $\varepsilon > 0$ tal que $(c - \varepsilon, c + \varepsilon) \cap [a, b] \subset A_1$ lo cual contradice el hecho de que c sea el máximo de A_1. ∎

Corolario 13 *Un subconjunto S de $\mathbb{R}$ es conexo si y solo si S es un intervalo en $\mathbb{R}$.*

Demostración. Si S es un intervalo de $\mathbb{R}$, entonces contiene todos los puntos entre dos cualesquiera de sus puntos. Entonces por el Teorema 17, S es conexo.

Suponga que S es conexo en $\mathbb{R}$ y que S no es un intervalo. Entonces existen números reales $a, b \in S$ y $c \notin S$ tales que $a < c < b$. Se sigue que $A = (-\infty, c) \cap S$ y $B = (c, +\infty) \cap S$ son abiertos en S, disyuntos y no vacíos ($a \in A$ y $b \in B$) con $S = A \cup B$. Luego S es disconexo lo cual es una contradicción. ∎

Quiz 9 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. *El espacio métrico $(\mathbb{Z}, d_1|_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}})$ es conexo.*
2. *$\mathbb{R}$ con la métrica discreta es conexo.*
3. *Si A es conexo en $(\mathbb{R}^n, d_2)$ entonces A es conexo en $(\mathbb{R}^n, d_1)$.*
4. *Si un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ es conexo con la métrica usual, entonces $\mathbb{R} \setminus X$ es conexo con la métrica usual.*
5. *Si $A \subset \mathbb{R}$ es conexo con la métrica usual, entonces $A \setminus \{a_1, \cdots, a_n\}$,donde cada $a_i \in A$, es conexo con la métrica usual.*
6. *Sean (E, d) espacio métrico y $A \subseteq E$. Si A es conexo entonces int(A) es conexo.*
7. *Sean (E, d) espacio métrico y $A \subseteq E$. Si int(A) es conexo entonces A es conexo.*

Ejercicio 3 1. *Sea V un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.*

a) *Una aplicación*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : V &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

se denomina norma si:

(1) *Para todo $x \in V$, $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si y solo si $x = 0$.*

(2) Para todo $x \in V$ y todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$.

(3) Para todo $x, y \in V$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Demuestre que si $(V, \|\cdot\|)$ es un espacio vectorial normado, entonces (V, d) es un espacio métrico, con

$$\begin{array}{rcl} d : V \times V & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & d(x,y) = \|x-y\|\,. \end{array}$$

a) *A fin de que una métrica de un espacio vectorial real V provenga de una norma es necesario y suficiente que dados $y, x, a \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, $d(x+a, y+a) = d(x,y)$ y $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$.*

b) *Demuestre que todas las normas de $\mathbb{R}^n$ son equivalentes, es decir, dadas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ normas en $\mathbb{R}^n$ existen $c, d > 0$ tales que $c\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq d\|x\|_2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Sugerencia: muestre que la relación de equivalencia de las normas es una relación de equivalencia, muestre que toda norma en $\mathbb{R}^n$ es equivalente con la norma $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ donde $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ y e_i es el $i-$ésimo vector de la base canónica. Primero muestre que dada una norma $\|\|$ en $\mathbb{R}^n$ existe $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c\|x\|_1\, \forall x \in \mathbb{R}^n$. Después muestre la otra desigualdad por reducción al absurdo; es decir, suponga que $\forall n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x_n\|_1 > n\|x_n\|$*

2. *Si (E, d) es un espacio métrico, defina:*

$$\begin{array}{rcl} d' : E \times E & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \end{array}$$

Demuestre que (E, d') es un espacio métrico.

3. *Pruebe que en $(\mathbb{R}, d_1)$:*

   a) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

   b) $\lim_{n\to\infty} \frac{\nu(n)}{n} = 0$; *donde $\nu(n)$ es el número de divisores primos de n.*

   c) *La sucesión*

$$\left(\frac{1}{2}\,,\ \frac{1}{2+\frac{1}{2}}\,,\ \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2}}}\,,\ \ldots \right)$$

   es convergente.

4. *Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesiones acotadas en $(\mathbb{R}, d_1)$, y tomemos $a = \liminf x_n$, $A = \limsup x_n$, $b = \liminf y_n$, $B = \limsup y_n$. Demuestre que:*

   a) $\limsup(x_n + y_n) \leq A + B$.

   b) $\limsup(-x_n) = -a$.

c) $\liminf(x_n + y_n) \geq a + b$.

d) $\liminf(-x_n) = -A$.

e) $\liminf(x_n \cdot y_n) \geq ab$

5. *Encuentre el interior, la clausura, la frontera, los puntos de acumulación en* $(\mathbb{R}, d_1)$ *de los siguientes conjuntos:*

   a) $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$

   b) $B = \{\frac{1}{n} + \frac{1}{m} : n, m \in \mathbb{N}\}$

   c) $\mathbb{Q}$

   d) $\mathbb{I}$

   e) $[a, b)$

   f) $\{2^{-n} + 5^{-m} : n, m \in \mathbb{Z}^+\}$

6. *Dados* S, T *subconjunto de un espacio métrico* (E, d)*, pruebe que:*

   a) $Int(S \cap T) = Int(S) \cap Int(T)$.

   b) $Int(S \cup T) \supset Int(S) \cup Int(T)$.

   c) $\overline{S \cap T} \subset \overline{S} \cap \overline{T}$.

   d) S' *es cerrado.*

   e) $(S \cup T)' = S' \cup T'$.

   f) $(\overline{S})' = S'$.

7. *Si* $X \subseteq \mathbb{R}^n$ *es no contable muestre que* $X \cap X' \neq \phi$ *y* X' *es no contable*

8. *Un conjunto* $V \subset \mathbb{R}^n$ *es convexo, si dados* $u, v \in V$*, entonces* $tu + (1-t)v \in V$ *para todo* $t \in [0, 1]$*. Considerando* $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *demuestre que:*

   a) *Las bolas abiertas de* (R^n, d_2) *son convexos de* $\mathbb{R}^n$.

   b) *El interior de un convexo, es convexo.*

   c) *La clausura de un convexo, es convexo.*

9. *Sea* (M, d) *espacio métrico. Si* $S, A \subset M$ *son tales que* $A \subset S \subset \overline{A}$*, decimos que* A *es denso en* S.

   a) *Considerando* $(\mathbb{R}^n, d_2)$*, pruebe que* $\mathbb{Q}^n$ *es denso en* $\mathbb{R}^n$.

   b) *Si* A *es denso en* S *y* B *es abierto en* S*, muestre que* $B \subset \overline{A \cap B}$.

10. *Sea* (E, d) *un espacio métrico.Si todo conjunto infinito de* E *tiene un punto de acumulación en* (E, d) *muestre que existe* $B \subseteq E$ *contable y* $\overline{B} = E$ *(es decir* E *es separable). Sugerencia:muestre que para* $\delta_n = \frac{1}{n}$ *existen* $x_1^{(n)} \cdots, x_l^{(n)} \in E$ *tales que* $d(x_i^{(n)}, x_j^{(n)}) > \frac{1}{n}$ *si* $i \neq j$ *y que* $E = \cup B[x_i^{(n)}, \frac{1}{n}]$

11. *Consideremos* $(\mathbb{R}^n, d_2)$. *Un subconjunto* $S \subset \mathbb{R}^n$ *es perfecto si* $S' = S$. *Pruebe que si* S *es perfecto, entonces* S *no es enumerable.*
Sugerencia: use el teorema de Baire

12. *Demuestre que el conjunto de Cantor es perfecto en* $(\mathbb{R}, d_1)$.

13. *Sean* $(\mathbb{R}^n, d_2)$ *y* $X \subseteq \mathbb{R}^n$. *Muestre que todo cubrimiento abierto de* X *admite un subrecubrimiento contable (Lindelöf).Sugerencia considere el conjunto* $\{B(q, r) : q \in \mathbb{Q}^n, r \in \mathbb{Q}\}$

14. *Sean* U *abierto en* (E, d) *y* $\{K_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ *una familia de compactos de* (E, d) *tales que* $K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \cdots$. *Si* $K = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \subset U$, *entonces existe* $i \in \mathbb{N}$ *tal que* $K_i \subset U$.

15. *Sean* (E, d) *espacio métrico,* $S, T \subset E$ *tales que* S *es cerrado y* T *es compacto. Demuestre que* $S \cap T$ *es compacto.*

16. *Sean* (E, d) *espacio métrico y* $X, Y \subset E$. *Si* X *es conexo y* $X \subset Y \subset \overline{X}$, *entonces* Y *es conexo. Concluya en particular que la adherencia de un conjunto conexo es conexo.*

17. *Describa todos los conjuntos conexos y enumerables de* $(\mathbb{R}^n, d_2)$.

18. *Sean* C, X *subconjuntos de un espacio métrico* (E, d). *Si* C *es conexo y tiene puntos en común con* X *y con* $E \setminus X$, *entonces muestre que algún punto de* C *pertenece a la frontera de* X.

Capítulo 4

Funciones entre espacios métricos

En este capítulo estudiamos los invariantes topológicos, es decir aquellas propiedades de los conjuntos que se conservan al ser mapeados por funciones continuas.

4.1. Funciones continuas sobre espacios métricos

Sean $f : X \to Y$ un función, $A, B \subset X$ y $M, N \subset Y$. Recordemos las siguientes propiedades:

1. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
2. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
3. Si $A \subset B$, entonces $f(A) \subset f(B)$.
4. $f^{-1}(M \cup N) = f^{-1}(M) \cup f^{-1}(N)$.
5. $f^{-1}(M \cap N) = f^{-1}(M) \cap f^{-1}(N)$.
6. $f^{-1}(Y \setminus M) = X \setminus f^{-1}(M)$.
7. Si $M \subset N$, entonces $f^{-1}(M) \subset f^{-1}(N)$.
8. $f^{-1}(f(A)) \supset A$. Además, $f^{-1}(f(A)) = A$ si y solo si f es inyectiva.
9. $f(f^{-1}(M)) \subset M$. Además, $f(f^{-1}(M)) = M$ si y solo si f es sobreyectiva.

Definición 36 *Sean (E_1, d_1) y (E_2, d_2) espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ una función. Se dice que f es* continua *en $p \in E_1$ si dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de ε y de p) tal que si $d_1(p, x) < \delta$, entonces $d_2(f(p), f(x)) < \varepsilon$. Decimos que f es continua, si f es continua en todo $p \in E_1$.*

Observación 4 *Una forma equivalente de enunciar la continuidad en p es la siguiente: dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de ε y de p) tal que $f(B_{E_1}(p, \delta)) \subset B_{E_2}(f(p), \varepsilon)$.*

Ejemplo 12 *Considere la función*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2. \end{array}$$

Veamos que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$. En efecto, como

$$\begin{array}{rcl} \left|x^2 - x_0^2\right| & = & |x - x_0|\,|x + x_0| \\ & = & |x - x_0|\,|x - x_0 + 2x_0| \\ & \leq & |x - x_0|\,(|x - x_0| + 2\,|x_0|) \end{array}$$

tenemos que $|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$ siempre que $|x - x_0| < 1$ y $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}$. Por lo tanto, tomando $\delta = \text{mín}\{1, \frac{\varepsilon}{1+2|x_0|}\}$ se obtiene lo requerido.

Ejemplo 13 *La función*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \lambda x \end{array}$$

es continua, pues para todo punto $p \in \mathbb{R}^n$, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \varepsilon/|\lambda|$ tal que si $\|x - p\| < \delta = \varepsilon/|\lambda|$, entonces $\|\lambda x - \lambda p\| < \varepsilon$.

Ejemplo 14 *La función*

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & x + a \end{array}$$

es continua, pues basta tomar $\delta = \varepsilon$.

Proposición 34 *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ una función. Entonces f es continua si y solo si la imagen inversa de todo abierto en E_2 es un abierto en E_1.*

Demostración. Asuma que f es continua. Sea G abierto en E_2. Veamos que $f^{-1}(G)$ es un abierto en E_1. Dado $x \in f^{-1}(G)$ tenemos que $f(x) \in G$. Como G es abierto en E_2, existe $r > 0$ tal que $B_{E_2}(f(x), r) \subset G$. De otro lado como f es continua en x, para $\varepsilon = r > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $f(B_{E_1}(x, \delta)) \subset B_{E_2}(f(x), r)$. Luego $B_{E_1}(x, \delta) \subset f^{-1}(G)$.

Recíprocamente, dado $x \in E_1$ veamos que f es continua en x. Para esto tomemos $\varepsilon > 0$. Dado que $f^{-1}(B_{E_2}(f(x), \varepsilon))$ es abierto en E_1 y que $x \in f^{-1}(B_{E_2}(f(x), \varepsilon))$, existe $\delta > 0$ tal que $B_{E_1}(x, \delta) \subset f^{-1}(B_{E_2}(f(x), \varepsilon))$. Luego $f(B_{E_1}(x, \delta)) \subset B_{E_2}(f(x), \varepsilon)$. ■

Proposición 35 *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) y (E_3, d_3) espacios métricos. Si $f : E_1 \to E_2$ es continua en p y $g : E_2 \to E_3$ es continua en $f(p)$, entonces $g \circ f : E_1 \to E_3$ es continua en p.*

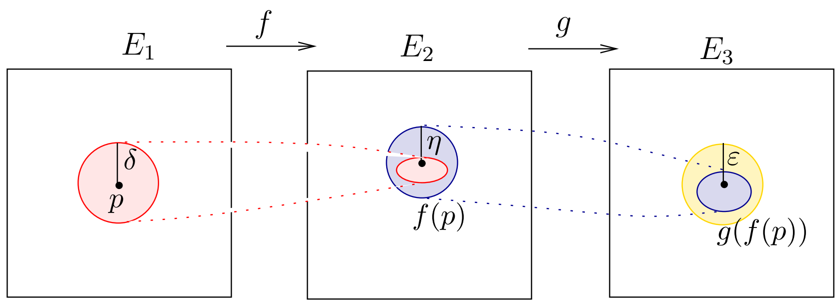


Figura 4.1: Composición de funciones continuas

Demostración. Dado $\varepsilon > 0$, puesto que g es continua en $f(p)$, existe $\eta > 0$ tal que $g(B_{E_2}(f(p), \eta)) \subset B_{E_3}(g(f(p), \varepsilon)$. Como f es continua en p, entonces para el $\eta > 0$ anterior existe $\delta > 0$ tal que $f(B_{E_1}(p, \delta)) \subset B_{E_2}(f(p), \eta)$. Luego $(g \circ f)(B_{E_1}(p, \delta)) \subset g(B_{E_2}(f(p), \eta)) \subset B_{E_3}((g \circ f)(p), \varepsilon)$. ■

Corolario 14 *Si $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ es una función continua y $X \subset E_1$, entonces la restricción $f|_X : (X, d|_{X \times X}) \to (E_2, d_2)$ es continua.*

Demostración. Observe que la función inclusión $i : X \to E_1$ dada por $i(x) = x$ es continua y que $f|_X = f \circ i$. ■

Proposición 36 *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ una función. Entonces f es continua en $p \in E_1$ si y solo si para cada sucesión de puntos $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de E_1 tal que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$, se tiene que $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p)$.*

Demostración. Supongamos que f es continua en p y sea $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en E_1 que converge a p. Como f es continua en p, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d_1(p, x) < \delta$ entonces $d_2(f(p), f(x)) < \varepsilon$. Como $\lim_{n\to\infty} p_n = p$ en (E_1, d_1), existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, entonces $d_1(p_n, p) < \delta$ lo que implica que $d_2(f(p_n), f(p)) < \varepsilon$. Luego $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p)$.

Recíprocamente, por contradicción, supongamos que f no es continua en p. Luego existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in E_1$ con $d_1(p, x) < \delta$ y $d_2(f(p), f(x)) \geq \varepsilon$. Tomando $\delta = \frac{1}{n}$ para $n = 1, 2, \cdots$, existe $q_n \in E_1$ tal que $d_1(q_n, p) < \frac{1}{n}$ y $d_2(f(q_n), f(p)) \geq \varepsilon$. De esta manera, $\lim_{n\to\infty} q_n = p$ y $\lim_{n\to\infty} f(q_n) \neq f(p)$, lo cual contradice la hipótesis de esta implicación. ■

Corolario 15 *Sean $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones de valor real definidas en el espacio métrico (E, d). Si f y g son continuas en un punto $p \in E$, entonces $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ son continuas en p. Si además, $g(p) \neq 0$, entonces $\frac{f}{g}$ es continua en p, donde $\frac{f}{g}$ está definida en alguna bola de centro p.*

Demostración. Sean $p \in E$ y $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesión en E tales que $\lim_{n\to\infty} p_n = p$. Como f y g son continuas en p, entonces $\lim_{n\to\infty} f(p_n) = f(p)$ y $\lim_{n\to\infty} g(p_n) = g(p)$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty}(f \pm g)(p_n) = \lim_{n\to\infty}(f(p_n) \pm g(p_n)) = \lim_{n\to\infty} f(p_n) \pm \lim_{n\to\infty} g(p_n) = f(p) \pm$

$g(p) = (f \pm g)(p)$ y $\lim_{n\to\infty}(fg)(p_n) = \lim_{n\to\infty}(f(p_n)g(p_n)) = (\lim_{n\to\infty} f(p_n))(\lim_{n\to\infty} g(p_n)) = f(p)g(p) = (fg)(p)$. Entonces $f \pm g$ y fg son continuas en p.

Por otro lado, observe que si $g(p) \neq 0$, entonces para $\varepsilon = \dfrac{|g(p)|}{2} > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $d(p,x) < \delta$, entonces $|g(p)| - |g(x)| \leq |g(p) - g(x)| < \varepsilon = \dfrac{|g(p)|}{2}$, entonces $|g(x)| > \dfrac{|g(p)|}{2} > 0$. Así $\frac{f}{g}$ está definida en la bola $B_E(p,\delta)$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{f}{g}\right)(p_n) = \lim_{n\to\infty}\left(\dfrac{f(p_n)}{g(p_n)}\right) = \dfrac{\lim_{n\to\infty} f(p_n)}{\lim_{n\to\infty} g(p_n)} = \dfrac{f(p)}{g(p)} = \dfrac{f}{g}(p)$, luego $\dfrac{f}{g}$ es continua en p. ∎

A continuación vamos a caracterizar la continuidad a partir del concepto de límite.

Definición 37 *Sean (E_1,d_1), (E_2,d_2) espacios métricos, p un punto de acumulación de E_1 y $f : E_1 \setminus \{p\} \to E_2$ una función. Un punto $q \in E_2$ es un límite de f en p, si para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (que depende de ε y de p) tal que $0 < d_1(x,p) < \delta$ implica $d_2(f(x),q) < \varepsilon$.*

Proposición 37 *Sean (E_1,d_1), (E_2,d_2) espacios métricos, p punto de acumulación de E y $f : E_1 \setminus \{p\} \to E_2$ una función. Si existe $q \in E_2$ límite de f en p, entonces q es único.*

Demostración. Supongamos que existe $q' \in E_2$ otro límite de f en p. Sea $\varepsilon > 0$ arbitrario. Entonces existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que si $0 < d_1(x,p) < \delta_1$ entonces $d_2(f(x),q) < \frac{\varepsilon}{2}$, además si $0 < d_1(x,p) < \delta_2$ entonces $d_2(f(x),q') < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\delta = \min\{\delta_1,\delta_2\}$, luego tomando $x \in E_1$ tal que $0 < d_1(x,p) < \delta$, se tiene que $d_2(q,q') \leq d_2(q,f(x)) + d_2(f(x),q') < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto, $q = q'$. ∎

En caso de que el límite exista, escribimos $\lim_{x\to p} f(x) = q$.

Definición 38 *Si p es punto de acumulación de E_1 y $f : E_1 \to E_2$ es una función, se define $\lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} f^*(x)$, donde*

$$\begin{array}{rcl} f^* : E_1 \setminus \{p\} & \to & E_2 \\ x & \mapsto & f^*(x) = f(x) \end{array}$$

De acuerdo a la definición anterior se sigue que dados (E_1,d_1), (E_2,d_2) espacios métricos, p un punto de acumulación de E_1 y $f : E_1 \to E_2$ una función, entonces f es continua en p, si $\lim_{x\to p} f(x) = f(p)$. *Luego mediante el límite podemos caracterizar la continuidad de una función en puntos de acumulación del dominio de la función.* Por ejemplo, la función $f : (\mathbb{N},d_1) \to (\mathbb{R},d_1)$ dada por $f(n) = n$ es continua, pues para cualquier punto $n \in \mathbb{N}$, dado $\varepsilon > 0$ tome cualquier $\delta < 1$. Entonces la bola en $\mathbb{N}$ centrada en n con radio δ se reduce a un punto, y por lo tanto se tiene la contenencia $f(B_{\mathbb{N}}(n,\delta)) \subset B_{\mathbb{R}}(f(n),\varepsilon)$. Por otro lado, el dominio de f no tiene puntos de acumulación, y por lo tanto no aplica el estudio de la continuidad de f usando el límite.

Ejemplo 15 *Si $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ es una función y $a \in E_1$ un punto aislado, entonces f es continua en a. En efecto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, existe $\delta_a > 0$ tal que $B_{E_1}(a, \delta_a) = \{a\}$ entonces $f(B_{E_1}(a, \delta_a)) \subset B_{E_2}(f(a), \varepsilon)$. En general, si (E_1, d_1) es un espacio métrico discreto, entonces f es continua.*

Sean $f : E \to \mathbb{R}$ una función y p un punto de acumulación de E. Si $\lim_{x\to p} f(x) = L$ y $L > 0$, entonces existe $\delta > 0$, tal que si $0 < d(x,p) < \delta$ entonces $f(x) > 0$. En efecto, para $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que si $0 < d(x,p) < \delta$, entonces $-\frac{L}{2} < f(x) - L < \frac{L}{2}$, luego $0 < L - \frac{L}{2} < f(x)$. Un resultado análogo se tienen cuando $L < 0$.

Corolario 16 *Sean (E, d) espacio métrico, p un punto de acumulación de E y $f, g : E \to \mathbb{R}$ funciones tales que $\lim_{x\to p} f(x) = L_1$ y $\lim_{x\to p} g(x) = L_2$. Entonces,*

1. $\lim_{x\to p}(f+g)(x) = L_1 + L_2$
2. $\lim_{x\to p}(f-g)(x) = L_1 - L_2$
3. $\lim_{x\to p}(f\cdot g)(x) = L_1 \cdot L_2$
4. *Si además $L_2 \neq 0$, entonces* $\lim_{x\to p}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{L_1}{L_2}$

Demostración.
Si definimos

$$\begin{aligned} f^* : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq p \\ L_1 & \text{si } x = p \end{cases} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g^* : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto g^*(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq p \\ L_2 & \text{si } x = p \end{cases} \end{aligned}$$

se tiene que $\lim_{x\to p} f^*(x) = \lim_{x\to p} f(x)$ y $\lim_{x\to p} g^*(x) = \lim_{x\to p} g(x)$. Además como f^* y g^* son continuas en p punto de acumulación de E, entonces el Corolario se sigue de los resultados de la continuidad de estas funciones. La manera clásica de demostrar estas propiedades de límites es la siguiente:

1. Sea $\varepsilon > 0$, para $\varepsilon/2 > 0$ existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que si $0 < d(x,p) < \delta_1$, entonces $|f(x) - L_1| < \varepsilon/2$ y si $0 < d(x,p) < \delta_2$, entonces $|g(x) - L_2| < \varepsilon/2$. Por lo tanto existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que si $0 < d(x,p) < \delta$, entonces $|(f+g)(x) - (L_1 + L_2)| \leq |f(x) - L_1| + |g(x) - L_2| < \varepsilon$.

2. Demostración igual a la del ítem 1.

3. Observe que

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| = |f(x)(g(x) - L_2) + L_2(f(x) - L_1)| \leq$$

$$|f(x)||g(x) - L_2| + |L_2||f(x) - L_1|$$

Dado $\varepsilon > 0$, por un lado para $\varepsilon_1 = \text{mín}\{1, \dfrac{\varepsilon}{2(|L_2|+1)}\} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que si $0 < d(x,p) < \delta_1$, entonces $|f(x) - L_1| < \varepsilon_1$. Por otro lado, para $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{2(|L_1|+1)} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que si $0 < d(x,p) < \delta_2$, entonces $|g(x) - L_2| < \varepsilon_2$. Por lo tanto existe $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ tal que si $0 < d(x,p) < \delta$, entonces $|f(x) - L_1| < \text{mín}\{1, \dfrac{\varepsilon}{2(|L_2|+1)}\}$ y $|g(x) - L_2| < \dfrac{\varepsilon}{2(|L_1|+1)}$. De $|f(x) - L_1| < 1$ se sigue que $|f(x)| - |L_1| < 1$. Por lo tanto,

$$|f(x)g(x) - L_1L_2| \leq |f(x)||g(x) - L_2| + |L_2||f(x) - L_1| <$$

$$(1 + |L_1|)\frac{\varepsilon}{2(|L_1|+1)} + |L_2|\frac{\varepsilon}{2(|L_2|+1)} < \varepsilon$$

4. Usando el ítem 3. basta mostrar que $\text{lím}_{x\to p} \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{L_2}$. Observe que

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| = \frac{|L_2 - g(x)|}{|g(x)||L_2|}$$

Por lo tanto, dado $\varepsilon > 0$ para $\varepsilon_2 = \text{mín}\{\frac{|L_2|}{2}, \varepsilon\frac{|L_2|^2}{2}\} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $0 < d(x,p) < \delta$, entonces $|L_2 - g(x)| < \varepsilon_2$. De $|L_2 - g(x)| < \dfrac{|L_2|}{2}$ se deduce que $|L_2| - |g(x)| < \dfrac{|L_2|}{2}$. Por lo tanto, $|g(x)| > \dfrac{|L_2|}{2} > 0$ ó $\dfrac{1}{|g(x)|} < \dfrac{2}{|L_2|}$ y así $g(x) \neq 0$ en $B_E(p,\delta) \setminus \{p\}$. Entonces

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{L_2}\right| = \frac{|L_2 - g(x)|}{|g(x)||L_2|} < \frac{2}{|L_2|}\frac{1}{|L_2|}\varepsilon\frac{|L_2|^2}{2} < \varepsilon.$$

Así queda demostrado el Corolario. ■

Proposición 38 *La función proyección i-ésima $\pi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ para $i = 1, \cdots, n$, definida por $\pi_i(x) = \pi_i(x_1, ..., x_i, ..., x_n) = x_i$, es continua.*

Demostración. $|\pi_i(x) - \pi_i(y)| \leq \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (\pi_j(x) - \pi_j(y))^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} (x_j - y_j)^2} = \|x - y\|$. Si tomamos $\delta = \varepsilon$, entonces se tiene que $\|x - y\| < \delta$ implica $|\pi_i(x) - \pi_i(y)| < \varepsilon$. Por lo tanto, cada π_i para $i = 1, \cdots, n$ es continua. ■

Dada $f : E \to \mathbb{R}^n$, definamos $f_i = \pi_i \circ f$ la i-ésima función componente de la función f.

Proposición 39 *Sean (E, d) espacio métrico, $f : E \to \mathbb{R}^n$ una función y $p \in E$. Entonces f es continua en p si y solo si cada f_i para $i = 1, \cdots, n$ es continua en p.*

Demostración. Supongamos que f es continua y veamos que cada f_i es continua. En efecto, dado que cada π_i es continua, entonces $f_i = \pi_i \circ f$ es continua porque la compuesta de funciones continuas es continua.

Recíprocamente, suponga que cada f_i es continua. Sea $x \in E$ y veamos que f es continua en x. Sea $\varepsilon > 0$. Como cada f_i para $i = 1, \cdots, n$ es continua, existen $\delta_i > 0$ para $i = 1, \cdots, n$ tales que $d(x, y) < \delta_i$ implica $|(\pi_i \circ f)(x) - (\pi_i \circ f)(y)| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}$. Sea $\delta = \min\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$. Si $d(x, y) < \delta$, entonces se tiene que $\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |(\pi_j \circ f)(x) - (\pi_j \circ f)(y)|^2} < \varepsilon$. Por lo tanto, f es continua en x. ■

Quiz 10 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. *Consideremos $(\mathbb{N}, d_1)$ y (E, d) espacio métrico. Si $f : \mathbb{N} \to E$, entonces f es continua.*

2. *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos. Si $f : E_1 \to E_2$ es continua, entonces f envía conjuntos abiertos de E_1 en conjuntos abiertos de E_2.*

3. *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos. Si $f : E_1 \to E_2$ es continua, entonces $f^{-1}(B)$ es cerrado en E_1 si B es cerrado en E_2.*

4. *En $(\mathbb{R}, d_1)$ la función*

$$\begin{aligned} \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & si\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

   es continua.

5. *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos. Si $f : E_1 \to E_2$ es continua, entonces f envía conjuntos acotados de E_1 en conjuntos acotados de E_2.*

4.2. Funciones continuas sobre espacios métricos compactos

En esta sección vamos a ver que las funciones continuas sobre espacios compactos, exhiben propiedades interesantes en análisis.

Proposición 40 *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ una función continua. Si E_1 es compacto, entonces $f(E_1)$ es compacto en E_2.*

Demostración. Sea $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ un cubrimiento abierto de $f(E_1)$ en (E_2, d_2). Por lo tanto, $f(E_1) \subset \bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha$. Así,

$$E_1 \subset f^{-1}(f(E_1)) \subset f^{-1}\left(\bigcup_{\alpha\in I} G_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} f^{-1}(G_\alpha).$$

Como f es continua, $f^{-1}(G_\alpha)$ es abierto en (E_1, d_1) para cada $\alpha \in I$, y como E_1 es compacto, existen $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in I$ tales que $E_1 \subset \bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i})$. Por lo tanto, $f(E_1) \subset f\left(\bigcup_{i=1}^n f^{-1}(G_{\alpha_i})\right) = \bigcup_{i=1}^n f(f^{-1}(G_{\alpha_i})) \subset \bigcup_{i=1}^n G_{\alpha_i}$. Luego, $f(E_1)$ es compacto en (E_2, d_2).

Otra manera de demostrar esta proposición es viendo que $f(E_1)$ es secuencialmente compacto y por tanto compacto. Sea $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $f(E_1)$, luego $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en E_1. Como E_1 es compacto, existen $\{x_{n_j}\}_{j\in\mathbb{N}}$ y $p \in E_1$ tales que $\lim_{j\to\infty} x_{n_j} = p$. Usando que f es continua, vemos que $\lim_{j\to\infty} f(x_{n_j}) = f(p)$, es decir, $f(E_1)$ es secuencialmente compacto. ■

Definición 39 *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ una función. Diremos que f es* acotada *si $f(E_1)$ es acotado en (E_2, d_2).*

Corolario 17 *Sean (E_1, d_1) y (E_2, d_2) espacios métricos. Si $f : E_1 \to E_2$ es una función continua y E_1 es compacto, entonces f es acotada.*

Demostración. Como $f(E_1)$ es compacto en (E_2, d_2), entonces $f(E_1)$ es acotado en (E_2, d_2). ■

Definición 40 *Sean (E, d) espacio métrico y $f : E \to \mathbb{R}$ una función. Decimos que f* alcanza un máximo *en el punto $p \in E$, si $f(p) \geq f(x)$ para todo $x \in E$; y que f* alcanza un mínimo *en el punto $q \in E$, si $f(q) \leq f(x)$ para todo $x \in E$.*

Corolario 18 *Si (E, d) es un espacio métrico compacto y $f : (E, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ es una función continua, entonces f alcanza un máximo y un mínimo en E.*

Demostración. Como $f(E)$ es compacto en $(\mathbb{R}, d_1)$, luego por el Teorema de Heine-Borel, $f(E)$ es cerrado y acotado. Por lo tanto existen

$$\begin{aligned} \overline{p} &= \max f(E) \\ \overline{q} &= \min f(E) \end{aligned}$$

Así $f(p) = \overline{p}$ y $f(q) = \overline{q}$ para algunos $p, q \in E$ y es claro que f tiene un máximo en p y un mínimo en q. ■

Definición 41 *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ una función. Se dice que f es* uniformemente continua*, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (el cual solo depende de ε) tal que si $d_1(x, y) < \delta$, entonces $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Si $S \subset E_1$, f se dice* uniformemente continua en *S, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ (el cual solo depende de ε) tal que si $x, y \in S$ y $d_1(x, y) < \delta$, entonces $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

Observe que toda función uniformemente continua, es continua. Pero existen funciones continuas, que no son uniformemente continuas. Esto se ilustrará con el siguiente ejemplo.

Ejemplo 16 1. *Sea*

$$\begin{aligned} f : (0,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Fije $\varepsilon = 1$. *Dado* $\delta > 0$, *tomemos* $0 < x < \delta$ *tal que* $x \in (0,1)$ *y sea* $y = \frac{x}{2}$. *Se tiene que* $|x - y| < \delta$, *y* $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \left|\frac{1}{x} - \frac{2}{x}\right| = \left|\frac{1}{x}\right| > 1 = \varepsilon$. *Por lo tanto,* f *no es uniformemente continua.*

2. *Consideremos*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

Mostremos que f *no es uniformemente continua. Es decir veamos que existe* $\epsilon > 0$ *tal que para cada* $\delta > 0$ *existen* $x_\delta, y_\delta \in \mathbb{R}$ *tales que* $|x_\delta - y_\delta| < \delta$ *y* $|f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \epsilon$.
En términos de sucesiones también se puede mostrar que existe $\epsilon > 0$ *tal que para cada* $n \in \mathbb{N}$ *existen sucesiones* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *tales que* $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ *y* $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \epsilon$.
Tomemos $\epsilon = 2$ $x_n = n + \frac{1}{n}, y_n = n$
$|f(x_n) - f(y_n)| = |2 + \frac{1}{n^2}| \geq 2$

El siguiente resultado muestra que una función continua cuyo dominio es un espacio métrico compacto, es uniformemente continua.

Teorema 18 *Sean* (E_1, d_1), (E_2, d_2) *espacios métricos y* $f : E_1 \to E_2$ *una función continua. Si* (E_1, d_1) *es compacto, entonces* f *es uniformemente continua.*

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Como f es continua en cada $p \in E_1$, existe $\delta_p > 0$ tal que si $d_1(x,p) < \delta_p$, entonces $d_2(f(x), f(p)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Así, $\{B_{E_1}(p, \delta_p/2)\}_{p\in E_1}$ es un cubrimiento abierto para E_1. Como E_1 es compacto, existen $p_1, \cdots, p_n \in E_1$ tales que $E_1 = \bigcup_{i=1}^n B_{E_1}(p_i, \delta_{p_i}/2)$. Sea $\delta = \text{mín}\,\{\delta_{p_i}/2\}_{i=1}^n$. Dados $x, y \in E_1$ tales que $d_1(x,y) < \delta$ se tiene que $x \in B_{E_1}(p_i, \delta_{p_i}/2)$ para algún $i = 1, \cdots, n$. Luego $d_1(p_i, x) < \delta_{p_i}/2 < \delta_{p_i}$. Por lo tanto, $d_2(f(p_i), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$, por la continuidad de f en p_i. Por otro lado, $d(y, p_i) \leq d(y,x) + d(x, p_i) < \delta_{p_i}/2 + \delta_{p_i}/2 = \delta_{p_i}$, luego por la continuidad de f en p_i se tiene que $d_2(f(y), f(p_i)) < \frac{\varepsilon}{2}$. De esta manera, $d_1(x,y) < \delta$ implica que $d_2(f(x), f(y)) \leq d_2(f(x), f(p_i)) + d_2(f(p_i), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Por lo tanto, f es uniformemente continua. ∎

Teorema 19 *Sean* (E_1, d_1), (E_2, d_2) *espacios métricos y* $f : E_1 \to E_2$ *una función continua. Si* E_1 *es conexo, entonces* $f(E_1)$ *es conexo.*

Demostración. Sean A, B abiertos disyuntos de $f(E_1)$ tales que $f(E_1) = A \cup B$. Veamos que $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$. Por lo tanto, existen A', B' abiertos en (E_2, d_2) tales que:

$$\begin{aligned} A &= A' \cap f(E_1) \\ B &= B' \cap f(E_1) \end{aligned}$$

Como $f^{-1}(A) = f^{-1}(A') \cap f^{-1}(f(E_1)) = f^{-1}(A')$, entonces $f^{-1}(A)$ es abierto en (E_1, d_1) dado que f es continua. Análogamente, $f^{-1}(B)$ es abierto en (E_1, d_1). Puesto que $E_1 = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ es conexo, entonces $f^{-1}(A) = \emptyset$ ó $f^{-1}(B) = \emptyset$, por lo tanto $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$. Es decir, $f(E_1)$ es conexo. ■

Teorema 20 (Teorema del valor intermedio) *Sean (E, d) un espacio métrico conexo y $f : (E, d) \to (\mathbb{R}, d_1)$ una función continua. Si $a, b \in E$ y $f(a) < f(b)$, entonces para cada $c \in (f(a), f(b))$, existe $x \in E$ tal que $f(x) = c$.*

Demostración. Como $f(E)$ es conexo y $f(a) < f(b)$, entonces $(f(a), f(b)) \subset f(E)$. Luego para cada $c \in (f(a), f(b))$ se tiene que $c \in f(E)$ y por lo tanto existe $x \in E$ tal que $f(x) = c$. ■

Proposición 41 *Sea (E, d) un espacio métrico. Entonces E es conexo si y solo si no existe $f : (E, d) \to (\{0, 1\}, d_d)$ continua y sobreyectiva, donde d_d es la métrica discreta.*

Demostración. Por contradicción, supongamos que E es conexo y que existe $f : (E, d) \to (\{0, 1\}, d_d)$ continua y sobreyectiva. Entonces $f(E)$ es conexo y $f(E) = \{0, 1\}$, lo cual es una contradicción dado que $\{0, 1\}$ es disconexo (los espacios discretos con más de un punto son disconexos).

Recíprocamente, suponga que no existe $f : (E, d) \to (\{0, 1\}, d_d)$ continua y sobreyectiva y veamos que E es conexo. Sea $E = A \cup B$ con A, B abiertos disyuntos en (E, d). Consideremos la función característica,

$$\begin{aligned} \chi_A : E &\to \{0, 1\} \\ x &\mapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

la cual resulta ser continua porque $\chi_A^{-1}(\{1\}) = A$ y $\chi_A^{-1}(\{0\}) = E \setminus A = B$. Por lo tanto, χ_A no es sobreyectiva. Si suponemos que $A \neq \emptyset$ se tiene que $\chi_A^{-1}(\{0\}) = \emptyset$. Luego $E = \chi_A^{-1}(\{0, 1\}) = \chi_A^{-1}(\{1\}) = A$. ■

Proposición 42 *Sea (E, d) un espacio métrico. Si para cualquier función continua $f : E \to \mathbb{R}$ es* válido *el Teorema del Valor Intermedio, entonces E es conexo.*

Demostración. Supongamos que para cualquier función continua $f : E \to \mathbb{R}$ es válido el Teorema del Valor Intermedio. Si E no es conexo, entonces existe una función $g : (E, d) \to (\{0, 1\}, d_d)$ continua y sobreyectiva. Entonces para g es válido el Teorema del valor intermedio, y por lo tanto $\frac{1}{2}$ debería tener preimagen por g lo cual es una contradicción. ■

Definición 42 *Sea (E, d) un espacio métrico. Un conjunto $X \subset E$ es* conexo por caminos *si dados $x, y \in X$ existe $\alpha : [a, b] \to X$ continua tal que $\alpha(a) = x$ y $\alpha(b) = y$. La función α es a veces llamada un* camino *en X.*

Ejemplo 17 *La esfera $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ es conexo por caminos. En efecto, dados $x, y \in S^{n-1}$ con $x \neq -y$, la función $\alpha : [0, 1] \to S^{n-1}$ definida por*

$$\alpha(t) := \frac{(1-t)x + ty}{\|(1-t)x + ty\|}$$

es continua y $\alpha(0) = x$ y $\alpha(1) = y$. Si $x = -y$, escogemos $z \in S^{n-1} \setminus \{x, y\}$ y definimos el camino $\alpha_1 : [0, 1] \to S^{n-1}$ tal que $\alpha_1(0) = x$ y $\alpha_1(1) = z$. Ahora consideramos el camino $\alpha_2 : [0, 1] \to S^{n-1}$ tal que $\alpha_2(0) = z$ y $\alpha_2(1) = y$. Construyamos

$$\begin{array}{rcl} \alpha : [0,1] & \to & S^{n-1} \\ t & \mapsto & \alpha(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \alpha_1(2t) & si\ 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \alpha_2(2t-1) & si\ \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{array} \right. \end{array}$$

la cual es un camino entre x e y.

Teorema 21 *Sea (E, d) espacio métrico. Si $X \subset E$ es conexo por caminos, entonces es conexo.*

Demostración. Fijemos $p \in X$. Dado $x \in X$ consideremos un camino $\alpha : [a, b] \to X$ entre p y x. Sea $C_{px} = \alpha([a, b])$. Entonces C_{px} es conexo por ser la imagen de un conexo por una función continua. Como $X = \bigcup_{x \in X} C_{px}$, entonces X es conexo porque los C_{px} tienen a p como punto común. ■

La recíproca del Teorema anterior es falsa, un contraejemplo es el peine en el plano con un punto sobre eje y, ver Ejemplo 11.

Teorema 22 *Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Entonces A es conexo si y solamente si A es conexo por caminos.*

Demostración. Supongamos que A es conexo. Fijemos un punto $a \in A$ y definamos $X = \{x \in A :$ existe un camino entre a y $x\}$. El conjunto X es abierto ya que dado $x \in X$ existe un $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$, pues A es abierto. Como la bola abierta es convexa, cualquier punto y en la bola puede ser unido con x por un segmento y como x puede ser unido con a por un camino, de igual forma como en el ejemplo anterior podemos obtener un camino entre a y y. Así $B(x, r) \subset X$. El conjunto $A \setminus X$ es también abierto, pues dado $x \in A \setminus X$ existe $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$. Ahora ningún punto en $B(x, r)$ puede ser unido con a por un camino, caso contrario x podría ser unido con a mediante un camino, nuevamente usando la convexidad de la bola abierta. Como A es conexo, necesariamente $A \setminus X = \emptyset$ y por lo tanto A es conexo por caminos. El recíproco se sigue del teorema anterior. ■

Quiz 11 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$ entonces f es uniformemente continua.*

2. *Si $f : (1, 2) \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^3$ entonces f es uniformemente continua*

3. *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ función continua. Si K es compacto en E_2, entonces $f^{-1}(K)$ es compacto en E_1.*

4. *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ función continua. Si K es compacto en E_1, entonces $f(K)$ es cerrado y acotado en E_2.*

5. *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ función continua. Si $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E_1, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E_2.*

6. *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ función continua. Si E_1 es compacto y $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en E_1, entonces $\{f(x_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es convergente en E_2.*

7. *El conjunto $B(0, 1) \setminus \{0\}$ es conexo en $(\mathbb{R}^n, d_2)$ para $n \geq 2$.*

8. *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos y $f : E_1 \to E_2$ una función. Si f envía conjuntos compactos en conjuntos compactos entonces f es continua*

4.3. Homeomorfismos

Un función biyectiva $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ entre espacios métricos puede ser continua sin que su inversa $f^{-1} : (E_2, d_2) \to (E_1, d_1)$ sea continua. Veamos dos ejemplos de este hecho.

Ejemplo 18 *Funciones biyectivas continuas cuyas inversas no son continuas.*

1. *Considere la aplicación $f : (\mathbb{R}^n, d_d) \to (\mathbb{R}^n, d_2)$ dada por $f(x) = x$. Aquí d_d es la métrica discreta y d_2 es la métrica euclidiana. Es claro que f es biyectiva y continua, pero su inversa $f^{-1}(x) = x$ definida de $(\mathbb{R}^n, d_2)$ a $(\mathbb{R}^n, d_d)$ no es continua en ningún punto $x \in \mathbb{R}^n$. En efecto, dado $\varepsilon > 0$ con $\varepsilon < 1$ se tiene que la bola abierta con centro en x y radio ε en $(\mathbb{R}^n, d_d)$ se reduce al punto x, y por lo tanto, no puede contener una bola abierta $B = f^{-1}(B)$ centrada en x del espacio euclidiano.*

2. *Sean $E_1 = (-1, 0] \cup [1, \infty)$ y $E_2 = [0, \infty)$ subespacios de la recta euclidiana y definamos $f : E_1 \to E_2$ por x^2. Se observa que f es continua biyectiva. La inversa $f^{-1} : E_2 \to E_1$ definida por*

   $$f^{-1}(y) = \begin{cases} -\sqrt{y}, & 0 \leq y < 1 \\ \sqrt{y}, & y \geq 1 \end{cases}$$

   La aplicación f^{-1} no es continua en $y = 1$. En efecto, si $0 < \varepsilon < 1$, cualquier intervalo con centro en 1 y radio $\delta > 0$ en E_2 contiene puntos $y < 1$, los cuales son *transformados por* f^{-1} *en puntos* $-\sqrt{y}$ *que están a una distancia mayor o igual a* 1 *del punto* $f^{-1}(1)$.

3. *Sean* $E_1 = [0, 2\pi)$ *y* $E_2 = S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$ *subespacios de la recta euclidiana y plano euclidiano respectivamente. Definamos* $f : E_1 \to E_2$ *por* $f(x) = (\cos(x), \sin(x))$. *Intuitivamente,* f *consiste en enrollar el intervalo* $[0, 2\pi)$ *sobre el círculo* S^1. *La inversa* f^{-1} *no es continua en* $f(0) = (1, 0) = a$. *En efecto, dada cualquier bola abierta* B *con centro en* a *en* E_2*, su imagen* $f^{-1}(B)$ *contiene intervalos de la forma* $(b, 2\pi)$ *y* $[0, c)$.

Definición 43 *Dados* (E_1, d_1), (E_2, d_2) *espacios métricos y* $f : E_1 \to E_2$ *una función. Decimos que* f *es un* homeomorfismo, *si* f *es biyectiva, continua y adicionalmente* f^{-1} *es continua. En este caso decimos que* E_1 *y* E_2 *son* homeomorfos *y lo denotamos por* $E_1 \cong E_2$. *Si* $d_1(x, y) = d_2(f(x), f(y))$ *para todo* $x, y \in E_1$*, se dice que* f *es una* isometría.

Ejemplo 19 *Considere* $\mathbb{R}^n$ *con la métrica euclidiana.*

1. *Si* $a \in \mathbb{R}^n$ *es fijo, y*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto T(x) = x + a, \end{aligned}$$

entonces T *es una isometría.*

2. *Sea* $\lambda \in \mathbb{R}$ *distinto de* 0 *y*

$$\begin{aligned} T : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto T(x) = \lambda \cdot x \end{aligned}$$

Observe que T *es un homeomorfismo y note que sólo es una isometría si* $|\lambda| = 1$.

Corolario 19 *Si* $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ *y* $g : (E_2, d_2) \to (E_3, d_3)$ *son homeomorfismos, entonces* $g \circ f : (E_1, d_1) \to (E_3, d_3)$ *es un homeomorfismo.*

Demostración. En efecto, la compuesta de funciones continuas y biyectivas es continua y biyectiva. Además, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$. ■

Proposición 43 *Dados* $p, q \in \mathbb{R}^n$ *y* $r, s \in \mathbb{R}^+$*, se tiene que* $B(p, r)$ *y* $B(q, s)$ *(vistos como espacios métricos con la métrica euclidiana) son homeomorfos.*

Demostración. La bola $B(p, r)$ es homeomorfa a $B(0, r)$ porque

$$\begin{aligned} T_1 : B(p, r) &\to B(0, r) \\ x &\mapsto T_1(x) = x - p \end{aligned}$$

es un homeomofismo. También, la bola $B(0, r)$ es homeomorfa a $B(0, s)$ porque

$$\begin{aligned} I : B(0,r) &\rightarrow B(0,s) \\ x &\mapsto I(x) = \frac{s}{r}x \end{aligned}$$

es un homeomorfismo. Además, la bola $B(0,s)$ es homeomorfa a $B(q,s)$ porque

$$\begin{aligned} T_2 : B(0,s) &\rightarrow B(q,s) \\ x &\mapsto T_2(x) = x + q \end{aligned}$$

es un homeomorfismo. Por lo tanto, $B(p,r)$ es homeomorfa a $B(q,s)$ dado que

$$\begin{aligned} T : B(p,r) &\rightarrow B(q,s) \\ x &\mapsto T(x) = (T_2 \circ I \circ T_1)(x) = \frac{s}{r}(x-p) + q \end{aligned}$$

es un homeomorfismo. ■

Proposición 44 *Si* $S^m = \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| = 1\}$, *entonces* $S^m \setminus \{(0, \cdots, 0, 1)\}$ *es homeomorfo a* $\mathbb{R}^m$.

Demostración. Definamos $\pi : S^m \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{R}^m$ donde $p = (0, 0, \cdots, 1)$, tal que $\pi(x)$ es el punto donde la semirrecta $\overrightarrow{px}$ intersecta el hiperplano $x_{m+1} = 0$ que identificaremos con $\mathbb{R}^m$, esto es, $(x_1, \cdots, x_m, 0) \equiv (x_1, \cdots, x_m)$. Los puntos sobre esta semirrecta tiene la forma $u = p + t(x-p) = (tx_1, \cdots, tx_m, 1 + t(x_{m+1} - 1))$, $t > 0$. Un punto de la semirrecta pertenece al hiperplano cuando su última coordenada $1 + t(x_{m+1} - 1)$ es cero y así $t = \dfrac{1}{1 - x_{m+1}}$. Entonces $\pi(x) = \left(\dfrac{1}{1-x_{m+1}}x_1, \cdots, \dfrac{1}{1-x_{m+1}}x_m, 0\right) \equiv \dfrac{1}{1-x_{m+1}}(x_1, \cdots, x_m) = \dfrac{1}{1-x_{m+1}}x'$, si escribimos $x' = (x_1, \cdots, x_m)$ cuando tenemos el punto $x = (x_1, \cdots, x_m, x_{m+1})$. Esto muestra que π es continua. Para ver que π es un homeomorfismo basta considerar la aplicación $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow S^m \setminus \{p\}$ definida por $\varphi(y) = x$, donde x es el punto sobre la recta $(y_1, \cdots, y_m, 0) + t(p - (y_1, \cdots, y_m, 0))$ con $0 \leq t < 1$ que corta la esfera S^m. Con la notación anterior vemos que $x' = \dfrac{2y}{|y|^2 + 1}$ y $x_{m+1} = \dfrac{|y|^2 - 1}{|y|^2 + 1}$. Se puede ver que φ es continua y que $(\varphi \circ \pi)(x) = x$ para todo $x \in S^m \setminus \{p\}$ y que $(\pi \circ \varphi)(y) = y$ para todo $y \in \mathbb{R}^m$. ■

Proposición 45 *El espacio euclidiano* $\mathbb{R}^m$ *es homeomorfo a* $B(0,1)$.

Demostración. Consideremos

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m &\rightarrow B(0,1) \\ x &\mapsto \frac{x}{1 + |x|} \end{aligned}$$

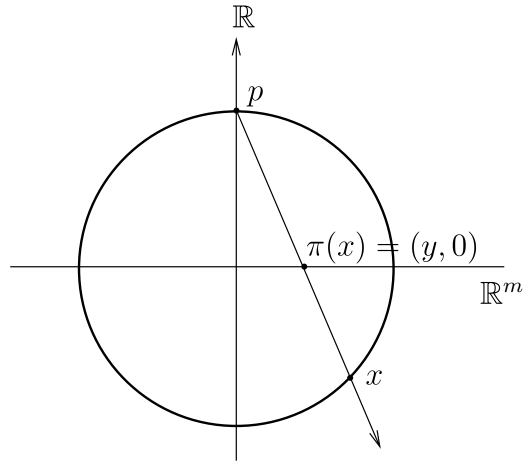


Figura 4.2: Proyección estereográfica

Veamos que f es inyectiva y que tiene función inversa. Si $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^m$ son tales que $\dfrac{x_1}{1+|x_1|} = \dfrac{x_2}{1+|x_2|}$, entonces $\dfrac{|x_1|}{1+|x_1|} = \dfrac{|x_2|}{1+|x_2|}$. Por lo tanto, $|x_1| + |x_1||x_2| = |x_2| + |x_1||x_2|$. De esto se sigue que $|x_1| = |x_2|$. Entonces, $\dfrac{x_1}{1+|x_1|} = \dfrac{x_2}{1+|x_1|}$, luego $x_1 + x_1|x_1| = x_2 + x_2|x_1|$. Por lo tanto, $x_1 - x_2 = -(x_1 - x_2)|x_1|$, de donde se sigue que $x_1 = x_2$. Por otro lado se tiene que $g(y) = \dfrac{y}{1-|y|}$ es inversa de f. ■

Corolario 20 *El espacio $\mathbb{R}^m$ es homeomorfo a $B(p,r)$, para todo $p \in \mathbb{R}^m$ y todo $r > 0$.*

Quiz 12 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. *Dados r_1, $r_2 > 0$ y a, $b \in \mathbb{R}^n$, existe $f : B(a, r_1) \to B[b, r_2]$ homeomorfismo.*
2. *Existe un homeomorfismo entre $\mathbb{R}^n$ y una bola cerrada en $\mathbb{R}^n$*
3. *El conjunto $B[a,r] - \{a\}$ es homeomorfo a $B[a,r]$.*
4. *$\mathbb{N}$ es homeomorfo a $\mathbb{Z}$.*
5. *(a,b) es homeomorfo con $B(p,r)$ (bola en $\mathbb{R}^2$).*
6. *$(0,1) \cong B(0,1)$ (bola en $\mathbb{R}^2$).*

4.4. Sucesiones de funciones

Definición 44 *Sean E_1 un conjunto cualquiera, (E_2, d_2) un espacio métrico, y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones definidas de E_1 en E_2. Decimos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$* converge puntualmente *para la función $f : E_1 \to E_2$, si $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $f(x)$, para todo $x \in E$. Notación $f_n \to f$.*

Ejemplo 20 *Veamos algunos ejemplos.*

1. *Sea* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f_n(x) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) x$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Se tiene que* $f_n \to f$, *donde* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *es la función identidad.*

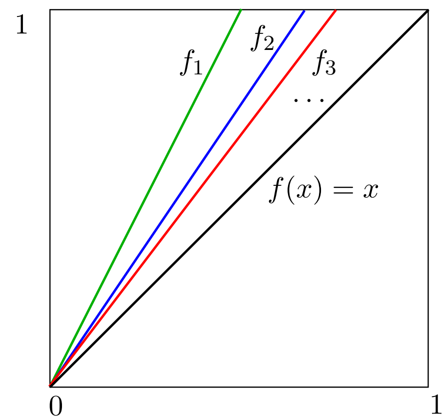


Figura 4.3: Ejemplo 1

2. *Sea* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f_n(x) = x^n$. *Entonces* $f_n \to f$, *donde*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in [0,1) \\ 1, & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

3. *Sea* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \leq x < n+1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Dado $x \in \mathbb{R}$, *existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $x < N$. *Por lo tanto,* $f_n(x) = 0$ *para todo* $n \geq N$. *Luego para todo* $x \in \mathbb{R}$, f_n *converge puntualmente para la función constante a* 0.

Definición 45 *Sean* E_1 *un conjunto cualquiera,* (E_2, d_2) *un espacio métrico, y* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión de funciones definidas de* E_1 *en* E_2.

1. *Decimos que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente *para la función* $f : E_1 \to E_2$, *si dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *(que depende de* ε*) tal que para todo* $x \in E_1$, *si* $n \geq N$ *entonces* $d_2(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$. *Notación* $f_n \xrightarrow{u} f$.

2. *Decimos que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es* uniformemente de Cauchy, *si dado* $\varepsilon > 0$ *existe* $N \in \mathbb{N}$ *(que depende de* ε*) tal que para todo* $x \in E$, *si* $m, n \geq N$ *entonces* $d_2(f_n(x), f_m(x)) < \varepsilon$.

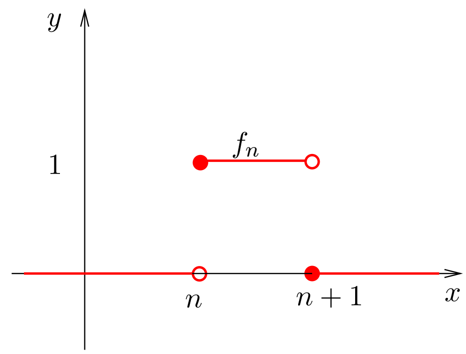


Figura 4.4: Ejemplo 3

Proposición 46 *Sean E_1 un conjunto, (E_2, d_2) espacio métrico completo y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones de E_1 en E_2. Entonces $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para la función $f : E_1 \to E_2$ si y solo si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy.*

Demostración. Supongamos que $f_n \xrightarrow{u} f$. Veamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy. Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in E_1$, si $n \geq N$ entonces $d_2(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Considerando $m, n \geq N$, entonces $d_2(f_n(x), f_m(x)) \leq d_2(f_n(x), f(x)) + d_2(f(x), f_m(x)) < \varepsilon$, por lo tanto $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy.

Recíprocamente, supongamos que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy y veamos que converge uniformemente para una función $f : E_1 \to E_2$ por definir. Sea $\varepsilon > 0$. Luego existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in E_1$, si $m, n \geq N$ entonces $d_2(f_n(x), f_m(x)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Luego para cada $x \in E_1$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en (E_2, d_2). Como (E_2, d_2) es completo, existe $f(x) \in E_2$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Veamos que $f_n \xrightarrow{u} f$. Para $x \in E_1$ y $n \geq N$ fijos, tenemos que $f_m(x) \in B_{E_2}(f_n(x), \varepsilon/2)$ para todo $m \geq N$. Como $\lim_{m\to\infty} f_m(x) = f(x)$ entonces $f(x) \in B_{E_2}[f_n(x), \varepsilon/2]$. Así, $d_2(f_n(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$. ■

Proposición 47 *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones continuas de E_1 en E_2 y $f : E_1 \to E_2$ una función. Si $f_n \xrightarrow{u} f$, entonces f es continua.*

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in E_1$. Como $f_n \xrightarrow{u} f$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in E_1$, si $n \geq N$ entonces $d_2(f_n(x), f(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Como f_N es continua en x_0, existe $\delta > 0$ tal que si $d_1(x, x_0) < \delta$ entonces $d_2(f_N(x), f_N(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3}$. Por lo tanto, si $x \in B_{E_1}(x_0, \delta)$, se tiene que $d_2(f(x), f(x_0)) \leq d_2(f(x), f_N(x)) + d_2(f_N(x), f_N(x_0)) + d_2(f_N(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$. Por lo tanto, f es continua en x_0. ■

Lema 7 *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos y $f, g : E_1 \to E_2$ funciones continuas, entonces*

$$\begin{aligned} h : E_1 &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto h(x) = d_2(f(x), g(x)) \end{aligned}$$

es una función continua.

Demostración. Sean $\varepsilon > 0$ y $x_0 \in E_1$. Como f, g son funciones continuas, existe $\delta_1 > 0$ tal que $d_1(x, x_0) < \delta_1$ implica $d_2(f(x), f(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$, y existe $\delta_2 > 0$ tal que $d_1(x, x_0) < \delta_2$ implica $d_2(g(x), g(x_0)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Sea $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$. Si $d_1(x, x_0) < \delta$, se tiene que $|d_2(f(x), g(x)) - d_2(f(x_0), g(x_0))| \leq \varepsilon$. En efecto,

$$|d_2(f(x), g(x)) - d_2(f(x_0), g(x_0))| =$$

$$|d_2(f(x), g(x)) - d_2(f(x), g(x_0)) + d_2(f(x), g(x_0)) - d_2(f(x_0), g(x_0))| \leq$$

$$|d_2(f(x), g(x)) - d_2(f(x), g(x_0))| + |d_2(f(x), g(x_0)) - d_2(f(x_0), g(x_0))| \leq$$

$$d_2(g(x), g(x_0)) + d_2(f(x), f(x_0)) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

De esta manera queda demostrado el Lema. ■

Observación 5 *Si (E_1, d_1) es un espacio métrico compacto, entonces existe $\text{máx}\{h(x) : x \in E_1\}$, donde h es la función considerada en el lema anterior.*

Definición 46 *Sean (E_1, d_1), (E_2, d_2) espacios métricos. Definimos $\mathcal{C}(E_1, E_2) = \{f : f \text{ es una función de } E_1 \text{ en } E_2 \text{ continua}\}$. Si además E_1 es compacto, definimos*

$$\begin{aligned} \mathbf{d} : \mathcal{C}(E_1, E_2) \times \mathcal{C}(E_1, E_2) &\to \mathbb{R} \\ (f, g) &\mapsto \mathbf{d}(f, g) = \text{máx}\{d_2(f(x), g(x)) : x \in E_1\}. \end{aligned}$$

Proposición 48 *Si (E_1, d_1) y (E_2, d_2) son espacios métricos con E_1 compacto, entonces $(\mathcal{C}(E_1, E_2), \mathbf{d})$ es un espacio métrico.*

Demostración. Veamos que $\mathbf{d}$ satisface la desigualdad triangular. Sean $f, g, h \in \mathcal{C}(E_1, E_2)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(f, g) &= d_2(f(x_0), g(x_0)) \text{ para algún } x_0 \in E_1 \\ &\leq d_2(f(x_0), h(x_0)) + d_2(h(x_0), g(x_0)) \\ &\leq \mathbf{d}(f, h) + \mathbf{d}(h, g). \end{aligned}$$

Las otras propiedades de la métrica se tienen trivialmente. ■

Definición 47 *Sean (E_1, d_1) y (E_2, d_2) espacios métricos. Definimos $\mathcal{B}(E_1, E_2) = \{f : f \text{ es una función de } E_1 \text{ en } E_2 \text{ acotada}\}$.*

Proposición 49 *Sean (E_1, d_1) y (E_2, d_2) espacios métricos. Si $f, g \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$, entonces existe $\sup\{d_2(f(x), g(x)) : x \in E_1\}$.*

Demostración. Como $f(E_1)$ es acotado en E_2, dado $y_0 \in E_2$, existe $r_1 > 0$ tal que $f(E_1) \subset B_{E_2}(y_0, r_1)$. Análogamente, existe $r_2 > 0$ tal que $g(E_1) \subset B_{E_2}(y_0, r_2)$. Sea $r = \text{máx}\{r_1, r_2\}$. Dado $x \in E_1$, $d_2(f(x), g(x)) \leq d_2(f(x), y_0) + d_2(y_0, g(x)) < 2r$, por lo tanto $\sup\{d_2(f(x), g(x)) : x \in E_1\}$ existe. ■

Proposición 50 *Si*

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{d}} : \mathcal{B}(E_1,E_2)\times\mathcal{B}(E_1,E_2) &\to \mathbb{R} \\ (f,g) &\mapsto \overline{\mathbf{d}}(f,g)=\sup\{d_2(f(x),g(x)) : x\in E_1\} \end{aligned}$$

entonces $\left(\mathcal{B}(E_1,E_2),\overline{\mathbf{d}}\right)$ *es un espacio métrico.*

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. ■

Proposición 51 *Sean* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión en* $\mathcal{B}(E_1,E_2)$ *y* $f\in\mathcal{B}(E_1,E_2)$*. Entonces* $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ *en* $\left(\mathcal{B}(E_1,E_2),\overline{\mathbf{d}}\right)$ *si y solo si* $f_n \overset{u}{\to} f$*.*

Demostración. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $\mathcal{B}(E_1,E_2)$. Dado $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que si $n\geq N$, entonces $\sup\{d_2(f_n(x),f(x)) : x\in E_1\}<\varepsilon$. Pero como para todo $x\in E_1$ se tiene que $d_2(f_n(x),f(x))\leq \sup\{d_2(f_n(x),f(x)) : x\in E_1\}$, entonces se tiene que $d_2(f_n(x),f(x))<\varepsilon$, por lo tanto $f_n \overset{u}{\to} f$.

Recíprocamente, supongamos que $f_n \overset{u}{\to} f$. Dado $\varepsilon>0$, existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $x\in E_1$, si $n\geq N$ entonces $d_2(f_n(x),f(x))<\frac{\varepsilon}{2}$. Así, $\sup\{d_2(f_n(x),f(x)) : x\in E_1\}\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$ si $n\geq N$, es decir, $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ en $\mathcal{B}(E_1,E_2)$. ■

Proposición 52 *Sean* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *una sucesión en* $\mathcal{B}(E_1,E_2)$*. Entonces* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es una sucesión de Cauchy en* $\mathcal{B}(E_1,E_2)$ *si y solo si* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *es uniformemente de Cauchy.*

Demostración. Queda como ejercicio para el lector. ■

Proposición 53 *Si* (E_1,d_1) *es un espacio métrico y* (E_2,d_2) *es un espacio métrico completo, entonces* $\left(\mathcal{B}(E_1,E_2),\overline{\mathbf{d}}\right)$ *es un espacio completo.*

Demostración. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{B}(E_1,E_2)$. Por lo tanto, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es uniformemente de Cauchy. Como (E_2,d_2) es completo, existe $f:E_1\to E_2$ tal que $f_n \overset{u}{\to} f$. Veamos que $f\in\mathcal{B}(E_1,E_2)$. Como $f_n \overset{u}{\to} f$, para $\varepsilon=\frac{1}{3}$ existe $N\in\mathbb{N}$ tal que para todo $x\in E_1$, si $n\geq N$ entonces $d_2(f_n(x),f(x))<\frac{1}{3}$. Dado $y_0\in E_2$, existe $r>0$ tal que $f_N(E_1)\subset B_{E_2}(y_0,r)$. Así, dado $x\in E_1$ se tiene que $d_2(f(x),y_0)\leq d_2(f(x),f_N(x))+d_2(f_N(x),y_0)<\frac{1}{3}+r$. Por lo tanto, $f\in\mathcal{B}(E_1,E_2)$, luego $\mathcal{B}(E_1,E_2)$ es completo. ■

Observación 6 *Si* (E_1,d_1) *es un espacio métrico compacto y* (E_2,d_2) *es un espacio métrico cualquiera, entonces* $\mathcal{C}(E_1,E_2)$ *es un subespacio métrico de* $\mathcal{B}(E_1,E_2)$*.*

Definición 48 *Sean* (E_1,d_1) *y* (E_2,d_2) *espacios métricos. Definimos* $\mathcal{BC}(E_1,E_2)=\{f : f$ *es una función de* E_1 *a* E_2 *acotada y continua*$\}$.

Proposición 54 *Sean* (E_1,d_1) *y* (E_2,d_2) *espacios métricos. El conjunto* $\mathcal{BC}(E_1,E_2)$ *es cerrado en* $\left(\mathcal{B}(E_1,E_2),\overline{\mathbf{d}}\right)$*.*

Demostración. Dados $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{BC}(E_1, E_2)$ y $f \in \mathcal{B}(E_1, E_2)$ tal que $\lim_{n\to\infty} f_n = f$. Entonces $f_n \xrightarrow{u} f$. Como cada f_n es continua, entonces f es continua, y como f es acotada se tiene que $f \in \mathcal{BC}(E_1, E_2)$. ■

Ejemplo 21 *Consideremos* $(\mathbb{R}, d_1)$ *, métrica usual.*

1. $f_n(x) = \frac{x}{1+nx^2}$, $x \in [0,1]$.
   $f_n \xrightarrow{u} 0$ *en efecto.*
   $|f_n(x)| \leq |\frac{\sqrt{n}x}{\sqrt{n}(1+(\sqrt{n}x)^2)}| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$

2. $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx^2}$, $x \in [0,1]$. *Para* $x = 0$ *la sucesión* $f_n(0)$ *converge a* 0 *y para* $x \neq 0$ *la sucesión* $f_n(x)$ *converge a* $\frac{1}{x}$. *Por lo tanto la convergencia no es uniforme ya que cada* f_n *es continua y la función límite no lo es.*

3. $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}$, $x \in [0,1]$.
   $f_n \to 0$ *pero no uniformemente, en efecto:*
   Para $\epsilon = \frac{1}{4}$ *y para cada* $n \in \mathbb{N}$ *tomamos* $x_n = \frac{1}{n}$*; así* $|f_n(x_n)| = \frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

Quiz 13 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. *La sucesión* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *definida por*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } n \leq x < n+1 \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

   converge uniformemente.

2. *La sucesión* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, *definida por* $f_n(x) = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right) x$, *converge uniformemente.*

3. *Si* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *son tales que* $f_n(x) = x^n$, *entonces* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformemente.*

4. *La sucesión* $f_n(x) = \frac{x}{n}$ *converge uniformemente en subconjuntos acotados de* $\mathbb{R}$.

5. *Si las sucesiones de funciones reales* f_n *y* g_n *convergen uniformemente, entonces* $f_n + g_n$ *converge uniformemente.*

Ejercicio 4 *Resuelva los siguientes ejercicios.*

1. *Muestre que en* $(\mathbb{R}, d_2)$ *, métrica usual:*
   - $lim_{x\to x_0} \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0}$ *; donde* $x_0 \neq 0$.
   - $lim_{x\to 1} \frac{3x}{x^2+1} = \frac{3}{2}$ *(Usando la definición)*
   - $lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y}{x^2+y^2} = 0$ *(Usando la definición)*

2. *Sean U un abierto de $\mathbb{R}$, $a \in U$ y (E_2, d_2) un espacio métrico. Considere una función $f : U\backslash\{a\} \to E_2$. Sea f_+ la restricción de f al conjunto $U \cap \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$. Si existe $\lim_{x\to a^+} f_+(x)$, se le denomina* límite lateral derecho de f en a, *y se denota $\lim_{x\to a^+} f(x)$. Similarmente, sea f_- la restricción de f a $U \cap \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$. Si existe $\lim_{x\to a^-} f_-(x)$, se le denomina* límite lateral izquierdo de f en *a, y se denota $\lim_{x\to a^-} f(x)$. Prueba que $\lim_{x\to a} f(x)$ existe si y solo si existen $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x)$.*

3. *Sea $U = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ par algún $a \in \mathbb{R}^+$ y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función. Consideremos $g : (0, \frac{1}{a}) \to \mathbb{R}$ definida por $g(y) = f(\frac{1}{y})$. Si $\lim_{y\to 0} g(y)$ existe diremos que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe y $\lim_{y\to 0} g(y) = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Pruebe que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ existe si y solo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que si $x, y > M$, entonces $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

4. *Estudie la continuidad de $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, cuando:*

   a)
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   b)
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   c)
   $$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2}, & si\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & si\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

5. *Discuta la continuidad de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, cuando:*

   a)
   $$f(x) = \begin{cases} x sen\left(\frac{1}{x}\right), & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$$

   b)
   $$f(x) = \begin{cases} 0, & si\ x\ es\ irracional \\ \frac{1}{q}, & si\ x = \frac{p}{q}\ \ (p,q) = 1,\ p \neq 0,\ q > 0 \\ 1, & si\ x = 0 \end{cases}$$

6. *Dada*

   $$\begin{aligned} f : (0,1) &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto sen\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

   Demuestre que:

a) f *es continua pero no uniformemente continua en* $(0,1)$.

b) $\{(x, sen\ (\frac{1}{x})) : x \in (0,1)\} \cup \{(0,x) : -1 \leq x \leq 1\}$ *es conexo.*

c) $\{(x, sen\ (\frac{1}{x})) : x \in (0,1)\} \cup \{(0,0)\}$ *no es conexo por caminos.*

7. *Sean* (E,d) *espacio métrico,* $S \subset E$ *compacto y* $S \neq \emptyset$. *Si* $p \in E$, *entonces existe el mínimo de* $\{d(p,x) : x \in E\}$.

8. *En todo espacio métrico compacto, existe* $\max\{d(p,q) : p,q \in E\}$.

9. *Sea* $f : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ *un función continua. Si* E_1 *es compacto y* f *es biyectiva, entonces* f^{-1} *es continua.*

10. *Sea* S *un subconjunto denso en* (E_1, d_1). *Si* (E_2, d_2) *es compacto y* $f : S \to E_2$ *es uniformemente continua, entonces* f *tiene una extensión a una función de* E_1 *en* E_2 *uniformemente continua y dicha extensión es única.*

11. *Sean* $(E_1, d_1), (E_2, d_2)$ *espacios métricos y* $f : E_1 \to E_2$ *una función muestre que:* f *es continua si y solo si para cada* $X \subseteq E_1$ $f(\overline{X}). \subseteq \overline{f(X)}$

12. *Consideremos* $\mathbb{R}$ *con la métrica usual y* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Si toda función* $f : X \to \mathbb{R}$ *continua es uniformemente continua muestre que* X *es cerrado mas no necesariamente es compacto.*

13. *Consideremos* $\mathbb{R}$ *con la métrica usual y* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función continua. Muestre que* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = max_{x \in [a,x]} f(x)$ *es continua.*

14. *Sea* $F \neq \emptyset$ *un subconjunto cerrado en* (E,d). *Definamos*

$$\begin{aligned} \rho_F : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \rho_F(x) = \inf\{d(x,y) : y \in F\} \end{aligned}$$

Demuestre que:

a) $\rho_F(x) = 0$ *si y solo si* $x \in F$.

b) ρ_F *es uniformemente continua.*

c) *Dados* A, B *subconjuntos cerrados y no vacíos de* E, *con* $A \cap B = \emptyset$, *defina*

$$\begin{aligned} f : E &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \frac{\rho_A(x)}{\rho_A(x) + \rho_B(x)}. \end{aligned}$$

Entonces f *es continua en* E *e* $Im(f) \subset [0,1]$. *Además,* $f(x) = 0$ *si y solo si* $x \in A$ *y* $f(x) = 1$ *si y solo si* $x \in B$.

15. *Sean* V, V' *espacios vectoriales normados y* $f : V \to V'$ *transformación lineal.*

a) *Si* f *es continua en un punto, entonces* f *es continua en* V *y* f *es uniformemente continua.*

b) *f es continua si y solo si* $\left\{ \dfrac{\|f(x)\|}{\|x\|},\ x \neq 0 \right\}$ *es acotado.*

c) *Si V es de dimensión finita, entonces f es continua.*

16. *Sea $f : X \times K \to \mathbb{R}^n$ continua, K compacto en $\mathbb{R}^n$ y $X \subset \mathbb{R}^n$. Dado $x_0 \in X$, demuestre que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|x - x_0| < \delta$, entonces $|f(x, \alpha) - f(x_0, \alpha)| < \varepsilon$, para todo $\alpha \in K$.*

17. *Considere los subconjuntos del plano:*

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$$

$$Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^2x^2 + b^2y^2 = 1,\ a, b \neq 0\}$$

$$Z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 1\}$$

$$W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y\}$$

¿Cuáles de estos conjuntos son homeomorfos?

18. *Con la métrica Euclidiana, muestre que $[a, b]$ no es homeomorfo a la bola abierta $B(c, r)$ de $\mathbb{R}^2$.*

19. *Dado $x \in X \subset \mathbb{R}^n$, definimos la* componente conexa *C_x de x en X, como la unión de todos los conexos de X que contienen a x. Demuestre que:*

a) *C_x es conexo.*

b) *C_x es cerrado en X.*

c) *Si $h : X \to Y$ es un homeomorfismo y $h(x) = y$, entonces $h(C_x) = D_y$, con D_y componente conexa de y en Y.*

d) *Verifique que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$ no es homeomorfo a $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$.*

20. *Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$ una función continua. Demuestre que existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

21. *Sea $a \in \mathbb{R}$, $0 < a < 1$. Pruebe que*

$$\begin{array}{rcl} f_n : [0, a] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = x^n \end{array}$$

converge uniformemente. ¿El resultado es válido si $a = 1$?

22. *Dada una función real f continua, considere la sucesión $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, donde*

$$\begin{array}{rcl} f_n : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f_n(x) = f(x + 1/n) \end{array}$$

¿Esta sucesión converge uniformemente?

23. *Sea* $f_n : (E_1, d_1) \to (E_2, d_2)$ *una sucesión de funciones acotadas. Si* $f_n \xrightarrow{u} f$ *en* E_1 *,* $f : E_1 \to E_2$*, demuestre que* f *es acotada.*

24. *Pruebe que el conjunto de las matrices de tamaño* $n \times n$ *con determinante* 1 *es cerrado y no acotado en* $\mathbb{R}^{n^2}$*, además tiene interior vacío.*

25. *Sea* $f_n[a, b] \to \mathbb{R}$*,* $n \in \mathbb{N}$*, una sucesión de funciones; donde cada* f_n *es una función creciente. Si* $f_n \to f$ *en* $[a, b]$ *muestre que* f *es creciente y que si* f *es continua entonces* $f_n \xrightarrow{u} f$*.*
Sugerencia: Para probar la convergencia uniforme dado $\epsilon > 0$ *usar la continuidad uniforme de* f *en* $[a, b]$ *y que existen* $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_m = b$ *tales que* $|x_{j-1} - x_j| < \delta$*; además existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n \geq N \quad |f_n(x_j) - f(x_j)| < \frac{\epsilon}{5}$*,* $j = 0, 1, \cdots, m$*.*

26. *Sean* $f_n : E \to \mathbb{R}$ *para* $n = 1, \cdots$ *una sucesión de funciones continuas de valor real definidas en un espacio métrico compacto. Si* f *es continua ,* $f_n \to f$ *y* $f_1 \leq f_2 \leq \cdots$ *entonces muestre que* $f_n \xrightarrow{u} f$*.*
Sugerencia : dado $\epsilon > 0$ *defina* $K_n = \{x \in E : f(x) - f_n(x) \geq \epsilon\}$*, muestre que* K_n *es compacto y use un teorema de encaje.*

27. *¿El cono* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 - z = 0\}$ *es homeomorfo a* $\mathbb{R}^2$*?*

28. *¿El conjunto de las matrices invertibles* $n \times n$ *es abierto en* $\mathbb{R}^{n^2}$*?*

Capítulo 5

Cálculo diferencial

En este capítulo formalizamos los resultados de diferenciación, de funciones de una variable real, ya conocidos en cursos básicos, no obstante es necesario destacar el sorprendente teorema del valor intermedio de la derivada, que nos sirve en particular para entender las discontinuidades de la función derivada.

5.1. Diferenciabilidad

En esta sección se define la derivada de una función real como un límite. Sean $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in X \cap X'$. Diremos que f es *derivable* en el punto x_0 cuando existe el límite

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

En caso afirmativo, el límite $f'(x_0)$ se llama la *derivada* de f en el punto x_0, y representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función f en el punto $(x_0, f(x_0))$.

Si escribimos $h = x - x_0$ vemos que la derivada de f en el punto x_0 se puede calcular también con el límite

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Observe que la función $g(h) = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ es definida en el conjunto $Y = \{h \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \ : \ x_0 + h \in X\}$, el cual tiene a 0 como punto de acumulación.

Cuando $x_0 \in X \cap X'_+$, esto es, cuando x_0 es punto de acumulación a la derecha de X y también pertenece a X, podemos definir la *derivada a la derecha* de la función f en el punto x_0, como el límite

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Análogamente se define la *derivada a la izquierda* de f, $f'_-(x_0)$ cuando x_0 es un punto de acumulación a la izquierda de X y también pertenece a X.

Es claro que si $x_0 \in X$ es un punto de acumulación a la izquierda y a la derecha de X (por ejemplo, cuando $x_0 \in \text{Int}(X)$), entonces $f'(x_0)$ existe si y solo si existen y son iguales las derivadas laterales $f'_-(x_0)$ y $f'_+(x_0)$.

Observe que si $X = U$ es un abierto de $\mathbb{R}$ se tiene que todo punto $x \in U$ satisface $x \in U \cap U'$ y además x es punto de acumulación a la izquierda y a la derecha de U. De ahora en adelante vamos a tomar $X = U$ un conjunto abierto. Se dice que $f : U \to \mathbb{R}$ es derivable si es derivable en cada punto $x \in U$.

Proposición 55 *Si U es un abierto de $\mathbb{R}$ y $f : U \to \mathbb{R}$ es derivable en $x_0 \in U$, entonces es continua en x_0.*

Demostración. En efecto, $f(x) - f(x_0) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0)$, para $x \neq x_0$. Por lo tanto, si $x \to x_0$ se tiene que $f(x) - f(x_0) \to 0$. Así, f es continua en x_0. ■

Si $f : U \to \mathbb{R}$ es derivable, entonces tenemos la función derivada $f' : U \to \mathbb{R}$. Si además f' es continua, decimos que f es de clase C^1 (función derivable con función derivada continua). En general podemos definir la función derivada f' con dominio $\{x \in U : f'(x) \text{ existe}\}$.

Proposición 56 *Sean U un abierto en $\mathbb{R}$, $x_0 \in U$ y $f, g : U \to \mathbb{R}$ funciones derivables en x_0. Entonces*

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4. *Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in U$,* $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \dfrac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}$

Demostración.

1. $(f + g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \dfrac{(f + g)(x) - (f + g)(x_0)}{x - x_0}$
$$= \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

2. Igual que en el ítem anterior.

3. Si $x \neq x_0$,
$$\begin{aligned} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \frac{f(x)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} \\ &= g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$(f \cdot g)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

4. Basta considerar el caso $\dfrac{1}{g(x)}$, es decir, $f(x) = 1$ para todo $x \in U$.

$$\frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = -\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{g(x)g(x_0)}$$

luego

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{\dfrac{1}{g(x)} - \dfrac{1}{g(x_0)}}{x - x_0} = \frac{-g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}.$$

En el caso general, utilizando el resultado del ítem 3. se tiene que:

$$\begin{aligned} \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) &= f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0) + f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) \\ &= \frac{f'(x_0)}{g(x_0)} + f(x_0)\left(\frac{-g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2}\right) \\ &= \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{\left(g(x_0)\right)^2} \end{aligned}$$

De esta menera queda demostrada la proposición. ■

Corolario 21 *Si $f(x) = x^n$ con $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f'(x_0) = n(x_0)^{n-1}$, $\quad x_0 \neq 0$ si $n < 0$.*

Demostración. Para el caso $n \in \mathbb{N}$, se prueba por inducción:

Para $n = 1$, $f(x) = x$ y por lo tanto se cumple ya que $f'(x_0) = 1$.

Supongamos válido el resultado para $n = k$. Como $x^{k+1} = x^k \cdot x$, utilizando el ítem 3. de la proposición anterior, se tiene que $f'(x_0) = k(x_0)^{k-1} \cdot (x_0) + (x_0)^k \cdot 1 = k(x_0)^k + (x_0)^k = (k+1)(x_0)^k$.

Si $n < 0$, se tiene que $f(x) = \dfrac{1}{x^{-n}}$. Por lo tanto, utilizando el ítem 4. de la proposición anterior, se tiene que $f'(x_0) = \dfrac{-(-n(x_0)^{-n-1})}{(x_0)^{-2n}} = n(x_0)^{n-1}$.

En el caso $n = 0$, $f(x) = 1$, y como $f'(x_0) = 0$ el resultado se tiene. ■

Proposición 57 (Regla de la cadena) *Sean $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}$ con U, V abiertos en $\mathbb{R}$. Si f es derivable en x_0 y g es derivable en $f(x_0)$, entonces $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.*

Demostración. Definamos

$$G(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)}, & \text{si } y \in V \text{ y } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)), & \text{si } y = f(x_0) \end{cases}$$

Observe que G es continua en $f(x_0)$. Si $y \neq f(x_0)$, $g(y) - g(f(x_0)) = G(y)(y - f(x_0))$. En particular, para $y = f(x)$ se tiene que $g(f(x)) - g(f(x_0)) = G(f(x))(f(x) - f(x_0))$. Luego para $x \neq x_0$, dividiendo por $x - x_0$ se tiene que:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = G(f(x))\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

por lo tanto:

$$(g \circ f)'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = G(f(x_0)) \cdot f'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Así se obtiene el resultado. ■

Proposición 58 *Sean U abierto de $\mathbb{R}$, $f : U \to \mathbb{R}$ una función y $x_0 \in U$. Si f alcanza un máximo o un mínimo en x_0 y f es derivable en x_0, entonces $f'(x_0) = 0$.*

Demostración. Supongamos que f alcanza un máximo en x_0 y que f es derivable en x_0. Existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente creciente en U, con $x_n \neq x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $x_n \to x_0$. Como $\dfrac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f'(x_0) \geq 0$. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión estrictamente decreciente en U, con $y_n \neq x_0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $y_n \to x_0$. Como $\dfrac{f(y_n) - f(x_0)}{y_n - x_0} \leq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ por ser $f(x_0)$ máximo, entonces $f'(x_0) \leq 0$. De esta manera, $f'(x_0) = 0$. ■

Quiz 14 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. *Sean f, g definidas en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ que toman valores reales. Si f y g son derivables en U y $f'(x) = g'(x)$ para cada $x \in U$, entonces $f = g$.*
2. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}$ existe, entonces $f'(x)$ existe.*
3. *La función*
$$f(x) = \begin{cases} x \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), & \text{si } x \neq 0 \\ 0, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$
es derivable en $x = 0$
4. *$f(x) = \sqrt{|x|}$ no es derivable en $x = 0$.*
5. *Sean $f : U \to \mathbb{R}$ una función y $U \subset \mathbb{R}$ abierto. Si f es derivable en $x = a \in U$, entonces $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.*

5.2. Teoremas de Rolle y del valor medio

Teorema 23 (Teorema de Rolle) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en (a, b). Si $f(a) = f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demostración. Como f es continua y $[a, b]$ es compacto, entonces f alcanza un *máximo* y un *mínimo* en $[a, b]$. Si el máximo y el mínimo son alcanzados en $\{a, b\}$, entonces $f(x)$ es constante y por tanto$f'(x) = 0$, para todo $x \in (a, b)$.

Si el máximo (o el mínimo) es alcanzado en $c \in (a, b)$, entonces por la última proposición de la sección anterior se tiene que $f'(c) = 0$. ■

Teorema 24 (Teorema del valor medio) *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$*

Demostración. Definimos $g(x) = f(x) - \left(f(a) + \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right)(x - a)\right)$ en el intervalo $[a, b]$. Evidentemente, $g(a) = g(b) = 0$ y además g es derivable en (a, b). Aplicando el *teorema de Rolle* a la función g, concluimos que existe $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$, es decir, $f'(c) - \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) = 0$. ■

Corolario 22 *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ continua, con U abierto y conexo en $\mathbb{R}$. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in U$, entonces f es constante.*

Demostración. Sean $a, b \in U$ (sin pérdida de generalidad, supongamos que $a < b$). Luego $[a, b] \subset U$ por ser U conexo. Aplicando el *teorema del valor medio* a $f|_{[a,b]}$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Pero $f'(c) = 0$, así que $f(a) - f(b) = 0$, y así $f(a) = f(b)$. Ahora fijando $a \in U$, tenemos que para todo $x = b \in U$ se tiene que $f(x) = f(a)$, es decir, f es constante. ■

Corolario 23 *Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es tal que la derivada es siempre positiva en (a, b) (es decir, $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a, b)$), entonces f es creciente (estrictamente creciente).*

Demostración.
Sean $a_1, b_1 \in (a, b)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a_1 < b_1$. Aplicando el *teorema del valor medio* a $f|_{[a_1,b_1]}$, existe $c \in (a_1, b_1)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(b_1) - f(a_1)}{b_1 - a_1}$. Por lo tanto, $f(b_1) - f(a_1) = f'(c)(b_1 - a_1)$. Como $f'(c) > 0$ y $b_1 - a_1 > 0$, se tiene que $f(b_1) - f(a_1) > 0$, luego f es creciente. ■

Corolario 24 *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $(a, b) - \{c\}$. Si existe $\lim_{x \to c} f'(x) = L$, entonces f es derivable en c y $f'(c) = L$.*

Demostración. Veamos inicialmente que $\lim_{x\to c^+} \dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} = L$.

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (c, c+\delta)$ entonces $|f'(x) - L| < \varepsilon$. Ahora fijamos $\overline{x} \in (c, c+\delta)$. Entonces por el teorema del valor medio aplicado a $f|_{[c,\overline{x}]}$ tenemos que $\left|\dfrac{f(\overline{x})-f(c)}{\overline{x}-c} - L\right| = |f'(\xi) - L| < \varepsilon$, para algún $\xi \in (c, c+\delta)$. Para el caso del límite por la izquierda se razona de igual manera. ■

Teorema 25 (Teorema del valor medio generalizado) *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a,b]$ y derivables en (a,b). Entonces, existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)(g(b)-g(a)) = g'(c)(f(b)-f(a))$*

Demostración. Definiendo $h(x) = f(x)\,(g(b)-g(a)) - g(x)\,(f(b)-f(a))$ en $[a,b]$, se tiene que:

$$\begin{aligned} h(a) &= f(a)g(b) - f(a)g(a) - g(a)f(b) + g(a)f(a) \\ &= f(a)g(b) - g(a)f(b) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h(b) &= f(b)g(b) - f(b)g(a) - g(b)f(b) + g(b)f(a) \\ &= g(b)f(a) - f(b)g(a) \end{aligned}$$

Luego $h(a) = h(b)$. Derivando y aplicando el *teorema de Rolle*, se tiene el resultado. ■

Teorema 26 (Regla de L'Hôpital) *Sean $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ continuas y derivables en (a,b), con $g(x) \neq 0 \neq g'(x)$ para todo $x \in (a,b)$ y $f(a) = g(a) = 0$. Si $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, entonces $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$*

Demostración. Suponga que $\lim_{x\to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$ Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $x \in (a, a+\delta)$, entonces $\left|\dfrac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon$. Dado $x \in (a, a+\delta)$, apliquemos el *teorema del valor medio generalizado* a $f|_{[a,x]}$ y $g|_{[a,x]}$. Luego existe $x^* \in (a,x)$ tal que $\dfrac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \dfrac{f'(x^*)}{g'(x^*)}$. Así, $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$. ■

Teorema 27 (Teorema del valor intermedio de la derivada) *Sean $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable, $a_1, b_1 \in (a,b)$ tales que $f'(a_1) < f'(b_1)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es tal que $f'(a_1) < \lambda < f'(b_1)$, entonces existe $c \in (a_1, b_1)$ tal que $\lambda = f'(c)$.*

Demostración. Consideremos inicialmente el caso $\lambda = 0$. En ese caso $f'(a_1) < 0 < f'(b_1)$, es decir, $\lim_{x\to a_1} \dfrac{f(x)-f(a_1)}{x-a_1} < 0$ y $\lim_{x\to b_1} \dfrac{f(x)-f(b_1)}{x-b_1} > 0$.

Luego existen $\delta_1, \delta_2 > 0$ tales que: si $x \in (a_1, a_1+\delta_1)$, entonces $f(x) < f(a_1)$ y si $x \in (b_1-\delta_2, b_1)$, entonces $f(x) < f(b_1)$.

Por lo tanto el mínimo de f en $[a_1, b_1]$ es alcanzado en un punto $c \in (a_1, b_1)$ y por lo tanto $f'(c) = 0$. Para el caso general definimos la función $g(x) = f(x) - \lambda x$ y aplicamos a g el caso anterior. ■

Corolario 25 *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si dado $c \in (a,b)$ se tiene que $\lim_{x\to c^+} f'(x) = L$, entonces $f'(c) = L$.*

Demostración. Por contradicción. Supongamos que $L > f'(c)$ (el caso $L < f'(c)$ es semejante).

Sea λ tal que $f'(c) < \lambda < L$. Luego existe $\delta > 0$ tal que si $c < x < c+\delta$, entonces $\lambda < f'(x)$. En particular $f'(c) < \lambda < f'(c+\frac{\delta}{2})$. Luego no existe $x \in (c, c+\dfrac{\delta}{2})$ tal que $f'(x) = \lambda$, lo cual es una contradicción. ■

Quiz 15 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. *Si $g : (-1,1) \to \mathbb{R}$ está definida por*

$$g(x) = \begin{cases} -1, & si\ -1 < x < 0 \\ 1, & si\ 0 \leq x < 1 \end{cases}$$

   entonces existe una función $f : (-1,1) \to \mathbb{R}$ tal que $f' = g$.

2. *Existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 - 3x + a$ tiene dos raíces en $[0,1]$.*

3. *Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua en $x = 0$, entonces $f(x) = xg(x)$ es derivable en $x = 0$.*

4. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq |x|^\alpha$ para todo $x \in \mathbb{R}$, con $\alpha > 0$. Entonces f es derivable en $x = 0$.*

5. *Sea $U \subset \mathbb{R}$ abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ una función derivable. Si $f'(x) = 0$ para todo $x \in U$ entonces f es una función constante.*

5.3. Teorema de Taylor

Definición 49 *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ derivable en U, con U intervalo abierto en $\mathbb{R}$. Si $f' : U \to \mathbb{R}$ es derivable en U, $(f')' = f'' = \dfrac{d^2 f}{dx^2}$. Así mismo, f es n* veces derivable *en U, si existe $(f^{(n-1)})' = \dfrac{d^n f}{dx^n}$.*

Sea $x_0 \in U$. Decimos que f es n veces derivable en x_0, $\left(\dfrac{d^n f}{dx^n}(x_0) = f^{(n)}(x_0)\right)$, si existe $B(x_0,\delta)$ tal que $f|_{B(x_0,\delta)}$ es $(n-1)$ veces derivable y $(f^{(n-1)})'(x_0)$ existe.

Definición 50 *Sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable. Definimos para cada $b \in U$,*

$$\begin{aligned} R_n(b,-) : U &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto R_n(b,x) \end{aligned}$$

dado por

$$R_n(b,x) = f(b) - \left(f(x) + f'(x)\frac{(b-x)^1}{1!} + f^{(2)}(x)\frac{(b-x)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!}\right)$$

Proposición 59 *Sean U un intervalo abierto y $f : U \to \mathbb{R}$ una función $(n+1)$ veces derivable. Entonces*

$$\frac{d}{dx}R_n(b,x) = -\frac{f^{(n+1)}(x)(b-x)^n}{n!}$$

Demostración. Claramente, $\dfrac{d}{dx}R_n(b,x)$ existe. Derivando $R_n(b,x)$ con respecto a x tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}R_n(b,x) = 0 - f'(x) - \big(f^{(2)}(x)(b-x) + f'(x)(-1)\big) - \\ \left(f^{(3)}(x)\frac{(b-x)^2}{2!} + f^{(2)}(x)\frac{2(b-x)}{2!}(-1)\right) - \cdots - \\ \left(f^{(n+1)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!} + f^{(n)}(x)\frac{n(b-x)^{n-1}}{n!}(-1)\right) \end{aligned}$$

de donde se tiene el resultado. ■

Proposición 60 (Teorema de Taylor con resto diferencial) *Sean U un intervalo abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ una función $(n+1)$ veces derivable y $a, b \in U$ con $a \neq b$. Entonces*

$$f(b) = f(a) + f'(a)\frac{(b-a)^1}{1!} + f^{(2)}(a)\frac{(b-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(b-a)^n}{n!} + f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!},$$

donde c es un número entre a y b.

Demostración. Definamos $\varphi(x) = R_n(b,x) - k\dfrac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$ (donde k es escogida de modo que $\varphi(a) = 0$). Entonces $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$, y φ es derivable. Luego por el teorema de Rolle existe c entre a y b tal que $\varphi'(c) = 0$. Por lo tanto,

$$0 = \frac{d}{dx}R_n(b,c) - k\frac{(b-c)^n}{n!}$$

$$0 = -f^{(n+1)}(c)\frac{(b-c)^n}{n!} + k\frac{(b-c)^n}{n!}.$$

Luego $k = f^{(n+1)}(c)$. ■

Definición 51 *Sean U un intervalo abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable, y $a \in U$ el polinomio de Taylor de f de orden n alrededor del punto a es*

$$p_n[f,a](x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)(x-a)^j}{j!}$$

Proposición 61 (Teorema de Taylor con resto infinitesimal) *Sean U un intervalo abierto, $f : U \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable y $a \in U$. Entonces para cada $x \in U$*

$$f(x) = p_n[f,a](x) + R_n(a,x),$$

donde $\lim_{x\to a} \frac{R_n(a,x)}{(x-a)^n} = 0$

Demostración. La prueba es por inducción. Para $n = 1$, $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)-f'(a)(x-a)}{(x-a)} = 0$. Asumamos válido el resultado para $n = k$ y probemos que es válido para $k + 1$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P_{k+1}[f,a](x)}{(x-a)^{k+1}} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x) - P_k[f',a](x)}{(k+1)(x-a)^k}.$$

La última igualdad es por la regla de L'Hôpital, si usamos ahora la hipótesis de inducción obtenemos lo deseado. ■

Ejercicio 5 *1. Sean U abierto en $\mathbb{R}$ y $f : U \to \mathbb{R}$ una función n veces derivable en $x_0 \in U$. Entonces:*

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(x_0)\frac{h^k}{k!}}{h^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

2. Use el teorema de Taylor para probar el teorema del binomio para exponente entero positivo n:

$$(a+x)^n = a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3 + \cdots + x^n.$$

3. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que f es $(n+1)$-veces derivable en (a,b) y que $\lim_{x\to a} f'(x), \cdots, \lim_{x\to a} f^{(n)}(x)$ existen Además, supongamos que $f', f^{(2)}, \cdots, f^{(n)}$ son acotadas. Entonces $f(b) = f(a) + (\lim_{x\to a} f'(x))\frac{(b-a)}{1!} + \cdots + \left(\lim_{x\to a} f^{(n)}(x)\right)\frac{(b-a)^n}{n!}$ $+f^{(n+1)}(c)\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}$, para algún c entre a y b. Sugerencia: defina $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $h(x) = f(b) - f(x) - f'(x)(b-x) - \cdots - f^{(n)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!}$, si $x \in (a,b)$, $h(a) = f(b) - f(a) - \lim_{x\to a} f'(x)(b-x) - \cdots - \lim_{x\to a} f^{(n)}(x)\frac{(b-x)^n}{n!}$. Muestre que h es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Use que existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $h(a) = k\frac{(b-a)^n}{(n+1)!}$ y defina $\phi(x) = h(x) - k\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$.

4. Sea $f : X \to \mathbb{R}$ derivable en $a \in X \cap X'$. Si (x_n) y (y_n) son sucesiones de puntos en X tales que $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = a$ y $x_n < a < y_n$ para todo n, pruebe que $\lim_{n\to\infty} \dfrac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)$. Sugerencia: para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in (0,1)$ tal que $a = (1-t_n)x_n + t_n y_n$ y verifique que $\frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n-x_n} = (1-t_n)\frac{f(y_n)-f(a)}{y_n-a} + t_n\frac{f(x_n)-f(a}{x_n-a}$

5. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dos veces derivable, si* $f(0) = 0, f(1) = 1, f'(0) = 0$ *y* $f'(1) = 0$ *muestre que existe* $c \in (0,1)$ *tal que* $|f''(c)| \geq 2$.

6. *Suponga que* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *es derivable. Si existe* $M > 0$ *tal que* $|f'(x)| \leq M$ *para todo* $x \in (a,b)$*, pruebe que* f *es uniformemente continua.*

7. *Calcular (usando L'Hopital):*

   a) $\lim_{x\to 0} \frac{sen\ x}{x}$.

   b) $\lim_{x\to 0} \frac{cos\ x - 1}{x}$.

8. *Sea* $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *derivable tal que* $f'(x) = \dfrac{1}{x}$ *y* $f(1) = 0$*. Muestre que* $f(xy) = f(x) + f(y)$ *para todo* $x, y \in \mathbb{R}^+$.

9. *Sea* $f : R \to \mathbb{R}$ *una función derivable en* $x = 0$ *. Si* $f(\frac{x}{2}) = \frac{f(x)}{2}$ *para cada* $x \in \mathbb{R}$ *, muestre que existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $\forall x \in \mathbb{R}\, f(x) = kx$

10. *Sea* f *derivable en el intervalo abierto* I*. Sean* $X = \{f'(x) : x \in I\}$ *e* $Y = \{\frac{f(x)-f(y)}{x-y} : x, y \in I, x \neq y\}$*. Muestre que* $Y \subseteq X$ *, de un ejemplo en el que* $Y \neq X$ *y muestre que* $\overline{Y} = \overline{X}$

11. *Sea* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *acotada y derivable. Si no existe* $\lim_{x\to a^+} f(x)$ *muestre que para cada* $c \in \mathbb{R}$ *existe* $d \in (a,b)$ *tal que* $f'(d) = c$.

12. *Sea* $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *un polinomio de grado impar. Demuestre que existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $p''(c) = 0$.

13. *Considere la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x^2 sen\ \left(\frac{1}{x}\right) + x, & si\ x \neq 0 \\ 0, & si\ x = 0 \end{cases}$$

   Demuestre que f *es derivable y que el conjunto de puntos donde la derivada es nula no es cerrado en* $[0,1]$.

14. *Dada* $f(x) = \dfrac{x^5}{1+x^6}$*, calcule las derivadas de orden 2001 y 2003 de la función en el punto* $x = 0$.

15. *Si* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *es derivable y existe* $k \in \mathbb{R}$ *tal que* $|f'(x)| \leq k$ *para todo* $x \in (a,b)$*, muestre que* $|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$ *para todo* $x, y \in (a,b)$.

16. *Sea* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Si existen* $k > 0$ *y* $\alpha > 1$ *tales que* $|f(x)-f(y)| \leq k|x-y|^\alpha$ $\forall x, y \in (a,b)$*, muestre que* f *es constante.*

17. *Sea f continua en $[a,b]$ con segunda derivada, f'' finita en (a,b). Suponga que la cuerda que une los puntos $A=(a,f(a))$ y $B=(b,f(b))$ corta el gráfico de f en un tercer punto, P, diferente de A y diferente de B. Pruebe que $f''(c)=0$ para algún $c\in(a,b)$.*

18. *Si $c_0+\dfrac{c_1}{2}+\cdots+\dfrac{c_n}{n+1}=0$ donde $c_0,\cdots,c_n\in\mathbb{R}$, muestre que la ecuación $c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n=0$ tiene por lo menos una solución en $[0,1]$*

19. *Sean $U\subset\mathbb{R}$ intervalo abierto y $f,\ g:U\to\mathbb{R}$ derivables, con $g(x)\neq 0$ y $g\prime(x)\neq 0$ para todo $x\in U$. Si a es un extremo de U, supongamos que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{g(x)}=0$. Demostrar que $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g\prime(x)}$, siempre que este último límite exista.*

20. *Sean $U=\{x\in\mathbb{R}:x>\alpha\}$ para algún $\alpha\in\mathbb{R}$, y $f,g:U\to\mathbb{R}$ funciones derivables, con $g(x)\neq 0$ y $g'(x)\neq 0$ para todo $x\in U$. Si $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ existe, muestre que $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.*

Capítulo 6

Derivación en varias variables

En este capítulo generalizamos el concepto de derivada de una función de una variable real a varias variables reales, destacando los teoremas de la función inversa e implícita.

6.1. Definición y ejemplos

Para este capítulo asumimos conocidos algunos conceptos de transformaciones lineales, matrices y producto interno.

Sea $U \subset \mathbb{R}$ un abierto. Si $f : U \to \mathbb{R}$ es una función derivable en a, entonces $f(a+h) - f(a) - f'(a)h = r(h)$ es tal que $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$ (el *resto* $r(h)$ tiende más rápidamente a cero que h). Recíprocamente, si $f(a+h) = f(a) + Lh + r(h)$ con $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h} = 0$, entonces $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h} = L$, esto es, existe la derivada $f'(a)$ y es igual a L. Esto motiva la siguiente definición para la derivada de una función en varias variables.

Definición 52 *Sean U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^m$ y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función. Decimos que f es* diferenciable *en un punto $a \in U$, si existen una transformación lineal $T_a : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ y una aplicación* resto *r_a tales que*

$$f(a+h) = f(a) + T_a \cdot h + r_a(h), \qquad (*)$$

para todo $h \in \mathbb{R}^m$ suficientemente pequeño con

$$\lim_{h\to 0} \frac{r_a(h)}{\|h\|} = 0, \qquad (**)$$

Observe que $\lim_{h\to 0} \dfrac{r_a(h)}{\|h\|} = 0$ es equivalente a $\lim_{h\to 0} \dfrac{\|r_a(h)\|}{\|h\|} = 0$. La aplicación T_a cuando existe se llama la diferencial de f en a, la cual se denota por $T_a = df(a)$. La función f es diferenciable en U, cuando f es diferenciable en cada punto de U. Si f es diferenciable en U, consideramos la aplicación

$$\begin{aligned} df : U &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ a &\to df(a), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es el espacio vectorial normado de las transformaciones lineales T de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$, con la norma $\|T\| = sup\{\|Tv\| : \|v\| = 1\}$.

La función $f : U \to \mathbb{R}^n$ es *continuamente diferenciable* o de clase C^1 en U, si f es diferenciable en U y la aplicación $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es continua.

Observación 7 *Con respecto a la definición de diferenciabilidad tenemos:*

1. *Cuando $\|h\|$ es suficientemente pequeño se tiene que $a + h \in U$, de ahí la importancia de que U sea un conjunto abierto en $\mathbb{R}^m$.*

2. *Podemos interpretar $(*)$ diciendo que para valores pequeños de h se tiene que $f(a + h) - f(a)$ puede ser aproximada por $T_a \cdot h$.*

3. *Si f es diferenciable en a tenemos que $\lim_{h\to 0} (f(a + h) - f(a)) = 0$. Es decir f es continua en a.*

4. *Si f es diferenciable en el punto $a \in U$, entonces la transformación T_a que satisface $(*)$ es única. En efecto: si suponemos la existencia de $T_a^1, T_a^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ satisfaciendo $(*)$ y tomando $B_a = T_a^1 - T_a^2$ se tiene:*

$$f(a + h) - f(a) = T_a^1 \cdot h + r_a^1(h) \quad y \quad f(a + h) - f(a) = T_a^2 \cdot h + r_a^2(h).$$

Así,

$$\|B_a \cdot h\| \leq \|r_a^1(h)\| + \|r_a^2(h)\|.$$

Luego, $\dfrac{\|B_a \cdot h\|}{\|h\|} \to 0$, cuando $h \to 0$. Para $u \in \mathbb{R}^m, u \neq 0$ se tiene que $\dfrac{\|B_a \cdot (tu)\|}{\|tu\|} \to 0$ cuando $t \to 0$. Por la linealidad de B_a tenemos que $\dfrac{\|B_a \cdot u\|}{\|u\|} = 0$, para todo $u \in \mathbb{R}^m$ con $u \neq 0$. Así, $B_a \cdot u = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^m$, es decir, $B_a = 0$.

5. *Lo más importante en la definición de diferenciabilidad es el límite $(**)$. Siempre podemos calcular $r_a(h) = f(a + h) - f(a) - T \cdot h$ con T cualquier transformación lineal de $\mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$, pero a lo sumo hay una única T para la cual $r(h)$ satisface $(**)$.*

6. *Suponiendo que f es diferenciable en el punto a, para todo $u \in \mathbb{R}^m, u \neq 0$ y $t \in \mathbb{R}$ suficientemente pequeño, se tiene*

$$f(a+tu) - f(a) = T_a \cdot (tu) + r_a(tu).$$

Luego $tT_a \cdot u = f(a+tu) - f(a) - r_a(tu)$. Por lo tanto,

$$T_a \cdot u = \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} - \frac{r_a(tu)}{\|tu\|}\|u\|\frac{|t|}{t}.$$

Cuando $t \to 0$ tenemos

$$T_a \cdot u = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t}.$$

Ejemplo 22 *Veamos algunos casos simples de funciones diferenciables.*

1. *Si $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ y $a \in \mathbb{R}^m$, entonces $dA(a) = A$. En efecto, $A(a+h) - A(h) = A(a)$. En este caso el resto $r_a(h) = 0$.*

2. *Si $B : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es una función bilineal. Entonces B es diferenciable en cada punto $(a, b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ y $dB(a, b) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ es definida por $dB(a, b) \cdot (u, v) = B(u, b) + B(a, v)$. En efecto, $B(a+u, b+v) - B(a, b) = B(a, v) + B(u, b) + B(u, v)$. Por otro lado existe $c > 0$ tal que $\|B(u, v)\| \leq c\|u\|\|v\|$ para todo $u \in \mathbb{R}^m$ y todo $v \in \mathbb{R}^n$. Si tomamos $\|(u, v)\| = \|u\| + \|v\|$ se tiene*

$$\frac{\|B(u,v)\|}{\|(u,v)\|} = \frac{\|B(u,v)\|}{\|u\| + \|v\|} \leq \frac{c\|u\|\|v\|}{\|u\| + \|v\|} \leq c\|u\|$$

y

$$\lim_{(u,v)\to 0} \frac{\|B(u,v)\|}{\|(u,v)\|} = 0.$$

Luego $dB(a, b) \cdot (u, v) = B(u, b) + B(a, v)$ y $r_{(a,b)}(u, v) = B(u, v)$.

Sean U un abierto de $\mathbb{R}^m$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función, $0 \neq u \in \mathbb{R}^m$ y $x \in U$. La *derivada direccional* de f en x y en la dirección del vector u, se define por

$$Df(x) \cdot u = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t},$$

cuando este límite exista. Esta derivada también se denota por $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x)$. Por el último ítem de la observación anterior se tiene que si f es diferenciable en x, entonces f tiene en x derivada direccional en cualquier dirección $u \neq 0$ de $\mathbb{R}^m$ y $Df(x) \cdot u = T_x \cdot u$. La recíproca de esta implicación es falsa como veremos con algunos ejemplos más adelante.

Sea $f = (f_1, \cdots, f_n)$ donde para cada $i = 1, ..., n$ tenemos $f_i : U \to \mathbb{R}$. Asuma que f es diferenciable en x. Entonces

$$T_x \cdot u = Df(x) \cdot u = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu) - f(x)}{t} =$$

$$\lim_{t\to 0} \left(\frac{f_1(x+tu) - f_1(x)}{t}, \cdots, \frac{f_n(x+tu) - f_n(x)}{t} \right) =$$

$$\left(\lim_{t\to 0} \frac{f_1(x+tu) - f_1(x)}{t}, \cdots, \lim_{t\to 0} \frac{f_n(x+tu) - f_n(x)}{t} \right) =$$

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial u}(x), \cdots, \frac{\partial f_n}{\partial u}(x) \right).$$

Sea $\{e_1, \ldots, e_m\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^m$. La derivada direccional de f en la dirección del vector e_i se denomina la *derivada parcial* de f en x_i, es decir,

$$Df(x) \cdot e_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(x), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(x) \right).$$

La transformación lineal T_x tiene asociada una matriz $n \times m$ en las bases canónicas de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, denominada la *matriz jacobiana* de f en el punto x, denotada por $Jf(x)$, cuya componente ij es la derivada parcial $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$, esto es,

$$Jf(x) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m}(x) \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m}(x) \end{bmatrix}.$$

Así, para cualquier vector $u = \sum_{i=1}^m u_i e_i$ de $\mathbb{R}^m$ tenemos

$$Jf(x) \cdot u = T_x \cdot u = \sum_{i=1}^m u_i Df(x) \cdot e_i = \sum_{i=1}^m u_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x).$$

Observamos que f es C^1 en U si y solo si las funciones coordenadas

$$f_1, \ldots, f_n : U \to \mathbb{R}$$

poseen derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} : U \to \mathbb{R}$ continuas.

Ejemplo 23 *Consideremos la función*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2}} & , si \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , si \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Mostremos que f es diferenciable en $(0,0)$, para ello notemos que las derivadas parciales son nulas en $(0,0)$ (verifique) por lo tanto debemos verificar que $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)}{\|(h,k)\|} = 0$.
Ahora $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{h^2k}{h^2+k^2} = 0$ *ya que*

$$0 \leq |\frac{h^2k}{h^2+k^2}| \leq |k|$$

Interpretación de la derivada direccional.

La derivada direccional

$$Df(x)\cdot u = \frac{\partial f}{\partial u}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tu)-f(x)}{t}$$

es la derivada en el punto $t=0$ de la función compuesta $f\circ\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \to \mathbb{R}$, donde $\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \to U$ es el camino rectilíneo $\alpha(t) = x + tu$.

De manera más general, si $\alpha : (-\epsilon,\epsilon) \to U$ es una curva diferenciable tal que $\alpha(0) = x$ y $\alpha'(0) = u$, la derivada direccional de f en x y en la dirección del vector u es

$$Df(x)\cdot u = \lim_{t\to 0} \frac{f(\alpha(t))-f(x)}{t} = \frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(0).$$

Ejemplo 24 *Veamos algunos ejemplos donde la existencia de las derivadas direccionales no implica la diferenciabilidad.*

1. *La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definidos por*

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & , si \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , si \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

no es continua en $(0,0)$, pero

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0$$

y

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0.$$

Es decir, la existencia de las derivadas parciales no garantiza la continuidad y por ende no se puede garantizar la diferenciabilidad.

2. *Consideremos $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & , si \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , si \;\; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esta función es continua y admite derivadas direccionales en el origen en todas las direcciones $u = (a, b)$, dado que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{g(ta, tb)}{t} = \frac{a^2 b}{a^2 + b^2},$$

pero g no es diferenciable en $(0,0)$ porque si lo fuese, tendríamos que $\dfrac{\partial g}{\partial u}(0,0) = T_{(0,0)} \cdot u$ y por lo tanto $\dfrac{\partial g}{\partial u}(0,0)$ sería lineal en u lo cual es falso $\left(\dfrac{\partial g}{\partial (u+v)}(0,0) \neq \dfrac{\partial g}{\partial u}(0,0) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(0,0) \right)$, es decir, la existencia de derivadas direccionales en un punto no garantiza la diferenciabilidad en dicho punto.

3. *Consideremos $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por*

$$h(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & , si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Esta función no es continua en $(0,0)$ y por lo tanto no es diferenciable en $(0,0)$, pero admite derivadas direccionales en el origen en todas las direcciones $u = (a, b)$, dado que

$$\frac{\partial h}{\partial u}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{h(ta, tb)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{ta^3 b}{t^4 a^6 + b^2} = 0.$$

Decimos que $f : U \to \mathbb{R}^n$ es $2-$*veces* diferenciable en U, si $df : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ está definida en U y es diferenciable. Denotamos por $d^2 f$ la diferencial de df en U. Si f es $2-$*veces* diferenciable en U tenemos la aplicación

$$\begin{aligned} d^2 f : U &\to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \\ a &\to d^2 f(a), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n))$ es el espacio de las transformaciones lineales L de $\mathbb{R}^m$ en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, el cual es isomorfo al espacio vectorial normado de las aplicaciones bilineales T de $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ en $\mathbb{R}^n$, denotado por $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, con la norma

$$\|T\| = sup\{\|T(v_1, v_2)\| : \|v_1\| = 1, \|v_2\| = 1\}.$$

El isomorfismo entre estos espacios vectoriales es dado por

$$\varphi : \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)) \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$$

$\varphi(L) = T$, donde $T(v_1, v_2) = L(v_1) \cdot v_2$ para todo $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$. La función $f : U \to \mathbb{R}^m$ es de clase C^2, si f es $2-$*veces* diferenciable en U y la aplicación $d^2 f : U \to \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es continua.

Continuando inductivamente tenemos que f es $r-$*veces* diferenciable en U, si $d^{r-1} f$ está definida en U y es diferenciable. Cuando f sea $r-$*veces* diferenciable en U tenemos la aplicación

$$\begin{aligned} d^r f : U &\to \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ a &\to d^r f(a), \end{aligned}$$

donde $\mathcal{L}^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es el espacio vectorial normado de las aplicaciones $r-$*lineales* T con la norma $\|T\| = sup\{\|T(v_1, \ldots, v_r)\| : \|v_1\| = \cdots = \|v_r\| = 1\}$. La función $f : U \to \mathbb{R}^m$ es de clase C^r, si f es $r-$*veces* diferenciable en U y $d^r f : U \to \mathcal{L}^r(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ es continua. Además, f es de clase C^∞ en U si es de clase C^r, para todo $r \geq 0$.

Definición 53 *Sean U, V subconjuntos abiertos de $\mathbb{R}^m$. Una función $f : U \to V$ es un* difeomorfismo de clase C^r *si f es biyección de clase C^r y su inversa $f^{-1} : V \to U$ también es de clase C^r.*

Quiz 16 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. *Sea $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$. Entonces $Sup_{h\neq 0}\frac{\|B(h)\|}{\|h\|} < \infty$.*
2. *Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x, y) = x^2 + y^2$, entonces $df(1, 1)(u, v) = (2u, 2v)$.*
3. *Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(t) = (sent, cost)$, entonces $df(1)(\pi) = (-1, 0)$.*
4. *Si $f : U \to \mathbb{R}$, donde $U \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto abierto, es diferenciable, entonces existe $\dfrac{\partial f}{\partial v}(a)$ para todo $a \in U$ y todo $v \in \mathbb{R}^n, v \neq 0$.*

6.2. Teorema del valor medio

Teorema 28 (Teorema valor medio) *Sea $f : U \to \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto. Supongamos que el segmento de recta $[a, a+u]$ está contenido en U, la restricción de f al segmento $[a, a+u]$ es continua y que existe $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x)$ para todo $x \in [a, a+u]$. Entonces existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $f(a+u) - f(a) = \dfrac{\partial f}{\partial u}(a + \theta u)$*

Demostración. Definamos $\xi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $\xi(t) = f(a + tu)$. Aplicando el teorema del valor medio a ξ tenemos que existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $\xi(1) - \xi(0) = \xi'(\theta)$. Ahora como $\xi(1) = f(a+u)$ y $\xi(0) = f(a)$ tenemos que $f(a+u) - f(a) = \xi'(\theta) = \lim_{t\to 0} \dfrac{\xi(\theta + t) - \xi(\theta)}{t} = \dfrac{\partial f}{\partial u}(a + \theta u)$. ■

Corolario 26 *Sea $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto y conexo. Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ admite derivadas en todas las direcciones para $x \in U$ y $\dfrac{\partial f}{\partial u}(x) = 0$ para todo $u \in \mathbb{R}^m$, entonces f es una función constante.*

Demostración. Observe que dados dos puntos cualesquiera del abierto U conexo, siempre se pueden unir mediante una poligonal en U. Entonces la prueba de este corolario es análoga al caso de una variable. ■

Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ un conjunto abierto y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función. Entonces podemos escribir $f = (f_1, \cdots, f_n)$ con $f_i : U \to \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, n$. Si suponemos que f es diferenciable en a, entonces la igualdad vectorial $f(a + h) - f(a) = T_a \cdot h + r_a(h)$ equivale a $n-$ igualdades escalares: $f_i(a + h) - f_i(a) = T_a^i \cdot h + r_a^i(h)$, donde $T_a = (T_a^1, \cdots, T_a^n)$, $r_a = (r_a^1, \cdots, r_a^n)$, y el $\lim_{h\to 0} \dfrac{r_a(h)}{\|h\|}$ corresponde a $n-$limites numéricos $\lim_{h\to 0} \dfrac{r_a^i(h)}{\|h\|} = 0$. Lo anterior lo sintetizamos en el siguiente resultado.

Proposición 62 *Una función $f : U \to \mathbb{R}^n$ es diferenciable en a si y solamente si cada una de sus funciones componentes $f_1, ..., f_n : U \to \mathbb{R}$ es diferenciables en a.*

Corolario 27 *Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función. Si las derivadas parciales $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ para $i = 1, ..., n$ y $j = 1, ..., m$ existen y son continuas en U, entonces f es diferenciable en U.*

Demostración. Por el resultado anterior basta considerar el caso $n = 1$. Sea $a \in U$ y $\epsilon > 0$. Como U es un conjunto abierto, existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subset U$ y además $\left| \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) - \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| < \dfrac{\epsilon}{m}$ para $x \in B(a, r)$ y para cada $1 \leq j \leq m$. Ahora para $h = \sum_{j=1}^{m} h_j e_j$ con $\|h\| < r$ tenemos que $f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{m} f(a + u_j) - f(a + u_{j-1})$ donde $u_0 = 0$ y $u_j = h_1 e_1 + ... + h_j e_j$ con $1 \leq k \leq m$. Como cada $\|u_j\| < r$ para $1 \leq j \leq m$ aplicando el teorema del valor medio a f en los segmentos $[a + u_{j-1}, a + u_j]$ (pues $B(a, r)$ es un conjunto convexo) y observando que

$$a + u_j = a + u_{j-1} + h_j e_j$$

tenemos que

$$\begin{aligned} f(a + u_j) - f(a + u_{j-1}) &= \frac{\partial f}{\partial (h_j e_j)} (a + u_{j-1} + \theta h_j e_j) \\ &= h_j \frac{\partial f}{\partial e_j} (a + u_{j-1} + \theta h_j e_j) \\ &= h_j \frac{\partial f}{\partial x_j} (a + u_{j-1} + \theta h_j e_j) \end{aligned}$$

Así $\left| f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{m} h_j \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| \leq \sum_{j=1}^{m} |h_j| \left| \dfrac{\partial f}{\partial x_j} (a + u_{j-1} + \theta h_j e_j) - \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) \right| < \|h\| \epsilon$.

Como $\lim_{h \to 0} \dfrac{\partial f}{\partial x_j} (a + u_{j-1} + \theta h_j e_j) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ y $\dfrac{|h_j|}{\|h\|}$ es acotado, entonces f es diferenciable en $x = a$ y $df(a) \cdot h = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j$ ■

Ejemplo 25 *Consideremos*

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

tal que $f(x, y) = \left(x^2 + y^2, 2xy\right)$. Como $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 2x$, $\dfrac{\partial f_2}{\partial x} = 2y$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial x} = 2y$, y $\dfrac{\partial f_2}{\partial y} = 2x$, entonces f es diferenciable en $\mathbb{R}^2$ y la matriz que representa la diferencial en (x, y) en las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}$$

Observación 8 *Sean $U \subseteq \mathbb{R}^n$ un conjunto abierto ,$a \in U$ y $f : U \to \mathbb{R}^n$ una función derivable en a . Si definimos*

$$\rho(h) = \begin{cases} \dfrac{r(h)}{\|h\|} & , si \;\; h \neq 0 \\ 0 & , si \;\; h = 0 \end{cases}$$

Tenemos que

$$f(a+h) = f(a) + df(a)(h) + \rho(h)\|h\|$$

Asi f es derivable en $x = a$ si y solo si la función ρ es continua en $h = 0$.

Proposición 63 (Regla de la Cadena) *Sean $U \subset \mathbb{R}^m$ abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en a. Si g está definida en un conjunto abierto que contiene a $f(a)$, toma valores en $\mathbb{R}^k$ y es diferenciable en $f(a)$, entonces la función $f \circ g$ es diferenciable en a y*

$$d(g \circ f)(a) = dg\,(f\,(a)) \circ df\,(a)\,.$$

Además si$f = (f_1, \cdots, f_n)$ $\;$ y $g = (g_1, \cdots, g_k)$ entonces

$$\frac{\partial (g_i \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial y_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a)$$

Demostración. En efecto, debemos ver que

$$\frac{\|g(f(a+h)) - g(f(a)) - (dg(f(a)) \circ df(a)) \cdot h\|}{\|h\|} \to 0 \text{ cuando } h \to 0$$

Como f es diferenciable en $x = a$

$$f(a+h) - f(a) = df(a) \cdot h + r_1(h) \text{ donde } \frac{r_1(h)}{\|h\|} \to 0 \text{ cuando } h \to 0$$

Como g es diferenciable en $f(a)$

$$g\,(f(a) + k) - g\,(f(a)) = dg\,(f(a)) \cdot k + \rho_2(k)\|k\|, \text{ con } \rho_2 \, \text{continua en} \, 0.$$

Tomando $k = f(a+h) - f(a)$ (note que si $h \to 0$, entonces $k \to 0$) tenemos:

$$g\,(f(a) + k) - g\,(f(a)) = dg\,(f(a)) \cdot (df(a) \cdot h + r_1(h)) + \rho_2(k)\|k\|$$

Así

$$\frac{\|g\,(f(a+h)) - g\,(f(a)) - dg\,(f(a)) \cdot df(a) \cdot h\|}{\|h\|} = \frac{\|dg\,(f(a)) \cdot r_1(h) + \rho_2(k)\|k\|\|}{\|h\|}$$

$$\leq \|dg\,(f(a))\| \frac{\|r_1(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|\rho_2(k)\|\|k\|}{\|h\|}$$

La última expresión converge a cero cuando $h \to 0$ $\blacksquare$

Note que $\dfrac{\|k\|}{\|h\|} = \dfrac{\|f(a+h) - f(a)\|}{\|h\|} = \|df\,(a) \cdot \dfrac{h}{\|h\|} + \dfrac{r_1(h)}{\|h\|}\|$ es acotado para valores de h pequeños

Corolario 28 (Desigualdad del valor medio) *Sea $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciable en $U \subset \mathbb{R}^m$ con U abierto y convexo. Si existe $M > 0$ tal que $\|df(x)\| \leq M$ para todo $x \in U$, entonces para todo $a, b \in U$ se tiene que $\|f(b) - f(a)\| \leq M \|b - a\|$*

Demostración. Dados $a, b \in U$ definamos $r : [0,1] \to U$ tal que $r(t) = (1-t)a + tb$. Note que que $r(1) = b$ y $r(0) = a$. Tomando $g(t) = f(r(t))$ tenemos que

$$dg(t) = df(r(t)) \cdot r'(t) = df(r(t)) \cdot (b - a)$$

Así que

$$\|dg(t)\| \leq \|df(r(t))\| \|b - a\| \leq M\|b - a\|$$

De esta manera queda demostrado el corolario. ■

Observación 9 *En las condiciones del teorema si $df(x) = 0$ para todo $x \in U$, entonces f es una función constante.*

Quiz 17 *Determine si cada uno de los siguientes enunciados es verdadero o falso:*

1. *La función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (x^2, 3xy, z^2)$ es diferenciable.*
2. *Si $U \subset \mathbb{R}^m$ es abierto, $f : U \to \mathbb{R}^n$ es una función diferenciable y $df(x) = 0$ para todo $x \in U$, entonces f es una función constante.*
3. *La función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{3}}$ es diferenciable en $\mathbb{R}^2$.*
4. *La función $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(t) = (2t + 1, 4t)$ es diferenciable y $d\xi(t)(1) = (2, 4)$.*

Observación 10 *Ahora presentaremos el teorema de la función inversa e implícita siguiendo básicamente las ideas del libro de Rudin [Rud64]*

6.3. Teorema de la función inversa y de la función implícita

Lema 8 *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ un operador lineal. Si $\|T\| < 1$, entonces $(I - T)$ es invertible.*

Demostración. Observe que

$$I - T^{n+1} = (I - T)(T + ... + T^n) = (I - T)\left(\sum_{j=1}^{n} T^j\right)$$

Como $\|T\| < 1$ y $\|T^n\| \leq \|T\|^n$, entonces $T^n \to 0$. Luego $I = (I - T)\left(\sum_{j=1}^{\infty} T^j\right)$, es decir, $(I - T)$ es invertible. ■

Lema 9 *Sean A, B operadores de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$. Si $\left\|A^{-1}\right\| \|B - A\| < 1$, entonces B es invertible.*

Demostración. Como

$$\left\|A^{-1}B^{-1}-I\right\|=\left\|\left(A^{-1}\right)(B-A)\right\|\leq\left\|A^{-1}\right\|\|B-A\|<1$$

Entonces $I-\left(A^{-1}B-I\right)$ es invertible por lema anterior. Luego $A^{-1}B$ es invertible y por lo tanto B lo es. ∎

Lema 10 (Contracción) *Sean (E,d) un espacio métrico completo, $f:E\to E$ y $c\in\mathbb{R}^{+}$ tales que $d\left(f\left(x\right),f\left(y\right)\right)\leq c\ d\left(x,y\right)$. Si $c<1$, entonces existe un único $x\in E$ tal que $f\left(x\right)=x$*

Demostración. Sea $x_0\in E$ y definamos la sucesión (x_n) mediante la recurrencia $x_{n+1}=f\left(x_n\right)$ para $n=0,1,\cdots$.

Observe que $d\left(x_{n+1},x_n\right)=d\left(f\left(x_n\right),f\left(x_{n-1}\right)\right)\leq c\ d\left(x_n,x_{n-1}\right)$ para todo $n=1,2,3,\cdots$. Por inducción se tiene que $d\left(x_{n+1},x_n\right)\leq c^n\ d\left(x_1,x_0\right)$. Por lo tanto, si $n<m$, entonces $d\left(x_n,x_m\right)\leq\sum_{i=n+1}^{m}d\left(x_i,x_{i-1}\right)\leq\left(c^n+c^{n+1}+...+c^{m-1}\right)d\left(x_1,x_0\right)\leq c^n\left(1+c^1+c^2+\cdots\right)d\left(x_1,x_0\right)$. Si recordamos que $\sum_{i=0}^{\infty}r^i=\dfrac{1}{1-r}$ cuando $|r|<1$, entonces $d\left(x_n,x_m\right)\leq(1-c)^{-1}c^n d\left(x_1,x_0\right)$. Esto muestra que (x_n) es de Cauchy. Luego existe $x\in E$ tal que $\lim_{n\to\infty}x_n=x$. Además como f es continua tenemos que $f\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}f\left(x_n\right)=\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=x$.

Para ver la unicidad suponemos que existen $x_1,x_2\in E$ tales que $f\left(x_1\right)=x_1$ y $f\left(x_2\right)=x_2$. Así $d\left(f\left(x_1\right),f\left(x_2\right)\right)\leq c\ d\left(x_1,x_2\right)$, es decir, $d\left(x_1,x_2\right)\leq cd\left(x_1,x_2\right)$ lo cual implica que $d(x_1,x_2)=0$, o sea $x_1=x_2$. ∎

Sean $W\subset\mathbb{R}^n$ abierto y $f:W\to\mathbb{R}^n$ una función. Sabemos que f es de clase C^1 si las derivadas parciales de primer orden de las funciones componentes de f existen y son continuas en cada punto $x\in W$.

Teorema 29 (Teorema de la función inversa) *Sean $W\subset\mathbb{R}^n$ abierto y $f:W\to\mathbb{R}^n$ de clase C^1. Supongamos que $df\left(a\right)$ es invertible para algún $a\in W$ y que $b=f\left(a\right)$. Entonces existen U,V conjuntos abiertos en $\mathbb{R}^n$ tales que $a\in U$, $b\in V$ y $f|_U:U\to V$ es una biyección y su función inversa $g=f^{-1}:V\to U$ es de clase C^1.*

Demostración. Llamemos $T=df\left(a\right)$ y escogemos $\lambda\in\mathbb{R}^{+}$ tal que $2\lambda\left\|T^{-1}\right\|=1$.
Como df es continua en a, existe $r>0$ tal que para todo $x\in B\left(a,r\right)=U$ se tiene que $\|df\left(x\right)-T\|<\lambda$.

Para cada $y\in f(W)\subset\mathbb{R}^n$ fijo definimos:

$$Y_y\left(x\right)=x+T^{-1}\left(y-f\left(x\right)\right)=x+T^{-1}y-T^{-1}f(x),\quad x\in W$$

Así $dY_y\left(x\right)=I-T^{-1}df\left(x\right)=T^{-1}\left(T-df\left(x\right)\right)$. Luego para todo $x\in U$,

$$\begin{aligned}\|dY_y\left(x\right)\|&=\left\|T^{-1}\left(T-df\left(x\right)\right)\right\|\\&\leq\left\|T^{-1}\right\|\|T-df\left(x\right)\|\\&\leq\frac{1}{2\lambda}\cdot\lambda=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Como U es abierto convexo, para todo $x, z \in U$ tenemos:

$$\|Y_y(x) - Y_y(z)\| \leq \frac{1}{2}\|x - z\|$$

Esto implica que Y_y tiene a lo sumo un punto fijo en U. Observe que $x \in U$ un punto fijo de Y_y si y solo si $f(x) = y \in f(U)$.

Dados $x_1, x_2 \in U$ con $f(x_1) = f(x_2)$ tenemos que $T^{-1}(y - f(x_1)) = T^{-1}(y - f(x_2))$, entonces $Y_y(x_1) - x_1 = Y_y(x_2) - x_2$ y por lo tanto, $\|x_1 - x_2\| = \|Y_y(x_1) - Y_y(x_2)\| \leq \dfrac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$. Entonces $x_1 = x_2$. Esto muestra que f inyectiva en U.

Llamemos $V = f(U)$ y $g = f^{-1} : V \to U$. Veamos que V es un conjunto abierto. Dado $y_0 \in V$ existe $x_0 \in U$ tal que $f(x_0) = y_0$. Tomemos $r > 0$ de tal forma que $B(x_0, r) \subset \overline{B(x_0, r)} \subset U$. Veamos que $B(y_0, \lambda\, r) \subset V$. En efecto, sea $y \in B(y_0, \lambda\, r)$. Por un lado

$$\|Y_y(x_0) - x_0\| = \left\|T^{-1}(y - y_0)\right\| \leq \left\|T^{-1}\right\| \|y - y_0\| < \left\|T^{-1}\right\| \lambda\, r = \frac{r}{2}.$$

Por otro lado, si $x \in \overline{B(x_0, r)} = \overline{B}$ entonces

$$\begin{aligned}\|Y_y(x) - x_0\| &\leq \|Y_y(x) - Y_y(x_0)\| + \|Y_y(x_0) - x_0\| \\ &< \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \frac{r}{2} \leq r\end{aligned}$$

Así $Y_y(x) \in B(x_0, r)$. Luego Y_y es una contracción de $\overline{B}$ en $\overline{B}$ entonces por el Lema de contracción existe un único $x \in \overline{B}$ tal que $Y_y(x) = x$ y por lo tanto $y = f(x) \in f(U) = V$.

Sean $x \in U$ y $h, k \in \mathbb{R}^n$ tales que si $y = f(x)$, entonces $y + k \in V$, $x + h \in U$ y $y + k = f(x + h)$. Entonces

$$Y_y(x + h) - Y(x) = h + T^{-1}(f(x) - f(x + h)) = h - T^{-1}(k)$$

Por lo tanto,

$$\left\|h - T^{-1}(k)\right\| = \|Y_y(x + y) - Y_y(x)\| \leq \frac{1}{2}\|h\|$$

Luego

$$\|h\| - \left\|T^{-1}(k)\right\| \leq \left\|h - T^{-1}(k)\right\| \leq \frac{1}{2}\|h\|.$$

Así $\frac{1}{2}\|h\| \leq \left\|T^{-1}k\right\|$. Por lo tanto

$$\|h\| \leq 2\left\|T^{-1}\right\| \|k\| = \lambda^{-1}\|k\|$$

Como $\left\|T^{-1}\right\| \|df(x) - T\| < \frac{1}{2}$ para todo $x \in U$, entonces por lema anterior $df(x)$ tienen una inversa para cada $x \in U$, que la notaremos por L. Entonces

$$\frac{\|g(y + k) - g(y) - L(k)\|}{\|k\|} = \frac{\|h - L(k)\|}{\|k\|} \leq \frac{\|L\|}{\lambda\|h\|}\left\|L^{-1}(h) - k\right\| \leq$$

$$\frac{\|L\|}{\lambda}\frac{\|f(x + h) - f(x) - df(x)\, h\|}{\|h\|}$$

Cuando $k \to 0$ se tiene que $h \to 0$, así

$$dg\left(y\right) = L = \left[df\left(x\right)\right]^{-1} = \left[df\left(g\left(y\right)\right)\right]^{-1}, \quad y \in V$$

De esta manera queda demostrado el teorema. ■

Consideremos ahora $T \in \mathcal{L}\left(\mathbb{R}^{n+m}, \mathbb{R}^{n}\right)$, donde identificamos $\mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^{n} \times \mathbb{R}^{m}$. Entonces T se puede escribir de la siguiente manera

$$T\left(h,k\right) = T_x\left(h\right) + T_y\left(k\right),$$

donde $T_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es tal que $T_x\left(h\right) = T\left(h,0\right)$, y $T_y : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es tal que $T_y\left(k\right) = T\left(0,k\right)$
Note que si T_x es invertible entonces a cada $k \in \mathbb{R}^m$ le corresponde un único $h \in \mathbb{R}^n$ tal que $T\left(h,k\right) = 0$, donde h se puede calcularse de forma explícita:

$$h = -\left(T_x\right)^{-1} \circ T_y\ k$$

Teorema 30 (Teorema de la función implícita) *Sean* $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *un abierto y* $f : \Omega \to \mathbb{R}^m$ *una función de clase* C^1 *tal que* $f\left(a,b\right) = 0$ *para algún punto* $\left(a,b\right) \in \Omega$*. Si tomamos* $T = df\left(a,b\right)$ *y suponemos que* T_x *es invertible, entonces existen conjuntos abiertos* $U \subset \mathbb{R}^{n+m}$ *y* $W \subset \mathbb{R}^m$ *con* $\left(a,b\right) \in U$ *y* $b \in W$ *que tienen la siguiente propiedad: A cada* $y \in W$ *le corresponde un único* x *tal que* $\left(x,y\right) \in U$ *y* $f\left(x,y\right) = 0$*. Si* x *se define como* $g\left(y\right)$*, entonces* g *es de clase* C^1 *en* W*,* $g\left(b\right) = a$*,* $f\left(g\left(y\right),y\right) = 0$ *para todo* $y \in W$*, y* $dg\left(y\right) = -\left(T_x\right)^{-1} \circ T_y$*.*

Demostración. Definamos $F\left(x,y\right) = \left(f\left(x,y\right),y\right), \quad \left(x,y\right) \in \Omega$. Entonces F es de clase C^1 en Ω. Como $f\left(a,b\right) = 0$ tenemos que $f\left(a+h,b+k\right) = T\left(h,k\right) + r\left(h\right)$, donde $\lim_{n\to 0} \dfrac{r\left(h\right)}{\|h\|} = 0$.
Ahora

$$\begin{aligned} F\left(a+h,b+k\right) - F\left(a,b\right) &= \left(f\left(a+h,b+k\right),k\right) \\ &= \left(T\left(h,k\right),k\right) + \left(r\left(h,k\right),0\right) \end{aligned}$$

Luego $dF\left(a,b\right)\left(h,k\right) = \left(T\left(h,k\right),k\right)$. Note que si $dF\left(a,b\right)\left(s,t\right) = \left(0,0\right)$, entonces $t = 0$ y $T\left(h,0\right) = T_x h + T_y 0 = 0$. Así $h = T_x^{-1} = 0$, es decir, $dF\left(a,b\right)$ es inyectiva.

Aplicando el teorema de la función inversa a F, existen U y V abiertos en $\mathbb{R}^{n+m}$ con $\left(a,b\right) \in U$, $\left(0,b\right) \in V$ tales que $F\left(U\right) = V$ y F es inyectiva en U.

Definamos $W = \left\{y \in \mathbb{R}^m : \left(0,y\right) \in V\right\}$. Por lo tanto, $b \in W$. Además W es abierto pues V es abierto. Si $y \in W$, entonces $\left(0,y\right) = F\left(x,y\right)$ para algún $\left(x,y\right) \in V$. Luego $F\left(x,y\right) = \left(f\left(x,y\right),y\right) = \left(0,y\right)$, es decir, $f\left(x,y\right) = 0$

Supongamos que $(x', y) \in V$ y $f(x', y) = 0$, entonces $F(x', y) = (f(x', y), y) = (f(x, y), y) = F(x, y)$. Como F es inyectiva en U se deduce que $x' = x$.

Veamos la segunda parte del teorema. Definamos $g(y)$ para cada $y \in W$ de tal manera que $(g(y), y) \in U$ y $f(g(y), y) = 0$. Entonces $F(g(y), y) = (0, y)$ para todo $y \in W$. Si $G = F^{-1}$, entonces por el teorema de la función inversa G es de clase C^1 en V y $(g(y), y) = G(0, y)$ para todo $y \in W$. De ahí concluimos que g es de clase C^1 en W.

Calculemos ahora $dg(b)$. Sea $Y(y) = (g(y), y)$. Entonces, $dY(y)(k) = (dg(y)(k), k)$ para todo $y \in W, k \in \mathbb{R}^m$. Ahora $f(Y(y)) = 0$ en W. Por la regla de la cadena tenemos:

$df(Y(y))\, dY(y) = 0$. Cuando $y = b$, entonces $Y(b) = (a, b)$ y $df(Y(y)) = T$. Así $dT(Y(b)) = 0$.

Además, $T_x dg(b)(k) + T_y(k) = T(dg(b)k, k) = T(dY(b)k) = 0$ para todo $k \in \mathbb{R}^m$. Entonces $T_x dg(b) + T_y = 0$. Luego, $dg(b) = -T_x^{-1} \circ T_y$. ■

Ejercicio 6

1. *Sea $f : U \to \mathbb{R}$, U abierto de $\mathbb{R}^n$, con derivadas parciales en todos los puntos de U. Si f alcanza un máximo en $a \in U$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, para $i = 1, ..., n$.*

2. *Si $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es tal que $f(0) = 0$ y $f(tx) = tf(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$ y todo $t > 0$, entonces $\dfrac{\partial f}{\partial v}(0) = f(v)$, para todo $v \in \mathbb{R}^m$.*

3. *Sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ diferenciable en $x = 0$. Si $f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{f(x)}{2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$, entonces f es lineal.*

4. *Calcular la diferencial de la función determinante.*

5. *Sean $\alpha > 1$, $c > 0$ y $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo. Si $f : U \to \mathbb{R}^n$ es tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^\alpha$ para todo $x, y \in U$, entonces f es constante.*

6. *Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ con $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto. Si para algún $b \in \mathbb{R}^n$ el conjunto $f^{-1}(b)$ tiene un punto de acumulación, entonces $df(a)$ no es inyectiva.*

7. *Sean U un abierto y convexo en $\mathbb{R}^n$ y $f : V \to \mathbb{R}^m$ diferenciable. Entonces existe $c > 0$ tal que $|df(x)| \leq c$ para todo $x \in V$ si y solo si $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ para todo $x, y \in U$*

8. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable y $\lim_{|x| \to \infty} df(x) \cdot x = 0$, entonces $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ definida por $g(x) = f(2x) - f(x)$ es acotada.*

9. *Sean $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo y $f : V \to \mathbb{R}^m$ una función diferenciable. Si $df(x) = 0$, para todo $x \in U$, entonces f es constante en U.*

10. *Hacer $n = m = 1$ en el teorema de la función implicita e interpretar gráficamente el teorema.*

Bibliografía

[Apo74] Apostol.T.M., *Análisis matemático*, vol. 1, Adinson-Wesley, Reading, 1974, vi+596 pp.

[Lim99] E. Lima, *Análise real*, vol. 1, Impa - Coleção matemática universitaria, 1999, vii+202 pp.

[Lim03] ______, *Espaços métricos*, Impa - Projeto Euclides, 2003, viii+299 pp.

[Lim04a] ______, *Curso de análise*, vol. 1, Impa - Projeto Euclides, 2004, vi+334 pp.

[Lim04b] ______, *Curso de análise*, vol. 2, Impa - Projeto Euclides, 2004, x+547 pp.

[Ros68] M. Rosenlicht, *Introducction to analysis*, vol. 1, Dover, 1968, vi+350 pp.

[Rud64] W. Rudin, *Principios de análisis matemático*, vol. 1, McGraw-Hill, 1964, vi+434 pp.

Índice alfabético