Entrega #2 Grupo 1 INTR. T. CONJUNTOS.

5,0

Integrantes
+ José Miguel Acuña Hernandez
1000143264
jacunah@unal.edu.co
+ Samuel A'lvarez
1027522564
salvarezt@unal.edu.co
+ Juan Felipe Cadena Parrado
1000150703
jcadenap@unal.edu.co
+ Maria Sol Botello león
1002528269
mbotello@unal.edu.co
+ Cristian Camilo Barreto
1000688640
cbarreto@unal.edu.co

Pregunta: (AC)

En la siguiente demostración indique claramente en cuál parte y cómo se usó (AC):

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcion tal que para toda sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos en $\mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \to a$ entonces $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \to f(a)$.

Suponga que f NO es continua

luego existirian $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < \delta$ pero $|f(x)-f(a)| \geq \varepsilon$. En particular, para todo $k \in \mathbb{N}$ tomamos $x_k \in \mathbb{R}$ tal que $|x_k - a| < \frac{1}{k+1}$ pero $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Nótese que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \to a$ pero $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}} \not\to f(a)$ (contradice la hipótesis).

Por lo tanto f es continua en a.

Respuesta:

Se usó para a partir de

"existen $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$
existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$"

llegar a

"En particular, para todo $k \in \mathbb{N}$
tomamos $x_k \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < \frac{1}{k+1}$ y $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Sea $a \in \mathbb{R}$.

Sea $\varepsilon > 0$ tal que para todo $\delta > 0$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$, este ε existe por hipótesis.

Definimos $A_k := \{x \in \mathbb{R} : |x-a| < \frac{1}{k+1}$ y $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon\}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

y $S := \{A_k \in P(\mathbb{R}) : k \in \mathbb{N}\}$, ambos conjuntos por el Esquema Axiomático de Separación.

Como $\frac{1}{k+1} > 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Luego, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x-a| < \delta$ y $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Así, $A_k \neq \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por el Axioma de Elección existe una función f electiva en S, es decir, $f(a) \in a$ para todo $a \in S$ tal que $a \neq \emptyset$.

Sea $k \in \mathbb{N}$. Luego $A_k \neq \emptyset$ y $A_k \in S$. Así $f(A_k) \in A_k$.

Definimos $x_k := f(A_k)$. Como $f(A_k) \in A_k$, por Axioma de Igualdad II, $x_k \in A_k$.

Así, para todo $k \in \mathbb{N}$, $x_k \in A_k$.

Es decir, para todo $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in \mathbb{R}$ tal que $|x_k - a| < \frac{1}{k+1}$ y $|f(x_k) - f(a)| \geq \varepsilon$.