

Lecture 1 : 강의 소개/집합과 함수

Fastcampus Math Camp

신승우

Saturday 26th May, 2018

Outline

- 1 수업 소개
- 2 집합
- 3 함수
- 4 다양한 함수와 그 성질

Outline

① 수업 소개

② 집합

③ 함수

④ 다양한 함수와 그 성질

This lecture is about...

- 수학적 개념의 이해
- 기초적인 Computer Algebra System의 구현
 - symbolic implementation
 - numerical implementation
- 학습한 수학적 개념의 응용법 살펴보기

This lecture is **NOT** about...

- 라이브러리 사용법 - We will re-invent the Wheel!

본 수업에서 만들 것들은 대부분 sympy나 numpy에 포함되어 있습니다.

수업 진행 방식

- ① 수학적 개념을 배운다.
- ② 구현 가능한 부분을 구현한다. ¹
- ③ 구현한 부분을 일부 사용하고, 기존 라이브러리(numpy 등)의 도움을 받아서 실제 공학적 문제를 해결해 본다.

모든 구현 결과와 수업자료는 깃헙에 올라갑니다.

¹구현 불가능한 부분을 정확하게 구분하고 싶으면, 나중에 Computable Analysis 같은 부분을 공부하면 됩니다. 여기서는 다루지 않습니다.

구현에서의 이슈들

본격적으로 수업 전에, 구현에서 많이 있을 이슈들을 짚고 넘어갑니다.

- 무한을 다루는 법
 - 무한집합
 - 실수 / 무리수
- symbolic한 식을 다루는 법

기본적으로 컴퓨터나 우리의 시간은 유한하므로, 무한을 다루는 것은 불가능합니다. 따라서 우리는 무한을 다음과 같은 근사적인 형태로 다룹니다.

- lazy evaluation 사용 : 파이썬에서 제공하므로 명시적으로 구현할 필요는 없음
- semi-decidable loop 사용
- 최대 수를 정해놓고 유한으로 근사하기

Outline

- 1 수업 소개
- 2 집합
- 3 함수
- 4 다양한 함수와 그 성질

집합의 정의

집합은 다음과 같이 정의됩니다.

집합

특정 조건에 맞는 원소들의 모임. 임의의 한 원소가 그 모임에 속하는지를 알 수 있고, 그 모임에 속하는 임의의 두 원소가 다른가 같은가를 구별할 수 있는 명확한 표준이 있는 것을 이른다.

여기서 집합을 이루는 것은 두 가지임을 알 수 있습니다.

- 임의의 한 원소가 그 모임에 속하는지를 알 수 있고
- 그 모임에 속하는 임의의 두 원소가 다른가 같은가를 구별할 수 있는 명확한 표준

이를 조금 더 구현 가능한 말로 바꿔보겠습니다.

집합의 정의

- 임의의 원소가 그 모임에 속하는지 판단하는 함수 : `isinstance` 함수
- 두 원소가 같은지 판단하는 함수 : `__eq__` 함수

위에서 나와있듯이, 이 둘은 파이썬의 클래스에서 이미 구현되어 있습니다. 즉, 우리는 파이썬의 클래스를 집합으로 간주할 수 있습니다. 본 수업에서는 숫자의 집합만을 고려할 예정이므로, 두번째 함수는 구현하지 않을 것입니다.

집합의 연산

- 집합의 크기 $|A|$
- 합집합 $A \cup B$
- 교집합 $A \cap B$
- 차집합 $A - B$
- 데카르트 곱 $A \times B$

집합의 종류

여기서는 집합의 크기²에 따른 분류와, 집합의 순서 여부에 따른 분류를 배웁니다.

- 크기에 따라
 - 유한집합
 - 가산집합
 - 비가산집합
- 순서 여부에 따라
 - Orderless Set
 - Partially Ordered Set
 - Ordered Set

²무한집합의 경우에는 크기보다는 농도라는 표현을 씁니다.

가산집합은 그 수를 셀 수 있는 집합을 말합니다. 여기서 센다는 것은, 집합의 각 원소에 일련번호를 붙일 수 있다는 말과 같습니다. 센다는 것을 프로그래밍에서 생각해보면, `iterator`³의 개념과 흡사하다는 것을 알 수 있습니다. 즉, 센다는 행위를 `iterator`에서 `next()` 함수를 호출하는 것과 같이 생각할 수 있습니다. 엄밀하게는, 가산집합은 자연수 집합과 일대일대응이 가능한 집합을 말합니다.

³`iterator`를 모르시는 분은 DB 커서를 생각하셔도 됩니다. □ ◀ ▶ 🔍 ↺ ↻

가산집합의 예시

- 자연수
- 짝수/홀수
- 정수
- 유리수

그렇다면, 셀 수 없는 집합이 있을까요? 대표적으로 실수는 셀 수 없습니다.

- 실수

실수는 전산상으로 완벽하게 구현이 불가능함을 보일 수 있습니다. 따라서 여기서는 실수를 구현하지 않고, 그냥 유리수로 실수를 대체하여 사용합니다.

일반적으로 집합은 순서가 없습니다. 하지만, 집합에 순서를 부여하는 것은 가능합니다. 예를 들어서, 어떤 사전에 있는 단어들의 집합을 생각해 보면, 집합의 두 가지 조건을 만족하면서 동시에 순서도 있습니다. 특히, 사전에 있는 단어는 모든 단어가 다 순서를 가지고 있습니다. 즉, 임의의 두 단어간에 사전에서 더 앞에 오는 단어가 있습니다. 이런 경우 Totally Ordered Set이라고 합니다.

반면, 항상 모든 원소간에 항상 순서가 잘 정의되는 것은 아닙니다. 이런 경우를 Partially Ordered Set이라고 합니다.

이제 위에서 배운 개념들을 구현해 보겠습니다.

- 집합과 그 연산
- 유한집합/가산집합
- Ordered/Partially Ordered Set
- 자연수/유리수

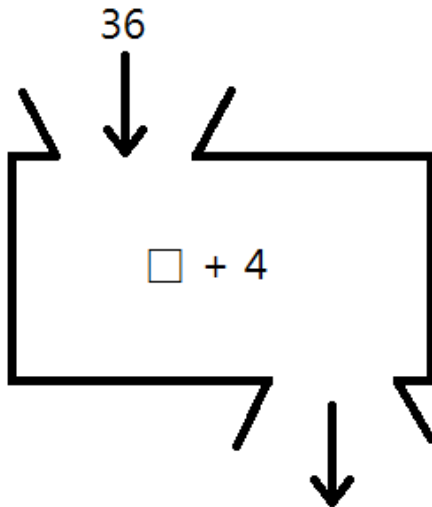
Outline

1 수업 소개

2 집합

3 함수

4 다양한 함수와 그 성질



함수의 정의

함수는 다음과 같이 정의됩니다.

함수

함수는 정의역(X , domain), 공역(Y , codomain), 그리고 대응관계(f , function)로 정의됩니다.

정의역과 공역은 집합이며, 대응관계는 정의역의 한 원소를 공역의 한 원소로 대응시킵니다. 이 때, 다음의 공역의 부분집합을 치역이라고 하고 다음과 같이 씁니다. $f(X) = \{y | \forall x \in X, y = f(x)\}$

함수의 정의

위 내용을 프로그래밍적으로 생각해 보면

- 정의역 : 함수의 input argument의 type
- 치역 : 함수의 return value의 type
- 대응관계 : 함수 내부 body

로 볼 수 있습니다. 예를 들어서 자바의 함수 헤더의 경우,

```
public int methodName(int a, int b)
```

으로 쓰이는데, 이는 정확하게 함수의 수학적 정의와 일치함을 볼 수 있습니다.

- 단사함수 : 공역과 치역이 같은 함수
- 전사함수 : 정의역의 각자 다른 원소를 공역의 각자 다른 원소로 대응시키는 함수
- 전단사함수 : 단사이면서 전사인 함수

합성함수의 정의

두 함수 f, g 에 대하여 합성함수는 다음과 같이 정의됩니다.

합성함수

합성함수 $f \bullet g$ 는 $f(g(x))$ 로 정의됩니다.

이 때 g 의 공역과, f 의 정의역이 일치해야 두 함수를 합성할 수 있습니다.
프로그래밍으로 비유하자면, TypeError가 안 나게 해야 하는 것과 같습니다.

함수 f 에 대하여 역함수는 다음과 같이 정의됩니다.

역함수

함수 f 의 역함수 f^{-1} 는 $\forall x \in X, f(f^{-1}(x)) = x$ 를 만족하는 함수를 말한다.

이제 위에서 배운 함수의 개념들을 구현해 보겠습니다.

- 함수
- 합성함수
- 역함수

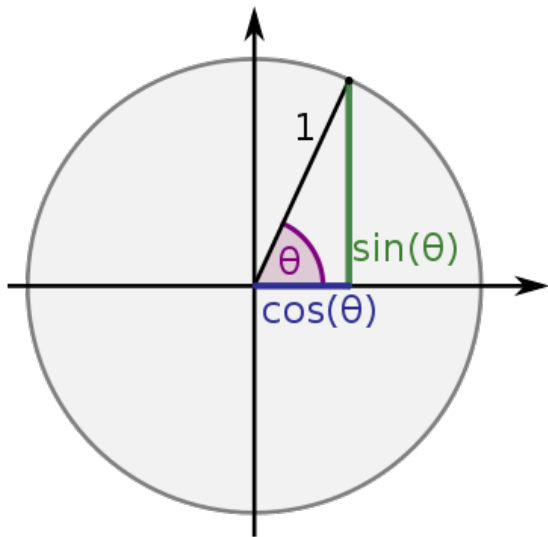
Outline

- 1 수업 소개
- 2 집합
- 3 함수
- 4 다양한 함수와 그 성질

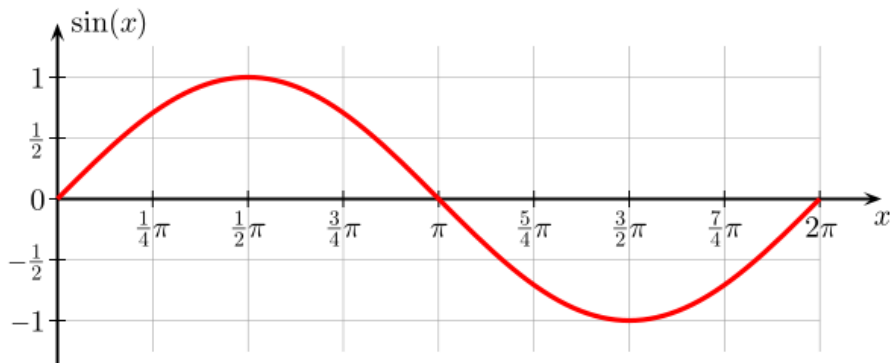
다항함수

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ 와 같은 함수를 다항함수라 하고, n차함수라고도 한다.

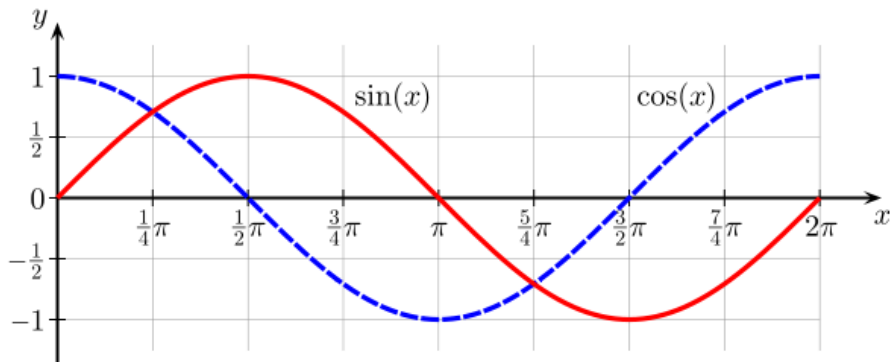
삼각함수의 정의



Sine 함수



Cosine 함수



삼각함수의 성질

- $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ 5
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$

삼각함수의 성질

세 변의 길이가 a, b, c 이고 각 변을 바라보는 각이 각각 α, β, γ 인 넓이가 S 인 삼각형에 대해서 다음이 성립합니다.

- $S = \frac{1}{2}bc\sin(\alpha)$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)$

삼각함수의 합차공식

- $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$
- $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
- $\tan(x + y) = \frac{\tan(x)\tan(y)}{1 - \tan(x)\tan(y)}$

정수 n, m 에 대해서 다음이 성립합니다.

- $x^n x^m = x^{n+m}$
- $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$
- $(x^n)^m = x^{nm}$

지수함수

지수법칙을 실수로 연장하여 생각하면, 다음과 같은 함수를 생각할 수 있습니다.

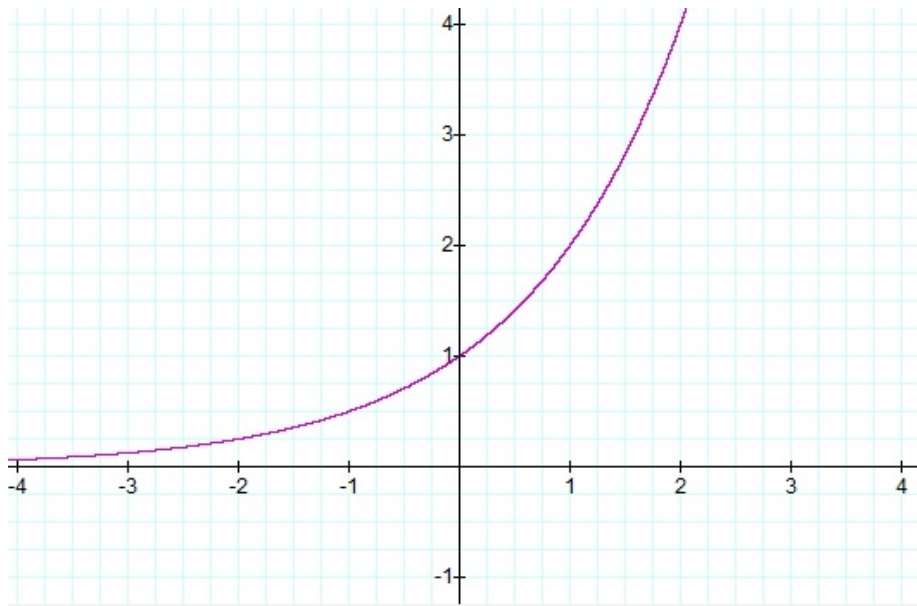
지수함수

양의^a 상수 a 에 대해서, 다음과 같은 함수를 지수함수라고 합니다.

$$f(x) = a^x$$

^a음의 경우는 다루지 않습니다.

지수함수



로그함수

양의^a 상수 a에 대해서, 다음과 같은 함수를 지수함수라고 합니다.

$$y = \log_a x \text{ 이면 } x = y^a$$

^a음의 경우는 다루지 않습니다.

로그함수와 지수함수는 역함수 관계입니다.

로그함수의 성질

- $\log MN = \log M + \log N$
- $\log(M/N) = \log M - \log N$
- $\log M^k = k \log M$