

Lecture 5 : 함수의 극한과 미분

Fastcampus Math Camp

신승우

Saturday 23rd June, 2018

무한의 직관적 이해 I

가장 큰 자연수에 대해서 생각해 보자. 가장 큰 자연수는 몇인가?
애석하게도, 그러한 수는 존재하지 않는다. 어떤 자연수 N 이 존재해서
그것이 가장 큰 자연수라고 한다면, $N+1$ 역시

- 자연수이며
- N 보다 크므로

N 은 가장 큰 자연수가 될 수 없다. 즉, 이에서 볼 수 있듯이 무한대를
어떠한 숫자로 생각하면 우리가 직관적으로 아는 무한대의 정의를
충족시킬 수 없다. 언제나 그 수에 1을 더해서 그 수보다 큰 수를 만들 수
있기 때문에, 무한대의 직관적인 정의인 어떠한 수보다 큰 수에 부합하지
않기 때문이다. 따라서 무한대는 숫자가 아니고, 다음을 만족하는 어떤 '것'
으로 볼 수 있다.

$$\forall n, n < \inf \quad (1)$$

보통 무한대는 계속 증가하는 '상태'로 해석하며, 이에 기반하여 앞으로의
논의를 진행할 것이다.

극한의 직관적 이해 I

어떤 수열 x_n 이 L 에 '무한히' 접근한다고 하자. 이 때 무한히 접근한다는 것을 어떤 식으로 받아들여야 할까? 무한히 접근한다는 것은 여기서는 두 가지를 의미한다.

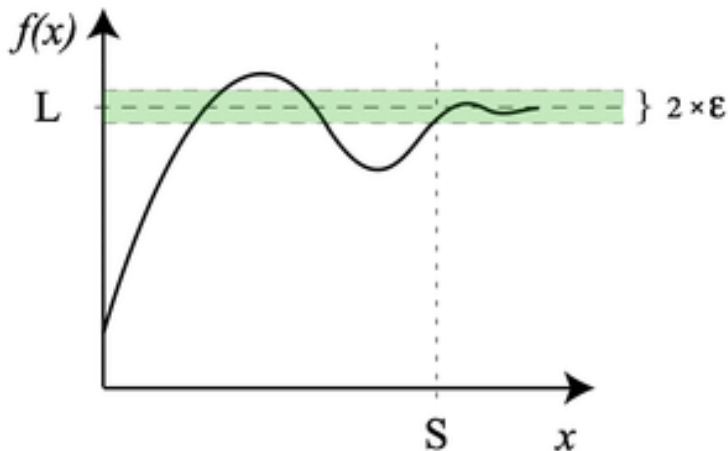
- $|x_n - L|$ 이 무한히 0에 접근한다.
- $x \neq a$ 이다.

여기서 첫 번째 의미를 조금 더 살펴보자. 무한하게 0에 접근한다는 것은, 곧 다음과 같이 생각할 수 있다. 즉,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |x_n - L| < \epsilon \quad (2)$$

위 식을 도식화하면 아래와 같다.

극한의 직관적 이해 II



즉, 어떠한 ϵ 을 잡더라도, 충분한 시간이 지나면 (즉 충분히 n 이 커지면) L 과 x_n 의 거리가 ϵ 이하로 유지된다면 우리는 x_n 이 L 에 무한히 접근한다고

극한의 직관적 이해 III

생각할 것이다. 이제, 수열이 아니라 어떤 함수가 L 에 접근하는 경우를 생각해 보자. 즉, x 가 a 로 무한히 접근할 때, $f(x)$ 가 L 로 접근하는 것을 위와 같이 어떻게 나타낼지 생각해 보자. 먼저, 명제 형식으로 쓰면 다음과 같다.

$$(x \rightarrow a) \rightarrow (f(x) \rightarrow L) \quad (3)$$

즉, x 가 a 에 충분히 가까우면 $f(x)$ 와 L 도 어느정도 가까워져야 할 것이다. 이 때, $f(x)$ 와 L 이 가까워지는 정도에는 한계가 없어야 한다. 즉, 임의의 ϵ 만큼 가까워질 수 있어야 한다. 이 때, x 와 a 의 거리가 충분히 가까우면 되므로, 이 충분히 가까운 거리를 δ 라고 하자. 그러면 이를 정리해서 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\forall \epsilon \exists \delta 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon \quad (4)$$

위 논의를 정리하면 다음과 같다.

극한

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ 은 } \forall \epsilon \exists \delta 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

이 때, 좌극한과 우극한을 따로 다음과 같이 정의하며, 좌극한과 우극한이 같은 값일 때 극한이 존재한다고 한다.

좌/우극한

우극한은 $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = L$ 은 $\forall \epsilon \exists \delta x - a < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ 이라고 하며, x 가 a 보다 항상 큰 경우를 말한다.

좌극한은 $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = L$ 은 $\forall \epsilon \exists \delta x - a < \delta \rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$ 이라고 하며, x 가 a 보다 항상 작은 경우를 말한다.

$\epsilon - \delta$ 논법을 이용한 증명

위 논법을 이용하여 $f(x) = 2x + 4$ 가 x 가 0으로 갈 때, 4로 수렴하는 것을 증명해 보자.

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2x + 4 \leftrightarrow \forall \epsilon \exists \delta 0 < |x| < \delta \rightarrow |2x + 4 - 4| < \epsilon \quad (5)$$

$$\leftrightarrow \forall \epsilon \exists \delta 0 < |x| < \delta \rightarrow 2|x| < \epsilon \quad (6)$$

따라서, $\delta = \frac{\epsilon}{2}$ 면 성립한다. 대개의 경우, $\epsilon - \delta$ 논법을 이용한 극한의 증명은 적절한 $\delta(\epsilon)$ 을 찾는 것으로 귀결된다.

$\epsilon - \delta$ 논법과 계산오차

$\epsilon - \delta$ 논법은 비단 수학적인 극한의 논의에서만 사용되는 것이 아니라, 계산오차의 예상에도 사용될 수 있다. 예컨대, 어떤 함수 $f(x)$ 를 수치적으로 계산한다고 하자. 이 때, 우리가 계산 결과인 $f(x)$ 의 계산오차를 줄이기 위해서는 입력인 x 의 정확도를 높여야 한다. 하지만 얼마나 높여야 우리가 원하는 계산오차를 만족할 수 있을까?

위 $\epsilon - \delta$ 논법에서 $\delta(\epsilon)$ 는 우리가 원하는 오차(혹은 input precision)에 대한 출력의 오차(precision)으로 생각할 수 있다. 즉, 우리가 원하는 계산결과의 정확도를 위해서 요구되는 입력값의 precision으로 생각할 수 있다. 예를 들어서, 위 예시에서 볼 수 있듯이 선형함수 $ax+b$ 를 출력오차 ϵ 내로 계산하기 위해서는 $a\epsilon$ 의 정확도로 x 를 입력하면 된다.

함수 f, g 가 $x \rightarrow a$ 일 때 각각 α, β 로 수렴한다면 다음이 성립한다.

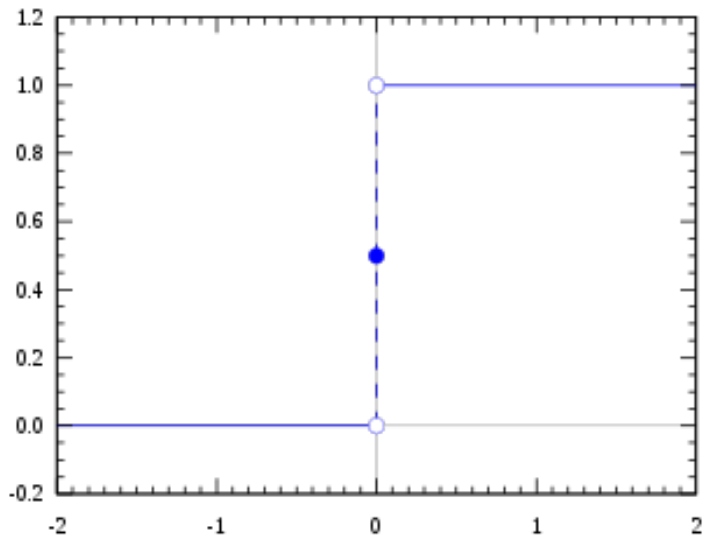
- $\lim(f + g) = \alpha + \beta$
- $\lim(fg) = \alpha\beta$
- $\lim(\frac{f}{g}) = \frac{\alpha}{\beta}$

여기서, 역은 성립하지 않는다.

다음을 만족하는 함수를 연속함수라고 한다.

연속함수

함수 f 의 정의역의 모든 원소 a 에 대해서, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 가 성립하면 f 는 연속함수이다.



- 불연속함수
- Piecewise Continuous 함수

접선과 미분의 정의

곡선 $y=f(x)$ 위의 한 점 $(a, f(a))$ 에서의 접선 l 은 다음과 같이 정의된다.

접선

접선 l 은 두 점 $P(a, f(a))$, $Q(b, f(b))$ 로 이루어진 선분 PQ 의 다음과 같은 극한이다.

$$\lim_{b \rightarrow a} PQ$$

정의에 따라서, 접선의 기울기는 다음과 같다.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \quad (7)$$

위 식은 점 $(a, f(a))$ 에서 접선의 기울기를 뜻한다. 이제, 정의역 안 임의의 점에서 접선의 기울기를 생각해보면 접선의 기울기 역시 하나의 함수로 볼 수 있고, 이를 도함수, 혹은 함수의 미분이라고 한다. 함수의 x 에 대한 미분은 $\frac{df}{dx}$ 나 f' 와 같이 쓴다.

미분 연산 법칙과 그 증명

미분가능한 함수 f, g 에 대해서 다음이 성립한다.

- $\frac{d}{dx} cf = c \frac{df}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(f + g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(fg) = g \frac{df}{dx} + f \frac{dg}{dx}$
- $\frac{d}{dx} \frac{f}{g} = \frac{f'g - g'f}{g^2}$
- $\frac{d}{dx} f(g(x)) = \frac{df(g(x))}{dg} \frac{dg}{dx} : \text{Chain Rule}$

다양한 함수의 미분

- 다항함수 : $\frac{d}{dx} a_i x^i = i a_i x^{i-1}$
- 지수함수 : $\frac{d}{dx} e^x = e^x, \frac{d}{dx} a^x = a^x \ln(a)$
- 삼각함수 : $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x, \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x, \frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{(\cos x)^2}$
- 로그함수 : $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}, \frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a}$

다변수함수 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 에 대해서, 변수 x_i 로의 편미분은 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h} \quad (8)$$

즉, 다변수함수에서 다른 변수들을 다 상수로 취급하고, 한 변수에 대한 미분만을 계산하는 것이 편미분이다. 따라서 계산 등은 상미분과 동일하다.

$f(x(t), y(t))$ 의 t 에 대한 상미분 $\frac{df}{dt}$ 는 다음과 같다.

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (9)$$

미분의 정의에 따라서,

$$\frac{df}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} \quad (10)$$

이다. 우변을 다음과 같이 변형하자.

$$\begin{aligned} & \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t), y(t))}{h} \\ = & \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t+h), y(t)) + f(x(t+h), y(t)) - f(x(t), y(t))}{h} \\ = & \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t+h), y(t))}{h} + \frac{f(x(t+h), y(t)) - f(x(t), y(t))}{h} \\ = & \frac{f(x(t+h), y(t+h)) - f(x(t+h), y(t))}{y(t+h) - y(t)} \frac{y(t+h) - y(t)}{h} + \frac{f(x(t+h), y(t)) - f(x(t), y(t))}{x(t+h) - x(t)} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \\ = & \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

다변수함수의 편미분은 상미분과는 다르게, 다른 변수들로 미분을 여러번 할 수 있다. 예컨대, 이변수함수 $f(x,y)$ 는 다음과 같은 두 가지 방법으로 두 번 편미분될 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \tag{17}$$

이 두 식은, 두 식이 각각 연속이라면 같은 식이 된다. 이를 Clairaut's theorem on equality of mixed partials라고 한다.

x 에 대한 미분 $D_x = \frac{d}{dx}$ 는 함수에 대한 일종의 연산자로 볼 수 있다.
그런데, 미분 연산자는

- $D_x(cf(x)) = cD_x(f(x))$
- $D_x(f(x) + g(x)) = D_x(f(x)) + D_x(g(x))$

로, 선형성을 가진다. 따라서 미분은 선형 변환이다. 이는 편미분도 똑같다.

벡터 함수 \vec{f} 는 다음과 같이 정의된다.

벡터 함수

벡터 함수 \vec{f} 는 함수 f_1, f_2, \dots, f_n 으로 만들어진 n -벡터이며, 다음과 같이 쓴다.

$$\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$$

벡터 함수의 연산은 일반적인 벡터와 함수의 연산을 따른다.

벡터 함수의 미분과, 벡터로의 미분

벡터 함수의 x 에 대한 편미분은 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (18)$$

반대로, 벡터 $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ 으로 스칼라함수 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 을 미분하는 것은 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (19)$$

벡터와 벡터로의 미분

$$\frac{\partial \vec{y}}{\partial \vec{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \frac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (20)$$

행렬의 미분과 행렬로의 미분

$$\frac{\partial Y}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_{11}}{\partial x} & \frac{\partial y_{12}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{1n}}{\partial x} \\ \frac{\partial y_{21}}{\partial x} & \frac{\partial y_{22}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{2n}}{\partial x} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y_{n1}}{\partial x} & \frac{\partial y_{n2}}{\partial x} & \cdots & \frac{\partial y_{nn}}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\frac{\partial y}{\partial X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial x_{11}} & \frac{\partial y}{\partial x_{21}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{n1}} \\ \frac{\partial y}{\partial x_{12}} & \frac{\partial y}{\partial x_{22}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{n2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y}{\partial x_{1n}} & \frac{\partial y}{\partial x_{2n}} & \cdots & \frac{\partial y}{\partial x_{nn}} \end{bmatrix} \quad (22)$$

▽ 연산자와 그 응용 I

▽ 연산자는 델 연산자라고도 하며, 보통 3차원에서 정의된다. 본 수업에서도 3차원에서의 델 연산자만을 다룰 것이다.

▽ 연산자

▽는 다음의 3-벡터이다.

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

델 연산자는 벡터이기 때문에 스칼라배와 내적이 가능하며, 또한 3차원에서는 외적도 가능하다. 각각이 벡터 함수의 연산에 대응된다.

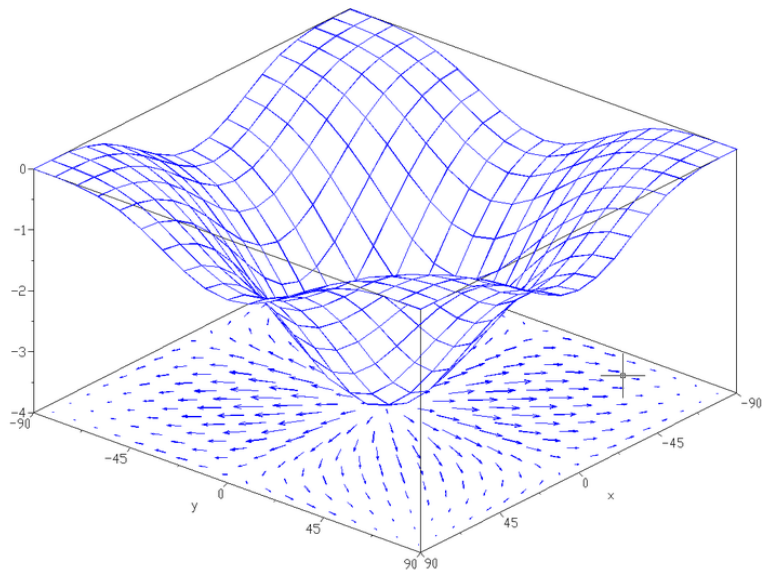
- Gradient : 스칼라배
- Divergence : 내적
- Curl : 외적

스칼라 함수 f 에 대해서, 그 함수의 gradient ∇f 는 다음과 같이 정의된다.

Gradient ∇f

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

Gradient II



함수의 그래디언트는 함수가 만드는 곡면에서의 기울기를 나타내는 벡터라고 할 수 있다. 그래디언트의 각 항을 살펴보면, \hat{x} 항은 곧 곡면을 x 층에 평행하게 자른 성분의 미분이라고 볼 수 있다.

극값은 극소점과 극대점을 통틀어 말하며, 이는 local minimum과 local maximum을 통칭한다. local minimum과 local maximum은 각각 다음과 같이 정의된다.

Local Minimum/Maximum

함수 f 에 대해서, 다음의 집합의 원소를 극점이라 한다.

$$\{x^* \in X \mid \exists d \forall x \in |x - x^*| < d, f(x^*) \geq f(x) \text{ "or" } f(x^*) \leq f(x)\}$$

1) 극값에서는 도함수가 0이다. 하지만, 그 역은 성립하지 않는다.

Proof of 1)

함수 f 가 $x=a$ 에서 극댓값을 가진다고 하자. 이 때, 도함수의 1)좌극한과 2)우극한의 부호가 다르기 때문에, 수렴하기 위해서는 도함수가 0이어야 함을 이용하여 보일 것이다. 극소값일 경우도 대칭적으로 증명하면 된다.

1) 극댓값의 정의에 따라서 어떤 δ 가 존재해서, $(a - \delta, a + \delta)$ 구간 안의 모든 원소 x 에 대해서 $f(x) \leq f(a)$ 이다. 이제, $(a - \delta, a)$ 구간에서 함수의 도함수를 생각하자. 이 구간의 원소인 x 에 대해서 항상 $x-a < 0$ 이며, 극댓값의 정의에 따라서 $f(x) - f(a) \leq 0$ 이다. 따라서 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geq 0$ 이다.

2) 1)과 같이 δ 를 잡자. 이 때 $(a, a + \delta)$ 의 값을 잡자. 위 논의와 비슷하게, 결국 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq 0$ 가 된다.

즉, 좌극한은 0 이하이고, 우극한은 0 이상이다. 좌극한과 우극한이 같아야 수렴하므로, 미분가능한 함수라면 극값에서 도함수가 0이 되어야만 한다. 역의 반례는 $y = x^3$ 에서 $x=0$ 이다.

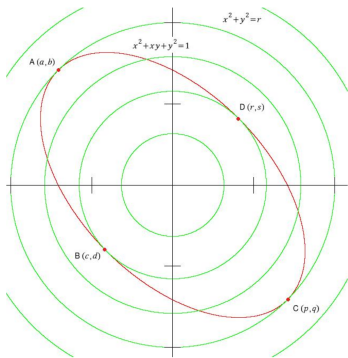
함수에서 극값의 탐색

함수 f 에 대해서, 다음과 같이 탐색한다.

- 일변수함수의 경우 : $\frac{df}{dx} = 0$ 의 해를 구하고, 극값의 조건을 만족하는지 판별한다.
- 다변수함수의 경우 : 함수 $f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 에 대하여, $\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0$ 의 연립방정식을 만족하는 해를 구하고, 극값의 조건을 만족하는지 판별한다.

다변수함수에서 제약조건이 주어졌을 때 극값의 탐색 I

어떤 이변수함수 $f(x,y)$ 의 극값을 $g(x,y)$ 라는 조건이 주어졌을 때 구하는 문제를 생각해 보자. 예를 들어서, $f = x^2 + y^2$, " $g = x^2 + xy + y^2 - 1$ " 이라고 하자. 이 때 f 의 최댓값을 구하는 문제를 생각해 보자.



위 그림에서 볼 수 있듯이, f 는 원점을 중심으로 하는 원이다. 이 원들 중에서 주어진 곡선 g 와 공통접선을 가지는 점이 극값이 됨을 관찰할 수

다변수함수에서 제약조건이 주어졌을 때 극값의 탐색 II

있다. 이에 착안하여, 본 문제는 다음과 같이 풀 수 있다. 즉, 점 $A(a,b)$ 에서 두 곡선 $f = x^2 + y^2 - r^2$, " $g = x^2 + xy + y^2 - 1$ "은 $\nabla f = \alpha \nabla g$ 를 만족한다. 그렇다면, 우리는 다음과 같은 생각을 할 수 있다. 즉, 극값을 가지는 점 (x_0, y_0) 에 대해서, $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ 가 성립한다. 즉,

$$\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y) \quad (23)$$

$$g(x, y) = 0 \quad (24)$$

의 연립방정식을 풀면 극값을 구할 수 있을 것이다. 조금 더 엄밀하게는, 이러한 λ 가 언제나 존재한다. 즉,

다변수함수에서 제약조건이 주어졌을 때 극값의 탐색 III

라그랑주 승수법

함수 $f(x,y)$ 가 $g(x,y) = 0$ 위의 점 (x_0, y_0) 에서 극값을 가질 때, 적당한 실수 λ 에 대해서 다음이 성립한다.

$$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$$

이 때, $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$ 이다.

이러한 방법을 라그랑주 승수법이라고 하며, λ 를 라그랑주 승수라고 한다.

곡선 $g(x,y) = 0$ 위의 한 점을 다음의 벡터함수 $x(t), y(t)$ 로 생각하자. 이 때, $g(x,y) = 0$ 곡선 위의 f 는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$z = f(x(t), y(t)) \quad (25)$$

라고 할 수 있다. 이 때, f 가 극값을 (x_0, y_0) 에서 가진다고 하고,

$$x_0 = x(t_0) \quad (26)$$

$$y_0 = y(t_0) \quad (27)$$

라고 하자. 그러면 $\frac{dz}{dt}(t = t_0) = 0$ 이므로, 다음이 성립한다.

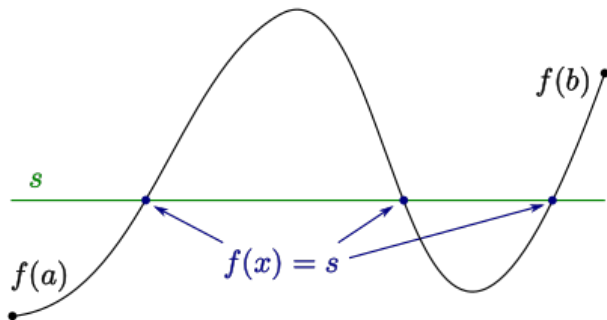
$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \quad (28)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) \bullet \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \quad (29)$$

$$= \nabla f \bullet \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \quad (30)$$

즉, ∇f 와 $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ 는 수직하다. 또한, 접선과 gradient 역시 수직하므로 ∇g 와 $(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt})$ 역시 수직하다. 따라서 ∇f 와 ∇g 는 평행하다.

Intermediate Value Theorem



Intermediate Value Theorem

연속함수 f 에 대해서, 정의역 내 구간 $[a, b]$ 에 대하여 $f(a) \leq s \leq f(b)$ 인 s 에 대하여, $f(c) = s$ 인 c 가 (a, b) 에 존재한다.

이는 실수의 완비성을 이용하여 증명할 수 있으나, 본 수업의 scope를 벗어나므로 여기서는 생략하고 IVP를 받아들이기로 한다.

Mean Value Theorem

Mean Value Theorem

함수 f 가 연속이고 미분 가능하면, 어떤 정의역 내 구간 (a,b) 에 대해서

$$\frac{df}{dx}(x=c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

인 c 가 (a,b) 내에 존재한다.

이의 특이한 케이스로, 롤의 정리도 있다.

Rolle's Theorem

$f(a) = f(b)$ 라면, $f'(c) = 0$ 인 c 가 (a,b) 내에 있다.

먼저, 롤의 정리를 증명하자. (a,b) 내에 만약 극값이 있다면, 극값은 $f' = 0$ 을 만족하므로 성립한다. 만약 없다면, $f(x)$ 는 (a,b) 내에서 상수함수이므로 모든 구간에서 $f' = 0$ 이므로 성립한다.

MVT는 $g(x) = f(x) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) + f(a)$ 로 변형하고 롤의 정리를 대입하면 바로 증명된다.

테일러 정리

만약 f 가 $(n+1)$ 번 미분가능한 함수라면, 정의역 내의 구간 (a,b) 에 대해서 다음을 만족하는 c 가 존재한다.

$$f(b) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (b-a)^{(n+1)}$$

여기서 테일러급수는

$$f(x) = f(a) + \sum_{i=1}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} + R_n(x) = T_n(x) + R_n(x) \quad (31)$$

이며, remainder function R_n 은

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c(x))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (32)$$

이다.

만약 $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ 으로 bound된다면, $R_n(x)$ 또한 bound되므로 모든 n 에 대해서 $|f^{(n+1)}(x)| \leq M$ 가 성립한다면 테일러급수 $T_n(x)$ 는 $f(x)$ 로 수렴하게 된다.

다음시간 실습 및 숙제 : symbolic 미분의 구현

- tokenizer/parser에 func token 추가
- 상미분, 편미분 구현
- 벡터-스칼라, 스칼라-벡터, 벡터-벡터, 행렬-스칼라, 스칼라-행렬간의 미분 구현
- ∇ 의 구현
- 주어진 함수의 n차 테일러 전개 구현

숙제이기는 하지만 꼭 해 볼 필요는 없습니다. 할 때 git merge conflict를 피하기 위해서 practices/ 폴더를 만들어서, skeleton 폴더의 모든 것을 복사하고 해 보시길 권장드립니다. practices/ 폴더는 gitignore에 추가되어 있으므로 에러가 나지 않으며, 연습할 때 편리할 것입니다.

tokenizer/parser에 token 추가

다음과 같은 순서로 하기를 권장함.

- 미리 정해진 함수와 도함수의 dict를 만듦. key는 str, value는 2-tuple로 파이썬 함수와 도함수를 담고 있는 PyFormula 인스턴스로 구성한다.
- tokenizer를 받아서, var들의 모임들 중 앞 과정에서 지정한 함수들에 해당하는 알파벳이 들어오는지를 판별, func로 함수 토큰을 생성.
- parser에서 func 토큰 핸들링하는 부분을 unary와 비슷하게 만들되, (와 ,로 argument를 구분할 수 있도록 한다.

func 토큰에는 sin, cos, ln, e, pi를 꼭 포함하여야 한다. e와 pi는 상수함수이다.

Symbolic 미분의 구현

미분은 PyFormula 인스턴스를 입력받아, PyFormula 인스턴스를 리턴하는 PyCalculus.py/differentiate 함수를 구현하는 것으로 한다. differentiate 함수는 다음 입력들을 받는다.

- formula : 미분할 PyInstance 객체
- variable : 미분할 변수명
- constant_variables : 변수이되, 상수 취급할 변수. 이외의 변수들은 모두 변수로 취급되어, 상미분시 도함수를 남겨야 한다. 예컨대, x로 미분할 경우 y가 변수라면 $\frac{dy}{dx}$ 가 리턴되어야 한다.
- is_partial : 편미분일 경우 True
- is_symbolic : symbolic 미분일 경우 True. 본 실습에서는 True만들 사용한다.

Symbolic 미분의 구현 : 상미분

다음과 같은 순서로 구현하기를 권장한다.

- if `is_symbolic` 안에서 모든 것을 구현한다.
- `formula`의 형태에 따라서 재귀적으로 미분을 구현한다. `formula` 트리의 루트의 `datum`에 따라 다음과 같이 구현한다.
 - `operation`인 경우 : 미분의 연산법칙에 따라 구현한다.
 - `func`인 경우 : `func`가 정의된 `dict`로 가서, 도함수를 이용하여 구현한다. 이 때 `chain rule`을 사용한다. 다변수함수의 경우, 전미분을 이용하여야 함에 유의하자.
 - `var`인 경우 : 미분하려는 변수이면 1, 상수 변수이면 0, 그렇지 않으면 미분하려는 변수에 대한 도함수를 리턴한다.
 - `num`인 경우 : 0을 리턴한다.

Symbolic 미분의 구현 : 편미분

위와 다 같으나, 두 가지의 차이가 있다.

- var인 경우 : 미분하려는 변수의 경우 1, 나머지의 경우 0.
- func인 경우 : 전미분이 아니라 편미분을 사용함에 유의.

테일러급수의 구현

PyCalculus.py/taylor_expansion 함수를 구현하라. input은 formula와 a , n 두 개이며, n 번째 테일러급수의 항까지 리턴하는 PyFormula의 리스트를 만들면 된다. a 는 실수로, a 근방에서 전개된 테일러급수를 구하면 된다.