Lecture 6 : 적분 / 미분방정식

Fastcampus Math Camp

신승우

Friday 29th June, 2018

Vector Field

Vector/Scalar Field

Vector Field란 공간 위의 한 점을 벡터 하나로 대응시키는 함수를 말한다. 역으로, Scalar Field란 공간 위의 한 점을 실수 하나로 대응시키는 함수를 말한다.

Vector Field는 벡터함수로 볼 수 있고, Scalar Field는 스칼라함수로 볼 수 있다.

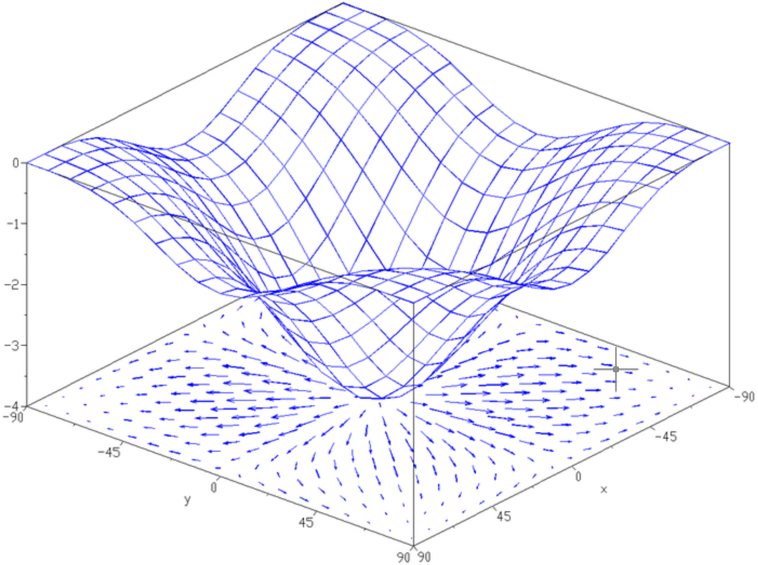
Gradient I

스칼라 함수 f에 대해서, 그 함수의 gradient ∇f는 다음과 같이 정의된다.

Gradient ∇f

$$\nabla f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{z}$$

Gradient II



Gradient III

함수의 그래디언트는 함수가 만드는 곡면에서의 기울기를 나타내는 벡터라고 할 수 있다. 그래디언트의 각 항을 살펴보면, $\hat{x}$항은 곧 곡면을 x 축에 평행하게 자른 성분의 미분이라고 볼 수 있다.

Gradient의 성질

스칼라 함수 f,g와 상수 a,b에 대해서 다음이 성립한다.

- $\nabla af + bg = a\nabla f + b\nabla g$
- $\nabla fg = f(\nabla g) + (\nabla f)g$

Gradient의 활용 : Directional Derivative

함수 f에 대해서, 특정 방향으로의 미분값을 Directional Derivative라 한다.
함수 f의 벡터 $\vec{a}$로의 Directional Derivative는 다음과 같이 정의된다.

$$\nabla_{\vec{a}} f(\vec{x}) = lim_{h \to 0} \frac{f(\vec{x} + h\vec{a}) - f(\vec{x})}{h} \tag{1}$$

이는 그래디언트를 이용하여 다음과 같이 계산될 수 있다.

$$\nabla_{\vec{a}} f(\vec{x}) = \nabla f(\vec{x}) \bullet \vec{a} \tag{2}$$

스칼라함수 $f(\vec{f})$에 대해서, 다음이 성립한다.

$$f(\vec{r}+\vec{\delta}t) = f(\vec{r}) + [\vec{a} \bullet \nabla f(\vec{r})t + \frac{1}{2!}[\vec{a} \bullet \nabla]^2 t^2 + \ldots \quad (3)$$

즉, 그래디언트는 어떠한 한 점 근방에서 함수를 원하는 찻수의 다항식으로 근사하는 것에 쓰일 수 있다.

Hessian 행렬과 최적화 I

스칼라 함수 f:$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$에 대해서, hessian 행렬 H는 다음과 같이 정의된다.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{4}$$

이런 Hessian Matrix가 가지는 의미는, 어떤 점 근처에서 원함수 f를 근사하는 2차함수를 만들어낸다는 점이다. 예를 들어서, f가 실수에서 실수로 가는 함수라고 하자. 이 때는 $H = \frac{d^2 f}{dx^2}$일 것이다. 즉 이 함수는 테일러급수의 2차항이라고 생각할 수 있다. 이와 비슷하게, 위에서 살펴본 식을 변형하면 n변수 함수에 대해서는 테일러급수의 일반화로 다음이 성립한다.

$$f(\vec{(x)} + \vec{\delta}) \approx f(\vec{x}) + \nabla f(\vec{x})^T \vec{\delta} + \frac{1}{2!} \vec{\delta}^T H(\vec{x}) \vec{\delta} \tag{5}$$

Hessian 행렬과 최적화 II

이 식을 이용하여 Hessian Matrix를 이용해서 다음을 해 볼 수 있다.

- Second Derivative Test
- 최적화

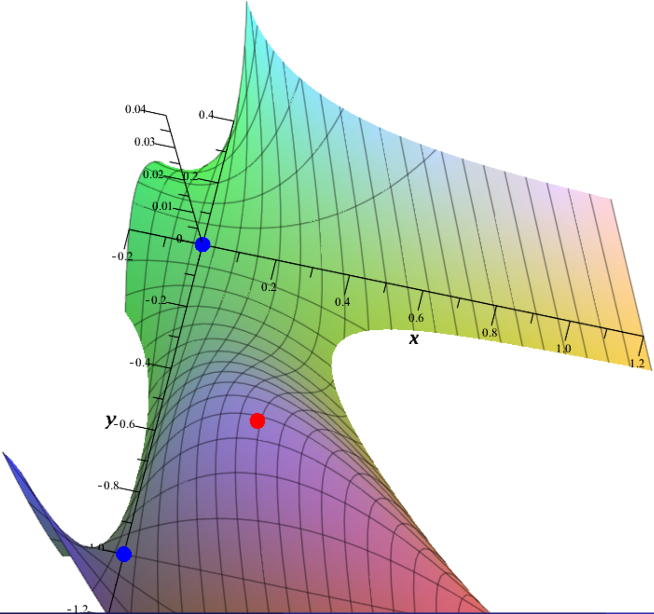
에 사용된다. 아래에서 각자의 영역에서 어떻게 사용되는지 살펴보겠다. 먼저 Second Derivative Test를 살펴보겠다. 먼저, 앞서 수업에서 극값은 다음의 조건을 만족하는 것이 필요조건이라고 하였다.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = 0 \tag{6}$$

이 때, 위 경우를 만족하면서 극값이 아닌 점을 saddle point라고 한다. 이러한 점을 가려내기 위해서 1변수에서는 2계도함수를 이용하여 판별하였다. 다변수함수의 경우, Hessiam Matrix의 고윳값의 부호를 이용해서 테스트할 수 있다. 즉, 만약 어떤 점 x에서 H의 고윳값이 모두 양수라면 local minimum을 가지고, 모두 음수라면 local maximum을

가지며, 둘 다 아니라면 saddle point가 된다. 예컨대, 다음의 함수를 생각해 보자.

Hessian 행렬과 최적화 IV



Divergence의 정의

벡터함수 $\vec{F}$에 대해서 그 divergence는 ∇와의 내적으로 정의된다. 즉,

Divergence $\nabla \bullet \vec{F}$

$$\nabla \bullet \vec{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

이다.

Divergence의 성질

상수 a,b와 스칼라함수 f, 벡터함수 $\vec{F}, \vec{G}$에 대해서 다음이 성립한다.

- $\nabla \bullet (a\vec{F} + b\vec{G}) = a\nabla \bullet \vec{F} + b\nabla \bullet \vec{G}$
- $\nabla \bullet (f\vec{F}) = (\nabla f)\vec{F} + f\nabla \bullet \vec{F}$

벡터함수 $\vec{F}$에 대해서 그 divergence는 ∇와의 외적으로 정의된다. 즉,

Divergence $\nabla \bullet \vec{F}$

$$\nabla \bullet \vec{F} = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}) \times \vec{F}$$

Curl의 성질

상수 a,b와 스칼라함수 f, 벡터함수 $\vec{F}, \vec{G}$에 대해서 다음이 성립한다.

- $\nabla \times (a\vec{F} + b\vec{G}) = a\nabla \times \vec{F} + b\nabla \times \vec{G}$
- $\nabla \times (f\vec{F}) = (\nabla f) \times \vec{F} + f\nabla \times \vec{F}$
- $\nabla \times (\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{F}(\nabla \bullet \vec{G}) - \vec{G}(\nabla \bullet \vec{F}) + (\vec{G} \bullet \nabla)\vec{F} - (\vec{F} \bullet \nabla)\vec{G}$

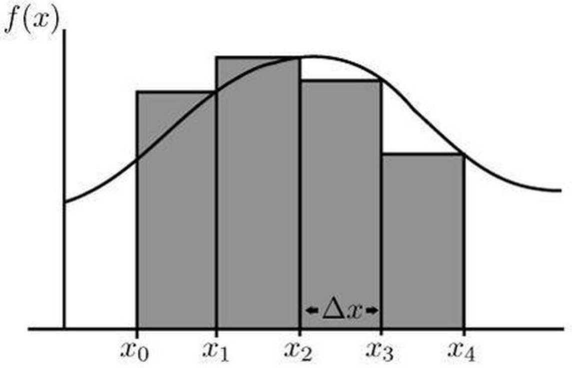
Chain Rule

- $\nabla f(g(\vec{x}) = f' g(\vec{x}) \nabla g(x)$
- $\nabla f(\vec{A}(\vec{x})) = \nabla f(\vec{A}(\vec{x})) \nabla \vec{A}$
- $\nabla \bullet \vec{A}(f(\vec{x})) = \vec{A}'(f(\vec{x})) \nabla f$
- $\nabla \times (\vec{A}(f(\vec{x})) = -\vec{A}'(f(\vec{x})) \times \nabla f$

Second Derivatives

- Curl of the Gradient : $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$
- Divergence of the Curl : $\nabla \bullet (\nabla \times \vec{A}) = 0$
- Divergence of the Gradient : $\nabla(\nabla f) = \nabla^2 f$
- Curl of the Curl : $\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \bullet \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$

적분의 정의 : 리만 합



어떤 함수 f의 정적분 $\int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$S = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx = lim_{n \to \inf} \sum_i f(a + \frac{(b-a)i}{n})\delta \tag{11}$$

어떤 함수 f의 부정적분 $F = \int f(x)dx$는 다음을 만족하는 함수로 정의된다.

$$\frac{dF}{dx} = f \tag{12}$$

정적분과 부정적분

이 때, 어떤 함수의 a부터 b까지의 정적분 $S = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx$와 함수 f의 부정적분 F(x) 사이에는 다음의 관계가 성립한다.

$$F(b) - F(a) = \int_{x=a}^{x=b} f(x)dx \tag{13}$$

이를 미적분학의 기본정리라고 한다.

부분적분

두 함수의 곱의 미분공식을 생각해보자.

$$\frac{d(fg)}{dx} = f\frac{dg}{dx} + \frac{df}{dx}g \tag{14}$$

이제, 양변을 x로 적분하면 적분의 정의에 의해서 다음과 같다.

$$fg = \int f\frac{dg}{dx} + \int \frac{df}{dx}gdx \tag{15}$$

$$\int f\frac{dg}{dx} = fg - \int \frac{df}{dx}gdx \tag{16}$$

위와 같은 방식으로 수행하는 적분을 부분적분이라 한다.

부분적분의 예시 : $\int e^x sin(x)dx$

여기서 $f = e^x$, $\frac{dg}{dx} = sin(x)$로 잡고 다음과 같이 부분적분을 수행한다.

$$\int e^x sin(x)dx = -e^x cos(x) - \int -cos(x)e^x dx \quad (17)$$

$$= -e^x cos(x) + \int e^x cos(x) \quad (18)$$

여기서 다시 $\int e^x cos(x)$를 위와 비슷하게 부분적분하면 아래와 같다.

$$\int e^x cos(x)dx = e^x sin(x) - \int e^x sinx \quad (19)$$

이를 위 식에 대입하면, 다음이 성립한다.

$$\int e^x sin(x) = \frac{e^x}{2}(sin(x) - cos(x)) \quad (20)$$

치환적분

위 부분적분에서 곱셈의 미분을 생각했듯이, chain rule을 이용한 합성함수의 미분을 생각해 보자.

$$\frac{df(g(x))}{dx} = f'(g(x))\frac{dg}{dx} \tag{21}$$

$$f(g(x)) = \int f'(g(x))\frac{dg}{dx}dx \tag{22}$$

즉, 함수 f의 꼴을 볼 때, 어떤 적절한 치환 g(x)를 이용하여 적분을 간단히 할 수 있다.

치환적분의 예시 : 삼각함수로의 치환

$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$에서, $x = cos(t)$로의 치환을 생각해 보자. 이 때 $\frac{dx}{dt} = -sin(t)$가 되므로, 다음과 같이 원 식을 계산할 수 있다.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int -\frac{sin(t)dt}{sin(t)} \quad (23)$$

$$= -t \quad (24)$$

따라서 적분의 값은 cos의 역함수가 된다.

미분방정식과 차수 I

미분은 선형변환이다. 즉,

$$\frac{d}{dx}(af(x)+bg(x)) = a\frac{df}{dx} + b\frac{dg}{dx} \tag{25}$$

이 성립한다. 한번 미분이 선형변환이므로, 여러 번 미분한 것이나 여러 번의 미분연산의 선형결합 또한 다 선형변환이 된다. 즉,

$$D = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^n}{d^n x} \tag{26}$$

$$L = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) \frac{d^n}{d^n x} \tag{27}$$

는 선형변환이다. 이 때, L을 p차 미분연산자라고 한다. 여기서 $p_i(x)$는 임의의 x에 대한 함수이다. 이 때, 아래와 같은 꼴의 식을 선형 미분방정식이라고 한다.

미분방정식과 차수 II

$$Lf(x) = F(x) \tag{28}$$

이 때, L이 1차 미분연산자이면 1차 미분방정식이라고 한다. 일반적으로, 1차 미분방정식의 경우 초기조건 $f(x_0)$가 주어져야 함수 f(x)를 정확하게 특정할 수 있으며, n차 미분방정식의 경우 $f^{(i)}(x_{0i})$의 초기조건이 주어져야 한다.

Seperable Equations

다음과 같은 꼴로 변형이 가능한 1차 미분방정식을 분리 가능(seperable) 하다고 한다.

$$g(y)\frac{dy}{dx} = f(x) \tag{29}$$

이러한 함수의 경우, 양변을 x로 적분하면

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx \tag{30}$$

이므로 $s(x, y) = F(x) - G(y) = 0$ 꼴의 해를 항상 얻을 수 있다.

Example

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2} = \frac{3}{2}, y(0) = 2 \tag{31}$$

에서 y를 구해보자. 다음과 같은 변형을 통해 우선 변수를 분리한다.

$$\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{3-y}{2} && (32)\\
\frac{2}{3-y}\frac{dy}{dx} &= 1 && (33)\\
\int \frac{2dy}{3-y} &= \int dx && (34)\\
C - ln(3-y) &= x && (35)\\
y &= 3 - e^{C-x} && (36)
\end{aligned}$$

로 풀 수 있다. C는 초기조건을 이용하여 구할 수 있다.

선형 미분방정식

일반적으로 선형 미분방정식은 다음과 같은 꼴을 띈다.

$$Lf(x) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) \frac{d^n f}{d^n x} = g(x) \tag{37}$$

이 때, L이 1차 미분연산자이면 이를 1차 선형 미분방정식이라고 한다.

1차 선형 미분방정식의 해법

1차 선형 미분방정식은 다음의 꼴을 가진다.

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = g(x) \tag{38}$$

이 때, 어떠한 함수 $\mu(x)$가 있어 다음을 만족시킨다고 하자.

$$\begin{aligned} \mu(x)(\frac{dy}{dx} + p(x)y) &= \mu(x)g(x) \quad (39) \\ \mu(x)(\frac{dy}{dx} + p(x)y) &= \frac{d}{dx}(\mu(x)g(x)) \quad (40) \end{aligned}$$

이런 경우, y와 μ는 각각 다음의 꼴을 가지게 된다.

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\mu(x)} \int \mu(x)g(x)dx \quad (41) \\ \mu(x) &= Ce^{\int p(x)dx} \quad (42) \end{aligned}$$

Charecteristic Polynomial

n차 선형 미분연산자 중 계수가 상수인 경우, 그 미분연산자의
특성방정식은 다음과 같이 정의된다.

L의 특성방정식

$L = \sum_{i=0}^{n} p_i \frac{d^n}{d^n x}$ 의 특성방정식은 $p(x) = \sum_i p_i x^i$이다.

이 때, $Lf(x) = 0$의 해는 특성방정식의 해 α_i에 대해서, $e^{\alpha_i x}$의
선형결합이다.

라플라스 변환

함수 f의 라플라스 변환은 다음과 같이 정의된다.

라플라스 변환

$F(s) = L(f(t)) = \int_0^{\text{inf}} e^{-st} f(t) dt$

라플라스 변환과 미분방정식의 풀이 I

다음 미분방정식을 생각하자.

$$x'' - x' - 2x = 0 \tag{43}$$

이를 푸는 기존의 방법은 특성방정식 $t^2 - t - 2 = 0$을 풀어, 그 근을 이용하여 해를 구하는 것이였다. 이번에는 라플라스 변환을 이용해서 구해보도록 할 것이다.
먼저, $X(s) = L(x(t))$라 하자. 그러면 라플라스 변환 규칙에 따라 다음이 성립한다.

$$[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] - [sX(s) - x(0)] - 2X(s) = 0 \tag{44}$$

$$X(s) = \frac{s-1}{(s-2)(s+1)} \tag{45}$$

이에 따라서, 결국 x(t)를 구하는 것은 라플라스 역변환을 하는 것과 같아진다. 이는 우변이 0이 아닐 때 더욱 편하게 풀이 가능하다. 다음의 미분방정식을 보자.

$$x'' + x' = sin(2t) \tag{46}$$

이 경우, 위와 같은 방식으로 하면 결국

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2s+1}{s^2+1} + \frac{2/3}{s^2+1} - \frac{2/3}{(s^2+4)} \\ &= \frac{2s}{s^2+1} + \frac{5/3}{s^2+1} - \frac{2/3}{(s^2+4)}. \end{aligned}$$

과 같이 되어, 기존 방식보다 문제를 용이하게 해결할 수 있다.

범함수

범함수란 함수를 인자로 받는 함수를 말한다. 프로그래밍에서 lambda로 함수를 인자로 넘기는 것과 완벽하게 같은 개념이다. 우리는 여기서는 다소 단순한, 일변수함수 f와 그 도함수 f'을 인자로 가지는 범함수 F를 생각할 것이다. 조금 더 자세하게는, 다음과 같은 꼴의 범함수를 생각하고자 한다.

$$F = \int_{x_1}^{x_2} h(f, f'; x)dx \tag{47}$$

오일러-라그랑지 조건

위와 같이 범함수 F를 정의했을 때, 다음과 같은 조건을 만족하는 함수 h가 범함수의 극값을 만들어준다.

$$\frac{\partial h}{\partial f} = \frac{d}{dx}\frac{\partial h}{\partial f'} \tag{48}$$

최단시간 강하 곡선 : Brachistochrone problem