Lecture 5 : 함수의 극한과 미분

Fastcampus Math Camp

신승우

Friday 22nd June, 2018

무한의 직관적 이해 I

가장 큰 자연수에 대해서 생각해 보자. 가장 큰 자연수는 몇인가? 애석하게도, 그러한 수는 존재하지 않는다. 어떤 자연수 N이 존재해서 그것이 가장 큰 자연수라고 한다면, N+1 역시

- 자연수이며
- N보다 크므로

N은 가장 큰 자연수가 될 수 없다. 즉, 이에서 볼 수 있듯이 무한대를 어떠한 숫자로 생각하면 우리가 직관적으로 아는 무한대의 정의를 충족시킬 수 없다. 언제나 그 수에 1을 더해서 그 수보다 큰 수를 만들 수 있기 때문에, 무한대의 직관적인 정의인 어떠한 수보다 큰 수에 부합하지 않기 때문이다. 따라서 무한대는 숫자가 아니고, 다음을 만족하는 어떤 '것'으로 볼 수 있다.

$$\forall n, n < \inf \tag{1}$$

보통 무한대는 계속 증가하는 '상태'로 해석하며, 이에 기반하여 앞으로의 논의를 진행할 것이다.

극한의 직관적 이해 I

어떤 수열 x_n이 L에 '무한히' 접근한다고 하자. 이 때 무한히 접근한다는 것을 어떤 식으로 받아들여야 할까? 무한히 접근한다는 것은 여기서는 두 가지를 의미한다.

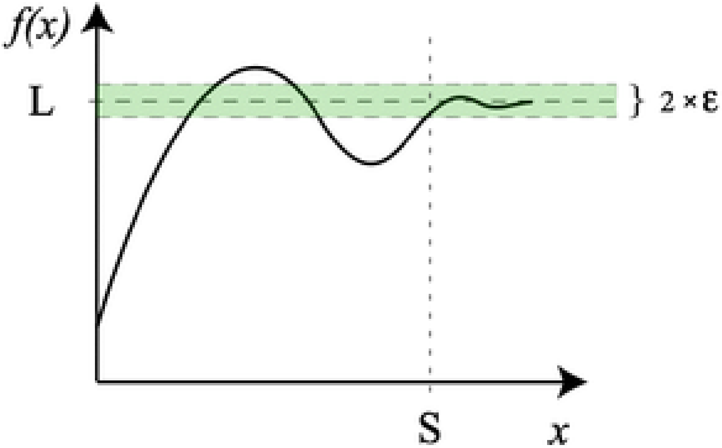
- $|x_n - L|$이 무한히 0에 접근한다.
- $x \neq a$ 이다.

여기서 첫 번째 의미를 조금 더 살펴보자. 무한하게 0에 접근한다는 것은, 곧 다음과 같이 생각할 수 있다. 즉,

$$\forall \epsilon > 0, \exists N, \forall n > N, |x_n - L| < \epsilon \tag{2}$$

위 식을 도식화하면 아래와 같다.

극한의 직관적 이해 II



즉, 어떠한 ϵ을 잡더라도, 충분한 시간이 지나면 (즉 충분히 n이 커지면) L과 x_n의 거리가 ϵ이하로 유지된다면 우리는 x_n이 L에 무한히 접근한다고

생각할 것이다. 이제, 수열이 아니라 어떤 함수가 L에 접근하는 경우를 생각해 보자. 즉, x가 a로 무한히 접근할 때, f(x)가 L로 접근하는 것을 위와 같이 어떻게 나타낼지 생각해 보자. 먼저, 명제 형식으로 쓰면 다음과 같다.

$$(x \to a) \to (f(x) \to L) \tag{3}$$

즉, x가 a에 충분히 가까우면 f(x)와 L도 어느정도 가까워져야 할 것이다. 이 때, f(x)와 L이 가까워지는 정도에는 한계가 없어야 한다. 즉, 임의의 ϵ 만큼 가까워질 수 있어야 한다. 이 때, x와 a의 거리가 충분히 가까우면 되므로, 이 충분히 가까운 거리를 δ라고 하자. 그러면 이를 정리해서 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\forall \epsilon \exists \delta 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon \tag{4}$$

$\epsilon - \delta$ 논법

위 논의를 정리하면 다음과 같다.

극한

$lim_{x \to a} f(x) = L$ 은 $\forall \epsilon \exists \delta 0 < |x - a| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$

이 때, 좌극한과 우극한을 따로 다음과 같이 정의하며, 좌극한과 우극한이 같은 값일 때 극한이 존재한다고 한다.

좌/우극한

우극한은 $lim_{x \to a+} f(x) = L$ 은 $\forall \epsilon \exists \delta x - a < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$이라고 하며, x가 a보다 항상 큰 경우를 말한다.
좌극한은 $lim_{x \to a-} f(x) = L$ 은 $\forall \epsilon \exists \delta x - a < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$이라고 하며, x가 a보다 항상 작은 경우를 말한다.

위 논법을 이용하여 $f(x) = 2x + 4$가 x가 0으로 갈 때, 4로 수렴하는 것을 증명해 보자.

$$\begin{aligned} lim_{x\to 0} 2x + 4 &\leftrightarrow \forall\epsilon\exists\delta 0 < |x| < \delta \to |2x + 4 - 4| < \epsilon & (5) \\ &\leftrightarrow \forall\epsilon\exists\delta 0 < |x| < \delta \to 2|x| < \epsilon & (6) \end{aligned}$$

따라서, $\delta = \frac{\epsilon}{2}$면 성립한다. 대개의 경우 , $\epsilon - \delta$ 논법을 이용한 극한의 증명은 적절한 $\delta(\epsilon)$을 찾는 것으로 귀결된다.

$\epsilon - \delta$ 논법의 계산오차

$\epsilon - \delta$ 논법은 비단 수학적인 극한의 논의에서만 사용되는 것이 아니라, 계산오차의 예상에도 사용될 수 있다. 예컨대, 어떤 함수 f(x)를 수치적으로 계산한다고 하자. 이 때, 우리가 계산 결과인 f(x)의 계산오차를 줄이기 위해서는 입력인 x의 정확도를 높여야 한다. 하지만 얼마나 높여야 우리가 원하는 계산오차를 만족할 수 있을까?
위 $\epsilon - \delta$ 논법에서 $\delta(\epsilon)$는 우리가 원하는 오차(혹은 input precision)에 대한 출력의 오차(precision)으로 생각할 수 있다. 즉, 우리가 원하는 계산결과의 정확도를 위해서 요구되는 입력값의 precision으로 생각할 수 있다. 예를 들어서, 위 예시에서 볼 수 있듯이 선형함수 ax+b를 출력오차 ϵ 내로 계산하기 위해서는 $a\epsilon$의 정확도로 x를 입력하면 된다.

극한의 연산

함수 f, g가 $x \to a$일 때 각각 α, β로 수렴한다면 다음이 성립한다.

- $lim(f+g) = \alpha + \beta$
- $lim(fg) = \alpha\beta$
- $lim(\frac{f}{g}) = \frac{\alpha}{\beta}$

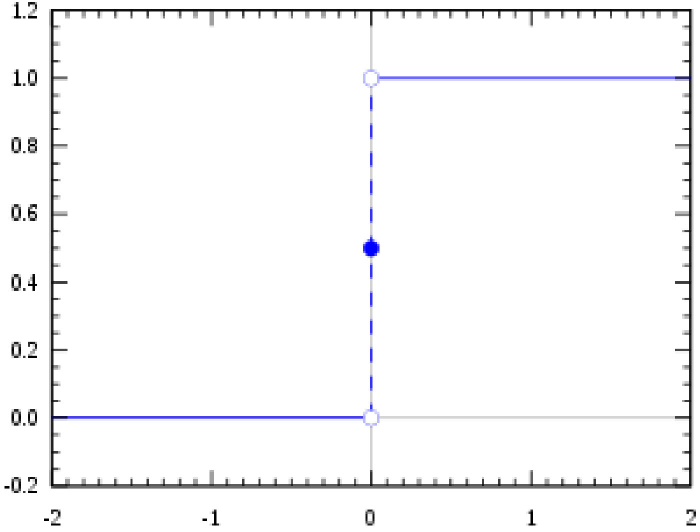
여기서, 역은 성립하지 않는다.

연속함수

다음을 만족하는 함수를 연속함수라고 한다.

연속함수

함수 f의 정의역의 모든 원소 a에 대해서, $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ 가 성립하면 f는 연속함수이다.



- 불연속함수
- Piecewise Continuous 함수

접선과 미분의 정의

곡선 y=f(x)위의 한 점 (a,f(a))에서의 접선 l은 다음과 같이 정의된다.

접선

접선 l은 두 점 P(a, f(a)), Q(b, f(b))로 이루어진 선분 PQ의 다음과 같은 극한이다.
$lim_{b \to a} PQ$

정의에 따라서, 접선의 기울기는 다음과 같다.

$$lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \tag{7}$$

위 식은 점 (a,f(a))에서 접선의 기울기를 뜻한다. 이제, 정의역 안 임의의 점에서 접선의 기울기를 생각해보면 접선의 기울기 역시 하나의 함수로 볼 수 있고, 이를 도함수, 혹은 함수의 미분이라고 한다. 함수의 x에 대한 미분은 $\frac{df}{dx}$나 f'와 같이 쓴다.

미분 연산 법칙과 그 증명

미분가능한 함수 f,g에 대해서 다음이 성립한다.

- $\frac{d}{dx}cf = c\frac{df}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}$
- $\frac{d}{dx}(fg) = g\frac{df}{dx} + f\frac{dg}{dx}$
- $\frac{d}{dx}\frac{f}{g} = \frac{f'g-g'f}{g^2}$
- $\frac{d}{dx}f(g(x)) = \frac{df(g(x))}{dg}\frac{dg}{dx}$: Chain Rule

다양한 함수의 미분

- 다항함수 : $\frac{d}{dx} a_i x^i = i a_i x^{i-1}$
- 지수함수 : $\frac{d}{dx} e^x = e^x$, $\frac{d}{dx} a^x = a^x ln(a)$
- 삼각함수 : $\frac{d}{dx} sinx = cosx$, $\frac{d}{dx} cosx = -sinx$, $\frac{d}{dx} tanx = \frac{1}{(cosx)^2}$
- 로그함수 : $\frac{d}{dx} lnx = \frac{1}{x}$, $\frac{d}{dx} log_a x = \frac{1}{xlna}$

극값

극값은 극소점과 극대점을 통틀어 말하며, 이는 local minimum과 local maximum을 통칭한다. local minimum과 local maximum은 각각 다음과 같이 정의된다.

Local Minimum/Maximum

함수 f에 대해서, 다음의 집합의 원소를 극점이라 한다.
$\{x* \in X | \exists d \forall xin |x - x*| < d, f(x*) > xorf(x*) < x\}$

도함수와 극값의 관계

극값에서는 도함수가 0이다. 하지만, 그 역은 성립하지 않는다.

편미분

다변수함수 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$에 대해서, 변수 x_i로의 편미분은 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, x_2, ..., x_i + h, ...x_n) - f(x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_n)}{h} \tag{8}$$

즉, 다변수함수에서 다른 변수들을 다 상수로 취급하고, 한 변수에 대한 미분만을 계산하는 것이 편미분이다. 따라서 계산 등은 상미분과 동일하다.

고차 편미분

다변수함수의 편미분은 상미분과는 다르게, 다른 변수들로 미분을 여러번 할 수 있다. 예컨대, 이변수함수 f(x,y)는 다음과 같은 두 가지 방법으로 두 번 편미분될 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} \tag{9}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} \tag{10}$$

이 두 식은, 두 식이 각각 연속이라면 같은 식이 된다. 이를 Clairaut's theorem on equality of mixed partials라고 한다.

연산자로써의 미분

x에 대한 미분 $D_x = \frac{d}{dx}$는 함수에 대한 일종의 연산자로 볼 수 있다.
그런데, 미분 연산자는

- $D_x(cf(x)) = cD_x(f(x))$
- $D_x(f(x) + g(x)) = D_x(f(x)) + D_x(g(x))$

로, 선형성을 가진다. 따라서 미분은 선형 변환이다. 이는 편미분도 똑같다.

벡터 함수

벡터 함수 $\vec{f}$는 다음과 같이 정의된다.

벡터 함수

벡터 함수 $\vec{f}$는 함수 $f_1, f_2, \dots, f_n$으로 만들어진 n-벡터이며, 다음과 같이 쓴다.
$\vec{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)$

벡터 함수의 연산은 일반적인 벡터와 함수의 연산을 따른다.

벡터 함수의 미분과, 벡터로의 미분

벡터 함수의 x에 대한 편미분은 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial x} = (\frac{\partial f_1}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x}, ..., \frac{\partial f_n}{\partial x}) \tag{11}$$

반대로, 벡터 $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$으로 스칼라함수 $f(x_1, x_2, ..., x_n)$을 미분하는 것은 다음과 같이 정의된다.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{x}} = (\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}) \tag{12}$$

∇ 연산자와 그 응용 I

∇ 연산자는 델 연산자라고도 하며, 보통 3차원에서 정의된다. 본 수업에서도 3차원에서의 델 연산자만을 다룰 것이다.

∇ 연산자

∇는 다음의 3-벡터이다.
$\nabla = (\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$

델 연산자는 벡터이기 때문에 스칼라배와 내적이 가능하며, 또한 3 차원에서는 외적도 가능하다. 각각이 벡터 함수의 연산에 대응된다.

- Gradient : 스칼라배
- Divergence : 내적
- Curl : 외적