

1 Herleitung mathematischer Grundlagen

1.1 Herleitung der Formeln

1.1.1 Reflexion an einer Geraden

Durch die Verwendung der Vektorrechnung lässt sich für unsere Arbeit die Reflexion eines Strahls an einer beliebigen regelmäßigen Geometrie auf die Reflexion eines Strahls an einer Geraden zurückführen. Diese ist damit ein essenzieller Prozess, der häufig durchgeführt werden muss.

Um die Berechnung des reflektierten Strahls durchzuführen müssen sowohl zwei Punkte der Geraden, A und B , gegeben sein, sowie der Ausgangspunkt O und der Richtungsvektor \vec{r} des Ausgangsstrahls. Mittels des Vektors $\vec{u} = 2 \cdot \overrightarrow{OL}$ zwischen O und dem Lotfußpunkt L von O auf \overline{AB} ergibt sich auch $\vec{o}' = \vec{o} + 2 \cdot \vec{u}$ und damit der Spiegelpunkt O' von O an AB . Weiterhin ist der Schnittpunkt S des Strahls von O in Richtung \vec{r} mit der Geraden AB durch die Formel

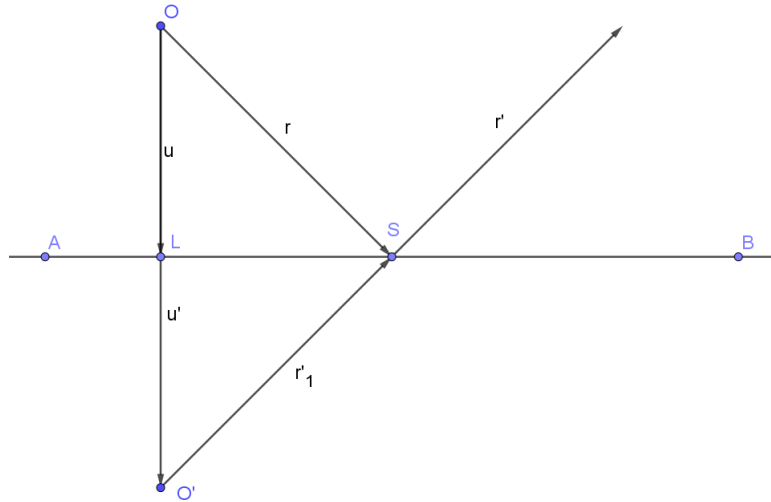


Abbildung 1: Reflexion an einer Geraden

$$\vec{s} = \vec{o} - \frac{O_x \cdot \vec{r}_y - O_y \cdot \vec{r}_x - A_x \cdot \vec{r}_y - A_y \cdot \vec{r}_x}{A_x \cdot \vec{r}_y - A_y \cdot \vec{r}_x - B_x \cdot \vec{r}_y + B_y \cdot \vec{r}_x} \cdot \vec{r}$$

bestimmt. Daraus ergibt sich folgend der Vektor

$$\vec{r}' = \vec{r}_1 = \overrightarrow{O'S}$$

und damit auch der neue Strahl von S in Richtung r' .

1.1.2 Reflexion an weiteren regelmäßigen Geometrien

Neben der Reflexion der Strahlen an einer einfachen Geraden haben wir uns auch entschieden, dies für Kreise, Kreisbögen und Ovale herzuleiten und zu implementieren. Grundsätzlich erfolgt dabei auch die Reflexion an einer Geraden, doch diese muss in Abhängigkeit der Form erst einmal bestimmt werden. Für folgende Herleitungen wird erneut von einem Strahl, der in O beginnt und sich in Richtung \vec{r} ausbreitet, ausgegangen.

Um die Berechnung an einem Kreis durchzuführen muss dieser zunächst vektoriell dargestellt werden. Dies geschieht in der Form $K : \vec{x} = \vec{m} + \vec{v}$, wobei \vec{m} der Ortsvektor zum Kreismittelpunkt M und \vec{v} der Richtungsvektor ist. Für letzteren gilt $\vec{v}_x^2 + \vec{v}_y^2 = r^2$, das heißt, dass jeder mögliche Richtungsvektor des Kreises K ein Radius desselben ist. Mithilfe dessen wird zunächst der Punkt bestimmt, in welchem der Strahl den Kreis schneidet, indem das folgende Gleichungssystem nach den drei unbekannten Variablen λ , \vec{v}_x , \vec{v}_y gelöst wird:

$$\begin{aligned}\vec{k}_x + \vec{v}_x &= O_x + \lambda \cdot \vec{r}_x \\ \vec{k}_y + \vec{v}_y &= O_y + \lambda \cdot \vec{r}_y \\ r^2 &= \vec{v}_x^2 + \vec{v}_y^2\end{aligned}$$

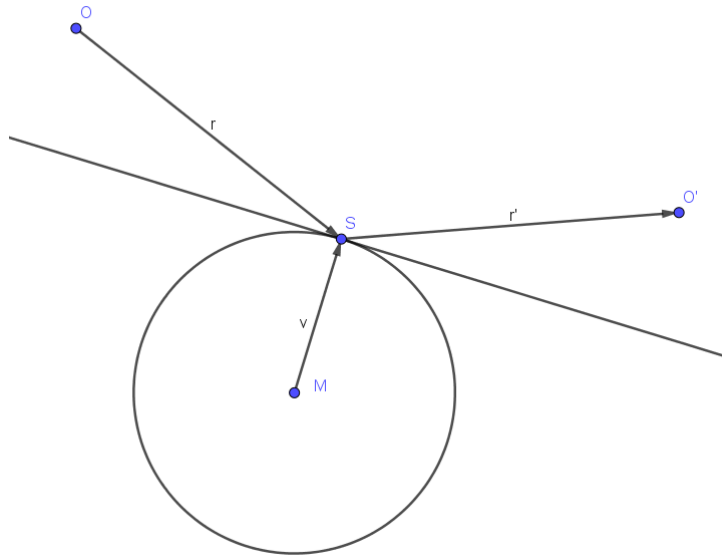


Abbildung 2: Reflexion an einem Kreis

Das so ermittelte λ wird in die Formel $\vec{s} = \vec{o} + \lambda \cdot \vec{r}$ eingesetzt, um den Schnittpunkt S zu berechnen. Durch den Vektor $\vec{n} = \vec{M}S$ zwischen Kreismittelpunkt und Schnittpunkt lässt sich leicht die Tangente in S mit $T : \vec{x} = \vec{s} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -ny \\ nx \end{pmatrix}$ ermitteln. Somit kann die Reflexion am Kreis auf eine Reflexion an einer Geraden zurückgeführt werden.

Die Reflexion an Kreisbögen funktioniert analog, aus einem Kreisbogen wird der entsprechende vollständige Kreis gebildet, an welchem wie beschrieben reflektiert wird. Jedoch muss zusätzlich noch überprüft werden, ob der Schnittpunkt mit dem „Hilfskreis“ auch auf dem Teil des Kreises liegt, den dieser mit dem Kreisbogen teilt. Dies geschieht derart, dass festgestellt wird, ob der Winkel des Kreissektors von Startpunkt des Kreisbogens bis zum Schnittpunkt kleiner ist als der Winkel des Kreissektors, welchem der Kreisbogen insgesamt entspricht. Dazu wird eine Formel zur Berechnung des Winkels in mathematisch positiver Richtung von einem Vektor v zu einem anderen Vektor w $\angle(\vec{v}, \vec{w}) = -\text{atan2d}(\vec{v}_x \cdot \vec{w}_y - \vec{v}_y \cdot \vec{w}_x, \vec{v}_x \cdot \vec{w}_x + \vec{v}_y \cdot \vec{w}_y)$ verwendet.

Als letzte Form haben wir die Ellipse $E(P, Q, e)$ implementiert. Wie beim Kreis ist es nötig, eine vektorielle Darstellung zu finden. Aufgrund der Definition einer Ellipse lautet diese $E : \vec{x} = \vec{p} + \vec{u} = \vec{q} + \vec{v}$ mit $e = |\vec{u}| + |\vec{v}|$. Zur Bestimmung des Schnittpunkts S wird nun folgendes Gleichungssystem nach λ gelöst:

$$\begin{aligned}\vec{o} + \lambda \cdot \vec{r} &= \vec{p} + \vec{u} \\ \vec{o} + \lambda \cdot \vec{r} &= \vec{q} + \vec{v} \\ \vec{p} + \vec{u} &= \vec{q} + \vec{v} \\ |\vec{u}| + |\vec{v}| &= e\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgend der Punkt S mit $\vec{s} = \vec{o} + \lambda \cdot \vec{r}$

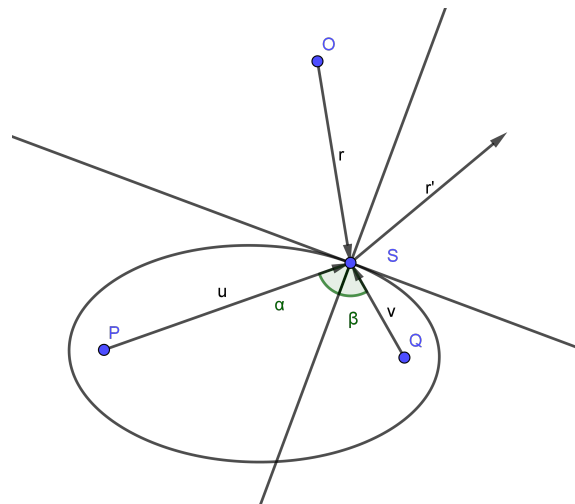


Abbildung 3: Reflexion an einer Ellipse