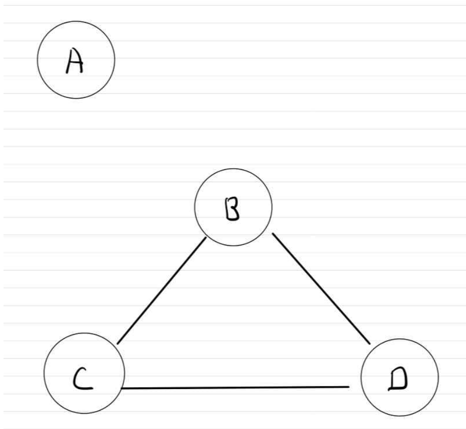
2주차 : 트리, 힙, 우선순위 큐, 이진 트리 순회

* 용어 설명

- **그래프**란? G = **(V,E)**
    - 정점(vertex, V), 간선(edge, E)의 조합 => 얘도 그래프다



    ex. 오른쪽 그래프에서

    V= {A,B,C,D}

    E = {(B,C), (B,D), (C,D) }

- **인접** : 두 정점 사이에 간선이 있을 경우
- **walk** : 인접한 정점들을 따라 이동한 족적
    - **닫힌 walk** : 시작점와 끝점이 동일한 walk
- **연결(connected) 그래프** : 임의의 두 정점 사이에 walk가 적어도 하나 존재하는 것

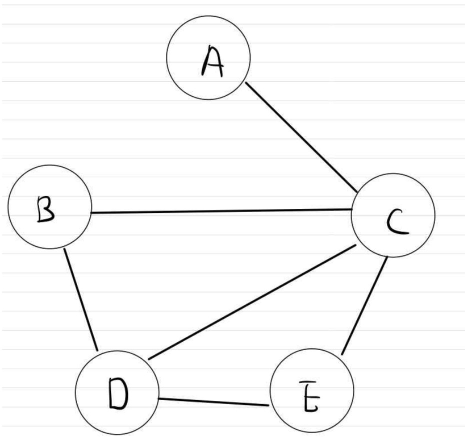
  => 얘는 비연결 그래프

    - 연결 그래프에서는, 항상 $E = V - 1$임을 알 수 있다.
- **path** : walk 중 중복된 꼭짓점이 존재하지 않는 것

  ex. 아래 그래프에서 A-C-D-B-C-E는 walk(o), path(x)
- **cycle** : 닫힌 walk와 path의 조건을 모두 만족하는 경우

(= 출발했던 점으로 돌아올 수 있는데, 중복된 점이 (시작점&종점) 제외하곤 없는 경우)

ex. 아래 그래프에서의 cycle?

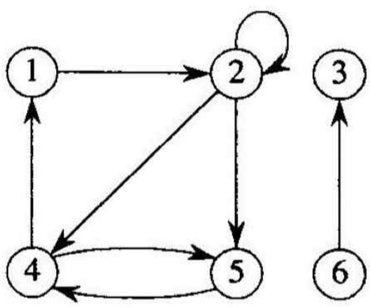


- *B-C-D-B*
- *D-C-E-D*
- *B-C-E-D-B*

- Directed **graph** : V가 공집합이 아닌 유한 집합이고, E는 V 사이의 관계(relation)이 있는 경우

  = 간선이 화살표인 경우

  ex.



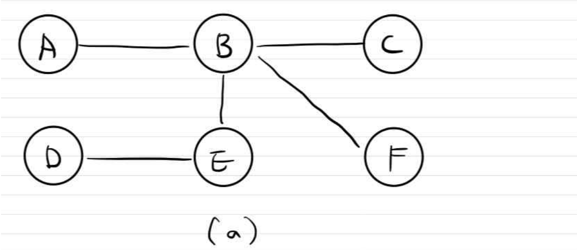
(앞선 개념들을 배운 이유 : 모든 트리는 그래프이다!)

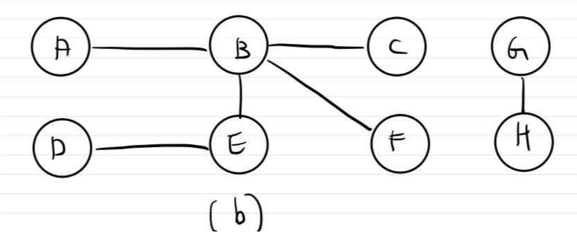
- **트리(Tree)** : 아래의 세 조건을 만족시키는 특수한 그래프

1) Undirected graph
2) acyclic
3) **연결 그래프**

cf) **Forest** : 위 조건 중 1), 2) 조건을 만족하는 경우

ex.





	(a)	(b)
undirected?	O	O
acyclic?	O	O
connected?	O	X

=> (a) : 트리, (b) : Forest

- **node** : 정점을 트리에선 node라고 부름

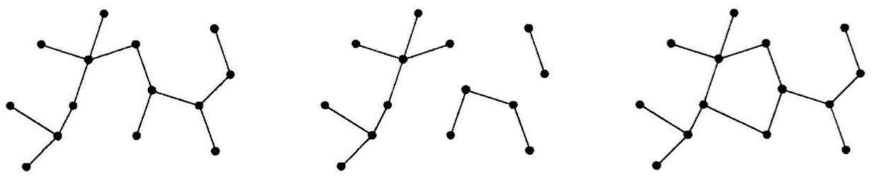
- **rooted tree** : 아래의 두 조건을 만족시키는 그래프

(1) 트리

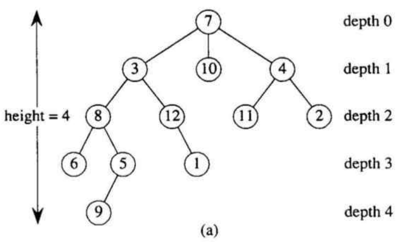
(2) **root node** : 부모 노드가 없는 노드

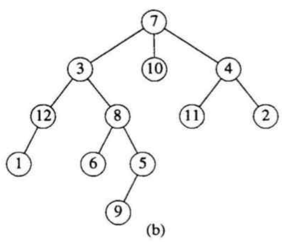
- root로 인해 '위계'가 생기므로, 부모 node와 자식 node가 있음.

ex.



Not a rooted tree　　forest　　Undirected graph

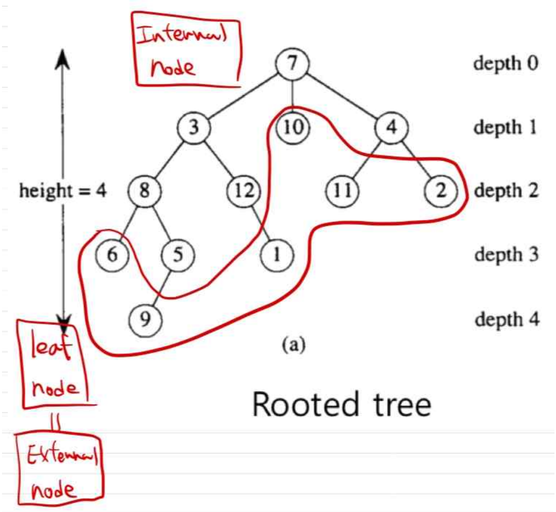




Rooted tree　　(a) And (b) are different rooted trees

- **leaf node** : 자식 노드가 없는 노드

ex.

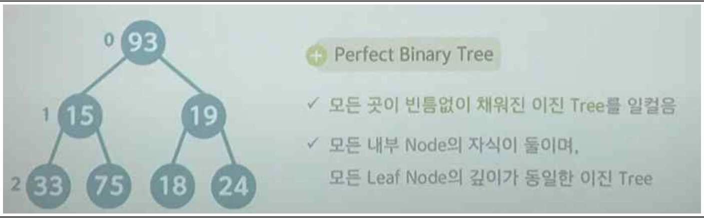


- **이진 트리(binary tree)** : 아래의 두 조건을 만족시키는 그래프

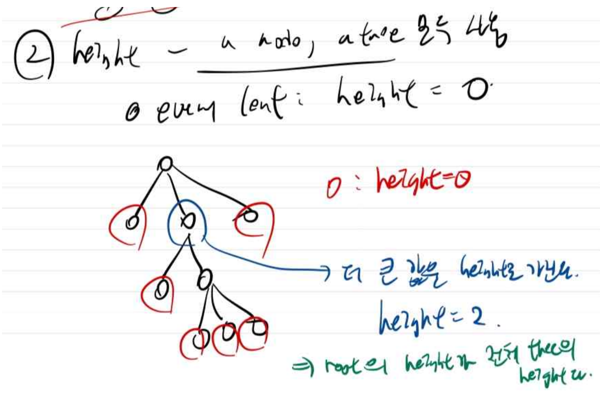
(1) rooted tree

(2) 각 노드는 최대 2개의 자식 노드를 가짐

- 이진 트리의 구조

<table>
<tr><th>포화 이진 트리(Full Binary Tree)</th><th>완전 이진 트리(Complete Binary Tree)</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

- Depth, Height란?
- **Depth** : 루트 노드에서 현재 노드까지의 거리(즉 간선의 수)
  - level : root 노드는 0, root 노드의 자식은 1, ... 으로 생각할 수 있다. (depth와 몹시 유사한 개념)
- **Height** : 현재 노드에서 Leaf 노드까지의 거리



cf) 트리의 높이와 전체 노드 개수 사이의 관계식 (height of tree = h, # node = n)

=> $h \leq log_2 n < h+1$

즉, $h = \lfloor \log_2 n \rfloor$

pf)

level 0(root) 에는 2^0개의 노드,

level 1에는 2^1개의 노드,

level 2에는 2^2개의 노드

…

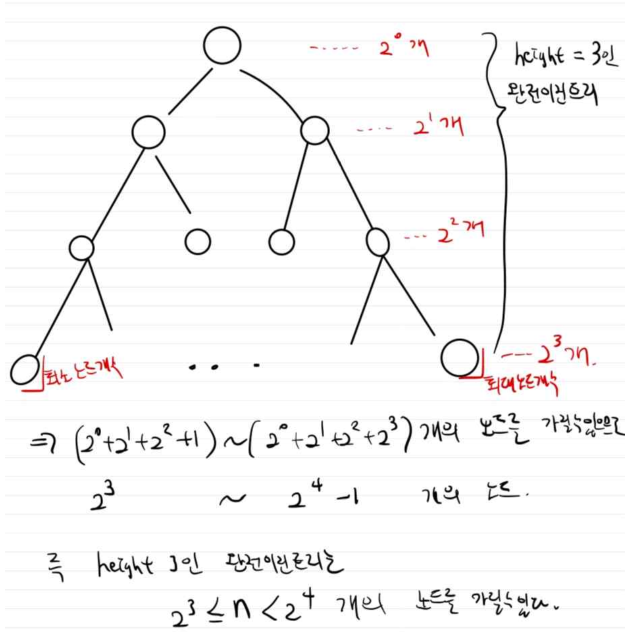
level h에는 2^h개의 노드가 있다.

- 이를 바탕으로 생각하면 $2^h \leq n < 2^{h+1}$이므로 $h \leq log_2 n < h+1$

즉 $\log_2 n - 1 < h \leq log_2 n$이므로 $h \leq log_2 n < h+1$

$\therefore$ h = $\lfloor \log_2 n \rfloor$ ($\because$ h : 정수)

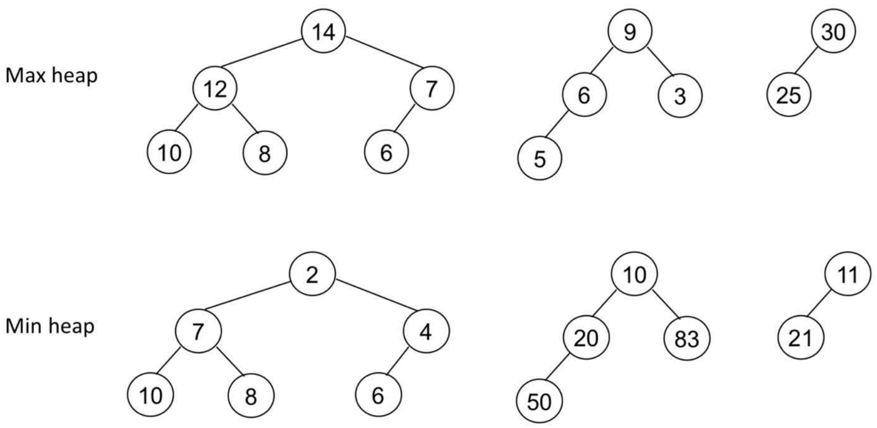
ex) h=3



=> 뒤에서 배울 Heap에서 push, pop 연산 속도가 $O(\log_n)$인 것과 연관됨

자료구조 Heap

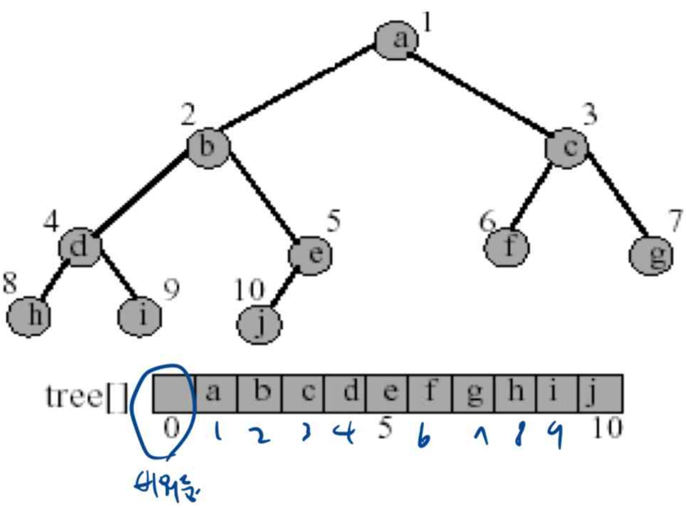
- **Heap**이란? 다음의 두 조건을 만족시키는 그래프
(1) 완전 이진 트리(Complete Binary Tree)
(2) heap property를 만족
  - heap property란? : 다음을 만족하는 부모 노드와 자식 노드 사이의 관계
  : 모든 부모 노드가 자신의 자식보다 큰 값을 가지거나(Max heap property)
  : 모든 부모 노드가 자신의 자식보다 작은 값을 가지거나(min heap property)
  ex.



cf. 대부분의 강의에서 Max heap을 기준으로 개념 설명을 이어가며, 저희도 그렇게 하겠습니다.

- 이진 트리의 배열 표현 :
  - 일반적으로 힙은 배열로 구현한다(∵완전 이진 트리이므로 중간에 비어있는 요소가 없기 때문)
  - root 노드를 배열의 0번 index에 넣고, 그 이후로 쭉 번호 매겨가며 배열에 대입한다.
  - 왼쪽 자식 노드 index = (부모 노드 index) *2
  - 오른쪽 자식 노드 index = (부모 노드 index) *2 +1
  - 부모 노드 index = (자식 노드 index) / 2

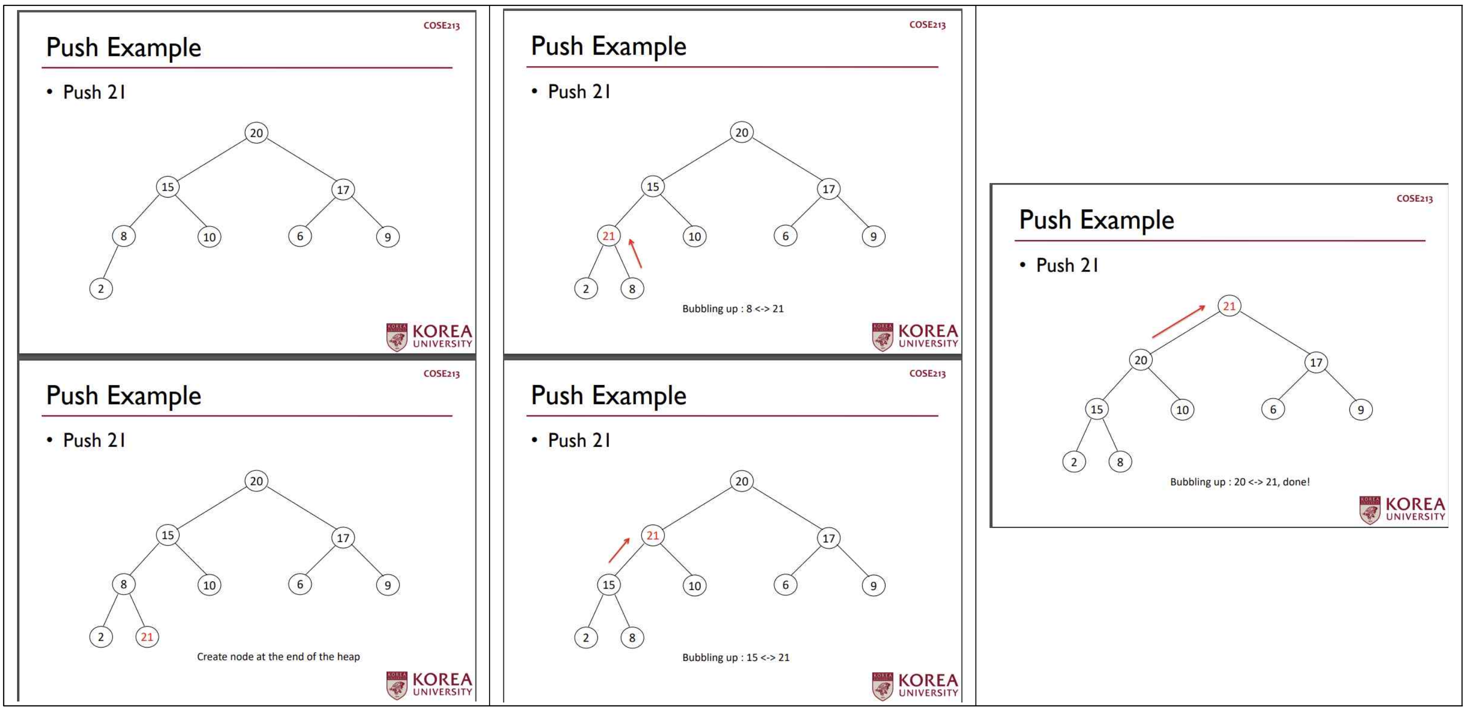
cf. 일반적으로는 root 노드를 배열의 1번 index에 넣는다고 하나, 유용재 교수님 강의에서는 0번 index부터 넣음



- Heap 자료구조의 주요 메소드 : push(), pop()

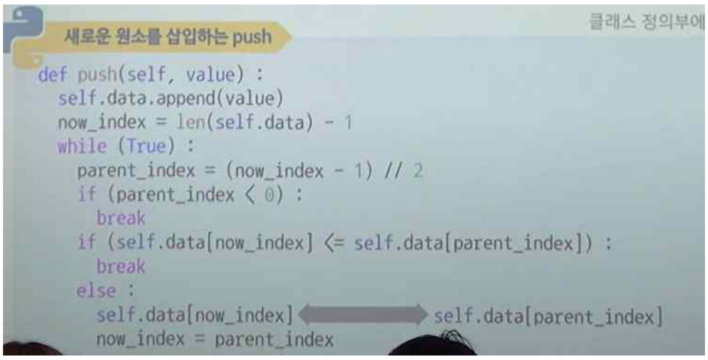
1) **push**() : 마치 물 속에서 공기방울이 떠오르듯 bubble up!(heap property 만족할 때까지)
- 현재 노드와 부모 노드와의 관계를 살핀다.
- 시작 위치 : 완전 이진 트리이므로, 위치는 고정

ex.



- push() 코드 구현

python

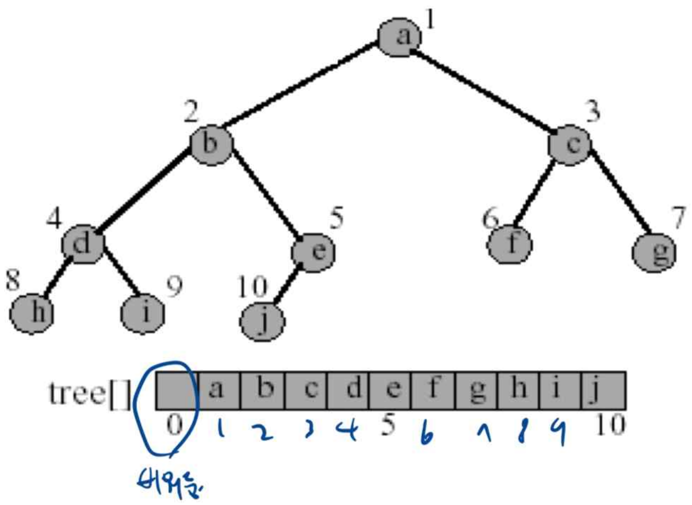


c++

```cpp
template <class Type>
void MaxHeap<Type>::Push(const Element<Type> &x)
{
    if (n==MaxSize) { HeapFull(); return; }
    n++;
    for(int i=n; 1; ) {
        if (i==1) break; // Root reached
        if (x.key <= heap[i/2].key) break;
        // move parent down
        heap[i] = heap[i/2];
        i /= 2;
    }
    heap[i] = x;
}
```

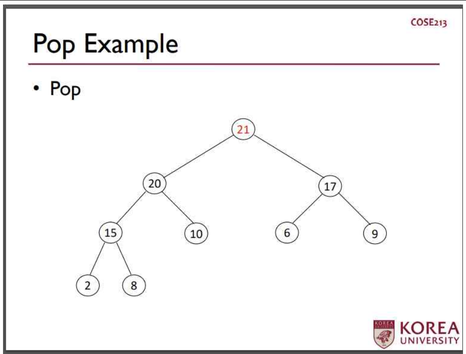
- n : 현재 힙의 크기
- 최대크기에 도달하면 HeapFull()하고 종료
- n++ : 현재 힙의 크기를 1 증가
- for(int i=n; 1; ;) : i는 n이고, 1이므로 항상 참인 조건문(=무한루프)
- break하는 경우 : 루트에 도달하거나, 현재 노드의 값이 부모 노드보다 작거나 같은 경우
- swap이 가능한 경우에는 swap하고, index를 절반으로 줄인다.

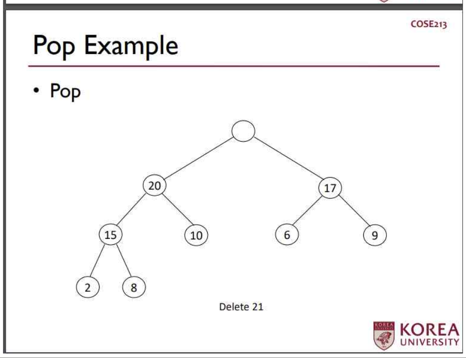
(해당 코드에서는 heap[0]이 다음 사진처럼 비워져있음)

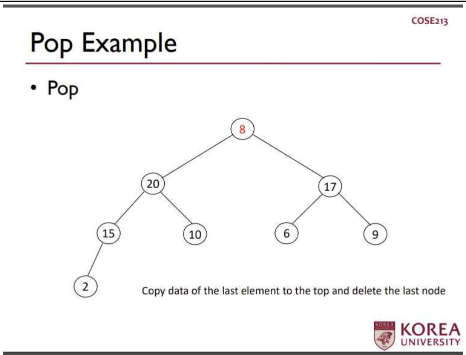


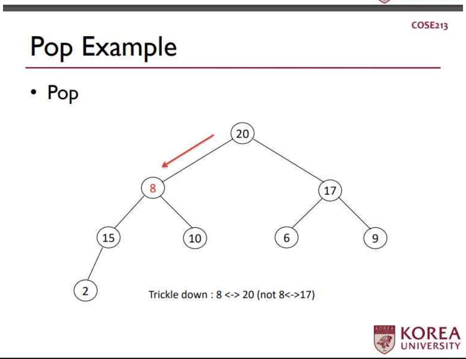
2) **pop**() : trickling down 하며
- 시작 위치 : root 노드를 삭제
- 비어있는 root 노드 자리에 가장 마지막 원소를 넣고(∵완전 이진트리 구조 유지해야하니까),
- trickling down!(heap property 만족할 때까지)
- 현재 노드와 자식 노드와의 관계를 살핀다

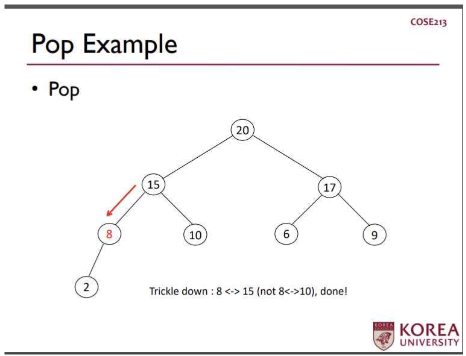
ex.





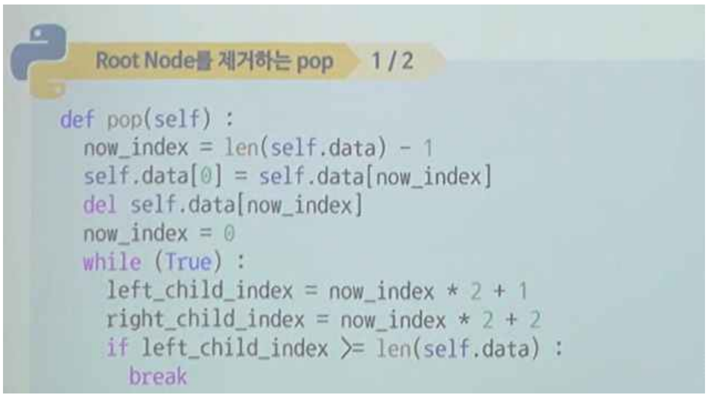






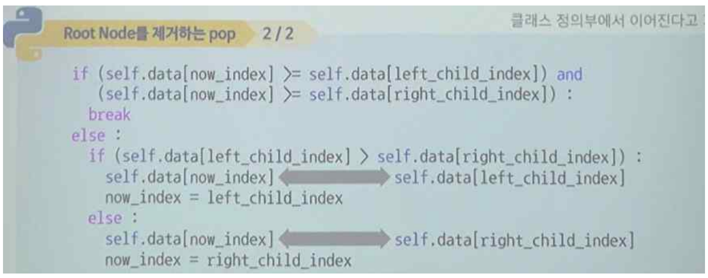
코드 구현

python



Root Node를 제거하는 pop 1 / 2

```python
def pop(self) :
  now_index = len(self.data) - 1
  self.data[0] = self.data[now_index]
  del self.data[now_index]
  now_index = 0
  while (True) :
    left_child_index = now_index * 2 + 1
    right_child_index = now_index * 2 + 2
    if left_child_index >= len(self.data) :
      break
```

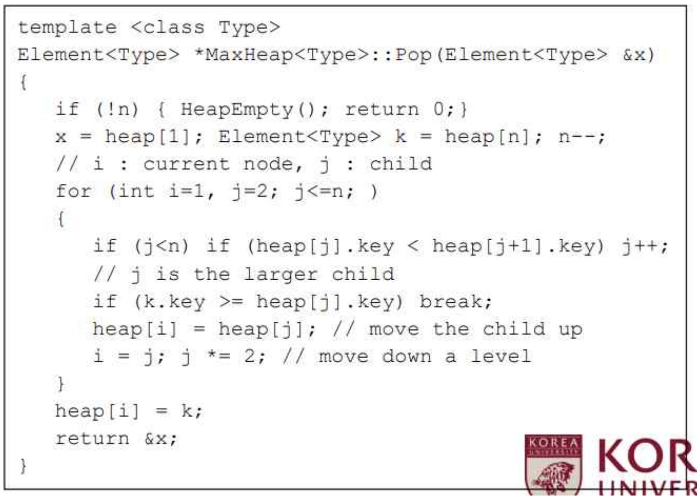


Root Node를 제거하는 pop 2 / 2

클래스 정의부에서 이어진다고

```python
    if (self.data[now_index] >= self.data[left_child_index]) and
       (self.data[now_index] >= self.data[right_child_index]) :
      break
    else :
      if (self.data[left_child_index] > self.data[right_child_index]) :
        self.data[now_index]        self.data[left_child_index]
        now_index = left_child_index
      else :
        self.data[now_index]        self.data[right_child_index]
        now_index = right_child_index
```

c++



```cpp
template <class Type>
Element<Type> *MaxHeap<Type>::Pop(Element<Type> &x)
{
   if (!n) { HeapEmpty(); return 0;}
   x = heap[1]; Element<Type> k = heap[n]; n--;
   // i : current node, j : child
   for (int i=1, j=2; j<=n; )
   {
      if (j<n) if (heap[j].key < heap[j+1].key) j++;
      // j is the larger child
      if (k.key >= heap[j].key) break;
      heap[i] = heap[j]; // move the child up
      i = j; j *= 2; // move down a level
   }
   heap[i] = k;
   return &x;
}
```

- n : 현재 heap 크기
- 힙이 비워져있는지 확인
- x에 루트 할당, k에 가장 끝 원소 할당하고 n--
- for문 : 루트에서 시작하여 자식 노드와 비교하며 k를 적절한 위치로 이동시킴
- 첫 번째 if문 : 더 큰 자식 노드를 선택
- 두 번째 if문 : 자식노드보다 현재 노드가 더 크면 이동할 필요가 없으므로 break

- pop, push 메소드 시간복잡도 : $O(\log_n)$ (∵ 트리의 높이만큼 실행되기 때문)

우선순위 큐(Priority Queue)

- not FIFO, 먼저 들어오는 순서가 아닌, 데이터의 우선 순위에 따라 pop한다.
- 만약 배열로 구현한다면?
    - push는 O(1)인데, pop은 O(n)이다. => O(n)
    - 배열삽입할 때 정렬해서 하면?
    - push O(n) 이고 pop이 O(1)이므로, 여전히 O(n)

- 만약 힙으로 구현한다면? push는 O(log n), pop도 O(log n) => O(log n) 으로, 그냥 배열을 쓰는 것보다 더 효율적!

- 우선순위 큐 메서드

1) insert(x) : heap에서 push()
2) removeMax() : heap에서 pop() // min heap이면 removeMin()
3) max() : 가장 우선순위가 큰 원소 찾음 // min heap이면 min()
4) size()
5) empty()

- 파이썬 : heapq 라이브러리 사용
https://velog.io/@hsshin0602/%ED%8C%8C%EC%9D%B4%EC%8D%AC-%EC%95%8C%EA%B3%A0%EB%A6%AC%EC%A6%98-%EC%9A%B0%EC%84%A0%EC%88%9C%EC%9C%84%ED%81%90priority-%ED%9E%99%ED%81%90heap

Priority Queue 와 Heaq의 차이

queue 속 **PriorityQueue 는 Thread-Safe** 하고 **heapq는 Non-safe** 하기 때문이라고 한다.
Thread Safe 하다는 것은 반드시 확인 절차를 걸쳐야 하기 때문에 확인하는 작업때문에 더 느리다.

- Thread-Safe를 요구하는 상황에서는 PriorityQueue
- Thread-Non-Safe 해도 된다면 heapq

코딩테스트로 문제를 푸는 상황이라면 Thread-Safe를 요구하지 않기 때문에 heapq를 써야 시간초과를 면할 수 있을 것이다. 실무에서도 우선순위 큐는 대부분 heapq로 구현하고 있다.

- c++ : queue 라이브러리 사용
https://velog.io/@doorbals_512/C-priorityqueue-%EC%BB%A8%ED%85%8C%EC%9D%B4%EB%84%88-%EC%82%AC%EC%9A%A9%EB%B2%95

❗ `push()` 와 `emplace()` 의 차이

- 우선순위 큐에는 구조체를 많이 삽입하게 되는데, `push` 의 경우 오브젝트를 생성 후 삽입해야하기 때문에 불필요한 복사가 많이 발생한다.
- `emplace` 의 경우 오브젝트를 생성하지 않고 바로 값을 넣는다.

pair 구조체를 삽입 시 first의 값을 기준으로 정렬된다.

- 정렬 바꾸는 법

0) 우선순위 큐 선언 방법

```
priority_queue<'자료형', '구현체', '비교연산자'> 이름;
```

- `자료형` : int, double, pair 등 기본 자료형 및 구조체, 클래스 등을 사용한다.
- `구현체` : 보통 `vector<자료형>` 으로 구현한다. 지정하지 않으면 vector로 기본 적용.
- `비교연산자` : 비교를 위한 기준을 알려준다.

1) 내림차순 (큰 값 먼저)

```
priority_queue<int> pq;
```

- 구현체, 비교연산자를 지정하지 않고 자료형만 입력하면 기본적으로 내림차순으로 정렬이 된다.

2) 오름차순 (작은 값 먼저)

```
priority_queue<int, vector<int>, greater<int>> pq;
```

- 비교연산자에 `greater<int>` 를 사용하면 오름차순으로 정렬된다.

참고자료

박성빈, "알고리즘", 고려대학교, 2024년 7월 19일
정원기, "자료구조", 고려대학교, 2024년 7월 19일
유용재, "자료구조", 고려대학교, 2024년 7월 19일
https://velog.io/@hsshin0602/%ED%8C%8C%EC%9D%B4%EC%8D%AC-%EC%95%8C%EA%B3%A0%EB%A6%AC%EC%A6%98-%EC%9A%B0%EC%84%A0%EC%88%9C%EC%9C%84%ED%81%90priority-%ED%9E%99%ED%81%90heap
https://velog.io/@doorbals_512/C-priorityqueue-%EC%BB%A8%ED%85%8C%EC%9D%B4%EB%84%88-%EC%82%AC%EC%9A%A9%EB%B2%95