МИНОБРНАУКИ РОССИИ

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ

ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)

Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №2

по дисциплине «Анализ, моделирование и оптимизация систем»

Тема: Моделирование центра массового обслуживания

Студент гр. 1310	___________________	Комаров Д.Е.
Преподаватель	___________________	Мандрикова Б.С.

Санкт-Петербург

2025

Цель работы

Целью работы является изучение модели обслуживания заявок с неограниченной очередью.

Для достижения поставленной цели требуется решить следующие задачи:

1) изучить модель обслуживания заявок со схожими законами распределения потока заявок и обслуживания;

2) изучить модель обслуживания заявок с различными законами распределения потока заявок и обслуживания;

3) запрограммировать модель;

4) сравнить практические результаты с теоретическими.

Постановка задачи

Необходимо смоделировать систему обслуживания заявок с неограниченной очередью с пуассоновским потоком заявок (время отправки сообщения — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону) и тремя различными потоками обслуживания (время обслуживания — случайная величина, распределенная по равномерному, показательному или треугольному закону).

Провести эксперимент и выяснить практические характеристики модели.

Провести теоретический расчет этих параметров.

Оценить результаты.

Вариант 5: $\rho_1 = 0.45$; $\rho_2 = 0.85$; $N_1 = 1750$; $N_2 = 47500$.

Выполнение работы

Смоделируем систему обслуживания заявок с потоком заявок, в котором время между поступающими заявками распределено по экспоненциальному закону распределения, и потоком обслуживания, в котором время обслуживания распределено по равномерному закону распределения.

Пусь интенсивность потока заявок λ=0.15. Тогда, для приведенной интенсивности ρ = 0.45, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.45} = 0.33.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{об}}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.33} = 3.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{\sqrt{\frac{(2*3)^2}{12}}}{\overline{t_{\text{об}}}} = \frac{6}{3*2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2(1-\rho)} = \frac{0.45^2(1+\frac{1}{3})}{2(1-0.45)} = 0.25.$$

Среднее время ожидания в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2\lambda(1-\rho)} = 1.67.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался следующий код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты моделирования для равномерного потока обслуживания и ρ = 0.45

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT
1750	5	0.23	950	1.55	3.34	0.48	3.03
40000	8	0.24	22017	1.63	3.61	0.45	2.99
47500	8	0.25	26148	1.64	3.64	0.45	3
60000	8	0.25	33033	1.64	3.64	0.45	3

Продолжение таблицы 1

Теоретические значения		0.25		1.67			3

Как можно увидеть из таблицы 1 экспериментальные значения стремятся к теоретическом при увеличении длительности моделирования. Также экспериментально было выяснено, что примерное время переходного процесса составляет 300000, что соответствует 60000 обработанным заявкам.

Смоделируем аналогичную систему обслуживания заявок для приведенной интенсивности ρ = 0.85. Тогда, для интенсивности потока заявок λ=0.15, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.85} = 0.18.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{об}}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.18} = 5.67.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{\sqrt{\frac{(2*5.67)^2}{12}}}{\overline{t_{\text{об}}}} = \frac{11.34}{5.67*2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2(1-\rho)} = \frac{0.85^2(1+\frac{1}{3})}{2(1-0.85)} = 3.21.$$

Среднее время ожидания в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2\lambda(1-\rho)} = 21.41.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты моделирования для равномерного потока обслуживания и ρ = 0.85

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT
1750	22	3.16	1764	21.48	25.29	0.84	5.73
30000	33	3.16	4533	20.99	24.73	0.85	5.65
47500	33	3.21	7185	21.34	25.15	0.85	5.66
60000	40	3.28	9114	21.82	25.72	0.85	5.65
80000	40	3.22	12095	21.43	25.25	0.85	5.66
Теоретические значения		3.21		21.41			5.67

Как можно увидеть из таблицы 2 экспериментальные значения стремятся к теоретическом при увеличении длительности моделирования. Также экспериментально было выяснено, что примерное время переходного процесса составляет 500000, что соответствует 80000 обработанным заявкам.

Смоделируем систему обслуживания заявок с потоком заявок, в котором время между поступающими заявками распределено по экспоненциальному закону распределения, и потоком обслуживания, в котором время обслуживания распределено по экспоненциальному закону распределения.

Пусь интенсивность потока заявок λ=0.15. Тогда, для приведенной интенсивности ρ = 0.45, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.45} = 0.33.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{об}}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.33} = 3.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{1/\mu}{\overline{t_{\text{об}}}} = 1.$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2(1-\rho)} = \frac{0.45^2(1+1)}{2(1-0.45)} = 0.37.$$

Среднее время ожидания в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2\lambda(1-\rho)} = 2.45.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты моделирования для экспоненциального потока обслуживания и ρ = 0.45

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT
1750	6	0.29	1014	2.01	4.78	0.43	2.93
30000	11	0.35	16615	2.35	5.26	0.45	2.99
47500	13	0.36	26148	2.36	5.34	0.45	3
60000	13	0.37	33001	2.43	5.45	0.45	3
Теоретические значения		0.37		2.45			3

Как можно увидеть из таблицы 3 экспериментальные значения стремятся к теоретическом при увеличении длительности моделирования. Также экспериментально было выяснено, что примерное время переходного процесса составляет 400000, что соответствует 60000 обработанным заявкам.

Смоделируем аналогичную систему обслуживания заявок для приведенной интенсивности ρ = 0.85. Тогда, для интенсивности потока заявок λ=0.15, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.85} = 0.18.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{об}}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.18} = 5.67.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{1/\mu}{\overline{t_{\text{об}}}} = 1.$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2(1-\rho)} = \frac{0.85^2(1+1)}{2(1-0.85)} = 4.82.$$

Среднее время ожидания в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2\lambda(1-\rho)} = 32.1.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Результаты моделирования для экспоненциального потока обслуживания и ρ = 0.85

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT
1750	34	6.29	246	41.77	48.58	0.86	5.76
30000	36	4.53	4696	30.22	35.83	0.84	5.63
47500	36	4.57	7289	30.46	35.98	0.85	5.67
60000	63	4.9	9160	32.67	38.57	0.85	5.66
80000	63	4.8	12027	31.99	37.66	0.85	5.66
Теоретические значения		4.82		32.1			5.67

Как можно увидеть из таблицы 4 экспериментальные значения стремятся к теоретическом при увеличении длительности моделирования. Также экспериментально было выяснено, что примерное время переходного процесса составляет 500000, что соответствует 80000 обработанным заявкам.

Смоделируем систему обслуживания заявок с потоком заявок, в котором время между поступающими заявками распределено по экспоненциальному закону распределения, и потоком обслуживания, в котором время обслуживания распределено по треугольному закону распределения.

Пусь интенсивность потока заявок λ=0.15. Тогда, для приведенной интенсивности ρ = 0.45, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.45} = 0.33.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{об}}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.33} = 3.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{\sqrt{\frac{9^2}{18}}}{\overline{t_{\text{об}}}} = \frac{9}{3 * 3 * \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2(1-\rho)} = \frac{0.45^2(1+0.5)}{2(1-0.45)} = 0.28.$$

Среднее время ожидания в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2\lambda(1-\rho)} = 1.84.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Результаты моделирования для треугольного потока обслуживания и ρ = 0.45

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT
1750	6	0.25	978	1.69	3.84	0.43	2.96

Продолжение таблицы 5

30000	8	0.27	16475	1.81	4.02	0.45	3.01
47500	9	0.28	25983	1.87	4.14	0.45	3.01
60000	9	0.28	32684	1.89	4.15	0.45	3.02
Теоретические значения		0.28		1.84			3

Как можно увидеть из таблицы 5 экспериментальные значения стремятся к теоретическом при увеличении длительности моделирования. Также экспериментально было выяснено, что примерное время переходного процесса составляет 400000, что соответствует 60000 обработанным заявкам.

Смоделируем аналогичную систему обслуживания заявок для приведенной интенсивности ρ = 0.85. Тогда, для интенсивности потока заявок λ=0.15, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.85} = 0.18.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{об}}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.18} = 5.67.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{\sqrt{\frac{9^2}{18}}}{\overline{t_{\text{об}}}} = \frac{9}{3 * 3 * \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2(1-\rho)} = \frac{0.85^2(1+0.5)}{2(1-0.85)} = 3.61.$$

Среднее время ожидания в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{\rho^2(1+\vartheta^2)}{2\lambda(1-\rho)} = 24.08.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 6.

Таблица 6 – Результаты моделирования для треугольного потока обслуживания и ρ = 0.85

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT
1750	22	3.25	297	21.92	26.38	0.83	5.62
30000	31	3.41	4519	22.76	26.79	0.85	5.67
47500	37	3.61	6925	24.02	28.12	0.86	5.69
60000	37	3.6	8861	24	28.16	0.85	5.69
Теоретические значения		3.61		24.08			5.67

Как можно увидеть из таблицы 6 экспериментальные значения стремятся к теоретическом при увеличении длительности моделирования. Также экспериментально было выяснено, что примерное время переходного процесса составляет 400000, что соответствует 60000 обработанным заявкам.

Проведем 10 экспериментов для системы обслуживания заявок, в которой время между поступающими заявками и время обработки распределены по экспоненциальному закону с параметрами λ=0.15 и μ=0.33 соответственно. В каждом эксперименте обслужим 1750 заявок. Среднее время ожидания заявок ля каждого эксперимента представлено в таблице 7.

Таблица 7 – Результаты 10 экспериментов

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
QT	2.012	3.024	2.948	2.769	2.464	2.323	2.505	2.345	2.279	2.348

Вычислим среднее значения из данных 10 экспериментов по формуле

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} t_i = 2.5.$$

Также вычислим выборочное среднеквадратичное отклонение по формуле

$$\overline{\sigma_{\text{ож}}} = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(t_i - \overline{t_{\text{ож}}})^2} = 0.32.$$

Найдем доверительный интервал для уровня доверия 0.95

$$2.5 \pm 1.96 * \frac{0.32}{\sqrt{10}} = 2.5 \pm 0.19.$$

Ранее было вычислено теоретическое среднее время ожидания как 2.45. Таким образом теоретической значение находится внутри полученного доверительного интервала [2.31;2.69].

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы было проведено изучение систем кассового обслуживания с неограниченной очередью.

Были полученные как теоретические, так и экспериментальные характеристики систем массового обслуживания с потоками заявок на входе, в которых время между поступающими заявками распределено по экспоненциальному закону распределения, и потоками обслуживания, в котором время обслуживания распределено по равномерному, экспоненциальному, треугольному законам распределения. При увеличении длительности моделирования для всех моделируемых систем экспериментально полученные характеристики стремились к вычисленным теоретический.

Также для каждой системы обслуживания заявок экспериментальным путем было найдено примерное время переходного процесса.

Было проведено 10 экспериментов для системы обслуживания заявок, в которой время между поступающими заявками и время обработки распределены по экспоненциальному закону. Для этих 10 экспериментов было получено среднее время ожидания в очереди и доверительный интервал для него. Теоретическое значение оказалось внутри доверительного интервала.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
КОД ПРОГРАММЫ

Код моделирования для равномерного потока обслуживания и ρ = 0.45:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE RN1#6/999
GENERATE V$IN
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TERMINATE 1
START 1750
```

Код моделирования для равномерного потока обслуживания и ρ = 0.85:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE RN1#11.34/999
GENERATE V$IN
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TERMINATE 1
START 47500
```

Код моделирования для экспоненциального потока обслуживания и ρ = 0.45:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE -3#LOG((RN1+1)/1000)
GENERATE V$IN
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TERMINATE 1
START 1750
```

Код моделирования для экспоненциального потока обслуживания и ρ = 0.85:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE -5.67#LOG((RN1+1)/1000)
GENERATE V$IN
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TERMINATE 1
```

```
START 47500
```

Код моделирования для треугольного потока обслуживания и ρ = 0.45:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE 9#(1-SQR(RN1/999))
GENERATE V$IN
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TERMINATE 1
START 47500
```

Код моделирования для треугольного потока обслуживания и ρ = 0.85:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE 17.01#(1-SQR(RN1/999))
GENERATE V$IN
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TERMINATE 1
START 47500
```