

МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В. И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ
по ИДЗ
по дисциплине «Основы теории управления автономными системами»

Студент гр. 1310

Комаров Д. Е.

Преподаватель

Филатов А. Ю.

Санкт-Петербург

2025

Постановка задачи

В ходе выполнения ИДЗ необходимо:

- 1) записать передаточную функцию разомкнутой системы;
- 2) разбить эту функцию на произведение "типовых" звеньев, нарисовать её ЛАЧХ;
- 3) добавить отрицательную обратную связь, записать передаточную функцию полной системы с отрицательной обратной связью;
- 4) разбить эту функцию на произведение "типовых" звеньев, нарисовать её ЛАЧХ;
- 5) оценить точность системы – реакцию на ступенчатый входной сигнал и сделать вывод о том, является ли система точной при $t \rightarrow \infty$;
- 6) оценить устойчивость системы двумя способами:
 - 6.1) разбить передаточную функцию на простейшие и проверить положительные / отрицательные полюса,
 - 6.2) применить Критерий Найквиста для ЛАЧХ;
- 7) добавить в систему регулятор, который позволит из устойчивой системы сделать неустойчивую (если система получилась устойчивой), или из неустойчивой сделать устойчивую (если система получилась неустойчивой).

Вариант 25. Дифференциальное уравнение записывается как

$$-6x''' + 7x'' + 5x' + 5x = -8y'''' - 10y''' - 8y'' + 6y' + 10y + 8y.$$

Выполнение работы

1 Передаточная функция разомкнутой системы

Имеется дифференциальное уравнение разомкнутой системы

$$-6x''' + 7x'' + 5x' + 5x = -8y'''' - 10y''' - 8y'' + 6y' + 10y + 8y.$$

Сделаем преобразования Лапласа, получится

$$\begin{aligned} -6s^3X(s) + 7s^2X(s) + 5sX(s) + 5X(s) &= \\ &= -8s^5Y(s) - 10s^4Y(s) - 8s^3Y(s) + 6s^2Y(s) + 10sY(s) + 8Y(s). \end{aligned}$$

Передаточная функция разомкнутой системы записывается как

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-6s^3 + 7s^2 + 5s + 5}{-8s^5 - 10s^4 - 8s^3 + 6s^2 + 10s + 8}. \quad (1)$$

2 Разбиение передаточной функции разомкнутой системы на типовые звенья, построение ЛАФЧХ

Разобьём передаточную функцию разомкнутой системы на произведение типовых звеньев. Для этого разложим числитель и знаменатель передаточной функции (1) на множители

$$W(s) = \frac{-6(s - 1.86)(s^2 + 0.69s + 0.45)}{-8(s - 0.97)(s^2 + 1.44s + 0.91)(s^2 + 0.79s + 1.13)}.$$

Перепишем полученное выражение так, чтобы свободные члены стали равны 1

$$W(s) = 0.63 \frac{(0.54s - 1)(2.2s^2 + 1.53s + 1)}{(1.03s - 1)(1.1s^2 + 1.58s + 1)(0.88s^2 + 0.7s + 1)}.$$

Распишем полученное выражение как произведение типовых звеньев. Получится

$$W(s) = 0.63 * (0.54s - 1) * \frac{1}{1.03s - 1} * \quad (2)$$

$$* \frac{1}{1.05^2 s^2 + 2 * 0.75 * 1.05s + 1} * \frac{1}{0.94^2 s^2 + 2 * 0.37 * 0.94s + 1}$$

$$* (1.48^2 s^2 + 2 * 0.52 * 1.48s + 1).$$

Таким образом, разомкнутая система состоит из последовательного соединения безынерционного звена, обратного неустойчивого апериодического звена первого порядка, неустойчивого апериодического звена первого порядка, двух колебательных звеньев и обратного колебательного звена.

Запишем ЛАЧХ для при помощи формулы

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(|W(j\omega)|) = 20 \log_{10}(0.63) +$$

$$+ 20 \log_{10}(\sqrt{0.54^2 \omega^2 + 1}) - 20 \log_{10}(\sqrt{1.03^2 \omega^2 + 1}) -$$

$$- 20 \log_{10}(\sqrt{(1 - 1.05^2 \omega^2)^2 + (2 * 0.75 * 1.05 \omega)^2}) -$$

$$- 20 \log_{10}(\sqrt{(1 - 0.94^2 \omega^2)^2 + (2 * 0.37 * 0.94 \omega)^2}) +$$

$$+20 \log_{10}(\sqrt{(1 - 1.48^2 \omega^2)^2 + (2 * 0.52 * 1.48 \omega)^2}).$$

Сопрягающие частоты представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Сопрягающие частоты ЛАЧХ разомкнутой системы

| Звено | Сопрягающая частота | Наклон ЛАЧХ |
|---|---------------------|-------------|
| 0.63 | 0 | 0 Дб/дек |
| $1.48^2 s^2 + 2 * 0.52 * 1.48s + 1$ | 0.68 | +40 Дб/дек |
| $\frac{1}{1.05^2 s^2 + 2 * 0.75 * 1.05s + 1}$ | 0.95 | 0 Дб/дек |
| $\frac{1}{1.03s - 1}$ | 0.97 | -20 Дб/дек |
| $\frac{1}{0.94^2 s^2 + 2 * 0.37 * 0.94s + 1}$ | 1.06 | -60 Дб/дек |
| $0.54s - 1$ | 1.85 | -40 Дб/дек |

Запишем ЛФЧХ при помощи формулы

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) = \arg(W(i\omega)) = & -\arctg(0.54\omega) + \arctg(1.03\omega) - \\ & -\arctg\left(\frac{2 * 0.75 * 1.05\omega}{1 - 1.05^2 \omega^2}\right) - \arctg\left(\frac{2 * 0.37 * 0.94\omega}{1 - 0.94^2 \omega^2}\right) + \\ & + \arctg\left(\frac{2 * 0.52 * 1.48\omega}{1 - 1.48^2 \omega^2}\right). \end{aligned}$$

График ЛАФЧХ представлен на рисунке 1. Синей линией обозначен график ЛФЧХ, красной – асимптотическая ЛАЧХ, красной пунктирной – точная ЛАЧХ. Слева отображена ось ЛАЧХ, справа – ось ЛФЧХ. Ось ЛФЧХ перевернута и 0 на оси ЛАЧХ соответствует -180° на оси ЛФЧХ.

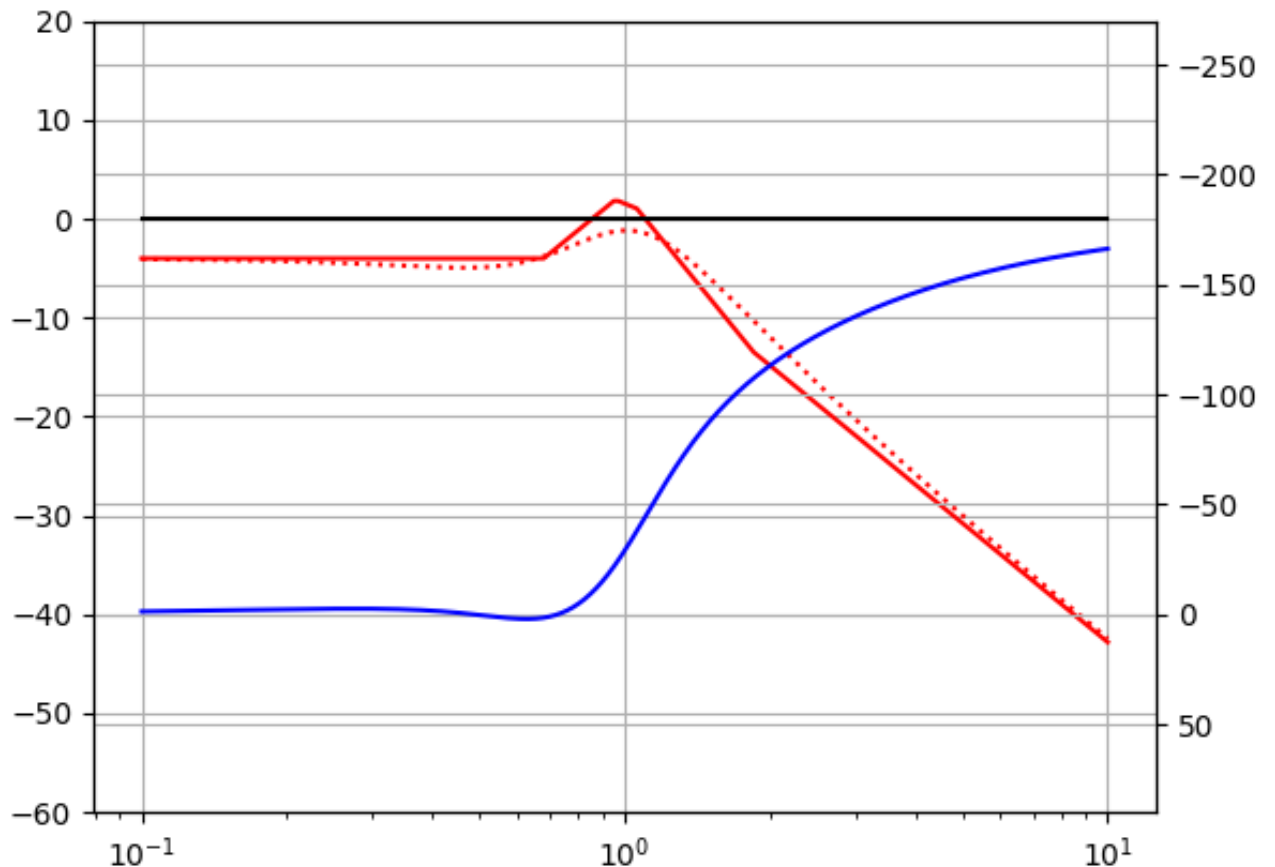


Рисунок 1 – ЛАФЧХ разомкнутой системы

3 Передаточная функция замкнутой системы

Запишем передаточную функцию замкнутой системы, добавив отрицательную обратную связь. Для этого подставим (1) в формулу

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{-6s^3 + 7s^2 + 5s + 5}{-8s^5 - 10s^4 - 14s^3 + 13s^2 + 15s + 13}. \quad (3)$$

4 Разбиение передаточной функции замкнутой системы на типовые звенья, построение ЛАФЧХ

Разобьём передаточную функцию замкнутой системы на произведение типовых звеньев. Для этого разложим числитель и знаменатель передаточной функции (3) на множители

$$\Phi(s) = \frac{-6(s - 1.86)(s^2 + 0.69s + 0.45)}{-8(s - 1.09)(s^2 + 1.42s + 2.37)(s^2 + 0.92s + 0.63)}.$$

Перепишем полученное выражение так, чтобы свободные члены стали равны 1

$$\Phi(s) = 0.39 \frac{(0.54s - 1)(2.2s^2 + 1.53s + 1)}{(0.92s - 1)(0.42s^2 + 0.6s + 1)(1.59s^2 + 1.46s + 1)}.$$

Распишем полученное выражение как произведение типовых звеньев.

Получится

$$\begin{aligned} \Phi(s) = & 0.39 * (0.54s - 1) * \frac{1}{0.92s - 1} * \\ & * \frac{1}{0.65^2s^2 + 2 * 0.46 * 0.65s + 1} * \frac{1}{1.26^2s^2 + 2 * 0.58 * 1.26s + 1} * \\ & * (1.48^2s^2 + 2 * 0.52 * 1.48s + 1). \end{aligned}$$

Таким образом, замкнутая система состоит из последовательного соединения безынерционного звена, обратного неустойчивого апериодического звена первого порядка, неустойчивого апериодического звена первого порядка, двух колебательных звеньев и обратного колебательного звена.

Запишем ЛАЧХ для при помощи формулы

$$\begin{aligned} A(\omega) = & 20 \log_{10}(|W(j\omega)|) = 20 \log_{10}(0.39) + \\ & + 20 \log_{10}(\sqrt{0.54^2\omega^2 + 1}) - 20 \log_{10}(\sqrt{0.92^2\omega^2 + 1}) - \\ & - 20 \log_{10}(\sqrt{(1 - 0.65^2\omega^2)^2 + (2 * 0.46 * 0.65\omega)^2}) - \\ & - 20 \log_{10}(\sqrt{(1 - 1.26^2\omega^2)^2 + (2 * 0.58 * 1.26\omega)^2}) + \\ & + 20 \log_{10}(\sqrt{(1 - 1.48^2\omega^2)^2 + (2 * 0.52 * 1.48\omega)^2}). \end{aligned}$$

Сопрягающие частоты представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Сопрягающие частоты ЛАЧХ замкнутой системы

| Звено | Сопрягающая частота | Наклон ЛАЧХ |
|--|---------------------|-------------|
| 0.39 | 0 | 0 Дб/дек |
| $1.48^2s^2 + 2 * 0.52 * 1.48s + 1$ | 0.68 | +40 Дб/дек |
| $\frac{1}{1.26^2s^2 + 2 * 0.58 * 1.26s + 1}$ | 0.79 | 0 Дб/дек |
| $\frac{1}{0.92s - 1}$ | 1.09 | -20 Дб/дек |

Продолжение таблицы 2

| | | |
|--|------|------------|
| $\frac{1}{0.65^2 s^2 + 2 * 0.46 * 0.65 s + 1}$ | 1.54 | -60 Дб/дек |
| $0.54 s - 1$ | 1.85 | -40 Дб/дек |

Запишем ЛФЧХ при помощи формулы

$$\varphi(\omega) = \arg(W(i\omega)) = -\arctg(0.54\omega) + \arctg(0.92\omega) - \\ -\arctg\left(\frac{2 * 0.46 * 0.65\omega}{1 - 0.65^2\omega^2}\right) - \arctg\left(\frac{2 * 0.58 * 1.26\omega}{1 - 1.26^2\omega^2}\right) + \\ + \arctg\left(\frac{2 * 0.52 * 1.48\omega}{1 - 1.48^2\omega^2}\right).$$

График ЛАФЧХ представлен на рисунке 2. Синей линией обозначен график ЛФЧХ, красной – асимптотическая ЛАЧХ, красной пунктирной – точная ЛАЧХ. Слева отображена ось ЛАЧХ, справа – ось ЛФЧХ.

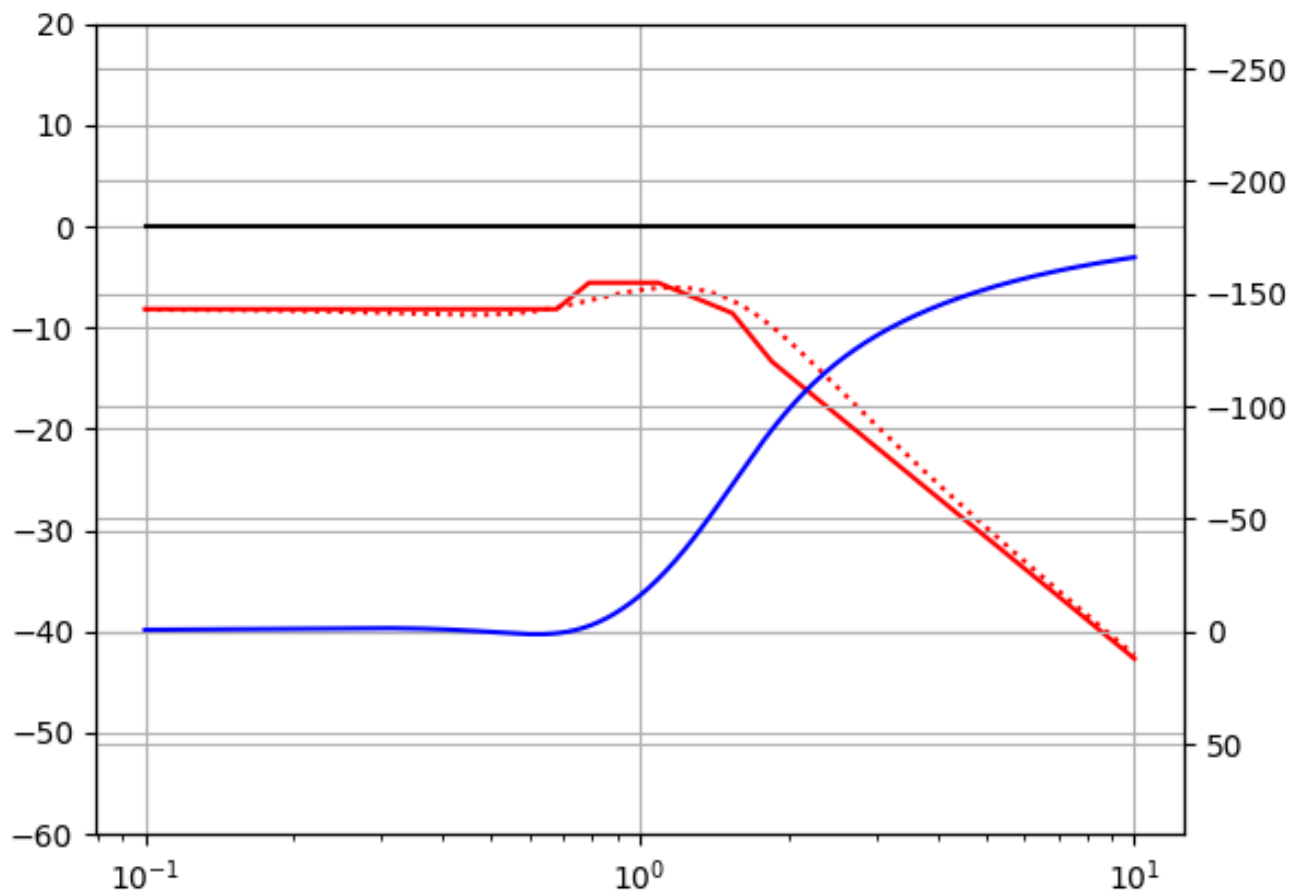


Рисунок 2 – ЛАФЧХ замкнутой системы

5 Оценка точности системы

Оценим точность системы. Для этого рассмотрим ее реакцию на единичный ступенчатый сигнал

$$x(t) = 1(t).$$

Его изображение

$$X(s) = \frac{1}{s}.$$

Запишем передаточную функцию по ошибке, подставив (1) в формулу

$$\Phi_e(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{-8s^5 - 10s^4 - 8s^3 + 6s^2 + 10s + 8}{-8s^5 - 10s^4 - 14s^3 + 13s^2 + 15s + 13}.$$

Изображение сигнала ошибки будет

$$E(s) = \Phi_e(s)X(s) = \frac{-8s^5 - 10s^4 - 8s^3 + 6s^2 + 10s + 8}{-8s^6 - 10s^5 - 14s^4 + 13s^3 + 15s^2 + 13s}.$$

Разложим знаменатель сигнала ошибки на множители. Получится

$$E(s) = \frac{s^5 + 1.25s^4 + s^3 - 0.75s^2 - 1.25s - 1}{(s - 1.09)(s^2 + 1.42s + 2.37)(s^2 + 0.92s + 0.63)s}.$$

Перепишем полученное выражение как сумму дробей

$$E(s) = \frac{-0.2s - 0.03}{s^2 + 0.92s + 0.63} + \frac{0.5s + 0.47}{s^2 + 1.42s + 2.37} + \frac{0.09}{s - 1.09} + \frac{0.61}{s}.$$

Перепишем выражение как

$$E(s) = -0.2 \frac{s + 0.46}{(s + 0.46)^2 + 0.65^2} + 0.09 \frac{0.65}{(s + 0.46)^2 + 0.65^2} + \\ + 0.5 \frac{s + 0.71}{(s + 0.71)^2 + 1.37^2} + 0.09 \frac{1.37}{(s + 0.71)^2 + 1.37^2} + \frac{0.09}{s - 1.09} + \\ + \frac{0.61}{s}.$$

Сделаем обратное преобразование Лапласа. Получится

$$e(t) = -0.2e^{-0.46t} * \cos(0.65t) + 0.5e^{-0.71t} * \cos(1.37t) + \\ + 0.09e^{-0.46t} * \sin(0.65t) + 0.09e^{-0.71t} * \sin(1.37t) + \\ + 0.09e^{1.09t} + 0.61.$$

Найдем установившуюся ошибку при помощи формулы

$$e_{\text{уст}} = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \infty.$$

Как можно заметить, ошибка с течением времени бесконечно увеличивается, следовательно система не является точной.

6 Оценка устойчивости системы

6.1 Оценка устойчивости разомкнутой системы

Рассмотрим передаточную функции разомкнутой системы (2). Как можно заметить, звено

$$\frac{1}{1.03s - 1}.$$

имеет положительный корень 0.97, из чего следует, что разомкнутая система неустойчива.

6.2 Оценка устойчивости замкнутой системы

Для оценки устойчивости замкнутой системы применим критерии Найквиста для ЛАФЧХ. Условием устойчивости является

$$n_{(+)} - n_{(-)} = \frac{l}{2}, \quad (4)$$

где $n_{(+)}$ и $n_{(-)}$ – количество положительных и отрицательных переходов ЛФЧХ через -180° левее частоты среза, а l – количество корней знаменателя передаточной функции разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.

Как было выяснено в пункте 6.1, в правой полуплоскости имеется 1 корень, следовательно $l=1$.

Рассмотрим рисунок 1. График точной ЛАЧХ не пересекает ось 0 Дб. Следовательно частота среза отсутствует и $n_{(+)}=n_{(-)}=0$. График асимптотической ЛАЧХ пересекает ось 0 Дб сверху вниз при частоте 1.1, однако ЛФЧХ не делает левее ее переходов через -180° , а следовательно, $n_{(+)}=n_{(-)}=0$. Подставив в (4) получим

$$0 - 0 = \frac{1}{2}.$$

Условие не выполняется, следовательно система неустойчива.

7 Добавление регулятора

Добавим в систему регулятор, чтобы система стала устойчивой. Таким регулятором будет

$$W_{\text{рег}}(s) = \frac{1}{s^2}.$$

Запишем передаточную функцию новой системы, путём умножения (2) на передаточную функцию регулятора

$$W_2(s) = W(s)W_{\text{рег}}(s) = 0.63 * \frac{1}{s^2} * (0.54s - 1) * \frac{1}{1.03s - 1} * \\ * \frac{1}{1.05^2 s^2 + 2 * 0.75 * 1.05s + 1} * \frac{1}{0.94^2 s^2 + 2 * 0.37 * 0.94s + 1} * \\ * (1.48^2 s^2 + 2 * 0.52 * 1.48s + 1)$$

Поскольку корень в правой полуплоскости остался, разомкнутая система неустойчива.

Запишем ЛАЧХ для при помощи формулы

$$A(\omega) = 20 \log_{10}(|W(j\omega)|) = 20 \log_{10}(0.63) - 40 \log_{10}(\omega) \\ + 20 \log_{10}(\sqrt{0.54^2 \omega^2 + 1}) - 20 \log_{10}(\sqrt{1.03^2 \omega^2 + 1}) - \\ - 20 \log_{10}(\sqrt{(1 - 1.05^2 \omega^2)^2 + (2 * 0.75 * 1.05 \omega)^2}) - \\ - 20 \log_{10}(\sqrt{(1 - 0.94^2 \omega^2)^2 + (2 * 0.37 * 0.94 \omega)^2}) + \\ + 20 \log_{10}(\sqrt{(1 - 1.48^2 \omega^2)^2 + (2 * 0.52 * 1.48 \omega)^2}).$$

Сопрягающие частоты представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Сопрягающие частоты ЛАЧХ после добавления регулятора

| Звено | Сопрягающая частота | Наклон ЛАЧХ |
|---|---------------------|-------------|
| $\frac{0.63}{s^2}$ | 0 | -40 Дб/дек |
| $1.48^2 s^2 + 2 * 0.52 * 1.48s + 1$ | 0.68 | 0 Дб/дек |
| $\frac{1}{1.05^2 s^2 + 2 * 0.75 * 1.05s + 1}$ | 0.95 | -40 Дб/дек |
| $\frac{1}{1.03s - 1}$ | 0.97 | -60 Дб/дек |

Продолжение таблицы 3

| | | |
|--|------|-------------|
| $\frac{1}{0.94^2 s^2 + 2 * 0.37 * 0.94 s + 1}$ | 1.06 | -100 Дб/дек |
| $0.54 s - 1$ | 1.85 | -80 Дб/дек |

Запишем ЛФЧХ помощи формулы

$$\varphi(\omega) = \arg(W(i\omega)) = -180^\circ - \arctg(0.54\omega) + \arctg(1.03\omega) - \\ - \arctg\left(\frac{2 * 0.75 * 1.05\omega}{1 - 1.05^2\omega^2}\right) - \arctg\left(\frac{2 * 0.37 * 0.94\omega}{1 - 0.94^2\omega^2}\right) + \\ + \arctg\left(\frac{2 * 0.52 * 1.48\omega}{1 - 1.48^2\omega^2}\right).$$

График ЛАФЧХ представлен на рисунке 3. Синей линией обозначен график ЛФЧХ, красной – асимптотическая ЛАЧХ, красной пунктирной – точная ЛАЧХ. Слева отображена ось ЛАЧХ, справа – ось ЛФЧХ. Ось ЛФЧХ перевернута и 0 на оси ЛАЧХ соответствует -180° на оси ЛФЧХ.

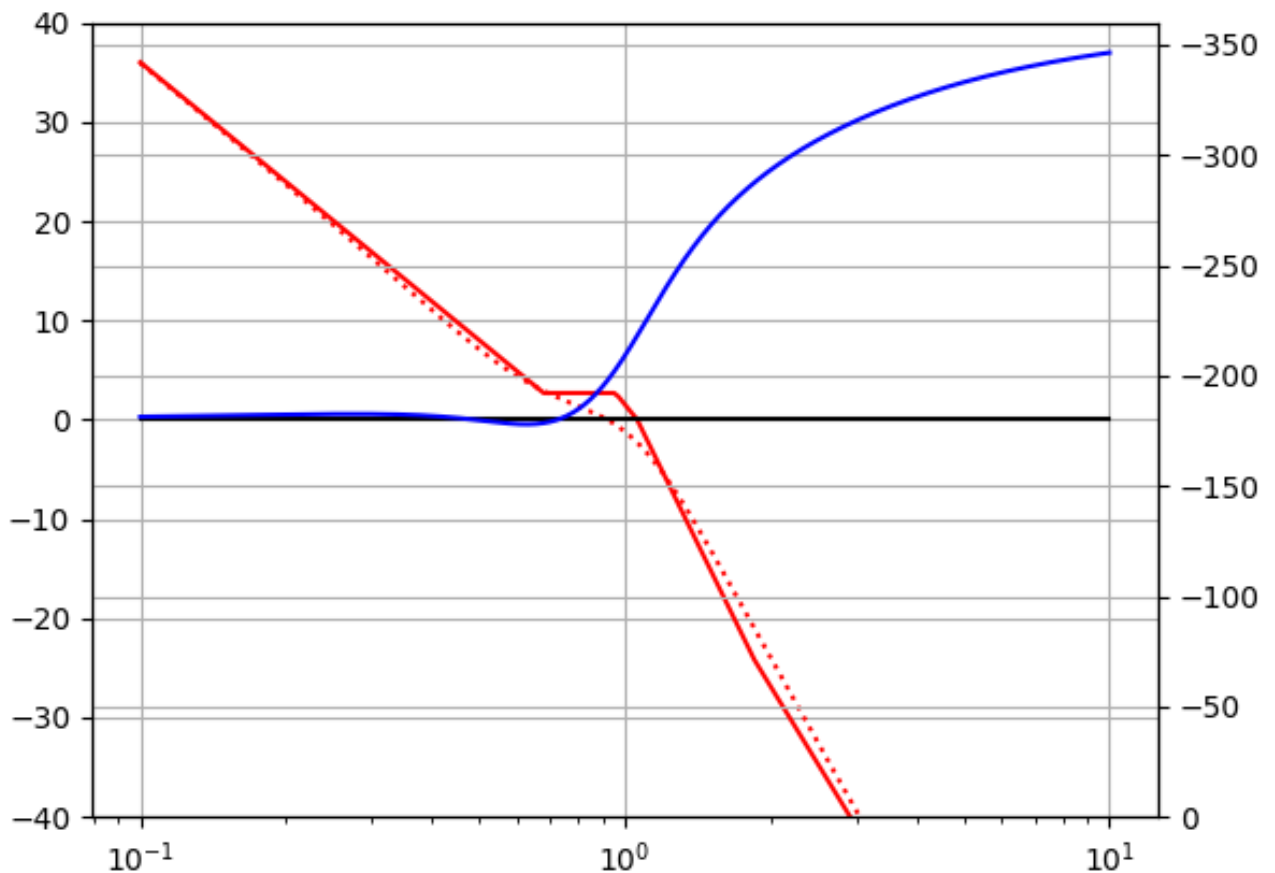


Рисунок 3 – ЛАФЧХ после добавления регулятора

В правой полуплоскости имеется 1 корень, следовательно $l=1$. ЛФЧХ выходит из -180° , поэтому в левую часть условия (4) добавляется 0.5. Также ЛФЧХ делает 2 перехода через -180° левее частоты среза: положительный и отрицательный. Подставив в (4) получим

$$0.5 + 1 - 1 = \frac{1}{2}.$$

Условие выполняется, следовательно замкнутая система устойчива.

Выводы

В ходе выполнения ИДЗ была проведена анализ системы управления. Были получены передаточные функции разомкнутой и замкнутой системы, построены ЛАФЧХ.

Было выяснено, что система не является точной, поскольку при подаче на нее единичного сигнала ошибка стремилась к бесконечности.

Было выяснено, что разомкнутая система не является устойчивой, поскольку в ее знаменателе имеются корни в положительной полуплоскости. Также, используя критерий Найквиста для ЛАФЧХ было выяснено, что замкнутая система также не является устойчивой.

Чтобы сделать систему устойчивой, в нее был добавлен регулятор. После его добавления замкнутая система стала устойчивой.