МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра математического обеспечения и применения ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №3
по дисциплине «Анализ, моделирование и оптимизация систем»
Тема: Моделирование центра массового обслуживания с ограниченной очередью

Студент гр. 1310	___________________	Комаров Д.Е.
Преподаватель	___________________	Мандрикова Б.С.

Санкт-Петербург
2025

Цель работы

Целью работы является изучение модели обслуживания заявок с ограниченной очередью.

Для достижения поставленной цели требуется решить следующие задачи:

1) изучить модель обслуживания заявок со схожими законами распределения потока заявок и обслуживания;

2) изучить модель обслуживания заявок с различными законами распределения потока заявок и обслуживания;

3) запрограммировать модель;

4) сравнить практические результаты с теоретическими.

Постановка задачи

Необходимо смоделировать систему обслуживания заявок с ограниченной очередью и пуассоновским потоком заявок (время отправки сообщения — случайная величина, распределенная по экспоненциальному закону) и тремя различными потоками обслуживания (время обслуживания — случайная величина, распределенная по равномерному, показательному или треугольному закону).

Провести эксперимент и выяснить практические характеристики модели.

Провести теоретический расчет этих параметров.

Оценить результаты.

Вариант 5: $\rho_1 = 0.45$; $\rho_2 = 0.85$; $N_1 = 1750$; $N_2 = 47500$.

Выполнение работы

Смоделируем систему обслуживания заявок с ограниченной очередью и потоком заявок, в котором время между поступающими заявками распределено по экспоненциальному закону распределения, и потоком обслуживания, в котором время обслуживания распределено по равномерному закону распределения.

Пусть длинна очереди m=1, интенсивность потока заявок λ=0.15. Тогда, для приведенной интенсивности p=0.45, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.45} = 0.33.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{об}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.33} = 3.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{\sqrt{\frac{(2*3)^2}{12}}}{\overline{t_{об}}} = \frac{6}{3*2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Вероятность отказа вычисляется по формуле

$$p_{отк} = \frac{1-p}{1-p^{m+2}}p^{m+1} = \frac{1-0.45}{1-0.45^{1+2}}0.45^{1+1} = 0.12.$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{p^2\big(1-p^m(m-mp+1)\big)(1+\vartheta^2)}{2(1-p^{m+2})(1-p)} =$$

$$= \frac{0.45^2(1-0.45^1(1-0.45+1))(1+\frac{1}{3})}{2(1-0.45^{1+2})(1-0.45)} = 0.08.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{ож}} = \frac{p^2(1-p^m(m-mp+1))(1+\vartheta^2)}{2\lambda(1-p^{m+2})(1-p)} = 0.54.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался следующий код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 1.

Таблица 1 – Результаты моделирования для равномерного потока обслуживания и p=0.45

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT	M	M/N
1750	1	0.1	1042	0.7	2.06	0.4	2.98	174	0.1

Продолжение таблицы 1

47500	1	0.1	28323	0.72	2.12	0.41	3.01	4610	0.1
Теоретические значения		0.08		0.54			3		0.12

Как можно увидеть из таблицы 1 экспериментальные и теоретические значения имеют существенные различия, что объясняется большой погрешностью теоретических вычислений.

Смоделируем аналогичную систему обслуживания заявок для приведенной интенсивности p=0.85 и очереди длинной m=3. Тогда, для интенсивности потока заявок λ=0.15, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.85} = 0.18.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{об}}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.18} = 5.67.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{\sqrt{\frac{(2*5.67)^2}{12}}}{\overline{t_{\text{об}}}} = \frac{11.34}{5.67*2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Вероятность отказа вычисляется по формуле

$$p_{\text{отк}} = \frac{1-p}{1-p^{m+2}}p^{m+1} = \frac{1-0.85}{1-0.85^{3+2}}0.85^{3+1} = 0.14.$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{p^2\big(1-p^m(m-mp+1)\big)(1+\vartheta^2)}{2(1-p^{m+2})(1-p)} =$$

$$= \frac{0.85^2(1-0.85^3(3-3*0.85+1))(1+\frac{1}{3})}{2(1-0.85^{3+2})(1-0.85)} = 0.63.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{p^2(1 - p^m(m - mp + 1))(1 + \vartheta^2)}{2\lambda(1 - p^{m+2})(1 - p)} = 4.21.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 2.

Таблица 2 – Результаты моделирования для равномерного потока обслуживания и *p*=0.85

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT	M	M/N
1750	3	0.91	396	6.76	9.02	0.76	5.66	170	0.1
47500	3	0.9	11220	6.66	9.04	0.76	5.68	4865	0.1
Теоретические значения		0.63		4.21			5.67		0.14

Как можно увидеть из таблицы 2 экспериментальные и теоретические значения имеют существенные различия, что объясняется большой погрешностью теоретических вычислений.

Смоделируем систему обслуживания заявок с ограниченной очередью и потоком заявок, в котором время между поступающими заявками распределено по экспоненциальному закону распределения, и потоком обслуживания, в котором время обслуживания распределено по экспоненциальному закону распределения.

Пусь интенсивность потока заявок λ=0.15 и максимальная длинна очереди m=1. Тогда, для приведенной интенсивности p=0.45, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.45} = 0.33.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{об}}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.33} = 3.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{1/\mu}{\overline{t_{об}}} = 1.$$

Вероятность отказа вычисляется по формуле

$$p_{отк} = \frac{1-p}{1-p^{m+2}}p^{m+1} = \frac{1-0.45}{1-0.45^{1+2}}0.45^{1+1} = 0.12.$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{p^2\big(1-p^m(m-mp+1)\big)(1+\vartheta^2)}{2(1-p^{m+2})(1-p)} =$$

$$= \frac{0.45^2(1-0.45^1(1-0.45+1))(1+1)}{2(1-0.45^{1+2})(1-0.45)} = 0.12.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{ож}} = \frac{p^2(1-p^m(m-mp+1))(1+\vartheta^2)}{2\lambda(1-p^{m+2})(1-p)} = 0.82.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 3.

Таблица 3 – Результаты моделирования для экспоненциального потока обслуживания и *p*=0.45

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT	M	M/N
1750	1	0.12	1059	0.95	3.09	0.39	3.04	220	0.13
47500	1	0.12	28810	0.92	2.98	0.39	2.99	5727	0.12
Теоретические значения		0.12		0.82			3		0.12

Как можно увидеть из таблицы 3 экспериментальные значения стремятся к теоретическом при увеличении длительности моделирования.

Смоделируем аналогичную систему обслуживания заявок для приведенной интенсивности *p*=0.85 и максимальной длинны очереди *m*=5. Тогда, для интенсивности потока заявок λ=0.15, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.85} = 0.18.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{об}}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.18} = 5.67.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{1/\mu}{\overline{t_{\text{об}}}} = 1.$$

Вероятность отказа вычисляется по формуле

$$p_{\text{отк}} = \frac{1-p}{1-p^{m+2}} p^{m+1} = \frac{1-0.85}{1-0.85^{5+2}} 0.85^{5+1} = 0.08.$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{p^2\big(1-p^m(m-mp+1)\big)(1+\vartheta^2)}{2(1-p^{m+2})(1-p)} =$$

$$= \frac{0.85^2(1-0.85^5(5-5*0.85+1))(1+1)}{2(1-0.85^{5+2})(1-0.85)} = 1.58.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{p^2(1-p^m(m-mp+1))(1+\vartheta^2)}{2\lambda(1-p^{m+2})(1-p)} = 10.56.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 4.

Таблица 4 – Результаты моделирования для экспоненциального потока обслуживания и *p*=0.85

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT	M	M/N
1750	5	1.59	401	11.78	15.68	0.77	5.71	143	0.08
47500	5	1.58	10483	11.47	15.08	0.78	5.64	3683	0.08
Теоретические значения		1.58		10.56			5.67		0.08

Как можно увидеть из таблицы 4 экспериментальные значения стремятся к теоретическом при увеличении длительности моделирования.

Смоделируем систему обслуживания заявок с потоком заявок, в котором время между поступающими заявками распределено по экспоненциальному закону распределения, и потоком обслуживания, в котором время обслуживания распределено по треугольному закону распределения.

Пусь интенсивность потока заявок λ=0.15 и максимальная длинна очереди m=1. Тогда, для приведенной интенсивности p=0.45, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.45} = 0.33.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{об}}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.33} = 3.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{\sqrt{\frac{9^2}{18}}}{\overline{t_{\text{об}}}} = \frac{9}{3 * 3 * \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Вероятность отказа вычисляется по формуле

$$p_{\text{отк}} = \frac{1-p}{1-p^{m+2}} p^{m+1} = \frac{1-0.45}{1-0.45^{1+2}} 0.45^{1+1} = 0.12.$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{p^2\big(1-p^m(m-mp+1)\big)(1+\vartheta^2)}{2(1-p^{m+2})(1-p)} =$$

$$= \frac{0.45^2(1-0.45^1(1-0.45+1))(1+\frac{1}{2})}{2(1-0.45^{1+2})(1-0.45)} = 0.09.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{p^2(1-p^m(m-mp+1))(1+\vartheta^2)}{2\lambda(1-p^{m+2})(1-p)} = 0.6.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 5.

Таблица 5 – Результаты моделирования для треугольного потока обслуживания и p=0.45

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT	M	M/N
1750	1	0.1	1053	0.77	2.4	0.39	3	198	0.11
47500	1	0.1	28399	0.79	2.38	0.4	3	5012	0.11
Теоретические значения		0.09		0.6			3		0.12

Как можно увидеть из таблицы 5 экспериментальные и теоретические значения имеют существенные различия, что объясняется большой погрешностью теоретических вычислений.

Смоделируем аналогичную систему обслуживания заявок для приведенной интенсивности p=0.85 максимальной длинны очереди m=4. Тогда, для интенсивности потока заявок λ=0.15, интенсивность потока обслуживания может быть вычислена как

$$\mu = \frac{\lambda}{\rho} = \frac{0.15}{0.85} = 0.18.$$

Среднее время обслуживания заявки вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{об}}} = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0.18} = 5.67.$$

Коэффициент вариации времени обслуживания вычисляется по формуле

$$\vartheta = \frac{\sqrt{\frac{5.67^2}{18}}}{\overline{t_{\text{об}}}} = \frac{3 * 5.67}{5.67 * 3 * \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Вероятность отказа вычисляется по формуле

$$p_{\text{отк}} = \frac{1-p}{1-p^{m+2}} p^{m+1} = \frac{1-0.85}{1-0.85^{4+2}} 0.85^{4+1} = 0.11$$

Среднее число заявок в очереди вычисляется по формуле

$$\bar{r} = \frac{p^2\big(1 - p^m(m - mp + 1)\big)(1 + \vartheta^2)}{2(1 - p^{m+2})(1 - p)} =$$

$$= \frac{0.85^2(1 - 0.85^4(4 - 4 * 0.85 + 1))(1 + \frac{1}{2})}{2(1 - 0.85^{4+2})(1 - 0.85)} = 0.96.$$

Среднее время ожидания заявки в очереди вычисляется по формуле

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{p^2(1 - p^m(m - mp + 1))(1 + \vartheta^2)}{2\lambda(1 - p^{m+2})(1 - p)} = 6.37.$$

Проведем моделирование данной системы обслуживания заявок. Для моделирования использовался код, представленный в приложении А. Результаты моделирования представлены в таблице 6.

Таблица 6 – Результаты моделирования для треугольного потока обслуживания и *p*=0.85

N	QM	QA	QZ	QT	QX	FR	FT	M	M/N
1750	4	1.39	329	10.06	12.71	0.81	5.85	172	0.1
47500	4	1.23	10278	8.92	11.67	0.78	5.68	3850	0.08
Теоретические значения		0.96		6.37			5.67		0.11

Как можно увидеть из таблицы 6 экспериментальные и теоретические значения имеют существенные различия, что объясняется большой погрешностью теоретических вычислений.

Проведем 10 экспериментов для системы обслуживания заявок с очередью длинной *m*=1, в которой время между поступающими заявками и время обработки распределены по экспоненциальному закону с параметрами λ=0.15 и μ=0.33 соответственно. В каждом эксперименте обслужим 1750 заявок. Среднее время ожидания заявок и вероятность отказа для каждого эксперимента представлено в таблице 7.

Таблица 7 – Результаты 10 экспериментов

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
QT	0.951	0.857	0.987	0.895	0.986	0.938	1.029	0.923	0.882	0.951

Продолжение таблицы 7

M/N	0.112	0.113	0.138	0.111	0.129	0.13	0.149	0.121	0.113	0.126

Вычислим средние значения из данных 10 экспериментов по формулам

$$\overline{t_{\text{ож}}} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} t_i = 0.94,$$

$$\overline{p_{\text{отк}}} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} p_i = 0.12,$$

Также вычислим выборочное среднеквадратичное отклонение по формуле

$$\overline{\sigma_{\text{ож}}} = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(t_i - \overline{t_{\text{ож}}})^2} = 0.05,$$

$$\overline{\sigma_{\text{отк}}} = \sqrt{\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(p_i - \overline{p_{\text{отк}}})^2} = 0.01.$$

Найдем доверительные интервалы для уровня доверия 0.95

$$0.94 \pm 1.96 * \frac{0.05}{\sqrt{10}} = 0.94 \pm 0.03,$$

$$0.12 \pm 1.96 * \frac{0.01}{\sqrt{10}} = 0.12 \pm 0.01.$$

Ранее было вычислено теоретическое среднее время ожидания как 0.82 и вероятность отказа как 0.12. Таким образом теоретической значение вероятности отказа находится внутри полученного доверительного интервала [0.11;0.13], а теоретическое значение среднего времени ожидания находится за пределами доверительного интервала [0.91;0.97]

Выводы

В ходе выполнения лабораторной работы были изучены модели обслуживания заявок с ограниченной очередью. Были проведены теоретические вычисления различных характеристик данных систем. Также было проведено моделирование, в результате которого были получены экспериментальные значения характеристик. Для систем обслуживания заявок с экспоненциальным потоком обслуживания теоретические значения характеристик совпали с экспериментальными. Для систем обслуживания заявок с равномерным и треугольным потоками обслуживания теоретические вычисления имели значительную погрешность и расходились с экспериментальными.

Также был проведен расчет доверительных интервалов для вероятности отказа и среднего времени ожидания в очереди для системы обслуживания заявок с очередью длинной $m=1$, в которой время между поступающими заявками и время обработки распределены по экспоненциальному закону с параметрами $\lambda=0.15$ и $\mu=0.33$ соответственно. Теоретическое значение вероятности отказа оказалось в рамках доверительного интервала, а теоретическое значение времени ожидания – нет, что указывает на то, что теоретические вычисления обладают большой погрешностью и не дают достаточно точный результат.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
КОД ПРОГРАММЫ

Код моделирования для равномерного потока обслуживания и *p*=0.45:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE RN1#6/999
STOR STORAGE 1
GENERATE V$IN
GATE SNF STOR,L1
ENTER STOR,1
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
LEAVE STOR,1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TRANSFER ,L2
L1 SAVEVALUE 1+,1
L2 TERMINATE 1
START 47500
```

Код моделирования для равномерного потока обслуживания и *p*=0.85:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE RN1#11.34/999
STOR STORAGE 1
GENERATE V$IN
GATE SNF STOR,L1
ENTER STOR,1
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
LEAVE STOR,1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TRANSFER ,L2
L1 SAVEVALUE 1+,1
L2 TERMINATE 1
START 47500
```

Код моделирования для экспоненциального потока обслуживания и *p*=0.45:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE -3#LOG((RN1+1)/1000)
STOR STORAGE 1
GENERATE V$IN
GATE SNF STOR,L1
ENTER STOR,1
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
LEAVE STOR,1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TRANSFER ,L2
L1 SAVEVALUE 1+,1
L2 TERMINATE 1
```

```
START 1750
```

Код моделирования для экспоненциального потока обслуживания и p=0.85:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE -5.67#LOG((RN1+1)/1000)
STOR STORAGE 5
GENERATE V$IN
GATE SNF STOR,L1
ENTER STOR,1
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
LEAVE STOR,1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TRANSFER ,L2
L1 SAVEVALUE 1+,1
L2 TERMINATE 1
START 1750
```

Код моделирования для треугольного потока обслуживания и p=0.45:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE 9#(1-SQR(RN1/999))
STOR STORAGE 1
GENERATE V$IN
GATE SNF STOR,L1
ENTER STOR,1
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
LEAVE STOR,1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TRANSFER ,L2
L1 SAVEVALUE 1+,1
L2 TERMINATE 1
START 1750
```

Код моделирования для треугольного потока обслуживания и p=0.85:

```
SIMULATE
IN FVARIABLE -6.67#LOG((RN1+1)/1000)
OUT FVARIABLE 17.01#(1-SQR(RN1/999))
STOR STORAGE 4
GENERATE V$IN
GATE SNF STOR,L1
ENTER STOR,1
QUEUE 1
SEIZE 1
DEPART 1
LEAVE STOR,1
ADVANCE V$OUT
RELEASE 1
TRANSFER ,L2
L1 SAVEVALUE 1+,1
L2 TERMINATE 1
START 1750
```