Partie II) Seconde version

Dans ce second jeu, on ne remet pas la bille tirée au premier tirage dans l'urne. Le jeu devient donc :
Le joueur tire au hasard une bille dans l'urne. On note X la variable aléatoire égale au résultat du numéro obtenu. On ne remet pas la bille dans l'urne et on effectue un deuxième tirage. La variable aléatoire Y vaut 1 si ce numéro est impair et 0 si ce numéro est pair. À la fin du jeu, le nombre de points du joueur vaut toujours $X+Y$.

1. (a) Montrer que : $P_{(X \text{ est paire})}(Y=1) = \dfrac{N}{2N-1}$ et que $P_{(X \text{ est impaire})}(Y=1) = \dfrac{N-1}{2N-1}$.
   (b) À l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $((X \text{ est paire}), (X \text{ est impaire}))$, calculer $P(Y=1)$.
   (c) En déduire la loi de Y.
2. (a) Donner la valeur de $P((X=1)\cap(Y=1))$ en justifiant votre réponse.
   (b) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. On rappelle que le but du jeu est d'obtenir le plus de points possibles. Est-ce qu'une version du jeu est favorable en moyenne au joueur ?

Exercice 4

On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ \textit{et pour tout } n \in \mathbb{N}^* : (n+1)u_{n+2} - (2n+1)u_{n+1} + nu_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right). \quad (\star)$$

On admet qu'il existe une unique suite, notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, satisfaisant $(\star)$.
Le but de cet exercice est de savoir si il est possible d'obtenir une variable aléatoire X_u à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_u = n) = \frac{\alpha_u}{nu_n}, \text{ où } \alpha_u \text{ est un réel positif indépendant de } n. \qquad (1)$$

1. Dans cette question uniquement, on s'intéresse à la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

   $$v_1 = 1,\ v_2 = 1,\ \textit{et pour tout } n \in \mathbb{N}^* : (n+1)v_{n+2} - (2n+1)v_{n+1} + nv_n = 0. \quad (\star\star)$$

   On admet qu'il existe une unique suite, notée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, satisfaisant $(\star\star)$.
   On souhaite savoir si il est possible d'obtenir une variable aléatoire X_v à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ de loi :

   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X_v = n) = \frac{\alpha_v}{nv_n}, \text{ où } \alpha_v \text{ est un réel positif indépendant de } n. \qquad (2)$$

   (a) Calculer v_3 et v_4.
   (b) Par récurrence montrer la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = 1$ et $v_{n+1} = 1$ », définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On note $S_N = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.
      i. Montrer que : $S_{2N} - S_N \geqslant \dfrac{1}{2}$.
      ii. Déterminer la monotonie de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et en déduire, à l'aide du théorème de la limite monotone, que : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.
      iii. En déduire la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{nv_n}$. La variable aléatoire X_v définie en (2) existe-t-elle ?
2. Calculer u_3 et u_4. On exprimera chaque résultat sous la forme $a + b\ln(2) + c\ln(3)$ où a, b et c sont des réels.
3. **Python**
   Soit $N \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que l'instruction `np.ones(N)` modélise les N premiers termes d'une suite sous forme d'un tableau de longueur N dont tous les éléments valent 1.
   Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, la commande `u[k]` modélise le terme u_{k+1}.
   Compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie la liste des N premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui satisfait $(\star)$.

```
import numpy as np
def Suite_U(N):
        u = np.ones(N)
        for k in range(1,N-1):
                u[k+1] = (1/k)*( np.ln(1+1/(k-1))+(2*(k-1)+1)*u[k]-(k-1)*u[k-1])
        return u
```

4. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \dfrac{\mathrm{e}^{n(u_{n+1}-u_n)}}{n}$.
   (a) Calculer w_1.
   (b) Montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
   (c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \dfrac{\ln(n)}{n}$.
   (d) Soit N un entier supérieur ou égal à 3.
   À l'aide d'un télescopage, montrer que $u_N = 1 + \displaystyle\sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n}$.

5. Dans cette question on souhaite déterminer le comportement de u_N quand N est très grand.
   Pour cela, on définit la fonction $f : \left\{ \begin{array}{ccc} [2,+\infty[& \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \dfrac{\ln(t)}{t} \end{array} \right.$ et N un entier supérieur ou égal à 4.
   (a) Etudier les variations de la fonction f sur $[3, +\infty[$.
   (b) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, k \geqslant 3, \quad f(k+1) \leqslant \displaystyle\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)$.
   (c) En sommant la relation précédente pour k entre 3 et $N-1$, montrer que :
   $$\sum_{k=4}^{N} f(k) \leqslant \int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=3}^{N-1} f(k).$$
   (d) En déduire, en utilisant la question 4d, que :
   $$1 + f(2) + \int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_N \leqslant \int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t + 1 + f(2) + f(3).$$

6. Le but de cette question est de calculer $\displaystyle\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t$, pour N un entier supérieur ou égal à 3.
   (a) Calculer la dérivée de la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $t \mapsto (\ln(t))^2$.
   (b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t$.

7. Déduire des questions 5d et 6b que : $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \frac{u_N}{\ln(N)^2} = \frac{1}{2}$.

8. Dans cette question, on admet que $\displaystyle\sum \frac{1}{nu_n}$ et $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t$ ont la même nature.
   (a) Soit $A \in [2, +\infty[$. Déterminer la valeur de $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{t} \times \frac{1}{\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t$.
   (b) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{1}{nu_n}$. Conclure.

FIN

Correction exercice 4;

1) a) En remplaçant n par 1 dans (* *) on a:

$$(1+1)\, v_3 - (2\times1+1)\, v_2 + v_1 = 0$$

d'où
$$2v_3 = 3v_2 - v_1$$
$$2v_3 = 3-1$$
$$v_3 = 1.$$

De même en remplaçant n par 2 on a:

$$3v_4 - 5v_3 + 2v_2 = 0$$

$$3v_4 = 5v_3 - 2v_2$$
$$3v_4 = 3$$
$$v_4 = 1$$

1) b) Montrons par récurence que la propriété:

$\mathcal{P}(n)$: " $v_{n+1} = 1$ et $v_n = 1$ " est vraie sur $\mathbb{N}^*$

<u>initialisation:</u> L'énoncé nous dit déjà que $v_1 = v_2 = 1$.
Dès lors, la propriété est vérifiée au rang 1.

<u>hérédité:</u> Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vérifiée.

On a donc $v_{n+1} = v_n = 1$.

La relation donnée par (**) nous donne:

$$(n+1)v_{n+2} - (2n+1)\, v_{n+1} + n v_n = 0$$

Par hypothèse de récurrence on a alors:

$$(n+1)\, v_{n+2} - (2n+1) + n = 0$$
$$(n+1)\, v_{n+2} = 2n+1-n$$
$$v_{n+2} = \frac{n+1}{n+1} = 1$$

On a donc $v_{n+2} = v_{n+1} = 1$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vérifiée.

<u>Conclusion:</u> La propriété $\mathcal{P}(n)$ est initialisée au rang 1 et héréditaire à partir de celui ci; elle est donc vraie sur $\mathbb{N}^*$ par principe de récurrence

c) (bonus)

i) $S_{2N}-S_N=\sum_{k=1}^{2N}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}=\sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{k}=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+2}+\dots+\frac{1}{2N}$.

Comme la fonction $\frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a $\frac{1}{N+1}\geq\frac{1}{2N}$; $\frac{1}{N+2}\geq\frac{1}{2N}$;...; $\frac{1}{2N-1}\geq\frac{1}{2N}$

Donc $S_{2N}-S_N=\underbrace{\underset{\geq\frac{1}{2N}}{\frac{1}{N+1}}+\underset{\geq\frac{1}{2N}}{\frac{1}{N+2}}+\dots+\underset{\frac{1}{2N}}{\frac{1}{2N-1}}+\underset{\geq\frac{1}{2N}}{\frac{1}{2N}}}_{N\text{ termes}}\geq\underbrace{\frac{1}{2N}+\frac{1}{2N}+\dots+\frac{1}{2N}}_{N\text{ termes}}=N\times\frac{1}{2N}=\frac{1}{2}$

2) Comme pour 1)a) ; On remplace n dans (*)

$$2u_3-3u_2+u_1=\ln(2)$$
$$2u_3=\ln(2)+3u_2-u_1$$
$$2u_3=\ln(2)+2$$
$$u_3=1+\frac{1}{2}\ln(2)$$

$$3u_4-5u_3+2u_2=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$$
$$3u_4=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+5u_3-2u_2$$
$$3u_4=\ln\left(\frac{3}{2}\right)+5+\frac{5}{2}\ln(2)-2$$
$$3u_4=\ln(3)-\ln(2)+3+\frac{5}{2}\ln(2)$$
$$3u_4=\ln(3)+\frac{3}{2}\ln(2)+3$$
$$u_4=\frac{1}{3}\ln(3)+\frac{1}{2}\ln(2)+1$$

PS: Tu peux deviner (ou pas...) que $u_n=1+\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{3}\ln(3)+\frac{1}{4}\ln(4)+\dots+\frac{1}{n-1}\ln(n-1)$ (en fait c'est le but de l'exo)

4) a) $w_1=\frac{e^{1(u_2-u_1)}}{1}=\frac{e^0}{1}=1$

b) Montrons par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$: " $w_n=1$ " sur $\mathbb{N}^*$

<u>initialisation:</u> vraie par 4.a)

<u>hérédité:</u> Fixons n dans $\mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{P}(n)$ soit vraie.

(Si tu as lu jusqu'ici c'est normal que ce qui suive te rende fou)

$$w_{n+1}=\frac{e^{(n+1)(u_{n+2}-u_{n+1})}}{n+1}=\frac{e^{(n+1)u_{n+2}-(n+1)u_{n+1}}}{n+1}$$

Or par (*) $(n+1)u_{n+2}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+(2n+1)u_{n+1}-nu_n$

Donc $(n+1)u_{n+2}-(n+1)u_{n+1}=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)+nu_{n+1}-nu_n=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+n(u_{n+1}-u_n)$

Il s'en suit que $w_{n+1}=\frac{e^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)+n(u_{n+1}-u_n)}}{n+1}=\frac{e^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}\times e^{n(u_{n+1}-u_n)}}{n+1}=\frac{\frac{n+1}{n}e^{n(u_{n+1}-u_n)}}{n+1}$

$$w_{n+1}=\frac{e^{n(u_{n+1}-u_n)}}{n}=w_n=1\text{ par hypothèse de récurrence}$$

<u>Conclusion:</u> La propriété est vraie et $w_n=1$ sur tout $\mathbb{N}^*$

4.c) Par 4.b) $1 = w_n = \dfrac{e^{n(u_{n+1}-u_n)}}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$

alors $n = e^{n(u_{n+1}-u_n)}$

$n(u_{n+1}-u_n) = \ln(n)$

$u_{n+1} = \dfrac{\ln(n)}{n} + u_n$

4.d) Par 4.c) $u_n = \dfrac{\ln(n-1)}{n-1} + u_{n-1} \overset{4c)}{=} \dfrac{\ln(n-1)}{n-1} + \dfrac{\ln(n-2)}{n-2} + u_{n-2} = \dots = \dfrac{\ln(n-1)}{(n-1)} + \dots + \dfrac{\ln(2)}{2} + 1$

$u_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n-1} \frac{\ln(n)}{n} + 1.$

5) a) $f : \begin{cases} [2, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t} \end{cases}$

$f'(t) = \dfrac{\frac{1}{t} \times t - \ln(t) \times 1}{t^2} = \dfrac{1 - \ln(t)}{t^2}$

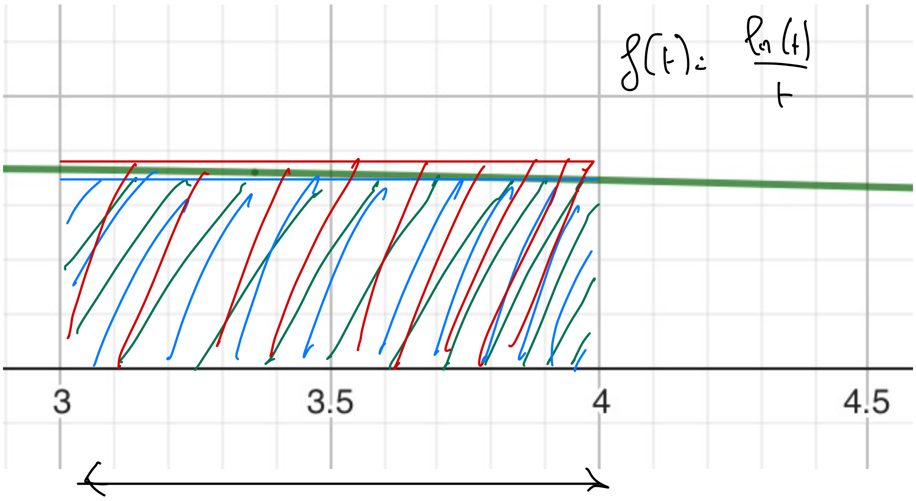
$f'(t) \geq 0 \iff 1 - \ln(t) \geq 0 \iff \ln(t) \leq 1 \iff t \leq e$

D'où :

t	2		e		3		$+\infty$
$f'(t)$		$+$	0	$-$			
$f(t)$	$\frac{\ln(2)}{2}$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$			$0?$

f est donc décroissante sur $[3, +\infty[$

Pb : Pause dessin :



Longueur 1.

Il faut retenir que comme f est décroissante l'intégrale sera plus petite que le rectangle de hauteur "sa valeur à gauche" et plus grand que celui de hauteur "sa valeur à droite"

En "maths" ça donne :

5.b) $$\int_{K}^{K+1} f(t)\,dt \leq \int_{(K)}^{(K+1)} f(K\ )\,dt$$ car sur $[K, K+1[$ f est décroissante. Et comme $f(K)$ est un nombre fixé on a :

$$\int_{K}^{K+1} f(K)dt = \left[f(K)t\right]_{K}^{K+1} = f(K)\times(K+1-K) = f(K)$$

d'où $$\int_{K}^{K+1} f(t)\,dt \leq f(K)$$

On fait pareil mutatis mutandis pour l'autre égalité.

Finalement
$$f(K+1) \leq \int_{K}^{K+1} f(t)\,dt \leq f(K)$$

5.c) $$\int_{3}^{N} f(t)\,dt = \int_{3}^{4} f(t)\,dt + \dots + \int_{N-1}^{N} f(t)\,dt = \sum_{K=3}^{N-1}\int_{k}^{K+1} f(t)\,dt$$

Et par 5.b) on a un encadrement de chaque terme de la somme.

Alors
$$\sum_{K=3}^{N-1} f(K+1) \leq \int_{3}^{N} f(t)\,dt \leq \sum_{K=3}^{N-1} f(K)$$

Or $$\sum_{K=3}^{N-1} f(K+1) = f(4)+\dots+f(N) = \sum_{K=4}^{N} f(K)$$

D'où le résultat.

5.d) par 4.d) $$U_N = \sum_{K=2}^{N-1}\frac{\ln(K)}{K} + 1 = \sum_{K=2}^{N-1} f(K)+1 = 1+f(2)+\sum_{K=3}^{N-1} f(K)$$

$$\text{D'où } \sum_{K=3} f(K) = U_N - f(2) - 1 \overset{5.c)}{\geqslant} \int_{3}^{N} f(t)\,dt$$

$$\text{et donc } U_N \geqslant \int_{3}^{N} f(t)\,dt + f(2) + 1$$

De même $v_N = \sum_{k=2}^{N-1} f(k) + 1 = f(2) + f(3) + \sum_{k=4}^{N} f(k) - f(N) + 1 \leq 1 + f(2) + f(3) + \int_3^N f(t)\,dt - f(N)$

$\leq \int_3^N f(t)\,dt$

Au final $\int_3^N f(t)\,dt + 1 + f(2) \leq u_N \leq \int_3^N f(t)\,dt + 1 + f(2) + f(3) - \underbrace{f(N)}_{\geq 0}$

$$\int_3^N f(t)\,dt + 1 + f(2) \leq v_N \leq \int_3^N f(t)\,dt + 1 + f(2) + f(3)$$

6. a) Soit $g : t \longmapsto (\ln(t))^2$

$g'(t) = 2 \times \frac{1}{t} \times \ln(t) = 2 f(t)$

6. b) d'où $\int_3^N f(t)\,dt = \frac{1}{2} \int_3^N 2f(t)\,dt = \frac{1}{2} \int_3^N g'(t)\,dt = \frac{1}{2} \left[(\ln(t))^2\right]_3^N = \frac{\ln(N)^2 - \ln(3)^2}{2}$

7) Bonus : par 5.c) et 6.b) :

$$\frac{\ln(N)^2 - \ln(3)^2}{2} + 1 + f(2) \leq v_N \leq \frac{\ln(N)^2 - \ln(3)^2}{2} + 1 + f(2) + f(3)$$

$$\underbrace{\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{\ln(3)^2}{2\ln(N)^2}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{1}{\ln(N)^2}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{f(2)}{\ln(N)^2}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{2}} \leq \frac{v_N}{\ln(N)^2} \leq \underbrace{\frac{1}{2} - \underbrace{\frac{\ln(3)^2}{2\ln(N)^2}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0} + \underbrace{\frac{1 + f(2) + f(3)}{\ln(N)^2}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} 0}}_{\xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{2}}$$

Donc par théorème des gendarmes $\frac{v_N}{\ln(N)^2} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \frac{1}{2}$

IMPRIMERIE NATIONALE – 24 1180 – D'après documents fournis