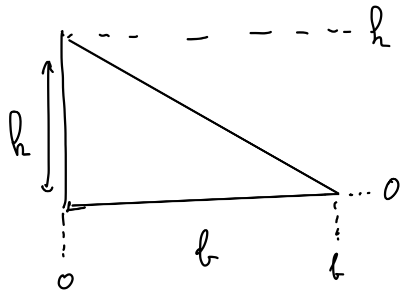
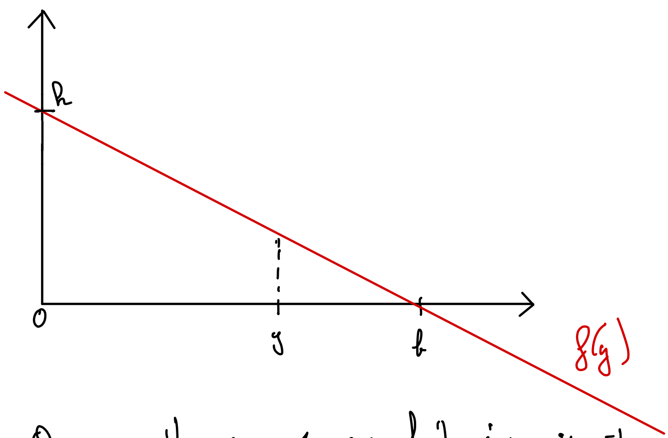
Calcul aire, moments statiques et quadratique :

Soit T le domaine des points dans le triangle suivant



On veut déjà trouver ce à quoi correspond $(y,z) \in T$

Si on laisse y parcourir librement $[0,b]$ on doit contraindre z :



On voit que z ne doit jamais être au dessus de la droite rouge

Exprimons la droite rouge en fonction de y : $f(y) = cy + d$ avec $c = \dfrac{f(b) - f(0)}{b - 0}$; $d = f(0)$

On a $c = \dfrac{0 - h}{b - 0} = \dfrac{-h}{b}$ et $d = f(0) = h$ d'où $f(y) = \dfrac{-h}{b} y + h$

donc $(y,z) \in T \iff \begin{cases} 0 \leq y \leq b \\ 0 \leq z \leq -\dfrac{h}{b} y + h \end{cases}$ d'où $T = \left\{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } 0 \leq y \leq b \,,\ 0 \leq z \leq -\frac{h}{b} y + h \right\}$

· Avec ça on peut calculer l'aire (évidemment égale à $\frac{bh}{2}$) :

$$\text{Aire}(T) = \iint_T dy\,dz = \int_0^{-\frac{h}{b}y+h} \int_0^{b} dy\,dz \overset{(\text{Fubini})}{=} \int_0^b \left(\int_0^{-\frac{h}{b}y+h} 1 \times dz \right) dy$$

$$= \int_0^b \left(\Big[z \Big]_0^{-\frac{h}{b}y+h} \right) dy = \int_0^b -\frac{h}{b} y + h \, dy = \left[\frac{-h y^2}{2b} + hy \right]_0^b$$

$$= \left(\frac{-hb^2}{2b} + hb \right) - 0 = \frac{-hb}{2} + hb = \frac{hb}{2}$$

<u>Remarques</u>: - C'est se compliquer la vie mais c'est pour comprendre la suite.
- On utilise une fonction de y comme borne car ne dépend pas de z...

• <u>On calcule maintenant les moments statiques :</u>

Toujours en utilisant notre définition de T on a :

$$m_{\cdot y} = \int_0^{h - \frac{h}{b}y} \int_0^{b} z \, dy \, dz \overset{(\text{Fubini})}{=} \int_0^{b} \left(\int_0^{h - \frac{h}{b}y} z \, dz \right) dy \quad \circledast$$

or

$$\int_0^{h - \frac{h}{b}y} z \, dz = \left[\frac{z^2}{2} \right]_0^{h - \frac{h}{b}y} = \frac{1}{2} \left(h - \frac{h}{b} y \right)^2 = \frac{1}{2} \left(h^2 - \frac{2h^2}{b} y + \frac{h^2}{b^2} y^2 \right)$$

$$\text{d'où } m_{\cdot y} \overset{\circledast}{=} \frac{1}{2} \int_0^{b} h^2 - 2\frac{h^2}{b} y + y^2 \, dy = \frac{1}{2} \left[h^2 y - \frac{h^2 y^2}{b} + \frac{h^2}{b^2 3} y^3 \right]_0^{b}$$

$$= \frac{1}{2} \left(h^2 b - \frac{h^2 b^2}{b} + \frac{h^2}{3b^2} b^3 \right) = \frac{1}{2} \left(h^2 b - h^2 b + \frac{h^2 b}{3} \right) = \frac{h^2 b}{6}$$

De même :

$$m_{\cdot z} = \int_0^{h - \frac{h}{b}y} \int_0 y \, dy \, dz \overset{(\text{Fubini})}{=} \int_0^{b} y \left(\int_0^{h - \frac{h}{b}y} 1 \, dz \right) dy \quad \circledast$$

$$= \int_0^{b} y \left(h - \frac{h}{b} y \right) dy = \left[\frac{h}{2} y^2 - \frac{h}{3b} y^3 \right]_0^{b} = \frac{hb^2}{2} - \frac{hb^3}{3b} = \frac{hb^2}{6}$$

Et comme $\frac{m \cdot z}{\text{Aire}} = \frac{h b^2}{6} \times \frac{2}{h b} = \frac{b}{3}$ et $\frac{m \cdot y}{\text{Aire}} = \frac{h}{3}$

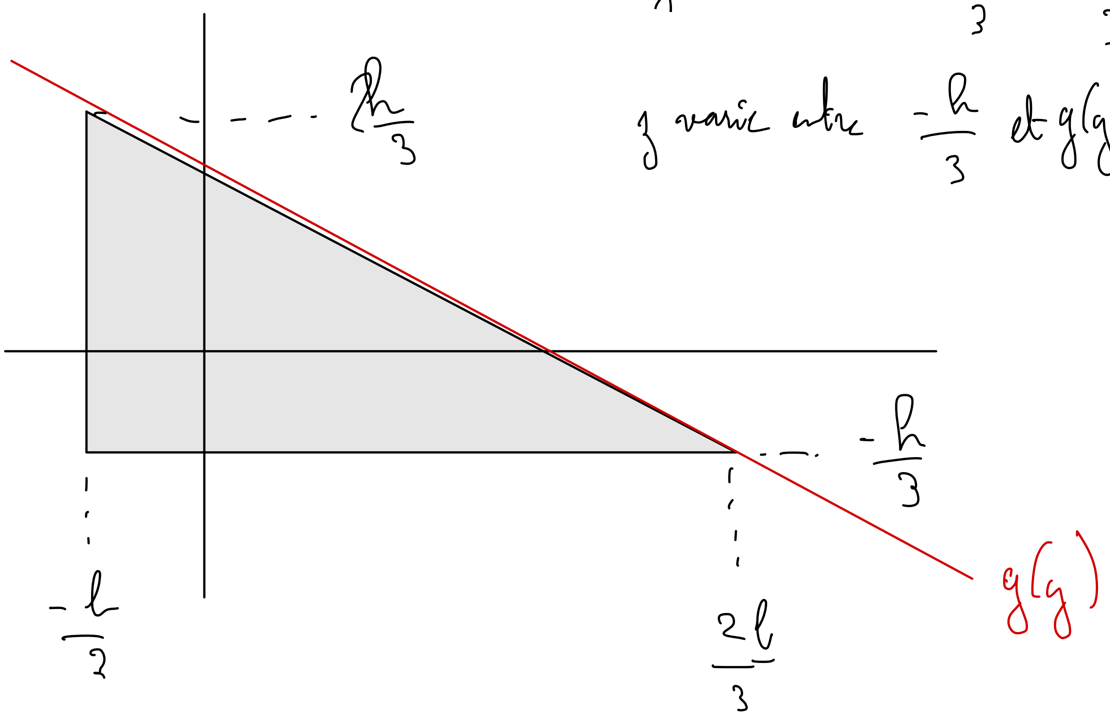
le centre de gravité est le point $\left(\frac{b}{3} ; \frac{h}{3} \right)$

• On peut maintenant calculer les moments quadratique

Cette fois ci le centre du repère est le centre du triangle:

y varie entre $-\frac{b}{3}$ et $\frac{2b}{3}$

z varie entre $-\frac{h}{3}$ et $g(y) = -\frac{h}{b} y + \frac{2h}{3}$

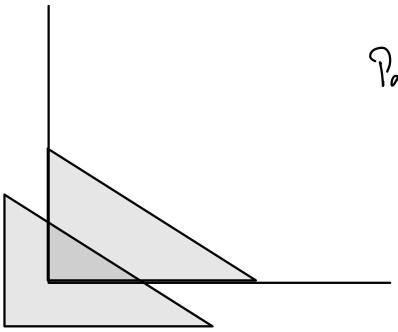


Commençons par le calculer par rapport à l'origine:

$$I_{\text{origine}, z} = \int_0^{h - \frac{h}{b} y} \int_0^{b} y^2 \, dy \, dz = \int_0^{b} y^2 \left(h - \frac{h}{b} y \right) dy$$

$$= \left[\frac{h}{3} y^3 - \frac{h}{4b} y^4 \right]_0^{b} = \frac{h b^3}{3} - \frac{h b^3}{4} = \frac{h b^3}{12}$$

La distance du centre d'inertie à l'origine par rapport à l'axe vertical est $d = \frac{b}{3}$



$-\frac{h}{3}$

$-\frac{b}{3}$

Par Huygens: $I_{\cdot z} = I_{origine \cdot z} - Aire(T) \times d^2$

$$= \frac{hb^3}{12} - \frac{hb}{2} \times \frac{b^2}{3^2} = \frac{hb^3}{12} - \frac{hb}{2} \times \frac{b^2}{3^2}$$

$$= \frac{hb^3}{12} - \frac{hb^3}{18} = \frac{3hb^3}{36} - \frac{2hb^3}{36}$$

$$= \frac{hb^3}{36}$$

On fait pareil pour l'autre...