1) Encontre as matrizes companheiras dos seguintes polinômio:

a) $p(x) = (x-3)^2 \cdot (x^2+2)$.

$p(x) = (x^2-6x+9)(x^2+2)$

$p(x) = \cancel{x^4} + \cancel{2x^2} - \cancel{6x^3} - \cancel{12x} + \cancel{9x^2} + 18$

$p(x) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 12x + 18$

$$C_{p(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -18 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & +12 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -11 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & +6 \end{bmatrix}$$

O coeficiente do termo de maior grau não é usado na última coluna.

b) $p(x) = (x-1)^4 \cdot (x+1)$

$p(x) = (x-1)^2 (x-1)^2 \cdot (x+1)$

$p(x) = (x^2-2x+1)(x^2-2x+1)(x+1)$

$p(x) = (x^4 - 2x^3 + x^2 - 2x^3 + 4x^2 - 2x + 1 - 2x + 1)$
$(x+1)$

$p(x) = \cancel{x^5} - \cancel{2x^4} + \cancel{x^3} - \cancel{2x^4} + \cancel{4x^3} - \cancel{2x^2} + \cancel{x} - \cancel{2x^2} + \cancel{x} +$
$\cancel{x^4} - \cancel{2x^3} + \cancel{x^2} - \cancel{2x^3} + \cancel{4x^2} - \cancel{2x} + 1 - \cancel{2x} + 1 =$

$$p(x) = \cancel{x^5} - \cancel{4x^4} + \cancel{x^4} + \cancel{5x^3} - \cancel{4x^2} + \cancel{2x} - \cancel{2x^3} + \cancel{5x^2}$$
$$- \cancel{2x^3} - \cancel{4x} + \cancel{2} =$$

$$p(x) = x^5 - 3x^4 + x^3 + x^2 - 2x + 2$$

$$C_{p(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & +2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & +3 \end{bmatrix}$$

c) $p(x) = (x-1).(x^{N-1} + x^{X-2} + \dots + 1) \quad N \geq 2$

$$p(x) = x^N + \cancel{x^{N-1}} + \cancel{x^{N-2}} + \dots + \cancel{x} - \cancel{x^{N-1}} - \cancel{x^{N-2}} + \dots - 1 =$$

$$p(x) = x^N - 1 \,, \quad N \geq 2$$

$$C_{p(x)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & \cdots & +1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & & \vdots \\ & & & \ddots & \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2) Seja $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ um operador com $m_T(x) = (x-2)^2 \cdot (x+1)^2$. Encontre um vetor $v \in \mathbb{R}^4$ tal que $\mathbb{R}^4 = C_T(v)$.

. Temos que o $m_T(x) = p_T(x)$, T é T-cíclico e o grau de $m_T(x)$ é N.
. Temos que T-cíclico com dimensão igual ao grau do polinômio m_T.
. Temos que existe um vetor $v \in V$ tal que $m_T(x) = m_{T,v}(x)$.

$m_T(x) = (x-2)^2 \cdot (x+1)^2$
$m_T(x) = (x^2-4x+4)(x^2+2x+1)$
$m_T(x) = x^4 + \cancel{2x^3} + \cancel{x^2} - \cancel{4x^3} - \cancel{8x^2} - \cancel{4x} + \cancel{4x^2} + \cancel{8x} + 4$
$m_T(x) = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 4x + 4 = p_T(x)$

Dado um $v \in \mathbb{R}^4$, $v = (x, y, z, w)$, e

$m_{T,v}(x) = m_T(x) = (x-2)^2 \cdot (x+1)^2$

Agora determinar a matriz guadora de $p_T(x)$, em seguida determinar vetores em relação a base canônica.

$$m_T(x) = p_T(x) = \begin{bmatrix} (x-2) & & & 0 \\ 0 & (x-2) & & \vdots \\ \vdots & & (x+1) & \vdots \\ \vdots & & & (x+1) \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & 2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & 1 & z_4 \\ w_1 & w_2 & w_3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$v = (1,0,0,0) \xrightarrow{T} T(1,0,0,0) = (2, y^1, z^1, w^1)$$
$$v = (0,1,0,0) \xrightarrow{T} T(0,1,0,0) = (x^2, 2, z^2, w^2)$$
$$v = (0,0,1,0) \xrightarrow{T} T(0,0,1,0) = (x^3, y^3, 1, w^3)$$
$$v = (0,0,0,1) \xrightarrow{T} T(0,0,0,1) = (x^4, y^4, z^4, 1)$$

Para ser T-cíclico, temos que ter um $v \in V$ tal que $V = C_T(v)$

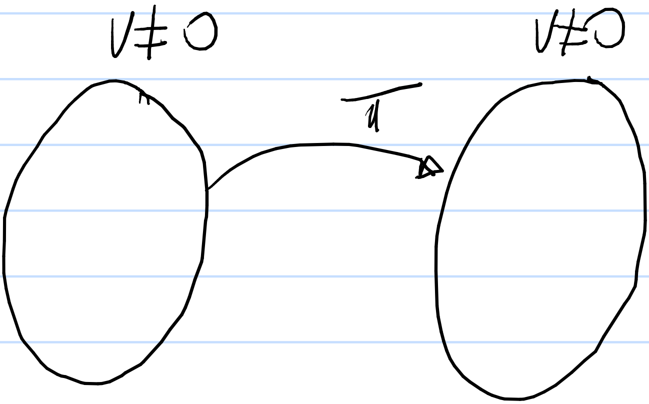
$$T(x,y,z,w) = (2x, 2y, z, w)$$

Dado $v = (x,y,z,w) = T(x,y,z,w) = (2x,2y,z,w) = (x,y,z,w) = (2,2,1,1) \in \mathbb{R}^4$

Como v é um vetor e uma base geradora de $\mathbb{R}^4$, logo $V(x,y,z,w) = C_T(v)$.

3) Encontre, se existirem, exemplos de operadores: $T: V \rightarrow V$, onde V é um K-espaço vetorial de dimensão finita, tais que:

a) V não seja T-cíclico



$\dim_K V = n \geq 1$

Para não ser T-cíclico:

1) Não deve possuir um vetor T-cíclico.

2) $p_T(x) \neq m_T(x)$

3) $\forall v \in V$ não forme uma base p/ V.

Dada uma Transformação $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ por: $T(x, y, z, w) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -w)$.

Temos que $p_T(x) = (x-3)^2 \cdot (x+1)^2 \neq m_T(x) = (x-3) \cdot (x+1)$. Temos que $m_T(x) \mid p_T(x)$. Mas T não é T-cíclico.

b) V tenha dimensão 4 e contenha um subespaço T-cíclico de dimensão 3.

Como $\dim_K V = 4$, então $p_T(x)$ possui grau 4. Consequentemente $m_T(x)$ também deve ser de grau 4.

① De acordo com o Corolário:

Seja $T: V \to V$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial de dimensão finita. Então existe um subespaço T-cíclico de V com dimensão igual ao grau do polinômio $m_T(x)$.

Como $p_T(x)$ deve ser igual a $m_T(x)$, segue que $m_T(x) = m_{T,v}(x)$. Portanto $m_{T,v}(x)$ deve ter grau 4.

Logo não tem este exemplo

c) T seja injetora e tal que $m_T(x)$ tenha grau 1.

Temos que ser T-cíclico: $p_T(x) = m_T(x)$, se o grau de $p_T(x) = n$, então de $m_T(x)$ e $m_{T,v}(x)$ também deve ser n. Assim se T é injetora e $m_T(x)$ possui grau 1, logo $p_T(x)$ e $m_{T,v}(x)$ também devem possuir grau 1.

Para ter grau 1, deve ter dimensão 1.

$T: V \to V = \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \to x$

Dada uma base canônica: 1.,

$[x-1]$., $p_T(x) = x-1$., autovalor: 1

$p_T(x) = [T - xI] = [1 - xI] = [1 - x]$, $x = 1$

$p_T(x) = m_T(x) = x - 1$.

Dado $v = (0) \to T(0) = 0$., temos uma base $B = \{(v, T(v)) = 0, 0\}$ é l.d.

Se $v = 1 \to T(1) = 0$., $B' = \{(v, T(v)) = 1, 0\}$ é l.d

4) Considere um polinômio $m(x) = p_1(x) \dots p_r(x) \in P(K)$ tal que $mdc(p_i(x), p_j(x)) = 1$, para todos i e j, $i \neq j$. Mostre que:

$$Nuc(m(t)) = Nuc(p_1(t)) \oplus \dots \oplus Nuc(p_r(t)).$$

O polinômio minimal é dado pelo produto de fatores lineares diversos, com isso:

$m(x) = p_1(x), \dots p_r(x)$, onde $p_i = (x_i - \lambda)$ para $i = 1, \dots r$. Como são fatores distintos temos que: $mdc(p_i(x), p_j(x)) = 1$, $\forall i, j$ com $i \neq j$. Por definição toda transformação do núcleo possui imagem zero, logo:

$$Nuc(m(T)) = 0, \text{ e } Nuc(p_i(t)) = 0.$$

Temos que a soma direta de dois subespaços distintos é dado por:

$$Nuc(p_1(t)) \oplus \dots, \oplus Nuc(p_2(t))$$

Dados $c_1, \dots, c_k$, autovalores de T, então: $W_j = Nuc(T - c_j I) = Nuc(p_i(t))$

Temos que: $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$, é uma soma direta.

Dado $u \in V$, então $u = u_1 + \dots + u_k$, onde $u_j \in W_j$, com $j = 1, \dots, k$.

Para $k=2$, temos:
$p_1 T = (x - c_1)$ e $p_2 T = (x - c_2) \dots \dots (x - c_k)$
O $mdc(p_1, p_2) = 1$, logo são fatores lineares distintos.

Assim existe $q_1(x), q_2(x) \in T(x)$ tais que:
$$p_1(x) \cdot q_1(x) + p_2(x) \cdot q_2(x) = 1,$$ então

$W_1 = Nuc(T - c_1) = Nuc(p_1(t))$
$W_2 = Nuc(p_2(t))$

Assim $V = W_1 \oplus W_2$

Então:

$p_1(T) \circ q_1(T) + q_2(T) \circ p_2(T) = I$

Seja $\forall u \in V$, $u = p_1(T) \circ q_1(T)(u) + p_2(T) \cdot q_2(T)(u) = u_1 + u_2$

Temos que $u_1 \in W_1$ e $u_2 \in W_2$.

Com $Nuc(T)$ possuem imagem igual a zero, temos:

$m_T(x) = p_1(T) \cdot p_2(T) \cdot \ldots \cdot p_k(T) = (x_1 - \lambda) \cdot (x_2 - \lambda) \cdot \ldots \cdot (x_k - \lambda) = 0$

Então:

$Nuc(m(T)) = Nuc(p_1(T)) \oplus Nuc(p_2(T)) = 0 + 0 = 0.$

Se tomarmos $r = n$, temos:

$N = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_k$, ou

$p_T(x) = p_1(T) \cdot p_2(T) \cdot \ldots \cdot p_k(T)$

$p_T(x) = (x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2) \cdot \ldots \cdot (x - \lambda_k) = 0$

$p_1(x) q_1(x) + \ldots + p_k(x) q_k(x) = 1$

Então: $W_1 = Nuc(T - c_1) = Nuc(p_1(t))$
$W_2 = Nuc(T - c_2) = Nuc(p_2(t))$
$\vdots$
$W_K = Nuc(T - c_K) = Nuc(p_K(t))$

Assim: $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \dots \oplus W_K$, e

$p_1(x) \circ q_1(x) + p_2(x) \circ q_2(x) + \dots + p_K(x) \circ q_K(x) = I$

Temos que $u \in V$, então:

$p_1(x) \circ q_1(x)(u) + p_2(x) \circ q_2(x)(u) + \dots + p_K(x) \circ q_K(x)(u) = u_1 + u_2 + \dots + u_K$, então:

$u_1 \in W_1, u_2 \in W_2, \dots, u_K \in W_K$

E como $p_T(x) = m_T(x)$, então:

$m_T(x) = p_1(t) \cdot p_2(t) \dots p_K(t) = (x - \lambda_1) \cdot (x - \lambda_2) \dots (x - \lambda_K) = 0$

Então:

$$Nuc(m(T)) = Nuc(p_1(T)) \oplus Nuc(p_2(T)) \oplus \dots \oplus Nuc(p_k(T)) = 0 + 0 + \dots + 0 = 0$$

Assim temos que uma matriz de transformação T é diagonalizável.