Definição: Dados $A \in M_{N\times N}(K)$ e $\lambda \in K$. Dizemos que λ é autovalor de A se $\det(A - \lambda Id_{N\times N}) = 0$

Exercício: Dados A e $B \in M_{N\times N}(K)$ vale que os autovalores de AB e BA são iguais.

Def: Dado $A \in M_{N\times N}(K)$, o polinômio característico de A é por definição:

$$P_A(x) = \det(A - xId_{N\times N})$$

Obs: λ é autovalor de A se, e somente se: $P_A(\lambda) = 0$

Considerando as raízes de $P_A(x)$ em K.

Lema: Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.

Prova: Suponha $B = P^{-1}.A.P$ com $A, B, P \in M_{N\times N}(K)$ e P invertível.

$$P_B(x) = \det(B - xId) = \det(P^{-1}AP - xP^{-1}IdP).$$

$$\det(P^{-1}AP - xP^{-1}IdP) = \det(P^{-1}(A - xId)P) =$$

$$\cancel{\det(P^{-1})}.\det(A - xId).\cancel{\det(P)} = \det(A - xId) = P_A(x)$$

Def: Dado $T \in L(V)$ e M uma matriz de T com respeito a duas bases de V (podem ser iguais).

$P_T(x) = \det(M - xId)$ é o polinômio característico de T.

Obs: 1) O lema anterior garante que $P_T(x)$ só depende de T.

2) $P_T(x) = \det(T - x\,Id)$

Notação: Se $P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_1 x + a_0$ $\in K[x]$. Dados $T \in \mathcal{L}(V)$ e $A \in M_{n\times n}(K)$ definimos:

1) $p(A) = (a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_1 A + a_0).Id \in M_{n\times n}(K)$

2) $p(T) = (a_k T^k + a_{k-1} T^{k-1} + \dots + a_1 + a_0).Id \in \mathcal{L}(V)$

em que $T^i = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{\text{composição } i \text{ vezes}}$

Produto de matrizes: se traduz como produto de operadores.

Exemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -Id$

Tomando $p(x) = x^2 + 1$, vale que $p(A) = A^2 + Id = -Id + Id = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

Def: Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ onde $\dim V < \infty$, o polinômio minimal de T é um polinômio: $m_T(x) \in K[x]$, satisfazendo:

i) $m_T(x)$ é o polinômio de menor grau que T é uma raiz!

ii) $m_T(x)$ é mônico

iii) $m_T(x)$ e $p_T(x)$ (polinômio característico de T) possuem as mesmas raízes.

Mônico: é um polinômio onde o coeficiente dominante de maior grau é igual a 1.

Deveria mostrar que $p_T(T) = 0$; Teorema de Cayley-Hamilton.

Exemplo: Dadas duas matrizes A e B, vale que AB e BA possuem o mesmo polinômio minimal?

Resposta é Não.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_{AB}(x) = \det(AB - xId) = \det\begin{pmatrix} -x & 1 \\ 0 & -x \end{pmatrix} = x^2$$

$$m_{AB}(x) = x^2 \longrightarrow m_{AB}(AB) = P_{AB}(AB) = 0$$

Por outro lado, $P_{BA}(x) = x^2$; $x = \pm 0$

$m_{BA}(x) = x$

Proposição: Seja $f \in K[x]$ um polinômio mônico, irredutível e tal que $f(T) = 0$ para algum $T \in L(V)$ fixado. Vale que $f = m_T$.

Resultado análogo trocando T por $A \in M_{n \times n}(K)$.

Prova: $f = m_T q + r$ com $q, r \in K[x]$ e $\deg r < \deg m_T$ ou $r \equiv 0$ polinômio nulo.

$$0 = f(T) = \underbrace{m_T(T)}_{=0,\text{ por definição.}} \cdot q(T) + r(T), \text{ donde } r(T) = 0.$$

Mas m_T é o de menor grau que anula T. Implicando que $r \equiv 0$, assim:

$$f = m_T \cdot q \in K[x]$$

Temos que: $\begin{cases} f \text{ é irredutível} \longrightarrow q \in K^* \text{ (não nulo)} \\ f \text{ é mônico} \longrightarrow q = 1 \end{cases}$

Logo $f = m_T$

Teorema 1: Sejam $T \in L(V)$ e $\lambda \in K$. Considere o seguinte conjunto $V(\lambda) = \{v \in V \mid Tv = \lambda v\}$. Então $V(\lambda)$ é um subespaço de V, chamado de auto-espaço.

Prova: a) Temos que $0 \in V(\lambda)$, pois $T0 = 0 = \lambda 0$

b) Se $u, v \in V(\lambda)$ então $T(u+v) = Tu + Tv = \lambda u + \lambda v = \lambda(u+v)$ e portanto $(u+v) \in V(\lambda)$

c) Se $a \in K$, $v \in V(\lambda)$ então $T(av) = aT(v) = a(\lambda v) = \lambda(av)$, portanto $av \in V(\lambda)$.

Exemplo: Seja $T_1 \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $T_1(x,y) = (x, 2y)$.

Temos $T_1(1,0) = 1(1,0)$ e portanto 1 é autovalor de T_1 e $(1,0)$ é autovetor de T_1 associado a 1.

Também, $T_1(0,1)=(0,2)=2(0,1)$ e portanto 2 é autovalor de T_1 e $(0,1)$ é autovetor de T_1 associado a 2.

Este operador T possui 2 autovalores distintos.

$$\begin{matrix}(1,0) = x+0y \\ (0,2) = 0x+2y\end{matrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 2\end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} =$$

$$\det\begin{bmatrix}1-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda\end{bmatrix} \Rightarrow (1-\lambda).(2-\lambda)$$
$$\lambda = 1, 2.$$

Assim $(1,2)$ são autovalores de $T_1(x,y)=(x,2y)$.
Então:
$$V(1) = \{(x,y)\in R^2; T_1(x,y) = 1(x,y)\} = \{(x,0)\in \mathbb{R}^2\}$$
$$V(2) = \{(x,y)\in \mathbb{R}^2; T_1(x,y) = 2(x,y)\} = \{(0,y)\in R^2\}$$

Para $\lambda=1$, $\begin{bmatrix}0 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}0x+0y=0 \\ 0x+y=0\end{cases} \rightarrow$ y, fixo.

Autovetor: $(0,y)$

Para $\lambda=2$, $\begin{bmatrix}-1 & 0 \\ 0 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases}-x+0y=0 \\ 0x+0y=0\end{cases}$, x fixo

Autovetor $(x,0)$

Auto-espaço $\begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}x & 0 \\ 0 & y\end{bmatrix}$

Teorema 2: Sejam $T\in L(V)$ e $\lambda \in K$. São equivalentes:
i) λ é um autovalor de T
ii) O operador $(T-\lambda I)$ não é injetor

Prova: (i) $\rightarrow$ (ii)

Existe $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v \rightarrow Tv - \lambda v = 0 \rightarrow$
$(T - \lambda I)v = 0 \rightarrow v \in Nuc(T - \lambda I) \rightarrow (T - \lambda I)$ é não injetor.

$(T - \lambda I) = 0$ tem infinitas soluções, mas $v \neq 0$ logo $(T - \lambda I) \neq 0$ possui somente imagem nula logo é não injetor.

(ii) $\rightarrow$ (i)

$Nuc(T - \lambda I) \neq 0 \rightarrow \exists v \neq 0 \in V$ tal que:

$(T - \lambda I)v = 0 \rightarrow Tv - \lambda v = 0 \rightarrow Tv = \lambda v \rightarrow$
λ é autovalor de T.

Exemplo: Seja $T_2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dado por $T_2(x,y) = (3x+y, 3y)$

Tomamos uma base canônica: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, então:

$T_2(1,0) = (3,0)$ e portanto 3 é autovalor de T_2 e $(1,0)$ é autovetor de T_2 associado a 3.
$T_2(0,1) = (1,3)$ e portanto $(1,3) \neq \lambda(0,1)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e portanto $(0,1)$ não é autovetor de T_2. Este operador possui somente um autovalor.

Assim temos $\lambda = 3$ é autovalor de $T_2(x,y) = (3x+y, 3y)$.

Então, o operador $(T_2 - 3I)$ é dado por $(T_2 - 3I)(x,y) = (y, 0)$. Portanto $(T_2 - 3I)(1,0) = (0,0)$.
Logo não é injetor

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2$$

$$9 - 6\lambda + \lambda^2 = 0$$

$\lambda = 36 - 36 = 0$, duas raízes iguais

$\lambda = \dfrac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = 3.$

Autovetores: $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{cases} 0x + 0y = 0 \\ x + 0y = 0 \end{cases}$

fixo x, $(x, \ ) = (1, 0)$

Teorema 3: Autovetores associados a autovalores distintos são L.I.

Prova: Sejam $v_1, \dots, v_N$ autovalores não nulos, associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_N$. Vamos fazer a demonstração por indução em N.

1) Se $N = 1$ e tomando o autovetor $v_1 \neq 0$ associado ao autovalor λ_1 temos que $\{v_1\}$ é L.I.

2) Suponhamos válido para $N = s$ e mostraremos que o teorema vale para $N = s+1$. Consideremos então $v_1, \dots, v_{s+1}$ autovetores não nulo associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \dots, \lambda_{s+1}$ e façamos:

$$a_1 v_1 + \dots + a_s v_s + a_{s+1} v_{s+1} = 0 \quad (*)$$

Então aplicando T a ambos os lados de $(*)$ obtemos:

$$a_1 T_1 v_1 + \dots + a_s T_s v_s + a_{s+1} T_{s+1} v_{s+1} = 0$$

E portanto:

$$a_1 \lambda_1 v_1 + \dots + a_s \lambda_s v_s + a_{s+1} \lambda_{s+1} v_{s+1} = 0 \quad (**)$$

Agora multiplicamos (*) por λ_{s+1}, e obtemos:

$$a_1 \lambda_{s+1} v_1 + \ldots\ldots + a_s \lambda_{s+1} v_s + a_{s+1} \lambda_{s+1} v_{s+1} = 0$$
$(***)$

Subtraindo $(***)$ de $(**)$, obtemos:

$$a_1 (\lambda_1 - \lambda_{s+1}) v_1 + \ldots\ldots + a_s (\lambda_s - \lambda_{s+1}) v_s = 0$$

Agora, por indução, cada um dos coeficientes acima é 0 (zero):

$$a_1 = \ldots\ldots = a_s = 0$$

E como $\lambda_i \neq \lambda_j$, segue que $(****)$ $a_i = 0$ para $i = 1, \ldots\ldots, i = s$.

Substituindo $(****)$ em $(*)$ temos que:

$$a_{s+1} v_{s+1} = 0$$

E portanto que $a_{s+1} = 0$, o que demonstra o teorema.

<u>Definição 2</u>: Seja A uma matriz quadrada sobre K. Um autovalor de A em K é um escalar $\lambda \in K$ tal que a matriz $(A - \lambda I)$ não é inversível.

Porque $\det(A - \lambda I) = 0 \rightarrow$ Não invertível.

<u>Proposição 1</u>: Se A e B são matrizes $n \times n$ sobre K, então AB e BA tem exatamente os mesmos autovalores.

Prova: Seja λ autovalor de AB com autovetor $v \neq 0$, isto é, $AB(v) = \lambda v$. Então $BA(Bv) = B(ABv) = B(\lambda v) \overset{!}{=} \lambda Bv$.

E portanto λ é também autovalor de BA. A recíproca é análoga.

Observação 1: Já sabemos que podemos associar um $T \in L(V)$ a uma matriz A, em relação a uma base. Assim, podemos escrever, λ é um autovalor de T se e somente se:

$$\det(A - \lambda I) = \det(T - \lambda I) = 0.$$

A e T pode ter bases diferentes, mas o polinômio característico não altera.

Observação 2: Denotamos por $\sigma(A) = \{\lambda \in K;\ \det(A - \lambda I) = 0\}$. Este conjunto recebe o nome de espectro de A. Vale que $p_A(\sigma(A)) = \sigma(p_A(A))$ onde:

$p_A(\lambda)$ é o polinômio característico de A.

Definição 3: O polinômio $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ é chamado polinômio característico de A. Observe então que λ é autovalor de T se e somente se $p(\lambda) = \det(T - \lambda I) = 0$.

Exemplo: Para cada matriz seguinte, encontramos todos os autovalores e uma base de cada auto-espaço.

$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $p_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} -\lambda & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} =$

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} -\lambda & 7 & -6 & -\lambda & 7 \\ -1 & 4-\lambda & 0 & -1 & 4-\lambda \\ 0 & 2 & -2-\lambda & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$[(-\lambda.(4-\lambda).(-2-\lambda)) + \cancel{7.0.0} + (-6.-1.2)] -$

$[7.-1.(-2-\lambda) + \cancel{0.-\lambda.2} + \cancel{0.4-\lambda.-6}]$

$[-\lambda(4-\lambda)(-2-\lambda) + 12] - [-7(-2-\lambda)]$

$[-\lambda(-8-\cancel{4}\lambda+\cancel{2}\lambda+\lambda^2)+12] - [+14+7\lambda]$

$[-\lambda.(-8-2\lambda+\lambda^2] + \cancel{12} - \cancel{14} - 7\lambda$

$[+8\lambda+2\lambda^2-\lambda^3] - 2 - 7\lambda = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$

$p_A(\lambda) = -\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2$, se $\lambda = 1$

$p_A(1) = -(1)^3+2(1)^2+1-2 = -1+2+1-2 = 0$

$\lambda=1$ é uma raiz = autovalor.

Se $\lambda=-1$, $p_A(-1) = -(-1)^3+2(-1)^2-1-2 = +1+2-1-2=0$

$\lambda=-1$ é uma raiz = autovalor.

$-\lambda^3+2\lambda^2+\lambda-2 = (\lambda+1).(\lambda-1).(\lambda \pm ?)$

$= \lambda^2 - \cancel{\lambda} + \cancel{\lambda} - 1$

$= \lambda^2 - 1$

$$
\begin{array}{l|l}
\cancel{-\lambda^3}+2\lambda^2\cancel{+\lambda}-2 & 1\lambda^2-1 \\ \hline
\cancel{+\lambda^3}-0\lambda^2\cancel{-\lambda} & -\lambda+2 \\
\hline
2\lambda^2-2 & \\
-2\lambda^2+2 & \\ \hline
0 &
\end{array}
$$

$$(-\lambda+2)=0$$
$$\lambda=2$$

$P_A(\lambda)=(\lambda+1).(\lambda-1).(\lambda-2)$, Então os autovalores são: $\lambda=1,-1,2.$

Para $\lambda=1$ temos:

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda=1} \begin{bmatrix} -1 & 7 & -6 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Linha 1 x (-1) — Linha 2 + Linha 1 — Linha 2 x 1/4

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 6 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

Linha 3 − 2x linha 2 — Linha 1 + 7x linha 2

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -7 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -9/2 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - \frac{9}{2}z = 0 \\ y - \frac{3}{2}z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
, fixamos o z.

$$x=\frac{9}{2}z, \quad y=\frac{3}{2}z, \quad z$$

$$(x,y,z)=\left(\frac{9}{2}z,\frac{3}{2}z,z\right)=\left(\frac{9}{2},\frac{3}{2},1\right)z$$

$$(x,y,z)=(9,3,2).z.$$

Proposição 2: Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.

Prova: Suponhamos B semelhante a A, isto é, existe uma matriz inversível P tal que:

$$B = P^{-1}AP$$

Então: $\det(B-\lambda I) = \det(P^{-1}AP - \lambda I)$

$I = P^{-1}.P$, então:

$\det(P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P) = \det(P^{-1}(A-\lambda I)P) =$

$\cancel{\det P^{-1}}.\det(A-\lambda I)\cancel{\det P} = \det(A-\lambda I)$

Como $IP = P$ e $I.P^{-1} = P^{-1}$, então, os polinômios característicos são iguais.

Exemplo: As matrizes A e B são semelhantes.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1).(\lambda-2)$$

Sugestão 2: Matrizes semelhantes possuem o mesmo traço, mas este critério não deve ser usado de forma única.

Traço: soma dos elementos da diagonal principal.

Definição 4: Sejam $T \in \mathcal{L}(V)$, e A uma matriz quadrada, e $p(t) = a_0 + \dots + a_n t^n$. Então definimos:

$$p(T) = a_0 I + a_1 T^1 + \dots + a_n T^n \in \mathcal{L}(V), \text{ e}$$

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + \dots + a_n A^n$$

uma matriz quadrada.

Exemplo: Sejam $p(t) = 1 + 2t + t^2$, $T(x,y) = (x+y, x)$ e $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Como $p(t) = 1 + 2t + t^2$, e t é a variável parametrizada então com T é o operador linear, temos:

$$p(T) = I + 2T + T^2$$

Temos que $p(A) = I + 2A + A^2$

$$p(T) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Coluna 1 $= (5,3) = (5x + 3y)$

" $\quad 2 = (3,2) = (3x + 2y)$

$$p(T)(x,y) = (5x + 3y, 3x + 2y)$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0\\2&3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2&0\\4&6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1&0\\8&9\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0\\12&16\end{bmatrix}$$

$$p(A)=I+2A+A^2.$$

Definição 5: Seja $T\in L(V)$ [ou A uma matriz quadrada]. O polinômio minimal de T [ou de A] é um polinômio $m(t)$ tal que:

i) $m(t)$ é o polinômio de menor grau entre os que anulam T [ou A],
ii) $m(t)$ é um polinômio mônico,
iii) o polinômio característico e minimal de T [ou de A] tem as mesmas raízes, exceto possivelmente, por multiplicidade.

Exemplo: Encontre o polinômio minimal:

$$E=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{bmatrix},\; p_E(\lambda)=(2-\lambda)^3,\; \lambda=2.$$

Os possíveis $m(t)=\begin{cases}(2-\lambda)\\(2-\lambda)^2\\(2-\lambda)^3\end{cases}$

$m(t)=(2-\lambda)$ ⇓ menor grau que anula T.

$$\begin{bmatrix}2-\lambda&&\\&2-\lambda&\\&&2-\lambda\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&&\\&0&\\&&0\end{bmatrix}=0$$

Questão 3: Seja A uma matriz simétrica de ordem 3. Dê o seu polinômio característico e minimal.

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & & \\ & b-\lambda & \\ & & c-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow pT(\lambda) = (a-\lambda).(b-\lambda)(c-\lambda)$$

possui 3 raízes reais, com isso seu polinômio minimal é igual a $pT(\lambda)$.

Uma matriz é simétrica quando: $A = A^t$

Proposição 3: Suponha que $f(t)$ é um polinômio (mônico) irredutível para o qual:

$f(T) = 0$, onde $T \in L(V)$. Então $f(t)$ é o polinômio mínimo de T.

polinômio mônico ou mocho: seu termo de maior grau tem coeficiente igual a 1.

Prova: Suponhamos $m(\lambda)$ o minimal, então $\partial m < \partial f$ e também $f = mq + r$ com $r = 0$ ou $\partial r < \partial m$.
Se $\partial r < \partial m$, como $f(T) = m(T).q(T) + r(T)$ e $f(T) = m(T) = 0$ segue que $r(t) = 0$ e daí m não seria o minimal.
Logo $f = mq$ o que também é um absurdo, pois f é irredutível.

Um polinômio irredutível, é um polinômio de grau maior que zero, que não pode ser fatorado em polinômios de graus menores.

Exemplo: Seja $T(x,y) = (x,2y)$. Então $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ e daí $p(T)(x,y) = (x,4y) - (3x,6y) + (2x,2y) = (0,0)$. Logo $p(\lambda)$ é o polinômio minimal de T.

$$p(t)(x,y) = (T)^2 - 3(T) + 2.I$$
$$= (x,2y)^2 - 3(x,2y) + 2.(x,y)$$
$$= (1^2x, 2^2y) - (3.1x, 3.2y) + (2.1x, 2.1y)$$
$$= (x,4y) - (3x,6y) + (2x,2y) = (0,0)$$

Teorema 4: (Teorema de Cayley-Hamilton).

Cada matriz é um zero de seu polinômio característico ou equivalentemente! Seja $T \in L(V)$ e se $p(x)$ é o polinômio característico de T então $p(T) = 0$.

Exemplo: Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para a seguinte matriz:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e para o seguinte operador linear $T(x,y) = (3x+y, 3y)$.

Tomando uma base Canônica:

$T(1,0) = (3,0)$
$T(0,1) = (1,3)$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow p_T(\lambda) = (3-\lambda)^2$

$p_A(\lambda) = (1-\lambda).(-\lambda) - 6$
$\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda+2)(\lambda-3)$

$\Delta = 25$ $\lambda = \frac{1 \pm 5}{2}$ $\to -2$, $\to 3$

$p_T(\lambda) = (3-\lambda)^2$ e $p_A(\lambda) = (-2-\lambda)(3-\lambda)$

$$p_A(A) = A^2 - A - 6 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$p_A(A) = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = (3-\lambda)^2$, então $p_T(T) = (3I - T)^2$, e daí;

$$p_T(\lambda) = (3-\lambda)^2 = 9 - 6\lambda + \lambda^2$$

$$\begin{aligned} p_T(T) &= 9.I - 6(3x+y, 3y) + (3x+y, 3y)^2 \\ &= 9(x,y) - 6(3x+y, 3y) + (9x+6y, 9y) \\ &= (9x, 9y) - (18x + 6y, 18y) + (9x+6y, 9y) \\ &= (0,0) \end{aligned}$$

Definição 6: Sejam $T \in \mathcal{L}(V)$ e W subespaço de V.

Diz-se que W é invariante por T ou T-invariante se $T(W) \subset W$, isto é, para todo $w \in W$ temos $Tw \in W$.

Exemplo: Seja $T \in \mathcal{L}(V)$, então os subespaços $\{0\}$, o próprio V, $\operatorname{Im} T$, $\operatorname{Nuc} T$ e $V(\lambda)$ são invariantes por T.

i) $\{0\} \to T\{0\}$, $T\{0\}$ e $\{0\} \in \{0\}$.
ii) $V \to TV$, TV e $V \in V$
iii) $\operatorname{Im} T \to T \operatorname{Im} T$, $T \operatorname{Im} T$ e $\operatorname{Im} T \in \operatorname{Im} T$
iv) $\operatorname{Nuc} \to T(\operatorname{Nuc})$, $T(\operatorname{Nuc})$ e $\operatorname{Nuc} \in \operatorname{Nuc}$

Sugestão 4: Seja $v \neq 0$ autovetor de T associado a λ. Então $[v]$ é T-invariante. Reciprocamente, se $M = [u]$, e $u \neq 0$ é um subespaço T-invariante, então u é autovetor de T.

Dado $v \neq 0$, um auto vetor T associado a λ, então:

$\lambda_1 \longrightarrow$ gera V_1
$\lambda_2 \longrightarrow$ " V_2
$\vdots$
$\lambda_i \longrightarrow$ gera V_i

$\left\{ i: 1, \dots, n \right.$

Se $[v_i]$ é L.I é uma base, que gera V, logo $T[v] = V$. Portanto T-invariante.

Tomamos agora $M = [u]$ e $u \neq 0$ como um subespaço T-invariante. Temos que $[u]$ é L.I. Então $[u]$ gera M e $T[u]$ gera M, logo é T-invariante.

Exemplo: Seja $T \in L(V)$ e $\lambda \in K$ um autovalor de T. Se $S \in L(V)$ comuta com T, então o auto-espaço de λ, $V(\lambda)$, é invariante sob S.

Temos $V(\lambda) = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$. Devemos mostrar que se $v \in V(\lambda)$ então $Sv \in V(\lambda)$. Agora, $Sv \in V(\lambda)$ se e somente se, $T(Sv) = \lambda(Sv)$. Mas, $T(Sv) = S(Tv) = S(\lambda v) = \lambda(Sv) = \lambda Sv$ e portanto o resultado segue.

Sugestão 5: Se W e W_1 são subespaços T-invariantes então $W \cap W_1$ é também T-invariante.

Tomamos $w \in W$ e $w_1 \in W_1$, sendo W e W_1 ambos T-invariantes, devemos mostrar que $W \cap W_1$ é também T-invariante.

W é T-invariante $\rightarrow$ $w \in W$ e $Tw \in W$
W_1 é T-invariante $\rightarrow$ $w_1 \in W_1$ e $Tw_1 \in W_1$

Se $w^* \in W$ e $w^* \in W_1$ $\rightarrow$ $Tw^* \in W$ e $Tw^* \in W_1$ então $Tw^* \in W \cap W_1$, logo $W \cap W_1$ é T-invariante.

<u>Observação 3</u>: Seja $T \in \mathcal{L}(V)$ e W um subespaço T-invariante. Então podemos definir uma transformação linear $\hat{T}: W \rightarrow W$ por $\hat{T}(w) = T(w)$, isto é $\hat{T}$ é a restrição de T a W. Usamos também as notações T_W ou T/W para $\hat{T}$.

<u>Exemplo</u>: Seja λ um autovalor de T e seja $V(\lambda)$ o auto-espaço associado a λ. Pergunta-se: qual é o operador $T_{V(\lambda)}$?

Temos que $V(\lambda) = \{v \in V; Tv = \lambda v\}$ é T-invariante. Assim, $T_{V(\lambda)}: V(\lambda) \rightarrow V(\lambda)$ é dada por:

$$T_{V(\lambda)}(w) = T(w) = \lambda w$$

E portanto: $T_{V(\lambda)} = \lambda I_{V(\lambda)}$ ou seja: $T_{V(\lambda)}$ é um múltiplo da identidade de $V(\lambda)$.

Proposição 4: Para qualquer polinômio $f(t)$ temos:

i) $f(\tilde{T})w = f(T)w$, para qualquer $w \in W$ com W, T-invariante.

ii) $\tilde{m}(\lambda) \mid m(\lambda)$, isto é, o polinômio minimal de $\tilde{T}$ divide o polinômio minimal de T.

Exemplo: Verificar a Proposição 4 para $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, definindo por $T(x,y) = (x+y, y)$, $W = [(1,0)]$ e $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$.

Seja $w \in W$, então $w = a(1,0)$ e $Tw = aT(1,0) = a(1,0)$. Dado que W é T-invariante.

Defina $\tilde{T}: W \to W$ por $\tilde{T}(w) = \tilde{T}(a,0) = T(a,0) = (a,0)$

$T|_W = T|_W(a,0) = T(a,0) = (a,0)$

Seja $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$.

Para $w \in W$, $f(\tilde{T})w = (a_0 I + a_1 \tilde{T} + a_2 \tilde{T} + a_3 \tilde{T}^3)(w) =$

$a_0 w + a_1 \tilde{T}(w) + a_2 \underbrace{\tilde{T}(\tilde{T})}_{\tilde{T}^2} w + a_3 \underbrace{\tilde{T}(\tilde{T}(\tilde{T}w))}_{\tilde{T}^3} =$

$a_0(a,0) + a_1(a,0) + a_2(a,0) + a_3(a,0)$.

Por outro lado, $f(T)w = (a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3)(w) =$

$a_0 I w + a_1 T(w) + a_2 T(T(w)) + a_3 T(T(T w))) =$

$a_0(a,0) + a_1(a,0) + a_2(a,0) + a_3(a,0)$.

Temos que $\{(1,0), (0,1)\}$ é uma base de V e $\{(1,0)\}$ é uma base de W.

Ainda,

$$p_T(\lambda) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 = m_T(\lambda)$$

obtida por $T(x,y) = (x+y, y)$

$$p_{\hat{T}}(\lambda) = \det(1-\lambda) = (1-\lambda) = m_{\hat{T}}(\lambda)$$

$$m_{\hat{T}}(\lambda) \mid m_T(\lambda)$$

Teorema 5: Sejam $T \in \mathcal{L}(V)$ e U, W subespaços T-invariantes com $V = U \oplus W$. (Soma direta)
Definamos $\hat{T} = T|W$ e $\tilde{T} = T|U$. Então o polinômio minimal de T é o menor múltiplo comum dos polinômios minimais de $\hat{T}$ e $\tilde{T}$.

Prova: Denotemos por $m(\lambda)$, $\hat{m}(\lambda)$ e $\tilde{m}(\lambda)$ os polinômios minimais de $T, \hat{T}, \tilde{T}$ respectivamente. Pela proposição (4), $\hat{m}(\lambda) \mid m(\lambda)$ e $\tilde{m}(\lambda) \mid m(\lambda)$.
Seja $f(\lambda)$ um múltiplo comum de $\hat{m}(\lambda)$ e $\tilde{m}(\lambda)$. Logo $f(\hat{T})W = \{0\}$ e $f(\tilde{T})U = \{0\}$.
Seja $v \in V$ e $v = u + w$, então $f(T)v = f(T)u + f(T)w =$

$$f(\tilde{T})u + f(\hat{T})w = 0 + 0 = 0.$$

Portanto, $f(T) = 0$ e daí $m(\lambda) \mid f(\lambda)$.
Logo $m(\lambda)$ é o menor múltiplo comum de $\hat{m}(\lambda)$ e $\tilde{m}(\lambda)$.

Exemplo: Verificar o Teorema 5 para $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ definida por $T(x,y) = (2x+y, y+2x)$, $W = [(1,-2)]$ e $U = [(1,1)]$.

O polinômio minimal de T é $m(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$.
Como $T(1,-2) = (0,0) \in W$ então W é T-invariante.
Também, $T(1,1) = (3,3) = 3(1,1) \in \mathcal{U}$ e portanto $\mathcal{U}$ é T-invariante.

Ainda $\mathbb{R}^2 = \mathcal{U} \oplus W$.
Temos que $\hat{T}: W \to W$ é dada por $\hat{T}(x,-2x) = 0 = T(x,-2x)$

$$T(x,y) \longrightarrow \hat{T}(x,-2x) = \hat{T}(2.x - 2x, -2x + 2.x) = (0,0)$$

$\tilde{T}: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ é dada por $\tilde{T}(x,x) = (3x,3x) = T(x,x)$.
"$T(1,1) = T(x,x) \longrightarrow T(2.x + x, x + 2.x) = (3x,3x)$"

Logo $\hat{T}] = [0]$ e $\tilde{T}] = [3]$ donde segue que $\hat{m}(\lambda) = \lambda$ e $\tilde{m}(\lambda) = (\lambda - 3)$.

Portanto, $m(\lambda) = m.m.c.(\hat{m}(\lambda), \tilde{m}(\lambda))$.

Sugestão 7: Sejam $\dim V = n$, $\dim M = m$, $A \in \mathcal{L}(V)$ e M invariante com relação a A. Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ base de V onde $\gamma = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é base de M. Seja $A_1 = A|_M$. Então:

$$A]_\beta = \begin{bmatrix} [A_1]_\gamma & [B_0]_{m \times (n-m)} \\ [0]_{(n-m) \times m} & [A_2]_{(n-m) \times (n-m)} \end{bmatrix}$$

Proposição 5: Se $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \ldots \oplus V_r$, onde cada subespaço V_i é de dimensão n_i e é invariante sob $T \in \mathcal{L}(V)$, então pode-se determinar uma base de V tal que a matriz de T em relação a esta base seja da forma:

$$\begin{bmatrix} A_1 & & \bigcirc & 0 \\ 0 & A_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots & 0 \\ 0 & \bigcirc & & 0 \\ 0 & & & A_r \end{bmatrix},$$ onde cada A_i é uma matriz $n_i \times n_i$ e é a matriz da transformação linear induzida por T sobre V_i.

Exemplo: Verificar a proposição anterior para os seguintes subespaços do $\mathbb{R}^4$:

$V_1 = [(1,1,0,0),(0,0,1,1)]$ (onde $T(x,y,z,w) =$
$V_2 = [(0,0,0,1),(0,1,1,0)]$ $(2x, 4x-2y, x-y-z, -4x+4y-4z+3w)$.

É claro que $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$ e que $T \in L(\mathbb{R}^4)$. Ainda,

$\mathbb{R}^4 = [(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1),(0,1,1,0)]$

Temos que:

$T(1,1,0,0) = (2, 4-2, 1-1, -4+4) = (2,2,0,0)$
$T(0,0,1,1) = (0, 0, -1, -4+3) = (0,0,-1,-1)$

Então: $T(a,a,b,b) = (2a, 2a, -b, -b) = 2a(1,1,0,0) + -b(0,0,1,1) \in V_1$

e repetindo o processo p/ V_2:

$T(0,b,b,a) = (0,-2b,-2b,3a) = 3a(0,0,0,1) + -2b(0,1,1,0) \in V_2$

E portanto V_1 e V_2 são T-invariantes.

Donde que $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ é base de V_1 e

$\{(0,0,0,1),(0,1,1,0)\}$ é base de V_2.
Então:
$\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1),(0,1,1,0)\}$
é base de $\mathbb{R}^4$. Temos: $\lambda = 2a, -b, 3a, -2b = (2,-1,3,-2)$

$T(1,1,0,0) = 2(1,1,0,0) + 0(0,0,1,1) + 0(0,0,0,1) + 0(0,1,1,0)$
$T(0,0,1,1) = 0(1,1,0,0) + (-1).(0,0,1,1) + 0.(0,0,0,1) + 0(0,1,1,0)$
$T(0,0,0,1) = 0(1,1,0,0) + 0.(0,0,1,1) + 3(0,0,0,1) + 0(0,1,1,0)$
$T(0,1,1,0) = 0(1,1,0,0) + 0.(0,0,1,1) + 0(0,0,0,1) + (-2)(0,1,1,0)$

Logo:

$$[T] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

T_1 T_2

Mostraremos agora que as matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

São exatamente as matrizes das transformações lineares T_1 e T_2, induzidas por T sobre V_1 e V_2 respectivamente.

Temos que $T_1 : V_1 \to V_1$ é dada por $T_1(a,a,b,b) = T(a,a,b,b) = (2a,2a,-b,-b)$

$T_1(1,1,0,0) = (2,2,0,0) = \underline{2}(1,1,0,0) + 0(0,0,1,1)$
$T_1(0,0,1,1) = (0,0,-1,-1) = 0(1,1,0,0) + (\underline{-1})(0,0,1,1)$

$T_2 : V_2 \to V_2$ é dada por $T_2(0,b,b,a) = T(0,b,b,a) = (0,-2b,-2b,3a)$.

$T_2(0,0,0,1) = (0,0,0,3) = 3(0,0,0,1) + 0(0,1,1,0)$
$T_2(0,1,1,0) = (0,-2,-2,0) = 0(0,0,0,1) + \underline{(-2)}(0,1,1,0)$

Portanto $[T_1] = A_1$ e $[T_2] = A_2$, como queríamos mostrar.