Seja V um espaço vetorial definido sobre um corpo K e de dimensão finita n. Considere um subespaço W de V.

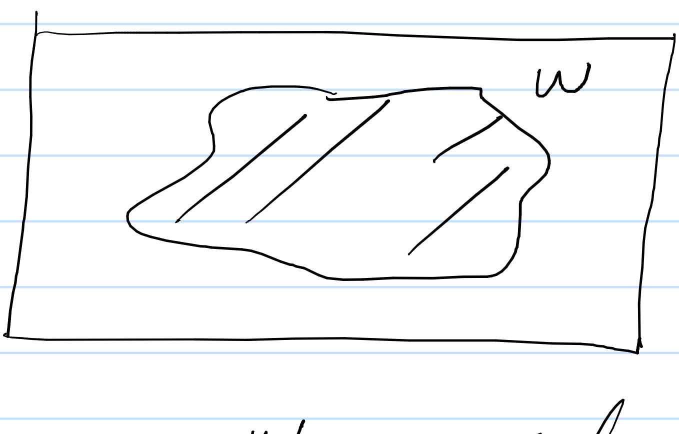
Faça os seguintes itens:

a) Mostre que a dimensão do espaço quociente V/W é igual a $\dim V - \dim W$.

b) Descreva o espaço quociente V/W quando $W = V$.

c) Descreva o espaço quociente V/W quando $W = \{0\}$, o subespaço consistindo somente do vetor nulo.

a) Como W é um subespaço de V, temos que:



$W \subseteq V$

- $\dim V = n$
- $\dim W = m < n$

Tomamos W um subespaço vetorial de dimensão finita, ou seja, $m < n$. Então:

$$\dim V = \dim W + \dim V/W$$

Como V/W é um conjuntos, temos que V/W são os elementos de V menos os elementos de W.

Assim, seja $\{w_1, \ldots, w_m\}$ uma base de W. Podemos completá-la de modo que:

$\{w_1, \ldots, w_m, v_{j+1}, \ldots, v_n\}$, seja uma base de V. Com isso temos que:

$\{v_{j+1}, \ldots, v_n\}$ é uma base de V/W.

Então: $\dim V = \dim W + \dim V/W$

$$n = m + (n-m)$$

$$n = n$$

Então: $\dim V - \dim W = \dim V/W$

Assim $\dim V/W = (n-m)$ elementos e

$\{v_{j+1}, \ldots, v_n\} \in V/W$.

Com isso se $v \in V$, então:

$v = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \lambda_n v_n$

Mas então $v = \lambda_{j+1} v_{j+1} + \ldots + \lambda_n v_n + w$, em que $w = \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_m w_m \in W$.

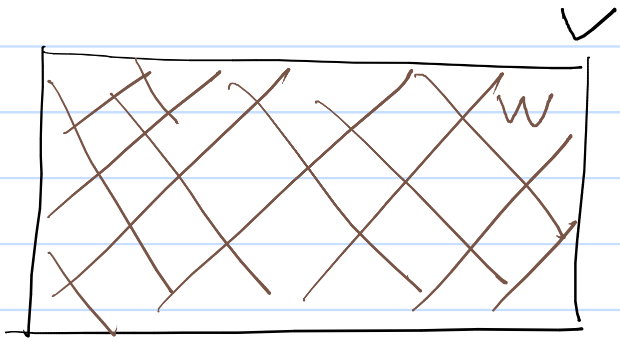
b) Se $W = V$, podemos descrever então que V/W é dado pelo mesmo:

$\{w_1, \ldots, w_m, v_{j+1}, \ldots, v_n\} \in V$ e também pertence a W.

Então $v \in V$ e $V \in W$. Com isso temos que $\dim V = \dim W$ e portanto:

$$V/_W = \{0\}$$

$V = W$



Temos portanto que W é subespaço de V e $\dim V = \dim W$, logo $V = W$.

c) Se $W = \{0\}$, possui somente o vetor nulo.

Temos que:

$\{w_1, \dots, w_m, v_{j+1}, \dots, v_n\} \in V$ e não pertence a W. Com isso temos que $V/_W = V$, ou seja:

$$\dim V = \dim W + \dim V/_W$$

$$n = 0 + (n - 0) \longrightarrow n = n$$

E portanto:

$$V/_W = V.$$