3) Seja $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ o operador linear dado por $T(at^2+bt+c) = (2a-b+c)t^2+(a+c)t+2c$.
Escreva T como soma direta de dois operadores.

Primeiro devemos destacar que se tomarmos os subespaços:

$$W_1 = [\{t^2, t\}], \quad W_2 = [\{t^2+t+1\}]$$

Considerando $w_1 \in W_1$ e $w_2 \in W_2$ temos que:

$$T(w_1) = T(a,b,0)_c = (2a-b)t^2+at, \in W_1$$

$$T(w_2) = T(a,a,a)_c = (2a-a+a)t^2+(a+a)t+2a$$
$$= (2a)t^2+(2a)t+2a = 2a(t^2+t+1) \in W_2$$

Portanto esses subespaços são T-invariantes, perceba que p/ um polinômio qualquer $at^2+bt+c \in P_2(\mathbb{R})$ temos:

$$at^2+bt+c = \overbrace{\left((a-c)t^2+(b-c)t\right)}^{\in W_1} + \underbrace{c(t^2+t+1)}_{\in W_2}$$

$$at^2 - \cancel{ct^2} + bt - \cancel{ct} + \cancel{ct^2} + \cancel{ct} + c$$

$$at^2+bt+c \; //$$

① De onde segue que $P_2(\mathbb{R}) = W_1 + W_2$. Além disso, se $x \in W_1 \cap W_2$ então:

$$\underbrace{at^2+bt}_{W_1} = x = \underbrace{c(t^2+t+1)}_{W_2} \Rightarrow$$

$$at^2+bt-c(t^2+t+1) = 0 \Rightarrow (a-c)t^2+ (b-c)t^2 + -c = 0$$

Onde necessariamente $-c=0$. Então $a=b=0$ e portanto $x=0$. Portanto $x=0$, logo $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ de onde segue que a soma na verdade é uma soma direta.

Com o argumento anterior, foi mostrado que o conjunto $B = \{t^2, t, t^2+t+1\}$ é uma base de $P_2(\mathbb{R})$.

Com isso, definimos então dois operadores que são a restrição de T nos subespaços W_1 e W_2:

$$T_1 : W_1 \to W_1 \qquad\qquad T_2 : W_2 \to W_2$$
$$(at^2 + bt) \to (2a-b)t^2 + at \qquad\qquad x \to 2x$$

E sob essas condições, temos que $T_B = T_1 \oplus T_2$:

$$T_B(t^2) = 2t^2 + t = T_1(t^2)$$
$$T_B(t) = -t^2 = T_1(t)$$

Decompomos T_1,

$$T_B(t^2+t+1) = \underbrace{2t^2+2t+2}_{2(x)} = T_2\underbrace{(t^2+t+1)}_{x}$$

4) Sejam $T: V \to V$ um operador linear, $W \subseteq V$ um subespaço de V e $\lambda \in K$. Mostre que W é $(\lambda I - T)$-invariante se e somente se W for T-invariante.

Suponha que W seja $(\lambda I - T)$-invariante, logo se $w \in W$ então $(\lambda I - T)(w) = x \in W$, porém veja que:

$$(\lambda I - T)(w) = \lambda w - Tw = x \rightarrow Tw = \lambda w - x$$

se $x = \lambda w - x$. Agora suponha que W seja T-invariante, logo:

$$(\lambda I - T)(w) = \lambda w - T(w) \in W,$$ pois $\lambda w \in W$.

2) Seja $T \in L(V,V)$ tal que $p_T(x) = (x-\lambda_1)^{n_1} \cdots (x-\lambda_k)^{n_k}$, $n_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Mostre que T pode ser escrito como soma direta de k operadores lineares.

Seja $v \in V$, então:

$$V = E_1(v) + \dots + E_k(v)$$ e

$$T(v) = T(E_1(v)) + \dots + T(E_k(v))$$

$$T(v) = c_1 E_1(v) + \dots + c_k E_k(v)$$

Ou seja, $T = c_1 E_1 + \dots + c_k E_k$

Suponhamos, agora, que sejam dados um operador linear T, escalares distintos $c_1, \ldots, c_k$ e operadores não-nulos $E_1, \ldots, E_k$ satisfazendo:

i) $T = c_1E_1 + \ldots + c_kE_k$
ii) $I = E_1 + \ldots + E_k$
iii) $E_iE_j = 0$, se $i \neq j$

Como $E_iE_j = 0$, para $i \neq j$, temos, multiplicando ambos os membros de $I = E_1 + \ldots + E_k$, por E_i, que $E_i = E_i^2$. E, multiplicando a identidade;

$T = c_1E_1 + \ldots + c_kE_k$ por E_i, resulta que: $TE_i = c_iE_i^2 = c_iE_i$, o que mostra que todo vetor na imagem de E_i está no núcleo de $T - c_iI$.

Como $E_i \neq 0$, existe um vetor não-nulo no núcleo de $T - c_iI$, ou seja c_i é autovalor de T. Além disso, os escalares c_i, $i = 1, \ldots, k$ são os únicos autovalores de T.

De fato, se c é um escalar arbitrário, temos:

$$(T-cI) = (c_1-c)E_1 + \dots + (c_k-c)E_k$$

Logo, se $(T-cI)(v) = 0$, devemos ter $(c_i - c)E_i(v) = 0$, $i = 1, \dots, k$, pois:

$$V = E_1(V) \oplus \dots \oplus E_k(V)$$

Como $E_iE_j = 0$, $i \neq j$, $E_j^2 = E_j$ e $I = E_1 + \dots + E_k$.

Se v não é o vetor não nulo, existe i tal que $E_i(v) \neq 0$, de modo que $c_i - c = 0$ para tal i.

Temos que T é diagonalizável, pois todo vetor não-nulo na imagem E_i é um autovetor e todo vetor v se escreve na forma:

$$V = E_1(V) + \dots + E_k(V)$$

Ou seja, os autovetores de T geram V. E cada autovetor é um autoespaço distinto. Então é a soma direta de vários operadores lineares dada por:

$V = E_1(v) + \dots + E_k(v)$,

$T(v) = TE_1(v) + \dots + TE_k(v)$, onde cada $T(V_i)$ é dado por: $p_T(x) = (\lambda - \lambda_i) = T(V_i)$

Assim:

$$T = T_1 \oplus \dots \oplus T_k$$