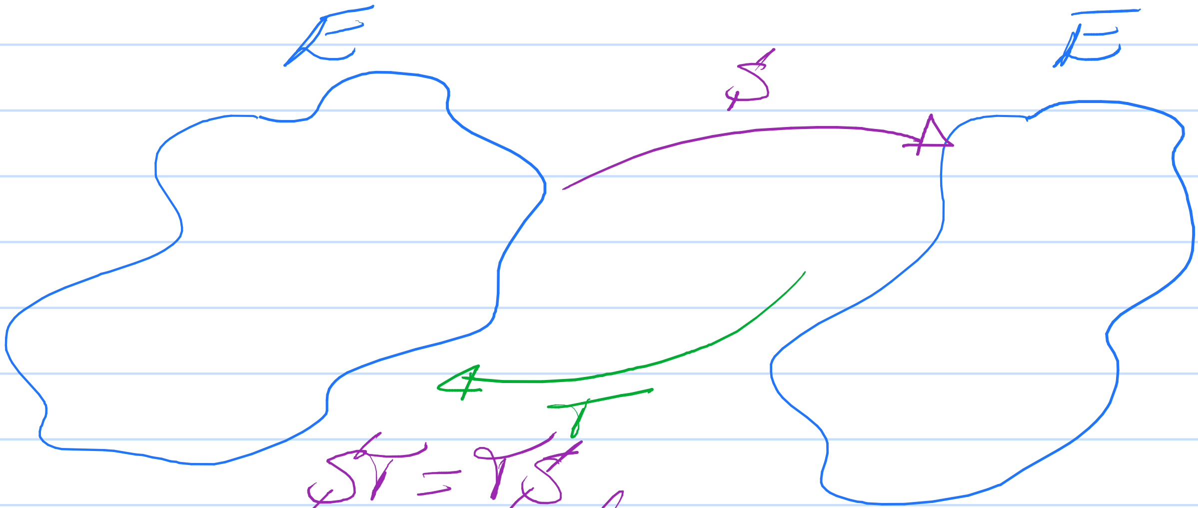
Faça o exercício 5 da seção 10.6, página 222.

5) Seja E um espaço euclidiano complexo. Sejam $S, T : E \to E$ operadores lineares, com $ST = TS$. Mostre que ST tem autovalores em comum.



$ST = TS$
Comutativo.

Teorema: da decomposição primária

Sejam X um espaço vetorial real de dimensão finita X e $T: X \to X$ uma aplicação linear. Seja $p \in \mathbb{R}[z]$ o polinômio característico de T. Se:

$$p(z) = [p_1(z)]^{s_1} \cdots [p_\ell(z)]^{s_\ell}$$

For uma decomposição de $p(z)$ em fatores irredutíveis, com $p_i \neq p_k$ para $i \neq k$. Então, o polinômio mínimo de T é:

$$m(z) = [p_1(z)]^{d_1} \cdots [p_\ell(z)]^{d_\ell},$$

Em que $0 < d_i \leq s_i$ para $i = 1, \ldots, \ell$.

O espaço X se decompõe como soma direta de subespaços.

$$X = W_1 \oplus \dots \oplus W_l,$$

Sendo $W_i = \operatorname{nuc}[p_i(T)]^{d_i} = \operatorname{nuc}[p_i(T)]^{s_i}$ invariante por T. Se p_i tiver dois graus, $\dim W_i = 2s_i$.

Temos que $S, T : E \to E$ são operadores lineares e $ST = TS$.

Pelo lema: "Sejam $S, T : E \to E$ duas aplicações lineares no espaço de dimensão finita E. Supondo que $ST = TS$, então existe uma base de E na qual tanto S como T realizam sua decomposição primária.

Com isso pelo Teorema da decomposição primária, seja $W_i = \operatorname{nuc}[p_i(T)]^{d_i}$. Se $w_i \in W_i$, afirmamos que $Sw_i \in W_i$. Isto é, temos que W_i é um subespaço invariante também para S. Então:

$$[p_i(T)]^{d_i} S w_i = S[p_i(T)]^{d_i} w_i = 0$$

Como S e T possuem a mesma base, podem gerar os mesmos vetores, e uma base é formada por vetores L.I que são gerados por autovalores distintos.

Assim, tomando a seguinte proposição:

"Sejam $S, T: E \to E$ duas aplicações lineares no espaço de dimensão finita E sobre $\mathbb{C}$. Suponhamos que $ST = TS$, então existe uma base de E formada por autovetores generalizados de S e T."

Como consideramos $W_i = \text{nuc}(T - \lambda_i I)^{d_i}$ sendo invariante por S. Então, todos os elementos não nulos de W_i são, por definição, autovetores generalizados de T.

Aplicando o teorema da decomposição primária ao subespaço W_i com respeito a S, e obteremos uma divisão desse subespaço em subespaços formados por autovetores generalizados de S.

E como S e T possuem a mesma base, logo possuem os mesmos autovetores, que são gerados pelos mesmos autovalores.

Com isso temos que S e T possuem pelo menos um autovalor em comum, se caso esta base for separada em autovetores de T e autovetores de S.

Dado que S e T são invariantes. Com isso tomamos o corolário:

"Sejam $T, S: E \to E$ operadores lineares cujos polinômios mínimos são produtos dos fatores lineares.

Se $TS = ST$, então T e S possuem a mesma decomposição em soma direta por subespaços invariantes.

O teorema da decomposição primária garante esta decomposição em soma direta de subespaços, que são gerados por pelo menos um autovalor igual para S e T.