Faça o exercício 12 da seção 10.6 na página 223.

12) Mostre que um operador T é positivo definido se, e somente se, $T \geq 0$ e T for invertível.

Definição: Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $T: V \to V$ linear. Dizemos que T é positivo e escrevemos $T > 0$, se $T = T^*$ e $\langle Tv, v \rangle > 0$ para todo $v \neq 0$. Se $T = T^*$ e $\langle Tv, v \rangle \geq 0$ para todo $v \in V$, dizemos que T é não-negativo, e escrevemos $T \geq 0$.

Pelo enunciado temos que T é positivo definido, logo $T > 0$ se $T = T^*$ e $\langle Tv, v \rangle > 0$ para todo $v \neq 0$.

Com isso temos a proposição: "Um operador auto-adjunto $(T = T^*)$, com: $T: V \to V$, é positivo (respectivamente não-negativo), se e somente se, seus autovalores são todos positivos (respectivamente não-negativos).

Então: se $T > 0$ e $Tv = \lambda v$ com $v \neq 0$, então $\lambda \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle > 0$, onde $\lambda > 0$.

Temos também a recíproca, dados os autovalores $\lambda \in T$, são todos positivos, e sejam:

$(v_1, \dots, v_n)$ uma base ortonormal de V tal que: $Tv_i = \lambda_i v_i$, com $1 \leq i \leq n$.

Assim, se $v \in V$ então $v = \sum_{i=1}^{N} a_i v_i$ e

$$\langle Tv, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \langle a_i \lambda_i v_i, a_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |a_i|^2 > 0$$

Onde $T > 0$.

Agora se $T \geq 0$, tomamos os autovalores de T também positivos, com a mesma base (v_i) e $Tv_i = \lambda_i v_i$, $1 \leq i \leq n$. Então se $v \in V$.

$$v = \sum_{i1}^{N} a_i v_i \text{ e } \langle Tv, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \langle a_i \lambda_i v_i, a_j v_j \rangle = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |a_i|^2 \geq 0 \text{ e } T \geq 0.$$

Assim atendemos as duas condições da definição, e tomamos agora o corolário:

"Seja $T \geq 0$, se $v \in V$ é tal que $\langle Tv, v \rangle = 0$ e então $Tv = 0$."

Com isto temos que se $T > 0$ então $T \geq 0$ e $Tv \neq 0$ para todo $v \neq 0$, com isto temos que T é invertível.

E se $T \geq 0$ é invertível então $Tv \neq 0$ para todo $v \neq 0$ e $\langle Tv, v \rangle$ é positivo, pelo corolário anterior temos que $T > 0$.