Autovalores Idêntico - Induz ao Erro

Matrizes 3x3: Autovalores, $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$
estes 3 autovalores distintos podem gerar 3 autovetores formando uma Base p/ o autoespaço em $\mathbb{R}^3$.

Pode acontecer de surgir:

1/ 2 autovalores idênticos, subespaço em $R^3 \rightarrow$ Plano., $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$

2/ 3 autovalores idênticos, subespaço em R^3 - reta., $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$

Ex: Dada a matriz, calcular seus autovalores e seus respectivos autovetores

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 8 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Ax = \lambda x = \lambda I x$$

$$(A - \lambda I) = 0$$

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$p_T(x) = (2-\lambda)^2 \cdot (4-\lambda)$, $\lambda = 2, 4.$

$m_T(x) = (2-\lambda) \cdot (4-\lambda)$,

Para $\lambda = 2.$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0x + 0y + 0z = 0 \\ 0x + y0 + 0z = 0 \\ 4x + 8y + 2z = 0 \end{cases}$$

Como temos duas linhas nulas, temos 2 autovetores.

$$4x + 8y + 2z = 0 \rightarrow 4x = -8y - 2z \quad (\div 4)$$

$$x = -2y - \tfrac{1}{2}z$$

$(x, y, z) = (-2y, -\tfrac{1}{2}z, y, z)$, então:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = y \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_1} + z \underbrace{\begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{\vec{v}_2}$$

$Ma = Mg$

Para $\lambda = 4$,

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 4 & 8 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -2x + 0y + 0z = 0 \\ 0x - 2y + 0z = 0 \\ 4x + 8y + 0z = 0 \end{cases}$$

Não tem linhas nulas.

$-2x = 0$ $\quad$ $-2y = 0$ $\quad$ $4x + 8y + 0z = 0$

$x = 0$ $\quad$ $y = 0$ $\quad$ $4x = -8y$

$4.0 = -8.0$

Temos que z é qualquer Real.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} -2 & -1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

v_3

$a.v_1 + b.v_2 + c v_3 = 0$, se $a = b = c = 0$ é l.i

$a(-2,1,0), b(-\frac{1}{2},0,1) + c(0,0,1) = 0$

$-2a - \frac{b}{2} + c0 = 0 \rightarrow a = 0 - \frac{b}{2} + 0.c \Rightarrow b = 0$

$a + b.0 + c.0 = 0 \rightarrow a = 0$

$0 \cdot a + b + c = 0 \rightarrow b + c = 0 \rightarrow c = 0.$
$a = 0$ $b = 0$

Temos que $\{v_1, v_2, v_3\}$ geram $\mathbb{R}^3$.

Se os autovalores de uma matriz $n \times n$ forem distintos (basta) então os respectivos n autovetores formam uma base p/ o $\mathbb{R}^n$.

Se os autovalores forem (alguns ou todos) idênticos: $p \leq n$ autovetores L.I., ou seja formam um espaço ou subespaço ou subespaço.

Se $p = n \Rightarrow$ espaço
Se $p < n \Rightarrow$ subespaço