1) Seja V um espaço euclidiano complexo. Dê um exemplo mostrando que a validade do teorema de pitágoras não implica que $x \perp y$.

<u>Definição</u>: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K. Um <u>produto interno</u> em V é uma aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \to K$ satisfazendo às seguintes propriedades:

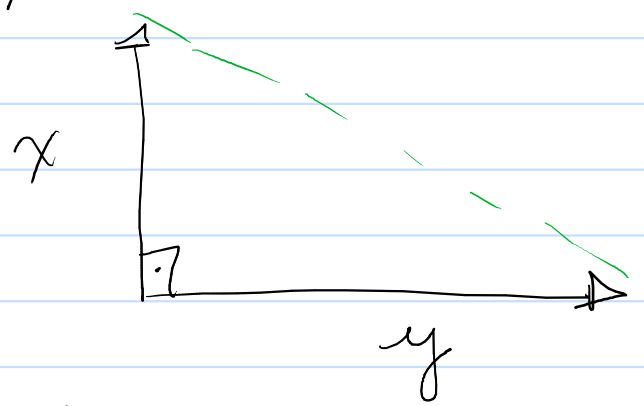
i) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$

ii) $\langle u + \lambda v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle$

iii) $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$, se e somente se, $v = 0$

Um espaço V com produto interno é chamado euclidiano, se ele tem dimensão finita.

Devemos mostrar que $x \not\perp y$ em um espaço euclidiano complexo V.



$x = a + ib$

$y = c + id$

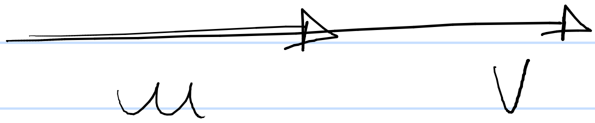
Ou seja $\langle x, y \rangle \neq 0$

Sabemos que $\langle x, y \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$

$\langle (a+ib), (c+id) \rangle = \langle (a-ib), (c-id) \rangle$

$(ac + aid + cid - bd) = (ac - aid - cid - bd)$

$(ac - bd + i(ad + cd)) = (ac - bd - i(ad + cd))$



$V = (2+i, 0)$

$u = (1+i, 0)$

$\langle u, v \rangle = \langle (2+i, 0), (1+i, 0) \rangle = (2+i).(1+i) = 2+2i+i$
$-1 = (1+3i)$

$(1+i, 0)(x+yi, 0) = (0)$

$x + iy + ix - y = 0 \rightarrow \begin{cases} x - y = 0 \rightarrow x = y \\ ix + iy = 0 \end{cases}$

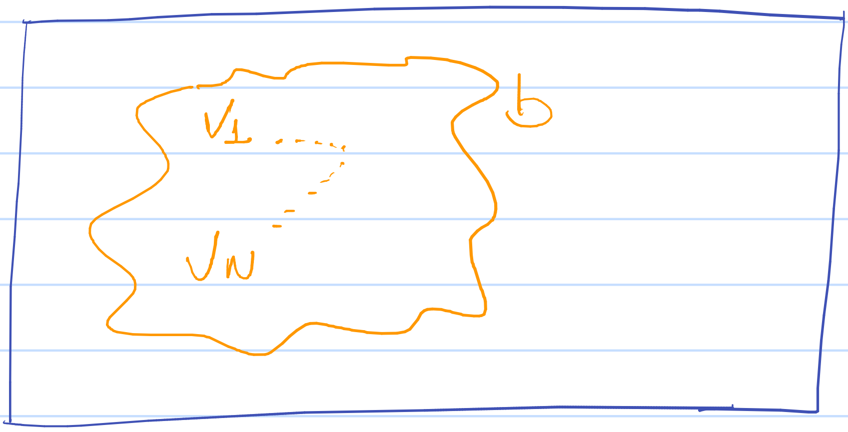
$2xi = 0 \rightarrow x = 0$

2) Seja $\{v_1, \ldots, v_N\}$ é uma base arbitrária do espaço euclidiano real V.

Defina $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Se:

$u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_N v_N$ e $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_N v_N$

• Mostre que: $\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} g_{ij} \alpha_i \beta_j$ ✓



base de V

V espaço euclidiano

$g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$

$$\langle u, v \rangle = \langle (\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_N v_N), (\beta_1 v_1 + \ldots + \beta_N v_N) \rangle$$
$$= \alpha_1 v_1 \beta_1 v_1 + \ldots + \alpha_N v_N \beta_N v_N$$
$$= \alpha_1 (v_1 \beta_1 v_1) + \ldots + \alpha_N (v_N \beta_N v_N)$$
$$= \alpha_1 \beta_1 (v_1 v_1) + \ldots + \alpha_N \beta_N (v_N v_N)$$
$$= \alpha_1 \beta_1 (v_1 \cdot v_1) + \ldots + \alpha_N \beta_N (v_N v_N)$$
$$= \alpha_i \beta_j \langle v_i, v_j \rangle, \text{ sendo } i, j = 1, \ldots, N$$
$$= \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \beta_j \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \beta_j g_{ij} = \langle u, v \rangle$$

• Mostre também que a matriz $G = (g_{ij})$ é simétrica e positiva, isto é, se $x = (x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^N$.

$$\sum_{i,j=1}^{N} g_{ij} x_i x_j = x^T G x > 0 \quad \forall x \neq 0$$

A positividade é dada pelo produto entre um vetor por ele mesmo: $\langle u, u\rangle \geq 0$ e $u \neq 0$.

Tomamos: $\langle x_i, x_j\rangle = \langle (x_1, \dots, x_N), (x_1, \dots, x_j)\rangle$
$= (x_1 x_1 + \dots + x_j x_j) = \sum_{i,j=1}^{N} x_i \cdot x_j$

Temos que $x \neq 0$, logo: $\sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j \neq 0$, então:

$$\sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{N} x_j x_i, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} x_i x_j = [x_1, \dots, x_j] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_j \end{bmatrix}$$

Aí $G = (g_{ij}) = (\alpha_i, \beta_j)$ produto de dois escalares

Então

$$\sum_{i,j=1}^{N} (g_{ij}) x_i x_j = \sum_{i,j=1}^{N} x_i (g_{ij}) x_j \neq 0$$
$$= \sum_{i,j=1}^{N} x^T G x > 0$$

- Reciprocamente, fixada a base $\{v_1, \dots, v_N\}$ do espaço real V e dada uma matriz simétrica positiva G, mostre que $(G, 4)$ define um produto interno em V.

Com a base $\{v_1, \dots, v_N\} \in V$, e tomamos G simétrica com $G = \{x_1, \dots, x_N\}$ com $x > 0$.
Então:

$$\langle (v_1, \dots, v_N), (x_1, \dots, x_N)\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} v_i x_j \neq 0$$

$$\sum_{i,j=1}^{N} v_i x_j = \langle v, x\rangle = \langle x, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{N} x_j v_i$$

3) Seja V um espaço euclidiano complexo $\{v_1, \dots, v_N\}$ em uma base desse espaço.

① Defina $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$ e mostre que

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{N} g_{ij} \alpha_i \beta_i$$

Tomamos V como um espaço euclidiano complexo, onde:

$$v_i = a_i + ib_i \text{, para } i = 1, \dots, N$$

Com isso: $\langle v, v \rangle = \langle (v_1, \dots, v_N), (v_1, \dots, v_N) \rangle =$

$\langle (a + ib, \dots, a_N + ib_N), (a + ib, \dots, a_N + ib_N) \rangle =$

$[(a^2 + aib + aib - b^2) + , \dots + (a_N^2 + a_N b_N i + a_N b_N i - b_N^2)]$

$= [(a^2 + 2ab i - b^2) + , \dots , + (a_N^2 + 2a_N b_N i - b_N^2)]$

$= \sum_{i,j=1}^{N} (a_i^2 + 2a_i b_j i - b_j^2) = \sum_{i,j=1}^{N} g_{ij}$, como

cada $v_i \in \mathbb{C}$ então se tomarmos o produto de escalares $\alpha_i \beta_j$, temos:

$\sum_{i,j=1}^{N} \alpha_i \beta_j (g_{ij})$, e

$$[(a + bi), \dots, (a_N + ib_N)] \cdot \begin{bmatrix} (a+ib) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ (a_N + ib_N) \end{bmatrix} = G$$

4) Seja $C([a,b],K)$ o espaço das funções contínuas. $f:[a,b] \to K$

Mostre que: $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$ defina um produto interno nesse espaço.

Temos C um espaço vetorial das funções contínuas, dada por:

$f:[a,b] \to K$

Axiomas do produto interno:

- Simetria: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
- Linearidade: $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

  $\langle u+w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$
- positividade: $\langle u, u \rangle > 0$

  $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

i) Tomamos $g(t) \in \mathbb{R}$, logo $\overline{g(t)} = g(t)$

$$\int_a^b f(t)\,g(t)\,dt = \int_a^b g(t)\,f(t)\,dt$$

se $g(t)f(t) = w(t)$, como a ordem dos fatores não altera o produto $w(t) = f(t)g(t)$.

$$\int_a^b w(t)\,dt$$

. $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

$$\int_a^b \lambda f(t)\, g(t)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt$$, dado

que um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ pode sair da integral.

. $\langle u+w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$

Se $w = w(t)$, então:

$$\int_a^b (f(t) + w(t))\, g(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, g(t)\, dt + \int_a^b w(t)\, g(t)\, dt$$

. $\langle u, u \rangle \geq 0$

$$\int_a^b f(t)\, f(t)\, dt = \int_a^b f(t)^2\, dt$$, como o quadrado de um número sempre é maior que 0, então é valido.

. $\langle u, u \rangle = 0 \leftarrow u = 0$

Se $f(t) = 0 \rightarrow \int_a^b f(t)^2\, dt = \int_a^b 0^2\, dt = 0$

Portanto é um produto interno em $\mathbb{R}$.

ii) Tomamos agora $g(t) \in \mathbb{C}$, então $\overline{g(t)}$ é o conjugado de $g(t)$, se:

$g(t) = (a+bi) \longrightarrow \overline{g(t)} = (a-bi)$

- $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

$$\int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_a^b (c+di)\cdot(a-bi)\,dt$$

$$\int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_a^b \overline{g(t)}\cdot f(t)\,dt = \int_a^b \overline{g(t)\,\overline{f(t)}}\,dt$$

- $\langle \lambda u, v\rangle = \lambda\langle u, v\rangle$

$$\int_a^b \lambda f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

- $\langle u+w, v\rangle = \langle u, v\rangle + \langle w, v\rangle$

$$\int_a^b (f(t)+w(t))\,\overline{g(t)}\,dt = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt + \int_a^b w(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

- $\langle u, u\rangle \geq 0$ e $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

prova do anteriormente.

5) Considere agora o espaço $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$. Mostre que o conjunto:

$X = \{1, \sin t, \cos t, \sin 2t, \cos 2t, \ldots\}$ é um conjunto ortogonal.

Conjunto ortogonal ou ortonormal $\rightarrow$ L.I

Base ortogonal: produto interno de um vetor com cada um dos outros é igual a zero, ou seja, todos os vetores forem perpendiculares entre si.

Base ortonormal: Além da propriedade da base ortogonal, o produto interno de um vetor com ele mesmo deve ser 1. Modulo igual a 1.

Temos que o conjunto X esta no domínio $[-\pi, \pi]$, então:

$$X = \{1, (\sin t, \sin 2t, \dots), (\cos t, \cos 2t, \dots)\}$$

E um conjunto ortogonal é um base e todos os vetores são perpendiculares, logo: $x_1 \perp x_2$ e $\langle x_1, x_2 \rangle = 0$

$$X = \{(1,0), (0,-1)\}$$

$$\langle x_1, x_2 \rangle = \langle (1,0), (0,-1) \rangle = 0$$

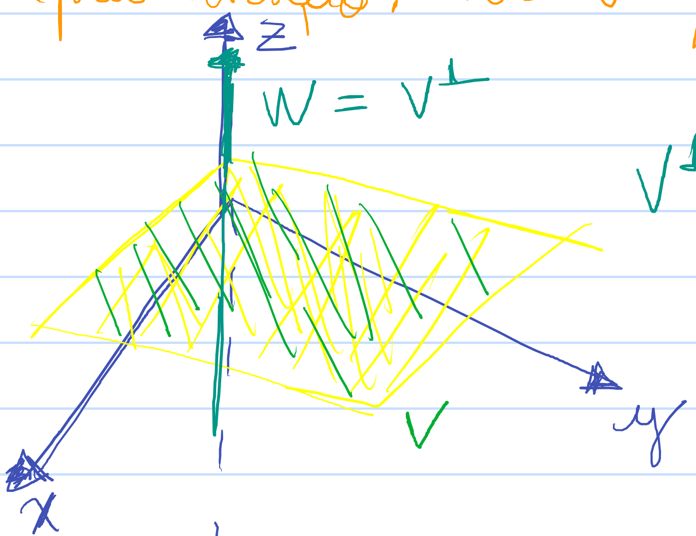
6) Considere então o espaço vetorial $C([-1,1], \mathbb{R})$. Seja $P \subset C([-1,1], \mathbb{R})$ o subespaço formado por todas as funções pares e $I \subset C([-1,1], \mathbb{R})$ o subespaço formado por todas as funções ímpares. Mostre que $I = P^{\perp}$.

Temos $C([-1,1], \mathbb{R}) : C : [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$
Temos $P \subset C$, sendo "p" um subespaço formado por funções pares. E $I \subset C$ subespaço formado por funções ímpares.

$C = P \oplus I$, queremos mostrar que $I = P^{\perp}$ (p perpendicular)!

O complemento ortogonal de um conjunto V é um conjunto W em que todos os elementos são ortogonais aos elementos de V.

Representação: $W = V^{\perp}$, e $V^{\perp}$ sempre será um subespaço vetorial



$V^{\perp} = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V \}$

P = funções pares:
$f(x) = 2x$
I = funções ímpares:
$g(x) = 2x + 1$

Temos que $\langle f(x), g(x) \rangle = 0 \rightarrow$
$\langle P, I \rangle = 0 \perp \langle P^{\perp}, P \rangle = 0$

Tomamos os elementos no domínio $[-1, 1]$.

$f(-1) = -2$, $f(0) = 0$, $f(1) = 2$

$P = (-2, 0, 2)$ e $P^{\perp} = (x, y, z)$

$\langle p, p^{\perp} \rangle = \langle (-2, 0, 2), (x, y, z) \rangle = 0$

$-2x + 0y + 2z = 0$, x, y, z são ímpares

$-2x = -2z \quad (-1)$ Se $x = n+1 = z$

$2x = 2z$

$x = z$ Então $g(-1) = 1$, $g(0) = 0$

$P = (-2, 0, 2)$ e $I = p^{\perp} = (1, 0, 1)$

Portanto $I = p^{\perp}$

7) Seja $R(t)$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$. Verifique que:

$X = \{1, t, t^2, \dots\}$, é uma base desse espaço. Encontre os 4 primeiros termos da base obtida ao se aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à base X.

Temos que X é uma base canônica do espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$, onde X é uma base de $\mathbb{R}^N$. Temos que uma base ortogonal é L.I., logo uma base ortonormal é L.I.

$V_1 = W_1$, $W_2 = V_2 - \left(\frac{V_2 \cdot W_1}{W_1 \cdot W_1}\right) \cdot W_1$, $W_1 \perp W_2$

$$W_3 = V_3 - \left(\frac{V_3 \cdot W_2}{W_2 \cdot W_2}\right) \cdot W_2 - \left(\frac{V_3 \cdot W_1}{W_1 \cdot W_1}\right) \cdot W_1$$

Assim $W_3 \perp W_2$ e $W_1 \perp W_2$, $W_3 \perp W_1$, e $B = \{W_1, W_2, \ldots, W_N\}$ é uma base ortogonal para V.

$B' = \left\{\frac{W_1}{|W_1|}, \frac{W_2}{|W_2|}, \ldots, \frac{W_N}{|W_N|}\right\}$, é uma base ortonormal para V.