Exemplo: Sejam $(\mathbb{R}^+, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (onde + e · são operações usuais de $\mathbb{R}^2$) e $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por:

$$T(x,y) = (ax+by,\ cx+dy);\ (x,y,x) \in \mathbb{R}^3$$

Mostre que $T \in L(\mathbb{R}^2)$ e analise se o operador linear possui autovalores reais e quantos são:

Usaremos a base canônica $B = \{(1,0), (0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ para obter o polinômio característico $p_T(\lambda)$ associado ao operador $T$.

$$T(1,0) = (a,c) = a.(1,0) + c(0,1) - \text{col } 1$$
$$T(0,1) = (b,d) = b.(1,0) + d(0,1) - \text{col } 2$$

Segue que: $[T]_B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Assim,

$$p_T(\lambda) = \det([T]_B - \lambda I_2)$$
$$= \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \det\begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc, \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim temos que o escalar $\lambda$ será um autovalor do operador linear $T$ se, e somente se, $p_T(\lambda) = 0$, isto é, se e somente se,

$$\lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

$$(a+d)^2 - 4(ad - bc) = \Delta \geq 0$$

Possibilidades:

1) $(a+d)^2 = 4(ad - bc)$

$$a^2 + \cancel{2ad} + d^2 = \cancel{4}ad - 4bc$$
$$a^2 + d^2 = 2ad - 4bc$$
$$a^2 - 2ad + d^2 = -4bc$$
$$(a-d)^2 = -4bc$$

$$(a-d)^2 = -4bc$$

$$bc = \frac{-(a-d)^2}{4}$$

$$\lambda = \frac{+(a+d) \pm \left((a+d)^2 - 4(ad-bc)\right)^{1/2}}{2(a+d)^2}$$

$$\lambda = 1 \pm \frac{1(-4(ad-b))^{1/2}}{2(a+d)^2}$$

# Exercícios 5.3

1) Seja $T \in L(V,V)$ um operador linear com polinômio característico:

$$p_T(x) = x^N$$

Mostre que existe $m \geq 1$ tal que $T^M = 0$.

$$T^M = \sum_{i=0}^{M-1} a_i T^i = 0, \quad \forall v \in V$$

$$T^M = a_0 T + a_1 T + \dots\dots + a_{M-1} T^{M-1} = 0$$

Temos que $pT(x) = x^N$ é gerado da matriz:

$$\det T = \begin{bmatrix} x & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & x & & & \vdots \\ 0 & 0 & x & & 0 \\ 0 & \vdots & & \ddots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \vdots & 0 & x \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$pT(x) = x^N$, é o produto da diagonal principal.

Temos que: $T^M = a_0 T^0 + a_1 T + \ldots\ldots + a_{M-1} T^{M-1} = 0$

Se tomarmos $T^M$ até $T^M$, teremos:

$$a_0 T^0 + a_1 T + ,,,,,,, + a_{M-1} T^{M-1} + a_M T^M = 0$$

Como as somas começam com $a_0 T^0$, temos $T^{M+1}$, ou seja $(M+1)$ combinações lineares possíveis. Então temos que $T^M$ é l.d, ou seja existe algum $T$ que é combinação linear com outro. E com coeficientes não todos nulo que é igual ao operador nulo.

Em razão disto existe um $M$ mínimo tal que: $I, T, T^2, \ldots, T^{M-1}$ é l.i. Temos que $M \leq N$ no máximo para cumprir a propriedade de l.i.

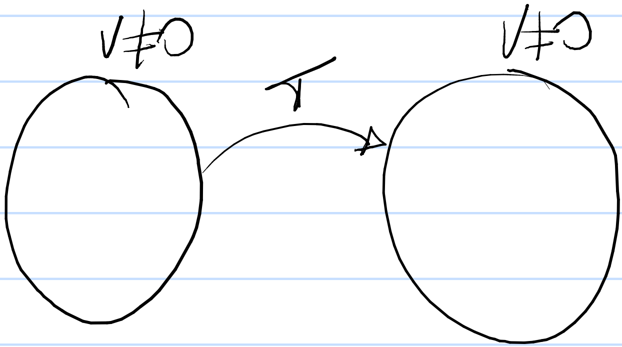
Para: $a_0T^0 + a_1T + \ldots + a_MT^M = 0$, existe algum coeficiente que é diferente de 0, ou seja: $\exists a_i \neq 0$ para $i: 1, \ldots, m$.

Então se $a_MT^M = 0$, ~~logo~~: $a_M \neq 0$ teríamos:

$$a_0T^0 + a_1T + \ldots + a_{M-1}T^{M-1} = 0$$

Assim teríamos $M$ termos e o $(M-1)$ teria a menor propriedade para ser l.d. Contudo isto não pode acontecer porque temos $m$ termos a partir de $a_0$, então pela escolha inicial com as condições mínimas deve ser o $a_MT^M$.

2) Seja $T \in L(V,V)$ um operador linear com polinômio minimal $m_T(x) = (x-\lambda)$ com $\lambda \in \mathbb{R}$. Mostre que $T$ é diagonalizável.




$m_T(x) = (x-\lambda)$, com $\lambda \in R$.

$m_T(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$, $n=1$, $A = a_i x_i$

Como o grau de $m_T(x)$ a $p_T(x)$ então:

$p_T(x) = (x-\lambda)^2$, e $m_T(x) = (x-\lambda)$

Temos que $p_T(x)$ possui duas raizes iguais a $\lambda = x$. Temos que:

$\det = p_T(x) = (x-\lambda)^2 = \begin{bmatrix} x-\lambda & 0 \\ 0 & x-\lambda \end{bmatrix}$, então

$$\begin{bmatrix} x-\lambda & 0 \\ 0 & x-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Se $\lambda = x$, temos: $\begin{bmatrix} x-\lambda & 0 \\ 0 & x-\lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x \cdot 0 + y \cdot 0 = 0 \\ x \cdot 0 + y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0 \text{ e } x = 0.$$

$V(x, y) = (0, 0)$

<u>Usar outro metodo:</u>

<u>Teorema</u>: Seja $T \in L(V, V)$ um operador linear definido em um espaço vetorial V (de dimensão finita) sobre um corpo F. Então T é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal é da forma:

$$m_T(x) = (x - c_1) \cdot (x - c_2) \ldots (x - c_n)$$

Onde $c_1, c_2, \ldots, c_n$ são elementos distintos de F.

Se $T$ é diagonalizável, então $m_T(x)$ é produto de fatores lineares distintos.

Supomos $T$ é diagonalizavel, então $m_T(x)$ é o produto de fatores lineares distintos. Como $m_T(x)$ possui raiz única; $m_T(x) = (x-\lambda)$ com $\lambda \in K$.

Se tomarmos $c_1$ autovalor de $T$. E $W = Nuc\,(T - cI)$

Assim $T$ é diagonalizavel, se e somente se, $V = W_1$ e $p_T(x) = (x-c_1)(x-c_2)$

Temos que o espaço vetorial $V$ é soma direta dos subespaços $W$. Temos que se: $u \in V$ temos $u = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ onde $u_j \in W$.

Agora aplicamos o polinomio a cada $u_j$:

$$p(T)(u_1) = p(c_1)u_1, \text{ mas } p(c_1) = 0$$
$$= 0 \cdot u_1 = 0$$

Aplicamos a todos os $u_j$, temos que:

$p_T(u) = p_T(u_1) + \dots + p_T(u_n) = 0$

Assim temos que todo polinômio que anula o operador, é um multiplo do operador linear.

Assim temos que $m_T(x) \mid p_T(x)$, logo:

$m_T(x) = (x-\lambda) \mid p_T(x) = (x-\lambda)^2$, e o grau de $m_T(x) <$ grau de $p_T(x)$.
ou:
$m_T(x) = (x-\lambda) \mid p_T(x) = (x-\lambda).(x-\lambda)$

Se $m_T(x)$ é um produto de fatores lineares distintos, temos que $p_T(x)$ deveria ser um produto de fatores lineares distintos. Mas $p_T(x)$ é um produtos de dois autovalores iguais.

Assim testamos a partir de $m_T(x)$:

$m_T(x)$ é produto de fatores lineares distintos, então $T$ é diagonalizável.

Temos: $m_T(x) = (x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_k)$

Então por indução sobre $k$:

<u>Caso $k = 1$</u>; $m_T(x) = x - c_1 \rightarrow T = c_1 . I$

Neste caso $T$ é diagonalizável, porque todo vetor é um autovetor. Ou seja, todo vetor não nulo é um autovetor e ao aplicarmos $T$ a este vetor temos um múltiplo de vetores, ou seja, um vetor é uma base geradora de um subespaço. Assim $T$ é diagonalizável.

A matriz de $T$ é diagonalizável, dado que é um múltiplo da identidade.

3) Encontre todas as possibilidades para o polinômio minimal de um operador $T: R^5 \to R^5$ com polinômio característico:

a) $p_T(x) = (x-3)^3 (x-2)^2$

Temos que o polinômio minimal deve possuir grau < do que o $p_T(x)$. Logo:

$$m_T(x) = (x-3)^{N<3} \cdot (x-2)^{M<2}, \text{ com } M = 0,1,2$$
$$N = 0,1.$$

Ambos $m_T(x)$ e $p_T(x)$ são produto de fatores lineares distintos.

Temos também que $p_T(x)$ possui:
3 raízes $= 3$, 2 raízes $= 2$.
Então:

$$p_T(x) = (x-3)(x-3)(x-3)(x-2)(x-2)$$

Assim $m_T(x)$ pode ser formado pelas raízes (3, 2) ou somente uma raiz (3 ou 2).

b) $p_T(x) = (x-1)(x-2)(-3)(x-4)(x-5)$

Temos que $m_T(x)$ é um polinomio de grau $m_T(x) <$ grau $p_T(x)$, e é formado por uma ou mais raízes de $p_T(x)$, sendo $m_T(x) \neq p_T(x)$. Dado que $p_T(x)$ pois grau 1.

c) $p_T(x) = (x-1)^n$, com $n \geq 1$.

Temos que $m_T(x)$ é o polinômio formado pelo autovalor ou raiz de $p_T(x)$, e com grau menor do $n$.

$$m_T(x) = (x-1)^N, \text{ com } N < n.$$

Temos que para ser diagonalizável, se possuirem as mesmas raízes, e ou sendo produto de fatores lineares iguais.

No caso de raiz única, tem grau unitario.