Obs:

1º) Se V tem produto interno, então V admite uma norma induzida pelo produto interno:

$$\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$$

2º) Dada uma norma em V $(\|\cdot\| : V \to K)$, essa norma é induzida por algum produto interno?

Não, porque a norma deve satisfazer algo! Tipo: Teorema de pitágoras, no caso volta.

Proposição: Seja V um espaço vetorial com o produto interno e $\|\cdot\|$ a norma induzida por ele. Valem:

i) $\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{2}\|u-v\|^2$ (A VER

$$\|u+v\|^2 \to \langle u+v, u+v \rangle \qquad \|u-v\|^2 \to \langle u-v, u-v \rangle$$

ii) Se V for um espaço vetorial complexo, vale:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2 + \frac{i}{4}\|u+iv\|^2 - \frac{1}{4}\|u-iv\|^2$$

iii) Regra do Paralelogramo:

Para quaisquer $u, v \in V$ (sobre K):

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right)$$

As igualdades em i) e ii) são chamadas de identidade de polarização.

Obs: Se V admite uma norma que não satisfaz a regra do paralelogramo, então esta norma não provém (não é induzida) por um produto interno.

Conjunto ortogonal: Tomaremos espaço vetorial V, tem um produto interno e a norma é induzida por ele.

Dado $\{v_1, \dots, v_n\}$ um conjunto de vetores de V, dizemos que este conjunto é ortogonal se quaisquer dois vetores do conjunto são ortogonais. Isto é, $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ $\forall i, j$ distintos.

. A mesma definição se aplica para conjuntos infinitos.

Exemplo: $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual (canônico), a base canônica.

base $= \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$

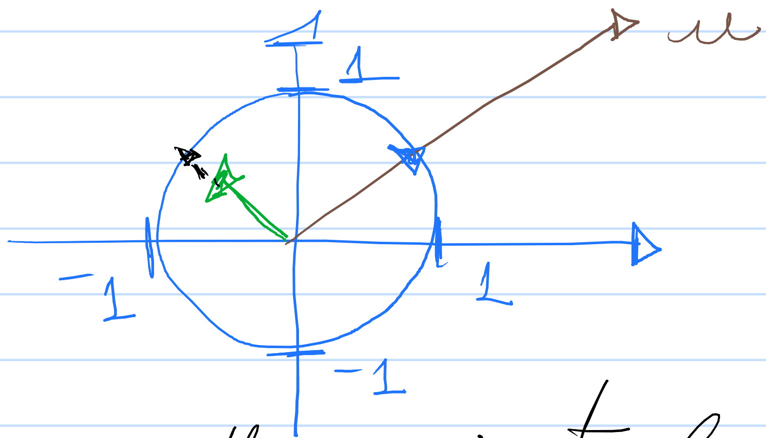
é um conjunto ortogonal.

Lema: Todo conjunto ortogonal é L.I.

Definição: ① Dizemos que um vetor $u \in V$ é unitário se $\|u\| = 1$.

Obs: dado $u \in V$, u não nulo, então:

$\frac{u}{\|u\|}$ é unitário



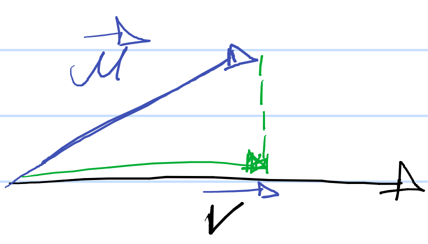
Nomenclatura: Um conjunto de vetores é dito ortonormal se o conjunto é ortogonal e todos os vetores do conjunto são unitários.

A base canônica é ortonormal, $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$.

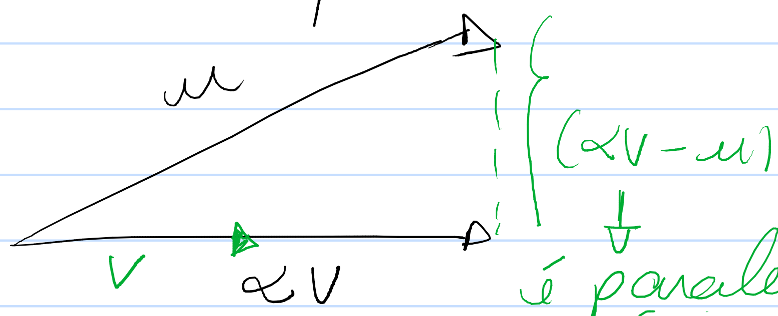
Lembrando Projeção ortogonal

V espaço vetorial com produto interno e norma induzida pelo produto interno.

• Dados $u, v \in V$ com $v \neq 0$, gostaria de projetar ortogonalmente u na direção de v.



Procuro $\alpha \in K$ tal que $\langle \alpha v - u, v \rangle = 0$



é paralelo a $(\alpha v - u)$

Desenvolvendo, temos: $\langle \alpha v, v \rangle - \langle u, v \rangle = 0$, donde $\alpha \langle v, v \rangle - \langle u, v \rangle = 0$ e logo:

$$\alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} = \frac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2}$$

<u>Notação</u>: a projeção ortogonal de u na direção de v é $proj_v(u) = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\|v\|^2} \cdot v$

<u>Processo de ortonormalização de Gram-schmidt</u>

Porque buscam bases ortonormais?

Se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é base ortonormal:

$v = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, então $v = \langle v, v_1 \rangle v_1 + \langle v, v_2 \rangle v_2 + \ldots + \langle v, v_n \rangle v_n$

<u>Processo de Gram-schmidt</u>: Seja V um espaço vetorial com produto interno e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base para V. Existe uma base ortonormal V cujos vetores são obtidos através de combinação lineares da base $\{v_1, \ldots, v_n\}$.

Obs: Uma base ortonormal não é única, depende do vetor fixado.

Definição: Sejam V um espaço vetorial com produto interno e $W \subseteq V$ um subespaço de V. O complemento ortogonal de W em V é:

$$W^{\perp} = \{v \in V / \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in W\}$$

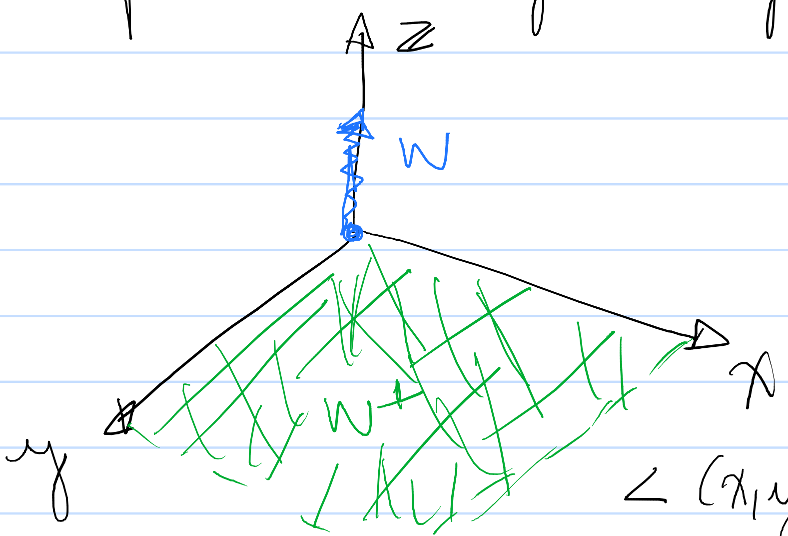
Obs: 1) $W^{\perp}$ é um subespaço de V

2) Se $\{w_1, \ldots, w_l\}$ é um base para W, então $W^{\perp} = \{v \in V / \langle v, w_i \rangle = 0 \ \forall i = 1, \ldots, l\}$

$W^{\perp}$ = W perp = W perpendicular

Exemplo: ① Dado $\mathbb{R}^3$ e $W = \text{span}\{(0,0,1)\}$, (eixo z) e $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

Vale que $W^{\perp} = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ é o plano xy.



De fato, pois

$v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ está em $W^{\perp}$, se e somente se, $\langle v, (0,0,1) \rangle = 0$

$\langle (x,y,z), (0,0,1) \rangle = z = 0$

Exatamente a Equação do plano xy.

Olhando p/ o exercício acima, vemos que:

$$\mathbb{R}^3 = \underbrace{W}_{\text{eixo } z} \oplus \underbrace{W^{\perp}}_{\text{plano } xy}$$

Exemplo: $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual
$W = \text{Span}(\{(1,-1,0),(1,0,0)\})$.

$W^\perp = \{(0,0,z) \mid z \in \mathbb{R}\}$ eixo z

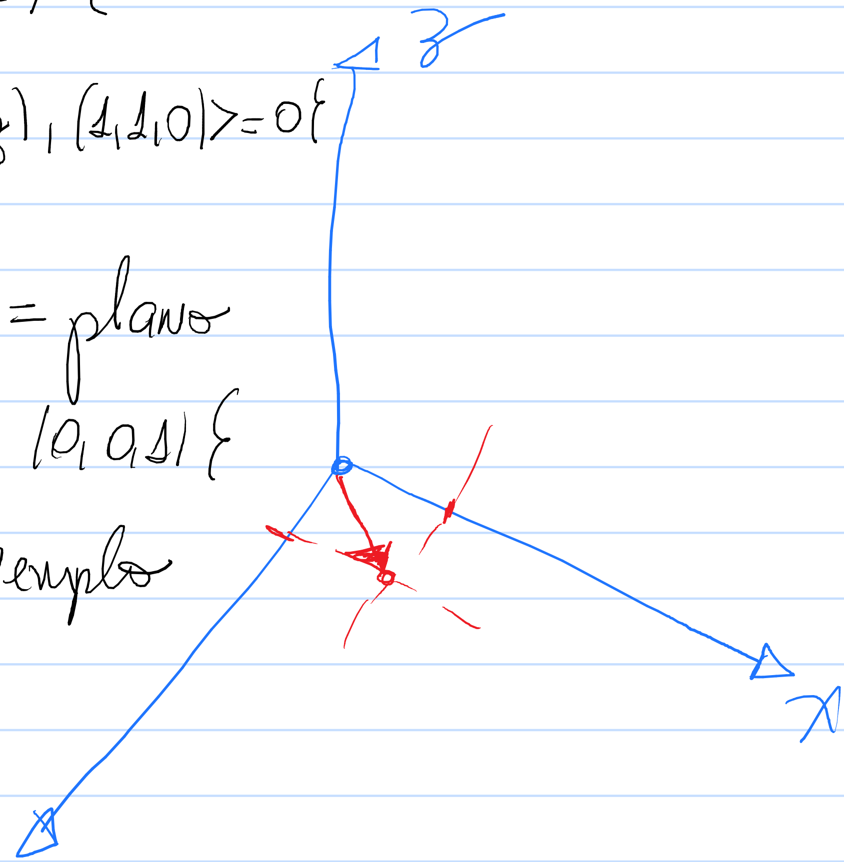
Exemplo: $\mathbb{R}^3$ com produto interno usual
$W = \text{Span}\{(1,1,0)\}$

$W^\perp = \{(x,y,z) \mid \langle (x,y,z),(1,1,0)\rangle = 0\}$

$\|$

$= \{(x,y,z) \mid x+y=0\}$ = plano

$= \text{Span}(\{(1,-1,0)$ e $(0,0,1)\})$



Percebemos neste exemplo que:

$\mathbb{R}^3 = W \oplus W^\perp$

Teorema: Seja V um espaço vetorial com produto interno, para cada W subespaço de V vale:

$$V = W \oplus W^\perp$$

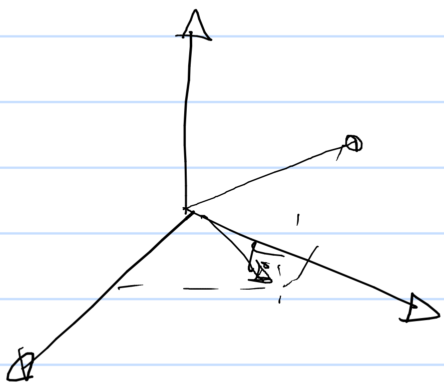
Definição: Dado V espaço vetorial com produto interno e $W \subseteq V$ subespaço de V. Para cada $v \in V$ a projeção ortogonal de v em W é:

$$\text{Proj}_W(v) = w, \text{ onde } v = w + w^\perp$$ no teorema anterior.

Isto é,

$$\mathrm{Proj}_W(v) = \mathrm{Proj}_{w_1}(v) + \ldots\ldots + \mathrm{Proj}_{w_\ell}(v)$$

com $\{w_1, \ldots, w_\ell\}$ base ortonormal para W



Definição: Dados V um espaço vetorial com produto interno e W subespaço de V. Temos a aplicação projeção ortogonal.

$$\mathrm{Proj}_W : V \longrightarrow W$$
$$v \longrightarrow \mathrm{Proj}_W(v)$$

Nome: $\mathrm{Proj}_W = \pi_W$ (Livro do Hamilton).