b) Existe uma base ortonormal formada por autovetores de T.

De fato: Tome $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal do auto-adjunto $-iT$, note que se $-iTv_i = \lambda_i v_i$ então:

$$Tv_i = i\lambda_i v_i$$

Logo $\{v_1, \dots, v_n\}$ forma uma base ortonormal de autovetores do operador T (anti-auto-adjunto).

Teorema: Seja V um espaço vetorial complexo, $T: V \to V$ um operador linear. Vale que V possui uma base ortonormal de autovetores, se e somente se, T é normal.

Lembrando: T é normal se $T \circ T^* = T^* \circ T$

Prova: i) Assuma que V possui uma base ortonormal formada por autovetores, $\{v_1, \dots, v_n\}$ e vale:

$$Tv_i = \lambda_i v_i \quad e \quad v_i \perp v_j \quad \forall i \neq j$$

Nesta base a matriz de T é $\begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$

Como $\{v_1, \dots, v_n\}$ é ortonormal, temos que $T^* v_i = \bar{\lambda} v_i$

$$\langle Tv_i, v_i \rangle = \langle \lambda v_i, v_i \rangle = \lambda \langle v_i, v_i \rangle = \langle v_i, \bar{\lambda} v_i \rangle$$

$$T^*: V \to V, \quad Tv_i = \lambda v_i$$

Vale que $\langle Tv, u \rangle = \langle u, T^* v \rangle$ p/ T^* anterior

Nesta base, a matriz de T^* é $\begin{bmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{bmatrix}$

Matrizes diagonais comutam: $(T \circ T^* = T^* \circ T)$.

ii) Assuma $T: V \to V$ normal. $(T \circ T^* = T^* \circ T)$.
Com isso os operadores:

$$S = \frac{T + T^*}{2} \quad \text{e} \quad Q = \frac{T - T^*}{2}$$

São autoadjunto e anti-autoadjunto, respectivamente. Como S é auto-adjunto e $-iQ$ é auto-adjunto satisfazendo:
$S(-iQ) = -iQS$ (Comutam).

Existe uma base ortonormal formada por autovetores de ambos, $\underline{S}$ e $\underline{-iQ}$.

$S + Q = T$

Como $T = S + Q$, temos que esta mesma base é uma base de autovetores de T.

De fato, $Tv_j = \lambda_j v_j$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$
$Qv_j = i\mu_j v_j$, $\mu_j \in \mathbb{R}$
$Tv_j = (S + Q)v_j = (\lambda_j + i\mu_j)v_j$

Mostrando que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de autovetores de T.

Corolário: Se $T: V \to V$ é unitário, ou seja: ($T^* \circ T = T \circ T^* = id$), então:
$(T^* = T^{-1})$

1) Existe uma base ortonormal formada por autovetores de T.
2) Os autovalores de T têm "norma" $= 1$ (norma complexa ou o valor absoluto do real).

Teorema: Resolução Espectral de Operadores Normais (em espaço vetorial complexo).

Seja $T: V \to V$ um operador normal definido no espaço vetorial complexo V. Denote $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ seus autovalores (distintos) e V_i seus respectivos auto-espaços.

$V_i = \{ v \in V / Tv = \lambda_i v \}$

Considere $\pi_j : V \to V_j \subseteq V$ (é um operador) dado pela projeção de V em V_j. Valem:

i) $Id = \sum_{i=1}^{k} \pi_j$, $v = \pi_1(v) + \dots + \pi_k(v)$, $\forall v \in V$

ii) $T = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \pi_j$, $T(v) = \lambda_1 \pi_1(v) + \dots + \lambda_k \pi_k(v)$ $\forall v \in V$

iii) $\pi_i \circ \pi_j = 0$ (operador nulo) $\forall i \neq j$
$\pi_j^2 = \pi_j \circ \pi_j = \pi_j$ (idempotente) e mais
$\pi_j^* = \pi_j$ (auto adjunto)

Prova: T é normal $\longrightarrow$ T possui uma base orto-normal formada por autovetores de T.

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_k$$

Dado $v \in V$, v se escreve de maneira única como:

$$v = v_1 + \dots + v_k$$

Como $\pi_j(v) = v_j$, temos que: $v = \pi_1(v) + \dots + \pi_k(v)$

Assim: $Id = \pi_1 + \dots + \pi_k$, obtemos o item (i).

ii) Aplicando T em (i) obtemos: $Tv = Tv_1 + \dots + Tv_k = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = \lambda_1 \pi_1(v) + \dots + \lambda_k \pi_k(v)$.

Assim: $T = \lambda_1 \pi_1 + \dots + \lambda_k \pi_k$

iii) $\pi_j(v) = v_j \quad \forall j = 1, \dots, k$

$$\pi_j(\pi_j(v)) = \pi_j(v_j) = v_j \longrightarrow \pi_j^2 = \pi_j$$

- Tome $i \neq j$ e $v = v_1 + \dots + v_k \in V$,
$\pi_i(\pi_j(v)) = \pi_i(v_j)$, com $v_j \in V_j$, logo:
$v_j = 0 + \dots + v_j + 0 + \dots + 0$

↳ na coordenada j

Resta mostrar que π_j é auto-adjunto, sejam
$v = v_1 + \dots + v_k$ e $u = u_1 + \dots + u_k$

$$\langle \pi_j(v), u \rangle = \langle v_j, u_1 + \dots + u_k \rangle = \langle v_j, u_j \rangle$$

$$= \langle v_j, \pi_j(u) \rangle$$

$V_i \perp V_j$, para $i \neq j$

$$\langle v, \pi_j(u) \rangle = \langle v_1 + \dots + v_k, \pi_j(u) \rangle$$

Concluindo que $\pi^*_j = \pi_j$.