Seja a função: $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow M(1,1)$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \rightarrow [x_1, y_1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Mostre que f é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Necessário satisfazer todos os axiomas:

i) Simetria: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \rightarrow [x_1, y_1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Como não importa a ordem, temos:

$$[x_2, y_2] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

$$[x_1, y_1] \begin{bmatrix} x_2 + y_2 \\ x_2 + 2y_2 \end{bmatrix} = [x_2, y_2] \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_1 + 2y_1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 (x_2 + y_2) + y_1 (x_2 + 2y_2) = x_2 (x_1 + y_1) + y_2 (x_1 + 2y_1)$$

$$\cancel{x_1 x_2} + \cancel{x_1 y_2} + \cancel{y_1 x_2} + \cancel{y_1 2y_2} = \cancel{x_2 x_1} + \cancel{x_2 y_1} + \cancel{y_2 x_1} + \cancel{y_2 2y_1}$$

É simétrico.

ii) Linearidade: $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$

Tomamos a f: $((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \rightarrow [x_1, y_1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Assim: $(x_1, y_1) \rightarrow \lambda (x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$

Aplicamos a propriedade:

$$[\lambda x_1, \lambda y_1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \lambda \left([x_1, y_1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\lambda x_1 (x_2 + y_2) + \lambda y_1 (x_2 + 2y_2) = \lambda (x_1 (x_2 + y_2) + y_1 (x_2 + 2y_2))$$

$$\lambda \cancel{x_1} x_2 + \lambda \cancel{x_1} y_2 + \lambda \cancel{y_1} x_2 + \lambda y_1 \cancel{2} y_2 = \lambda \cancel{x_1} x_2 + \lambda x_1 \cancel{y_2} + \lambda \cancel{y_1} x_2 + \lambda y_1 \cancel{2} y_2$$

Agora falta: $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$

Se $w = (x_3, y_3)$, temos: no local de λ será $w = (x_3, y_3)$:

$$[x_1 + x_3, y_1 + y_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = [x_1, y_1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + [x_3, y_3] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Portanto é linear.

iii) Positividade: $\langle u, u \rangle > 0$, se $x_1 = x_2$ e $y_1 = y_2$

$$((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \longrightarrow [x_1, y_1] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} > 0$$

$$x_1 (x_1 + y_1) + y_1 (x_1 + 2y_1) > 0$$

$$x_1^2 + x_1 y_1 + x_1 y_1 + 2y_1^2 > 0$$

$$x_1^2 + 2x_1 y_1 + 2y_1^2 \longrightarrow (x_1 + y_1)^2 + y_1^2$$

Como a soma de dois elementos ao quadrado sempre é maior que zero, então a $f > 0$.

Agora $\langle u, u \rangle = 0 \Longleftrightarrow u = 0$

Portanto vale a positividade,

Temos que a f é um produto interno.

Exercício: Base ortogonais e ortonormais

O conjunto $B = \{(2,-1), (k,1)\}$ é uma base ortogonal do $\mathbb{R}^2$ em relação ao produto interno:

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$$

Determine o valor de k e obter, a partir de B, uma base ortonormal.

1) Para 2 vetores serem ortonormais: devem ser ortogonais e norma $= 1$.

Ortogonais: produto interno $= 0$

Base: $\{(2,-1), (k,1)\}$

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$$

$$(2,-1) \cdot (k,1) = 2(2.k) + 2.1 + (-1)k + (-1).(1) = 0$$

$$= 4k + 2 - k - 1 = 0$$

$$= 3k + 1 = 0 \longrightarrow k = -1/3$$

Portanto se $k = -\frac{1}{3}$, o produto interno será zero e forma uma base ortogonal.

2) Para normalizar: $\hat{v} = \frac{v}{\|v\|} = \frac{v}{\sqrt{\langle v, v \rangle}}$

$B = \{(2,-1), (k,1)\}$

$(x_1,y_1).(x_2,y_2) = 2x_1x_2 + x_1y_2 + x_2y_1 + y_1y_2$

Como $k = -\frac{1}{3}$.

Testar: $(2,-1).(2,-1) = 4+1 = 5$, não é ortonormal

$$\frac{(2,-1)}{\sqrt{\langle (2,-1)(2-1) \rangle}} = \frac{(2,-1)}{\sqrt{(8 \underbrace{-2-2}_{4} + 1)}} = \frac{(2,-1)}{\sqrt{5}}$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\frac{(-\frac{1}{3}, 1)}{\sqrt{\langle (-\frac{1}{3},1)(-\frac{1}{3},1) \rangle}} = \frac{(-\frac{1}{3}, 1)}{\sqrt{5}/3} = \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}, 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)$$

Portanto, temos uma base B' que é ortonormal.

$$B' = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{-1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{\sqrt{5}}\right)\right\}$$

Exemplo - Complemento ortogonal

Sendo $\underline{H} = span\{(1,2,3,4), (-1,2,-3,4)\}$, Ache $H^{\perp}$.

Tomamos $(x, y, z, w) \in H^{\perp}$

$\langle (1,2,3,4), (x,y,z,w) \rangle = 0$
$\langle (-1,2,-3,4), (x,y,z,w) \rangle = 0$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ -x + 2y - 3z + 4w = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Agora vamos encontrar o núcleo da matriz, porque a imagem é zero. Pegamos os vetores da base de H, colocamos nas linhas de uma matriz e achamos o seu núcleo.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 = L_2 + L_1]{} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 4w = 0 \\ 4y + 8w = 0 \end{cases} \rightarrow 4y = -8w$$
$$y = -2w$$

$x + 2\cdot(-2w) + 3z + 4w = 0$
$x - \cancel{4w} + 3z + \cancel{4w} = 0 \rightarrow x + 3z = 0$
$x = -3z$

$(x, y, z, w) = (-3z, -2w, z, w) = z(-3, 0, 1, 0) + w(0, -2, 0, 1)$

Temos: $\{(-3,0,1,0), (0,-2,0,1)\}$ os vetores da base $H^{\perp}$

Considere $\mathbb{R}^2$ com produto interno $\langle (x,y),(x',y')\rangle = xx' + 3yy'$. Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear tal que $T(x,y) = \left(-\frac{4}{5}x + 3my, \frac{3}{5\sqrt{3}}x + \frac{4}{5}y\right)$.
① Determine $\underline{m}$ para que T seja autoadjunto. Com este $\underline{m}$ o operador é ortogonal?

i) 1º Condição: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, operador linear
ii) Olhar para a matriz $[T]_\alpha^\alpha$ é ortonormal, e descobrir uma base para $\mathbb{R}^2$ neste operador T.

. Base canônica: $\langle (1,0),(0,1)\rangle = 0$ é ortogonal mas não é ortonormal.

. $xx' + 3yy' = 3.1.0 + 1.0 = 0 \to$ ortogonal.,

. $\langle (1,0),(1,0)\rangle = 1.1 + 3.0.0 = 1$
$\langle (0,1),(0,1)\rangle = 0.0 + 3.1.1 = 3 \to$ não é ortonormal
$\|(0,1)\| = \sqrt{3}$

Tomamos $\alpha = \{\underbrace{(1,0)}_{v_1}, \underbrace{(0,1/\sqrt{3})}_{v_2}\}$ temos uma base ortonormal.
Agora com a base α, podemos calcular a matriz.

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -4/5 & \frac{3m}{\sqrt{3}} \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

$$T(1,0) = \left(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5\sqrt{3}}\right) = -\frac{4}{5}\underbrace{(1,0)}_{v_1} + \frac{3}{5}\underbrace{\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)}_{v_2}$$

$$T(0, 1/\sqrt{3}) = \left(\frac{3m}{\sqrt{3}}, \frac{4}{5\sqrt{3}}\right) = \frac{3m}{\sqrt{3}}(1,0) + \frac{4}{5}\left(0, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

Para T ser autoadjunto, a matriz de T deve ser simétrica em base ortonormal: $[T]_\alpha^\alpha$.

$$[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -4/5 & 3m/\sqrt{3} \\ 3/5 & 4/5 \end{bmatrix}, \quad [T]_\alpha^\alpha = [T]_\alpha^{\alpha\,T}$$

$$[T]_\alpha^{\alpha\,T} = \begin{bmatrix} -4/5 & 3/5 \\ 3m/\sqrt{3} & 4/5 \end{bmatrix},$$

$$\frac{3m}{\sqrt{3}} = \frac{3}{5}$$

$$\frac{\cancel{3}m}{\sqrt{3}} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} = 1$$

$$5m = \sqrt{3}$$

$$m = \frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\frac{3m}{\sqrt{3}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{5}}{\sqrt{3}} = \frac{\frac{3\sqrt{3}}{5}}{\sqrt{3}} = \frac{3\cancel{\sqrt{3}}}{5} \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} = \frac{3}{5}$$

Com $m = \frac{\sqrt{3}}{5}$, T é autoadjunto

Agora: $[T]_\alpha^\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & 4/5 \end{bmatrix}$

i) $\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25} + \frac{9}{25} = 1 =$ ii) linha 2

Produto interno entre linhas:

$$\left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) + \left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{3}{5}\right) = 0$$

Temos que as linhas de $[T]_\alpha^\alpha$ são ortonormais, para o produto interno usual. Assim T é um operador ortogonal.