Formas bilineares - Sesquilineares e quadráticas

Lembrando: Uma forma sesquilinear em V é um mapa:

$\beta : V \times V \to K$ satisfaz:

1) $\forall u_1, u_2, v \in V$, $\forall \alpha \in K$ vale que:

$$\beta(\alpha u_1 + u_2, v) = \alpha \beta(u_1, v) + \beta(u_2, v)$$

2) $\forall u, v_1, v_2 \in V$, $\forall \lambda \in K$ vale que:

$$\beta(u, v_1 + \lambda v_2) = \beta(u, v_1) + \bar{\lambda} \beta(u, v_2)$$

- β é simetrica se $\beta(u,v) = \beta(v,u)$ no caso $K = \mathbb{R}$

- β é hermitiana se $\beta(u,v) = \overline{\beta(v,u)}$ $\forall u, v \in V$ no caso $K = \mathbb{C}$

Exemplos:

1) Um produto interno é uma forma sesquilinear

2) Dado $T \in \mathcal{L}(V)$ um operador linear:

$\beta(u,v) = \langle u, T^* v \rangle$ é uma forma sesquilinear

Definição: Uma forma sesquilinear é dita auto-adjunta se:

$\beta(u,v) = \overline{\beta(v,u)}$ $\forall u,v \in V$

- anti-auto-adjunto se $\beta(u,v) = -\overline{\beta(v,u)}$ $\forall u,v \in V$

Teorema: Se $\beta : V \times V \to K$ é uma forma sesquilinear, então existe um único operador $T : V \to V$ tal que:

$$\beta(u,v) = \langle u, T^* v \rangle \quad \forall u,v \in V$$

(V deve ser um espaço Euclidiano fixado)

- Se β é auto-adjunta, então $T^* = T$
- Se β é anti-auto-adjunto, então $T^* = -T$

Corolário: $S(V) = \{\beta : V \times V \to K \mid \text{sesquilinear}\}$ é isomorfo $L(V)$, espaço dos operadores lineares!

Pergunta: Dada $\beta : V \times V \to K$ sesquilinear, como encontrar T, tal que:

$$\beta(u,v) = \langle u, T^* v \rangle$$

Solução: Fixe $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal para V, e então considere a matriz $A = (a_{ij})$.

Dada por: $a_{ij} = \beta(v_i, v_j)$

Defina T^* sendo a transformação linear (op. linear) induzido por A.

$$T^* v_j = a_{ij} v_1 + \dots + a_{jN} v_N$$

$\langle v_i, T^* v_j \rangle = a_{ij}$, pois a base é ortonormal

Mais ainda: $u = (x_1, \dots, x_N)$ na base $\{v_1, \dots, v_N\}$ e $v = (y_1, \dots, y_N)$. Então:

$$u = x_1 v_1 + \dots + x_N v_N \quad \text{e} \quad v = y_1 v_1 + \dots + y_N v_N$$

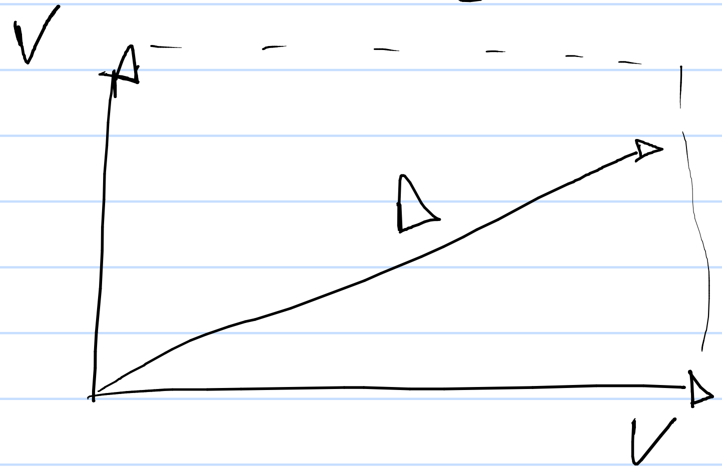
$$\beta(u, v) = (x_1, \dots, x_N)\, A \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix}$$

Então determinamos A que induz T^*.

Formas Quadráticas:

Definição: Seja $\beta: V \times V \to K$ uma forma sesquilinear, uma forma quadrática associada a β é:

$$q: V \to K$$
$$v \mapsto \beta(v, v)$$



$\beta: V \times V \to K$ sesquilinear

A diagonal Δ de $V \times V$ é $\Delta = \{(v, v) \mid v \in V\}$

$$V \overset{\Delta}{\hookrightarrow} V \times V$$
$$v \longmapsto (v, v)$$

Temos que: q, pode ser visto como:

$$\beta\big|_{\Delta(V)} : V \to K$$

$$\begin{array}{ccccc} V & \overset{\Delta}{\hookrightarrow} & V\times V & \xrightarrow{\beta} & K \\ v & \longmapsto & (v,v) & & \\ & & (u,v) & \longmapsto & \beta(u,v) \end{array}$$

$$V \xrightarrow{\ q\ } K$$

Exemplos: 1) Considere $V = \mathbb{R}^n$ e $\langle , \rangle$ usual:

$$\beta : V\times V \to \mathbb{R} \qquad \left\{ \begin{array}{l} q : V \to K \\ v \mapsto \langle v,v\rangle = \|v\|^2 \end{array}\right.$$
$$(u,v) \mapsto \langle u,v\rangle$$

Se $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, então: $q(v) = \langle v,v\rangle =$

$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$

2) Para qualquer T linear num espaço Euclidiano V. Tome:

$q(v) = \langle v, T^* v\rangle$, é uma forma quadrática

Pergunta: $\beta : V\times V \to K$
$\langle u,v\rangle \to \langle u, T^* v\rangle$

No caso de $q : V \to K$
$v \to \langle v, T^* v\rangle$

T é unicamente determinada?

Não

Podem existir 2 formas sesquilineares que induzem a mesma forma quadrática.

Exemplo: T um operador linear e:

$$\beta_1 : V \times V \longrightarrow K = \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longrightarrow \langle u, T^* v \rangle$$

$$\beta_2 : V \times V \longrightarrow K = \mathbb{R}$$
$$(u, v) \longrightarrow \langle u, \frac{(T + T^*)}{2} v \rangle$$

Obs.: $\frac{(T+T^*)^*}{2} = \frac{T^* + (T^*)^*}{2} = \frac{T + T^*}{2}$

Logo $\frac{T+T^*}{2}$ é auto-adjunto.

Seja $v \in V$, vale: $\langle v, \frac{(T+T^*)}{2} v \rangle = \langle v, \frac{1}{2}Tv + \frac{1}{2}T^*v \rangle =$

$\langle v, \frac{1}{2}Tv \rangle + \langle v, \frac{1}{2}T^* v \rangle = \langle v, \frac{1}{2}Tv \rangle + \langle \frac{1}{2}Tv, v \rangle$

$= \langle v, \frac{1}{2}Tv \rangle + \langle v, \frac{1}{2}Tv \rangle = \langle v, Tv \rangle = \langle T^* v, v \rangle$

$= \langle v, T^* v \rangle$

Logo $\beta_1 : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\beta_2 = V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$

Induzem a mesma forma quadrática q.

Obs.: Toda forma quadrática (em V esp. euclidiano) está associada a uma forma sesquilinear auto-adjunta.

De fato, basta tomar:

$q(v) = \langle v, \frac{T+T^*}{2} v \rangle$ num espaço euclidiano

Obs: Dado $T \in L(V)$, $\frac{T+T^*}{2}$ é chamado a parte auto-adjunta de T.

Lema: Seja V um (espaço vetorial eu diria) espaço vetorial sobre K e $q: V \to K$ uma forma quadrática associada a $\beta: V \times V \to K$ sesquilinear.

Numa base ortonormal de V, q é dada por:

$$q(v) = \sum a_{ij} x_i \overline{x_j}, \text{ com } v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$$

onde $a_{ij} \in K$.

Prova: Tome $\{v_1, \dots, v_n\}$ base ortonormal

$$\beta: V \times V \to K$$
$$(u, v) \to \langle u, T^* v \rangle$$

T^* é dada por uma matriz (a_{ij}), temos que:

$v = x_1v_1 + \dots + x_nv_n$, $q(v)$.

$$q(v) = \beta(v, v) = \sum a_{ij} x_i \overline{x_j}$$

Teorema de Lagrange