Teorema Espectral (Real e Complexo)

Alexandre Fernandes

Operador Adjunto. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno. Para cada operador linear* $T : V \to V$*, existe um único operador linear* $T^* : V \to V$ *tal que* $\langle Tw, v\rangle = \langle w, T^*v\rangle$ *para quaisquer* $v, w \in V$.

O operador T^* é chamado de *operador adjunto* de T. Quando, $T = T^*$ dizemos que T é um operador *auto-adjunto.*

Observação. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno. Seja $T : V \to V$ um operador auto-adjunto. Se $W \subset V$ é um subespaço invariante por T, então a restrição de T a W define um operador auto-adjunto sobre o subespaço W

Teorema 1 (Teorema Espectral - Caso Real)**.** *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita sobre* $\mathbb{R}$*, munido de produto interno.* $T : V \to V$ *um operador auto-adjunto se, e somente se, existe uma base de* V *formada por autovetores de* T*, dois a dois ortogonais.*

Proposição 2. *Seja* V *espaço vetorial, não nulo, de dimensão finita sobre* $\mathbb{R}$*. Para cada operador linear* $T :\to V$ *existe um subespaço vetorial não nulo* $W \subset V$ *que é invariante por* T *e tem dimensão no máximo* 2.

Demonstração. Seja P_T o polinômio característico de T. Podemos escrever $P_T = P_1 \cdots P_k$, em que cada P_i é irredutível em $\mathbb{R}[t]$. Como $P_T(T)$ é o operador nulo, para algum i, $P_i(T)$ não é injetivo. Isto é, existe $v \neq 0$ tal que $P_i(T)v = 0$. Temos que $P_i(t) = t^2 + at + b$ ou $P_i(t) = t + c$. Daí, concluímos que o subespaço W de V gerado por v e Tv é invariante por T e tem dimensão no máximo 2. □

Proposição 3. *Seja* V *um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno. Seja* $T : V \to V$ *um operador auto-adjunto. Se* $W \subset V$ *é um subespaço invariante por* T*, então* $W^\perp$ *é invariante por* T*.*

Prova do Teorema Espectral - Caso Real. É fácil ver que o teorema vale para os casos em que $\dim(V) = 1$ ou $\dim(V) = 2$. Então, seja $\dim(V) = n$ maior do que 2 e suponhamos que o teorema valha para espaços de dimensão $< n$. Seja W subespaço (não nulo) de V que é invariante por T e tem dimensão no máximo 2. Nesse caso, $W^\perp$ é subespaço (não nulo) de V que é invariante por T e tem dimensão no máximo $n-1$. Como as restric cões de T a W e a $W^\perp$ definem operadores auto-adjuntos, por hipótese de indução, temos bases β_1 de W e β_2 de $W^\perp$ formadas por autovetores de T dois a dois ortogonais. Finalmente, definindo β por $\beta_1 \cup \beta_2$ temos uma base de $V = W \oplus W^\perp$ formada por autovetores de T dois a dois ortogonais. A outra implicação proposta no teorema não oferece resistência. □

A partir de agora, passaremos a uma exposição do Teorema Espectral no caso complexo. Antes de enunciá-lo, consideremos a seguinte definição.

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita, munido de produto interno. Um operador linear $T : V \to V$ é dito *normal* se $T \circ T^* = T^* \circ T$.

Teorema 4 (Teorema Espectral - Caso Complexo)**.** . *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, munido de produto interno. $T : V \to V$ é um operador normal se, e somente se, existe uma base de V formada por autovetores de T, dois a dois ortogonais.*

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{C}$, munido de produto interno. Sejam $T : V \to V$ um operador normal e $\alpha \in \mathbb{C}$. Abaixo, listamos algumas propriedades que podem ser facilmente verificadas.

- $T - \alpha$ é normal;
- $Tv = \alpha v$ se, e somente se, $T^*v = \bar{\alpha}v$
- $Ker(T-\alpha)$ e $[Ker(T-\alpha)]^\perp$ são invariantes por T.

Prova do Teorema Espectral - Caso Complexo. Se Existe base de V formada por autovetores de T, dois a dois ortogonais, claramente T é normal. Agora, suponhamos que T seja um operador normal. Seja $W = Ker(T-\alpha)$ em que $\alpha \in \mathbb{C}$ é um autovalor de T. Se $W = V$, nada temos a provar. Então suponhamos que $W \neq V$. Nesse caso, W e $W^\perp$ são subespaços de V, invariantes por T, que possuem dimensão inferior à diemnsão de V. Como as restrções de T a W e a $W^\perp$ definem operadores normais, podemos usar hipótese de indução sobre a dimensão do espaço para concluir que temos bases β_1 de W e β_2 de $W^\perp$ formadas por autovetores de T dois a dois ortogonais. Finalmente, definindo β por $\beta_1 \cup \beta_2$ temos uma base de $V = W \oplus W^\perp$ formada por autovetores de T dois a dois ortogonais. □