Sejam V e W dois espaços euclidianos definidos sobre um corpo K. Se T é uma aplicação (não necessariamente linear) que preserva o produto interno, isto é:

$$\langle u, v \rangle = \langle Tu, Tv \rangle, \ \forall u, v \in V$$

Então T é linear.

<u>Teorema 1</u>: Sejam V e W espaços vetoriais euclidianos com norma induzida pelo produto interno, sejam:

$$T: V \to W \text{ linear}$$

As seguintes afirmações são equivalentes

i) T é isometria

ii) T preserva o produto interno, i.e., $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$

iii) $T^* \circ T = id$

<u>Teorema 2</u>: Sejam V e W espaços euclidianos (tem produto interno). Se $T: V \to W$ é uma isometria tal que $T(0) = 0$, então T é linear.

Pelo enunciado T preserva o produto interno, i.e.:

$$\langle u, v \rangle = \langle Tu, Tv \rangle \ \forall u, v \in V$$

Portanto T é uma isometria, mas

pelo teorema 2, temos que para T ser linear deverá:

$$T(0) = 0$$

Tomando como exemplo uma translação de $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$.

$$T(u) = u + v_0 \text{, com } v_0 \text{ fixado}$$

Assim: $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \to (x+1, y+1)$$

Temos que não é linear, pois $T(0,0) = (1,1)$ mas é uma isometria, e tem norma induzida pelo produto interno de $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^2$.

$$\|(x_1, \ldots, x_N)\| = (x_1^2 + \ldots + x_N^2)^{1/2}, \text{ e}$$

$$\|Tu - Tv\| = \|u + v_0 - (v + v_0)\| = \|u - v\|$$

Portanto T não é linear.