Norma de matrizes (transformações lineares)

Sejam V e W dois espaços vetoriais definidos sobre K.,

$Matriz_{N \times M} = \{ T: V \to W \mid T$ é uma transformação linear $\}$

É um espaço vetorial isomorfo a $K^{N \cdot M}$, onde $\dim V = N$ e $\dim W = M$.

Faz sentido falar sobre normas de matrizes ou de transformação linear

Seja K^N o espaço vetorial sobre K de $\dim = N$. Tomamos duas normas:

$$\| \cdot \|_1 \text{ e } \| \cdot \|_2$$

Em K^N são equivalentes, se existem constantes não nulas k, λ tais que: $k, \lambda \in \mathbb{R}^*_+$

$$k \|v\|_1 \leq \|v\|_2 \leq \lambda \|v\|_1 \quad \forall v \in V$$

Obs: A relação anterior é uma relação de equivalência.

Teorema: Todas as normas de K^N são equivalentes.

Corolário: Todo operador linear $T: K^N \to K^N$ é contínuo

Definição: Seja $A \in M_{n \times m}(K)$, defina:

$$\underbrace{\|A\|}_{\text{Norma em } K^{n.m}} = \max_{\underbrace{\|v\|=1}_{\text{Norma qualquer em } K^n}} \underbrace{\|Av\|}_{\text{Norma qualquer em } K^m}$$

$$A \longrightarrow T_A : K^n \longrightarrow K^m$$

Teorema: 1) A definição acima induz de fato uma norma;

2) $\|AB\| \leq \|A\| . \|B\| \; \forall A, B \in M_{n \times n}(K)$

3) $$\|A\| = \max_{\|v\|=1=\|w\|} |\langle Au, w \rangle|$$

(K^n tem um produto interno fixado e a norma em K^n é induzida por ele).

Aula 10/02/2021: Formas bilineares (Sesqui-lineares).

Sejam V um espaço Euclidiano (sobre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) com produto interno $\langle , \rangle$.
Seja ainda $T: V \to V$ um operador linear.

Pergunta: Vale que: $V \times V \longrightarrow K$
$(v_1, v_2) \longrightarrow \langle Tv_1, v_2 \rangle$

Induz um outro produto interno?

Ex: 1) $\langle v_1+v_2, v_3 \rangle_T = \langle T(v_1+v_2), v_3 \rangle = \langle Tv_1 + Tv_2, v_3 \rangle = \langle Tv_1, v_3 \rangle + \langle Tv_2, v_3 \rangle = \langle v_1, v_3 \rangle_T + \langle v_2, v_3 \rangle_T$

2) Linear na 2ª Coordenada

$$\langle Tv_1, v_2+v_3\rangle = \langle Tv_1, v_2\rangle + \langle Tv_1, v_3\rangle$$
$$\langle v_1, v_2+v_3\rangle_T = \langle v_1, v_2\rangle_T + \langle v_1, v_3\rangle_T$$

3) $\forall \lambda \in K$

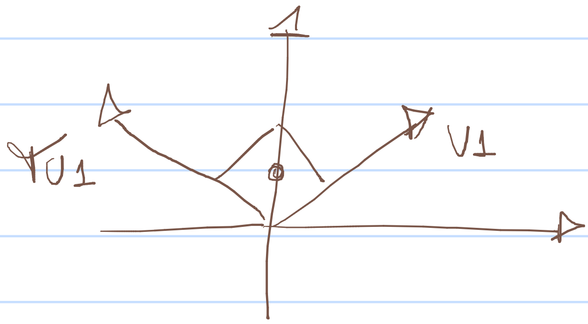
$$\langle \lambda v_1, v_2\rangle_T = \langle T(\lambda v_1), v_2\rangle = \lambda\langle Tv_1, v_2\rangle$$
$$= \lambda\langle v_1, v_2\rangle_T$$

$$\langle v_1, \lambda v_2\rangle_T = \overline{\lambda}\langle v_1, v_2\rangle_T$$

4) Vale que: $\langle Tv_1, v_1\rangle \geq 0$? $\Leftrightarrow v_1 = 0$?

Verdade se $K = \mathbb{C}$

Nem sempre. Se $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é a rotação por $90°$, temos problemas (não funciona!)



Definição: Seja V um espaço vetorial, uma forma bilinear (ou sesquilinear) é uma aplicação:

$$\gamma : V \times V \to K$$

Satisfazendo: i) $\gamma(\alpha v_1 + v_2, v_3) = \alpha\gamma(v_1, v_3) + \gamma(v_2, v_3)$
$\forall \alpha \in K, \forall v_1, v_2, v_3 \in V$

ii) $\gamma(v_1, \alpha v_2 + v_3) = \overline{\alpha}\gamma(v_1, v_2) + \gamma(v_1, v_3)$
$\forall \alpha \in K, \forall v_1, v_2, v_3 \in V$

Exemplos de formas sesquilineares:

1) Se V é um espaço euclidiano, então um produto interno é uma forma sesquilinear.

2) Se V é um espaço euclidiano com produto interno $\langle , \rangle$ e $T: V \to V$ é um operador linear, então:

$$\gamma: V \times V \to \mathbb{K}$$
$$(v_1, v_2) \to \langle Tv_1, v_2 \rangle$$

Quais são todas as formas sesquilineares?

<u>Teorema</u>: Sejam V um espaço euclidiano e $\gamma: V \times V \to \mathbb{K}$ é uma forma sesquilinear. Existe $T: V \to V$ tal que $\gamma = \langle , \rangle_T$. Isto é $\forall v_1, v_2 \in V$ vale que:

$$\gamma(v_1, v_2) = \langle Tv_1, v_2 \rangle = \langle v_1, T^* v_2 \rangle$$

Além disso T é unicamente determinado.

<u>Exemplo</u>: Se $A = (a_{ij})_{n \times n} \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$ e $v_1 = (x_1, \ldots, x_n)$, $v_2 = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$. Então:

$$\gamma = V \times V \to \mathbb{K}$$
$$(v_1, v_2) \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \overline{A(y_1, \ldots, y_n)} = v_1^T A \overline{v_2}$$

é uma forma sesquilinear

Corolário: Seja $B(V)$ o conjunto de todas as formas sesquilineares de V, isto é:

$$B(V) = \{ \gamma : V \times V \to K \mid \gamma \text{ é sesquilinear} \}$$

Valem:

i) $B(V)$ é um espaço vetorial

ii) $B(V)$ é isomorfo a $T(V) = \{ T : V \to V \mid T \text{ é linear} \}$