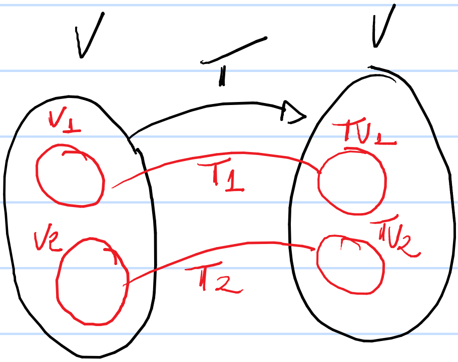
1) Seja $T \in L(V,V)$ um operador. Mostre que se $T = T_1 \oplus T_2$, então $p_T = p_{T_1}(x) \cdot p_{T_2}(x)$.




Temos que uma transformação linear $T$ gera uma imagem, dada por:

$$V_1 \xrightarrow{T} T(V_1) = \lambda V_1$$

Nesta transformação temos um autovalor que altera somente o modulo de $V_1$. A partir de cada $\lambda$ pode-se gerar um autoespaço $Aut_T(\lambda)$ formado por autovetores. Então $T_1$ gera um autoespaço único, com uma imagem e uma base única.

Temos portanto que $T_1$ gera um subespaço $T$-invariante de $V$.

O mesmo vale para $T_2$, com isto temos que $T_1$ e $T_2$ geram subespaços distintos.

Então pode-se escrever o espaço vetorial da Imt como a soma direta de $T_1$ e $T_2$, que são subespaços T-invariantes.

$T = T_1 \oplus T_2$, assim $T_1$ gera o polinômio característico $pT_1(x)$ e $T_2$ gera o polinomio $pT_2(x)$.

Como os polinomios são formado pelos produtos dos autovalores (raizes) temos:

$$pT_1(x) = (\lambda_1 - x).(\lambda_2 - x) \ldots (\lambda_N - x)$$

$$pT_2(x) = (\alpha_1 - x).(\alpha_2 - x) \ldots (\alpha_N - x)$$

Então T gera um conjunto de autovalores $\lambda_i, \alpha_i$, para $i = 1, \ldots N$.

Assim temos:

$$(\lambda_1 - x).(\lambda_2 - x).....(\lambda_n - x).(\alpha_1 - x).(\alpha_2 - x).....(\alpha_n - x) = pT_1(x).pT_2(x) = pT(x)$$

Assim T gera o polinômio característico $pT(x)$.

2) Seja $T \in L(V,V)$ tal que $pT(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}.....(x-\lambda_t)^{n_t}$, $n_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$. Mostre que T pode ser escrito como a soma de t operadores lineares.

Seja $T \in L(V,V)$ uma transformação linear que gera o polinômio;
$pT(x) = (x-\lambda_1)^{n_1}.....(x-\lambda_t)^{n_t}$, dado que o autovalor $\lambda_1$ se repete $n_1$ vezes e sucessivamente até $\lambda_t$ que se repete como raiz $n_t$ vezes.

Como $n_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$

Assim temos que cada $\lambda$ é gerado por cada transformação t.

Então $t_1$ gera $\lambda_1$, $t_2$ gera $\lambda_2$, até $t_\tau$ que gera $\lambda_\tau$. Assim, cada transformação gera um polinômio, e estes polinômios geram os valores de $\lambda_i$.

$p^T(x) = (x-\lambda_1)^{N_1} \cdots (x-\lambda_\tau)^{N_T}$

$T$ gera $p^T(x) = p^t(\lambda_1) \cdot p^T(\lambda_2) \cdots p^t(\lambda_\tau)$

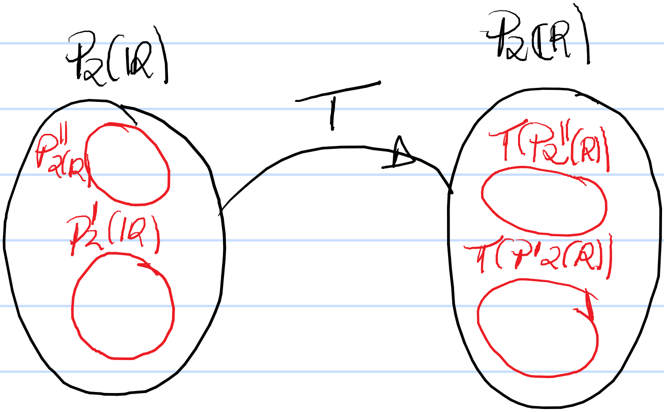
Onde cada $p^t(\lambda_i)$ são gerados das matrizes de $[T]_i$, temos que:

$[T]$ gera $p^T(x)$, e $[T] = [T]_1 \cdot [T]_2 \cdot [T]_3 \cdots [T]_\tau$

Então $T = T_1 + T_2 + \cdots + T_\tau$

Onde cada $t_i$ é um subespaço $T$-invariante, seguindo as restrições para cada $t_i$.

3) Seja $T: P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R})$ o operador linear dado por $T(at^2+bt+c) = (2a-b+c)t^2+(a+c)t+2c$. Escreva $T$ como soma direta de dois operadores.




$$T(at^2+bt+c) = (2a-b+c)t^2+(a+c)t+2c$$

$$T = T_1 + T_2$$

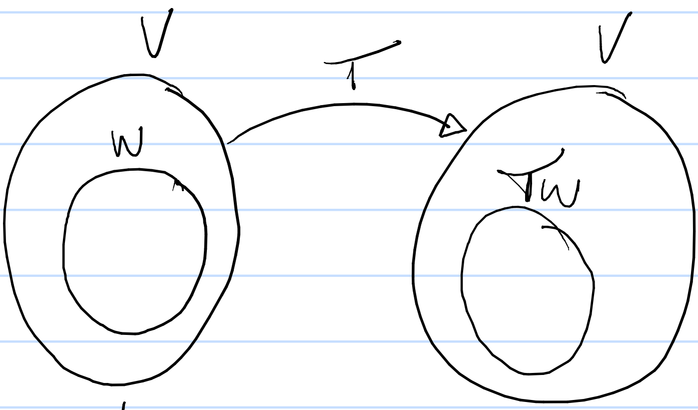
$$(2a-b+c)t^2+(a+c)t+2c$$

$$[(a-2b)t^2+(a)t+c]+[(a+b+c)t^2+ct+c]$$

Temos que $T_1(at^2+bt+c) = (a-2b)t^2+at+c$, e $t_2(at^2+bt+c) = (a+b+c)t^2+ct+c$

Portanto $T = T_1 + T_2$.

4) Sejam $T: V \to V$ um operador linear, $W \subset V$ um subespaço de $V$ e $\lambda \in K$. Mostre que $W$ é $(\lambda Id - T)$-invariante se e somente se $W$ for $T$-invariante.




A partir de um subespaço $W$, pode-se encontrar uma matriz de transformação que gera um auto espaço dado por: $(\lambda Id - T)$.

Temos que $T(W) = \lambda W$, assim os vetores gerados a partir do polinômio $p_T(\lambda)$ pertencem a $Aut_T(\lambda)$. Sejam $W_1$ e $W_2$ vetores de $W$ e $T(W_1)$ e $T(W_2)$ autovetores pertencentes a $Aut_T(\lambda)$.

Então se $(\lambda Id - T)$ for invariante

Temos que $Aut_T(\lambda)$ é um subespaço T-invariante de V. Assim, se $T(W_1)$ e $T(W_2)$ pertencem a $Aut_T(\lambda)$, então

$$T(W) = \lambda(W) \in Aut_T(\lambda),$$ ou seja:

$$T(W_1) = \lambda W_1 \in Aut_T(\lambda)$$
$$T(W_2) = \lambda W_2 \in Aut_T(\lambda)$$

E $Aut_T(\lambda) \subset W$, assim $T(W_1), T(W_2)$ estão contidos em W.

Agora se W for T-invariante, ou seja um subespaço T-invariante então a restrição de T a W é um operador em $\mathcal{L}(V,V)$, mais precisamente $\mathcal{L}(W,W)$ ou $\mathcal{L}(W, ImT)$.
Com isso a matriz de transformação gerada por $(\lambda Id - T)$ também terá as mesmas restrições e será invariante.