Isometria: preservar métricas

① Definição: Sejam V e W espaços vetoriais normados. Uma aplicação $T: V \to W$ (não necessariamente linear) é uma isometria se:

$$\underbrace{\|Tu - Tv\|}_{\text{Norma } W} = \underbrace{\|u - v\|}_{\text{Norma } V} \quad \forall u, v \in V$$

Exemplos:

1) $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ translações
$T(u) = u + v_0$, com v_0 fixado
Dado $N=2$, $v_0 = (1,1)$
$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : (x,y) \to (x+1, y+1)$
Não é linear, dado que $T(0,0) = (1,1)$.
mas é isometria com a norma usual de $\mathbb{R}^N$ ($\mathbb{R}^2$)

$$\|(x_1, \dots, x_N)\| = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$$

- $\|Tu - Tv\| = \|u + v_0 - (v + v_0)\| = \|u - v\|$

Fixados

2) Rotações: Fixe um ângulo θ e tome:

$$R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \to \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} =$$

$(x\cos\theta - y\sin\theta,\ x\sin\theta + y\cos\theta)$, rotação por θ no sentido anti-horário

Usando as relações de seno e cosseno, vale que:

$$\|R_\theta(x,y) - R_\theta(z,w)\| = \|(x,y) - (z,w)\|$$

dado pela norma usual

Teorema: Sejam V e W espaços euclidianos (tem produto interno). Se $T: V \to W$ é uma isometria tal que $T(0)=0$, então T é linear.

Teorema: Sejam V e W espaços vetoriais euclidianos com a norma induzida pelo produto interno, sejam:

$T: V \to W$ linear

As seguintes afirmações são equivalentes:

i) T é isometria

ii) T preserva o produto interno, isto é: $\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$

iii) $T^* \circ T = id$

Obs: Se $V = W$, então os itens (i), (ii), (iii) do teorema são iguais a T e T^* serem isometrias.

Obs: Toda isometria é injetiva.

Aula - 05/02/2021

Lema: Considere $T: V \to V$ um operador linear com V um espaço vetorial complexo (sobre $\mathbb{C}$). Vale que:

$$\langle Tv, v \rangle = 0 \iff T \text{ é o operador nulo}$$
$\forall v \in V$

Exemplo: Considere $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma rotação por um ângulo de $90°$, ou seja, matriz de T é da forma:

$$\begin{pmatrix} \cos 90° & -\operatorname{sen} 90° \\ \operatorname{sen} 90° & \cos 90° \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

É claro que $\langle Tv, v \rangle = 0$ $\forall v \in V$, onde é o produto interno usual de $\mathbb{R}^2$.

Lema: Seja $T: V \to V$ um operador linear com E um espaço euclidiano (sobre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, V tem um produto interno fixado.) Valem:

i) $T = T^* \to \langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$ $\forall v \in V$
ii) Se $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$ e V for um espaço vetorial complexo, então $T = T^*$.

Obs: (ii) é a recíproca de (i) quando V é complexo.
(i) não vale a recíproca de (i) se V for real: de fato, vimos que $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ com matriz M, $T^* = M^T$ (a transposta) e claro que existem infinitas matrizes tais que
$$M^T \neq M$$

Definição: Um operador tal que $T = T^*$ é chamado de auto-adjunto.

Obs: (ii) se $T: V \to V$ operador linear com V complexo, então T é auto-adjunto se e somente se

$$\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \quad \forall v \in V$$

Teorema: Seja V um espaço vetorial real com produto interno. Considere:

$T: V \to V$ um operador linear
Vale que $\langle Tv, v \rangle = 0 \; \forall v \in V \iff T = -T^* = -T = T^*$

Definição: Um operador $T: V \to V$, com V sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é chamado anti-auto-adjunto se $T^* = -T$.

Definição: Um operador linear $T: V \to V$ com V espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) é dito normal se $T^* \circ T = T \circ T^*$. Além disso, T é unitário se $T \circ T^* = T^* \circ T = Id$.

Teorema: Seja $T: V \to V$ um operador linear com V espaço euclidiano, vale que T é normal, se e somente se, $\|Tv\| = \|T^*v\| \; \forall v \in V$.
Em particular, vale a decomposição:

$$V = \text{Nuc}\, T \oplus \text{Im}\, T$$

Assumindo T normal

Em particular: Temos que $\operatorname{Nuc} T = \operatorname{Nuc} T^*$, pois $\|Tv\| = \|T^* v\|$. Então $v \in \operatorname{Nuc} T \Leftrightarrow \|Tv\| = 0$ e como é normal $\|T^* v\| = \|Tv\| \Leftrightarrow v \in \operatorname{Nuc} T^*$

Analogamente $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$, segue de um teorema anterior que:

$$V = \operatorname{Nuc} T \oplus \operatorname{Im} T$$