Prova 1 Álgebra Linear 2

4) 1) Vamos provar que $(U+W)^0 = U^0 \cap W^0$, então $U^0 \cap W^0 \subseteq (U+W)^0$

Dado $\alpha \in (U^0 \cap W^0)$, temos que $\alpha(u_1)=0$ e $\alpha(w_1)=0$, para todos $u_1 \in U$ e $w_1 \in W$. Se $w \in (U+W)$, então existem $w_1 \in W$ e $u_1 \in U$ tais que $w = w_1 + u_1$, logo:

$$\alpha(w) = \alpha(u_1 + w_1) = \alpha(w_1) + \alpha(u_1) = 0+0=0$$

O que implica que $\alpha \in (U+W)^0$. Agora, vamos mostrar que $(U+W)^0 \subset U^0 \cap W^0$.

Se $\alpha \in (U+W)^0$, então vale que $\alpha(w_1+u_1) = 0$, para todos $w_1 \in W$ e $u_1 \in U$. Em particular, tomando $u_1=0$, temos que $\alpha(w_1)=0$, para todo $w_1 \in W$, o que implica que $\alpha \in W^0$. Analogamente, tomando-se $w_1 = 0$, ~~o~~ temos que

$\alpha(u_1) = 0$, para todo $u_1 \in U$. Isso implica que $\alpha \in U^0$. E portanto, concluímos que $\alpha \in U^0 \cap W^0$.

Agora, vamos provar que:

$$W^0 + U^0 \subset (W \cap U)^0$$

Se $\alpha \in (U^0 + W^0)$, então existem $\alpha_1 \in U^0$ e $\alpha_2 \in W^0$ tais que $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$. Fixado $w \in U \cap W$, temos que:

$$\alpha(w) = \alpha_1(u_1) + \alpha_2(w_1) = 0$$

O que implica que $\alpha \in (U \cap W)^0$. Em vista de $(U + W)^0 = U^0 + W^0$, para estabelecermos o: $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$, temos que mostrar:

$$\dim(U^0 + W^0) = \dim(U \cap W)^0$$

Sabe-se que:

(1) $W^0 + U^0 \subset (W \cap U)^0$

(2) $\dim (W \cap U)^0 = \dim V - \dim (W \cap U)$

E também,

(3) $\dim(U^0 + W^0) = \dim U^0 + \dim W^0 - \dim (U^0 \cap W^0)$

Usando (1) e a igualdade (3), obtemos:

(4) $\dim (U^0 + W^0) = \dim U^0 + \dim W^0 - \dim (U + W)^0.$

Entretanto, temos:

$\dim (U + W)^0 = \dim V - \dim (U + W)$, e

$\dim (U + W) = \dim U + \dim W - \dim (U \cap W)$

Então do anterior e da igualdade (4) segue que:

$\dim(U^0 + W^0) = \dim U^0 + \dim W^0 - \dim V$
$+ \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$

Finalmente, usando que:

$\dim U^0 = \dim V - \dim U$ e,

$\dim W^0 = \dim V - \dim W$

Assim temos que:

(5) $\dim(U^0 + W^0) = \dim V - \dim(U \cap W)$

Das igualdades (2) e (5), concluímos que:

$\dim(U^0 + W^0) = \dim(U \cap W)^0$

$\blacksquare$

2) $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, T_A é um operador linear.

Temos que $T_A(M) = AM - MA$.

Temos que um operador linear é uma transformação $T: V \to V$, então para mostrar que T_A é linear.

$T_A(\lambda M_1 + M_2) = \lambda T_A(M_1) + T_A(M_2)$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $M_1, M_2 \in V$

Temos que mostrar que os funcionais lineares desta igualdade coincidem em cada vetor $v \in V$, isto é:

$T(\lambda M_1 + M_2)(v) = (\lambda M_1 + M_2)(T_A(v)) =$

$\lambda M_1(T_A(v)) + M_2(T_A(v)) = \lambda T_A(M_1)(v) + T(M_2)(v) =$

$(\lambda t_A(M_1) + t_A(M_2))(v)$

Para encontrar a $[T_A]_{can}$, temos que utilizar os elementos da base canônica $M_2(\mathbb{R})$.

$$M_2 = \left[\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_1}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{e_2}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{e_3}, \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{e_4} \right]$$

$$T_A(M) = AM - MA$$

$$T_A(e_1) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$T_A(e_1) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -b \\ c & 0 \end{bmatrix}$$

$$T_A(e_2) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$T_A(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c & a-d \\ 0 & c \end{bmatrix}$$

$$T_A(e_3) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$T_A(e_3) = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d-a & -b \end{bmatrix}$$

$$T_A(e_4) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$T_A(e_4) = \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & d \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & +b \\ -c & 0 \end{bmatrix}$$

Então a $[T_A]_{can}$ é formada pelas colunas de $T_A(e_1)$, $T_A(e_2)$, $T_A(e_3)$ e $T_A(e_4)$.

$$[T]_{can} = \begin{pmatrix} 0 & -c & b & 0 \\ -b & a-d & 0 & b \\ c & 0 & d-a & -c \\ 0 & c & -b & 0 \end{pmatrix}$$

3) Dado $\begin{pmatrix} (1,0) \\ (1,i) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$,

O espaço Dual é o espaço de todos os funcionais lineares de $\mathbb{C}^2$, neste exercício o espaço vetorial será U e seu dual U^*. O resultado de um funcional linear é um número, então dadas τ_1 e $\tau_2 \in \mathbb{C}^2$, τ_1 e $\tau_2 \in U^*$.

Para obter uma base dual, temos:

$$\left\{\begin{array}{l} \tau_1(1,1) = 1 \\ \tau_1(0,i) = 0 \\ \tau_2(1,1) = 0 \\ \tau_2(0,i) = 1 \end{array}\right. \qquad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$a_{11}(1,1) + a_{21}(0,i) = (1,0)$$

$$\begin{cases} a_{11} + 0 = 1 \longrightarrow a_{11} = 1 \\ a_{11} + a_{21} i = 0 \end{cases}$$

$$a_{21} i = -a_{11}$$

$$(a_{21} i = -1) \times i$$

$$-a_{21} = -i \quad (-1)$$

$$a_{21} = i$$

$$\begin{cases} a_{21} = 0 \\ a_{21} + a_{22}i = 1 \end{cases} \longrightarrow a_{21} = 0$$

$$a_{21} + a_{22}i = 1$$

$$0 + a_{22}i = 1 \longrightarrow [a_{22}i = 1] \times i$$

$$(-a_{22} = +i) \times (-1)$$

$$a_{22} = -i$$

Temos que a matriz B^*, base de M^* será:

$$B^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & -i \end{bmatrix}$$

Portanto $B = \{ T_1(x,y) = x \text{ e } T_2(x,y) = i(x-y) \}$

- Dada uma $B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, para encontrar uma base dual para B_1, seja B_1^*.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Então devemos encontrar a B_1^{-1}.

$$\begin{cases} a + 2ib = 1 \\ c + 2id = 0 \\ 0a + b = 0 \\ 0c + d = 1 \longrightarrow d = 1 \end{cases}$$

$c + 2id = 0$

$c + 2i(1) = 0$

$c = -2i$

$b = 0$, $a + 2ib = 1$

$a + 2i \cdot 0 = 1$

$a = 1$

Então: $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2i & 1 \end{bmatrix} = B_1^{-1}$

$B_1^* = \{(1, -2i), (0, 1)\}$