Formas Elementares: Diagonal, Triangular e de Jordan [1]

João Peres Vieira e Anizio Perissinotto Junior

Departamento de Matemática
IGCE-UNESP-RIO CLARO-SP

[1] Fonte Financiadora: PADCT/CAPES - 1996

Introdução

As formas elementares são parte integrante da disciplina Álgebra Linear oferecida a alunos do 2º ano do Curso de Graduação em Matemática de Rio Claro na modalidade Bacharelado e também faz parte do rol das optativas para a Licenciatura.

O objetivo central destas notas são as formas elementares de um operador linear, isto é, dado $T \in L(V)$, encontrar uma base de V na qual a matriz de T assume uma forma particularmente agradável. Essas matrizes serão denominadas **formas elementares** e as formas que veremos são a **forma diagonal**, a **forma triangular** e a **forma de Jordan**.

Para um estudo mais completo, abordamos inicialmente: autovalor, polinômio minimal, subespaço invariante e espaço quociente.

A maior parte do material exposto neste trabalho se encontra nas referências [1] , [2] , [3] e [4], pelas quais ele foi muito influenciado.

Para fixarmos a notação, no decorrer de todo o texto, denotaremos por K o corpo dos números reais ou complexos, por V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo K e por $L(V)$ o espaço dos operadores lineares sobre V.

Para $T \in L(V)$ escreveremos

$$KerT = \{x \in V : Tx = 0\} \ e \ ImT = \{Tx : x \in V\}.$$

Dizemos que uma matriz está na forma diagonal se ela tem a forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz está na forma triangular se ela tem a forma

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Dizemos que uma matriz A de ordem n está sob a forma de Jordan(forma canônica de Jordan) se A for triangular superior e

$$A = \begin{bmatrix} J_{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{\lambda_2} & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & J_{\lambda_r} \end{bmatrix},$$

onde J_{λ_i} (chamado bloco de Jordan), $i = 1, \ldots, r$ é da seguinte forma

$$J_{\lambda_i} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_i \end{bmatrix}.$$

Autovalor. Polinômio minimal. Subespaço Invariante. Espaço Quociente

Definição 1 *Seja $T \in L(V)$. Se existirem $v \in V$, $v \neq 0$ e $\lambda \in K$ tais que $Tv = \lambda v$, dizemos que λ é* **autovalor** *de T e v é* **autovetor** *de T associado a λ.*

Nos três exemplos abaixo verificaremos a existência de autovalor.

Exemplo 1 *Seja $T_1 \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $T_1(x, y) = (x, 2y)$.*

Temos $T_1(1,0) = 1(1,0)$ e portanto 1 é autovalor de T_1 e $(1,0)$ é autovetor de T_1 associado a 1.

Também, $T_1(0,1) = (0,2) = 2(0,1)$ e portanto 2 é autovalor de T_1 e $(0,1)$ é autovetor de T_1 associado a 2.

Assim, este operador possui dois autovalores distintos.

Exemplo 2 *Seja $T_2 \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $T_2(x, y) = (3x + y, 3y)$.*

Temos $T_2(1,0) = (3,0) = 3(1,0)$ e portanto 3 é autovalor de T_2 e $(1,0)$ é autovetor de T_2 associado a 3.

Também, $T_2(0,1) = (1,3) \neq \lambda(0,1), \forall \lambda \in \mathbb{R}$ e portanto $(0,1)$ não é autovetor de T_2.

Este operador possui só um autovalor.

Exemplo 3 *Seja $T_3 \in L(\mathbb{R}^2)$ dado por $T_3(x, y) = (-y, x)$.*

Observemos que T_3 não tem autovalor em $\mathbb{R}$.

Sugestão 1 *Mostre que se o operador T_3 do Exemplo 3 é tal que $T_3 \in L(\mathbb{C}^2)$ então T_3 tem autovalor em $\mathbb{C}$.*

Teorema 1 *Sejam $T \in L(V)$ e $\lambda \in K$. Considere o seguinte conjunto $V(\lambda) = \{v \in V | Tv = \lambda v\}$. Então $V(\lambda)$ é um subespaço de V, chamado de auto-espaço .*

Prova. a) Temos que $0 \in V(\lambda)$ pois $T0 = 0 = \lambda 0$.

b) Se $v, u \in V(\lambda)$ então $T(v+u) = Tv + Tu = \lambda v + \lambda u = \lambda(v+u)$ e portanto $v + u \in V(\lambda)$.

c) Se $a \in K$, $v \in V(\lambda)$ então $T(av) = aT(v) = a(\lambda v) = \lambda(av)$ e portanto $av \in V(\lambda)$. ■

Exemplo 4 *Do Exemplo 1, temos que $\lambda = 1$ e $\lambda = 2$ são autovalores de $T_1(x, y) = (x, 2y)$.*

Então,

$$V(1) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T_1(x, y) = 1(x, y)\right\} = \left\{(x, 0) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

e

$$V(2) = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T_1(x, y) = 2(x, y)\right\} = \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Teorema 2 *Sejam $T \in L(V)$ e $\lambda \in K$. São equivalentes:*

i) λ é um autovalor de T.

ii) O operador $T - \lambda I$ não é injetor.

Prova. $(i) \Rightarrow (ii)$
Existe $v \neq 0$ tal que $Tv = \lambda v \Rightarrow Tv - \lambda v = 0 \Rightarrow (T - \lambda I)v = 0 \Rightarrow v \in Ker(T - \lambda I) \Rightarrow T - \lambda I$ não é injetor.

$(ii) \Rightarrow (i)$
$Ker(T - \lambda I) \neq 0 \Rightarrow \exists v \neq 0 \in V$ tal que $(T - \lambda I)v = 0 \Rightarrow Tv - \lambda v = 0 \Rightarrow Tv = \lambda v \Rightarrow \lambda$ é autovalor de T. ■

Exemplo 5 *Do Exemplo 2, temos que $\lambda = 3$ é autovalor de $T_2(x, y) = (3x + y, 3y)$.*

Então, o operador $(T_2 - 3I)$ é dado por $(T_2 - 3I)(x, y) = (y, 0)$. Portanto, $(T_2 - 3I)(1, 0) = (0, 0)$. Logo não é injetor.

Teorema 3 *Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes.*

Prova. Sejam $v_1, \ldots, v_n$ autovetores não nulos, associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Vamos fazer a demonstração por indução em n.

1) Se $n = 1$ e tomamos o autovetor $v_1 \neq 0$ associado ao autovalor λ_1 temos que $\{v_1\}$ é linearmente independente.

2) Suponhamos válido para $n = s$ e mostremos que o teorema vale para $n = s+1$. Consideremos então $v_1, \ldots, v_{s+1}$ autovetores não nulos,associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_{s+1}$ e façamos

$$a_1 v_1 + \cdots + a_s v_s + a_{s+1} v_{s+1} = 0. \ (*)$$

Então, aplicando T a ambos os lados de $(*)$ obtemos

$$a_1 T v_1 + \cdots + a_s T v_s + a_{s+1} T v_{s+1} = 0$$

e portanto

$$a_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + a_s \lambda_s v_s + a_{s+1} \lambda_{s+1} v_{s+1} = 0. \ (**)$$

Agora, multiplicando $(*)$ por λ_{s+1}, obtemos:

$$a_1 \lambda_{s+1} v_1 + \cdots + a_s \lambda_{s+1} v_s + a_{s+1} \lambda_{s+1} v_{s+1} = 0. \ (***)$$

Subtraindo $(***)$ de $(**)$ obtemos:

$$a_1(\lambda_1 - \lambda_{s+1}) v_1 + \cdots + a_s(\lambda_s - \lambda_{s+1}) v_s = 0. \ (****)$$

Agora, por indução, cada um dos coeficientes acima é 0 e como $\lambda_i \neq \lambda_j$, segue que $(****) a_i = 0$ para $i = 1, \ldots, i = s$. Substituindo $(****)$ em $(*)$ temos que $a_{s+1} v_{s+1} = 0$ e portanto que $a_{s+1} = 0$, o que demonstra o teorema. ■

Definição 2 *Seja A uma matriz quadrada sobre K. Um* **autovalor** *de A em K é um escalar $\lambda \in K$ tal que a matriz $A - \lambda I$ não é inversível.*

Proposição 1 *Se A e B são matrizes $n \times n$ sobre K, então AB e BA têm exatamente os mesmos autovalores.*

Prova. Seja λ autovalor de AB com autovetor $v \neq 0$, isto é, $AB(v) = \lambda v$. Então $BA(Bv) = B(ABv) = B(\lambda v) = \lambda Bv$ e portanto λ é também autovalor de BA. A recíproca é análoga.

Observação 1 *Já sabemos que podemos associar um $T \in L(V)$ a uma matriz A, em relação a uma base. Assim, podemos escrever, λ é um autovalor de T se e sómente se $det(A - \lambda I) = det(T - \lambda I) = 0$.*

Observação 2 *Denotamos por $\sigma(A) = \{\lambda \in \overset{K}{\mathbb{C}} : det(A - \lambda I) = 0\}$. Este conjunto recebe o nome de espectro de A. Vale que $P_A(\sigma(A)) = \sigma(p_A(A))$ onde $P_A(\lambda)$ é o polinômio característico de A.*

= {0}

Definição 3 *O polinômio* $p(\lambda) = det(A - \lambda I)$ *é chamado de* **polinômio característico** *de* A. *Observe então que* λ *é autovalor de* T *se e sómente se* $p(\lambda) = det(T - \lambda I) = 0$.

Exemplo 6 *Para cada matriz seguinte, encontremos todos os autovalores e uma base de cada auto-espaço.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

i) $p_A(\lambda) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 2)$. Logo, os autovalores de A são 1, -1 e 2.

Para $\lambda = 1$ temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

cujo espaço solução é gerado pelo autovetor $v_1 = (9, 3, 2)$ e v_1 é base de $V(1)$.

Para $\lambda = -1$ temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-1) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

cujo espaço solução é gerado pelo autovetor $v_2 = (5, 1, 2)$ e v_2 é base de $V(-1)$.

Para $\lambda = 2$ temos

$$\begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

cujo espaço solução é gerado pelo autovetor $v_3 = (4, 2, 1)$ e v_3 é base de $V(2)$.

ii) $p_B(\lambda) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda + 2)^2(\lambda - 4)$. Portanto, os autovalores de B são -2 e 4.

Para $\lambda = -2$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Então $V(-2) = \{(x, y, z) : x - y + z = 0\} = [(1, 1, 0), (1, 0, -1)]$ e portanto $\{(1,1,0), (1,0,-1)\}$ é base de $V(-2)$.

Para $\lambda = 4$ temos

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Então $V(4) = \{(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}, z) : z \in \mathbb{R}\} = [(1,1,2)]$ e portanto $\{(1,1,2)\}$ é base de $V(4)$.

iii) $p_C(\lambda) = det \begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 & -1 \\ -7 & 5-\lambda & -1 \\ -6 & 6 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda+2)^2(\lambda-4)$. Portanto, os autovalores de C são -2 e 4.

Para $\lambda = -2$ temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = (-2) \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Então $V(-2) = \{(x, x, 0) : x \in \mathbb{R}\} = [(1,1,0)]$ e portanto $\{(1,1,0)\}$ é base de $V(-2)$.

Para $\lambda = 4$ temos

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 4 \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Então $V(4) = \{(0, y, y) : y \in \mathbb{R}\} = [(0,1,1)]$ e portanto $\{(0,1,1)\}$ é base de $V(4)$.

Proposição 2 *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.*

Prova. Suponhamos B semelhante a A, isto é, existe uma matriz inversível P tal que $B = P^{-1}AP$. Então,
$det(B-\lambda I) = det(P^{-1}AP-\lambda I) = det(P^{-1}AP-\lambda P^{-1}P) = det(P^{-1}(A-\lambda I)P) = detP^{-1}det(A-\lambda I)detP = det(A-\lambda I)$. ■

Exemplo 7 *As matrizes* $A = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ *são semelhantes.*

A matriz que dá a semelhança é $P = \begin{bmatrix} 9 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. Temos $det(A-\lambda I) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$ e $det(B-\lambda I) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$.

Sugestão 2 *Matrizes semelhantes possuem o mesmo traço.*

Definição 4 *Sejam $T \in L(V)$, A uma matriz quadrada e $p(t) = a_0 + \cdots + a_n t^n$. Então definimos:*

$$\mathbf{p(T)} = a_0 I + a_1 T + \cdots + a_n T^n \in L(V) \ e$$
$$\mathbf{p(A)} = a_0 I + a_1 A + \cdots + a_n A^n$$

uma matriz quadrada.

Exemplo 8 *Sejam* $p(t) = 1 + 2t + t^2$, $T(x,y) = (x+y, x)$ *e* $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Então $p(T) = I + 2T + T^2$, isto é, $p(T)(x,y) = (5x+3y, 3x+2y)$ e $p(A) = I + 2A + A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$.

Definição 5 *Seja $T \in L(V)$ [ou A uma matriz quadrada].O* **polinômio minimal** *de T [ou de A] é um polinômio $m(t)$ tal que:*

i) $m(t)$ é o polinômio de menor grau entre os que anulam T [ou A];

ii) $m(t)$ é um polinômio mônico;

iii) o polinômio característico e minimal de T [ou de A] têm as mesmas raízes, exceto possivelmente, por multiplicidade.

Exemplo 9 *Encontre o polinômio minimal das seguintes matrizes:*

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $D = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; $E = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$;

$F = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $G = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Temos:

$$p_A(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) = m_A(\lambda);$$
$$p_B(\lambda) = (1-\lambda)^2 = m_B(\lambda);$$
$$p_C(\lambda) = (1-\lambda)^2 \ e \ m_C(\lambda) = (1-\lambda);$$
$$p_D(\lambda) = (1-\lambda)(2-\lambda) = m_D(\lambda);$$
$$p_E(\lambda) = (2-\lambda)^3 \ e \ m_E(\lambda) = (2-\lambda);$$
$$p_F(\lambda) = (2-\lambda)^3 \ e \ m_F(\lambda) = (2-\lambda)^2 \ e$$
$$p_G(\lambda) = (2-\lambda)^3 \ e \ m_G(\lambda) = (2-\lambda)^3.$$

Exemplo 10 *Sejam A e B matrizes $n \times n$ sobre K. Pela Proposição 1, AB e BA têm os mesmos autovalores. Eles possuem o mesmo polinômio minimal?*

Não. Vejamos um contra-exemplo. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Então, $AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Assim, $p_{AB}(\lambda) = \lambda^2$ e $m_{AB}(\lambda) = \lambda^2$ e $p_{BA}(\lambda) = \lambda^2$ e $m_{BA}(\lambda) = \lambda$.

Exemplo 11 *Sejam a,b,c elementos de K e*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}.$$

Então, o polinômio característico de A é $x^3 - ax^2 - bx - c$, e este polinômio é também o polinômio minimal de A.

Temos

$$p(x) = det \begin{bmatrix} x & 0 & -c \\ -1 & x & -b \\ 0 & -1 & x-a \end{bmatrix} = x^2(x-a) - c - bx = x^3 - ax^2 - bx - c.$$

Portanto, os candidatos a polinômios minimais são o próprio $p(x)$, $m_1(x) = x^2 + b_1x + b_0$ e $m_2(x) = x + a_0$. Vejamos então o que acontece. Temos,

$$m_1(A) = \begin{bmatrix} 0 & c & ac \\ 0 & b & a+ab \\ 1 & a & a^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_1c \\ b_1 & 0 & b_1b \\ 0 & b_1 & b_1a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 \\ 0 & b_0 & 0 \\ 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} b_0 & c & ac + b_1c \\ b_1 & b + b_0 & a + ab + b_1b \\ 1 & a + b_1 + b_0 & a^2 + b_1a + b_0 \end{bmatrix}$$

que obviamente não pode ser a matriz nula e portanto $m_1(x)$ não pode ser min imal. Passemos agora para o cálculo de $m_2(A)$. Temos,

$$m_2(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 & 0 & c \\ 1 & a_0 & b \\ 0 & 1 & a + a_0 \end{bmatrix}$$

que obviamente não pode ser a matriz nula e portanto $m_2(x)$ também não pode ser o minimal. Logo o minimal é o próprio característico.

Exemplo 12 *Seja A a matriz real 4×4 dada por*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Então o polinômio característico de A é $x^2(x-1)^2$ e esse polinômio é também o polinômio minimal.

Temos

$$p(x) = det \begin{bmatrix} 1-x & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1-x & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -x \end{bmatrix} =$$

$$det \begin{bmatrix} 1-x & 1 \\ -1 & -1-x \end{bmatrix} det \begin{bmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & -x \end{bmatrix} = x^2(x-1)^2.$$

Portanto, os candidatos a polinômios minimais, fora $p(x)$, são: $m_1(x) = x(x-1) = x^2 - x$, $m_2(x) = x^2(x-1) = x^3 - x^2$ e $m_3(x) = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$.

Vejamos então o que acontece. Temos,

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \text{ e } A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & -3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Logo, $m_1(A) = A^2 - A \neq 0$; $m_2(A) = A^3 - A^2 \neq 0$ e $m_3(A) = A^3 - 2A^2 + A \neq 0$. Portanto o polinômio minimal é o característico.

Exemplo 13 *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e seja $T : M(2) \to M(2)$ definida por $T(B) = AB$, $B \in M(2)$, onde $M(2)$ denota o espaço das matrizes quadradas de ordem 2. Então o polinômio minimal de T é o polinômio minimal de A.*

Temos

$$p_A(x) = det \begin{bmatrix} 1-x & 2 \\ 3 & -x \end{bmatrix} = x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) = m_A(x)$$

e

$$T \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = 1e_1 + 0e_2 + 3e_3 + 0e_4,$$

$$T \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = 0e_1 + 1e_2 + 0e_3 + 3e_4,$$

$$T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 2e_1 + 0e_2 + 0e_3 + 0e_4,$$

$$T\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0e_1 + 2e_2 + 0e_3 + 0e_4,$$

onde e_1, e_2, e_3 e e_4 denotam a base canônica de $M(2)$; a saber $e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $e_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Logo,

$$T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$p_T(x) = det\begin{bmatrix} 1-x & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1-x & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -x & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -x \end{bmatrix} = (1-x)det\begin{bmatrix} 1-x & 0 & 2 \\ 0 & -x & 0 \\ 3 & 0 & -x \end{bmatrix}$$

$$+2det\begin{bmatrix} 0 & 1-x & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{bmatrix} = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36 = (x+2)^2(x-3)^2.$$

Vejamos se $m_T(x) = (x+2)(x-3) = x^2 - x - 6$.
Com efeito, temos

$$m_T(T) = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sugestão 3 *Seja A uma matriz real simétrica de ordem 3.Dê o seu polinômio característico e o minimal.*

Proposição 3 *Suponha que $f(t)$ é um polinômio môcho (ou mônico) irredutível, para o qual $f(T) = 0$, onde $T \in L(V)$. Então $f(t)$ é o polinômio mínimo de T.*

Prova. Suponhamos $m(\lambda)$ o minimal.Então $\partial m < \partial f$ e também $f = mq + r$ com $r = 0$ ou $\partial r < \partial m$.Se $\partial r < \partial m$, como $f(T) = m(T)q(T) + r(T)$ e $f(T) = m(T) = 0$ segue que $r(T) = 0$ e daí m não seria o minimal.Logo $f = mq$ o que também é um absurdo pois f é irredutível. ■

Exemplo 14 *Seja $T(x,y) = (x, 2y)$. Então $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ e daí $p(T)(x,y) = (x, 4y) - (3x, 6y) + (2x, 2y) = (0,0)$. Logo $p(\lambda)$ é o polinômio minimal de T.*

Teorema 4 (Teorema de Cayley-Hamilton) *Cada matriz é um zero de seu polinômio característico ou equivalentemente: Seja $T \in L(V)$. Se $p(x)$ é o polinômio característico de T então $p(T) = 0$.*

Prova. Consideremos $\beta = \{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base de V e chamemos de

$$A = T]_\beta = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Então

$$Tx_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i, \; j = 1, \ldots, n$$

ou equivalentemente

$$\sum_{i=1}^{n} (\delta_{ij} T - a_{ij} I) x_i = 0, \; j = 1, \ldots, n; \; (*)$$

onde

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Definamos agora $C \in M_n$ tal que $C_{ij} = \delta_{ij} T - a_{ij} I$ onde por M_n denotamos o conjunto das matrizes quadradas de ordem n. Afirmamos que $p(T) = (-1)^n detC$. Com efeito, $p(x) = det(A - xI)$ e o elemento ij da matriz $[A - xI]$ é dado por $-(\delta_{ij} x - a_{ij})$. Assim,

$$p(T) = det(A - TI) = det(-C) = (-1)^n detC.$$

Mostremos agora que $p(T) = 0$. Para isto basta observarmos que $p(T) = 0$ se e sómente se $(detC)x_k = 0$ para todo $k = 1, \ldots, n$. Primeiramente, denotemos por $\bar{C}$ a matriz adjunta de C e lembremos que $C\bar{C} = \bar{C}C = detC.I$. Então por $(*)$ temos

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ij} x_i = 0, \; j = 1, \ldots, n$$

e portanto

$$\sum_{i=1}^{n} C_{ij} \bar{C}_{jk} x_i = 0,$$

para cada par k, j. Logo,

$$\sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} C_{ij} \bar{C}_{jk} x_i) = 0$$

ou equivalentemente,

$$\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{n} C_{ij} \bar{C}_{jk}) x_i = 0$$

ou ainda,

$$\sum_{i=1}^{n} \delta_{ik} detCx_i = 0.$$

Portanto, $(detC)x_k = 0$ o que demonstra que $p(T) = 0$ ■

Exemplo 15 *Verifique o Teorema de Cayley-Hamilton para a seguinte matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ *e para o seguinte operador linear* $T(x,y) = (3x + y, 3y)$.

Neste caso temos:

$$p_A(\lambda) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - \lambda - 6$$

e portanto

$$p_A(A) = A^2 - A - 6I = \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de T é $p_T(\lambda) = (3-\lambda)^2$. Então $p_T(T) = (3I-T)^2$ e daí $p_T(T)(x,y) = (9x+6y, 9y) - (18x+6y, 18y) + (9x, 9y) = (0,0)$.

Definição 6 *Sejam $T \in L(V)$ e W subespaço de V. Diz-se que W é* **invariante por** T *ou* T**-invariante** *se $T(W) \subset W$, isto é, para todo $w \in W$ temos $Tw \in W$.*

Exemplo 16 *Seja $T \in L(V)$. Então, os subespaços $\{0\}$, o próprio V, ImT, $KerT$ e $V(\lambda)$ são invariantes por T.*

Sugestão 4 *Seja $v \neq 0$ autovetor de T associado a λ. Então $[v]$ é T-invariante. Reciprocamente, se $U = [u], u \neq 0$ é um subespaço $T-$invariante, então u é autovetor de T.*

Exemplo 17 *Seja $T \in L(V)$ e $\lambda \in K$ um autovalor de T. Se $S \in L(V)$ comuta com T, então o auto-espaço de λ, $V(\lambda)$, é invariante sob S.*

Temos $V(\lambda) = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$. Devemos mostrar que se $v \in V(\lambda)$ então $Sv \in V(\lambda)$. Agora, $Sv \in V(\lambda)$ se e sómente se, $T(Sv) = \lambda(Sv)$. Mas, $T(Sv) = S(Tv) = S(\lambda v) = \lambda Sv$ e portanto o resultado segue.

Sugestão 5 *Se W e W_1 são subespaços $T-$invariantes, então $W \bigcap W_1$ é também $T-$invariante.*

Sugestão 6 *Sejam*
$M = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$ *e* $N = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}, a \in \mathbb{R} \right\}$.
Então,
$A = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$ *com* $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ *mantém* M *invariante;*
$B = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ \beta & \gamma \end{bmatrix}$ *com* $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{R}$ *mantém* N *invariante e* M *e* N *são invariantes com relação a* A *se*
$A = \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$ *com* $\alpha,\ \gamma \in \mathbb{R}$.

Observação 3 *Seja* $T \in L(V)$ *e* W *um subespaço* $T-$ *invariante. Então podemos definir uma transformação linear* $\hat{T} : W \to W$ *por* $\hat{T}(w) = T(w)$, *isto é* $\hat{T}$ *é a restrição de* T *a* W. *Usamos também as notações* T_W *ou* $T|W$ *para* $\hat{T}$.

Exemplo 18 *Seja* λ *um autovalor de* T *e seja* $V(\lambda)$ *o auto-espaço associado a* λ. *Pergunta-se: qual é o operador* $T_{V(\lambda)}$*?*

Temos que $V(\lambda) = \{v \in V : Tv = \lambda v\}$ é T-invariante. Assim, $T_{V(\lambda)} : V(\lambda) \to V(\lambda)$ é dada por $T_{V(\lambda)}(w) = T(w) = \lambda w$ e portanto $T_{V(\lambda)} = \lambda I_{V(\lambda)}$ ou seja $T_{V(\lambda)}$ é um múltiplo da identidade de $V(\lambda)$.

Proposição 4 *Para qualquer polinômio* $f(t)$ *temos: (i)* $f(\hat{T})w = f(T)w$, *para todo* $w \in W$ *com* W, $T-$ *invariante. Além disso, (ii)* $\hat{m}(\lambda)|m(\lambda)$, *isto é, o polinômio minimal de* $\hat{T}$ *divide o polinômio minimal de* T.

Prova. Primeiramente, façamos a demonstração do item (i) por indução no grau de f. O caso em que o grau de $f(t) = 0$ é imediato. Se $f(t) = a_0 + a_1 t$ então $f(\hat{T})w = (a_0 I + a_1 \hat{T})(w) = a_0 w + a_1 \hat{T} w = a_0 w + a_1 T w = (a_0 I + a_1 T)(w) = f(T)w$. Suponhamos agora que o grau de $f > 1$ e que o resultado vale para polinômios de grau menor do que n. Seja

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1} + a_n t^n.$$

Então para todo $w \in W$, $f(\hat{T})w = (a_0 I + a_1 \hat{T} + \cdots + a_{n-1} \hat{T}^{n-1})(w) + a_n \hat{T}^{n-1}(\hat{T} w) = (a_0 I + a_1 T + \cdots + a_{n-1} T^{n-1})(w) + a_n T^{n-1}(Tw) = f(T)w$. Passemos agora a demonstração do item (ii). Por (i) $m(\hat{T})w = m(T)w = 0w = 0$, $\forall w \in W$. Portanto $\hat{T}$ é raiz do polinômio minimal de T e daí segue que o polinômio minimal de $\hat{T}$ divide o de T. ■

Exemplo 19 *Verificar a Proposição* 4 *para* $T \in L(\mathbb{R}^2)$, *definido por* $T(x, y) = (x + y, y)$, $W = [(1, 0)]$ *e* $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$.

Seja $w \in W$.Então $w = a(1,0)$ e $Tw = aT(1,0) = a(1,0)$ e portanto W é $T-invariante$.
Defina $\hat{T}: W \to W$ por $\hat{T}(w) = \hat{T}(a,0) = T(a,0) = (a,0)$.
Seja $f(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$.
Para $w \in W$, $f(\hat{T})w = (a_0 I + a_1\hat{T} + a_2\hat{T}^2 + a_3\hat{T}^3)(w) = a_0 w + a_1\hat{T}(w) + a_2\hat{T}(\hat{T})w) + a_3\hat{T}(\hat{T}(\hat{T}w)) = a_0(a,0) + a_1(a,0) + a_2(a,0) + a_3(a,0)$.
Por outro lado, $f(T)w = (a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + a_3 T^3)(w) =$
$= a_0 w + a_1 T(w) + a_2 T(T)w) + a_3 T(T(Tw)) = a_0(a,0) + a_1(a,0) + a_2(a,0) + a_3(a,0)$.
Temos $\{(1,0),(0,1)\}$ base de V e $\{(1,0)\}$ base de W.
Ainda,

$$p_T(\lambda) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)^2 = m_T(\lambda)$$

e

$$p_{\hat{T}}(\lambda) = det(1-\lambda) = (1-\lambda) = m_{\hat{T}}(\lambda).$$

Portanto, $m_{\hat{T}} | m_T$.

Teorema 5 *Sejam $T \in L(V)$ e U, W subespaços $T-invariantes$ com $V = U \oplus W$. Definamos $\hat{T} = T|W$ e $\tilde{T} = T|U$. Então o polinômio minimal de T é o menor múltiplo comum dos polinômios minimais de $\hat{T}$ e $\tilde{T}$.*

Prova. Denotemos por $m(\lambda), \hat{m}(\lambda)\, e\, \tilde{m}(\lambda)$ os polinômios minimais de $T, \hat{T}\, e\, \tilde{T}$ respectivamente. Pela proposição (5) , $\hat{m}(\lambda)|m(\lambda)$ e $\tilde{m}(\lambda)|m(\lambda)$. Seja $f(\lambda)$ um múltiplo comum de $\hat{m}(\lambda)\, e\, \tilde{m}(\lambda)$. Logo $f(\hat{T})W = \{0\}$ e $f(\tilde{T})U = \{0\}$. Seja $v \in V$ e $v = u + w$. Então $f(T)v = f(T)u + f(T)w = f(\tilde{T})u + f(\hat{T})w = 0 + 0 = 0$ Portanto, $f(T) = 0$ e daí $m(\lambda)|f(\lambda)$. Logo $m(\lambda)$ é o menor múltiplo comum de $\hat{m}(\lambda)$ e $\tilde{m}(\lambda)$. ■

Exemplo 20 *Verificar o Teorema 5 para $T \in L(\mathbb{R}^2)$ definida por $T(x,y) = (2x+y, y+2x)$, $W = [(1,-2)]$ e $U = [(1,1)]$.*

O polinômio minimal de T é $m(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda$.
Como $T(1,-2) = (0,0) \in W$ então W é $T-invariante$.
Também , $T(1,1) = (3,3) = 3(1,1) \in U$ e portanto U é $T-invariante$.
Ainda $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$.
Temos que $\hat{T}: W \to W$ é dada por $\hat{T}(x,-2x) = 0 = T(x,-2x)$ e $\tilde{T}: U \to U$ é dada por $\tilde{T}(x,x) = (3x,3x) = T(x,x)$.
Logo $\hat{T}] = [0]$ e $\tilde{T}] = [3]$ donde segue que $\hat{m}(\lambda) = \lambda$ e $\tilde{m}(\lambda) = (\lambda - 3)$.
Portanto, $m(\lambda) = m.m.c.(\hat{m}(\lambda), \tilde{m}(\lambda))$.

Exemplo 21 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$.

a) Se T é o operador linear sobre $\mathbb{R}^2$, cuja matriz em relação á base canônica é A, então os únicos subespaços $T-invariantes$ são $\mathbb{R}^2$ e o subespaço nulo.

b) Se S é o operador linear sobre $\mathbb{C}^2$, cuja matriz em relação á base canônica é A, então $\mathbb{C}^2$ possui subespaços $S-$invariantes unidimensionais.

Mostremos inicialmente o ítem a). Qualquer outro subespaço $T-$invariante teria necessariamente dimensão 1, isto é, $W = [v]$, com $v \neq 0 \in \mathbb{R}^2$. Logo $Tv = xv$, pois W é $T-$invariante.E daí x seria autovalor de T.Absurdo pois T não possui autovalores reais. Para o ítem b), observemos que $p(x) = x^2 - 3x + 4$ e como o discrimante de $p(x)$ é $\Delta = 9 - 16 = -7$, temos dois autovalores distintos e daí cada auto-espaço é $S-$invariante e unidimensional.

Sugestão 7 *Sejam $dimV = n$, $dimM = m$, $A \in L(V)$ e M invariante com relação a A. Seja $\beta = \{v_1, \ldots, v_m, v_{m+1}, \ldots, v_n\}$ base de V onde $\gamma = \{v_1, \ldots, v_m\}$ é base de M. Seja $A_1 = A|_M$. Então*

$$A]_\beta = \begin{bmatrix} A_1]_\gamma^{m\times m} & [B_0]_{m\times(n-m)} \\ [0]_{(n-m)\times m} & [A_2]_{(n-m)\times(n-m)} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 22 *Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dada por: $T(x, y, z) = (x + y - z, 2y - z, z)$. Mostre que $W = [(1, 1, 0), (0, 1, 1)]$ é $T-$invariante e calcule a matriz de T em relação á base $\{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.*

$$T((a, a, 0) + (0, b, b)) = T(a, a + b, b) = (2a, 2a + b, b) = 2a(1, 1, 0) + b(0, 1, 1) \in W.$$

Portanto, W é $T-$*invariante*.

$$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0) = 1(1, 0, 0) + 0(1, 1, 0) + 0(0, 1, 1)$$

$$T(1, 1, 0) = (2, 2, 0) = 0(1, 0, 0) + 2(1, 1, 0) + 0(0, 1, 1)$$

$$T(0, 1, 1) = (0, 1, 1) = 0(1, 0, 0) + 0(1, 1, 0) + 1(0, 1, 1)$$

Logo,

$$T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Proposição 5 *Se $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_r$, onde cada subespaço V_i é de dimensão n_i e é invariante sob $T \in L(V)$, então pode-se determinar uma base de V tal que a matriz de T em relação a esta base seja da forma* $\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_r \end{bmatrix}$, *onde cada A_i é uma matriz $n_i \times n_i$ e é a matriz da transformação linear induzida por T sobre V_i.*

Prova Sejam, $\{v_{11}, \ldots, v_{1n_1}\}$ base de V_1, $\ldots, \{v_{r1}, \ldots, v_{rn_r}\}$ base de V_r. Então, $\{v_{11}, \ldots, v_{1n_1}\} \cup \ldots \cup \{v_{r1}, \ldots, v_{rn_r}\}$ é base de V. Lembrando que V_i é T-invariante, calculemos a matriz de T em relação à essa base.
$V_1 \ni Tv_{11} = a_{11}v_{11} + \cdots + a_{n_1 1}v_{1n_1} + \cdots + 0v_{r1} + \cdots + 0v_{rn_r}$
$\vdots$
$V_1 \ni Tv_{1n_1} = a_{1n_1}v_{11} + \cdots + a_{n_1 n_1}v_{1n_1} + \cdots + 0v_{r1} + \cdots + 0v_{rn_r}$
$\vdots$
$V_r \ni Tv_{r1} = 0v_{11} + \cdots + 0v_{1n_1} + \cdots + c_{11}v_{r1} + \cdots + c_{n_r 1}v_{rn_r}$
$\vdots$
$V_r \ni Tv_{rn_r} = 0v_{11} + \cdots + 0v_{1n_1} + \cdots + c_{1n_r}v_{r1} + \cdots + c_{n_r n_r}v_{rn_r}$.
Assim,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n_1 1} & \cdots & a_{n_1 n_1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & c_{11} & \cdots & c_{1n_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & c_{n_r 1} & \cdots & c_{n_r n_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1] & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2] & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & T_r] \end{bmatrix}.$$

■

Exemplo 23 *Verificar a Proposição acima para os seguintes subespaços do* $\mathbb{R}^4$ *:* $V_1 = [(1,1,0,0),(0,0,1,1)]$ *e* $V_2 = [(0,0,0,1),(0,1,1,0)]$, *onde* $T(x,y,z,w) = (2x, 4x-2y, x-y-z, -4x+4y-4z+3w)$.

É claro que $\mathbb{R}^4 = V_1 \oplus V_2$ e que $T \in L(\mathbb{R}^4)$. Ainda,

$$T(a,a,b,b) = (2a,2a,-b,-b) = 2a(1,1,0,0) + (-b)(0,0,1,1) \in V_1$$

e

$$T(0,b,b,a) = (0,-2b,-2b,3a) = 3a(0,0,0,1) + (-2b)(0,1,1,0) \in V_2$$

e portanto V_1 e V_2 são T-invariantes.
Desde que $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1)\}$ é base de V_1 e $\{(0,0,0,1),(0,1,1,0)\}$ é base de V_2, então $\{(1,1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,0,1),(0,1,1,0)\}$ é base do $\mathbb{R}^4$. Temos,
$T(1,1,0,0) = 2(1,1,0,0) + 0(0,0,1,1) + 0(0,0,0,1) + 0(0,1,1,0)$;
$T(0,0,1,1) = 0(1,1,0,0) + (-1)(0,0,1,1) + 0(0,0,0,1) + 0(0,1,1,0)$;
$T(0,0,0,1) = 0(1,1,0,0) + 0(0,0,1,1) + 3(0,0,0,1) + 0(0,1,1,0)$ e
$T(0,1,1,0) = 0(1,1,0,0) + 0(0,0,1,1) + 0(0,0,0,1) + (-2)(0,1,1,0)$. Logo,

$$T] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Mostremos agora que as matrizes $A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ e $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ são exatamente as matrizes das transformações lineares T_1 e T_2, induzidas por T sobre V_1 e V_2 respectivamente. Temos que $T_1 : V_1 \to V_1$ é dada por $T_1(a,a,b,b) = T(a,a,b,b) = (2a, 2a, -b, -b)$ e $T_2 : V_2 \to V_2$ é dada por $T_2(0,b,b,a) = T(0,b,b,a) = (0,-2b,-2b,3a)$.Calculemos agora as matrizes de T_1 e T_2 respectivamente. Temos,
$T_1(1,1,0,0) = (2,2,0,0) = 2(1,1,0,0) + 0(0,0,1,1)$;
$T_1(0,0,1,1) = (0,0,-1,-1) = 0(1,1,0,0) + (-1)(0,0,1,1)$;
$T_2(0,0,0,1) = (0,0,0,3) = 3(0,0,0,1) + 0(0,1,1,0)$ e
$T_2(0,1,1,0) = (0,-2,-2,0) = 0(0,0,0,1) + (-2)(0,1,1,0)$ e portanto, $T_1] = A_1$ e $T_2] = A_2$, como queríamos mostrar.

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K e seja W um subespaço de V. Construiremos a partir de V e W um espaço vetorial V/W sobre o corpo K chamado de espaço quociente. Este espaço quociente não é um subespaço de V, ele é um espaço vetorial definido apenas em termos de V e W que tem a seguinte propriedade : se W' é outro subespaço de V tal que $V = W \oplus W'$ então V/W é isomorfo a W'.
Se W é um subespaço de V e $v \in V$, então definimos

$$v + W = \{v + w : w \in W\}$$

Esse conjunto recebe o nome de **classe lateral** ou **coset** de W em V.
Do fato da operação de adição num espaço vetorial ser comutativa segue que

$$v + W = W + v$$

Considere agora o seguinte conjunto, para $v \in V$,

$$[v]_W = \{u \in V : u - v \in W\}.$$

Lema 1 *Para todo $v \in V$, $v + W = [v]_W$.* $\{u \in V / u - v \in W\}$

Prova Primeiramente mostremos que $v + W \subset [v]_W$. Se $w \in W$, então $(v + w) - v = w$ também é elemento de W pois W é subespaço. Da definição de $[v]_W$ temos que $v + w \in [v]_W$ para cada $w \in W$. Logo, $v + W \subset [v]_W$.
Suponha agora que $u \in [v]_W$. Então $u - v \in W$. Logo $u - v = w$ para algum $w \in W$. Assim $u = v + w$ e então $u \in v + W$. Portanto, $[v]_W \subset v + W$. Assim, concluímos a prova. ■

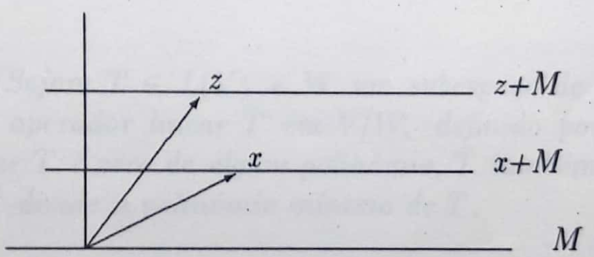
Lema 2 *Se $v_1 + W$ e $v_2 + W$ são duas classes laterais de W em V, então ou elas são iguais ou não têm ponto em comum.*

Prova Suponhamos que estas duas classes laterais têm um ponto em comum,isto é, existe $v_3 \in V$ tal que $v_3 \in v_1 + W$ e $v_3 \in v_2 + W$.
Assim, $v_3 = v_1 + w_1$ e $v_3 = v_2 + w_2$ para alguns w_1, w_2 em W. Como W é subespaço, temos que $v_2 - v_3 = -w_2 \in W$.Portanto, $v_2 - v_1 = v_2 - v_3 + v_3 - v_1 = -w_2 + w_1 \in W$.Logo, $v_2 \in v_1 + W$.Analogamente, $v_1 \in v_2 + W$.Assuma $u \in v_2 + W$.Como $u - v_2 \in W$ e $v_2 - v_1 \in W$ temos que $u - v_2 + v_2 - v_1 = u - v_1 \in W$.Logo $u \in v_1 + W$ e assim $v_2 + W \subset v_1 + W$.Analogamente $v_1 + W \subset v_2 + W$ e assim o lema está provado. ■

Definição 7 *A coleção de todas as classes laterais de W em V será indicada por V/W, isto é,*

$$V/W = \{v + W : v \in V\}.$$

Geométricamente:



Se $x \in M$, então $x + M = M$.

Como um exemplo, consideremos $W = \{(a, a) : a \in \mathbb{R}\}$ e $v = (2, 3)$. Então $v + W = \{(2, 3) + (a, a) : a \in \mathbb{R}\} = \{(2 + a, 3 + a) : a \in \mathbb{R}\}$. Portanto, $v + W$ é uma reta passando pelo ponto $(2, 3)$ e paralela ao vetor $(1, 1)$.

Teorema 6 *Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K. Então V/W é um espaço vetorial sobre K, com as seguintes operações de adição e multiplicação por escalar*

i) $(u + W) + (v + W) = (u + v) + W$

ii) $a(v + W) = av + W$ *onde* $a \in K$.

Prova. É necessário primeiramente mostrar que as operações estão bem definidas, isto é, sempre que $u + W = u' + W$ e $v + W = v' + W$, então

a) $(u + v) + W = (u' + v') + W$ e

b) $ku + W = ku' + W$, para qualquer $k \in K$.

Provemos inicialmente o item a).
Primeiramente observemos que $u + W = u' + W$ se e sómente se $u - u' \in W$, pois $u + w_0 = u' + w_0'$ se e sómente se $u - u' = w_0 - w_0' \in W$. Similarmente de $v + W = v' + W$ temos $v - v' \in W$. Mas, então, $(u+v) - (u'+v') = (u-u') + (v-v') \in W$. Portanto, $(u+v) + W = (u'+v') + W$.
Agora para o ítem b), observemos que como $u - u' \in W$ implica $k(u-u') \in W$, então $ku - ku' = k(u-u') \in W$; portanto, $ku + W = ku' + W$.
Agora, as propriedades de espaço vetorial saem facilmente e são deixadas como exercício para o leitor. ∎

Proposição 6 *Seja W um subespaço de V. Então, a função $\phi : V \to V/W$, definida por $\phi(v) = v + W$, é linear.*

Prova. Com efeito, temos: $\phi(u+v) = (u+v) + W = (u+W) + (v+W) = \phi(u) + \phi(v)$, $\forall u, v \in V$ e $\phi(au) = au + W = a(u+W) = a\phi(u)$, $\forall a \in K$ e $\forall u \in V$. ∎

Teorema 7 *Sejam $T \in L(V)$ e W um subespaço de V, T-invariante. Então, T induz um operador linear $\bar{T}$ em V/W, definido por $\bar{T}(v+W) = Tv + W$. Além disso, se T é zero de algum polinômio, $\bar{T}$ também o é. Assim, o polinômio mínimo de $\bar{T}$ divide o polinômio mínimo de T.*

Prova. Mostremos inicialmente que $\bar{T}$ é bem definido. De fato, se $u + W = v + W$, então $u - v \in W$ e como W é T-invariante, $T(u-v) = Tu - Tv \in W$. Assim $\bar{T}(u+W) = Tu + W = Tv + W = \bar{T}(v+W)$. Mostremos agora que $\bar{T}$ é linear.

(T1) $\bar{T}(u + W + v + W) = \bar{T}(u + v + W) = T(u+v) + W = Tu + Tv + W = Tu + W + Tv + W = \bar{T}(u+W) + \bar{T}(v+W)$.

(T2) $\bar{T}(a(u+W)) = \bar{T}(au + W) = T(au) + W = aTu + W = a(Tu + W) = a\bar{T}(u+W)$.

Afirmamos que $(\bar{T})^n = (\bar{T^n})$ para qualquer n.
Faremos a prova por indução em n.
O caso $n = 1$ é imediato.
Suponhamos válido para $n - 1$, e provemos que o resultado vale para n.
Com efeito, $(\bar{T})^n(u+W) = \bar{T}((\bar{T})^{n-1}(u+W)) = \bar{T}((\bar{T^{n-1}})(u+W)) = \bar{T}(T^{n-1}u + W) = T(T^{n-1})u + W = T^n u + W = (\bar{T^n})(u+W)$.
Portanto, $(\bar{T})^n = (\bar{T^n})$.
Finalmente, seja $f(t) = a_n t^n + \cdots + a_1 t + a_0$.
Então, $f(T) = a_n T^n + \cdots + a_1 T + a_0 I$ e $f(\bar{T}) = a_n(\bar{T})^n + \cdots + a_1\bar{T} + a_0\bar{I} = a_n(\bar{T^n}) + \cdots + a_1\bar{T} + a_0\bar{I}$.
Portanto, $(f(\bar{T}))(u+W) = f(T)u + W = (a_n T^n u + \cdots + a_1 Tu + a_0 Iu) + W = a_n T^n u + W + \cdots + a_1 Tu + W + a_0 Iu + W = a_n(T^n u + W) + \cdots + a_1(Tu + W) +$

$a_0(Iu+W) = a_n(\bar{T}^n)(u+W) + \cdots + a_1\bar{T}(u+W) + a_0\bar{I}(u+W) = f(\bar{T})(u+W)$ e portanto $(f(\bar{T})) = f(\bar{T})$. Assim, se $f(T) = 0$, então $(f(\bar{T})) = \bar{0} = W = f(\bar{T})$ e daí $\bar{T}$ também é raiz de f ■

Exemplo 24 *Aplique o Teorema 7 ao operador linear de* $\mathbb{R}^2$ *definido por* $T(x,y) = (-y, x-2y)$ *e ao subespaço* $W = [(1,1)]$ *de* $\mathbb{R}^2$.

Mostremos inicialmente que W é T-invariante.
Seja $(a,a) \in W$. Então $T(a,a) = (-a,-a) = -a(1,1) \in W$. Temos

$$\mathbb{R}^2/W = \{(a,b) + [(1,1)] : (a,b) \in \mathbb{R}^2\} \quad e$$

$\bar{T} : \mathbb{R}^2/W \to \mathbb{R}^2/W$ definida por

$$\bar{T}((a,b)+W) = T(a,b) + W = (-b, a-2b) + [(1,1)]$$

Seja $f(t) = t^3+2t^2+t$. Então $f(T) = T^3+2T^2+T$ e $f(T)(x,y) = T(T(T(x,y)))+2T(T(x,y))+T(x,y) = (2x-3y, 3x-4y)+(-2x+4y, -4x+6y)+(-y, x-2y) = (0,0)$. Logo T é um zero desse polinômio. Ainda, $f(\bar{T}) = \bar{T}^3+2\bar{T}^2+\bar{T}$ e portanto $f(\bar{T})((a,b)+W) = \bar{T}(\bar{T}(\bar{T}((a,b)+W))) + 2\bar{T}(\bar{T}((a,b)+W)) + \bar{T}((a,b)+W) = (2a-3b, 3a-4b)+W+(-2a+4b, -4a+6b)+W+(-b, a-2b)+W = (0,0)+W = W$.
Portanto, $\bar{T}$ também é um zero desse polinômio.
Temos,

$$p(\lambda) = det\begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2 = m(\lambda).$$

Afirmamos que $\{(-1,1)+W\}$ é base de $\mathbb{R}^2/W$. pois só possui um vetor
É linearmente independente pois $(-1,1)+W \neq W$. elemento neutro
Seja $(a,b)+W \in \mathbb{R}^2/W$. Queremos mostrar que $(a,b)+W = k((-1,1)+W) = (-k,k)+W$ para algum $k \in \mathbb{R}$.
Seja $(a,b)+x(1,1)$ um elemento de $\mathbb{R}^2/W$.
Então $(a,b)+x(1,1) = (\frac{b}{2}-\frac{a}{2})(-1,1) + (\frac{a+b}{2}+x)(1,1)$.
Logo gera e portanto é base.
$\bar{T}((-1,1)+W) = T(-1,1)+W = (-1,-3)+W$ e $(-1,-3)+(x,x) = (\frac{-3}{2}+\frac{1}{2})(-1,1) + (\frac{-1-3}{2})(1,1) = -1(-1,1) + (-2+x)(1,1)$.
Portanto, $[\bar{T}] = [-1]$ e então $\bar{p}(\lambda) = \lambda + 1 = \bar{m}(\lambda)$.

Teorema 8 *Suponha que* $\{w_1, \ldots, w_r\}$ *é base do subespaço* W *de* V *e que* $\{v_1+W, \ldots, v_s+W\}$ *é base do espaço quociente* V/W. *Então* $\{v_1, \ldots v_s, w_1, \ldots w_r\}$ *é base de* V. *Assim,* $dimV = dimW + dim(V/W)$.

Prova. Seja $u \in V$.Então,$u + W = a_1(v_1+W) + \cdots + a_s(v_s+W)$.
Logo, $(*)\, u = (a_1v_1 + \cdots + a_sv_s) + w$, onde $w \in W$.
Como $\{w_1, \ldots, w_r\}$ é base de W, então, $w = b_1w_1 + \cdots + b_rw_r$ e daí, substituindo

w em $(*)$, $u = a_1v_1 + \cdots + a_sv_s + b_1w_1 + \cdots + b_rw_r$.
Logo, esses vetores geram V.
Mostremos, agora, que são linearmente independentes.
De fato, sejam $c_1v_1 + \cdots + c_sv_s + d_1w_1 + \cdots + d_rw_r = 0$.
Então, $c_1v_1 + \cdots + c_sv_s + W = 0 + W$ pois $d_1w_1 + \cdots + d_rw_r \in W$ e portanto, $c_1(v_1 + W) + \cdots + c_s(v_s + W) = 0 + W = W$.
Como $\{v_1+W, \ldots, v_s+W\}$ é linearmente independente então $c_i = 0, \forall i = 1, \ldots, s$.
Logo, $d_1w_1 + \cdots + d_rw_r = 0$ o que implica que os d_i's são todos nulos e o teorema está demonstrado. ∎

Exemplo 25 *Verificar o Teorema 8 para o subespaço* $W = [(1,1,0),(0,1,1)]$ *do* $\mathbb{R}^3$.

Temos $\{(1,1,0),(0,1,1)\}$ base de W e
$\mathbb{R}^3/W = \{v + [(1,1,0),(0,1,1)], v \in \mathbb{R}^3\}$.
Afirmamos que $\{(1,0,0) + [(1,1,0),(0,1,1)]\}$ é base de $\mathbb{R}^3/W$.
Esse vetor é não nulo pois $(1,0,0) \notin [(1,1,0),(0,1,1)]$.
Mostremos que ele gera $\mathbb{R}^3/W$.
Com efeito, seja $v + W \in \mathbb{R}^3/W$; $v = (x,y,z)$.
Queremos mostrar que $v + W = k((1,0,0) + W) = k(1,0,0) + W$.
Sejam $(x,y,z) + a(1,1,0) + b(0,1,1)$ e $(k,0,0) + c(1,1,0) + d(0,1,1)$ elementos de $v + W$ e $(k,0,0) + W$ respectivamente.
Então, $(x,y,z) + (a,a,0) + (0,b,b) = (k,0,0) + (c,c,0) + (0,d,d)$.
Resolvendo, encontramos:
$(x,y,z) + a(1,1,0) + b(0,1,1) = (x - y + z)(1,0,0) + (y - z + a)(1,1,0) + (z + b)(0,1,1)$.
Assim gera e logo é base.
É claro que { (1,0,0),(1,1,0),(0,1,1) } é base do $\mathbb{R}^3$ e ainda que $dim W = 2$ e $dim \mathbb{R}^3/W = 1$.

Teorema 9 *Sejam V um espaço vetorial e M, N subespaços vetoriais de V tais que $V = M \oplus N$. Então V/M é isomorfo a N.*

Prova. Definamos $\phi : N \to V/M$ por $\phi(x) = x + M$.
Temos que ϕ é linear.
Com efeito, $\phi(x + y) = (x + y) + M = (x + M) + (y + M) = \phi(x) + \phi(y)$ e $\phi(ax) = (ax) + M = a(x + M) = a\phi(x)$.
Também , ϕ é sobre.
De fato, seja $x_0 + M \in V/M$.Então $x_0 = u_0 + v_0 \in V = M \oplus N$.
Assim, $x_0 + M = v_0 + u_0 + M = v_0 + M$ e portanto $\phi(v_0) = v_0 + M = x_0 + M$.
Também ϕ é injetora.
Temos $Ker\phi = \{x \in N : \phi(x) = 0 + M\}$.
Mas $x + M = 0 + M$ implica que $x \in M$ e portanto $x = 0$ desde que $M \bigcap N = 0$ e daí $Ker\phi = \{0\}$. ∎

Com este teorema a prova do teorema (8) fica reduzida assim:
Seja N subespaço de V tal que $V = M \oplus N$. Então $dimV = dimM + dimN = dimM + dim(V/M)$.

Proposição 7 *Suponha que o conjunto* $\{v_1 + W, \ldots, v_r + W\}$ *em* V/W *é linearmente independente. Então* $\{v_1, \ldots, v_r\}$ *em* V *é também linearmente independente.*

Prova. Com efeito, se $a_1v_1 + \cdots + a_rv_r = 0$ então $a_1(v_1 + W) + \cdots + a_r(v_r + W) = 0 + W = W$ e como o conjunto $\{v_1 + W, \ldots, v_r + W\}$ em V/W é linearmente independente segue que os $a_i's$ são todos nulos.

Proposição 8 *Suponha que* $V = U \oplus W$ *e que* $\{u_1, \ldots, u_r\}$ *é base de* U. *Então* $\{u_1 + W, \ldots, u_r + W\}$ *é base de* V/W.

Prova. Com efeito, suponhamos que $a_1(u_1 + W) + \cdots + a_r(u_r + W) = W$.
Então , $(a_1u_1 + \cdots + a_ru_r) + W = W$ e portanto $(a_1u_1 + \cdots + a_ru_r) = 0$ de U.
Como $\{u_1, \ldots, u_r\}$ é base de U segue que os $a_i's$ são todos nulos.

Exemplo 26 *Seja* $A \in L(V)$. *Defina* $T : V/Ker(A) \to Im(A)$ *por* $T(x + Ker(A)) = Ax$. *Então* T *é um isomorfismo.*

Verifiquemos primeiramente que T está bem definida.
Com efeito, se $x_1 + Ker(A) = x_2 + Ker(A)$ então $(x_1 - x_2) \in Ker(A)$ e portanto $A(x_1 - x_2) = 0$ o que implica $A(x_1) = A(x_2)$. Logo está bem definida.
Também, T é linear. De fato, temos
$T(a(x + Ker(A)) + b(y + Ker(A))) = T((ax + Ker(A)) + (by + Ker(A))) = T((ax + by) + Ker(A)) = A(ax + by) = aA(x) + bA(y) = aT(x + Ker(A)) + bT(y + Ker(A))$.
Ainda, T é sobre pois se $A(v) \in Im(A)$ tomo $v + Ker(A) \in V/Ker(A)$ e daí $T(v + Ker(A)) = A(v)$ e mais T é injetora, pois se $A(x) = 0$ então $x \in Ker(A)$ e portanto $Ker(T) = \{Ker(A)\}$ e portanto T é um isomorfismo.

Sugestão 8 *Suponha que* W *e* U *são subespaços de* V. *Então* $(W + U)/W$ *é isomorfo a* $U/(W \cap U)$.

Sugestão 9 *Sejam* U *e* W *subespaços de* V *tais que* $W \subset U \subset V$. *Mostre que*

i) U/W *é subespaço de* V/W.

ii) $(V/W)/(U/W)$ *é isomorfo a* V/U.

iii) $dim(V/W) = dim(V/U) + dim(U/W)$.