

Subespaços F -invariantes

Revisão: Teorema da existência, invariância e do complemento

1) Teorema da existência: Se V é um espaço vetorial finitamente gerado, então V admite base.

2) Teorema da invariância: A dimensão de um espaço vetorial independe da escolha da base. Equivalente mente qualquer base possui o mesmo número de elementos.

3) Teorema do complemento:

Dado um subespaço W de V , com $\dim W < \dim V$. Se β é uma base de W , com $\beta = \{w_1, \dots, w_k\}$ é sempre possível completar uma base β a uma Base de V . Ou seja, é sempre

possível obter $B_V = \{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_n\}$ de forma que B_V seja uma base de V .

Então: Todo espaço vetorial finitamente gerado admite base, e todas as bases têm o mesmo número de elementos e com isso se conclui que a dimensão é invariante. Finalmente é possível completar uma base p/ um espaço vetorial maior, pelo teorema do complemento.

Dimensões dos principais tipos de Espaço Vetorial:

Espaço	Dimensão	Ex. de base
\mathbb{R}^N	$\dim \mathbb{R}^N = N$	$B = \{e_1, \dots, e_{N-1}, e_N\}$
$M_N(\mathbb{R})$	$\dim M_N(\mathbb{R}) = N^2$	$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & 1 \end{pmatrix} \right\}$
$P_N(\mathbb{R})$	$\dim P_N(\mathbb{R}) = N+1$	$B = \{1, t, \dots, t^N\}$
\mathbb{R}	$\dim \mathbb{R} = 1$	$B = \{1\}$
\mathbb{C}	$\dim \mathbb{C} = 2$	$B = \{1, i\}$

Quando não estamos trabalhando com \mathbb{R} espaços vetoriais podemos indicar o corpo de escalares no cálculo da dimensão.

Ex: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, mas $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

$\hookrightarrow \text{Base} = \{1\}$

$\hookrightarrow \text{Base} = \{1, i\}$

$\dim_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{C}) = 2n^2$

$\hookrightarrow \text{Base} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \dots \right\}$

$\dots \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & i \end{pmatrix} \right\}$

$\dim_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) = n^2$

$\hookrightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Exemplo: Quais subconjuntos de \mathbb{R}^3 são L.D.?

a) $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (2,3,5)\}$ é L.D., isto porque qualquer subconjunto de \mathbb{R}^3 com mais de 3 vetores é L.D.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$, não há caso com 4 vetores.

$$b) \{(1,1,1), (1,0,1), (1,0,-2)\}$$

Alguns $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,0,-2) = 0$$

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 0 + 0, \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Qualquer conjunto com $(0,0,0)$ é L.D.

Tomamos que $\alpha_1 = 0$, então:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \quad (-)$$

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 0\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_2 + 0 = 0$$

$$\alpha_2 = 0$$

Portanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, somante a solução trivial. É L.D.

Sistema Homogêneo: nunca são impossíveis.

- Sistema possível e determinado: uma única solução. $\text{Det} \neq 0$
- Sistema possível indeterminado: infinita soluções $= \text{Det} = 0$
- Sistema indeterminado: sem solução $\text{Det} \neq 0$

Sistema Homogêneo: SPD - $\text{Det} \neq 0$ ^{Trivial}
SPI - $\text{Det} = 0$ ^{infinitas sol}

Sempre $(0,0,0)$ é a solução e para ser L.I deve existir somente a solução Trivial.

- SPD - $\text{Det} \neq 0$, solução Trivial
- SPI - $\text{Det} = 0$, infinita soluções

Ao formar uma matriz $M(K)$, se determinante for zero, vetores L.I, se determinante igual a zero e L.D.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}, \text{ Vetores em colunas}$$

$$\text{determinante: } \det = [(0 + 0 \cdot 1) - (-2 + 0 + 0)]$$

$$\det = 1 + 2 = 3 \neq 0$$

usando Laplace: 2ª linha.

$$\det = -1 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-2 - 1) = 3 \neq 0$$

temos vetores em L.T

ex: Mostrar os polinômios: $1, 1+t, 1-t^2$,
e $1-t-t^2-t^3$ formam uma base
para $P_3(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\alpha_4 \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(1+t) + \alpha_3(1-t^2) + \alpha_4(1-t-t^2-t^3) = 0$$

$$\underbrace{1(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4)}_0 + \underbrace{t(\alpha_2 - \alpha_4)}_0 + \underbrace{t^2(-\alpha_3 - \alpha_4)}_0 + \underbrace{t^3(-\alpha_4)}_0 = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0 & , \alpha_4 = 0 \\ \alpha_2 - \alpha_4 = 0 & \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_3 - \alpha_4 = 0 & \alpha_2 = 0 \\ -\alpha_4 = 0 & \alpha_1 = 0 \end{cases}$$

Os vetores são l.i.

Se $\beta = \{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}$, é l.i. Assim a $\dim[\beta] = 4 = \dim P_3(\mathbb{R})$, segue que $[\beta] = P_3(\mathbb{R})$, então β é gerador e como é gerador e l.i. temos que β é base.

• Determine a base e a dimensão do espaço de soluções do sistema homogêneo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ x + y = 0 \end{cases}$$

Temos que o espaço de soluções é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 , portanto é um espaço vetorial.

Precisamos descobrir um conjunto li gerador, ou seja a base e a dimensão.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \bullet L_2 = L_2 - L_1 \\ \bullet L_3 = L_3 - 2L_1 \end{array}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 0 - 3y + 2z = 0 \\ 0 - 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad L_3 = L_3 - L_2$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 0 - 3y + 2z = 0 \\ 0 + 0 + 0z = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \bullet z = z \\ y = \frac{2}{3}z \end{array}$$

$$x + \frac{4z}{3} - z = 0$$

$$x + \frac{z}{3} = 0$$

$$x = -\frac{z}{3}$$

$$\text{Soluções: } \left(-\frac{z}{3}, \frac{2}{3}z, z \right)$$

$$\text{Sol: } z \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right)$$

Como: $\Delta = \{(-\frac{z}{3}, \frac{2}{3}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

Um vetor v desse espaço vetorial é da forma:

$$v = (-\frac{z}{3}, \frac{2}{3}z, z) \text{ para algum } z \in \mathbb{R}$$

$$v = z(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$

$$v = \frac{z}{3}(-1, 2, 3) \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Veamos que um vetor qualquer é um múltiplo de $(-1, 2, 3)$, se V é o espaço de soluções então $V = \mathbb{R}(-1, 2, 3)$.

Logo $B = \{(-1, 2, 3)\}$ é gerador.

Obs: Se $\Delta = \{u\} \in V$ e $u \neq \vec{0}$ então Δ é li.

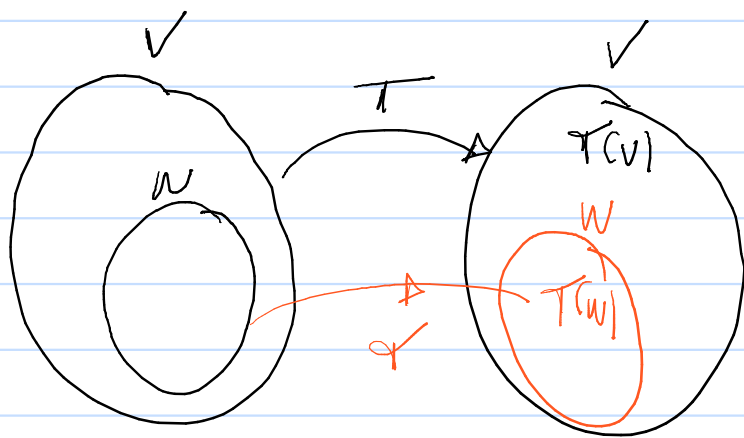
Demo: Considere $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u = \vec{0}$.

Como $u \neq \vec{0} \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \Delta$ é li.

Como B possui apenas um único vetor não nulo, B é li, logo B é Base.
 $\dim \mathbb{R}V = 1$

Voltando ao conteúdo do livro:

① Dado um operador linear $T: V \rightarrow V$, por vezes é conveniente considerarmos a sua restrição a algum subespaço dado W de V . No entanto, nem sempre a imagem desta restrição está contida no próprio subespaço.



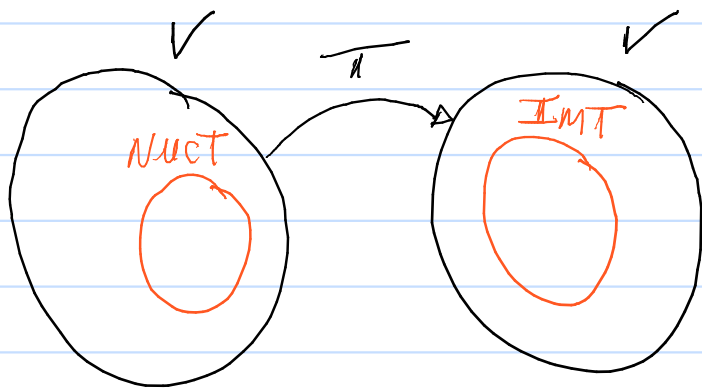
Definição: Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear onde V é um K -espaço vetorial e seja $W \subseteq V$ um subespaço de V . Dizemos que W é um subespaço T -invariante de V se $T(w) \in W$ para todo $w \in W$.

Observações:

Seja $T: V \rightarrow V$ um operador linear onde V é um K -espaço vetorial.

a) Os subespaços $\text{Nuc } T$ e $\text{Im } T$ são T -invariantes

b) Se λ for um autovalor de T , então $\text{Aut}_T(\lambda)$ é um subespaço T -invariante de V . De fato, se $v \in \text{Aut}_T(\lambda)$, então:
 $T(v) = \lambda v \in \text{Aut}_T(\lambda)$



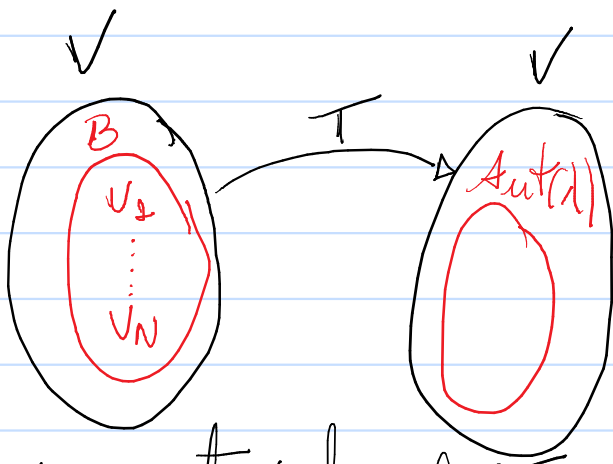
$$\text{Nuc } T \subseteq V$$

$$\text{Im } T \subseteq V$$

$$T(\text{Nuc } T) \subseteq \text{Im } T \subseteq V$$

$$\text{Nuc } T \subseteq V$$

Então são T -invariantes

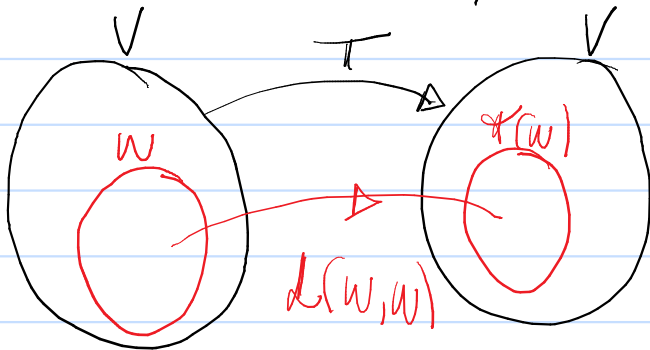


λ é um autovalor de T
 $\text{Aut}_T(A)$ é um subespaço T -invariante de V .

$$B \xrightarrow{T} T(v) = \lambda v$$

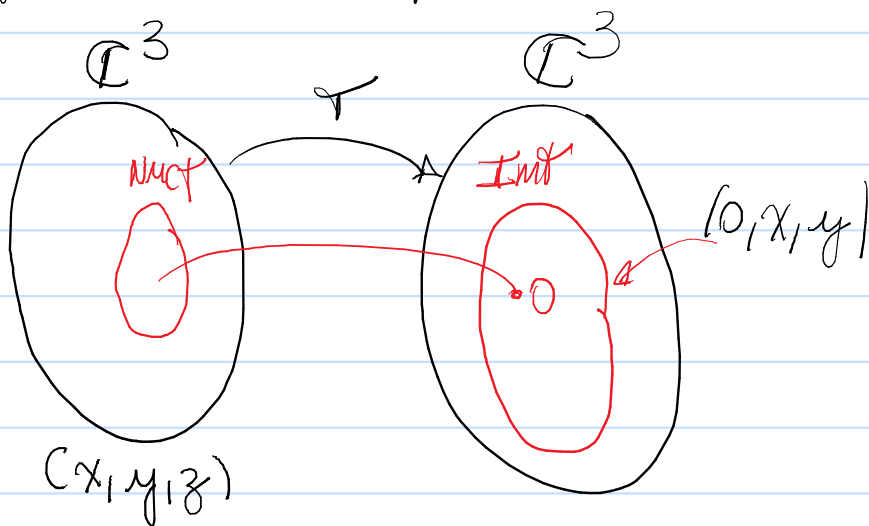
$B \subset V$ $T(v) \in V, \forall v \in \text{Aut}_T(A)$
 $\text{Aut}_T(A) \subset V$
 Vamos que $T(v) \subseteq V$.

c) Se W é um subespaço T -invariante então a restrição de T a W é um operador linear em $\mathcal{L}(W, W)$.



Exemplos:

a) Seja $\gamma: \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ definida por $\gamma(x, y, z) = (0, x, y)$



$$\text{Se } W = [e_1, e_2] \xrightarrow{\gamma} \gamma(W) = [e_2, e_3]$$

Assim W não é um subespaço γ -invariante de \mathbb{C}^3 .

$$e_1 = (1, 0, 0) \xrightarrow{\gamma} \gamma(e_1) = (0, 1, 0) = e_2$$

$$e_2 = (0, 1, 0) \xrightarrow{\gamma} \gamma(e_2) = (0, 0, 1) = e_3 \notin W$$

Isto porque $e_1 \neq e_2$, e $e_2 \neq e_3$

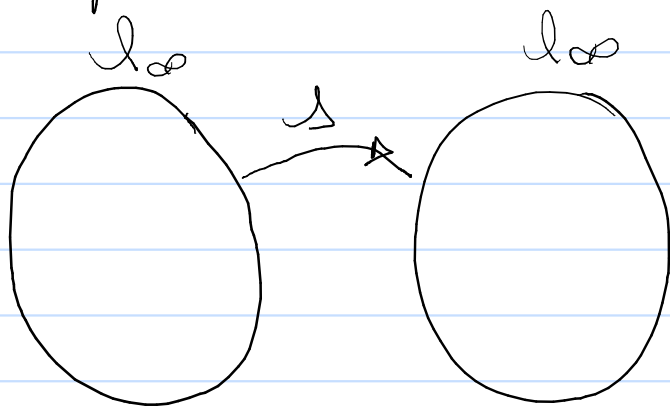
$$\text{Se } W' = [e_2, e_3] \xrightarrow{\gamma} \gamma(W') = \{0\} \subseteq W'$$

$$e_2 (0, 1, 0) \xrightarrow{\gamma} \gamma(e_2) = (0, 0, 1) = e_3$$

$$e_3 (0, 0, 1) \xrightarrow{\gamma} \gamma(e_3) = (0, 0, 0) = \text{nulo}$$

temos que $[e_2, e_3] \in W'$, $T(W') = [e_3] \in W'$. Então $[e_3] \subseteq W'$ e segue que W' é um subespaço T -invariante de V .

b) Seja $\Delta: l_\infty \rightarrow l_\infty$ operador linear dado por:



146

$$\Delta((x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)) = (0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots)$$

para todo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_\infty$.

2.3.4) d) Considere $X = \mathbb{N}$ e $K = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} .
 O subconjunto de $K^{\mathbb{N}}$:

$$l_\infty = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada}\}$$

É um espaço vetorial sobre \mathbb{K} com as operações definidas. Lembramos que uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada se existe $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para cada $N \geq 1$, considere $W_N = \text{span}\{e_1, \dots, e_N\}$. Lembramos que o elemento e_i é a sequência que tem 1 na posição i e 0 nas demais posições.

$$\begin{aligned} e_1 &= 10000 \dots \\ e_2 &= 01000 \dots \\ &\vdots \\ e_N &= 00000 \dots \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} e_1 &= 10000 \dots \\ e_2 &= 01000 \dots \\ &\vdots \\ e_N &= 00000 \dots \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} W_N \text{ é um subespaço, é uma base.} \\ \text{Mas não é } \Delta\text{-invariante de } V, \text{ uma} \end{array}$$

vez que $\Delta(W_N) = \{e_2, e_3, \dots, e_{N+1}\} \not\subset W_N$

temos que $e_{N+1} \notin W_N$.

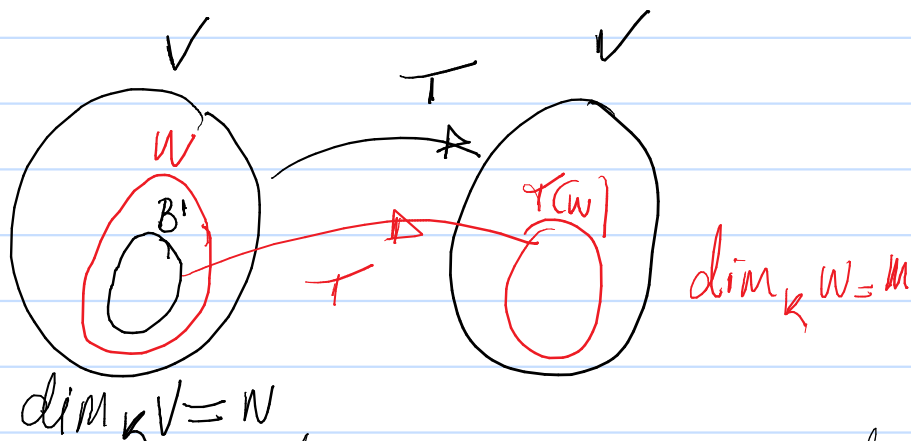
Considere agora o subespaço W de ℓ_∞ formado por todas as sequências

$\{x_i\}_{i \in \mathbb{N}} \in l_\infty$ tais que x_i é diferente de zero para no máximo um número finito de termos.

Como x_i é diferente de zero, temos que $\Delta(w)$ contém elementos diferentes de zero. Com isso W é um subespaço Δ -invariante de l_∞ .

$$W = [x_i] \xrightarrow{\Delta} \Delta(w) = [x_i] \subset W$$

Sejam $T: V \rightarrow V$ um operador linear onde V é um K -espaço vetorial de dimensão $N \geq 1$.



$W \subseteq V$ um subespaço T -invariante de dimensão m . Com $1 \leq m \leq N$

Considere B' uma base de W ; $B' \subset W$ e estenda-a a uma base B de V .

• $B' \subset W$ e $W \subset V \rightarrow B' \subset V$

• $B \subset V$ e B' é uma parte de B

Como observado anteriormente, a restrição de T a W , isto é, a função:

$$T': W \rightarrow W$$

Dada por $T'(w) = T(w)$, $\forall w \in W$ é um operador linear. Dai, a matriz

$$[T]_B \text{ é dada por: } [T]_B = \begin{bmatrix} [T']_{B'} & A \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

Onde O indica a matriz nula em:

$$M_{(n-m) \times m}(K), A \in M_{m \times (n-m)}(K) \text{ e } B \in$$

$$M_{(n-m) \times (n-m)}(K)$$

Pode-se descrever o espaço vetorial como a soma direta de dois (ou mais) subespaços T -invariantes e, como neste caso a restrição de T a cada um destes subespaços é um operador linear, pode-se descrever a matriz de T usando os blocos das matrizes destas restrições.

Espaço Vetorial $V =$ soma direta de dois ou mais subespaços T -invariantes

$$V = T^1(W) + T^2(W) + \dots + T^r(W)$$

Seja mais específico, seja $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ e suponha que cada subespaço W_i seja T -invariante.

Como a soma $W_1 + \dots + W_r$ é direta, segue-se que $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ é uma base de V .

$$B_1 \subset W_1, B_2 \subset W_2, \dots, B_r \subset W_r$$

Exercício 2.6.8(5)

Seja $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_t$ e sejam $B_i \subseteq W_i$, para cada $i = 1, \dots, t$. Considere $B = B_1 \cup \dots \cup B_t$.

$$B_1 \subseteq W_1, B_2 \subseteq W_2, \dots, B_t \subseteq W_t$$

a) Mostre que se B_i for l.i. para cada $i = 1, \dots, t$ então B é l.i.

Como $B_i \subseteq W_i$, para cada $i = 1, \dots, t$, temos

$B_1 \subseteq W_1$
 $B_2 \subseteq W_2$
 \vdots
 $B_t \subseteq W_t$ } Como B_1 é uma base de W_1 ,
 B_2 é uma base de W_2 e assim
até B_t sendo uma base de
 W_t .

Por definição uma base é formada por vetores l.i., e $B_1 \neq B_2 \neq \dots \neq B_t$. Logo são distintas e a união delas formam a base B de W . Consequentemente B é l.i., ou seja o conjunto gerador de W .

b) Mostre que se B_i for uma base de W_i para cada $i=1, \dots, t$, então B é uma base de V .

No item anterior provamos que $B_i = B$ sendo uma base para W_i , desta forma como $W_i \subset V$ temos que B_i é uma base para V .

$$B_i \subset W_i \text{ e } W_i \subset V \rightarrow B_i \subset V$$

$$\text{Temos que } B \subset W \text{ e } W \subset V \rightarrow B \subset V$$

Assim temos que B é uma base gerada para W e consequentemente para V .

Temos que W_1, \dots, W_t é uma soma direta, $W_1 + \dots + W_t$, temos que $B = B_1 \cup \dots \cup B_t$ é uma base de V .

Não é difícil ver que a matriz $[T]_B$ tem a seguinte forma:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ \dots & \dots & [T_r]_{B_r} \end{pmatrix}$$

Onde os T_i 's indicam as restrições de T aos subespaços W_i 's e os 0 's indicam as matrizes nulas correspondentes. Neste caso, a descrição de

$[T]_B$ será reduzida à descrição das matrizes $[T_1]_{B_1}, \dots, [T_r]_{B_r}$.

Com isso, também temos:

$T = T_1 \oplus \dots \oplus T_r$ e dizemos que o operador linear T é a soma direta dos operadores T_1, \dots, T_r .