O conjunto formado pelas funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, denotada por $F(\mathbb{R})$, e também o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais que denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$, ou simplesmente, por M_n.

i) soma de duas funções f e g de $F(\mathbb{R})$ é definida como sendo a função $f+g \in F(\mathbb{R})$ dada por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

ii) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ podemos multiplicar a função f pelo escalar λ, da seguinte forma:

$$(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$$

Resulta num elemento de $F(\mathbb{R})$

iii) Em relação a M_n podemos somar duas matrizes quadradas de ordem n, $A = (a_{ij})_{n \times n}$ e $B = (b_{ij})_{n \times n}$, colocando $A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times n}$, que é um elemento de M_n.

$$A + B = (a_{ij})_{n \times n} + (b_{ij})_{n \times n} = (a_{ij} + b_{ij})_{n \times n}$$

iv) Com relação a multiplicação de A por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, é natural definirmos:

$\lambda A = \lambda(a_{ij})_{n \times n} = (\lambda a_{ij})_{n \times n}$, o qual pertence a M_n.

Verifica-se facilmente a partir das propriedades dos números reais que, com relação a quaisquer funções f, g e h em $F(\mathbb{R})$ e para $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, são válidos os resultados:

1. $f + g = g + f$

2. $f+(g+h) = (f+g)+h$
3. Se ϕ representa uma função nula, isto é, $\phi(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então:

$$\phi + f = f$$

4. a função $-f$ definida por $(-f)(x) = -[f(x)]$, para todo $x \in \mathbb{R}$ é tal que $f+(-f) = \phi$.,
5. $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu) f$
6. $(\lambda+\mu) f = \lambda f + \mu f$
7. $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$
8. $1 . f = f$

Em relação a quaisquer matrizes A, B e C em M_n e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, também são válidos os seguintes resultados:

1. $A+B = B+A$
2. $A+(B+C) = (A+B)+C$
3. Se O representa a função nula, isto é, $O = (0)_{n\times n}$ então $O+A = A$
4. Se $A = (a_{ij})_{n\times n}$ então a matriz $-A$ definida por $-A = (-a_{ij})_{n\times n}$ é tal que $A+(-A) = O$
5. $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu) A$
6. $(\lambda+\mu) A = \lambda A + \mu A$
7. $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$
8. $1 . A = A$

Assim tanto o conjunto das funções definidas

Na reta com valores reais, como o das matrizes quadradas quando munidos de soma e multiplicação por escalares adequados apresentam propriedades álgebricas comuns. Na verdade muitos outros conjuntos munidos de operações apropriadas apresentam propriedades semelhantes às anteriores, assim tomamos um conjunto arbitrário e não vazio V, sobre o qual supomos estar definidas uma operação de adição, isto é, para cada $u, v \in V$ existe um único elemento de V associado, chamado a soma entre u e v e denotado por $u+v$, e uma multiplicação por escalar, isto é, para cada $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ existe um único elemento de V associado, chamado de o produto de u pelo escalar λ e denotado por λu.

Definição: Dizemos que um conjunto V como anterior munido de uma adição e de uma multiplicação por escalar é um espaço vetorial se para quaisquer u, v e w em V e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ são válidas as seguintes propriedades:

EV1. $u+v = v+u$, $\forall v, u \in V$
EV2. $u+(v+w) = (u+v)+w$, $\forall u, v, w \in V$
EV3. $\exists\, 0 \in V$ tal que $0+u = u$ $\forall u \in V$
EV4. Para cada $u \in V$, existe $v \in V$ tal que $u+v=0$.
EV5. $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ para quaisquer $u \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
EV6. $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u$ $\forall u \in V$
EV7. $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$, $\forall u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$
EV8. $1u = u$ para qualquer $u \in V$

Observação 1: O elemento 0 na propriedade EV3 é único, pois qualquer outro $0' \in V$ satisfazendo a mesma propriedade EV3, então pelas propriedades EV3 e EV1 teríamos $0' = 0 + 0' = 0' + 0 = 0$, isto é, $0 = 0'$.

Observação 2: Em um espaço vetorial, pela propriedade EV4, para cada $u \in V$ existe $v \in V$ tal que $u + v = 0$.

Na verdade, para cada $u \in V$ existe somente um elemento $v \in V$ com esta propriedade. De fato, dado $u \in V$ se v e v' em V são tais que $u + v = 0$ e $u + v' = 0$, então combinando estas equações com as propriedades EV1, EV2, e EV3, obtemos:

$$\left.\begin{array}{l} u + v = v + u \\ u + v' = v' + u \end{array}\right\} EV1$$

$$(u + v) + v' = u + (v + v') \text{ - EV2}$$

$$\left.\begin{array}{l} 0 + u = u \\ 0 + v = v \\ 0 + v' = v' \end{array}\right\} EV3$$

Temos: $v = v + 0 = v + (u + v') = (v + u) + v' = 0 + v' = v'$

Isto é, $v = v'$. Denotaremos v por $-u$ e $u - v$ por $u + (-v)$.

Observação 3: As quatro primeiras propriedades referem-se apenas à operação de adição e são conhecidas, respectivamente, por propriedade comutativa,

propriedade associativa, existência do elemento neutro e existência do elemento inverso.
A quinta e a oitava propriedades são exclusivas da multiplicação por escalar e também podem ser chamadas de associatividade e elemento neutro da multiplicação, respectivamente.
A sexta e a sétima propriedades relacionam as duas operações e são conhecidas por distributividade!

Talvez o exemplo mais simples de espaço vetorial seja o conjunto dos números reais com a adição e multiplicação usuais. Mais geralmente, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos transformar o conjunto das n-uplas ordenadas de números reais, $\mathbb{R}^n$, em um espaço vetorial definindo a adição de duas n-uplas ordenadas, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, adicionando-se coordenada a coordenada, isto é:

$x + y = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$, e o produto de uma n-upla: $x = (x_1, \ldots, x_n)$ por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por:

$$\lambda x = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

Exemplos de espaços vetoriais:
1) Sejam $n \in \mathbb{N}$ e $V = P_n(\mathbb{R})$ o conjunto formado pelo polinômio nulo e por todos os polinômios de grau menor ou igual a n com coeficientes reais. Definimos a adição e a multiplicação por escalar da seguinte maneira:

- Se $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ e $q(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ são elementos de $P_n(\mathbb{R})$ então:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n.$$

- Se $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ é um elemento de $P_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então:

$$\lambda p(x) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + \dots + (\lambda a_n)x^n$$

2) Sejam $A \subset \mathbb{R}$ e $F(A; \mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções $f: A \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f, g \in F(A; \mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ defina $f+g: A \rightarrow \mathbb{R}$ por $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$, $x \in A$. Então, $F(A; \mathbb{R})$ com esta adição e produto por escalar é um espaço vetorial.

3) O conjunto das funções contínuas definidas num intervalo $I \subset \mathbb{R}$ munidas das operações de adição e multiplicação usuais (como aquelas definidas em $F(I; \mathbb{R})$.

4) O conjunto das funções com derivadas contínuas até ordem $k \in \mathbb{N}$, (k é fixo) definidas num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ munido das operações de adição e multiplicação usuais (como aquelas definidas em $F(I, \mathbb{R})$).

5) O conjunto das matrizes m por n com coeficientes reais: $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ munido de operações análogas àquelas definidas em $M_n(\mathbb{R})$.

Propriedades: das 8 propriedades que definem um espaço vetorial podemos concluir várias outras. Listaremos algumas destas propriedades:

Proposição 1.5: Seja V um espaço vetorial, temos:

1. Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda 0 = 0$.
2. " " $u \in V$, $0 u = 0$.
3. Se $\lambda u = 0$ então $\lambda = 0$ ou $u = 0$.
4. Para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u \in V$, $(-\lambda)u = \lambda(-u) = -(\lambda u)$
5. " " $u \in V$, $-(-u) = u$.
6. Se $u + w = v + w$ então $u = v$.
7. Se $u, v \in V$ então existe um único $w \in V$ tal que $u + w = v$.