Teorema de Lagrange

Observações:

1) Se $q: K^n \to K$ uma forma quadrática associada a forma $\beta: K^n \times K^n \to K$ com:

$$\beta(u,v) = \langle u, T^* v \rangle$$

Vimos anteriormente que $x = (x_1, \dots, x_n)$,

$q(x) = \beta(x,x) = \langle x, T^* x \rangle$, numa base orto-normal: $q(x) = \sum_{n \geq i,j \geq 1} a_{ij}\, x_i \overline{x_j}$

Onde (a_{ij}) é a matriz de T^* nesta base ortonormal.

Se β é uma forma auto-adjunta, vale que:

$$a_{ij} = \beta(v_i, v_j) = \overline{\beta(v_j, v_i)} = \overline{a_{ij}}$$

Sendo β auto-adjunta reflete no fato da matriz (a_{ij}) ser hermitiana ou simétrica.

2) Uma mudança de coordenadas em K^n é uma transformação linear:

$L: K^n \to K^n$, é isomorfismo.

Exemplo: Se $q(x_1, \ldots, x_N) = a_{11}(x_1+x_2)^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots\ldots + a_{NN}x_N$

Fazendo $y_1 = x_1 + x_2$, $y_j = x_j$, para $j \geq 2$

Temos uma mudança de coordenadas em K^N e vale que:

$$q(L^{-1}y) = q(L^{-1}(y_1, \ldots, y_N)) = q(y_1 - y_2, y_2, \ldots, y_N) = a_{11}(\underbrace{y_1 - y_2 + y_2}_{y_1^2})^2 + a_{22}y_2^2 + \ldots + a_{NN}y_N^2$$

Teorema de Lagrange: Real

Seja $q: K^N \to K$ uma forma quadrática simétrica, ou seja, $q(x) = \sum c_{ij} x_i x_j$ com $a_{ij} = a_{ji}$. Vale que existe uma mudança de coordenadas tal que $q(L^{-1}y) = d_1 y_1^2 + d_2 y_2^2 + \ldots + d_N y_N^2$, q pode ser diagonalizável.

Prova: Se (a_{ij}) é a matriz nula, não temos nada para fazer.

Afirmação: podemos assumir que existe um elemento a_{ii} (na diagonal) não nulo.

De fato, assuma sem perda de generalidade, que $a_{12} \neq 0$ (a menos de uma reordenação da base).

Colete todos os termos de $q(x_1, \ldots, x_N)$ em que aparecem x_1 e x_2, a saber, são:

$$a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_1x_2 \underset{\text{Simetria}}{=} 2a_{12}x_1x_2$$

Basta fazer a mudança $x_1 = w_1 + w_2$ e $x_2 = w_1 - w_2$ e $x_j = w_j$ para $j \geq 3$.

$$2(a_{12})(w_1+w_2)(w_1-w_2) = 2a_{12}w_1^2 - 2a_{12}w_2^2$$

Na diagonal, com as novas coordenadas, aparecem elementos não nulos.

Término da afirmação

Passo final: Sem perda de generalidade, assuma $a_{11} \neq 0$. Os termos de $q(x_1, \ldots, x_N)$ que aparecem x_1 é:

$$a_{11}x_1^2 + a_{12}x_2x_1 + \ldots + a_{1N}x_1x_N + a_{21}x_1x_2 + \ldots + a_{N1}x_1x_N \underset{\text{simetria}}{=} a_{11}x_1^2 + \sum_{j=2}^{N} a_{ij}x_ix_j \underset{\text{completar quadrado}}{=}$$

$$= a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{N} \frac{1}{a_{11}} a_{ij}x_j\right)^2 - \left(\sum_{j=2}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{11}} x_j\right)^2$$

Note que $q(x_1, x_2, \ldots, x_N) = a_{11}\left(x_1 + \sum_{j=2}^{N} \frac{a_{ij}}{a_{11}} x_j\right)^2 - q_2(x_2, x_3, \ldots, x_N)$

é uma forma quadrática simétrica, ou lembre-se que $q(x) = \langle x, \underbrace{\frac{(A + A^*)}{2}}_{\text{Auto adjunto}} x \rangle$

Faça $y_1 = x_1 + \sum_{j=2}^{N} \frac{a_{ij} x_j}{a_{11}}$ (Induz uma mudança de coordenadas e vale $q(L^{-1} y) = a_{11} y_1^2 + q_2(x_2, \dots, x_N)$)

$y_j = x_j$, $j \geq 2$

$q_2 : \mathbb{R}^{N-1} \to \mathbb{R}$, logo repito o mesmo processo. $\blacksquare$

<u>Teorema de Lagrange Complexo</u>: Seja $q : \mathbb{C}^N \to \mathbb{C}$ uma forma quadrática hermitiana, isto é, $q(x_1, \dots, x_N) = \sum a_{ij} x_i \overline{x_j}$, com $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$.

Existe uma base de $\mathbb{C}^N$ tal que:

$$q(z_1, \dots, z_N) = d_1 z_1 \overline{z_1} + \dots + d_N z_N \overline{z_N}$$

<u>Prova</u>: Assuma $q \neq 0$ não nulo. Existe $v_1 \in \mathbb{C}^N$ tal que $q(v_1) \neq 0$, pois caso contrario:

$q(v) = \langle v, Av \rangle = 0 \quad \forall v \in \mathbb{C}^N$,

Implica que $A \equiv 0$, uma matriz nula, ou seja, $q \equiv 0$.

Vale que $Av_1 \neq 0$, tome o subespaço W_1. Dado por $W_1 = \{ v \in \mathbb{C}^N / \langle v, Av_1 \rangle = 0 \} = (Av_1)^{\perp}$, vale que a dimensão $W_1 = N-1$.

Se $q|_{W_1} \neq 0$, escolha v_2 tal que $q(v_2) \neq 0$ e tome $W_2 = (\text{span}(Av_1, Av_2))^\perp$

$\{v \in \mathbb{C}^N / \langle v, Av_1 \rangle = \langle v, Av_2 \rangle = 0\}$

E assim por diante, se pudermos encontrar $\{v_1, \ldots, v_N\}$ como acima, $\{v_1, \ldots, v_N\}$ é base de $\mathbb{C}^N$. Caso contrario existe um W_r tal que $q|_{W_r} = 0$.

$W_r = \{v \in \mathbb{C}^N / \langle v, Av_1 \rangle = \ldots = \langle v, Av_r \rangle = 0\}$

Tomo então uma base para W_r, $\{v_{r+1}, \ldots, v_N\}$ e junto com $\{v_1, \ldots, v_r\}$ conseguindo:

$\{v_1, \ldots, v_r, v_{r+1}, \ldots, v_N\}$ base para $\mathbb{C}^N$

<u>Por construção</u>: $\langle v_i, Av_j \rangle = 0 \quad \forall i > j$

Note que $0 \overline{\langle v_i, Av_j \rangle} = \langle Av_i, v_j \rangle \longrightarrow$

↳ hermitiana

$\langle Av_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i \neq j$

Tome $z = z_1 v_1 + \ldots + z_N v_N$ em $\mathbb{C}^N$, e faça:

$\langle z, Az \rangle = \langle z_1 v_1 + \ldots + z_N v_N, z_1 Av_1 + z_N Av_N \rangle$

$= \langle z_1 v_1, z_1 Av_1 \rangle + \ldots + \langle z_N v_N, z_N Av_N \rangle$

$= \langle v_1, Av_1 \rangle z_1 \overline{z_1} + \ldots + \langle v_N, Av_N \rangle z_N \overline{z_N}$

$= \quad d_1 + \ldots + d_N$