1) Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão finita e $T: V \to V$ um operador linear. Mostre que se para algum $l > 0$, temos que $\operatorname{Nuc} T^{l} = \operatorname{Nuc} T^{l+1}$, então $\operatorname{Nuc} T^{l} = \operatorname{Nuc} T^{l+1}$ para todo $i \geq 0$.

<u>Lema</u>: Seja V um espaço vetorial com dimensão n. Seja $T: V \to V$ um operador linear. Se $\operatorname{Nuc} T^{m} = \operatorname{Nuc} T^{m+1}$, para algum $m \in M$, então:

$$\{0\} = \operatorname{Nuc} T^{0} \subseteq \operatorname{Nuc} T^{1} \subseteq \operatorname{Nuc} T^{2} \subseteq \dots \subseteq \operatorname{Nuc} T^{m} = \operatorname{Nuc} T^{m+1} = \dots$$

Onde $T^{0} = I$ identidade sobre V e $\operatorname{Nuc} T = \{v \in V; T(v) = 0\}$ é o núcleo do operador T.

Dado o lema 1, tomamos como base para a prova do enunciado.
Portanto, primeiro vamos provar que:
$\operatorname{Nuc} T^{l} \subseteq \operatorname{Nuc} T^{l+1}, \forall l \in \mathbb{N}$

Seja $v \in Nuc\, T^l$, então $T^l(v) = 0$. Logo:

$$T^{l+1}(v) = T(T^l(v)) = T(0) = 0$$

Como T é linear, daí:

$$Nuc\, T^l \subseteq Nuc\, T^{l+1}, \forall l \in \mathbb{N}$$

Agora, vamos mostrar que $Nuc\, T^{l+k} \subseteq Nuc\, T^{l+k+1}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Já provamos que

$$Nuc\, T^{l+k} \subseteq Nuc\, T^{l+k+1}$$

Basta tomarmos $j = l+k$, então:

$$Nuc\, T^j \subseteq Nuc\, T^{j+1}$$

Analogamente, considere que $v \in Nuc\, T^{l+k+1}$.

Logo, $T^{l+k+1}(v) = 0$, portanto,

$$0 = T^{l+k+1}(v) = T^{l+1}(T^k(v))$$

Isto nos diz que $T^k(v) \in Nuc\, T^{l+1}$. Por hipótese, $Nuc\, T^{l+1} = Nuc\, T^l$. Assim, segue que:

$T^k(v) \in Nuc\, T^l$. Logo:

$$0 = T^l(T^k(v)) = T^{l+k}(v)$$

Por fim, $v \in Nuc\, T^{l+k}$. Com isso,

$Nuc\, T^{l+k+1} \subseteq Nuc\, T^{l+k}$, deste modo:

$Nuc\, T^{l+k+1} \subseteq Nuc\, T^{l+k}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

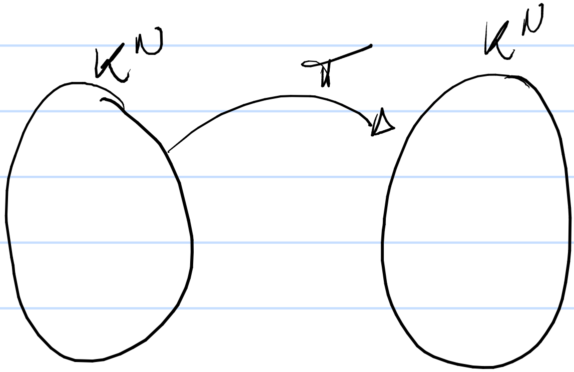
Portanto temos que $Nuc\, T^l = Nuc\, T^{l+i}$, $\forall i \geq 0$.

2) Seja $T: K^N \to K^N$ dada por $T((x_N)) = (0, x_1, \ldots, x_l, \ldots)$. Mostre que T não se escreve como soma direta de um operador nilpotente com um operador invertível.

$\dim K = N$, finita

De acordo com o Teorema:

Seja $T: V \to V$ um operador linear, onde V é um K-espaço vetorial de dimensão finita. Então T é a soma direta de um operador nilpotente e um operador inversível. Além disso, tal decomposição é essencialmente única.



$T((x_N)) = (0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_\ell, \ldots)$

$T_1((x_N)) = (0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_\ell, \ldots\ldots) \neq 0$

$T_1^2((x_N)) = T(T(x_N)) = T(0, x_1, x_2, \ldots, x_\ell, \ldots) =$
$(0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_\ell, \ldots\ldots) \neq 0$

$T^3((x_N)) = T(T^2(x_N)) = T(0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_\ell, \ldots\ldots) \neq 0$

Logo T_1 não é nilpotente

$T^N(T^{(N-1)}(x_N)) = T(0, x_1, x_2, \ldots\ldots, x_\ell, \ldots\ldots) \neq 0$

T_1 é T-invariante.

Temos que apesar de ser dimensão finita T_1 não nilpotente.

Temos que olhar se T é invertível, então tomamos T_2.

$$T_2((x_N)) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots)$$

Outra forma mais completa:

Dada uma Transformação; $T: K^N \to K^N$ é dada por: $T((x_N)) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_l, \ldots)$

Assim denotamos por T_1 o operador linear nilpotente, então:

$$\{0\} \subseteq Nuc T_1^0 \subseteq Nuc T_1^1 \subseteq \ldots \subseteq Nuc T_1^l \subseteq \ldots \subseteq Nuc T_1^{N-1} \subseteq Nuc T_1^N \subseteq K$$

E $T_1(x_j) \subseteq K_j$

E assim temos bases crescentes, dada por:

$$\{0\} = \emptyset \subseteq K_1 = \{x_1\} \subseteq K_2 = \{x_1, x_2\} \subseteq \ldots \subseteq K_l = \{x_1, \ldots, x_l\} \subseteq \ldots \subseteq K_N = \{x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_N\} = K^N$$

Temos que:

$$
\begin{aligned}
T_1:\ K_1 &\rightarrow 0\\
K_2 &\rightarrow (x_1)\\
K_3 &\rightarrow (x_1, x_2)\\
&\ \vdots\\
K_l &\rightarrow (x_1, \ldots, x_{l-1})\\
&\ \vdots\\
K_N &\rightarrow (x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l, \ldots, x_{N-1})
\end{aligned}
$$

Temos então uma matriz para T_1:

$$
\begin{array}{cccccccc}
K_1 & K_2 & K_3 & \cdots & K_l & \cdots & K_N \\
0 & x_1 & x_1 & & x_1 & & x_1 \\
\vdots & 0 & x_2 & & x_2 & & x_2 \\
\vdots & \vdots & 0 & & x_3 & & x_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & x_{l-1} & & x_{l-1} \\
\vdots & \vdots & \vdots & & 0 & & \vdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & x_{N-1} \\
0 & 0 & 0 & & 0 & & 0
\end{array}
$$

Diagonal principal

Assim:

$$T_1(x_N) = 0$$

$$T_1^2(x_N) = T_1(T_1(x_N)) = T(0) = 0$$

$\vdots$

$$T_1^{\ell}(x_N) = T_1^{\ell-1}(T_1(x_N)) = 0$$

$\vdots$

$$T_1^{N}(x_N) = T_1^{N-1}(T(x_N)) = T_1^{N-1}(0) = 0$$

Temos portanto que T_1 é um operador nilpotente. E também T_1 é T-invariante.

Se tomarmos T_2 como um operador invertível, então:

$$T_2(x_1) = 0$$

$$T_2(x_2) = (x_1)$$

$$T_2(x_3) = (x_1, x_2)$$

$\vdots$

$$T_2(x_\ell) = (x_1, x_2, \dots, x_{\ell-1})$$

Assim temos que a sequência é crescente, e as imagens são distintas

Revisão – Operador T-invertível

Seja $T: V \to V$ um operador linear:

- Se T é inversível e T^{-1} a sua inversa, então: $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = I$
- T é inversível, se e somente se, $Nuc(T) = \{0\}$.
- T é invertível, T transforma base em base, isto é, se B é uma base de V, $T(B)$ também é uma base de V.
- T é invertível se, e somente se, $\det T \neq 0$.

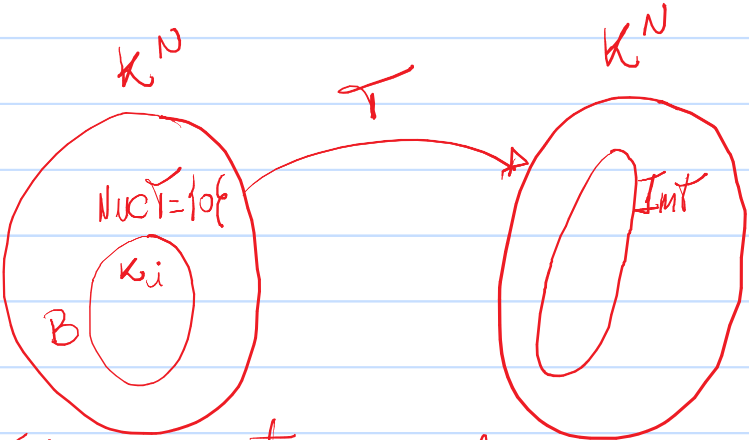
$$W_2 = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \xrightarrow{T} \left[\begin{pmatrix} d & c \\ 0 & a \end{pmatrix}\right]$$

$$W_2 \to T(W_2) = \left[\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right] \in B_{ImT}$$

$$T^{-1}(T(W_2)) = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right] \in B\ W_2$$

$Nuc T = \{0\}$.

$T(x_N) = (0, x_1, x_2, \dots, x_\ell, \dots)$



. T deve ser injetivo e sobrejetivo

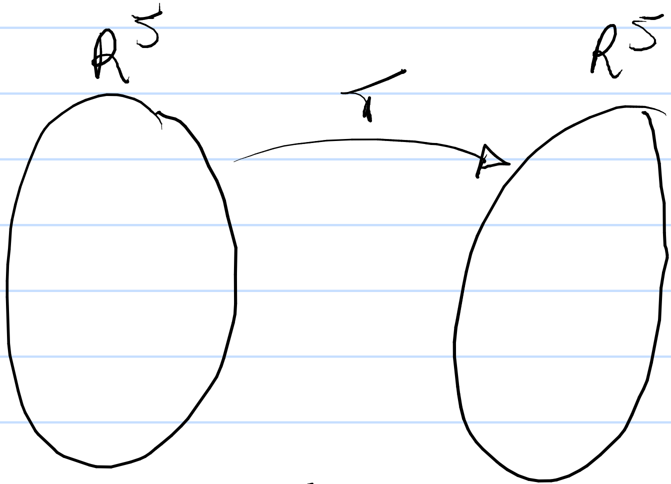
$K_i = x_i, \; i = 0, \dots, N$

$K_1 = 0 = 0$, temos $K_1 \notin T$, porque T_2 é injetiva e inversível.

$K_2 = 0, x_1 \neq 0$

$K_3 = 0, x_1, x_2 \neq 0$

3) Seja $T: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ o operador linear dado por:



$T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (3x_1 - 2x_5, 0, 2x_3 - x_4 + x_5, x_5 - x_1, 2x_1 - x_5)$

Determine a decomposição $T = T_1 \oplus T_2$, onde T_1 é nilpotente e T_2 é invertível.

1) Teste de nilpotência até o grau 5, se passar de 5 não é nilpotente.
2) O único autovalor de um operador nilpotente é 0.
$T^N(v) = 0 \to v \in \text{Nuc}\,T^N \therefore \text{Nuc}\,T^N \neq \emptyset$ e ñ injetivo.

Tomamos a base canônica em $\mathbb{R}^5$: $\{(1,0,0,0,0), (0,1,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$

$T(1,0,0,0,0) = (3-0,0,0,-1,2) = (3,0,0,-1,2) - T_2$

$T(0,1,0,0,0) = (0,0,0,0,0) - T_1$

$T(0,0,1,0,0) = (0,0,2,0,0) - T_2$

$T(0,0,0,1,0) = (0,0,-1,0,0) - T_2$

$T(0,0,0,0,1) = (-2,0,1,1,-1) - T_2$

Para T_1, temos $T(0,1,0,0,0) = (0,0,0,0,0)$

$T^2(0,0,0,0,1) = T(-2,0,1,1,-1) = (-4,0,2\cancel{-1}-1,-1+2,$
$-4+1) = (-4,0,0,+1,-3)$

$T^3(0,0,0,0,1) = T(-4,0,0,1,-3) = (-12+6,0,2\cdot0-1-3,$
$-3-4,-8+3) = (-6,0,-4,-7,-5)$

$T^4(0,0,0,1) = T(-6,0,-4,-7,-5) = (-18+10,0,-8$
$+7-5,-5+6,-12+5) = (-8,0,-6,1,-7)$

$T^5(0,0,0,0,1) = T(-8,0,-6,1,-7) = (-24+14,0,-12-1-$
$7,-7+8,-16+7) = (-14,0,-20,+1,-9) \neq 0.$

$T^2(1,0,0,0) = T(3,0,0,-1,2) = (9-4,0,0+1+2,$
$2-3,6-2) = (5,0,3,-1,4)$

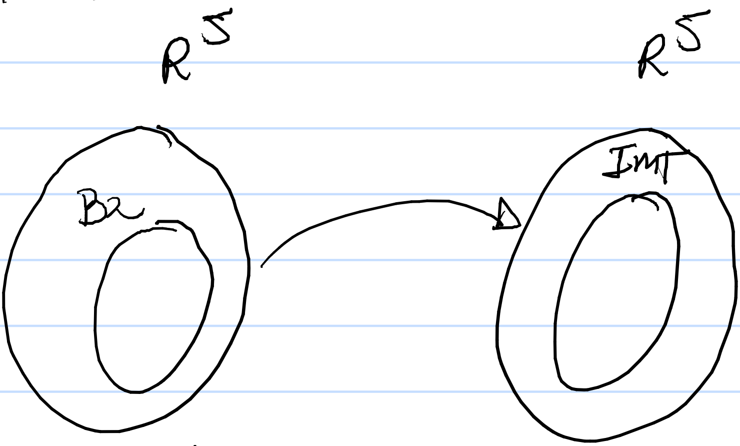
$T^3(1,0,0,0,0) = T(5,0,3,-1,4) = (15-8,0,6+1+4,$
$4-5,10-4) = (7,0,11,-1,6)$

$T^4(1,0,0,0,0) = T(7,0,11,-1,6) = (21-12,0,22+1+$
$6,6-7,14-6) = (9,0,29,-1,8)$

$T^5(1,0,0,0,0) = T(9,0,29,-1,8) =$
$(27-16, 0, 58+1+8, 8-9, 18-8) =$
$(11, 0, 67, -1, 10) \neq 0$

Temos que T_1 é nilpotente, com nilpotência em 1 para a base $B_1 = \{(0,1,0,0,0)$

Para testar T_2 como invertível, usaremos a $B_2 = \{(1,0,0,0,0), (0,0,1,0,0), (0,0,0,1,0), (0,0,0,0,1)\}$



1) Nuc $T = \emptyset$, temos que $T(B_2) \neq 0$.
2) Para cada $v \in B_2$ temos $T(v) \neq 0$ e v_1, v_2, v_3, v_4, sendo, $T(v_1) \neq T(v_2), T(v_3)$ e $T(v_4)$
Então T_2 é injetiva e sobrejetiva.
E B_2 é li e uma base em R^5.

Temos portanto que a dim $\mathbb{R}^5 = 5$.

Como a dim $\mathbb{R}^5$ p/ $T_1 = 1$ e dim $\mathbb{R}^5$ p/ $T^2 = 4$, então $T_1 \oplus T_2 = T$. Sendo a dimensão de $T = 5$.