5.1.14 (3) λ é autovalor se é

raiz $\det(\lambda I - T) = 0$.

Se $\det(T - \lambda I) = 0$, então

$(T - \lambda I)X = 0$ é

sistema homogêneo com sol $\bar{n}$ trivial

autovetores

(4) $\dim \operatorname{Im} T = m$ e

$\{v_1, \dots, v_m\}$ é base

o "máximo" que pode acontecer é que todos sejam autovetores, associados a m autovalores $(\neq 0)$, então, há no máximo $m+1$ autovalores, incluindo o zero.

(11) $Tv = \lambda_1 v$, $Sv = \lambda_2 v$,

(a) $\alpha S + \beta T$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$(\alpha S+\beta T)(v)=\alpha S v+\beta T v$$

$$=\alpha\lambda_2 v+\beta\lambda_1 v$$

$$=\underbrace{(\alpha\lambda_2+\beta\lambda_1)}_{\text{autovalor}}\, v$$

↳ autovetor

(b) $S\circ T(v)=$

$$=S(Tv)=S(\lambda_1 v)=\lambda_1 S v$$

$$=\underline{\lambda_1\lambda_2}\, v$$

---

(12) $B, M\in M_n(\mathbb{K})$, M invertível

$$(M^{-1}BM)^n=M^{-1}B^nM, \quad \forall n\in\mathbb{N}$$

induçã

$n=1$, ok

$n=2$ $\quad (M^{-1}BM)^2=(M^{-1}B\underbrace{M)(M^{-1}}_{I}BM)$

$$=M^{-1}B^2M$$

$\vdots$

n $\quad (M^{-1}B\underbrace{M)(M^{-1}}BM)\cdots(M^{-1}BM)$

$$=M^{-1}B^nM$$

(b)

$B = [T]$

$M =$ matriz cujas colunas são base de autov de B

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "B^n"] \arrow[d, shift right, "M"'] & V \arrow[d, "M"] \\ V \arrow[r] \arrow[u, shift right, "M^{-1}"'] & V \end{tikzcd}$$

$$\underbrace{M B^n M^{-1}}_{D^n}$$

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & \\ 0 & 0 & \ddots & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & & & & \lambda_m \end{pmatrix} \Rightarrow D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & & \\ & \lambda_2^n & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_m^n \end{pmatrix}$$

---n---

5.2 Subesp T-Inv

$T: V \to V$, $W \underset{se}{\subset} V$, T-inv

$\dim W < \dim V = n$

$\mathcal{B}_1 = \{w_1, w_2, \ldots, w_\ell\}$ base de W

complete-a a uma base

$\mathcal{B} = \{w_1, \dots, w_\ell, v_{\ell+1}, \dots, v_n\}$

$$Tw_1 = \sum_{i=1}^{\ell} \lambda_i w_i \Rightarrow [Tw_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} * \\ \hdashline 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \ell+1 \\ \ell+2 \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

$\vdots$

$$Tw_j = \sum_{i=1}^{\ell} \alpha_i w_i \Rightarrow [Tw_j] = \begin{pmatrix} * \\ \hline 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \ell \\ \ell+1 \\ \vdots \\ n \end{matrix}$$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c:c} [T|_W]_{\mathcal{B}_1} & A \\ \hline 0 & B \end{array}\right) \quad ; \quad [T|_W]_{\mathcal{B}_1} \text{ é } \ell \times \ell$$

$B \in M_{n-\ell}$

$A \in M_{\ell \times n-\ell}$

$0 \in M_{n-\ell \times \ell}$

Se existem W_1, W_2 subespaços T-inv tais que $V = W_1 \oplus W_2$, então , sendo

$\mathcal{B}_1$ base de W_1, $\mathcal{B}_2$ base de W_2

e $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$

$$[T]_{\mathcal{B}} = \left(\begin{array}{c|c} [T|_{W_1}]_{\mathcal{B}_1} & 0 \\ \hline 0 & [T|_{W_2}]_{\mathcal{B}_2} \end{array}\right)$$

Se $T_i := T|_{W_i}$, $T = T_1 \oplus W_2$ (notação)

<u>Obs</u> $\rightarrow$ $\det \left[\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & B \end{array}\right] = \det A \det B$

—— // ——

<u>5.3</u> Na demonstração do Teorema de Cayley-Hamiltón o Flávio e a Mary usam o conceito de matriz adjunta (1.4.10),

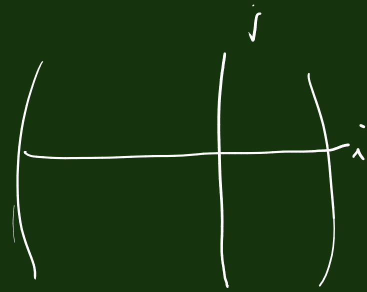
$\hookrightarrow$ mal escrito:

Tentativa de escrever bem.

$A \in M_n = (a_{ij})$

$$\underbrace{a_{ij}}_{\text{fator}} \longmapsto \underbrace{b_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}}_{\text{cofator}}$$

$$A_{ij} = \det\big(\underbrace{A - L_i - C_j}_{\in \mathbb{M}_{n-1}}\big)$$



Isto permite $\det A$ ser definido por recorrência:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})(b_{ij}) \quad , \quad \forall i ,$$

poderíamos fixar também j e variar i

$B = (b_{ij})$, considere AB^t

$$(AB^t)_{il} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{lj}$$

Se $l \neq i$, podemos escrever

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{lj} = \det \begin{array}{c} \begin{bmatrix} - L_1 - \\ \vdots \\ - L_i - \\ \vdots \\ - L_i - \\ \vdots \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \text{posição } i \\ \\ \text{posição } l \\ \\ \end{array}$$

desenvolvido pela linha ℓ

$$\Rightarrow \left[i \neq \ell \Rightarrow (AB^t)_{i\ell} = 0 \right]$$

$\Rightarrow AB^t$ é diagonal.

Agora, se $i = \ell$,

$$(AB^t)_{ii} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij} = \det A \quad (\text{pela } L_i)$$

$$\Rightarrow AB^t = (\det A) I \quad (= B^t A)$$

notação: $A' = B^t$

Teorema: $T : V \to V \Rightarrow p_T(T) = 0 \in L(V, V)$

$p_T(x)$, $m_T(x)$ $\to$ têm exatamente as mesmas raízes

$$m_T(x) \mid p_T(x) \quad (m_T(T) = 0)$$

//

Teor. $q(x) \in P_n(\mathbb{K})$ $\quad (T : V^n \to V^n)$

tq $q(T) = 0 \in L(V, V)$

então $m_T(x) \mid q(x)$