Notas de Aula Resumidas - Álgebra Linear Avançada II.

30 de outubro de 2019

Capítulo 1

Formas Bilineares

Introdução - Formas Multilineares

Sejam $V_1, V_2, \cdots, V_n$ espaços vetoriais sobre um determinado corpo $\mathbb{K}$.

Dizemos que a aplicação

$$f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \longrightarrow \mathbb{K}$$

é uma **Forma Multilinear** (no caso n-linear) se for linear em cada uma de suas componentes, isto é, dados $x, y \in V_p$ e $\alpha \in \mathbb{K}$então

$$f(\cdots, \alpha x + y, \cdots) = \alpha f(\cdots, x, \cdots) + f(\cdots, y, \cdots).$$

Exemplos:

1. A função
$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
com $f(x, y, z, w) = 2xyzw$ é uma forma quadrilinear (mostre).

2. O determinante de uma matriz 3×3 real é uma forma trilinear escrita como
$$g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
mostre identificando os elementos dos espaços vetoriais.

3. A função
$$h : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
definida como $h(x, y, z) = xy+z$ não é uma forma multilinear. Mostrar.

1.1 Formas Bilineares:

Uma aplicação $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma forma bilinear se

$$\langle \alpha x + y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle \,,$$

$$\langle z, \alpha x + y \rangle = \alpha \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle \,.$$

$x, y, z \in V$ e $\alpha \in \mathbb{K}$.

Podem ser:

1. Simétricas (Geometria Ortogonal):
$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$$
2. Antissimétricas :
$$\langle x, y \rangle = - \langle y, x \rangle$$
3. Alternadas (Geometria Simplética):
$$\langle x, x \rangle = 0$$

.

Exercício 1. Mostrar que Alternada$\Leftrightarrow$Antissimétrica se $\mathsf{ch}(\mathbb{K}) \neq 2$.

Quando, em $\mathsf{ch}(\mathbb{K}) = 2$, Alternada$\Rightarrow$Antissimétrica e Simétrica$\Longleftrightarrow$Antissimétrica.

Contraexemplo da volta (**Alternada$\not\Leftarrow$Antissimétrica**)

Seja $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{Z}_2$e $u = (x_1, \cdots, x_n)$, $v = (y_1, \cdots, y_n) \in V$ de modo que

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

se $e_1 = (1, 0, \cdots, 0)$, claramente, $\langle e_1, e_1 \rangle = 1$, portanto, temos um exemplo de uma forma bilinear antissimétrica mas não alternada.

Um espaço vetorial V com uma forma bilinear $\langle\ ,\ \rangle$ pode ser chamado de **Espaço Vetorial com Métrica**.

Se um corpo tem característica $\mathsf{ch}(\mathbb{K}) = p$ então $x + x + \cdots + x = 0$ (p vezes).

Exemplos

Espaço de Minkowski:

Espaço vetorial real quadridimensional dotado de forma bilinear simétrica. Se e_1, e_2, e_3, e_4 são os vetores que formam uma base canônica de $M4$, temos que

$$\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij},$$

$$\eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.1.1}$$

Matriz SimpléticaSeja $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$\langle u, v \rangle = u^T \Omega v,$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.1.2}$$

onde $\mathbb{I}$é a matriz identidade $n \times n$. Verifique que a forma bilinear acima é alternada.

Produto Interno:

Alguns autores como o Kostrikin não diferenciam o termo Produto Interno de Forma Bilinear, a maioria, como o Roman, o faz.

Definição 1. Produto Interno sobre os Reais:

Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Definimos um produto interno $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ como uma **forma bilinear**

1. (positiva definida) Para todo $v \in V$

$$\langle v, v \rangle \geqslant 0, \qquad \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

2. (simétrica) Para todos $u, v \in V$

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle.$$

Definição 2. Produto Interno sobre os Complexos:

Seja V espaço vetorial sobre $\mathbb{C}$. Definimos um produto interno $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ como uma função

1. (positiva definida) Para todo $v \in V$
$$\langle v, v\rangle \geqslant 0, \qquad \langle v, v\rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0.$$

2. (simétrica conjugada) Para todos $u, v \in V$
$$\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}.$$

3. (Linear à direita) Para todos $u, v, w \in V$ e $a \in \mathbb{C}$
$$\langle au + v, w\rangle = a\langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$$

2 e 3 $\Longrightarrow$ Simetria conjugada à esquerda (Mostrar)
$$\langle u, av + w\rangle = \langle u, w\rangle + \overline{a}\langle u, v\rangle$$

Esta última propriedade faz com que o Produto Interno usual sobre os Complexos não seja uma forma bilinear mas o exemplo de uma **Forma Sesquilinear.**

Forma Sesquilinear:

Uma aplicação $\langle\ ,\ \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma forma sesquilinear se
$$\langle \alpha x + y, z\rangle = \alpha\,\langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle\,,$$

$$\langle z, \alpha x + y\rangle = \overline{\alpha}\,\langle z, x\rangle + \langle z, y\rangle\,.$$
$x, y, z \in V$ e $\alpha \in \mathbb{C}$.
Podem ser:

1. Hermitiana :
$$\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$$

2. Anti-Hermitiana (equivalente a uma forma Hermitiana multiplicada por i) :
$$\langle x, y\rangle = -\overline{\langle y, x\rangle}$$

Representação Matricial

Seja $\{e_{1,} \cdots, e_n\}$ base de V. Os vetores, $u, v \in V$ podem, naturalmente, ser escritos como

$$u = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \quad v = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

A forma bilinear $\langle \;, \; \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ pode ser calculada, para u, v nesta base como:

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle,$$

Podemos definir a matriz G, matriz de Gram, cujos elementos se escrevem como $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle$. Nesta base, portanto, a forma bilinear acima se escreve como

$$\langle u, v \rangle = u^T G \, v$$

Nas formas bilineares as matrizes definidas em 1.1.1 e 1.1.2 são exemplos de matriz de Gram.

Exercício 2. Resolva os itens abaixo:

a) Escreva a matriz de Gram para: $\langle \;, \; \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

$$\langle u, v \rangle = 2x_1 y_2 + 3x_2 y_3 + x_3 y_3 + x_3 y_2$$

b) Seja $\langle \;, \; \rangle : \mathbb{Z}_2^2 \times \mathbb{Z}_2^2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2$uma forma bilinear alternada não nula. Escreva a matriz de Gram na base canônica.

c) Mostre que toda forma bilinear sobre um corpo $\mathbb{K}$ tal que $\mathsf{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ pode ser escrita como a soma de uma forma bilinear simétrica e uma forma bilinear antissimétrica.

Forma Degenerada

Definição 3. Núcleo

Seja a forma bilinear $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$

$$\ker(g) = \{v \in V / \langle u, v \rangle = 0, \forall u \in V\}$$

Exercício 3. Determine o núcleo da forma bilinear dada pelo Exercício 2a acima.

A partir da definição de núcleo, dizemos que:

1. Se $\ker(g) = 0$, g é uma forma não degenerada
2. Se $\ker(g) = W \subset V$ não nulo, g é uma forma degenerada.

Exercício 4. Mostre que se g é uma forma bilinear alternada e $\dim(V) = 2n + 1$ então g é degenerada.

Formas Quadráticas

Uma aplicação $Q : V \longrightarrow \mathbb{K}$ é uma forma quadrática se

- $Q(av) = a^2 Q(v)$
- $\langle u, v \rangle_Q = Q(u + v) - Q(u) - Q(v)$ é simétrica.

Exercício 5. Dada uma forma bilinear $\langle u, v \rangle$, verifique se $Q(v) = \langle v, v \rangle$é uma forma quadrática.

Estudos Recomendados:

- Mudanças de Base em Formas Bilineares - Matrizes Congruentes.
- Adequação dos Resultados às Formas Sesquilineares.

ORTOGONALIDADE:

Seja $(V, \langle\rangle)$ um Espaço Vetorial dotado de uma forma bilinear.

Dizemos que $u, v \in V$ são ortogonais se $\langle u, v \rangle = 0$. A ortogonalidade não é sempre simétrica, ou seja, se pode definir uma forma bilinear tal que $\langle u, v \rangle = 0$ mas $\langle v, u \rangle \neq 0$.

Exercício 6. Encontre um par de vetores $u, v \in \mathbb{R}^2$ tal que, para a forma bilinear

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por $f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_1 + x_1 y_2 - 2x_2 y_2$, $\langle u, v \rangle = 0$ mas $\langle v, u \rangle \neq 0$.

Dizemos que uma Forma Bilinear é Reflexiva se $\langle u, v\rangle = 0 \Rightarrow \langle v, u\rangle = 0$.

Teorema 1. *Uma forma Bilinear é Reflexiva se e somente se é Simétrica ou Alternada.*

Alernada ou Simétrica implica Reflexiva: $\langle u, v\rangle = 0 = \pm\langle v, u\rangle$.

Para a demonstração de que Reflexividade na forma implica Simétrica ou Alternada, precisaremos demonstrar um resultado anterior:

Lema 1. *Dada uma forma bilinear* $h : V \times V \to \mathbb{K}$ *e* $u, v, w \in V$*, se*

$$h(u, v)h(w, v) = h(v, u)h(v, w) \tag{1.1.3}$$

então h *é uma forma simétrica ou alternada.*

Demonstração. Se substituirmos v por u em (1.1.3) ficamos com

$$h(u, u) [h(w, u) - h(u, w)] = 0 \tag{1.1.4}$$

o que nos leva a duas únicas opções $h(u, u) = 0$ ou $h(w, u) = h(u, w)$, o que corresponde a uma forma alternada e simétrica respectivamente. O Lema não seria válido se houvesse ao menos três vetores $x, y, z \in V$ tais que

$$h(x, x) = h(z, z) = 0 \wedge h(x, z) \neq h(z, x),$$

$$h(y, y) \neq 0 \wedge h(x, y) = h(y, x) \wedge h(y, z) = h(z, y). \tag{1.1.5}$$

Pela condição do Lema temos que

$$h(x, z)h(y, x) = h(z, x)h(x, y)$$

1.1.5$\Rightarrow$

$$h(x, y) [h(z, x) - h(x, z)] = 0 \Rightarrow h(x, y) = 0. \tag{1.1.6}$$

Por simetria, trocando $x \leftrightarrow z$, teremos também $h(z, y) = 0$. O que nos leva a

$$h(x + y, z) = h(x, z) + h(y, z) = h(x, z)$$

Substituindo u por $x + y$ e w por z na Eq.1.1.4, e utilizando os resultados acima, ficamos com

$$h(x + y, x + y) [h(z, x) - h(x, z)],$$

como, por hipótese, a expressão entre colchetes não se anula, chega-se a

$$h(x+y, x+y) = 0.$$

O que nos leva a

$$h(x, x) + h(y, x) + h(x, y) + h(y, y) = 0$$

Usando as Eqs1.1.5 e 1.1.6 chegamos a

$$h(y, y) = 0$$

o que contradiz a hipótese inicial, invalidando-a e, consequentemente, provando o Lema. □

Voltemos, agora, à parte restante da demonstração do Teorema, qual seja, Forma Reflexiva implica Forma Simétrica ou Alternada.

Demonstração. Definamos, para tanto, o vetor

$$x = \langle u, v\rangle w - \langle u, w\rangle v$$

obviamente, $\langle u, x\rangle = 0$. Por hipótese, teremos também $\langle x, u\rangle = 0$, isto é,

$$\langle u, v\rangle\langle u, w\rangle - \langle u, w\rangle\langle v, u\rangle = 0$$

que, pelo Lema anterior, implica que a forma seja simétrica ou alternada como queríamos demonstrar. □

Definição 4. Chamaremos um Espaço Vetorial munido de uma Norma Bilinear Reflexiva de um Espaço Vetorial Métrico.

Seja (V, g) um espaço vetorial métrico de dimensão finita e $W \subset V$ subespaço vetorial.

Definição 5. Definimos o complementar ortogonal a W como:

$$W^{\perp} = \{v \in V \,|\, g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

Serão necessários alguns passos antes do resultado principal que pretendemos obter acerca da decomposição de um espaço vetorial métrico em complementos ortogonais.

Seja

$$f : V \times V \to \mathbb{K}$$

uma forma bilinear tal que, se $u, v \in V$, teremos a forma $f(u, v) \in \mathbb{K}$. Podemos definir a aplicação $f_u(v) = f(u, v)$ como

$$f_u : V \to \mathbb{K} \tag{1.1.7}$$

e, naturalmente, a aplicação $\tilde{f}(u)(v) = f_u(v)$

$$\tilde{f} : V \to V^* \tag{1.1.8}$$

que é uma aplicação linear que leva V no seu dual. Tal formulação nos permite utilizar alguns resultados de Transformações Lineares no contexto de Formas Bilineares.

Definamos, agora, a forma bilinear $h(w, v)$

$$h : W \times V \to \mathbb{K}$$

com $W \subset V$. Seguindo a mesma linha da sequência anterior, definimos a aplicação $\tilde{h}(w)$

$$\tilde{h} : W \to V^* \tag{1.1.9}$$

Em que $\tilde{h}$ é uma aplicação linear.

Lema 2. *Dado V espaço vetorial métrico e $W \subset V$ subespaço vetorial com métrica induzida, temos*

$$\dim(W) = \dim(W \cap V^{\perp}) + (\dim(V) - \dim(W^{\perp}).$$

Demonstração. A partir de 1.1.9, aplica-se o Teorema do Núcleo-Imagem e se obtém

$$\dim W = \dim \ker(\tilde{h}) + \dim \tilde{h}(W). \tag{1.1.10}$$

Pela definição original de $\tilde{h}(w)$, temos:

$$\ker(\tilde{h}) = \{w \in W \,|\, h(w, v) = 0, \forall v \in V\} = W \cap V^{\perp} \tag{1.1.11}$$

e, além disso, podemos definir um anulador[1]

$$\mathrm{Im}(\tilde{h})^0 = \left\{v \in V \,|\, \alpha(v) = 0, \forall \alpha \in \mathrm{Im}(\tilde{h})\right\}$$

$$= \{v \in V \,|\, h(w,v) = 0, \forall w \in W\} = W^{\perp}.$$

Se definirmos a aplicação

$$\mathrm{proj}_{\alpha} : V^* \to U^*$$

que leva a aplicação linear $\alpha(v) \to \alpha(u)$ para $v \in V$e $u \in U$ temos, como $U \subset V$, a imagem de $\mathrm{proj}_{\alpha}(V^*)$ será o próprio $U*$. Por serem espaços vetorias com dimensão finita, $\dim(V) = \dim(V^*)$ e, naturalmente, o núcleo dessa aplicação será exatamente U^0. Identificando U com $\mathrm{Im}(\tilde{h})$, podemos escrever

$$\dim V = \dim U + \dim U^0 \Rightarrow \dim V - \dim W^{\perp} = \dim \tilde{h}(W)$$

Usando o resultado acima e as Eqs. 1.1.10 e 1.1.11 chegamos

$$\dim(W) = \dim(W \cap V^{\perp}) + (\dim(V) - \dim(W^{\perp}).$$

Concluindo a demonstração do Lema. □

Teorema 2. *Se V é não degenerado então: W e $W^{\perp}$ não degenerados* $\Leftrightarrow V = W \oplus W^{\perp}$.

Demonstração. $\Rightarrow$

Se W e $W^{\perp}$são não degenerados, então $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ o que implica soma direta, ou seja, $W + W^{\perp} = W \oplus W^{\perp}$. Sabemos que W e $W^{\perp}$são subespaços vetoriais de V e, portanto,

$$\dim\,(W + W^{\perp}) \leqslant \dim V,$$

o que, por ser soma direta, nos leva a

$$\dim W + \dim W^{\perp} \leqslant \dim V,$$

pelo Lema anterior, entretanto, temos

$$\dim W + \dim W^{\perp} \geqslant \dim V$$

[1]Note que os elementos do anulador pertencem a V.

(já que $\mathrm{dim}(W \cap V^{\perp}) \geqslant 0$). Consequentemente, a única hipótese possível é $\mathrm{dim}\, W + \mathrm{dim}\, W^{\perp} = \mathrm{dim}\, V$ portanto $V = W \oplus W^{\perp}$.

$\Leftarrow$

A volta é óbvia porque, se $V = W \oplus W^{\perp}$ então $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ e como, por hipótese, V é não degenerado, W e $W^{\perp}$não são degenerados. □

Proposição 1. *Se V é degenerado e $W \subset V$ não é degenerado, então $V = W \oplus W^{\perp}$ e $W^{\perp}$ é degenerado.*

Demonstração. Se W é não degenerado, então $W \cap W^{\perp} = \{0\}$ e, seguindo a demonstração do Teorema anterior, temos claramente que $V = W \oplus W^{\perp}$. Note, entretanto, que V é degenerado, portanto $\exists v \in V \backslash \{0\} \,|\, \langle u, v \rangle = 0 \forall u \in V$. Obviamente, $v \in W^{\perp}$ por definição e é ortogonal a todos os elementos deste conjunto, o que torna $W^{\perp}$ degenerado. □

Geometria Ortogonal e Hermitiana:

Suponhamos (V, g) espaço vetorial com uma forma bilinear simétrica não degenerada definindo, portanto, uma geometria ortogonal.

Proposição 2. *$\exists W \subset V$ de dimensão 1 tal que g_w é não degenerada e g restrita a seu complemento ortogonal $W^{\perp}$também não será degenerada.*

Demonstração. Por hipótese, (V, g) não é degenerado e define uma geometria ortogonal, portanto $\exists w \in V \backslash 0$ tal que $g(w, w) \neq 0$. Basta, portanto, definir $W = [w]$ (espaço vetorial gerado por w). Desta forma, como W é unidimensional, todos seus vetores serão da forma $w_k = \lambda_k w$ e, portanto, $g(w_j, w_k) \neq 0$ para qualquer $w_l \in W \backslash \{0\}$.

Agora, precisamos mostrar que $W^{\perp}$é não degenerado. Suponhamos, por absurdo, que seja degenerado. Então $\exists z \in W^{\perp} \backslash \{0\} \,|\, g(z, w') = 0 \,\forall w' \in W^{\perp}$. Mas como $g(w, w') = 0$ para quaisquer $w \in W$ e $w' \in W^{\perp}$e $V = W + W^{\perp}$, teríamos que $g(z, v) = 0 \,\forall v \in V$, como $z \neq 0$, isso significaria que o núcleo da forma bilinear seria não trivial, ou seja, V seria degenerado, o que contradiz a hipótese original. □

Demonstrada a proposição, podemos utilizar o Teorema 2 e escrever

$$V = W_1 \oplus W_1^{\perp}$$

sendo $W_1 \subset V$ unidimensional. A proposição pode ser aplicada em $W_1^\perp$ de modo a escreve-lo como a soma direta

$$W_1^\perp = W_2 \oplus W_2^\perp$$

com $W_2 \subset W_1^\perp$ unidimensional. O processo pode ser feito de maneira sucessiva e não é difícil demonstrar por indução que

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n,$$

com todos os $W_k \subset V$ unidimensionais e n é a dimensão (finita) de V.

Obs: Se V for degenerado, o procedimento pode ser estendido levando-se em conta a Proposição 1

Espaço Ortogonal Unidimensional

Uma consequência do resultado acima é a possibilidade de encontrarmos sempre uma base ortogonal $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ e, portanto, a matriz de Gram associada à forma bilinear ortogonal será diagonal e, consequentemente, cada um dos números dessa diagonal (elemento do corpo $\mathbb{K}$) definirá sua característica. Sendo G_{ij} cada elemento da matriz de Gram, que é diagonal, os termos não nulos G_{ii} serao escritos sempre da forma

$$\lambda_i' = \langle w_i, w_i \rangle.$$

Sempre podemos reescrever o vetor $e_i = \alpha w_i$, com $\alpha \in \mathbb{K}$ redefinir a matriz de Gram a partir desta base, cujo i—ésimo elemento da diagonal seria:

$$\lambda_i = \langle e_i, e_i \rangle = \alpha^2 \lambda_i'$$

ou seja, sempre que existir $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\lambda = \alpha^2 \lambda'$, existe uma mudança de base que leva um no outro. Definimos, assim, uma coclasse $\mathbb{K}^*/(\mathbb{K}^*)^2$ tal que $x \sim y$ se $\exists \beta \in \mathbb{K}^*$ tal que $x = \beta^2 y$. Sendo x, y, β elementos não nulos do corpo $\mathbb{K}$.

Exemplos:

- Sobre os reais, $\mathbb{R}^*/(\mathbb{R}^*)^2 = \{-1, 1\}$ de modo que, em um espaço unidimensional ortogonal sobre os reais, podemos ter

$$\langle x, y \rangle = 0, -xy \vee xy$$

  (0 no caso degenerado).

- Sobre os complexos, verifique que $\mathbb{C}^*/(\mathbb{C}^*)^2 = 1$. O que significa que

$$\langle w, z \rangle = 0 \vee wz.$$

- Verifique que, sobre $\mathbb{Z}_5$ temos as possibilidades

$$\langle a, b \rangle = 0 \vee ab \vee 2ab.$$

Espaço Hermitiano Unidimensional:

Com procedimento semelhante, podemos demonstrar que um Espaço Vetorial com uma Forma Sesquilinear não degenerada pode ser decomposto na soma direta de subespaços vetoriais unidimensionais não degenerados. Seguindo o raciocínio do item anterior, supondo que, em uma base w_i, a forma sesquilinear é totalmente definida por

$$\gamma' = \langle w_i, w_i \rangle,$$

seguindo o raciocínio do item anterior, podemos escrever uma nova base como $f_i = zw_i$, $z \in \mathbb{C}$, na qual a forma sesquilinear será totalmente definida por

$$\gamma = |z|^2 \gamma',$$

ou seja, podemos definir uma relação de equivalência $\gamma \sim \gamma'$ se houver um número real positivo que os relacione segundo a equação acima. Levando-se em conta que se trata de um espaço hermitiano, temos a condição adicional $\langle e_i, e_i \rangle \in \mathbb{R}$. Desta forma, conclui-se que, a menos de escolha de bases, qualquer forma sesquilinear em um Espaço Hermitiano pode ser escrita como:

$$\langle w, z \rangle = 0, w\bar{z}, -w\bar{z}.$$

Geometria Simplética:

O resultado da seção anterior não se aplica a Espaços Simpléticos visto que qualquer subespaço unidimensional cuja forma bilinear seja a restrição de uma Forma Bilinear Alternada é trivialmente degenerado. A demonstração é óbvia já que, sendo $u \in U$ um elemento desse espaço, qualquer vetor lhe será proporcional. Portanto, sendo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, temos que, para qualquer $x, y \in U$

$$\langle x, y \rangle = \alpha\beta \langle u, u \rangle = 0$$

já que se trata de uma forma alternada.

Proposição 3. *Suponha, agora,* (V, h) *espaço vetorial de dimensão par munido de uma forma bilinear alternada não degenerada.* $\exists W \subset V$ *de dimensão 2 não degenerado e seu complemento ortogonal* $W^{\perp}$ *é também não degenerado.*

Demonstração. Suponha que não exista $w_1, w_2 \in V$ linearmente independentes tal que $\langle w_1, w_2 \rangle \neq 0$. Como a forma é alternada, isso implicaria uma forma totalmente degenerada, o que é contraditório com a hipótese, portanto, existe tal par. É simples verificar que $W = [w_1, w_2]$ não é degenerado, basta escrever $w = \alpha w_1 + \beta w_2$e calcular $\langle w, w_1 \rangle$ e $\langle w, w_2 \rangle$. Se $w \neq 0$ então um dos produtos sempre será não nulo. A demontração para $W^{\perp}$não degenerado segue exatamente o mesmo procedimento da Prop.1.1. □

Seguindo ideia análoga à apresentada no contexto de Geometria Ortogonal, podemos sempre escrever um Espaço Simplético V de dimensão $2n$ como a soma direta de n subespaços vetoriais bidimensionais e ortogonais entre si, ou seja,

$$V = W_1 \oplus W_2 \oplus \cdots \oplus W_n.$$

Espaço Simplético Bidimensional:

Dado o resultado anterior, é natural estudarmos todas as possibilidades de um Espaço Simplético (V, h) sobre um corpo $\mathbb{K}$. Suponha que e_ie f_j são uma base ordenada de V. Então, o elemento ij da Matriz de Gram associada a forma $h()$ será escrito, nessa base, como

$$h_{ij} = \langle e_i, f_j \rangle,$$

como $h_{ij} \in \mathbb{K}$, podemos sempre redefinir um elemento da base como $e_j = (h_{ij})^{-1}$. Desta forma, teremos

$$\langle e_i, e_j \rangle = 1.$$

Esse resultado nos mostra que sempre existirá uma base tal que a matriz de Gram associada à forma não degenerada h será escrita como

$$[h] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Note que esse resultado independe do corpo $\mathbb{K}$!

Com a sequência dos resultados previamente apresentados, podemos afirmar que, em qualquer Espaço Simplético não degenerado sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer, existe uma base $\{e_1, \cdots, e_n, e_{n+1}, \cdots, e_{2n}\}$ tal que os únicas coeficientes não nulos

$$\langle e_k, e_{k+n}\rangle = -\langle e_{k+n}, e_k\rangle = 1,$$

$1 \leqslant k \leqslant n$. Nesta representação, a matriz de Gram associada seria escrita como

$$[h] = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I}_n \\ \mathbb{I}_n & 0 \end{pmatrix},$$

com $\mathbb{I}_n$ e 0_n sendo a matriz identidade e nula $n \times n$ respectivamente.

Resumo de Classificações (em elaboração)

A partir dos resultados anteriores e a partir de escolhas de bases ortonormais, verifique as afirmações:

- Para Espaços Ortogonais sobre $\mathbb{C}$ e Simpléticos sobre um corpo $\mathbb{K}$ qualquer (de característica diferente de 2), as formas bilineares são totalmente definidas por n- dimensão do Espaço Vetorial e p- dimensão do núcleo da forma.

- Para Espaços Hermitianos ou Ortogonais sobre $\mathbb{R}$, as formas são totalmente definidas por n- dimensão do Espaço Vetorial e p- dimensão do núcleo da forma e s- assinatura, diferença do total de autovalores $+1$ e os autovalores -1. Em geral, isso vale para qualquer corpo $\mathbb{K}$ de característica diferente de 2 tal que $\sqrt{-1} \notin \mathbb{K}$. Caso contrário, a parte não degenerada é congruente à matriz identidade.

- Para Geometria Simplética sobre qualquer corpo de característica diferente de 2, a parte não degenerada pode ser representada por uma matriz com todos os elementos nulos exceto os da forma a_{ij} tais que $i + j = n + 1$, onde n é a dimensão do espaço vetorial (supondo não degenerado). Se $i > j$, $a_{ij} = 1 = -a_{ji}$.

Exemplos de Ortogonalização

- **Geometria Ortogonal** Seja (V, g) espaço vetorial não totalmente degenerado sobre os reais com $g(u, v)$ ortogonal. Pelo resultados apresentados em 1.1, existe $W \subset V$ não degenerado unidemensional. Suponhamos que

$$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

definam uma base ordenada de V.

Caso $g(e_1, e_1) \neq 0$, definimos $u_1 = e_1$. Caso contrário, dizemos que e_1 é um vetor isotrópico. Podemos fazer uma permutação na base para que o primeiro e_k não isotrópico (permutando $k \leftrightarrow 1$). No caso em que todo vetor seja isotrópico, pegamos o primeiro par e_j, e_k tal que $g(e_j, e_k) \neq 0$, permutamos e redefinimos $e_1 = e_j + e_k$. Isso sempre será possível visto que, por hipótese, (V, g) não é totalmente degenerado.

O passo anterior pode ser feito em todas as etapas do processo, portanto, vamos supor que todos os vetores a serem utilizados na definição da nova base não são isotrópicos ou foram redefinidos para que não sejam. No momento em que for impossível tal construção, teremos chegado ao núcleo de V e, portanto, finalizado o processo.

Passo 1: Suponhamos a base ordenada de V,

$$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

e e_1 não isotrópico. Nosso objetivo é chegar a uma base ordenada ortogonal

$$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$$

Definimos, pois,

$$u_1 = e_1$$

e

$$w_k = e_k - \frac{g(u_1, e_k)}{g(u_1, u_1)} u_1 \tag{1.1.12}$$

Desta feita, teremos definido $W_1 = [u_1]$ e seu complemento ortogonal $W_1^{\perp}$ gerado por $w_2, \cdots, w_n$. Verifique que $g(u_1, w_k) = 0$.

Passo 2: O passo anterior definiu uma base para $W_1^{\perp}$. A ideia é basicamente repetir o procedimento anterior. Suponhamos, portanto, w_2 não isotrópico, desta forma, teremos.

$$u_2 = w_2$$

e, repetindo o procedimento anterior, teríamos (para $3 \leqslant k \leqslant n$)

$$w'_k = w_k - \frac{g(u_2, w_k)}{g(u_2, u_2)} u_2 \tag{1.1.13}$$

É fácil verificar que $g(w'_k, u_2) = 0$ e, naturalmente, $g(w'_k, u_1) = 0$

Passo J. Repita o procedimento enquanto houver a possibilidade de se definir um vetor não isotrópico. Supondo que a base de $W_j^{\perp}$ seja $\{z_{j+1}, \cdots, z_n\}$ e que z_{j+1} não seja isotrópico, teremos:

$$u_{j+1} = z_{j+1}$$

e,

$$w_k = z_k - \frac{g(u_{j+1}, z_k)}{g(u_{j+1}, u_{j+1})} u_{j+1}. \tag{1.1.14}$$

No final do procedimento, teremos uma matriz diagonal congruente à matriz de Gram original (na base e_i) e o número de zeros nesta diagonal corresponde exatamente ao núcleo da forma bilinear associada.

exemplos:

- **Geometria Simplética**

  Seja (V, g) espaço vetorial não totalmente degenerado sobre os reais com $g(u, v)$ simplética. Pelos resultados apresentados em 3, existe $W \subset V$ não degenerado bidimensional. Suponhamos que

  $$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

  definam uma base ordenada de V de tal forma que $g(e_1, e_2) > 0$.

  Abaixo, será explicitado o passo inicial. Os posteriores seguem a mesma estrutura até que cheguemos em uma situação em que o espaço ortogonal é totalmente degenerado, neste caso, o processo é encerrado.

  Passo 1:

  $$u_1 = e_1; \quad u_2 = e_2$$

  $$w_k = e_k - \frac{g(u_1, e_k)}{g(u_1, u_2)} u_2 + \frac{g(u_2, e_k)}{g(u_1, u_2)} u_1, \quad (k > 2) \tag{1.1.15}$$

É fácil verificar que $g(u_1, w_k) = 0$ e $g(u_2, w_k) = 0$. Neste passo, obtem-se $V = W_1 \oplus W_1^{\perp}$ sendo que $\dim(W_1) = 2$. A continuação do processo é análoga.

Para que a matriz de Gram associada tenha apenas $-1, 1$ ou 0 na diagonal secundária e seja nula no resto, organize a base de cada W_k bidimensional nas posições extremas, por exemplo, em vez de ordenar $\{u_1, u_2\}$ a base de W_1, ordene de modo que seja $\{u_1, u_{2n}\}$. Em geral, a base de W_k (não degenerado) seria $\{u_k, u_{2n+1-k}\}$. Esse passo garante que somente a diagonal secundária será não nula. A fim de normalizá-la, basta redefinir, nos casos não nulos,:

$$u'_k = \frac{u_k}{\sqrt{g(u_k, u_{2n+1-k})}}$$

e

$$u'_{2n+1-k} = \frac{u_{2n+1-k}}{\sqrt{g(u_k, u_{2n+1-k})}}$$

Como exemplo, mude a base para reescrever a forma bilinear dada pela matriz abaixo

$$[g] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

em sua forma canônica.

- **Hermitiana** Exercício: Construa método análogo para ortogonalizar uma forma sesquilinear hermitiana.

Um pouco de Isometrias

Seja

$$\tau : V \to V,$$

transformação linear que leva $v \to \tau(v)$. Dizemos que τ é uma isometria se $\forall u, v \in V$

$$\langle u, v \rangle = \langle \tau(u), \tau(v) \rangle.$$

Proposição 4. *Se (V, g) é um Espaço Métrico não degenerado, o conjunto de todas suas isometrias define um grupo $(T, \circ)$ de transformações lineares cuja operação é dada pela composição de funções.*

Demonstração. A existência da **identidade** é óbvia já que $\mathrm{id}(v) = v$.

Operação de grupo: Se $\tau_1, \tau_2 \in T$ temos que verificar se $\tau_1 \circ \tau_2 \in T$. Como, por hipótese, τ_1, τ_2 são isometrias, teremos

$$\langle \tau_1 \circ \tau_2(u), \tau_1 \circ \tau_2(v) \rangle \overset{\tau_1 \text{isomet.}}{=} \langle \tau_2(u), \tau_2(v) \rangle \overset{\tau_2 \text{isomet.}}{=} \langle u, v \rangle,$$

logo a composição $\tau_1 \circ \tau_2$ também define uma isometria.

Inversa: A fim de definir a função inversa, precisamos verificar se toda isometria é uma bijeção. Estudemos, para tanto, o núcleo de uma isometria $\tau : V \to V$. Se $w \in \ker \tau$, ou seja, $\tau(w) = 0$, então $\forall v \in V$

$$\langle w, v \rangle = \langle 0, \tau(v) \rangle = 0,$$

como, por hipótese, o Espaço Vetorial Métrico em questão é não degenerado, $w = 0$, e, portanto, o Núcleo da transformação linear é trivial. Aplicando-se o Teorema do Núcleo e Imagem, concluímos que $\tau(v)$ é uma bijeção e, portanto, podemos definir uma inversa $\tau^{-1}(v)$. Pelo fato de a função ser bijetora, $(\forall u, v \in V, \exists y, z \in V \,|\, \tau(y) = u, \tau(z) = v)$, o que leva a

$$\langle y, z \rangle = \langle \tau(y), \tau(z) \rangle = \langle u, v \rangle.$$

Desta forma, temos $\tau^{-1}(u) = y$ e $\tau^{-1}(v) = z$ que, pelo resultado acima, define uma isometria $\tau^{-1} : V \to V$ já que $u, v \in V$ são arbitrários. O que conclui a demonstração. □

Exercício 7. Seja $g : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ produto interno usual euclideano:

a) Defina uma base $\beta_1 = \{e_1, e_2\}$ tal que $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ [2]. Seja, agora, $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_1 - e_2$ e $U_1 = Sp\{u_1\}, U_2 = Sp\{u_2\}$. É possível encontrar uma base $\beta_2 = \{f_1, f_2\}$ para $\mathbb{R}^2$ com $f_1 \in U_1$ e $f_2 \in U_2$ tal que $\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij}$? Em caso afirmativo, explicite-a em função de e_1 e e_2.

b) Escreva, em função de um único parâmetro θ a representação matricial das funções lineares que compõem o grupo de isometria associado a $g(u, v)$.

Exercício 8. Seja $h : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ forma bilinear ortogonal associada ao espaço de Minkowski bidimensional.

---

[2] $[\delta_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Defina uma base $\beta_1 = \{e_1, e_2\}$ tal que $\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij}$[3]. Seja, agora, $u_1 = e_1 + e_2$, $u_2 = e_1 - e_2$ e $U_1 = Sp\{u_1\}, U_2 = Sp\{u_2\}$. É possível encontrar uma base $\beta_2 = \{f_1, f_2\}$ para $\mathbb{R}^2$ com $f_1 \in U_1$ e $f_2 \in U_2$ tal que $\langle f_i, f_j \rangle = \eta_{ij}$? Por quê?

b) Escreva, em função de um único parâmetro λ a representação matricial das funções lineares que compõem o grupo de isometria associado a $h(u, v)$. Identifique $\lambda = v/c$ e compare com as transformações de Lorentz para um vetor $u = (x, ct)$ em Relatividade Especial.

Exercício 9. Seja $n : \mathbb{Z}_5^2 \times \mathbb{Z}_5^2 \to \mathbb{Z}_5$ forma simplética definida por $n(x, y) = 3x_1y_2 + 2x_2y_1$ em uma determinada base $\{e_1, e_2\}$. Obtenha uma nova base na qual a forma será escrita como $[n] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e encontre a representação matricial das isometrias associadas.

[3] $[\eta_{ij}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Capítulo 2

Tensores

Definamos uma aplicação multilinear como

Aplicações Multilineares

Sejam $V_1, V_2, \cdots, V_n$ e W espaços vetoriais sobre o corpo $\mathbb{K}$.

$$f : V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_n \to W$$

é uma aplicação multilinear (n- linear) se for linear em cada um de seus termos. Isto é, dados $u, v \in V_p$ $(1 \leqslant p \leqslant n)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, $f(\cdot, u + \alpha v) = f(\cdot, u) + \alpha f(\cdot, v)$.

Exercício 10. Verifique que os exemplos abaixo são aplicações p-lineares (e determine p).

1. $f : P_n \times \cdots \times P_n \to ?$

$$f(p_{1,\cdots,}p_q) = \int_0^x \prod_{j=1}^{q} p_j(x)\, dx,$$

determine, neste caso, o menor contradomínio da aplicação.

2. $F_{\mu\nu} : M_4 \times M_4 \to A_{4\times 4}$

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

$\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ e $x_0 = t$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$.

3. $\wedge : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n-1} \to \mathbb{R}^n$

$$u^1 \wedge \cdots \wedge u^{n-1} = \begin{vmatrix} e_1 & \cdots & e_n \\ u_1^1 & \cdots & u_n^1 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ u_1^{n-1} & \cdots & u_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Exercício 11. Mostre que o conjunto $\mathscr{L}(V_1, \cdots, V_p; \mathbb{K})$ de todas as aplicações p-lineares sobre $\mathbb{K}$ forma um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Produto Tensorial

Sejam τ_1 e τ_2 funções lineares que levam elementos dos espaços vetoriais de dimensão finita V_1 e V_2, respectivamente, em um elemento do corpo $\mathbb{K}$. Naturalmente, τ_1 e τ_2 pertencem a V_1^* e V_2^*.

A partir de τ_1e τ_2 podemos definir uma forma bilinear, $b \in \mathscr{L}(V_1, V_2; \mathbb{K})$

$$b : V_1 \times V_2 \to \mathbb{K}$$

que, para $v_1 \in V_1$ e $v_2 \in V_2$, temos $(v_1, v_2) \to (\tau_1 \cdot v_1)(\tau_2 \cdot v_2)$.

Podemos definir o produto tensorial $\otimes$

$$\otimes : V_1^* \times V_2^* \to \mathscr{L}(V_1, V_2; \mathbb{K})$$

que leva $(\tau_1, \tau_2) \to \tau_1 \otimes \tau_2$, uma aplicação bilinear. No caso acima, podemos identificar $\tau_1 \otimes \tau_2(v_{1,}v_2) = (\tau_1 \cdot v_1)(\tau_2 \cdot v_2)$.

Exemplo. $V = \mathbb{R}^2$ e $\sigma, \theta \in \mathscr{L}(V; \mathbb{R})$, aplicações lineares. Se $\sigma(v_1) = a_1 x_1 + b_1 y_1$ e $\theta(v_2) = a_2 x_2 + b_2 y_2$, podemos escrever a aplicação acima como$\sigma \otimes \theta$$\in \mathscr{L}(V, V; \mathbb{R})$ aplicações bilineares de modo que

$$\sigma \otimes \theta(v_{1,}v_2) = a_1 a_2 x_1 x_2 + a_1 b_2 x_1 y_2 + b_1 a_2 y_1 x_2 + b_1 b_2 y_1 y_2.$$

Proposição 5. *Sejam* $\theta \in V^*$*,* $\tau \in W^*$ *e* V*,* W *espaços vetoriais de dimensão finita* n *e* m *sobre* $\mathbb{K}$*.*

a) *O conjunto de todos os elementos de* $\mathscr{L}(V, W; \mathbb{K})$ *obtidos por meio de produto tensorial, ou seja, da forma* $\theta \otimes \tau$*, geram tal espaço vetorial.*

b) *Em geral, nem todos os elementos de* $\mathscr{L}(V, W; \mathbb{K})$ *podem ser escritos da forma* $\theta \otimes \tau$*.*

Demonstração. **a)** Supondo que os vetores $v \in V$ na base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ e $w \in W$ na base $\{f_1, \cdots, f_m\}$ tomem a forma $v = \sum_{j=1}^{n} x^j e_j$ e $w = \sum_{l=1}^{m} y^l f_l$. Definamos as funções

$$\delta^{ab} : V \times W \to \mathbb{K},$$

como $\delta^{ab}(v, w) = x^a y^b$. Conclui-se, facilmente, que o conjunto $\{\delta_{11}, \delta_{12}, \cdots, \delta_{nm}\}$ forma uma base de $\mathscr{L}(V, W; \mathbb{K})$. Constroi-se a base dual $\{e^1, \cdots, e^n\}$ de V^* e $\{f^1, \cdots, f^m\}$ de W^* de modo que $e^j \cdot e_i = \delta^j_i$ e $f^l \cdot f_k = \delta^l_k$. Usando a definição do produto tensorial, fica claro que podemos escrever $\delta^{ab} = e^a \otimes f^b$concluindo a demonstração do item. □

Exercício 12. Demonstre o item **b** da Proposição acima.

Definição. A extensão dos resultados acima para aplicações multilineares é direta. Consequentemente, faz sentido denominar **Tensores** os elementos de Aplicações Multilineares, ou seja, como elementos de espaços como$\mathscr{L}(V_1, \cdots, V_n; \mathbb{K})$.

Covariância e Contravariância.

Seja $\tau \in V^*$, $v \in V$. Por definição de espaço dual, temos que $\tau \cdot v \in \mathbb{K}$ ou, de maneira equivalente, τ é uma função de que leva um elemento de V no corpo $\mathbb{K}$.

Podemos, de maneira simétrica, sendo $\tau \in V^*$ um vetor, definir uma função

$$\bar{v} : V^* \to \mathbb{K}$$

de forma que $\bar{v} \cdot \tau = \tau \cdot v$. Formalmente, $\bar{v} \in V^{**}$. Em espaços de dimensão finita, pode-se fazer uma identificação natural de V e V^{**}.

Exercício 13. Suponha $\dim V < \infty$, Verifique que a aplicação $\phi : V \to V^{**}$ definida por $\phi(v) = \bar{v}$ de modo que, para qualquer $\tau \in V^*$, tem-se $\bar{v} \cdot \tau = \tau \cdot v$, é um isomorfismo. (A aplicação ϕ como definida é um isomorfismo canônico).

Exercício 14. Seja $V = \mathbb{R}^3$ e $v \in V$, cujas componentes em uma base dada são (a, b, c); e$\tau \in V^*$ cujas componentes na base dual são (α, β, γ). Represente, na forma matricial, $\tau \cdot v$ e defina $\bar{v}$ de modo que $\tau \cdot v = \bar{v} \cdot \tau$, $\forall \tau \in V^*$.

Tal identificação nos permite pensar que elementos como

$$\beta : V^* \times V^* \to \mathbb{K},$$

isto é, que pertencem ao espaço $\mathscr{L}(V^*, V^*; \mathbb{K})$, são tensores. É comum chamarmos tensores como β de tensores **covariantes** e de tensores **contravariantes** àqueles que pertencem a $\mathscr{L}(V, V; \mathbb{K})$.

Exercício 15. Verifique, a partir da definição do produto tensorial, que $\mathscr{L}(V^*, V^*; \mathbb{K})$ é gerado por $V \otimes V$ enquanto que $\mathscr{L}(V, V; \mathbb{K})$ é gerado por $V^* \otimes V^*$.

Em geral, definimos um tensor do tipo (a, b), sendo a componentes contravariantes e b covariantes e representamos esse espaço de tensores por $T^a_b(V)$, por exemplo

$$V \otimes V \otimes V \otimes V^* \otimes V^* = T^3_2(V).$$

E, pela identificação apresentada no exercício anterior, se $t \in T^3_2(V)$, então podemos definir uma aplicação do tipo

$$t : V^* \times V^* \times V^* \times V \times V \to \mathbb{K}.$$

Exercício 16. Álgebra de tensores. Sejam A, B, C tensores de tipos arbitrários tais que as operações abaixo sejam possíveis. Verifique:

$$\begin{aligned}
(A \otimes B) &= A \otimes (B \otimes C) \\
A \otimes (B + C) &= A \otimes B + A \otimes C \\
(A + B) \otimes C &= A \otimes B + B \otimes C \\
A \otimes B &\neq B \otimes A \ \text{(em geral)}.
\end{aligned}$$

Exercício 17. Seja $T^a_b(V)$ o conjunto de todos os tensores do tipo (a, b) a partir do espaço vetorial V sobre um corpo $\mathbb{K}$. Mostre que os elementos deste conjunto formam um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$.

Componentes de Tensores.

Seja uma forma bilinear simétrica não singular

$$g : V \times V \to \mathbb{K}, \tag{2.0.1}$$

Definamos, seguindo o que foi feito na Eq.1.1.8, a aplicação

$$\tilde{g} : V \to V^*.$$

Nesta geometria ortogonal dada por (V, g), definimos $\tau \in V^*$ a cópia dual de $v \in V$ se $\tilde{g}(v) = \tau$.

Exercício 18. Verifique que, se $\{e_1, \cdots, e_n\}$ formam uma base ortogonal unitária de (V, g), então $\tilde{g}(e_k) \cdot e_j = \delta_{kj}$.

Suponhamos uma base $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de V e uma base dual $\{\varepsilon^1, \cdots, \varepsilon^n\}$ de V^*. Um elemento $v \in V$ escrito como $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v^k e_k$, enquanto que $\tau \in V^*$será $\displaystyle\sum_{l=1}^{n} \tau_l \varepsilon^l$. Desta forma, quando quisermos representar os vetores por componentes genéricas, escreveremos v^k e τ_l respectivamente. Estendendo para as componentes de um tensor t do tipo (a, b) ou $t \in T^a_b(V)$, teremos $t^{i_1 \cdots i_a}_{j_1 \cdots j_b}$.

Nesta representação, podemos escrever, g dada por (2.0.1), um tensor do tipo $(0, 2)$, em componentes g_{ij}. Consequentemente, sendo u^i e v^j componentes dos vetores u, $v \in V$ teremos $g(u, v) = \displaystyle\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} u^i v^j$.

Notação de Einstein.

Vamos considerar, para efeitos de simplicidade, que índices repetidos (em geral um em cima e outro embaixo) se somam de 1 a n (dimensão do V). Desta feita, a expressão acima poderia simplesmente ser escrita como $g_{ij}u^i v^j$. Lembrando que os índices escritos acima correspondem a componentes contravariantes o os embaixo às covariantes.

Exercício 19. Seja $h : V \times V^* \to \mathbb{K}$, $v \in V$, $w \in V^*$. Escreva, utilizando componentes e notação de Einstein, a aplicação $h(v, w)$.

Consideramos, como exemplo, um tensor $F \in T^0_2(V)$. Definimos, a partir dele, as aplicações:

$$F : V \times V \to \mathbb{K},$$
$$F' : V \to V^*.$$

Sendo $v, u \in V$ podemos escrever as aplicações acima, utilizando a notação de Einstein em componentes, como:

$F(v, u) = F_{ij}v^i u^j$; e $F'(v)$ pode ser definida como $F_{ij}v^i$. Note que o resultado desta última aplicação é um vetor covariante cujas componentes podem ser escritas como w_j, ademais como não há informação a priori sobre a simetria de F, em geral, $F_{ij}v^i \neq F_{ji}v^i$.

Subindo e descendo índices. Dada uma geometria ortogonal, ou seja, um espaço vetorial V dotado de uma forma bilinear simétrica g, já mostramos como definir a cópia dual de um vetor $v \in V$. De maneira simples, e utilizando componentes, teríamos as componentes de v escritas como v^i enquanto as da cópia dual seriam escritas como v_j e a relação entre elas seria dada, utilizando notação de Einstein, como $v_j = g_{ij}v^i = g_{ji}v^i$. De maneira análoga, teríamos $v^j = g^{ij}v_i$.

Voltando à forma bilinear simétrica, temos

$$g : V \times V \to \mathbb{K},$$

e, da maneira que foi definida, $g(u, v) = g_{ij}u^i u^j$ (a forma covariante). De forma análoga, sempre podemos escrever

$$\tilde{g} : V^* \times V^* \to \mathbb{K},$$

que pode ser escrito, ainda na notação de Einstein, como $\tilde{g}(w, z) = g^{kl}w_k z_l$ (forma contravariante). É possível, ainda, utilizar

$$\bar{g} : V \times V^* \to \mathbb{K},$$

$\bar{g}(u, w) = g^m_n u^n w_m$.

Para definir as componentes g^i_j, façamos as contas:

$$g_{ij}v^i v^j = g^i_j v^j v_i = v^i v_i \Rightarrow g^i_j = \delta^i_j.$$

Exercício 20. Verifique que $g = \tilde{g}^{-1}$, utilizando as definições anteriores. (Em termos de componentes, esse resultado equivale a mostrar que $g_{ik}g^{jk} = \delta^j_i$).

A partir dessas definições, podemos, dado um tensor qualquer, escrever o que seria a generalização da sua cópia dual, ou seja, dado um tensor do tipo $T^a_b(V)$ como obter a cópia do tipo $T^{a-l}_{b+l}(V)$.

Exemplo. Alguns casos: $A^{ij}_{kl} = g^{im}A^{j}_{klm}$, $B_{\alpha\beta\gamma\delta} = g_{\alpha\lambda}g_{\beta\mu}g_{\gamma\nu}g_{\delta\rho}B^{\lambda\mu\nu\rho}$.

Exercício 21. Seja $F_{\mu\nu}$, tensor eletromagnético, representado pela matriz

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{E_x}{c} & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ -\frac{E_x}{c} & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & -Bx \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & B_x & 0 \end{bmatrix}.$$

Mostre que $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(B^2-(E/c)^2)$ dado que g_{ab} é representado pela matriz η_{ab}

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Bases e Mudança de Coordenadas

Sejam $\{\varepsilon^i\}$ e $\{e_k\}$ bases de V^* e V respectivamente. Peguemos, como exemplo, a forma trilinear

$$F : V^* \times V \times V \to \mathbb{K}.$$

Quando lhe associamos as componentes de um tensor estamos, nessa base particular, identificando $F^i_{jk} = F(\varepsilon^i, e_j, e_k)$. Suponhamos, agora, que tenhamos uma mudança de bases $\{\varepsilon; e\} \to \{\varphi; f\}$. Queremos saber, nesta nova base, como se escrevem as componentes $F'^{l}_{\ mn} = F(\varphi^l, f_m, f_n)$.

Suponha que $\varphi^l = a^l_i\varepsilon^i$ e $f_m = b^j_m e_j$, isto é, como os novos vetores se escrevem nas bases antigas. Lembremos que a notação de Einstein está sendo empregado, o que significa, nas expressões anteriores, soma nos índices i de 1 a n e nos índices j de 1 a n. Perceba, ainda, que a^l_i e b^j_m podem ser vistos como as componentes da matriz mudança de bases usual. Temos que

$$F'(\varphi^l, f_m, f_n) = F(a^l_i\varepsilon^i, b^j_m e_j, b^k_n e_k),$$

utilizando-se a multilinearidade de F chegamos a

$$\begin{aligned} F'(\varphi^l, f_m, f_n) &= a^l_i b^j_m b^k_n F(\varepsilon^i, e_j, e_k), \\ F'^{l}_{\ mn} &= a^l_i b^j_m b^k_n F^i_{jk}. \end{aligned}$$

Em alguns contextos, quando nos interessamos em mudanças de coordenadas (relevante por exemplo em geometria) temos:

$$a^i_j = \frac{\partial x^i}{\partial y^j}, \qquad b^k_m = \frac{\partial y^k}{\partial x^m},$$

sendo x as coordenadas originais e y as novas coordenadas.

Em alguns livros de física se diz que tensores são entidades cujas componentes se transformam como

$$A'^{i_1\cdots i_n}_{\ j_1\cdots j_m} = a^{i_1}_{k_1}\cdots a^{i_n}_{k_n} b^{l_1}_{j_1}\cdots b^{l_m}_{j_m} A^{k_1\cdots k_n}_{l_1\cdots l_m}.$$

Note que, se a base de V^* é a base dual canônica a base de V, temos que $e_i\varepsilon^j = \delta^j_i$ assim como, mantendo-se as letras para a nova base nos casos acima, teremos $f_k\varphi^m = \delta^m_k$. Temos, portanto,

$$f_k\varphi^m = a^i_k b^m_j e_i\varepsilon^j = a^i_k b^m_j \delta^j_i = a^i_k b^m_i = \delta^m_k,$$

ou seja, representando os coeficientes de mudança de bases como matrizes, temos $[a] = [b]^{-1}$.

Exercício 22. Sejam as componentes A^i_j de um tensor representadas pela matriz abaixo

$$[A^i_j] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

em uma base $\{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ e na base do dual $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$. Faça o que se pede:

a) Dados os vetores $v = v^i e_i$ de V e $\tau = \tau_j\varepsilon^j$ de V^*tais que $v = -e_1 + 2e_3$ e $\tau = 5\varepsilon^1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^3$. Calcule $A(\tau, v)$; $A_1(\tau)$ e $A_2(v)$ em que A, A_1 e A_2 são as aplicações

$$A : V^* \times V \to \mathbb{R},$$
$$A_1 : V^* \to V,$$
$$A_2 : V \to V^*.$$

Em componentes, o que se pede são os resultados de $A^i_j v^j \tau_i$; $A^i_j \tau_i$ e $A^i_j v^j$ respectivamente.

b) Considere uma nova base de $\mathbb{R}^3$ dada por $f_1 = e_1 + e_2$, $f_2 = 2e_2$ e $f_3 = -e_2 + e_3$. Calcule a nova base dual canônica $\{\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3\}$ em função de $\{\varepsilon^1, \varepsilon^2, \varepsilon^3\}$ e escreva, nessa nova base, $A'^l_{\ m}$. Verifique que $A^k_k = \mathrm{tr}(A)$ não muda quando se transforma a base. Mostre que esse resultado é geral.

Exercício 23. Mostre que, para quaisquer tensores A e B, a expressão $A^{jk}B_{jk}$ é invariante por mudança de bases.