Sejam V um espaço euclidiano e V^* seu dual. Para cada subespaço W de V, considere:

$$W^0 = \{ f \in V^* \mid f(w) = 0, \forall w \in W \}$$

Mostre que $W^0 = \phi(W^\perp)$

Em que, como no teorema de representação de Riesz:

$\phi: V \to V^*$ é dada por $\phi_v := \phi(v): V \to K$ com $\phi_v(u) = \langle u, v \rangle$, $\forall u \in V$.

Tomamos $W \subset V$, e pegamos $x \in \phi(W^\perp)$. Então existem escalares: $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ e vetores $w_1, \dots, w_n \in W$, sendo que:

$$x = \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

Então para qualquer $f \in W^0$, temos:

$f(x) = \alpha_1 f(w_1) + \dots + \alpha_n f(w_n) = \alpha_1 . 0 + \dots + \alpha_n . 0 = 0$

Como f foi arbitrário, $f(x) = 0$ para todo $f \in W^0$.

Assim pela definição $x \in W^0$, assim:

$\phi(W^\perp) \subset W^0$.

Agora tomamos $x \in W^0$, então para todo $f \in W^0$, temos que $f(x) = 0$. Então $x \in W^0$.

Contudo o $\phi(W^{+})$ é um espaço vetorial muito pequeno contendo W^{0}. Assim: $W^{0} \subset \phi(W^{+})$

Portanto $\phi(W^{+}) = W^{0}$ e finalmente

$$\phi(W^{+}) = W^{0}$$