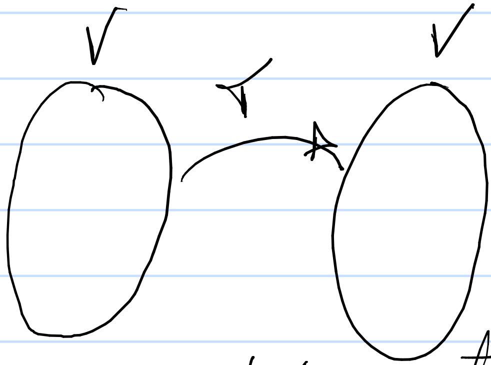
2) Seja $T: V \to V$ um operador linear. Mostre que se todo vetor de V for autovetor de T, então existe um $\lambda \in K$ tal que $T(v) = \lambda v$, $\forall v \in V$.



Temos que V é composto por vários vetores dado por:

$V = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$, os vetores de V são l.i, então V é uma base.
Então V é uma base para um subespaço, e a partir da base é possível gerar outros vetores.
Assim ao aplicar uma transformação T sobre os vetores da base V, geramos outro conjunto de vetores, também l.i sobre esta transformação.

Com isso é possível gerar diversos subespaço, onde cada subespaço é uma combinação entre v e $T(v)$, que os diferencia em modulo.

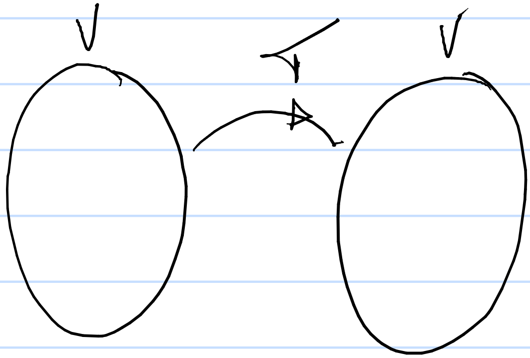
Ou seja: $T(v) = \lambda v$, para $v_i \in V$

onde $i = 1, \ldots, n$.

Assim cada $v \in V$, tem seu correspondente em $T(v) = \lambda v$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Assim a partir de uma base V, pode-se gerar diversas bases.

3) Seja $T: V \to V$ operador e V espaço sobre K. Mostre que se p_T tiver todas as suas raízes em K, e se elas forem simples, isto é, com multiplicidade algébrica 1, então T é diagonalizável.



. Espaço K

Temos por hipótese que p_T possui todas as suas raízes em K e com multiplicidade 1, ou seja elas não se repetem.

Desta forma temos que um dado polinômio $p_T(x) = x^N + x^{N-1} + \dots + x + 1$, então temos que as soluções para este polinômio (as raízes), que são seus autovalores são únicas e não nulas das por: $\lambda_T = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$.

Assim: $(x - \lambda_T) \cdot (x - \lambda_{T-1}) \dots (x - \lambda_1) =$
$p_T(x) = x^N + \dots + x + 1$.

Então temos que $M_a = M_g$, ou seja,

a multiplicidade algébrica é igual a multiplicidade geométrica, que satisfaz a primeira condição.

Temos também que a $\dim_K V$ é n, possui possui n vetores l.i. O auto espaço gerado $Aut(T)(\lambda_i)$ formado pelos autovetores com $i=1,\dots,n$, possui dimensão dada por:

$$\sum_{i=1}^{t} \dim_K Aut_T(\lambda_i) = n$$

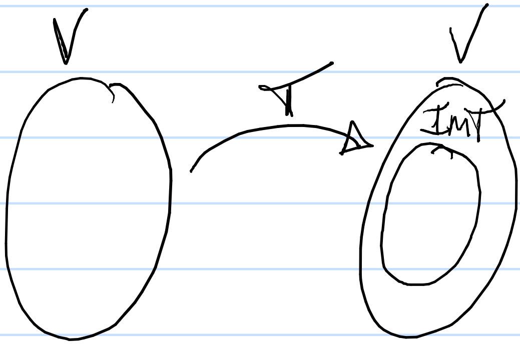
Então $$\dim_K V = \sum_{i=1}^{t} \dim_K Aut_T(\lambda_i)$$

Com isso, temos uma matriz diagonal D dados por seus autovalores na diagonal principal. Cuja a dimensão é n e formada por:

$$D = \text{diagonal}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

4) Seja $T: V \to V$ um operador linear. Mostre que se $\dim_K \operatorname{Im} T = m$, então T tem no máximo $m+1$ autovalores.



$\dim_K \operatorname{Im} T = m$

Assim como $T(v) = \lambda v$, e λv são os autovetores que compoem a $\operatorname{Im} T$. Com isso temos que a $\operatorname{Im} T$ é formada por autovetores l.i., assim eles são únicos:

$$\lambda_1 v_1 \neq \lambda_2 v_2 \neq \dots \neq \lambda_n v_n, \text{ e}$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

Assim como $T(v) = \lambda v$, temos que a $\dim_K \operatorname{Im} T = m$, ou seja m autovetores e consequentemente m autovalores.

Contudo a base do domínio será formada por $n+1$ vetores, isto porque temos uma injeção para a imagem e um vetor da $Im\,T$ poderá ser nulo.

Logo para uma $\dim_K Im\,T = n$, temos no máximo $(n+1)$ autovalores possíveis.

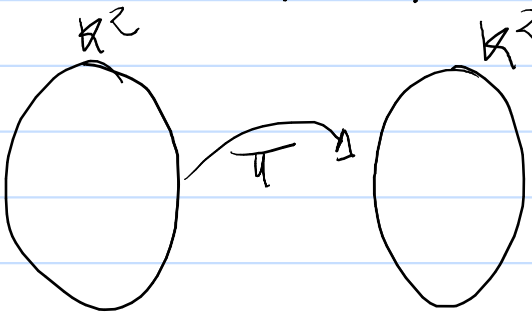
5) Seja $T: K^2 \to K^2$ tal que $T \circ T = 0$. Mostre que:

a) $Im\,T \subseteq Nuc\,T$

b) Se $T \neq 0$, então existe uma base B de K^2 tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$T \circ T = 0$



a) $ImT \subseteq NucT$

Temos que $T \circ T = 0$, ou seja:

$T(v) = \lambda v$ e $T(\lambda v) = v$

Então $T \circ T = 0 = Idv = 0$

Como a transformação T leva para a ImT e composta T leva para o domínio. Temos:

$T(T(v)) = T(\lambda v) = v = T \circ T$

Então $T(T(0)) = T(0) = 0$

Assim por definição o Nucleo de V, gera elementos Nulo na Imagem.
Logo como uma transformação de um elemento Nulo gera outro elemento Nulo. Então $ImT = NucT$ e este Nucleo possui somente o elemento Nulo como elemento.

b) Se $T \neq 0$, então existe uma base B de K^2 tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico é dado por:

$$pt(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-x & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(pr(x)) = 0$$

Com isso a matriz pode ter mais do que a solução nulo. Assim T é diferente de zero e pode gerar mais do que elemento nulo na Im T.

6) Mostre que se $A \in M_2(\mathbb{C})$, então A é semelhante sobre $\mathbb{C}$ a uma matriz de um dos seguintes tipos:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ com } a, b \in \mathbb{C} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ com } a \in \mathbb{C}$$

Corolário: Dado um operador linear $T: V \to V$ com matriz $[T]_{B_1}$ e $[T]_{B_2}$, ou seja no mesmo espaço vetorial, mas com bases diferentes as matrizes são semelhantes, não iguais.

Onde $\beta_1 \neq \beta_2$, bases distintas de V.

Assim existe M^{-1} tal que:

$$[T]_{\beta_1} = M^{-1} [T]_{\beta_2} M$$

Ou seja: $[T]_{B_1} \sim [T]_{\beta_2}$, semelhantes.

Proposição: Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.

Dada uma matriz $M_2(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad pT(i) = \begin{bmatrix} a-i & b \\ 0 & b-i \end{bmatrix}$$

$$\det = [(a-i)\cdot(b-i)] - 0 = ab - ai - bi + i^2$$

$$\det = ab - ai - bi - 1 = ab - i(a+b) - 1$$

$$p_t(i) = ab - 1 - i(a+b)$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad p_t(i) = \begin{bmatrix} a-i & 0 \\ 0 & b-i \end{bmatrix} = [(a-i)\cdot(b-i)]$$

$$\det = ab - ai - bi + i^2 = ab - 1 - i(a+b)$$

pela proposição $A \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad p(t)(i) = \begin{bmatrix} a-i & 0 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = [(a-i)\cdot(-i)] - 0$$

$$p_t(i) = -a + i^2 = -a - 1 \neq p_t(A)$$

$$A \nsim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

7) Seja A matriz 2×2 simétrica em $M_2(\mathbb{R})$ (isto é, tal que $A^t = A$). Mostre que A é diagonalizável.

Matriz simétrica é dada por $A^t = A$, e $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j$

Dada uma matriz qualquer A,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Para ser diagonalizável: $Ma = Mg$, $p_T(\lambda)$ deve possuir todas as raízes em K, e $\dim_K V = \sum_{i=1}^{t} \dim_K Aut_T(\lambda_i)$

Como determinante de A e A^t são iguais podemos dizer que os polinômios característicos são iguais, e com isso possuem as mesmas raízes, e os mesmos autovetores. Formando assim os mesmos autoespaços.

Isto porque entre A e A^T, temos que: $a_{ij} \neq a_{ji}$, mas os elementos da diagonal inversa são iguais logo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} a_{11} \neq a_{22} \\ a_{12} = a_{21} \end{matrix}$$

Então tanto p/ A como A^T, temos:

$$p(t)(\lambda) = [(a_{11}-\lambda).(a_{22}-\lambda)] - a_{12} \times a_{21}$$

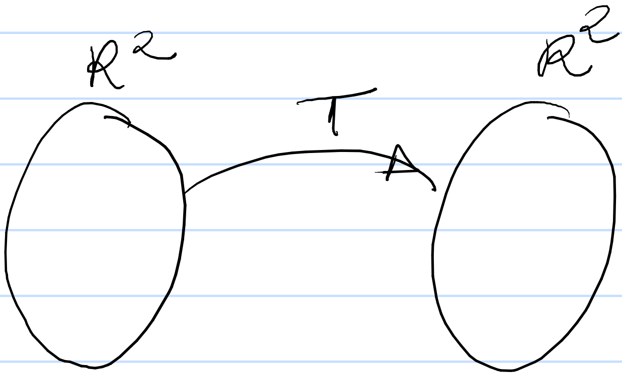
$$pt(\lambda) = [a_{11}.a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2] - a_{12}^2$$

$$pt(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + a_{11}.a_{22} - a_{12}^2$$

Temos um polinomio do 2º grau, com pelo menos 2 raizes, logo pelo menos dois autovetores, e $Ma = Mg = 2$

logo é diagonalizável.

9) Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear que tem como autovetores $(3,1)$ e $(-2,1)$ associados aos autovalores $-2, 3$, respectivamente. Calcule $T(x,y)$.



① Dada uma matriz: apartir de $[[T] - \lambda I] = A$

$A = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow$ p/ $\lambda = -2$, temos:

$$\begin{bmatrix} a+2 & b \\ c & d+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\begin{cases} x(a+2) + by = 0 \\ cx + (d+2)y = 0 \end{cases} \to$ autovetor $(3,1)$

$\begin{cases} 3(a+2) + b = 0 \\ 3c + (d+2) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3a + 6 + b = 0 \\ 3c + d + 2 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3a+6+b=0 \\ 3c+d+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a+b=-6 \\ 3c+d=-2 \end{cases}$$

O mesmo vale p/ $\lambda=3$, autovetor $=(-2,1)$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda=3 \rightarrow \begin{bmatrix} a-3 & b \\ c & d-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a-3 & b \\ c & d-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(a-3)+by=0 \\ cx+(d-3)y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax-3x+by=0 \\ cx+dy-3y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a+6+b=0 \\ -2c+d-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a+b=-6 \\ -2c+d=3 \end{cases}$$

Bom eu errei porque, dado um operador linear $T: V \rightarrow V$, possui o mesmo polinômio característico independente da escolha da base para V.
Então escolhe-se a mais fácil, a base canônica.

$B = \{ e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \} \in \mathbb{R}^2$

Temos que:

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & b-\lambda \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda = -2, \begin{bmatrix} a+2 & 0 \\ 0 & b+2 \end{bmatrix}$$

$$p_T(\lambda) = (a+2).(b+2) = ab + 2b + 2a + 4$$

Agora: $\begin{bmatrix} a+2 & 0 \\ 0 & b+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x(a+2) = 0 \\ y(b+2) = 0 \end{cases}, \text{ autovetor } (3,1)$$

$$\begin{cases} 3(a+2) = 0 \\ 1(b+2) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3a + 6 = 0 \\ b + 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3a = -6 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$3a = -6 \longrightarrow a = -2, \text{ autovetor: } (-2,1)$$

$$\begin{bmatrix} a-3 & 0 \\ 0 & b-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{cases} x(a-3) = 0 \\ y(b-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(a-3)=0 \\ y(b-3)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax-3x=0 \\ by-3y=0 \end{cases}, \quad (-2,1)$$

$$\begin{cases} -2a-3=0 \rightarrow -2a=3 \rightarrow a=-3/2 \\ b-3=0 \rightarrow b=3 \end{cases}$$

Temos que p/ $\lambda=-2$, os valores são $a=-2, b=-2$, e $\lambda=3$ os valores são $a=-3/2$, $b=3$.

$T(x,y)=(-2x,-2y)$, $T(x,y)=(-\frac{3}{2}x, 3y)$

10) Ache os autovalores de $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e de A^{-1}.

Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$pt(\lambda)=[-\lambda(1-\lambda)-2]=[-\lambda+\lambda^2-2]$

$p(t)(\lambda)=\lambda^2-\lambda-2=0$

$\Delta=1+8=9$

$\lambda=\frac{1\pm3}{2}$ → $\lambda'=2$, $\lambda''=-1$

A matriz D é formada pelos autovalores de A, logo:

$M^{-1}[A].M = D$ e M é a matriz formada pelos autovetores

Se A é invertível: $\det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, $\det(A) = -2$

$\det(A^{-1}) = -\dfrac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}-\lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & 0-\lambda \end{bmatrix}, \quad \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right) \cdot (-\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$pt(\lambda) = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)(-\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$pt(\lambda) = \frac{\lambda}{2} + \lambda^2 - \frac{1}{2} = \frac{\lambda + 2\lambda^2 - 1}{2}$$

$$\frac{2\lambda^2 + \lambda - 1}{2} = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 2 = 9, \quad \lambda = \frac{-1 \pm 3}{2} \begin{cases} \lambda' = -2 \\ \lambda'' = 1 \end{cases}$$

Autovalores p/ A: $\lambda = 2, -1$

Autovalores p/ A^{-1}: $\lambda = -2, 1$

$$\lambda(A) = -1(\lambda(A^{-1})) = (-1)(-2, 1) = (2, -1)$$

18) Determine ~~todo~~ os valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para os quais a matriz abaixo seja diagonalizável:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$ temos uma matriz triangular superior, logo o determinante é o produto da diagonal principal.

$\det: \underline{ac} \neq 0$

Temos que o det: $ac \neq 0$, p/ inversa

Para ser diagonalizável: $Ma = Mg$, $pt(\lambda)$

deve possuir todas as raízes,

Então: $\begin{bmatrix} a-\lambda & b & 1 \\ 0 & c-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$pt(\lambda) = (a-\lambda).(c-\lambda).(1-\lambda) = 0$,

já temos uma raiz, $\lambda = 1$.

Temos agora: $(a-\lambda).(c-\lambda) = 0$, $a, c \in \mathbb{C}$

as outras seriam: $\lambda = a$, e $\lambda = c$.

Tomando $\lambda = 1$, temos:

$$\begin{bmatrix} a-1 & b & 1 \\ 0 & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(a-1) + by + z = 0 \\ y(c-1) + 0z = 0 \\ 0z = 0 \rightarrow z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax - x + by + z = 0 \\ cy - c = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - x + by + z = 0 \\ cy - c = 0 \to cy = c \to y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$ax - x + by + z = 0 \to x = b + ax$$

$$ax - x + b + 0 = 0 \qquad x(a-1) = b$$

$$ax - x + b = 0 \qquad x = \frac{b}{(a-1)}$$

$$V_1 = (b + ax, 1, 0) = \left(\frac{b}{a-1}, 1, 0\right)$$

Para $\lambda = c$,

$$\begin{bmatrix} a-c & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(a-c) + by + z = 0 \\ (1-c)z = 0 \end{cases} \qquad z - cz = 0 \to z = cz$$

$$c = 1$$

$$ax - x + by + z = 0 \qquad V_3 = (x(a-1), 0, 1)$$

$$x = ax + by + z \quad \cdot y = 0$$

$$x = ax + z$$

$$z = ax - x$$

$$z = x(a-1)$$

Para $\lambda = a$:

$$\begin{bmatrix} 0 & b & 1 \\ 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} by + z = 0 \\ y(c-a) = 0 \\ z(1-a) = 0 \end{cases} \rightarrow z = za \quad a = 1$$

$y(c-a) = 0 \rightarrow cy - ay = 0 \rightarrow cy = ay$

$c = a$

$c = 1$

$by + z = 0$

$by = -z \rightarrow y = -z/b$

$by = za$

$V_3 = (0, -z/b, z) = z(0, -1/b, 1)$

$V_1 \neq V_2 \neq V_3$, (V_1, V_2, V_3) deve ser l.i.

$b + ax \neq ax + by + z \neq 0$

$1 \neq 0 \neq -z/b$

$0 \neq cz \neq z$

Dado uma matriz M formada pelos autovetores, que possui determinante diferente de zero. Assim M possui uma inversa M^{-1}.

$$M = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(a-1) & \frac{b}{a-1} & 0 \\ 0 & 1 & -1/b \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando Laplace:

$$x(a-1) \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1/b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \cancel{0 \begin{bmatrix} \frac{b}{a-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \to 0 \; +$$

$$1 \begin{bmatrix} \frac{b}{a-1} & 0 \\ 1 & -1/b \end{bmatrix}$$

$$x(a-1) \cdot 1 + \frac{\cancel{b}}{a-1} \cdot \left(\frac{-1}{\cancel{b}}\right) - 0 \neq 0$$

$$x(a-1) - \frac{1}{a-1} \neq 0$$

$$x(a-1) = \frac{1}{a-1}$$

$$x = \frac{1}{(a-1)^2}$$

13) Determine todos os valores $a, b, c \in \mathbb{C}$ para os quais a matriz abaixo seja diagonalizável.

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seja A matriz dada, tal matriz será diagonalizável caso exista uma base na qual a matriz associada à esse operador seja diagonalizável, portanto é lógico buscarmos a existência de tal base. Assim para a matriz A determinamos o polinômio característico associado à matriz A.

$$\det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} a-\lambda & b & 1 \\ 0 & c-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Então: $p(\lambda) = (a-\lambda).(c-\lambda)(1-\lambda) =$

$p(\lambda) = (ac - a\lambda - c\lambda + \lambda^2)(1-\lambda) =$

$p(\lambda) = ac - \cancel{ac\lambda} - \cancel{a\lambda} + \cancel{a\lambda^2} - \cancel{c\lambda} + \cancel{c\lambda^2} + \cancel{\lambda^2} - \cancel{\lambda^3}$

$p(\lambda) = -\lambda^3 + \lambda^2(1 + a + c) - \lambda(-c - a - ac)$
$+ ac$

Os autovalores são $\lambda = 1, a, c$.

Para $\lambda = 1$, temos:

$pA(1) = -1 + 1(+a+c+1) - 1(a-ac-c) + ac$

Então $p(A)(1) = -1 + (a+c+1) - (a-ac-a) + ac = 0$, portanto 1 é autovalor e $(\lambda-1)$ divide $pA(\lambda)$. Então:

$p(A)(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-c)(\lambda-a)$

$pA(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda^2 - a\lambda - c\lambda + ac)$

$pA(\lambda) = (\lambda-1).(\lambda^2 - \lambda(a+c) + ac)$

Assim: $pA(\lambda) = (\lambda-1).\, q(\lambda) = (\lambda^2 - \lambda(a+c) + ac)$

Temos que a e c são raízes de $q(\lambda)$, pois:

$q(a) = a^2 - a(a+c) + ac = \cancel{a^2} - \cancel{a^2} - \cancel{ac} + \cancel{ac} = 0$

$q(c) = c^2 - ca - c^2 + ac = 0$

Então: $p(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-a)(\lambda-c)$

Se tivermos $a \neq c \neq 1$ teremos que:

Um sistema homogêneo somente tem solução nula quando o determinante é diferente de zero. Então $\det = 0$ tem mais do que a solução nula.

Temos que $1 = Ma(1) = Ma(a) = Ma(c)$.
e $1 \leq Mg(\lambda) \leq Ma(\lambda)$, e teremos que sob essas condições a matriz é diagonalizável.

Agora resta testar as condições:

1) $1 = a = c$
2) $1 = a$, mas $a \neq c$
3) $1 = c$, mas $a \neq c$
4) $c = a$, mas $c, a \neq 1$

<u>Caso 1</u>: $pA(\lambda) = (\lambda - 1).(\lambda - a)(\lambda - c) = (\lambda - 1)^3$
e então $\lambda = 1$, 3 raízes iguais.

$$\begin{pmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det(\lambda I - A) = \begin{pmatrix} 1-\lambda & b & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

então $(1I-A) = \begin{pmatrix} 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \cancel{0x} + by + z = 0 \\ \cancel{0x} + 0y + 0z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} by + z = 0 \\ 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Fixamos o z.

$$by = -z \to y = -z/b$$

$$V = (x, y, z) = (0, -z/b, z) = z(0, -1/b, 1)$$

Então $Ma = 3$, e $Mg = 1$, assim não é diagonalizável.

2) Se $1 = a$, mas $c \neq a$

$$\begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$pA(\lambda) = (\lambda-1)^2 \cdot (c-\lambda)$, $\lambda = 1, c$.

p/ $\lambda = 1$ $\begin{bmatrix} 0 & b & 1 \\ 0 & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\begin{cases} 0x + by + z = 0 \\ (c-1)y + 0z = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 0x + by + z = 0 \\ (c-1)y + 0z = 0 \\ 0x + 0y + 0z = 0 \end{cases}$$

Fixamos o x.

$by = -z$

$cy - y = -z \rightarrow cy - y = by$

$\cancel{y} \cdot (c-1) = b\cancel{y}$

$c = b + 1$

$cy - c = 0 \rightarrow cy = c \rightarrow y = 1$

$by + z = 0 \rightarrow by = -z \rightarrow z = -by \Rightarrow z = -b$

$(x, y, z) = (0, 1, z) = (0, 1, -b)$

Temos que para o autovalor $\lambda = 1$, tem $Ma = 2$, deveria ter $Mg = 2$, mas o encontrado foi $Mg = 1$.
Então não é diagonalizável.

3) $1 = c$, mas $a \neq c$

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a-\lambda & b & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$$

Assim para $\lambda = 1$, temos que o número de linhas zero, será o número de autovetores.

$$\begin{bmatrix} 1-a & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então como o autovalor $\lambda = 1$, pois $Ma = 2$, possui $Mg = 2$, então

para $1 = c$ e $a \neq c$ com $b \in \mathbb{C}$ será diagonalizável.

Temos $1 \leq Mg(a) \leq 1 \Rightarrow Mg(a) = 1$ o que implica que $Mg(1) + Mg(2) = 3 = \dim \mathbb{C}^3$.

4) $c = a$, mas $c, a \neq 1$.

$$\begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a & b & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$pA(\lambda) = (a-\lambda)^2 \cdot (1-\lambda)$$

para $\lambda = a$, temos

$$\begin{bmatrix} 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{bmatrix} = (aI - A)$$, possui 1 autovetor, sendo assim com $Ma(a) = 2$ e $Mg(a) = 1$, então não é diagonalizável.

Então temos que para ser diagonalizável:

1) $a \neq c \neq 1$ e $b \in \mathbb{C}$

2) $c = 1$, $a \neq 1$ e $b \in \mathbb{C}$