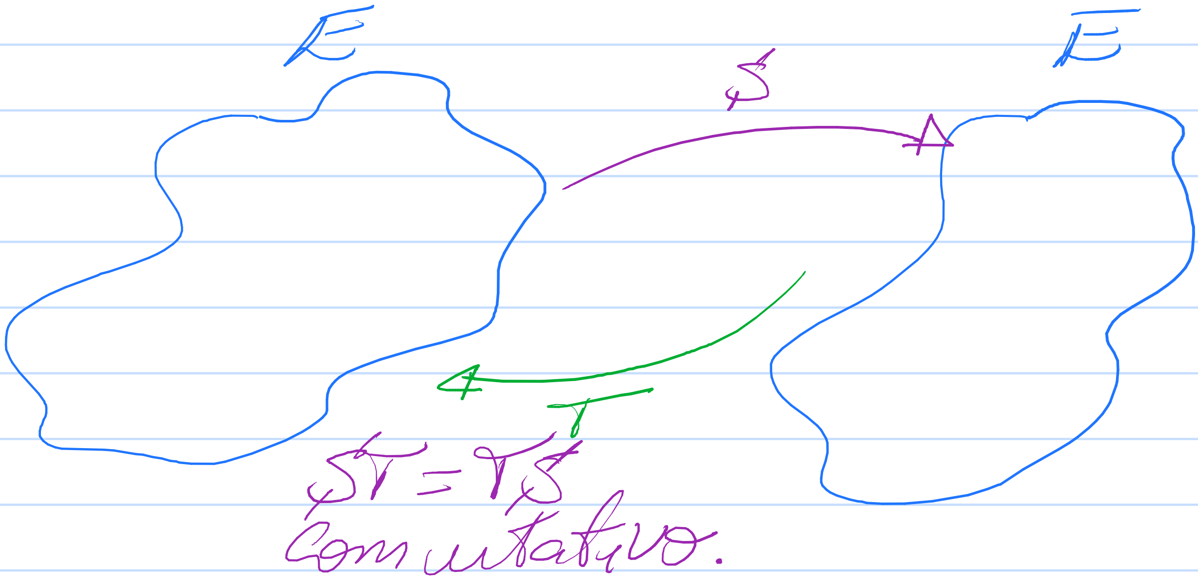
Faça o exercício 5 da seção 10.6, página 222.

5) Seja E um espaço euclidiano complexo. Sejam $S, T : E \to E$ operadores lineares, com $ST = TS$. Mostre que S e T têm autovalores em comum.



Teorema: da decomposição primária

Sejam X um espaço vetorial real de dimensão finita X e $T : X \to X$ uma aplicação linear. Seja $p \in \mathbb{R}[z]$ o polinômio característico de T. Se:

$$p(z) = [p_1(z)]^{s_1} \cdots [p_\ell(z)]^{s_\ell}$$

For uma decomposição de $p(z)$ em fatores irredutíveis, com $p_i \neq p_k$ para $i \neq k$. Então, o polinômio mínimo de T é:

$$m(z) = [p_1(z)]^{d_1} \cdots [p_\ell(z)]^{d_\ell},$$

Em que $0 < d_i \leq s_i$ para $i = 1, \ldots, \ell$.

O espaço X se decompõe-se como soma direta de subespaços.

$$X = W_1 \oplus \cdots \oplus W_e,$$

Sendo $W_i = nuc[p_i(T)]^{d_i} = nuc[p_i(T)]^{s_i}$ invariante por T. Se p_i tiver dois graus, $\dim W_i = 2s_i$.

Temos que $S, T : E \to E$ são operadores lineares e $ST = TS$.

Pelo <u>Lema</u>: "Sejam $S, T : E \to E$ duas aplicações lineares no espaço de dimensão finita E. Supondo que $ST = TS$, então existe uma base de E na qual tanto S como T realizam sua decomposição primária.

Com isso pelo Teorema da decomposição primária, seja $W_i = nuc[p_i(T)]^{d_i}$. Se $w_i \in W_i$, afirmamos que $Sw_i \in W_i$. Isto é, temos que W_i é um subespaço invariante também para S. Então:

$$[p_i(T)]^{d_i} S w_i = S[p_i(T)]^{d_i} w_i = 0$$

Como S e T possuem a mesma base, podem gerar os mesmos vetores, e uma base é formada por vetores L.I que são gerados por autovalores distintos.

Assim, tomando a seguinte proposição:

"Sejam $S, T: E \to E$ duas aplicações lineares no espaço de dimensão finita E sobre $\mathbb{C}$. Suponhamos que $ST = TS$, então existe uma base de E formada por autovetores generalizados de S e T."

Como consideramos $W_i = \text{nuc}(T - \lambda_i I)^{d_i}$ sendo invariante por S. Então, todos os elementos não nulos de W_i são, por definição, autovetores generalizados de T.

Aplicando o teorema da decomposição primária ao subespaço W_i com respeito a S, e obteremos uma divisão desse subespaço em subespaços formados por autovetores generalizados de S.

E como S e T possuem a mesma base, logo possuem os mesmos autovetores, que são gerados pelos mesmos autovalores.

Com isso temos que S e T possuem pelo menos um autovalor em comum, se caso esta base for separada em autovetores de T e autovetores de S.

Dado que S e T são invariantes. Com isso tomamos o corolário:

"Sejam $T, S: E \to E$ operadores lineares cujos polinômios mínimos são produtos dos fatores lineares.

Se $TS = ST$, então T e S possuem a mesma decomposição em soma direta por subespaços invariantes."

O teorema da decomposição primária garante esta decomposição em soma direta de subespaços, que são gerados por pelo menos um autovalor igual para S e T.

Outra Solução:

Suponhamos que a $\dim E = n$ e temos $(\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ sendo autovalores distintos de S. Então pelo teorema espectral, os autovalores de S podem formar uma base ortonormal para E e isto significa que:

$$E_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus E_{\lambda_k} = E$$

Consideremos, que $e \in E_{\lambda_i}$, então:

$$Se = \lambda_i e,$$ com isso:

$$TSe = T(\lambda_i e) \rightarrow STe = \lambda_i Te \rightarrow S(Te) = \lambda_i (Te)$$

Assim $Te \in E_{\lambda_i}$, e E_{λ_i} é T-invariante. Então

$T|_{E_{\lambda_i}}$ é um operador normal sobre E_{λ_i}, com isso pelo teorema espectral, existe uma base ortonormal: $e_1^{(i)}, \dots, e_{\lambda_i}^{(i)}$ para E_{λ_i}.

Assim consistindo de autovalores de T, então:

$$\bigcup_{i=1}^{k} \bigcup_{j=1}^{l_i} \{e_j^{(i)}\}$$

É uma base de E, que simultaneamente os autovalores são de S e T.

Teorema espectral: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{R}$, munido de produto interno.

$T: V \longrightarrow V$

Um operador auto-adjunto se, e somente se, existe uma base de V formada por autovetores de T, dois a dois ortogonais.