Formas bilineares

Seja V um K espaço vetorial, então uma forma bilinear sobre V é uma função:

$$f: V \times V \to \mathbb{R}$$

tal que: $f(j_1 u_1 + k_1 v_1, j_2 u_2 + k_2 v_2) =$

$j_1 j_2 f(u_1, u_2) + j_1 k_2 f(u_1, v_2) + k_1 j_2 f(v_1, u_2) +$
$k_1 k_2 f(v_1, v_2)$

Assim f deve ser linear nas duas variáveis, ou seja, as soma se separam e os escalares ficam como multiplicativos.

É dita simétrica, $f(u,v)$: $f(u,v) = f(v,u)$

Forma Quadrática

Seja E um espaço vetorial de dimensão finita munido de um produto interno. Uma função $\varphi: E \to \mathbb{R}$, chama-se uma forma quadrática quando existe uma forma bilinear simétrica $f: E \times E \to \mathbb{R}$ tal que:

$$\varphi(v) = f(v, v)$$

Se $\beta = \{v_1, \ldots, v_N\}$ é uma base de E, então

$$\varphi(v) = \varphi(k_1 v_1 + \ldots + k_N v_N)$$

Logo, $\forall v \in E$, temos que a forma quadrática $\varphi(v)$ é dada por:

$$\varphi(v) = f(v,v) = \sum k_i k_j (v_i, v_j)$$

Como f é uma forma bilinear, os valores de $f(v,v)$ são números.

Mas $\varphi(v) = \varphi(k_1 v_1 + \dots + k_n v_n) = f(v,v) = f(k_1 v_1 + \dots + k_n v_n) = \sum k_i k_j f(v_i, v_j)$

Assim, a forma quadrática depende dos números $f(v_i, v_j)$. Obs: a forma, com relação à base $\beta = \{v_1, \dots, v_n\}$ podemos expressar a forma quadrática φ por uma matriz dada por:

$$A = [f(v_i, v_j)]_{ij}$$

Exemplo: Seja $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ a forma quadrática dada por:

$$\varphi(x,y,z) = 2x^2 + 2y^2 - 2z^2 + 6xy - 10xz + 8yz$$

A matriz associada a $\varphi(x,y,z)$ é a:

matriz: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 4 \\ -5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

Temos: $\varphi(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$
$\varphi(x,y,z) = k, \; k \in \mathbb{R}^+_*$
↳ forma uma esfera.

Assim a forma geométrica não muda em relação a k, pode ser desde de um ponto a uma esfera com raio $R \geq 0$.

1) Dada a matriz:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x & 2 & 3 & -5 \\ y & 3 & 2 & 4 \\ z & -5 & 4 & -2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{l} x^2 = 2^2 \\ y^2 = 2^2 \\ z^2 = (-2)^2 \end{array}$$

$xy = 3$; $yx = 3$ $\Big\{\ 6xy$

$xz = -5$; $zx = -5$ $\Big\{\ -10xz$

$yz = 4$; $zy = 4$ $\Big\{\ 8yz$

Exemplo: Qual a matriz associada a $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, forma quadrática dada por:

$$\varphi(x,y,z) = -3x^2 - 2y^2 - z^2 + xy - 3xz + 2yz$$

$$\text{matriz} = \begin{array}{c} \\ x \\ y \\ z \end{array}\begin{array}{ccc} x & y & z \\ \hline xx & xy & xz \\ yx & yy & yz \\ zx & zy & zz \end{array} = \begin{bmatrix} -3 & 1/2 & -3/2 \\ 1/2 & -2 & 1 \\ -3/2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

4

Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Dizemos que uma aplicação $f: V \times V \to \mathbb{R}$ é uma forma bilinear se:

- $f(u+v, w) = f(u,w) + f(v,w)$ $\forall u, v, w \in V$
- $f(\alpha u, v) = \alpha f(u,v)$ $\forall u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

- $f(u, v+w) = f(u,v) + f(u,w)$ $\forall u, v, w \in V$
- $f(u, \alpha v) = \alpha f(u,v)$ $\forall u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$

- $f(u,v) = f(v,u)$ $\forall u, v \in V \to$ simétrica
- $f(u,u) > 0$ se $u \neq 0$

Exemplos:

1) $f((x,y),(x',y')) = xx' - yy'$

$f((0,1),(0,1)) = -1 < 0$ não é positiva, então não é bilinear.

Tomamos agora:

Seja $A \in M_n$, a aplicação:

$f_A((x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n)) = (x_1,\dots,x_n) A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \cancel{*}$, é uma forma bilinear. É simetrica $\longleftrightarrow$ A é simetrica.

$* = (y_1,\dots,y_n) A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, e.,

$f((y_1,\dots,y_n),(x_1,\dots,x_n)) = (y_1,\dots,y_n) A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

Assim se a matriz é simetrica, teremos uma forma bilinear simetrica.

Tomamos agora:

Seja $f: V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear, e seja B,

$B = \{u_1,\dots,u_n\}$ uma base ordenada de V. A matriz

$$\begin{bmatrix} f(u_1,u_1) & \cdots & f(u_1,u_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(u_n,u_1) & \cdots & f(u_n,u_n) \end{bmatrix} = a_{ij}$$

Chama-se de matriz da forma bilinear f na base B.

Assim se $f(v_i, v_j) = a_{ij}$

Tomando a mesma base B, ordenada, em V temos:

$$f(u,v) = [u]_B^T = \begin{bmatrix} f(u_1,u_1) & \cdots & f(u_1,u_N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f(u_N,u_1) & \cdots & f(u_N,u_N) \end{bmatrix} [v]_B$$

Vetor linha u

Vetor Coluna V

Seja B uma base de V, uma forma bilinear é simetrica, se e somente se, a matriz da forma bilinear em B é simetrica.

Exemplo: $\langle (x_1,y_1),(x_2,y_2) \rangle = 5x_1x_2 + x_2y_1 + 2x_1y_2$ encontrar a matriz da forma bilinear.

$$\begin{bmatrix} f(e_1,e_1) & f(e_1,e_2) \\ f(e_2,e_1) & f(e_2,e_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$, portanto é bilinear assimetrica

<u>Mudança de Base</u>: Seja $f: V \times V \to \mathbb{R}$ uma forma bilinear e B e C bases de V.

Sejam M_B e M_C as matrizes da forma bilinear nas bases B e C, respectivamente.

Qual é a relação entre M_B e M_C?

$$M_B = \left([I]^C_B\right)^T \cdot M_C [I]^C_B$$

Formas quadráticas:

① Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}$, pela $f(x,y)$

$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$. A é simétrica.

Teorema: Esta matriz sempre tem um par de autovetores ortonormais, $\vec{u_1} = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ e $\vec{u_2} = (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)$, relativos a autovalores reais λ_1 e λ_2.

Teorema: Seja $f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2$. Considere um novo sistema $\bar{x}\bar{y}$, cujos eixos $O\bar{x}$ e $O\bar{y}$ estão nas direções u_1 e u_2 (autovetores de f). Neste sistema:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda_1 \bar{x}^2 + \lambda_2 \bar{y}^2$$