1) Determine o número de matrizes não semelhantes em $M_5(\mathbb{R})$ que verificam $(A+Id)^3=0$.

Uma matriz de $M_5(\mathbb{R})$ possui grau 5, logo dimensão 5. Portanto um polinômio característico seria:

$$p_T(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4)(x-\lambda_5)$$

podendo: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4, \lambda_5$.

Então um polinomio na forma: $(A-Id)^3=0$ seria o $m_T(x)$.

$m_T(x) = (x-\lambda_i)(x-\lambda_j)(x-\lambda_l)$, com $i, j, l = 1, \ldots, 5$,

Teorema: Duas matrizes $A=(a_{ik})_1^n$ e $B=(b_{ik})_1^n$ são semelhantes $(B=T^{-1}AT)$ se e somente se elas possuem os mesmos polinômios invariantes ou, o que significa o mesmo, os mesmos divisores elementares.

Como $m_T(x)$ possui grau 3 e $p_T(x)$ possui grau 5, temos que pelo menos 3 ou dois autovalores são iguais, ou seja:

1) $\lambda_i, \lambda_j, \lambda_l$, com $i = 1,2,3$
2) $\lambda_i, \lambda_l, \lambda_j$, com $i, j = 1, 2$

Então:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \lambda_4 & \\ & & & & \lambda_5 \end{bmatrix}$$

As matrizes semelhante A possuem:

$$B = T^{-1}A, T \Rightarrow (\lambda I - B) = T^{-1}(\lambda I - A)T$$

Se $T^{-1} = P(\lambda)$ e $T = Q(\lambda)$, então:

$$(\lambda I - B) = P(\lambda)(\lambda I - A)Q(\lambda)$$

O enunciado pede o número de matrizes não semelhantes de grau 3, ou seja:

$$(A+Id)^3=0$$

Uma matriz A é diagonalizável se A é semelhante a uma matriz diagonal.

Por "uma matriz de Jordan para a matriz A" entende-se: uma matriz de Jordan semelhante à A.

Seja $T: V \to V$ tal que $[T]=A$.
Temos que $p_T(A)=(x-\lambda_1 I).(x-\lambda_2 I).(A+Id)^3$. Temos como candidatos a $m_T(x)$:

1) $(x-\lambda_1 I)(x-\lambda_2 I).(x+Id)$
2) $(x-\lambda_1 I)(x-\lambda_2 I)(x+Id)^2$
3) $(x-\lambda_1 I)(x-\lambda_2 I)(x+Id)^3$

Sendo que $m_T(x)=0$ e $p_T(m_T(x))=0$
Temos que $T=T_1 \oplus T_2 \oplus T_3$, onde
$T_1=Nuc(A-\lambda_1 I)$, $T_2=Nuc(A-\lambda_2 I)$ e
$T_3=Nuc(A+Id)^3$, e T_1, T_2, T_3 são invariantes sobre T.

Então temos uma forma possível de Jordan:

$$\mathrm{Diag}\left[(\lambda_1), (\lambda_2), \begin{pmatrix} \lambda_3 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}\right]$$ sendo $\lambda_3 = -1$

Então:

$$\mathrm{Diag}\left[(\lambda_1), (\lambda_2), \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\right]$$

Dadas duas matrizes nilpotentes de ordem 3 são semelhantes se, e somente se, elas possuem o mesmo índice de nilpotencia.

Temos A e B duas matrizes de ordem 3 de nilpotência, supondo $A \sim B$, então elas possuem a mesma forma de Jordan que é a matriz dada por:

Se $T \in L(V)$ é nilpotente de índice de nilpotência n_1 então pode-se determinar uma base de V tal que a matriz de T em relação a esta base tenha a forma com $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ e $n_1 + n_2 + \dots + n_r = \dim V$.

Temos 3 casos a considerar;

i) Se o índice de nilpotência de A for 3, então $J_A = J_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Logo, B tem índice de nilpotência 3.

ii) Se o índice de nilpotência de A for 2, então $J_A = J_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Logo, B tem índice de nilpotência 2.

iii) Se o índice de nilpotência de A for 1, então $J_A = J_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Logo, B tem índice de nilpotência 1.

Portanto temos, se A e B são matrizes de ordem nilpotente 3, ambas com o mesmo índice. Então elas possuem a mesma forma de Jordan. Logo são semelhantes.

Assim para o índice 4, temos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & 0 \\ & & & 0 \end{pmatrix}$$

Então A e B são nilpotentes de índice 2, mas não são semelhantes.

Agora vamos testar p/ ordem 5.

i) Se o índice de nilpotência de A for 1 então:

$$J_A = J_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, logo B tem índice de nilpotência 1.

ii) Se o índice de nilpotência de A for 2, então:

$$J_A = J_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, logo o índice de B é 2.

iii) Se o índice de nilpotência de A for 3, então:

$$J_A = J_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$, logo B tem índice de nilpotencia 3

Até o índice 3, dadas duas matrizes são semelhantes. logo não existe matrizes não semelhantes.

2) Seja $A \in M_6(\mathbb{R})$ tal que $A^4 - 8A^2 + 16I = 0$. Quais são as possíveis formas de Jordan não semelhantes para A?

Temos $A^4 - 8A^2 + 16I = 0$, Então:

$(A^4 - 8A^2) + 16I = 0$

Dada a matriz canônica para $M_6(\mathbb{R})$

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \cdot \underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} = \underset{R}{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}} \rightarrow A^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^4 - 8A^2 + 16I = 0$$

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
-
\begin{bmatrix}
8 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 8 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 8 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 8 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8
\end{bmatrix}
+
$$

$$
\begin{bmatrix}
16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
9 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 9 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9
\end{bmatrix}
$$

Aplicando a forma de Jordan, incluindo 1 em $\gamma = i+j, i$

$$
\begin{bmatrix}
9 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 9 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 9 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 9 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9
\end{bmatrix}
$$

A forma é única, dado que $p(x)$ é a mesma sempre, os autovalores são os mesmos, então dado duas matrizes A e B então $J_A = J_B$. Então a forma é única.

3) Verifique se as matrizes seguintes são semelhantes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Temos que a matriz A e B possuem os mesmos valores na diagonal principal

$$A = \left[\begin{array}{cccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\det(A) = [(-1-\lambda).(1-\lambda).(1-\lambda)(1-\lambda) + 0 + 0 + 0] - [0 + 0 + 0 + 0] = (-1-\lambda).(1-\lambda)^3$$

$$\det B = [(1-\lambda)^3(-1-\lambda)] - [0 + 0 + 0 + 0]$$

$$[(-1-\lambda).(1-\lambda)^3$$

$$pT(x)_B = pT(x)_A \rightarrow mT(x)_B = mT(x)_A$$

$$\dim A = \dim B, \ \det T(A) = \det(B)$$

Temos portanto que $A \sim B$.

4) Ache a forma de Jordan da matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$, onde:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

Ache uma matriz invertível M em $M_4(\mathbb{R})$ de tal maneira que: $M^{-1}AM = J$.

$$A = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 3-\lambda & -1 & 1 & -7 & 3-\lambda & -1 & 1 \\ 9 & -3-\lambda & -7 & -1 & 9 & -3-\lambda & -7 \\ 0 & 0 & 4-\lambda & -8 & 0 & 0 & 4-\lambda \\ 0 & 0 & 2 & -4-\lambda & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

$$\det A = [(3-\lambda).(-3-\lambda)(+4-\lambda)(-4-\lambda)] - [0 + 2.9.8]$$

$$\det = [(3-\lambda).(-3-\lambda)(-4-\lambda)(4-\lambda)] - 16.8$$

$$p(\lambda) = (-9 - \cancel{3\lambda} + \cancel{3\lambda} + \lambda^2).(-16 + \cancel{4\lambda} - \cancel{4\lambda} + \lambda^2) - 16.8$$

$$p(\lambda) = (-9+\lambda^2).(-16+\lambda^2) - 128$$

$$p(\lambda) = -9.-16 - 9\lambda^2 - 16\lambda^2 + \lambda^4 - 128$$

$p_T(x) = -9.-16 \ -9\lambda^2 - 16\lambda^2 + \lambda^4 - 128$

$p_T(x) = +144 - 25\lambda^2 + \lambda^4 - 128$

$p_T(x) = \lambda^4 - 25\lambda^2 + 16$

$p_T(x) =$ Continua depois do 9

5) Ache a forma de Jordan das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

1) Encontramos o polinômio Característico:

$$A = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 0-\lambda & -9 & 0 & 0 & 0-\lambda & -9 & 0 \\ 1 & 6-\lambda & 0 & 0 & 1 & 6-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$p_T(x) = [(-\lambda.(6-\lambda)(3-\lambda)(3-\lambda)] - [0+0+0+0]$

$p_T(x) = (-6\lambda + \lambda^2)(3-\lambda)^2$

$p_T(x) = (-6\lambda + \lambda^2).(9 - 6\lambda + \lambda^2)$

$$pT(\lambda) = (-6\lambda + \lambda^2).(9 - 6\lambda + \lambda^2)$$
$$pT(\lambda) = -54\lambda + 36\lambda^2 - 6\lambda^3 + 9\lambda^2 - 6\lambda^3 + \lambda^4$$
$$pT(\lambda) = \lambda^4 - 12\lambda^3 + 45\lambda^2 - 54\lambda$$

$\lambda = 6, 3, 0$; $(\lambda-3)^2.(\lambda-6).(\lambda-0)$

1) Para $\lambda = 3$, temos: $(A - 3I)(v) = 0$, se e somente se: 1º raiz $= 3$

$$\begin{bmatrix} 0-\lambda & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda=3} \begin{bmatrix} -3 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x_1 - 9x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 1x_1 + 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases}$$

$x_4 = x_3 = 0$

$$\begin{cases} -3x_1 - 9x_2 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 0 \end{cases} \qquad x_4 = x_3 = 0$$

$L_2' = L_2 + \frac{1}{3} L_1$

$$\rightarrow \begin{cases} -3x_1 - 9x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases}$$

fixo x_2.

$$-3x_1 = 9x_2 \div 3$$
$$-x_1 = 3x_2 \; (-1)$$
$$x_1 = -3x_2$$

$$L_1 \div -3 \rightarrow \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0 \rightarrow x_1 = -3x_2 \\ x_2 = 0 \qquad\qquad x_2 \end{cases}$$

Então: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-3x_2, x_2, 0, 0)$
$= x_2(-3, 1, 0, 0)$

E $Nuc(A - 3I) = \{(-3x_2, x_2, 0, 0) \mid x_2 \in \mathbb{R}\} =$
$[(-3, 1, 0, 0)]$

2º Raiz $= 3$, também: $(A - 3I)^2(v) = 0$
se, e somente se:

$$\begin{bmatrix} -3 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0.$

$Nuc(A-3I)^2 = \{(0,0,0,0)\}$

Então T é nilpotente p/ $T_{(3)}^2$ com índice 2.

3º raiz para $\lambda = 6$,

$(A-6I)(v) = 0$, então:

$$\begin{bmatrix} 0-6 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6-6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3-6 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} -6 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -6x_1 - 9x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 - 3x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

$-3x_4 = 0$ $\quad$ $-3x_3 = 0$ $\quad$ fixo x_2

$x_4 = 0$ $\quad$ $x_3 = 0$

$-6x_1 - 9x_2 = 0$

$6x_1 = -9x_2$

$x_1 = \frac{-9}{6} x_2 = -\frac{3}{2} x_2$

$\text{Nuc}(A - 6I) = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-\frac{3}{2}x_2, x_2, 0, 0)$

$= x_2(-\frac{3}{2}, 1, 0, 0)$

4º) Para $\lambda = 0$

$x_4 = 0$, $x_2 = 0$

$x_3 = 0$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$x_1 + 6x_2 = 0$

$x_1 = -6x_2$

Fixo x_2.

$(-6x_2, x_2, 0, 0)$

$x_2(-6, 1, 0, 0)$

$$\begin{cases} 0x_1 - 9x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ x_1 + 6x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 + 0x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = 0 \end{cases}$$

Temos que $V_A = Nuc(A-3I) \oplus Nuc^+(A-3I)^2 \oplus Nuc(A-6I) \oplus Nuc(A-0I)$

A matriz será formada a partir do gerado pelo polinômio de maior grau até o último:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & -3 & -3/2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \det = 0 \text{ não tem inversa.}$$

$P^{-1} A P = B$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$p(x) = (x-3)^2(x-6)(x-0)$

Candidatos a $m(x)$:

1) $(x-3).(x-6).(x-0)$

2) $(x-3)^2.(x-6)(x-0)$

$$\begin{bmatrix} -3 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \neq$$

$$0$$

$(x-3)^2$

$$\begin{bmatrix} -6 & -54 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -6 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36-54 & +54 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -18 & +54 & 0 & 0 \\ -6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Não encontrei o $m_T(x)$, voltar !!!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; p_T(x) = (x-3)^2(x-6)(x-0)$$

As possíveis formas de Jordan são:

$(x-3)^2$

$$f(A) = \begin{bmatrix} +3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & +3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{6} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix}$$

$(x-6)^1 \quad (x-0)^1$

$$B = \begin{bmatrix} 5-\lambda & -9 & -4 \\ 6 & -11-\lambda & -5 \\ -7 & 13 & 6-\lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} -9 & -4 \\ -11-\lambda & -5 \\ 13 & 6-\lambda \end{matrix}$$

$p_T(x) = -x^3$; raiz $x = 0$.

$m_T(x) = -x$, ou $-x^2$, ou $-x^3$

Para $x = 0$, em $-x$; $B \neq 0$

Para $x = 0$, em $-x^2$

$$\begin{bmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \neq 0$$

Para $x=0$ em $-\frac{x^3}{x^2} =$

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -9 & -4 \\ 6 & -11 & -5 \\ -7 & 13 & 6 \end{bmatrix} = 0$$

$$F_j(B) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -9 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$p_T(x) = x^4 - 21x^3 + 108x^2 - 189x + 81$

Raízes: $x_1 = 0{,}62$, $x_2 = 14{,}37$

$x_3 = 3$

6) Seja A uma matriz real 9×9, cujo polinômio característico é:

$p_T(x) = (x-3)^5 \cdot (x-2)^4$

$M_T(x) = (x-3)^3 \cdot (x-2)^2$

Dê as possíveis formas de Jordan de A.

Como $p_T(x) = (x-3)^5 \cdot (x-2)^4$, $m_T(x) = (x-3)^3 \cdot (x-2)^2$, então as raízes de $p_T(x)$ são $x = 3$ e $x = 2$.

Como $m_T(x)$ é ao cubo. Então:

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
-3 & 0 & 0 & & & & & & \\
1 & -3 & 0 & & & & & & \\
0 & 1 & -3 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -3 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & -2 & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & 1 & -2 & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & -2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & & & & 1 & -2
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
(x-3)^3 \\ \\ \\ (x-3)^2 \\ \\ (x-2)^2 \\ \\ (x-2)^2 \\ \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
-3 & 0 & 0 & & & & & & \\
1 & -3 & 0 & & & & & & \\
0 & 0 & -3 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -3 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 1 & -3 & & & & \\
0 & 0 & 0 & & & 0 & -2 & & \\
0 & 0 & 0 & & & 0 & 1 & -2 & \\
0 & 0 & 0 & & & 0 & & -2 & \\
 & & & & & & & 1 & -2
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
(x-3)^3 \\ \\ \\ (x-3)^2 \\ \\ (x-2)^2 \\ \\ (x-2)^2 \\ \\
\end{array}
$$

$p_T(x) = (x-3)^5 (x-2)^4, \quad m_T(x) = (x-3)^3 (x-2)^2$

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
-3 & 1 & & & & & & & \\
0 & -3 & 1 & & & & & & \\
0 & 0 & -3 & & & & & & \\
 & & & -3 & & & & & \\
 & & & & -3 & & & & \\
 & & & & & -2 & 1 & & \\
 & & & & & 0 & -2 & & \\
 & & & & & & & -2 & 1 \\
 & & & & & & & 0 & -2
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
(x-3)^3 \\ \\ \\ (x-3) \\ (x-3) \\ (x-2)^2 \\ (x-2)^2 \\ \\ \\
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\begin{bmatrix}
-3 & 1 & & & & & & & \\
0 & -3 & 1 & & & & & & \\
0 & 0 & -3 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -3 & & & & & \\
 & & & & -3 & & & & \\
 & & & & & -2 & 1 & & \\
 & & & & & 0 & -2 & & \\
 & & & & & & & -2 & \\
 & & & & & & & & -2
\end{bmatrix}
\end{array}
\begin{array}{l}
(x-3)^4 \\ \\ \\ \\ (x-3) \\ (x-2)^2 \\ \\ (x-2) \\ (x-2)
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
-3 & 1 & & & & & & & & & & \\
0 & -3 & & & & & & & & & & \\
 & & -3 & 1 & & & & & & & & \\
 & & 0 & -3 & & & & & & & & \\
 & & & & -3 & 1 & & & & & & \\
 & & & & 0 & -3 & & & & & & \\
 & & & & & & -3 & & & & & \\
 & & & & & & & -2 & 1 & & & \\
 & & & & & & & 0 & -2 & & & \\
 & & & & & & & & & -2 & 1 \\
 & & & & & & & & & 0 & -2
\end{bmatrix}
$$

$(x-3)^2$

$(x-3)^2$

$(x-3)^2$

$(x-3)$

$(x-2)^2$

$(x-2)^2$

$$
\begin{bmatrix}
-3 & 1 & & & & & & & & \\
0 & -3 & 1 & & & & & & & \\
0 & 0 & -3 & 1 & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -3 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & & & & \\
 & & & & & & -2 & 1 & & \\
 & & & & & & 0 & -2 & & \\
 & & & & & & & & -2 & \\
 & & & & & & & & & -2
\end{bmatrix}
$$

$(x-3)^5$

$(x-2)^2$

$(x-2)$

$(x-2)$

$$\begin{array}{c}
(x-3)^5 \qquad (x-2)^4 \\
\begin{bmatrix}
-3 & 1 & & & & & & & \\
0 & -3 & 1 & & & & & & \\
0 & 0 & -3 & 1 & & & & & \\
0 & 0 & 0 & -3 & 1 & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -3 & & & & \\
 & & & & & -2 & 1 & & \\
 & & & & & 0 & -2 & 1 & \\
 & & & & & 0 & 0 & -2 & 1 \\
 & & & & & 0 & 0 & 0 & -2
\end{bmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{bmatrix}
-3 & & & & & & & & \\
 & -3 & & & & & & & \\
 & & -3 & & & & & & \\
 & & & -3 & & & & & \\
 & & & & -3 & & & & \\
 & & & & & -2 & & & \\
 & & & & & & -2 & & \\
 & & & & & & & -2 & \\
 & & & & & & & & -2
\end{bmatrix}
\begin{array}{l}
(x-3) \\ (x-3) \\ (x-3) \\ (x-3) \\ (x-3) \\ (x-2) \\ (x-2) \\ (x-2) \\ (x-2)
\end{array}$$

7) ① Determine todas as possíveis formas de Jordan de uma matriz em $M_n(\mathbb{C})$, $n \geq 3$ e de posto 2.

Quando o operador T possui autovalores complexos $\lambda = a + bi$, a forma de Jordan obtida pelo processo é complexa e os autovalores são complexos conjugados. Nesse caso o operador T deve ser considerado sobre $\mathbb{C}^n$ e a forma de Jordan pode ser utilizada normalmente com os mesmos objetivos. ① Desejamos obter neste caso uma matriz $M_n(\mathbb{C})$ com $n \geq 3$ e de posto 2.

Assim para $n = 2$, temos:

$\lambda = 2+i$ e $\bar{\lambda} = 2-i$ em $\mathbb{C}^2$

$$\begin{bmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{bmatrix}, \quad \text{posto} = 2, \quad n = 2$$

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{bmatrix}$$

- Para $N \geq 3$, temos:

$N=3$, temos:

$$\begin{bmatrix} 2+i & & \\ & 1+i & \\ & & -1-i \end{bmatrix}$$

Não temos combinação possível p/ $N=3$ e posto $=2$.

- Para $N=4$

$$\begin{bmatrix} 1+i & 1 & & \\ 0 & 1+i & & \\ 0 & 0 & 1-i & \\ 0 & 0 & 0 & -1-i \end{bmatrix},$$

Posto $=2$

$N=4$

$\lambda_1=(1+i)$, $\lambda_2=(1-i)$, $\lambda_3=(-1,-i)$

$$\begin{bmatrix} 1+i & & & \\ & 1+i & & \\ & & 1-i & \\ & & & -1-i \end{bmatrix}$$

Temos duas combinações possíveis p/ $N=4$

Para $N=5$

$$\begin{bmatrix} 2+i & & & & \\ & 3+2i & & & \\ & & -1-i & 1 & \\ & & 0 & -1-i & 1 \\ & & 0 & 0 & -1-i \end{bmatrix}$$

Posto $=2$

$\lambda_1=2+i$

$\lambda_2=3+2i$

$\lambda_3=-1-i$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2+i} & & & & \\ & \boxed{3+2i} & & & \\ & & \boxed{-1-i} & & \\ & & & \boxed{-1-i} & \\ & & & & \boxed{-1-i} \end{bmatrix}$$

Posto $=2$

$\lambda_1 = 2+i$

$\lambda_2 = 3+2i$

$\lambda_3 = -1-i$

Para $N=5$
Temos 3 possibilidades

$$\begin{bmatrix} \boxed{2+i} & & & & \\ & \boxed{3+2i} & & & \\ & & -1-i & 1 & \\ & & 0 & -1-i & \\ & & & & \boxed{-1-i} \end{bmatrix}$$

Para $N=6$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2+i} & & & & & \\ & \boxed{4+3i} & & & & \\ & & -1-i & 1 & & \\ & & 0 & -1-i & 1 & \\ & & 0 & 0 & -1-i & 1 \\ & & 0 & 0 & 0 & -1-i \end{bmatrix}$$

$(-1-i)^4$

$(4+3i)^1$

$(2+i)^1$

$$\begin{bmatrix} 2+i & & & & & \\ & 4+3i & & & & \\ & & -1-i & 1 & & \\ & & 0 & -1-i & & \\ & & & & -1-i & 1 \\ & & & & 0 & -1-i \end{bmatrix}$$

$(2+i)$, $(4+3i)$, $(-1-i)^2$

$$\begin{bmatrix} 2+i & & & & & \\ & 4+3i & & & & \\ & & -1-i & 1 & 0 & \\ & & 0 & -1-i & 1 & \\ & & 0 & 0 & -1-i & \\ & & & & & -1-i \end{bmatrix}$$

$(2+i)$, $(4+3i)$, $(-1-i)^3$, $(-1,i)^1$

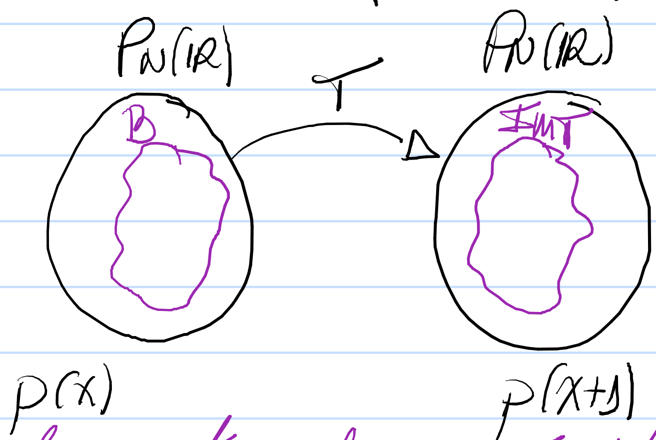
$$\begin{bmatrix} 2+i & & & & & \\ & 4+3i & & & & \\ & & -1-i & & & \\ & & & -1-i & & \\ & & & & -1-i & \\ & & & & & -1-i \end{bmatrix}$$

$(2+i)$, $(4+3i)$, $(-1,-i)$, $(-1,-i)$, $(-1,-i)$, $(-1-i)$

São infinitas possibilidades, até agora.

8) Seja $T: P_N(\mathbb{R}) \rightarrow P_N(\mathbb{R})$ dado por $T(p(x)) = p(x+1)$.

a) Determine a forma de Jordan p/ T.



. Nuc $T = \emptyset$
. T é injetivo
. T é sobrejetivo
. T é inversível
e isomorfo,

Uma transformação sobre o grau do polinômio.

$\{0, x, x^2, \dots, \} \xrightarrow{T} \{x, x^2, x^3, \dots\}$

Temos que T gera um conjunto finito, mas não é nilpotente.
T é T-invariante,
Tomamos como base, a base canônica dos polinômios.

$$\mathcal{B} = \{0, x, x^2, x^3, \dots, x^{N-1}, x^N\}$$

$$T(p(x)) = \{x, x^2, x^3, \dots, x^N, 0\}$$

$$T(x^N) = x^{N+1} \notin P_N(\mathbb{R}),$$

$$A = [T]_{can} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \vdots \\ & & & & 0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$p_T(x) = (1-\lambda)^N, \quad \lambda = 1, \text{ onde:}$$
$$m_T(x) = (1-\lambda)^N$$

$$F_j(A) = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ 0 & \vdots & \ddots & & \vdots \\ 0 & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

b) Para $n=4$, encontre uma base B de $P_n(\mathbb{R})$ tal que $[T]_B$ seja a sua forma de Jordan.

Dada uma Base em $P_n(\mathbb{R})$ com $n=4$.

$B = \{x, x^2, x^3, x^4\} \subset P_n(\mathbb{R})$, seja $u = (1,0,0,0)$. Então $\{u\}$ é base de $Nuc(T-\lambda)$

<u>Voltar!!</u>

9) Seja T um operador linear sobre um espaço vetorial de dimensão finita. Mostre que se $m_T(x)$ for um produto de polinômios de grau 1 e sem raízes repetidas, então T é diagonalizável.

Dado o teorema: Sejam $T \in L(V,V)$ e $m_T(\lambda) = (\lambda_1-\lambda)\dots(\lambda_r-\lambda) = m_1(\lambda)\dots m_r(\lambda)$ é o polinômio minimal de T.
Então:

i) $V = Nuc(T - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus Nuc(T - \lambda_r I)$,

ii) O polinômio minimal da restrição de T a $Nuc(T - \lambda_j I)$ é $m_j(\lambda)$, para $j = 1, \dots, r$.

Assim temos que que T é diagonalizável.

Pelo Teorema temos que $V = Nuc(T - \lambda_1 I) \oplus \dots \oplus Nuc(T - \lambda_r I)$.

Seja $0 \neq w \in Nuc(T - \lambda_i I)$. Então $(T - \lambda_i I)(w) = 0$ e daí $T(w) = \lambda_i w$.

Portanto todo vetor não nulo de $Nuc(T - \lambda_i I)$ é autovetor associado a λ_i. Como a união das bases do $Nuc(T - \lambda_1 I), \dots, Nuc(T - \lambda_r I)$ é uma base de V, segue que temos uma base de autovetores para V e portanto T é diagonalizável.

Assim sendo T um operador linear diagonalizável e sejam $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ autovalores distintos de T. Então o polinômio minimal de T é o polinômio $m(\lambda) = (\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)\dots(\lambda-\lambda_r)$.

Desta forma precisamos que $m(T)=0$. Se v é um autovetor, então um dos operadores $(T-\lambda_1 I)$, $(T-\lambda_2 I)$, ..., $(T-\lambda_r I)$ aplica v em zero. Portanto:

$$m(T)(v) = (T-\lambda_1 I)(T-\lambda_2 I)\dots(T-\lambda_r I)(v) = 0$$

Para todo autovetor v, e como existe uma base de autovetores de T, segue que $m(T)=0$, e logo é o minimal.

4) Ache a forma de Jordan J da matriz $A \in M_4(\mathbb{R})$, onde:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

E ache uma matriz invertível M em $M_4(\mathbb{R})$ de tal maneira que:

$$M^{-1}AM = J$$

Temos que $p_T(x) = x^4$

Possíveis candidatos a polinômio minimal:
x, x^2, x^4, x^3.

. Se $m_T(x) = x$ então $p(T)(x) = 0$, falso porque $p_T(x) \neq 0$

. Se $m_T(x) = x^2$ então $p_T(x) = 0$.

Temos que $p_T(x) = x^4$ e $m_T(x) = x^2$.
Mas a raiz é $x = 0$.

$$Fj(A) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x^2 \\ \\ x^2 \\ \\ \end{array}$$

Temos $p(T)(0) = (x-0)^4 = (x-0).(x-0)(x-0).(x-0)$
Logo os autovalores é 0, temos:
$(T - \lambda I)(v) = 0$ se e somente se:
$(T - 0I)(v) = 0 \to T(v) = 0$.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 - 7x_3 - x_4 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 4x_3 - 8x_4 = 0 \\ \cancel{0x_1 + 0x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 0} \end{cases}$$

pertence ao mesmo subespaço.

$$2x_3 - 4x_4 = 0$$

$$2x_3 = 4x_4 \quad \div 2$$

$$x_3 = 2x_4$$

Fixamos o x_4.

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 - 7x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_4 - 7x_4 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 - 14x_4 - x_4 = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3x_1 - x_2 - 5x_4 = 0 \\ \cancel{9x_1 - 3x_2 - 15x_4 = 0} \end{cases}$$

pertence ao mesmo subespaço.

$$3x_1 + x_2 = 5x_4$$

$$x_2 = 5x_4 - 3x_1$$