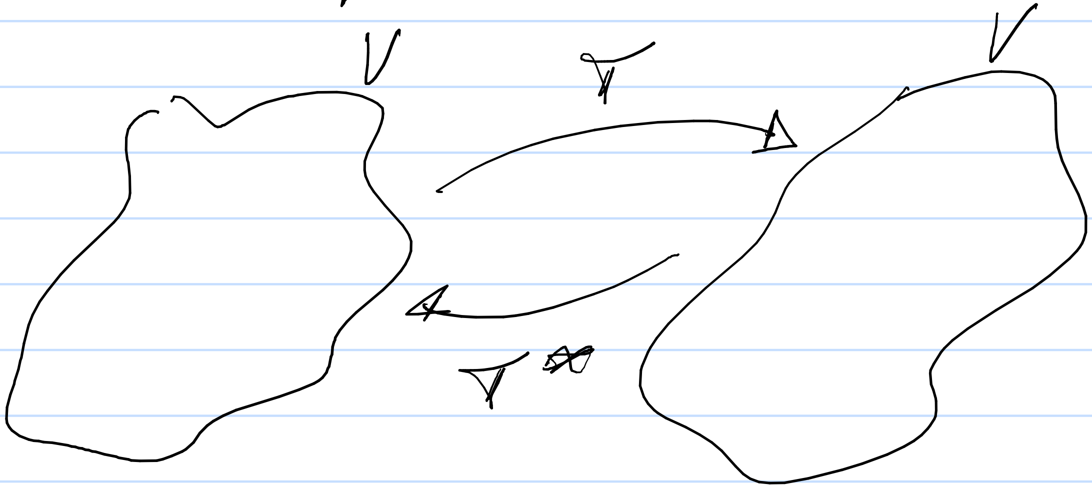
Sejam V um espaço vetorial complexo munido de um produto interno e $T: V \rightarrow V$ um operador linear tal que:

$$T^* \circ T = T \circ T^* = Id$$

Isto é unitário.

Mostre que qualquer autovalor de T possui |módulo| igual a 1, isto é o autovalor esta sob a circunferência de raio igual a 1.



$|\lambda| = 1$

i) Tomamos que T é uma isometria, logo:

$$|T(a+bi) - T(c+di)| = |a+bi - c+di|$$

Com isso $T^*T = I$ e T^* é adjunto de T e $I: V \rightarrow V$.

Assim $T^* = T^{-1}$ e $\langle T(v), T(w) \rangle = \langle v, w \rangle$ assim o operador T gera uma matriz A e o operador T^* gera uma matriz $A^T = A^{-1}$, desta forma $A \cdot A^{-1} = I$.

Desta forma podemos tomar que T gera uma matriz A e T^* gera uma matriz inversa de A, que seria A^{-1}.

Tomamos o polinômio característico de A, e A tem uma raiz real. Temos λ sendo esta raiz do polinômio característico.

Então λ é um auto valor de A, supondo que $v \in \mathbb{R}^n$ e $v \neq 0$, onde $\underline{n}$ é a ordem da matriz, e v é um vetor normalizado correspondente a λ. Então:

$$\lambda^2 = \lambda^2 \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle Av, Av \rangle =$$
$$\langle v, A^T A v \rangle = \langle v, v \rangle = \underline{1}$$

Assim $\lambda = \pm \underline{1}$

Se $\lambda = 1$, então esta feito.

Agora se $\lambda = -1$, vamos supor $m, n \in \mathbb{C}$ são os outros autovalores de A.

Então $-1 = -\det(A) = -m \cdot n \lambda = m \cdot n$

Se m, n não são reais, eles devem ser um par conjugado de algum outro real de A.

Mas isto é impossível, porque então $m n > 0$.

Assim ambos m, n são reais, pela mesma razão $m, n = \pm 1$.

Então $mn = -1$, pode ser $m = 1$ ou $n = -1$.

Assim A tem 1 como um autovalor, e então o polinômio característico de A tem 1 como raiz.