

## 9.4 Exercícios

1. Seja  $X$  um espaço vetorial. Mostre que o espaço das formas  $\mathcal{S}(X)$  é um espaço vetorial com as definições usuais de soma de funções e multiplicação de função por escalar.
2. Seja  $B$  uma forma no espaço vetorial  $X$ . Mostre que vale a identidade

$$q_B(x + y) + q_B(x - y) = 2(q_B(x) + q_B(y)),$$

que generaliza a identidade do paralelogramo.

3. Sejam  $X$  um espaço vetorial *real* e  $B \in \mathcal{S}(X)$ . Verifique a igualdade

$$B(x, y) + B(y, x) = \frac{1}{2}[q_B(x + y) - q_B(x - y)]. \quad (9.8)$$

(Essa identidade nos mostra que, se a forma  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  for *simétrica*, então o lado esquerdo da equação nos fornece uma expressão para  $B$  em termos de  $q$ .)

4. Seja  $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$B(x, y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2,$$

em que  $x = (x_1, x_2)$  e  $y = (y_1, y_2)$ .

- (a) Mostre que  $B$  é uma forma bilinear que não é simétrica. Obtenha a forma quadrática associada a  $B$ ;

- (b) Defina<sup>1</sup>

$$\bar{B}(x, y) = \frac{1}{4}[q_B(x + y) - q_B(x - y)].$$

Mostre que  $\bar{B}$  é uma forma bilinear simétrica, que não coincide com  $B$ , mas à qual também está associada a forma quadrática  $q_B$ .

5. Dê exemplo de uma forma bilinear à qual está associada uma forma quadrática identicamente nula.

---

<sup>1</sup>Compare com o Exercício 3.

6. Seja  $X$  um espaço vetorial complexo e  $B \in \mathcal{S}(X)$ . Mostre a identidade de polarização:

$$B(x, y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)] + \frac{i}{4}[q(x+iy) - q(x-iy)].$$

Se  $X$  for real e  $B$  for simétrica, então vale:

$$B(x, y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)].$$

(Note que as identidades de polarização dadas pelo Lema 8.9 são casos particulares das identidades anteriores.)

Assim, dada uma forma quadrática  $q$ , definida num espaço complexo  $X$ , sempre conseguimos recuperar a forma  $B \in \mathcal{S}(X)$  que a define. Se  $X$  for um espaço real, esse resultado só é válido se soubermos que  $B$  é uma forma simétrica. (Compare com o Exercício 4.)

7. Seja  $E$  um espaço euclidiano complexo. Mostre que uma forma sesquilinear  $B \in \mathcal{S}(E)$  é hermitiana se, e somente se, a forma quadrática  $q(x) = B(x, x)$  for real para todo  $x \in E$ .

8. Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  uma forma positiva semidefinida. Mostre que  $q_B(y) = 0$  se, e somente se,  $B(x, y) = 0$  para todo  $x \in X$ .

9. Sejam  $X$  um espaço vetorial e  $B$  uma forma positiva semidefinida. Mostre a desigualdade

$$|B(x, y)| \leq \sqrt{q_B(x)} \sqrt{q_B(y)},$$

que é uma generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

10. Seja  $B$  uma forma no espaço  $X$  e  $\{x_1, \dots, x_n\}$  uma base de  $X$ . Mostre que  $B$  está caracterizada pela matriz  $(a_{ij})$ , em que  $a_{ij} = B(x_i, x_j)$ . Expresse  $B(x, y)$  em termos dessa matriz.

11. Seja  $B$  uma forma no espaço euclidiano  $E$  e  $\mathcal{B}$  uma base de  $E$ . Se  $A$  for a matriz que representa  $B$  (nessa base), definimos o posto de  $B$  como sendo o posto de  $A$ .

(a) Mostre que o posto de uma forma está bem definido.



- (b) Seja  $B$  uma forma de posto 1 no espaço euclidiano real  $E$ . Mostre que existem funcionais lineares  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  tais que  $B(x, y) = f(x)g(y)$ .
12. Se a matriz que representa uma forma  $B : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  (com relação a uma base ortonormal) for invertível, mostre que, para todo  $x_0 \in E$ , existe  $y_0 \in E$  tal que  $B(x_0, y_0) \neq 0$ .
  13. Mostre o Teorema de Lagrange 9.13 para o caso de formas quadráticas hermitianas, adaptando a demonstração apresentada para o caso de formas quadráticas simétricas.
  14. Enuncie o Teorema de Lagrange (Teoremas 9.11 e 9.13) como um resultado sobre a diagonalização de uma forma sesquilinear auto-adjunta.
  15. Dada a forma quadrática  $ax^2 + bxy + cy^2$ , encontre a matriz simétrica que a representa.
  16. Considere a forma quadrática  $q : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  definida por

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3, x_4) = & x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3 \\ & + 4x_3^2 - 4x_2x_4 - x_3x_4 - x_4^2. \end{aligned}$$

Coloque  $q$  na forma diagonal.

**Definição 9.18** Duas matrizes  $A$  e  $B$  em  $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  são *congruentes* se existir uma matriz invertível  $M \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  tal que  $A = M^*BM$ .

17. Mostre que a congruência de matrizes é uma relação de equivalência em  $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ .
18. Sejam  $A, B \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  matrizes congruentes. Mostre que  $\det A > 0$  se, e somente se,  $\det B > 0$ .
19. Mostre que toda matriz simétrica (hermitiana) é congruente a uma matriz diagonal cujas entradas assumem apenas os valores  $-1, 0$  e  $1$ .
20. Mostre que uma forma quadrática simétrica (hermitiana)  $q(x) = \langle x, Ax \rangle$  é positiva definida no espaço euclidiano  $E$  se, e somente se, a matriz  $A_B$  que representa  $A$  numa base ortonormal  $B$  for positiva definida, tal qual definido no Exercício 19 do Capítulo 8. Verifique o mesmo resultado para uma forma negativa definida, positiva semidefinida e etc.

21. Mostre que uma forma quadrática hermitiana (simétrica)  $q(x) = \langle x, Ax \rangle$  é positiva definida se, e somente se,  $A$  for congruente a  $I$ .
22. Faça um diagrama para a relação  $M^*AM = D$  em termos de mudanças de bases.

**Definição 9.19** Seja  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ . Para cada  $r \leq n$ , a submatriz  $(a_{ij})$ ,  $1 \leq i, j \leq r \leq n$  é a **submatriz principal** de  $A$  de ordem  $r$ , denotada por  $A_r$ . O determinante de  $A_r$  é o **menor principal** de ordem  $r$ .

23. Mostre que, se todos os menores principais de uma matriz simétrica (hermitiana)  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  forem positivos, então a matriz  $A$  é positiva definida.
24. Mostre que todos os menores principais de uma matriz simétrica (hermitiana)  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$  positiva definida são positivos.
25. Mostre que uma matriz simétrica (hermitiana)  $A = (a_{ij})$  é negativa definida se, e somente se, seus menores principais tiverem sinais alternados, com  $\det A_1 = a_{11} < 0$ .
26. Seja  $X$  um espaço complexo. Além das formas sesquilineares definidas em  $E$ , são importantes as formas  $B : X \times X \rightarrow \mathbb{C}$  tais que para quaisquer  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$ ,

$$(i) \quad B(\alpha u_1 + u_2, v) = \alpha B(u_1, v) + B(u_2, v);$$

$$(ii) \quad B(u, \alpha v_1 + v_2) = \alpha B(u, v_1) + B(u, v_2).$$

Essas são as formas *bilineares* definidas em  $X$ . Denotaremos por  $\mathcal{B}(X)$  o conjunto das formas bilineares<sup>2</sup> em  $X$ . Uma forma bilinear é *simétrica*, se  $B(u, v) = B(v, u)$ , e *anti-simétrica*, se  $B(u, v) = -B(v, u)$  para quaisquer  $u, v \in X$ .

Verifique as seguintes afirmações:

- (a) Seja  $\mathcal{B} = \{x_1, \dots, x_n\}$  uma base de  $X$ . Então existe um isomorfismo entre o espaço  $\mathcal{B}(X)$  e o espaço  $\mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ .

<sup>2</sup>Como a estrutura bilinear não está em acordo com uma estrutura de produto interno num espaço complexo, não consideramos aqui espaços euclidianos.



- (b) Seja  $B$  uma base de  $X$  e  $A$  a matriz que representa  $B$  nessa base. A forma  $B$  é simétrica se, e somente se, a matriz  $A$  for simétrica. A forma  $B$  é anti-simétrica se, e somente se,  $A$  for anti-simétrica.
- (c) O espaço  $\mathcal{B}(X)$  é a soma direta dos subespaços das formas simétricas e anti-simétricas.
- (d) Sejam  $C$  uma outra base de  $X$  e  $P = P_C^B$ . Se  $A$  representar a forma  $B$  na base  $B$  e  $C$  representar  $B$  na base  $C$ , então  $C = P^t A P$ .
- (e) Está bem definido o posto de uma forma  $B$  como o posto de uma matriz que representa  $B$ . Uma forma bilinear  $B$  é *não-degenerada* se o seu posto for igual à  $\dim X$ .
- (f) Se  $B$  for uma forma bilinear simétrica, definindo  $q(v) = B(v, v)$ , vale

$$B(u, v) = \frac{1}{4}[q(u+v) - q(u-v)], \quad (9.9)$$

chamada *identidade de polarização*.

- (g) Se  $B$  for uma forma bilinear simétrica, existe uma base de  $X$  na qual  $B$  é representada por uma matriz diagonal (compare com o Exercício 14). Em particular, dada uma matriz simétrica  $A \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$ , existe uma matriz invertível  $P \in \mathbb{M}_{n \times n}(\mathbb{C})$  tal que  $P^t A P$  é diagonal.
- (h) Seja  $B$  uma forma bilinear não-degenerada. Mostre que a cada operador  $T : X \rightarrow X$  está associado um único operador  $T'$  tal que  $B(Tx, y) = B(x, T'y)$ . Vale:  $(T_1 T_2)' = T_2' T_1'$ ;  $(cT_1 + T_2)' = cT_1' + T_2'$ ;  $(T')' = T$ .
- (i) Seja  $B$  uma forma bilinear anti-simétrica. Então o posto de  $B$  é par e, nesse caso,  $B$  pode ser representada por uma matriz diagonal em blocos

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{J} \\ -\mathcal{J} & 0 \end{pmatrix},$$

em que  $\mathcal{J}$  é a matriz quadrada

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- (j) Enuncie e demonstre um resultado análogo ao do item (h) para uma forma bilinear anti-simétrica.