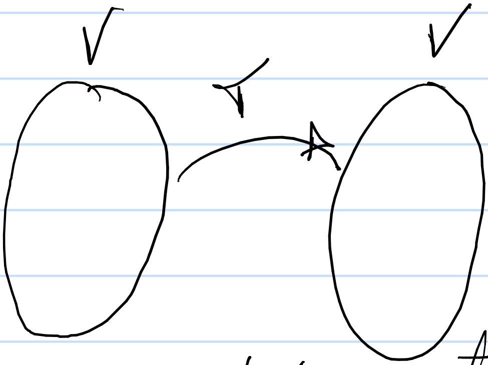
2) Seja $T: V \to V$ um operador linear. Mostre que se todo vetor de V for autovetor de T, então existe um $\lambda \in K$ tal que $T(v) = \lambda v$, $\forall v \in V$.



Temos que V é composto por vários vetores dado por:

$V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$, os vetores de V são l.i, então V é uma base.
Então V é uma base para um subespaço, e a partir dessa base é possível gerar outros vetores.
Assim ao aplicar uma transformação T sobre os vetores da base V, geramos outro conjunto de vetores, também l.i sobre esta transformação.

Com isso é possível gerar diversos subespaço, onde cada subespaço é uma combinação entre V e $T(v)$, que os diferencia em modulo.

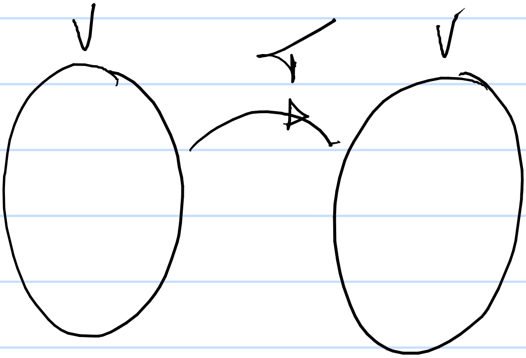
Ou seja: $T(v) = \lambda v$, para $v_i \in V$

onde $i = 1, \dots, n$.

Assim cada $v \in V$, tem seu correspondente em $T(v) = \lambda v$, com $\lambda \in \mathbb{R}$.

Assim a partir de uma base V, pode-se gerar diversas bases.

3) Seja $T: V \to V$ operador e V espaço sobre K. Mostre que se p_T tiver todas as suas raízes em K, e se elas forem simples, isto é, com multiplicidade algebrica 1, então T é diagonalizável.



• Espaço K

Temos por hipótese que p_T possui todas as suas raízes em K e com multiplicidade 1, ou seja elas não se repitem.

Desta forma temos que um dado polinômio $p_T(x) = x^N + x^{N-1} + \dots + x + 1$, então temos que as soluções para este polinômio (as raízes), que são seus autovalores são únicas e não nulas das por: $\lambda_T = \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$.

Assim: $(x-\lambda_T)\cdot(x-\lambda_{T-1}), \dots, (x-\lambda_1) = p_T(x) = x^N + \dots + x + 1$.

Então temos que $M_a = M_g$, ou seja,

a multiplicidade algébrica é igual a multiplicidade geométrica, que satisfaz a primeira condição.

Temos também que a $\dim_K V$ é n, possui possui n vetores l.i. O auto espaço gerado $Aut(T)(\lambda_i)$ formado pelos autovetores com $i = 1, \ldots, n$, possui dimensão dada por:

$$\sum_{i=1}^{t} \dim_K Aut_T(\lambda_i) = n$$

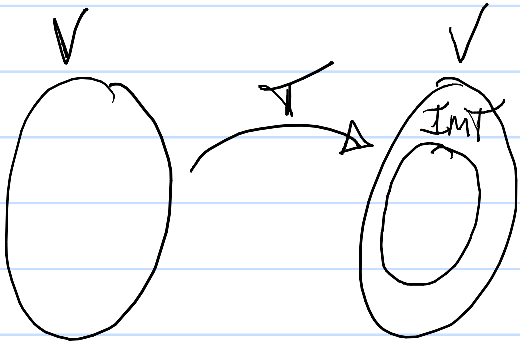
Então $\dim_K V = \sum_{i=1}^{t} \dim_K Aut_T(\lambda_i)$

Com isso, temos uma matriz diagonal D dados por seus autovalores na diagonal principal. Cuja a dimensão é n e formada por:

$$D = \text{diagonal}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

4) Seja $T: V \to V$ um operador linear. Mostre que se $\dim_K \operatorname{Im} T = m$, então T tem no máximo $m+1$ autovalores.



$\dim_K \operatorname{Im} T = m$

Assim como $T(v) = \lambda v$, e λv são os autovetores que compoem a $\operatorname{Im} T$. Com isso temos que a $\operatorname{Im} T$ é formada por autovetores l.i., assim eles são únicos:

$$\lambda_1 v_1 \neq \lambda_2 v_2 \neq \dots \neq \lambda_n v_n, \text{ e}$$

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n = 0$$

Assim como $T(v) = \lambda v$, temos que a $\dim_K \operatorname{Im} T = m$, ou seja m autovetores e consequentemente m autovalores.

Contudo a base do domínio será formada por $n+1$ vetores, isto porque

temos uma injeção para a imagem é um vetor da $\operatorname{Im} T$ poderá ser Nulo.
Logo para uma $\dim_K \operatorname{Im} T = n$,

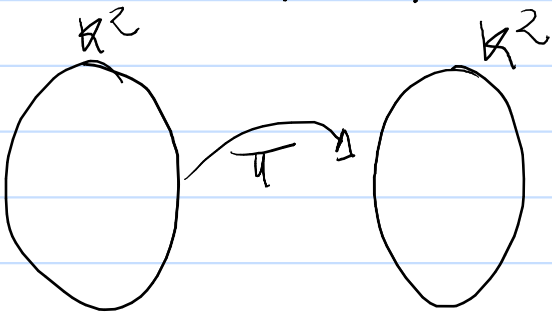
temos no máximo $(n+1)$ autovalores possíveis.

5) Seja $T: K^2 \to K^2$ tal que $T \circ T = 0$.
Mostre que:

a) $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Nuc} T$
b) Se $T \neq 0$, então existe uma base B de K^2 tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$T \circ T = 0$



a) $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Nuc} T$

Temos que $T \circ T = 0$, ou seja:

$T(v) = \lambda v$ e $T(\lambda v) = v$

Então $T \circ T = 0 = Id_V = 0$

Como a transformação T leva para a $\operatorname{Im} T$ e composta T leva para o domínio. Temos:

$T(T(v)) = T(\lambda v) = v = T \circ T$

Então $T(T(0)) = T(0) = 0$

Assim por definição o Nucleo de V, gera elementos nulo na Imagem.
Logo como uma transformação de um elemento nulo gera outro elemento nulo. Então $\operatorname{Im} T = \operatorname{Nuc} T$ e este Nucleo possui somente o elemento nulo como elemento.

b) Se $T \neq 0$, então existe uma base B de K^2 tal que:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

O polinômio característico é dado por:

$$pt(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1-x & 0 \end{pmatrix}, \quad \det(pr(x)) = 0$$

Com isso a matriz pode ter mais do que a solução nula. Assim T é diferente de zero e pode gerar mais do que elemento nulo na Im T.

6) Mostre que se $A \in M_2(\mathbb{C})$, então A é semelhante sobre $\mathbb{C}$ a uma matriz de um dos seguintes tipos:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ com } a, b \in \mathbb{C} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ com } a \in \mathbb{C}$$

Corolário: Dado um operador linear $T: V \to V$ com matriz $[T]_{B_1}$ e $[T]_{B_2}$, ou seja no mesmo espaço vetorial, mas com bases diferentes as matrizes são semelhantes, não iguais.

Onde $\beta_1 \neq \beta_2$, bases distintas de V.

Assim existe M^{-1} tal que:

$$[T]_{\beta_1} = M^{-1} [T]_{\beta_2} M$$

Ou seja: $[T]_{B_1} \sim [T]_{\beta_2}$, semelhantes.

Proposição: Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.

Dada uma matriz $M_2(\mathbb{C})$:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{C}$$

$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix}$, $pT(i) = \begin{bmatrix} a-i & b \\ 0 & b-i \end{bmatrix}$

$\det = [(a-i).(b-i)] - 0 = ab - ai - bi + i^2$

$\det = ab - ai - bi - 1 = ab - i(a+b) - 1$

$pt(i) = ab - 1 - i(a+b)$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$, $pt(i) = \begin{bmatrix} a-i & 0 \\ 0 & b-i \end{bmatrix} = [(a-i).(b-i)]$

$\det = ab - ai - bi + i^2 = ab - 1 - i(a+b)$

pela proposição $A \sim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $p(t)(i) = \begin{bmatrix} a-i & 0 \\ 1 & -i \end{bmatrix} = [(a-i).(-i)] - 0$

$pt(i) = -a + i^2 = -a - 1 \neq pt(A)$

$A \nsim \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

7) Seja A matriz 2×2 simétrica em $M_2(\mathbb{R})$ (isto é, tal que $A^t = A$). Mostre que A é diagonalizável.

Matriz simétrica é dada por $A^t = A$, e $a_{ij} = a_{ji}$ $\forall i,j$

Dada uma matriz qualquer A,

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}, \quad A^t = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

Para ser diagonalizável: $Ma = Mg$, $p_T(\lambda)$ deve possuir todas as raízes em K, ou $\dim_K V = \sum_{i=1}^{t} \dim_K Aut_T(\lambda_i)$

Como determinante de A e A^t são iguais podemos dizer que os polinômios característicos são iguais, e com isso possuem as mesmas raízes, e os mesmos autovetores. Formando assim os mesmos autoespaços.

Isto porque entre A e A^T, temos que: $a_{ij} \neq a_{ji}$, mas os elementos da diagonal inversa são iguais logo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} a_{11} \neq a_{22} \\ a_{12} = a_{21} \end{matrix}$$

Então tanto p/ A como A^T, temos:

$$p(t)(\lambda) = [(a_{11}-\lambda).(a_{22}-\lambda)] - a_{12} \times a_{21}$$

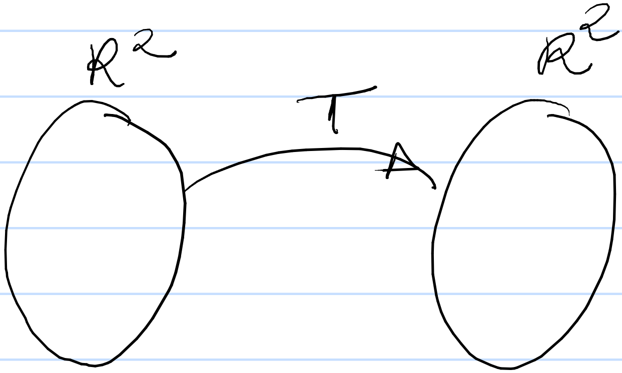
$$pt(\lambda) = [a_{11}.a_{22} - a_{11}\lambda - a_{22}\lambda + \lambda^2] - a_{12}^2$$

$$pt(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(a_{11}+a_{22}) + a_{11}.a_{22} - a_{12}^2$$

Temos um polinomio do 2º grau, com pelo menos 2 raizes, logo pelo menos dois autovetores, e $Ma = Mg = 2$

logo é diagonalizável.

9) Seja $T: R^2 \to R^2$ uma transformação linear que tem como autovetores (3,1) e (-2,1) associados aos autovalores -2, 3, respectivamente. Calcule $T(x,y)$.



① Dada uma matriz: apartir de $[[T] - \lambda I] = A$

$$A = \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \Rightarrow p/ \lambda = -2, \text{ temos:}$$

$$\begin{bmatrix} a+2 & b \\ c & d+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(a+2) + by = 0 \\ cx + (d+2)y = 0 \end{cases} \to \text{autovetor } (3,1)$$

$$\begin{cases} 3(a+2) + b = 0 \\ 3c + (d+2) = 0 \end{cases} \to \begin{cases} 3a + 6 + b = 0 \\ 3c + d + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a+6+b=0 \\ 3c+d+2=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 3a+b=-6 \\ 3c+d=-2 \end{cases}$$

O mesmo vale p/ $\lambda=3$, autovetor $=(-2,1)$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} \rightarrow \lambda=3 \rightarrow \begin{bmatrix} a-3 & b \\ c & d-3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a-3 & b \\ c & d-3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(a-3)+by=0 \\ cx+(d-3)y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax-3x+by=0 \\ cx+dy-3y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2a+6+b=0 \\ -2c+d-3=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2a+b=-6 \\ -2c+d=3 \end{cases}$$

Bom eu errei porque, dado um operador linear $T: V \rightarrow V$, possui o mesmo polinômio característico independente da escolha da base para V.

Então escolhe-se a mais fácil, a base canônica.

$B = \{ e_1 = (1,0) , e_2 = (0,1) \} \in \mathbb{R}^2$

Temos que:

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & 0 \\ 0 & b-\lambda \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda = -2, \begin{bmatrix} a+2 & 0 \\ 0 & b+2 \end{bmatrix}$$

$$p_T(\lambda) = (a+2) \cdot (b+2) = ab + 2b + 2a + 4$$

Agora: $\begin{bmatrix} a+2 & 0 \\ 0 & b+2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} x(a+2) = 0 \\ y(b+2) = 0 \end{cases}, \text{ autovetor } (3,1)$$

$$\begin{cases} 3(a+2) = 0 \\ 1(b+2) = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3a + 6 = 0 \\ b + 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3a = -6 \\ b = -2 \end{cases}$$

$$3a = -6 \longrightarrow a = -2, \text{ autovetor: } (-2,1)$$

$$\begin{bmatrix} a-3 & 0 \\ 0 & b-3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{cases} x(a-3) = 0 \\ y(b-3) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(a-3)=0 \\ y(b-3)=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax-3x=0 \\ by-3y=0 \end{cases}, \quad (-2,1)$$

$$\begin{cases} -2a-3=0 \rightarrow -2a=3 \rightarrow a=-3/2 \\ b-3=0 \rightarrow b=3 \end{cases}$$

Temos que p/ $\lambda=-2$, os valores são $a=-2$, $b=-2$, e $\lambda=3$ os valores são $a=-3/2$, $b=3$.

$T(x,y)=(-2x,-2y)$, $T(x,y)=(-\frac{3}{2}x, 3y)$

10) Ache os autovalores de $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e de A^{-1}.

Dada a matriz $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0-\lambda & 2 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$pt(\lambda)=[-\lambda(1-\lambda)-2]=[-\lambda+\lambda^2-2]$

$p(t)(\lambda)=\lambda^2-\lambda-2=0$

$\Delta=1+8=9$

$\lambda=\dfrac{1\pm3}{2}$ $\rightarrow \lambda'=2$, $\rightarrow \lambda''=-1$

A matriz D é formada pelos autovalores de A, logo:

$M^{-1}[A].M = D$ e M é a matriz formada pelos autovetores

Se A é invertível: $\det(A^{-1}) \cdot \det(A) = 1$

$\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$, $\det(A) = -2$

$\det(A^{-1}) = -\dfrac{1}{2}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} - \lambda & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 - \lambda \end{bmatrix} , \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right) \cdot (-\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$pt(\lambda) = \left(-\frac{1}{2} - \lambda\right)(-\lambda) - \frac{1}{2}$$

$$pt(\lambda) = \frac{\lambda}{2} + \lambda^2 - \frac{1}{2} = \frac{\lambda + 2\lambda^2 - 1}{2}$$

$$\frac{2\lambda^2 + \lambda - 1}{2} = 0 \Rightarrow 2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$$

$$\Delta = 1 + 4 \cdot 2 = 9, \quad \lambda = \frac{-1 \pm 3}{2} \rightarrow \lambda' = -2, \quad \lambda'' = 1$$

Autovalores p/ A: $\lambda = 2, -1$

Autovalores p/ A^{-1}: $\lambda = -2, 1$

$$\lambda(A) = -1(\lambda(A^{-1}) = (-1)(-2, 1) = (2, -1)$$

18) Determine ~~todo~~ os valores de $a, b, c \in \mathbb{C}$ para os quais a matriz abaixo seja diagonalizável:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

, temos uma matriz triangular superior, logo o determinante é o produto da diagonal principal.

det: $\underline{ac} \neq 0$

Temos que o det: $ac \neq 0$, p/ inversa

Para ser di diagonal: $M_a = M_g$, $pt(\lambda)$

deve possuir todas as raízes,

Então: $\begin{bmatrix} a-\lambda & b & 1 \\ 0 & c-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{bmatrix}$

$pt(\lambda) = (a-\lambda).(c-\lambda).(1-\lambda) = 0.$,

já temos uma raiz, $\lambda = 1.$,

Temos agora: $(a-\lambda).(c-\lambda) = 0$, $a, c \in \mathbb{C}$

as outras seriam: $\lambda = a$, e $\lambda = c$.

Tomando $\lambda = 1.$, temos:

$$\begin{bmatrix} a-1 & b & 1 \\ 0 & c-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(a-1) + by + z = 0 \\ y(c-1) + 0z = 0 \\ 0z = 0 \to z = 0 \end{cases} \to \begin{cases} ax - x + by + z = 0 \\ cy - c = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax - x + by + z = 0 \\ cy - c = 0 \rightarrow cy = c \rightarrow y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

$ax - x + by + z = 0$ $\rightarrow$ $x = b + ax$

$ax - x + b + 0 = 0$ $\quad x(a-1) = b$

$ax - x + b = 0$ $\quad x = \dfrac{b}{(a-1)}$

$$V_1 = (b + ax, 1, 0) = \left(\frac{b}{a-1}, 1, 0\right)$$

Para $\lambda = c$.

$$\begin{bmatrix} a-c & b & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x(a-c) + by + z = 0 \\ 0 + 0 + 0 = 0 \\ (1-c) z = 0 \end{cases}$$ $\rightarrow$ $z = cz$

$c = 1$

$ax - cx + by + z = 0$ $\quad V_2 = (ax + by + z, 0, cz)$

$ax - x + by + z = 0$

$x = ax + by + z$

Para $\lambda = a$:

$$\begin{bmatrix} 0 & b & 1 \\ 0 & c-a & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} by + z = 0 \\ y(c-a) = 0 \\ z(1-a) = 0 \end{cases} \rightarrow z = za$$

$a = 1$

$y(c-a) = 0 \rightarrow cy - ay = 0 \rightarrow cy = ay$

$c = a$

$c = 1$

$by + z = 0$

$by = -z \rightarrow y = -z/b$

$by = za$

$V_3 = (0, -z/b, z)$

$V_1 \neq V_2 \neq V_3$, (V_1, V_2, V_3) deve ser l.i.

$b + ax \neq ax + by + z \neq 0$

$1 \neq 0 \neq -z/b$

$0 \neq cz \neq z$