Dados A e $B \in M_{N\times N}(K)$ vale que os autovalores de AB e BA são iguais.

Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico, logo os mesmos auto-valores.

Seja $P_{AB}(\lambda) = \det(AB - \lambda Id)$ e seja $P_{BA}(\lambda) = \det(BA - \lambda Id)$, com $AB \sim BA$

Para AB e BA serem semelhantes, deve possuir:

i) $\det AB = \det BA$

ii) AB e BA tem o mesmo polinômio característico

Se $\det AB = \det BA \longrightarrow P_{AB}(\lambda) = P_{BA}(\lambda)$

Então existe M, invertível tal que $AB = M^{-1} BA . M$.

$A = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_4 \end{bmatrix}$, $AB = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_4 b_4 \end{bmatrix}$

$BA = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & 0 \\ 0 & a_4 b_4 \end{bmatrix}$ $AB = BA$

Portanto tem $\det(AB) = \det(BA)$

$$\begin{aligned} P_{AB}(\lambda) = \det(AB - \lambda Id) = P_{BA}(\lambda) &= \det(BA - \lambda Id) \\ &= \det(M^{-1} BA . M - \lambda Id) \\ &= \det(M^{-1} BA - M^{-1} M) \\ &= \det(M^{-1}(BA - \lambda Id) M) \\ &= \cancel{\det(M^{-1})} . \det(B - \lambda Id) . \cancel{\det(M)} \\ &= \det(BA - \lambda Id) \end{aligned}$$

Tem o mesmo polinômio característico e consequentemente os mesmos autovalores.

Mostrar que $p_T(T) = 0$

Proposição: Seja $T: V \to V$ um operador linear, e V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então os autovalores de T são as raízes de seu polinômio característico.

Demo: Suponha existir λ e v tais que:

$$T(v) = \lambda v \to [T]v - \lambda v = 0 \to$$
$$([T] - \lambda . Id)v = 0$$

Como $([T] - \lambda Id)$ é uma transformação linear, porém $v \neq 0$ é tal que $v \in Nuc$.

$v \in Nuc([T] - \lambda Id)$ e como $Nuc([T] - \lambda Id) \neq \{0\}$, então:

$$\det([T] - \lambda Id) = 0$$, para ter infinita soluções!

e $p_T(\lambda) = \det([T] - \lambda Id) = 0$

Assim os autovalores são raízes do polinômio característicos e como os autovalores são gerados a partir do operador T, temos que:

$$p_T(T) = 0$$