Subespaços T-invariantes

Revisão: Teorema da existência, invariância e do completamento

1) Teorema da Existência: Se V é um espaço vetorial finitamente gerado, então V admite base.

2) Teorema da invariância: A dimensão de um espaço vetorial independe da escolha da base. Equivalentemente qualquer base possui o mesmo número de elementos.

3) Teorema do completamento:

① Dado um subespaço W de V, com $\dim W < \dim V$. Se β é uma base de W, com $\beta = \{w_1, \dots, w_k\}$ é sempre possível completar uma base β a uma Base de V. Ou seja, é sempre possível obter $\beta V = \{w_1, \dots, w_k, v_1, \dots, v_n\}$ de forma que βV seja uma base de V.

Então: Todo espaço vetorial finitamente gerado admite base, e todas as base tem o mesmo número de elementos e com isso se conclui que a dimensão é invariante. Finalmente é possível completar uma base p/ um espaço vetorial maior, pelo teorema do completamento.

Dimensões dos principais tipos de Espaço vetorial:

Espaço	Dimensão	Ex. de base (Canônica)
R^N	$\dim R^N = N$	$B: \{(1, \dots), \dots, (1, \dots), (0, \dots, 1)\}$
$M_N(R)$	$\dim M_N(\mathbb{R}) = N^2$	$\beta = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \vdots & \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$
$P_N(\mathbb{R})$	$\dim P_N(\mathbb{R}) = N+1$	$\beta = \{1, t, \dots, t^N\}$
R	$\dim R = 1$	$B = \{1\}$
$\mathbb{C}$	$\dim \mathbb{C} = 2$	$B = \{1, i\}$

Quando não estamos trabalhando com $\mathbb{R}$ espaços vetoriais podemos indicar o corpo de escalares no cálculo da dimensão.

Ex: $\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C} = 1$, mas $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$

$\hookrightarrow$ Base $= \{1\}$

$\hookrightarrow$ Base $= \{1, i\}$

$\dim_{\mathbb{R}} M_n(\mathbb{C}) = 2n^2$

$\hookrightarrow$ Base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & & & 0 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & i \end{pmatrix} \right\}$

$\dim_{\mathbb{C}} M_n(\mathbb{C}) = n^2$

$\hookrightarrow B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \cdots 1 \end{pmatrix}, \dots \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$

Exemplos: Quais subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ são L.I!

a) $\{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (2,3,5)\}$ é L.D, isto porque qualquer subconjunto de $\mathbb{R}^3$ com mais de 3 vetores é L.D.

$\dim \mathbb{R}^3 = 3$, não há casos com 4 vetores.

b) $\{(1,1,1), (1,0,1), (1,0,-2)\}$

Seja $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\alpha_1(1,1,1) + \alpha_2(1,0,1) + \alpha_3(1,0,-2) = 0$$
$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \alpha_1 + 0 + 0, \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3) = 0$$

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Qualquer conjunto com $(0,0,0)$ é L.D.

Temos que $\alpha_1 = 0$, então:

$$\begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \end{cases} \ominus \longrightarrow \begin{cases} \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 0\alpha_2 - 3\alpha_3 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 + \alpha_3 = 0$$
$$\alpha_2 + 0 = 0$$
$$\alpha_2 = 0$$

Portanto $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, somente a solução trivial. É L.I.

Sistema Homogêneo; nunca são impossíveis.

- Sistema possível e determinado: uma única solução. Det ≠ 0
- sistema possível indeterminado: infinita soluções = Det = 0
- sistema indeterminado: sem solução Det = 0

Trivial

Sistema Homogeneo: . SPD - det ≠ 0

. SPI - det = 0 ∞ sol

Sempre (0,0,0) é a solução e para ser L.I deve existir somente a solução trivial.

- SPD - det ≠ 0, solução trivial
- SPI - det = 0, infinita soluções

Ao formar uma matriz M(K), se determinante for ≠ 0, vetores L.I, se determinante igual a zero é L.D.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$, vetores em colunas

$\begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{matrix}$

determinante: $det = [(0 + 0\,1) - (-2 + 0 + 0)]$

$det = 1 + 2 = 3 \neq 0$

Usando Laplace: 2ª linha.

$$det = -1^{(2,1)} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = -1 \cdot (-2 - 1) = 3 \neq 0$$

Temos vetores em L.I

Ex: Mostrar os polinômios: 1, $1+t$, $1-t^2$, e $1 - t - t^2 - t^3$ formam uma base para $P_3(\mathbb{R})$.

Sejam $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ e $\alpha_4 \in \mathbb{R}$, tais que:

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2(\cancel{1} + t) + \alpha_3(1 - t^2) + \alpha_4(1 - t - t^2 - t^3) = 0$$

$1(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)+t(\alpha_2-\alpha_4)+t^2(-\alpha_3-\alpha_4)+t^3(-\alpha_4)=0$

$$\begin{cases}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4=0\\ \alpha_2-\alpha_4=0\\ -\alpha_3-\alpha_4=0\\ -\alpha_4=0\end{cases}$$

$\alpha_4=0$

$\alpha_3=0$

$\alpha_2=0$

$\alpha_1=0$

Os vetores são L.I

Se $\beta=\{1, 1+t, 1-t^2, 1-t-t^2-t^3\}$, é l.i. Assim a $\dim[\beta]=4=\dim P_3(\mathbb{R})$, de que que $[\beta=P_3(\mathbb{R})]$, então β é gerador e como é gerador e l.i. Temos que β é base.

- Determine a base e a dimensão do espaço de soluções do sistema homogêneo:

$$\begin{cases}x+2y-z=0\\ x-y+z=0\\ 2x+y=0\end{cases}$$

Temos que o espaço de solução é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, portanto é um espaço vetorial.

Precisamos descobrir um conjunto de gerador, ou seja a base e a dimensão.

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases} \quad \begin{aligned} &\bullet L_2 = L_2 - L_1 \\ &\bullet L_3 = L_3 - 2L_1 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 0 - 3y + 2z = 0 \\ 0 - 3y - 2z = 0 \end{cases} \quad L_3 = L_3 - L_2$$

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 0 - 3y + 2z = 0 \\ 0 + 0 + 0z = 0 \end{cases}$$

$\bullet z = z$

$y = \frac{2}{3} z$

$x + \frac{4z}{3} - z = 0$

$x + z/3 = 0$

$x = -z/3$

Solução: $\{(-z/3, \frac{2}{3} z, z)\}$

Sol: $\{z(-1/3, 2/3, 1)\}$

Como: $\Delta = \{(-z/3, \frac{2}{3}z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$

Um vetor v desse espaço vetorial é da forma:

$$v = (-z/3, \frac{2}{3}z, z) \text{ para algum } z \in \mathbb{R}$$

$$v = z(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1), \forall z \in \mathbb{R}$$

$$v = \frac{z}{3}(-1, 2, 3) \ \forall z \in \mathbb{R}.$$

Temos que um vetor qualquer é um multiplo de $(-1,2,3)$, se V é o espaço de soluções então $V = [(-1,2,3)]$.

logo $\beta = \{(-1,2,3)\}$ é gerador.

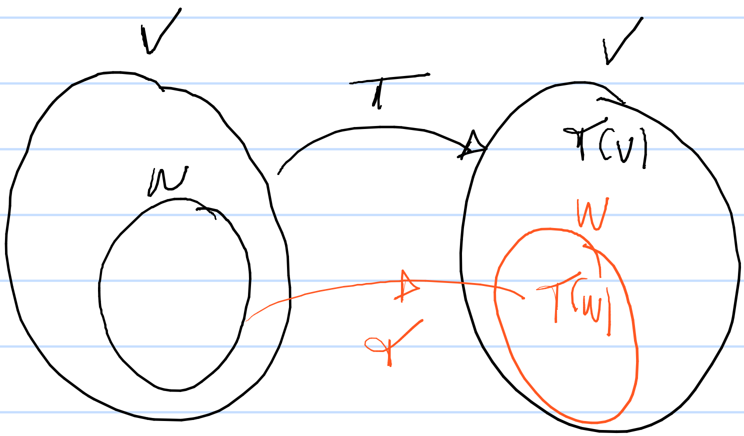
Obs: Se $\Delta = \{u\} \in V$ e $u \neq \vec{0}$ então Δ é li.

Demo: Considere $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha u = 0$.
Como $u \neq 0 \rightarrow \alpha = 0 \rightarrow \Delta$ é li.

Como β possui apenas um único vetor não nulo, β é li, logo β é Base.
$\dim_{\mathbb{R}} V = 1$

Voltando ao conteúdo do livro:

① Dado um operador linear $T: V \to V$, por vezes é conveniente considerarmos a sua restrição a algum subespaço dado W de V. No entanto, nem sempre a imagem desta restrição está contida no próprio subespaço.



① Definição: Seja $T: V \to V$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial e seja $W \subseteq V$ um subespaço de V. Dizemos que W é um subespaço T-invariante de V se $T(w) \in W$ para todo $w \in W$.

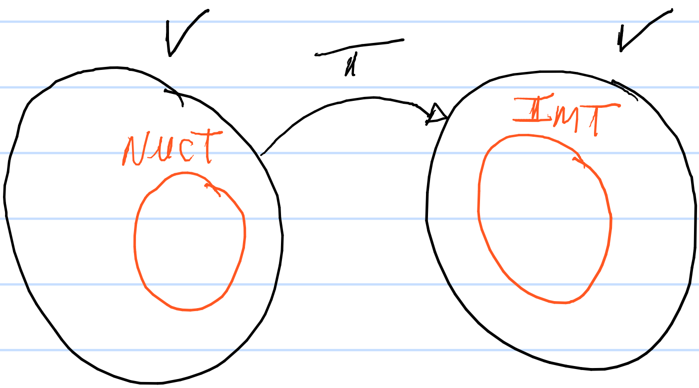
Observações:

Seja $T: V \longrightarrow V$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial.

a) Os subespaços $Nuc\,T$ e $Im\,T$ são T-invariantes

b) Se λ for um autovalor de T, então $Aut_T(\lambda)$ é um subespaço T-invariante de V. De fato, se $v \in Aut_T(\lambda)$, então:

$$T(v) = \lambda v \in Aut_T(\lambda)$$

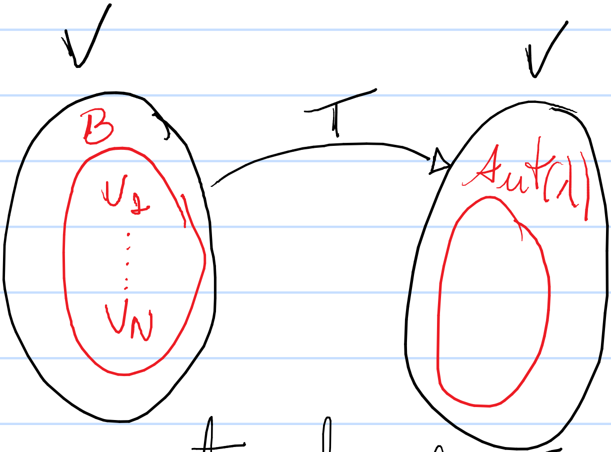


$Nuc\,T \subseteq V$ $\qquad$ $Im\,T \subseteq V$

. $T(Nuc) \subseteq Im\,T \subseteq V$

. $Nuc\,T \subseteq V$

Então são T-invariantes



• λ é um autovalor de T

$Aut_T(\lambda)$ é um subespaço T-invariante de V.

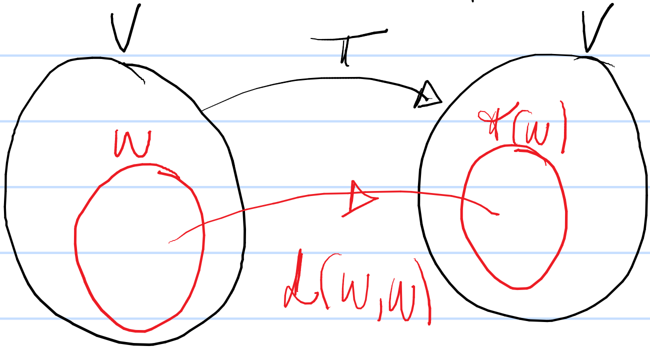
$$B \xrightarrow{T} T(v) = \lambda v$$

$B \subset V$ $\qquad T(v) \in V,\ T(v) \in Aut_T(\lambda)$

$$Aut_T(\lambda) \subset V$$

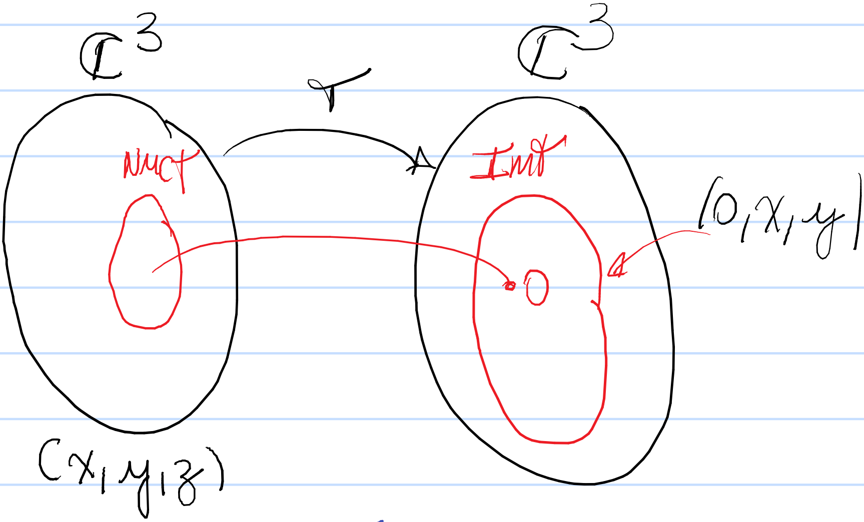
Temos que $T(v) \subseteq V$.

c) Se W é um subespaço T-invariante então a restrição de T a W é um operador linear em $\mathcal{L}(W,W)$.



Exemplos:

a) Seja $T: \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ definida por $T(x, y, z) = (0, x, y)$



Se $W = [e_1, e_2] \xrightarrow{T} T(W) = [e_2, e_3]$

Assim W não é um subespaço T-invariante de $\mathbb{C}^3$.

$e_1 = (1, 0, 0) \longrightarrow T(e_1) = (0, 1, 0) = e_2$

$e_2 = (0, 1, 0) \longrightarrow T(e_2) = (0, 0, 1) = e_3 \notin W$

Isto porque $e_1 \neq e_2$, e $e_2 \neq e_3$

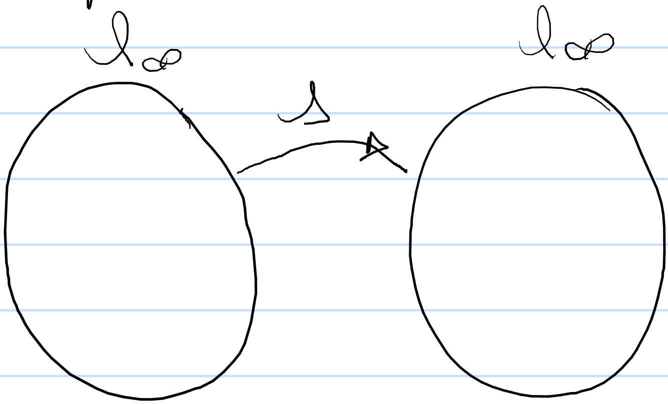
Se $W' = [e_2, e_3] \xrightarrow{T} T(W') = [e_3] \subseteq W'$

$e_2(0, 1, 0) \xrightarrow{T} T(e_2) = (0, 0, 1) = e_3$

$e_3(0, 0, 1) \xrightarrow{T} T(e_3) = (0, 0, 0) = \text{Nulo}$

Temos que $[e_2, e_3] \in W'$, $T(W') = [e_3]$ $\in W'$. Então $[e_3] \subseteq W'$ e segue que W' é um subespaço T-invariante de V.

b) Seja $S: l_\infty \to l_\infty$ o operador linear dado por:



146

$$S((x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)) = (0, x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots)$$

para todo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_\infty$.

2.1.4) d) Considere $X = \mathbb{N}$ e $K = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. O subconjunto de $K^{\mathbb{N}}$:

$$l_\infty = \{ x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ é limitada} \}$$

É um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$ com as operações definidas. Lembramos que uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada se existir $M>0$ tal que $|x|\leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$.

Para cada $N\geq 1$, considere $W_N=[e_1,\dots,e_N]$. Lembramos que o elemento e_l é a sequência que tem 1 na posição l e 0 nas demais posições.

$e_1 = 10000\dots$
$e_2 = 01000\dots$
$\vdots$
$e_l = 00000\dots 1$

W_N é um subespaço, é uma base.

Mas não é Δ-invariante de V, uma vez que $\Delta(W_N)=[e_2,e_3,\dots,e_{N+1}]\not\subset W_N$

Temos que $e_{N+1}\notin W_N$.

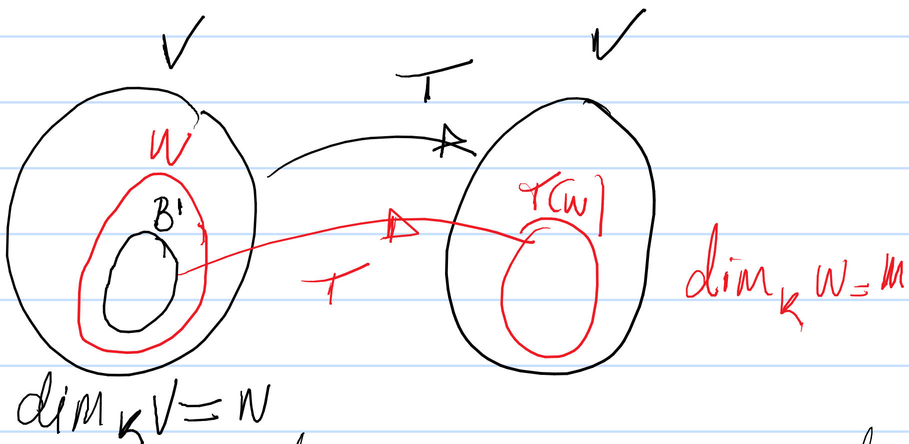
Considere agora o subespaço W de l_∞ formado por todas as sequências

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ tais que x_i é diferente de zero para no máximo um número finito de termos.

Como x_i é diferente de zero, temos que $\Delta(W)$ contém elementos diferentes de zero. Com isso W é um subespaço Δ-invariante de l_∞.

$$W = [x_i] \xrightarrow{\Delta} \Delta(W) = [x_i] \subset W$$

Sejam $T: V \to V$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial de dimensão $n \geq 1$.



$W \subseteq V$ um subespaço T-invariante de dimensão m. Com $1 \leq m \leq n$

Considere B' uma base de W; $B' \subset W$ e estenda-a a uma base B de V.

- $B' \subset W$ e $W \subset V \rightarrow B' \subset V$
- $B \subset V$ e B' é uma parte de B

Como observado anteriormente, a restrição de T a W, isto é, a função:

$$T' : W \rightarrow W$$

Dada por $T'(w) = T(w)$, $\forall w \in W$ é um operador linear. Daí, a matriz

$[T]_B$ é dada por: $[T]_B = \begin{bmatrix} [T']_{B'} & A \\ 0 & B \end{bmatrix}$

Onde 0 indica a matriz nula em:

$M_{(n-m) \times m}(K)$, $A \in M_{m \times (n-m)}(K)$ e $B \in$

$M_{(n-m) \times (n-m)}(K)$

Pode-se escrever o espaço vetorial como a soma direta de dois (ou mais) subespaços T-invariantes e, como neste caso a restrição de T a cada um destes subespaços é um operador linear, pode-se descrever a matriz de T usando os blocos das matrizes destas restrições.

Espaço Vetorial V = Soma direta de dois ou mais subespaços T-invariantes

$$V = T^{I}(W) + T^{II}(W) + \dots + T^{N}(W)$$

Sendo mais específico, seja: $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_r$ e suponha que cada subespaço W_i seja T-invariante.
Como a soma $W_1 + \dots + W_r$ é direta, segue-se que $B = B_1 \cup \dots \cup B_r$ é uma base de V.

$B_1 \subset W_1, B_2 \subset W_2, \dots, B_r \subset W_r$

Exercício 2.6.8(S)

Seja $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_t$ e sejam $B_i \subseteq W_i$, para cada $i = 1, \dots, t$. Considere $B = B_1 \cup \dots \cup B_t$.

$B_1 \subset W_1, B_2 \subset W_2, \dots, B_t \subset W_t$

a) Mostre que se B_i for l.i para cada $i = 1, \dots, t$ então B é l.i

Como $B_i \subseteq W_i$, para cada $i = 1, \dots, t$, temos

$B_1 \subset W_1$, $B_2 \subset W_2$, $\vdots$, $B_t \subset W_t$: Como B_1 é uma base de W_1, B_2 é uma base de W_2 e assim até B_t sendo uma base de W_t.

Por definição uma base é formada por vetores l.i, e $B_1 \neq B_2 \neq \dots \neq B_t$. Logo são distintas e a união delas formam a base B de W. Consequentemente B é li, ou seja o conjunto gerador de W.

b) Mostre que se B_i for uma base de W_i para cada $i = 1, \dots, t$, então B é uma base de V.

No itém anterior provamos que $B_i = B$ sendo uma base para W_i, desta forma como $W_i \subset V$ temos que B_i é uma base para V.

$$B_i \subset W_1 \text{ e } W_1 \subseteq V \Rightarrow B_i \subset V$$

Temos que $B \subset W$ e $W \subset V \Rightarrow B \subset V$

Assim temos que B é uma base geradora para W e consequentemante para V.

Temos que $W_1, \dots, W_T$ é uma soma direta, $W_1 + \dots + W_T$, temos que $B = B_1 \cup \dots \cup B_T$ é uma base de V.

Não é difícil ver que a matriz $[T]_B$ tem a seguinte forma:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_1]_{B_1} & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ 0 & & 0 \\ & \cdots & [T_r]_{B_r} \end{pmatrix}$$

Onde os T_i's indicam as restrições de T aos subespaços W_i's e os 0's indicam as matrizes nulas correspondentes. Neste caso, a descrição de $[T]_B$ será reduzida à descrição das matrizes $[T_1]_{B_1}, \ldots, [T_r]_{B_r}$.
Com isso, também temos:
$T = T_1 \oplus \cdots \oplus T_r$ e dizemos que o operador linear T é a soma direta dos operadores $T_1, \ldots, T_r$.