Espaço Dual, Transposta e Adjunta (nota da álgebra linear 2)

Sadao Massago

Outubro de 2009

1 Espaço Dual

Dado um espaço vetorial V sobre o corpo F, o espaço dual V^* é o espaço de todas transformações lineares de V em F. A transformação linear de V em F é denominado de funcional linear.

Pela álgebra linear 1, sabemos que o funcional linear é definido unicamente pelos valores sobre elementos da base. Considere a base $\mathcal{B} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$ de V. Para cada vetor β_i da base, associamos o funcional linear f_i determinado por $f_i(\beta_j) = \delta_{ij}$ onde $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , i = j \\ 0 & , i \neq j \end{cases}$. No caso da dimensão finita, o conjunto $\mathcal{B}^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ é uma base de V^* como demonstra o teorema a seguir. Neste caso, $\mathcal{B}^*$ é denominado de *base dual* de $\mathcal{B}$.

Teorema 1.1. *Se V for espaço vetorial de dimensão finita, $\mathcal{B}^* = \{f_1, \cdots, f_n\}$ forma uma base de V^*.*

Demonstração. Veremos que $\mathcal{B}^*$ é L.I. De fato, se $f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0$, teremos $f(\beta_i) = o(\beta_i) = 0$, o que implica que $0 = c_1 f_1(\beta_i) + \cdots + c_n f_n(\beta_i) = c_i$ para cada $i = 1 \cdots n$, o que implica que $\mathcal{B}^*$ é L.I.

Agora, veremos que $\mathcal{B}*$ gera V^*. Inicialmente, observe que $f_i\left((x_1, \cdots, x_n)_{\mathcal{B}}\right) = x_i$, na qual a demonstração é deixado como exercício (esta é uma das propriedade bastante usadas quando trabalha com a base dual).

Seja f um funcional linear. Lembrando que uma transformação linear é unicamente determinados pelos valores sobre vetores da base, considere $c_i = f(\beta_i)$. Afirmamos que $f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$. De fato, $f(\beta_i) = c_1 f_1(\beta_i) + \cdots + x_n f_n(\beta_i) = c_i$ para cada i, devido a definição de f_i. Como coincide em cada elemento da base, o funcional é a mesma e assim, conseguimos escrever o funcional linear f como combinação dos elementos de $\mathcal{B}^*$.

□

Corolário 1.2. *Se V é espaço vetorial de dimensão finita, V^* é isomorfo a V.*

Demonstração. Basta lembrar que espaço vetorial de mesma dimensão, quando dimensão é finita, são isomorfos.

□

Quando não há ambiguidade da notação e contexto, podemos usar a notação $\beta_i^* = f_i$ para enfatizar que f_i é dual de β_i. No caso de ter o vetor $\alpha = c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n$ e não tenha dúvida quanto a base a ser dualizada, podemo usar a notação $\alpha^* = c_1\beta_1^* + \cdots + c_n\beta_n^*$.

No caso de dimensão finita, dado uma base de V, a associação $\alpha \mapsto \alpha^*$ de V em V^* é um isomorfismo. No entanto, este isomorfismo depende da base escolhida para dualizar.

No caso do espaço de dimensão infinita, dual de uma base nem sempre é uma base como veremos no exemplo mais adiante.

Exemplo 1 (dual da base no espaço de dimensão infinita)**.** Considere $V = \mathbb{R}[x] = \{$polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}\}$. Então $\mathcal{B} = \{1, t, t^2, t^3 \ldots\}$ é uma base de V e $\mathcal{B}^* = \{f_0, f_1, f_2, \ldots\}$ o seu dual. Então $f_i\left(a_0 + a_1 t + \cdots + a_n t^n\right) = a_i$. Mostremos que $\mathcal{B}^*$ não gera o V^*. Considere o funcional linear $f(p) = p(1)$ que é uma evaluação do polinômio p no ponto $t = 1$. Afirmamos que f não é gerado pelos elementos de β^*.

Suponha por absurdo que $f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$ (na álgebra, só é permitido a combinação finita). Então $f\left(t^{n+1}\right) = c_1 f_1\left(t^{n+1}\right) + \cdots + x_n\left(t^{n+1}\right) = 0$, o que é absurdo, pois $f\left(t^{n+1}\right) = 1^{n+1} = 1$. Assim, f não é gerado pelo $\mathcal{B}^*$.

É fácil de provar que $\mathcal{B}^*$ é L.I., seguindo o caso da dimensão finita. Assim, teremos

Proposição 1.3. *Existe aplicação linear injetiva $V \to V^*$.*

Exercícios.

1. Para base dual $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B} = \{\beta_1, \cdots, \beta_n\}$, mostre que $\beta_i^*\left(x_1\beta_1 + \cdots + x_n\beta_n\right) = x_i$ e $\left(c_1\beta_1^* + \cdots + c_n\beta_n^*\right)(\beta_i) = c_i$. Também que, $\varphi\left((x_1, \cdots, x_n)_{\mathcal{B}}\right) = \left((x_1, \cdots, x_n)_{\mathcal{B}^*}\right)$.

2. Mostre que, se V for espaço de dimensão finita, então $f(\alpha) = 0$ para todo $f \in V^*$, implica que $\alpha = 0$. Note que, a demonstração do caso da dimensão infinita é similar.

2 Teorema de Representação.

No caso de espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, o funcional linear é dado em termos de produto interno.

Teorema 2.1 (Representação). *Se V é um espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, então para todo funcional linear $f \in V^*$, existe um único vetor $\alpha_f \in V$ tal que $f(\beta) = \langle \beta, \alpha_f \rangle$.*

Demonstração. Considere uma aplicação $\varphi : V \to V^*$ definido como $\varphi(\alpha) = \varphi_\alpha : V \to F$, onde $\varphi_\alpha(\beta) = \langle \beta, \alpha \rangle$. É óbvio que φ_α é um funcional linear. Como $\langle \beta, \alpha_1 + \lambda\alpha_2 \rangle = \langle \beta, \alpha \rangle + \bar{\lambda}\langle \beta, \alpha_2 \rangle$, podemos mostrar que $\varphi(\alpha_1 + \lambda\alpha_2) = \varphi(\alpha_1) + \bar{\lambda}\varphi(\alpha_2)$ (exercício), o que é denominado de linear conjugado, devido a conjugação nos parâmetros. O linear conjugado tem a propriedade similar a linear. Por exemplo, se for injetiva no espaço de mesma dimensão, ele é bijetiva. Como V e V^* tem mesma dimensão (provado pela base dual), basta mostrar que φ é injetiva. Se $\varphi(\alpha) = 0$, então $\varphi_\alpha(\beta) = \langle \beta, \alpha \rangle = 0$ para todo vetor β. em particular, $\varphi_\alpha(\alpha) = \langle \alpha, \alpha \rangle = ||\alpha||^2 = 0$, o que implica que $\alpha = 0$. Como $\ker \varphi = \{0\}$, ele é injetora e consequentemente é bijetora.

□

Observação 2.2 (isomorfismo de repreentação). Note que a função acima não depende da base. Neste caso, ele é dito isomorfismo conjugado natural. No caso real, a aplicação acima é um isomorfismo. No caso complexo, poderá construir o isomorfismo para teorema de representação, mas ele não será unicamente determinado (não é natural). Para tanto, escolha uma base $\mathcal{B}$ de V e usando a conjugação complexa relativa a esta base, defina $\psi_\alpha(c_1\beta_1 + \cdots + c_n\beta_n) = \overline{c_1}\langle \beta_1, \beta \rangle + \cdots + \overline{c_n}\langle \beta_n, \beta \rangle$. Então ψ é um isomorfismo que permite representar o funcional linear como produto interno (mas dependerá da base). Note que, em maioria dos casos, o que interessa e ter vetor que represente o funcional linear. Trabalhando com um pouco de cuidado, podemos partir da expressão envolvendo o produto interno (sem ter a base específica) e chegar na expressão com o produto interno (sem ter base específica), usando uma base ortonormal.

Observação 2.3. No caso de dimensão infinita, a aplicação de representação acima é apenas injetiva. Assim, nem todo funcional linear pode ser representado pelo vetor (nem todo funcional linear é dado como produto interno).

Exercícios.

1. Se $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ uma base ortonormal e $\mathcal{B}^* = \{\beta_1^*, \ldots, \beta_n^*\}$ e sua base dual. Mostre que a dualização relativa a esta base é o isomorfismo ψ da Observação 2.2.
2. No exercício acima, obtenha quem é o isomorfismo conjugado e o isomorfismo linear do teorema de representação, em termos da base dual.

Espaço Dual do Dual

Como V^* é um espaço vetorial, podemos analisar o dual de V^*. O espaço dual do dual $V^{**} = (V^*)^*$ é interessante por ter transformação linear injetiva natural $L : V \to V^{**}$ mesmo sem ter o produto interno.

Lema 2.4. *Se V é um espaço vetorial, então $L : V \to V^*$ definido como $L(\alpha) = L_\alpha$ onde $L_\alpha(f) = f(\alpha)$ para todo $f \in V^*$ é injetiva.*

Demonstração. Mostrar que L é linear é deixado como exercício. Se $L(\alpha) = L_\alpha = 0$ então $L_\alpha(f) = f(\alpha) = 0$ para todo funcional linear $f \in V^*$ e consequentemente, $\alpha = 0$. O fato de $\forall f \in V^*, f(\alpha) = 0 \implies \alpha = 0$ para o caso de dimensão finita é o Exercício 2 da Seção 1.

□

Teorema 2.5 (dual do dual). *Se V é um espaço vetorial de dimensão finita, então $L : V \to V^{**}$ é isomorfismo natural.*

Demonstração. Segue da injetividade, pois V é um espaço vetorial de dimensão finita (Mostre que $\dim V = \dim V^{**}$ como exercício, para completar o argumento). O fato de ser natural é devido ao fato da definição de L não depender da base específica (ou resultados que dependam da base específica).

□

Observação 2.6. O isomorfismo L é natural. Isto significa que ele não depende da base. Assim, comumente identificamos V^{**} com V via L é escrevemos $V^{**} = V$ quando a dimensão é finita. No caso de V^*, precisará de produto interno para ter isomorfismo (ou isomorfismo conjugado) natural. Assim, só podemos identificar V^* com V de forma precisa quando tem o produto interno.

Observação 2.7. A aplicação L é bijetiva se, e somente se, for de dimensão finita. Na álgebra, não deve ter combinação linear infinita, mas na análise, pode permitir uma combinação linear infinita, o que permite ter espaços de dimensão infinita com L bijetiva.

Exercícios.

1. Mostre que, se $W < V$ for espaço de dimensão finita, $W^{**} = W$ a menos de identificação por L do Teorema 2.5, isto é, $W^{**} = L(W)$).

3 Anulador

Definição 3.1. Seja $S \subset V$. O conjunto $S^0 = \{f \in V^* : \forall s \in S, f(s) = 0\}$ é denominado de anulador de S.

Teorema 3.2. *Se $W < V$ com V de dimensão finita, então $W^{00} = W$ a menos de identificação por L do Teorema 2.5, isto é, $W^{00} = L(W)$.*

Demonstração. Se $\alpha \in W$ então $L_\alpha(f) = f(\alpha) = 0$ para todo $f \in W^0$. Logo, $W \subset W^{00}$ via identificação por L. Agora, veremos que se $\alpha \notin W$, então $L_\alpha \notin W^{00}$. Seja $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r, \beta_1, \dots \beta_{n-r}\}$, a base de V obtido pela extensão da base $\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ de W. Então podemos dualizar o vetor relativamente a esta base. Se $\alpha \notin W$, então ele é escrita como combinação finita $\alpha = a_1\alpha_1 + \cdots + a_r\alpha_r + b_1\beta_1 + \cdots + b_{n-r}\beta_{n-r}$ com algum b_j não nulo. Temos que $f = \beta_j^* \in W^0$ (prove) e $f(\alpha) = b_j \neq 0$. Como é de dimensão finita, todo elemento de X^{**} é imagem do isomorfismo L, o que conclui a demonstração.

□

Observação 3.3. A demonstração do teorema acima poderá ser adaptado ao caso de dimensão infinita, mas só poderá concluir que $L(V) \cap W^{00} = L(W)$. Como L é apenas injetiva, poderá existir elementos de W^{00} fora de $L(V)$.

Teorema 3.4. *Se $W < V$ onde V é espaço de dimensão finita, temos que* $\dim V = \dim W + \dim W^0$.

Exercícios.

1. Mostre que se $S \subset V$ então $S^0 < V^*$.
2. Mostre que se $S \subset V$ e W é o subespaço gerado pelos elementos de S, então $S^0 = W^0$.
3. No caso de espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, mostre que $W^0 = \varphi(W^\perp)$. A menos de identificação por φ, temos que $W^0 = W^\perp$. Explique porque não dizemos "a menos de identificação por ψ", apesar de $W^0 = \psi(W^\perp)$ também.
4. Demonstre o Teorema 3.4.
5. Considerando os subespaços W_1 e W_2 de V, mostre que
   (a) Se $W_1 < W_2$ então $W_2^0 < W_1^0$.
   (b) $(W_1 + W_2)^0 = W_1^0 \cap W_2^0$.
   (c) No caso de dimensão finita, $V = W_1 \oplus W_2$ implica que $W_1^0 \cap W_2^0 = \{0\}$

4 Transposta

Definição 4.1. Dado uma transformação linear $T : V \to W$, a aplicação $T^t : W^* \to V^*$ definido como $T^t(f) = f \circ T : V \to F$ para cada $f \in W^*$ é denominado de transposta de T.

Teorema 4.2. *Dado $T : V \to W$, temos*

1. $\ker T^t = (\mathrm{Im} T)^0$.

2. Se V e W forem de dimensão finita, vale também

   (a) $\rho(T) = \rho(T^t)$ *onde* $\rho(T) = \dim \mathrm{Im} T$ *e* $\rho(T^t) = \dim \mathrm{Im} T^t$ *são postos de T e T^t respectivamente.*

   (b) $\mathrm{Im} T^t = (\ker T)^0$

Demonstração. 1. $f \in \ker T^t \iff T^t(f) = f \circ T = 0 \iff \forall \alpha \in W, f(T\alpha) = 0$ mas isto é equivalente a $\forall \beta \in \mathrm{Im} T, f(\beta) = 0 \iff f \in (\mathrm{Im} T)^0$.

2.

   (a) Como os espaços são de dimensão finita, temos $\dim \mathrm{Im} T + \dim(\mathrm{Im} T)^0 = \dim W$. Pelo item 1, Temos que $\dim \mathrm{Im} T + \dim \ker T^t = \dim W$. Mas $\dim \mathrm{Im} T^t + \dim \ker T^t = \dim W$ e consequentemente, $\dim \mathrm{Im} T = \dim \mathrm{Im} T^t$.

   (b) Como $(\dim \ker T)^0 = \dim \mathrm{Im} T = \dim T^t$ (porquê?), basta mostrar que$\mathrm{Im} T^t \subset (\ker T)^0$. Considere $f \in \mathrm{Im} T^t$. Então $f = T^t(g) = g \circ T$ para algum $g \in W^*$ e logo, para todo $\alpha \in \ker T$, $f(\alpha) = g(T\alpha) = g(0) = 0$. Logo, $\mathrm{Im} T^t \subset (\ker T)^0$.

□

Teorema 4.3. *Se $T : V \to W$, transformação linear no espaços de dimensão finita e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são bases de V e W respectivamente, então $[T^t]_{\mathcal{A}^*,\mathcal{B}^*} = [T]_{\mathcal{A},\mathcal{B}}$.*

Exercícios.

1. Demonstre o Teorema 4.3.
2. Mostre que $L(\ker T) = \mathrm{Im}L \cap (\mathrm{Im}T^t)^0$ onde L é o isomorfismo do Teorema 2.5. A menos de identificação por L, podemos escrever $\ker T = (\mathrm{Im}T^t)^0$ no caso de dimensão finita.

5 Adjunta

Definição 5.1. Uma transformação linear $T : V \to V$ (no mesmo espaço) é denominado de *operador linear*.

Definição 5.2 (operador adjunto)**.** Dado um operador linear T, dizemos que S é um operador adjunta se $\forall \alpha, \beta \in V, \langle T\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, S\beta\rangle$.

Lema 5.3 (unicidade do adjunto)**.** *Adjunto, quando existe, é único.*

Demonstração. Se S_1 e S_2 são operadores adjuntos de T, então $\langle \alpha S_1\beta\rangle = \langle T\alpha, \beta\rangle = \langle \alpha, S_2\beta\rangle$ para toda α. Logo, $\langle \alpha, (S_1 - S_2)\beta\rangle = 0$ para todo α e consequentemente, $S_1\beta = S_2\beta$. Como β é genérico, $S_1 = S_2$.

□

O operador adjunto de T, quando existe, é denotado por T^*.

Proposição 5.4. *Seja T, um operador linear no espaço vetorial com produto interno tal que T^* existe. Então $T^* = \varphi^{-1}T^t\varphi$, conde φ é o isomorfismo conjugado do Teorema 2.1(Teorema de Representação).*

Demonstração. $\langle \alpha, T^*\beta\rangle = \langle T\alpha, \beta\rangle = \varphi_\beta T\alpha = T^t(\varphi_\beta)\alpha$. Assim, $\varphi_{(T^*\beta)}\alpha = (T^t\varphi_\beta)\alpha$ para todo α e consequentemente, $\varphi_{(T^*\beta)} = (T^t\varphi_\beta)$. Como φ é injetivo, $T^*\beta = T^t\varphi(\beta)$ para β genérico. Assim, $T^* = \varphi^{-1}T^t\varphi$

□

Teorema 5.5 (operador adjunto)**.** *Para cada operador linear T definido no espaço vetorial de dimensão finita com produto interno, existe um único operador adjunto de T.*

Demonstração. Como já sabemos que existe no máximo um adjunto, basta mostrar que existe. Para cada β, $f_\beta(\alpha) = \langle T\alpha.\beta\rangle$ é um funcional linear em α (justifique) e pelo teorema da representação, existe um único vetor $T^*\beta \in V$ tal que $f_\beta(\alpha) = \langle \alpha, T^*\beta\rangle$. Assim, está definido um único $T^*\beta$ para cada β. O que precisamos é mostrar que T^* é linear. Sejam $\beta_1, \beta_2 \in V$ e $c \in F$. Para todo $\alpha \in V$, temos $\langle \alpha, T^*(\beta_1 + c\beta_2)\rangle = \langle T\alpha, \beta_1 + c\beta_2\rangle = \langle T\alpha, \beta_1\rangle + \bar{c}\langle T\alpha, \beta_2\rangle$
$= \langle \alpha, T^*\beta_1\rangle + \bar{c}\langle \alpha, T^*\beta_2\rangle = \langle \alpha, T^*\beta_1 + cT^*\beta_2\rangle$. Assim, $T^*(\beta_1 + c\beta_2) = T^*\beta_1 + cT^*\beta_2$.

□

Teorema 5.6 (matriz do adjunto)**.** *Na base ortonormal, matriz de T^* é transposta conjugado da matriz de T.*

Demonstração. Seja $\mathcal{B} = \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ uma base ortonormal. Denotemos $[T]_\mathcal{B} = A = [a_{ij}]_{i,j=1..n}$ e $[T^*]_{\mathcal{B}^*} = B = [b_{ij}]_{i,j=1..n}$. Assim, $T\beta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_j$ e $T^*\beta_k = \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell k}\beta_\ell$. Efetuando produto interno com o vetor β_j, temos

$\langle \beta_j, T^*\beta_k\rangle = \langle \beta_j, \sum_{\ell=1}^{n} b_{\ell k}\beta_\ell\rangle = \sum_{\ell=1}^{n} \overline{b_{\ell k}}\langle \beta_j, \beta_\ell\rangle = \overline{b_{jk}}$. Por outro lado, usando a definição de adjunto, temos

$\langle \beta_j, T^*\beta_k\rangle = \langle T\beta_j, \beta_k\rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_j, \beta_k\rangle = a_{kj}$.

□

Alguns operadores importantes

1. $A^* = A$ é denominado de auto adjunto. Para diferenciar o caso real do complexo, também pode ser chamado de simétrico (caso real) e hermitiano (caso complexo), mas chamaremos simplesmente de auto adjunto em muitos casos, só será mencionado como auto adjunto. Alguns casos especiais de auto adjuntos importantes são A^*A e $A^* + A$.
2. $A^* = A^{-1}$. Devido a diferença significativa sobre algumas propriedades do caso real e do complexo, usaremos nome especial para caso real (denominado de ortogonal) e para o caso complexo (denominado de unitário). Caso não precise distinguir, escreveremos a propriedade em vez de citar pelo nome. O caso bastante importante deste tipo é a mudança de base, da base ortonormal para base ortonormal.

3. $A^*A = AA^*$ então A é denominado de operador normal. A condição é bem mais fraca que nos casos de auto adjunta ou $A^* = A^{-1}$ (auto adjunta, ortogonal e unitário são normais) mas também é parte importante do estudo dos operadores.

4. $P^2 = P$ é denominado de projeção. Apesar de curso inicial sobre álgebra linear concentrar em projeções ortogonais, existem muitos tipos de projeções interessantes. Portanto, é importante estudar as propriedades comuns das projeções genéricas.

5. Se tiver o produto interno, o operador auto adjunto que satisfaz a condição $\forall \alpha \in V : \langle A\alpha, \alpha \rangle > 0$ é denominado de operador positivo. Note que ele tem a ver com o adjunto e o produto interno.

Exercícios.

1. Mostre que $(A + cB)^* = A^* + \bar{c}B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$ e se A for inversível, $\left(A^{-1}\right)^* = \left(A^{-1}\right)^*$.

2. Operador com a propriedade $A^t = -A$ é denominado de anti simétrica. Reescreva a nota de aula, para mostrar que no caso real, qualquer operador é soma de forma única, de operador simétrica e antissimétrica. Agora, pense em fazer o mesmo no caso complexo.

3. Explique a importância de usar a base ortonormal quanto trabalha com a matriz transposta, mesmo sem estar usando o espaço dual.

4. Mostre que se A for auto adjunto, $\langle A\alpha, \alpha \rangle \in \mathbb{R}$.

5. Mostre que se P for projeção no espaço vetorial V, então

   (a) $P\alpha \in \ker P$ então $\alpha \in \ker P$.

   (b) Mostre que $\ker P \cap \mathrm{Im} P = \{0\}$.

   (c) Conclua que no caso de dimensão finita, tem-se $V = \ker P \oplus \mathrm{Im} P$.