.

# ÁLGEBRA LINEAR

**ISBN 978-85-915683-0-7**

ROBERTO DE MARIA NUNES MENDES
Professor do Departamento de Matemática e Estatística e do
Programa de Pós-graduação em Engenharia Elétrica da PUCMINAS

Belo Horizonte
Edição do Autor
2013

# Sumário

# Prefácio

A origem desse livro de Álgebra Linear remonta a um curso feito para alunos do Bacharelado em Matemática da UFMG. Na ocasião, fizemos uma primeira redação revista pelos professores do ICEx-UFMG, Michel Spira e Wilson Barbosa, a quem muito agradecemos. Mais recentemente, retomamos o trabalho e, após várias mudanças, aproveitamos parte do material na disciplina "Métodos Matemáticos" do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da PUCMINAS. A versão final do livro foi revista pela professora Mariana Cornelissen Hoyos, a quem agradecemos a generosa assistência.

A leitura do Sumário mostra que se trata de um livro básico de Álgebra Linear que procura desenvolver o assunto com cuidado no aspecto teórico, visando a boa formação do profissional. Para aprofundamento na matéria deve-se recorrer aos livros indicados na Bibliografia, que utilizamos livremente.

A digitação do manuscrito foi feita, com eficiência e boa vontade, por Eric Fernandes de Mello Araújo, a quem agradecemos. Ao leitor, bom proveito.

Belo Horizonte, janeiro de 2013
Roberto N. Mendes

# Capítulo 1

# Espaços Vetoriais

## 1.1 Definições e Exemplos

Seja K um corpo com elementos neutros distintos 0 e 1, por exemplo, $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

**Definição 1.1** *Um espaço vetorial sobre $K$ é um conjunto $V$ munido de duas leis:*

$$\begin{array}{lcl} V \times V \longrightarrow V & e & K \times V \longrightarrow V \\ (u, v) \longmapsto u + v & & (a, v) \longmapsto av \end{array}$$

*tais que, para quaisquer $u, v, w \in V$ e $a, b \in K$, se tenha:*
*(1)* $u + v = v + u$
*(2)* $(u + v) + w = u + (v + w)$
*(3) existe $0 \in V$, chamado o vetor zero, tal que $v + 0 = v$*
*(4) dado $v \in V$, existe $(-v) \in V$, chamado o oposto de $v$, tal que $v+(-v) = 0$*
*(5)* $1 \cdot v = v$
*(6)* $a(bv) = (ab)v$
*(7)* $a(u + v) = au + av$
*(8)* $(a + b)v = av + bv$.

**Exemplo 1.1.1** *Seja $V = K^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, com as leis:*

$$(x_1, ..., x_n) + (y_1, ..., y_n) = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$$

*e*

$$a(x_1, ..., x_n) = (ax_1, ..., ax_n).$$

*É fácil verificar que, com estas leis, $K^n$ é um espaço vetorial sobre $K$.*

**Observação:** Os elementos de um espaço vetorial $V$ são chamados de vetores, enquanto que os de $K$ são chamados de escalares. Essa nomenclatura deriva do exemplo acima. As leis são chamadas de adição e multiplicação por escalar, respectivamente.

No exemplo 1.1.1, se $n = 1$, vemos que $K$ é um espaço vetorial sobre si mesmo, de modo que seus elementos são, ao mesmo tempo, escalares e vetores.

**Exemplo 1.1.2** *Seja $V = P_n$, onde $n \in \mathbb{N}$, o conjunto das funções polinomiais de grau estritamente menor que $n$, com coeficientes em $K$, juntamente com a função zero. Se $p = a_0+a_1t+...+a_{n-1}t^{n-1}$ e $q = b_0+b_1t+...+b_{n-1}t^{n-1}$, definimos $p + q \in V$ e $cp \in V$, onde $c \in K$, por:*

$$p + q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + ... + (a_{n-1} + bn - 1)t^{n-1}$$

$$cp = ca_0 + ca_1t + ... + ca_{n-1}t^{n-1}$$

*Resulta que $P_n$ é um espaço vetorial sobre $K$.*

**Exemplo 1.1.3** *Seja $V = K[t]$ o conjunto de todos os polinômios a uma variável, com coeficientes em $K$. Definindo as leis como no exemplo 1.1.2, é imediato que $K[t]$ é um espaço vetorial sobre $K$.*

**Exemplo 1.1.4** *Seja $V = \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ o conjunto das funções $f : I \longmapsto \mathbb{R}$, onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Se $f, g \in V$ e $a \in \mathbb{R}$, definimos $f + g$ e $af$ por:*

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$(af)(x) = a \cdot f(x)$$

*para todo $x \in I$. Verifica-se imediatamente que essas leis tornam $\mathcal{F}(I, \mathbb{R})$ um espaço vetorial real, isto é, sobre $\mathbb{R}$.*

### Consequências Imediatas da Definição

(a) Se $u, v \in V$ definimos:

$$u - v = u + (-v)$$

Se $a \in K$, então

$$a(u - v) + av = a[(u - v) + v] = a[u + (-v) + v] = a(u + 0) = au.$$

Somando $-av$ aos dois membros, vem:

$$a(u - v) + av - av = au - av,$$

donde:
$$a(u-v) = au - av.$$
Fazendo $u = v$, obtemos
$$a \cdot 0 = 0$$
e também
$$a(-v) = a(0-v) = a \cdot 0 - av = -av.$$

(b) Se $a, b \in K$ e $v \in V$, então:
$$(a-b)v + bv = (a-b+b)v = av,$$
donde:
$$(a-b)v = av - bv$$
Fazendo $a = b$, vem
$$0 \cdot v = 0$$
e também
$$(-a)v = (0-a)v = 0 \cdot v - av = -av.$$

(c) Para todo $a \in K$ e todo $v \in V$ vimos que
$$0 \cdot v = a \cdot 0 = 0$$
Suponhamos que $av = 0$. Se $a \neq 0$ então
$$0 = a^{-1} \cdot 0 = a^{-1}(av) = 1 \cdot v = v.$$

Portanto, $av = 0$ implica ou $a = 0$ ou $v = 0$.

# Exercícios

1. O conjunto de todos os polinômios de grau 3, com coeficientes reais e munido das leis usuais, juntamente com o polinômio zero, forma um espaço vetorial real?

2. Dê exemplo de um conjunto $M$ que verifique todos os axiomas de espaço vetorial, exceto $1 \cdot v = v$ para todo $v \in M$.

3. O conjunto das sequências complexas $z = (z_n)_{n \geq 1}$ tais que

$$z_{n+2} = z_{n+1} + z_n, \; n \geq 1,$$

munido das leis usuais, forma um espaço vetorial complexo?

4. O conjunto das funções $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ duas vezes continuamente deriváveis e tais que $f'' + af' + bf = 0$ ($a$ e $b$ reais fixos), munido das leis usuais, forma um espaço vetorial real?

5. Prove que o conjunto das funções limitadas $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$, munido das leis usuais, é um espaço vetorial real.

6. Seja $l_1(\mathbb{N})$ o conjunto das sequências $x = (x_n)_{n \geq 1}$ onde $x_n \in \mathbb{C}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < \infty$. Prove que, com as leis usuais, $l_1(\mathbb{N})$ é um espaço vetorial complexo.

## 1.2 Subespaços

Seja $V$ um espaço vetorial sobre o corpo $K$.

**Definição 1.2** *Dizemos que $W \subset V$ é um* <u>*subespaço*</u> *de $V$ se:*
*(a)* $0 \in W$
*(b)* $u, v \in W \Longrightarrow u + v \in W$
*(c)* $a \in K, v \in W \Longrightarrow av \in W$

*É claro que $W$, com as leis induzidas pelas de $V$, é um espaço vetorial sobre $K$.*

**Exemplo 1.2.1** *Em $V = K^n$ verifica-se imediatamente que $W = \{(x_1, ..., x_n) \in K^n; x_1 = 0\}$ é um subespaço.*

**Exemplo 1.2.2** *Em $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, espaço vetorial real das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, o subconjunto formado pelas funções* <u>*contínuas*</u> *é um subespaço.*

**Proposição 1.1** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre $K$. A interseção de uma família qualquer de subespaços de $V$ é um subespaço de $V$.*

**Dem.** *Seja $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ uma família de subespaços de $V$, e seja $W = \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$.*
*Então:*

*(a)* $0 \in W$ *pois* $0 \in W_\alpha$ *para todo* $\alpha \in A$.
*(b)* $u, v \in W \iff u, v \in W_\alpha$ *para todo* $\alpha \in A \implies (u+v) \in W_\alpha$ *para todo* $\alpha \in A \implies (u+v) \in W$.
*(c)* $\alpha \in K, v \in W \implies av \in W_\alpha$ *para todo* $\alpha \in A \implies av \in W$.

**Definição 1.3** *Seja* $X$ *um subconjunto não-vazio do espaço vetorial* $V$ *sobre* $K$. *Todo elemento da forma* $a_1v_1 + ... + a_mv_m = \sum_{i=1}^{m} a_iv_i$, *onde* $m \in \mathbb{N}$, $v_i \in X$, $a_i \in K$, $1 \leq i \leq m$, *é chamado de* *combinação linear* *de elementos de* $X$.

*É fácil verificar que o conjunto de todas as combinações lineares de elementos de* $X$ *é um subespaço de* $V$, *chamado de* *subespaço gerado* *por* $X$.

**Proposição 1.2** *O subespaço gerado por* $X \subset V$, $X \neq \emptyset$, *é a interseção de todos os subespaços de* $V$ *contendo* $X$, *ou seja, é o "menor" (para a inclusão de conjuntos) subespaço de* $V$ *contendo* $X$.

**Dem.** *Seja* $(W_\alpha)_{\alpha \in A}$ *a família de todos os subespaços de* $V$ *contendo* $X$. *Sabemos que* $W = \bigcap_{\alpha \in A} W_\alpha$ *é um subespaço de* $V$. *É claro que* $W$ *contém* $X$ *e, portanto, que* $W$ *contém todas as combinações lineares de elementos de* $X$, *ou seja,* $W$ *contém o subespaço* $S$ *gerado por* $X$. *Como* $S$ *é um subespaço de* $V$ *contendo* $X$, *temos que* $W \subset S$. *Resulta* $W = S$.

## Exercícios

1. Seja $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial real das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Verifique se $W$ é subespaço de $V$ nos seguintes casos:
   (a) W = conjunto das funções pares
   (b) W = conjunto das funções ímpares
   (c) W = conjunto das funções deriváveis
   (d) W = conjunto das funções $C^\infty$

2. Qual a expressão do elemento genérico do subespaço de $K[t]$ gerado pelos polinômios $t^2$ e $t^3$?

3. Verifique se $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x = 2y\}$ é subespaço de $\mathbb{R}^3$.

4. Mostre que $W = \{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$ é gerado por $(0, 1, 1)$ e $(0, 2, -1)$.

5. Mostre que o conjunto das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^2$ tais que $f'' + af' + bf = 0$ ($a$ e $b$ reais fixos) é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

6. Mostre que, em geral, a união de dois subespaços não é um subespaço.

## 1.3 Independência Linear. Bases. Dimensão

**Definição 1.4** *Sejam $X \neq \emptyset$, $X \subset V$, $V$ um espaço vetorial sobre $K$. Dizemos que $X$ é linearmente independente se, quaisquer que sejam $v_1, ..., v_m \in X$, $m \in \mathbb{N}$, a equação $a_1v_1 + ... + a_mv_m = 0$, onde $a_1, ..., a_m \in K$, implica $a_1 = a_2 = ... = a_m = 0$. Se $X$ não é linearmente independente (LI) dizemos que $X$ é linearmente dependente (LD); neste caso, existem $v_1, ..., v_p \in X, p \in \mathbb{N}$, e escalares* **não todos nulos**, *$a_1, ..., a_p$, tais que $a_1v_1 + ... + a_pv_p = 0$.*

**Exemplo 1.3.1** *Em $K^n$ consideremos os vetores*

$$e_1 = (1, 0, ..., 0)$$

$$e_2 = (0, 1, ..., 0)$$

$$\vdots$$

$$e_n = (0, ..., 0, 1)$$

*Esses vetores são LI, pois $a_1e_1 + ... + a_ne_n = (a_1, ..., a_n) = 0 = (0, ..., 0) \Leftrightarrow a_1 = 0, ..., a_n = 0$.*

**Exemplo 1.3.2** *Em $P_n$ os vetores $1, t, ..., t^{n-1}$ são LI pois $a_0 + a_1t + ... + a_{n-1}t^{n-1} = 0$ implica $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$.*

**Exemplo 1.3.3** *No espaço das funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $C^1$ consideremos os vetores $f_1(t) = e^{r_1t}$, $f_2(t) = e^{r_2t}$ onde $r_1 \neq r_2$ são reais. $f_1$, $f_2$ são LI pois se $a_1f_1 + a_2f_2 = 0$ então $a_1e^{r_1t} + a_2e^{r_2t} = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $a_1e^{(r_1-r_2)t} + a_2 = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Derivando: $a_1(r_1 - r_2)e^{(r_1-r_2)t} = 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde $a_1 = 0$ e, portanto, $a_2 = 0$.*

**Exemplo 1.3.4** *Consideremos os elementos 1 e $i$ de $\mathbb{C}$. Considerando $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial real, 1 e $i$ são LI. Considerando $\mathbb{C}$ como um espaço vetorial complexo, 1 e $i$ são LD.*

**Proposição 1.3** *Se $v_1, ..., v_n$ são vetores LI em $V$ e*

$$a_1v_1 + ... + a_nv_n = b_1v_1 + ... + b_nv_n,$$

*com $a_i \in K$, $b_i \in K$ $(1 \leq i \leq n)$, então $a_i = b_i$ para todo $i$.*

**Dem.** *A relação dada é equivalente a $(a_1 - b_1)v_1 + ... + (a_n - b_n)v_n = 0$, donde $a_1 - b_1 = ... = a_n - b_n = 0$, isto é, $a_i = b_i$ para $i = 1, 2, ..., n$.*

**Definição 1.5** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre $K$. Dizemos que $G \subset V$ gera $V$ ou que $G \subset V$ é um conjunto de geradores de $V$ se todo $v \in V$ é combinação linear de vetores de $G$, ou seja, se o subespaço gerado por $G$ é $V$. Dizemos que o conjunto de geradores $G$ é* **mínimo** *se, qualquer que seja $g \in G$, o conjunto $G_1 = G - \{g\}$ não gera $V$.*

**Exemplo 1.3.5** *Em $K^n$ os vetores $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$ formam um conjunto de geradores mínimo.*

**Definição 1.6** *Seja $X \subset V$ um conjunto LI no espaço vetorial $V$. Dizemos que $X$ é um conjunto linearmente independente máximo se, para todo $v \in V$, $v \notin X$, o conjunto $X_1 = X \cup \{v\}$ é LD.*

**Exemplo 1.3.6** *Os vetores $e_1 = (1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, ..., 0, 1)$ de $K^n$ formam um conjunto LI máximo.*

**Proposição 1.4** *Sejam $v_1, ..., v_m$ vetores LI do espaço vetorial $V$ gerado por $w_1, ..., w_p$. Então $m \leq p$ e, alterando-se eventualmente a numeração dos $w_i$, os vetores $v_1, ..., v_m, w_{m+1}, ..., w_p$ ainda geram $V$.*

**Dem.** *Seja $v_1 = a_{11}w_1 + ... + a_{p1}w_p$; sem perda de generalidade podemos supor $a_{11} \neq 0$ e, então:*

$$w_1 = b_{11}v_1 + b_{21}w_2 + ... + b_{p1}w_p.$$

*Logo, toda combinação linear de $w_1, ..., w_p$ também é combinação linear de $v_1, w_2, ..., w_p$, ou seja, estes vetores geram $V$.*

*Seja $v_2 = a_{12}v_1 + a_{22}w_2 + ... + a_{p2}w_p$; ao menos um dos escalares $a_{22}, ..., a_{p2}$ é diferente de zero pois $v_1$ e $v_2$ são LI. Podemos supor $a_{22} \neq 0$ e, então:*

$$w_2 = b_{12}v_1 + b_{22}v_2 + b_{32}w_3 + ... + b_{p2}w_p,$$

*e toda combinação linear de $v_1, w_2, ...w_p$ é também combinação linear de $v_1, v_2, w_3, ..., w_p$, ou seja, estes vetores geram $V$.*

*Repetindo essa operação um número finito de vezes, vemos que, para $r \leq min(m, p)$, os vetores $v_1, ..., v_r, w_{r+1}, ..., w_p$ geram $V$. Se fosse $m > p$, tomando $r = p$, teríamos que $v_1, ..., v_p$ gerariam $V$ e, portanto, $v_{p+1}, ..., v_m$ seriam combinações lineares de $v_1, ..., v_p$, o que é absurdo já que $v_1, ..., v_m$ são LI. Portanto, $m \leq p$ e, ao fim de um número finito de operações, obteremos o conjunto de geradores $v_1, ..., v_m, w_{m+1}, ..., w_p$.*

**Corolário 1.4.1** *Se $w_1, ..., w_p$ geram $V$ e $n > p$, então $v_1, ..., v_n$ são LD. Em particular, $p+1$ vetores que são combinações lineares de $p$ vetores quaisquer são LD.*

**Proposição 1.5** *Seja $X$ um subconjunto não-vazio do espaço vetorial $V$ sobre $K$. As propriedades seguintes são equivalentes:*
*(a) $X$ é LI e gera $V$*
*(b) $X$ é um conjunto de geradores mínimo*
*(c) $X$ é um conjunto LI máximo*

**Dem.** *$(a) \Rightarrow (b)$: Sejam $x \in X$, $Y = X - \{x\}$. Se $x$ fosse combinação linear de vetores de $Y$, $x = \sum_{i=1}^{n} a_i y_i$, $y_i \in Y$, $a_i \in K$, $1 \leq i \leq n$, então $X$ seria LD, contradição. Portanto, $Y$ não gera $V$, o que mostra que $X$ é mínimo.*

*$(b) \Rightarrow (c)$: Se $X$ fosse LD existiriam vetores $x, x_1, ..., x_n$ de $X$ e escalares $a, a_1, ..., a_n$, não todos nulos, tais que $ax + a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0$. Sem perda de generalidade podemos supor $a \neq 0$, donde $x = b_1x_1 + ... + b_nx_n$ e, portanto, $X$ não seria mínimo, contradição. Além disso, $X$ é (um conjunto LI) máximo pois, dado $v \in V$, temos $v = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$, $x_i \in X$, $a_i \in K$, $1 \leq i \leq m$, ou seja, $X \cup \{v\}$ é LD.*

*$(c) \Rightarrow (a)$: Seja $v \in V, v \notin X$, então $Y = X \cup \{v\}$ é LD e existem vetores $x_1, ..., x_n$ de $X$ e escalares $a, a_1, ..., a_n$, não todos nulos, tais que*

$$av + a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0.$$

*Se fosse $a = 0$ resultaria $X$ LD. Então $a \neq 0$ e $v = b_1x_1 + ... + b_nx_n$, isto é, $X$ gera $V$ (e é LI).*

**Definição 1.7** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre $K$. $X \subset V$, $X \neq \emptyset$, é uma base de $V$ se $X$ possui uma das (e portanto as três) propriedades da proposição 1.5.*

*Se $V$ tem uma base finita $X = \{v_1, ..., v_n\}$ dizemos que $V$ tem dimensão finita; neste caso, se $v \in V$, então $v$ se escreve de modo único na forma $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, $a_i \in K$, $1 \leq i \leq n$.*

**Proposição 1.6** *Sejam $\{v_1, ..., v_n\}$ e $\{w_1, ..., w_p\}$ bases do espaço vetorial $V$ sobre $K$. Então:*

$$n = p$$

**Dem.** *Como $v_1, ..., v_n$ são LI e $w_1, ..., w_p$ geram $V$, temos $n \leq p$. Por simetria, $p \leq n$. Logo, $n = p$.*

**Definição 1.8** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$ e $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de $V$. Dizemos que $\underline{n}$ é a <u>dimensão</u> de $V$ <u>sobre</u> $K$. Por definição a dimensão de $V = \{0\}$ é zero.*
*Notação: $n = dim_K V$ ou $n = dim\ V$*

**Exemplo 1.3.7** *$K^n$ tem dimensão $\underline{n}$ e $\{e_1, ..., e_n\}$ é uma base de $K^n$, chamada de <u>base canônica</u>.*

**Exemplo 1.3.8** *$\{1, t, ..., t^{n-1}\}$ é base de $P_n$, donde $dim\ P_n = n$.*

**Exemplo 1.3.9** *$V = K[t]$ não tem dimensão finita sobre $K$.*

**Exemplo 1.3.10** *$dim_{\mathbb{R}}\mathbb{C} = 2$ e $\{1, i\}$ é uma base.*
*$dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C} = 1$ e $\{1\}$ é uma base.*
*Uma base de $\mathbb{C}^n$ sobre $\mathbb{R}$ é $\{e_1, ie_1, e_2, ie_2, ..., e_n, ie_n\}$.*

**Corolários:**

(1) Se $dim\ V = n$ e $v_1, ..., v_n$ são LI, então $\{v_1, ..., v_n\}$ é base de $V$ (pois é um conjunto LI máximo).
(2) Se $W$ é subespaço de $V$ e $dim\ W = dim\ V$, então $W = V$ (pois toda base de $W$ é também base de $V$).
(3) Se $dim\ V = n$ e $m > n$ então os vetores $v_1, ..., v_m$ são LD (pois o número máximo de vetores LI é n).

**Proposição 1.7** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão $\underline{n}$ sobre $K$. Sejam $v_1, ..., v_r$, $r < n$, vetores LI. Então existem $v_{r+1}, ..., v_n \in V$ tais que $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}, ..., v_n\}$ seja base de $V$.*

**Dem.** *Como $r < n$, $\{v_1, ..., v_r\}$ não é um conjunto LI máximo; logo, existe $v_{r+1} \in V$ tal que $\{v_1, ..., v_r, v_{r+1}\}$ seja LI. Se $r + 1 < n$ podemos repetir o argumento. Após um número finito de repetições obteremos $\underline{n}$ vetores LI, $v_1, ..., v_n$, ou seja $\{v_1, ..., v_n\}$ é base de $V$.*

# Exercícios

1. Mostre que $t^3 - t^2 + 1$, $q = t^2 - 1$ e $r = 2t^3 + t - 1$ são LI em $P_4$.

2. Prove que $f, g, h \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ são LI, onde
$$f(t) = t, \; g(t) = e^t \; e \; h(t) = sen \; t.$$

3. Ache uma condição necessária e suficiente para que $u = (a, b) \in K^2$ e $v = (c, d) \in K^2$ sejam LD.

4. Seja $W$ o subespaço de $P_4$ gerado por $u = t^3 - t^2 + 1, \; v = t^2 - 1 \; e \; w = t^3 - 3t^2 + 3$. Ache uma base para $W$.

5. Existe alguma base de $P_4$ que não contenha nenhum polinômio de grau 2?

6. Seja $(v_1, ..., v_m)$ uma sequência de vetores não-nulos do espaço vetorial $V$. Prove que se nenhum deles é combinação linear dos anteriores então o conjunto $\{v_1, ..., v_m\}$ é LI.

7. Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita. Prove que todo conjunto de geradores de $V$ contém uma base.

## 1.4 Espaços Produto e Quociente

Sejam $V_1$ e $V_2$ espaços vetoriais sobre $K$ e $V = V_1 \times V_2 = \{(v_1, v_2); v_1 \in V_1, \; v_2 \in V_2\}$ seu produto cartesiano. Vamos introduzir em $V$ uma estrutura vetorial, definindo:

$$(v_1, v_2) + (u_1, u_2) = (v_1 + u_1, v_2 + u_2)$$
$$a(v_1, v_2) = (av_1, av_2) \quad , a \in K$$

É imediato verificar que, com estas leis, $V = V_1 \times V_2$ é um espaço vetorial sobre $K$. A definição do espaço produto se estende a um número finito qualquer de espaços vetoriais. Se $V_1, ..., V_n$ são espaços vetoriais sobre $K$ e $V = V_1 \times ... \times V_n$, definimos:

$$(v_1, ..., v_n) + (u_1, ..., u_n) = (v_1 + u_1, ..., v_n + u_n)$$
$$a(v_1, ..., v_n) = (av_1, ..., av_n) \quad , a \in K$$

Desta maneira $V$ fica munido de uma estrutura vetorial sobre $K$.

**Proposição 1.8** *Se $V_1$ e $V_2$ têm dimensão finita sobre $K$, então*
$$dim(V_1 \times V_2) = dim \; V_1 + dim \; V_2.$$

**Dem.** *Sejam* $\{v_1, ..., v_n\}$ *e* $\{u_1, ..., u_p\}$, *respectivamente, bases de* $V_1$ *e* $V_2$. *Vamos provar que* $\{(v_1, 0), ..., (v_n, 0), (0, u_1), ..., (0, u_p)\}$ *é base de* $V_1 \times V_2$. *Se* $v \in V_1$ *e* $u \in V_2$, *existem escalares* $a_i, b_j$ *tais que* $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ *e* $u = b_1u_1 + ... + b_pu_p$. *Então:*

$$(v, u) = (a_1v_1 + ... + a_nv_n, b_1u_1 + ... + b_pu_p) =$$

$$= a_1(v_1, 0) + ... + a_n(v_n, 0) + b_1(0, u_1) + ... + b_p(0, u_p),$$

*o que mostra que os vetores* $(v_1, 0), ..., (0, u_p)$ *geram* $V_1 \times V_2$.

*Se tivermos* $a_1(v_1, 0) + ... + a_n(v_n, 0) + b_1(0, u_1) + ... + b_p(0, u_p) = 0$ *então* $(a_1v_1 + ... + a_nv_n, b_1u_1 + ... + b_pu_p) = (0, 0)$, *donde* $a_1v_1 + ... + a_nv_n = 0$ *e* $b_1u_1 + ... + b_pu_p = 0$, *que implicam* $a_1 = ... = a_n = 0$ *e* $b_1 = ... = b_p = 0$, *ou seja, os vetores* $(v_1, 0), ..., (0, u_p)$ *são LI.*

**Definição 1.9** *Sejam* $V$ *um espaço vetorial sobre* $K$ *e* $W$ *um seu subespaço. Se* $v \in V$ *definimos* $v + W$ *por:*

$$v + W = \{v + w; w \in W\}$$

*Observemos que* $v + W = u + W \Leftrightarrow v - u \in W$.

*Seja* $\dfrac{V}{W} = \{v + W; v \in V\}$. *Para introduzir uma estrutura vetorial sobre* $\dfrac{V}{W}$ *definamos:*

$$(v + W) + (u + W) = (v + u) + W$$
$$a(v + W) = av + W \quad , a \in K.$$

*Essas leis estão bem definidas pois se* $u+W = u_1+W$ *e* $v+W = v_1+W$, *então*

$$(v_1 + W) + (u_1 + W) = (u_1 + v_1) + W = (u + v) + W =$$

$$= (v + W) + (u + W), \text{ já que } (u_1 + v_1) - (u + v) =$$
$$= (u_1 - u) + (v_1 - v) \in W.$$

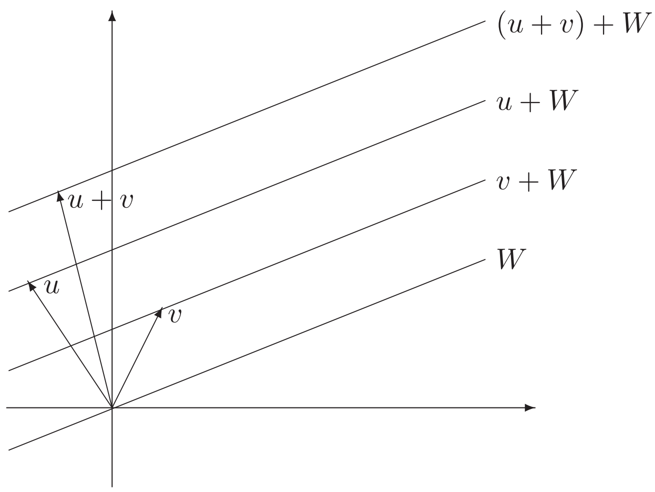
*Analogamente, se* $a \in K$ *e* $v_1 + W = v + W$, *temos:*

$$a(v_1 + W) = av_1 + W = av + W = a(v + W)$$

*pois* $av_1 - av = a(v_1 - v) \in W$.

*É pura rotina verificar que, com estas leis,* $\frac{V}{W}$ *se torna um espaço vetorial sobre* $K$. *O elemento neutro da adição em* $\frac{V}{W}$ *é a classe* $W = 0 + W$. $\frac{V}{W}$ *é chamado de* <u>*espaço vetorial quociente*</u> *de* $V$ *por* $W$.

**Exemplo 1.4.1** *Sejam* $V = \mathbb{R}^2$ *e* $W$ *uma reta pela origem de* $\mathbb{R}^2$. *Um elemento típico de* $\frac{V}{W}$ *é uma reta* $v + W$ *paralela a* $W$, *e* $\frac{V}{W}$ *consiste de todas as retas paralelas a* $W$ *em* $\mathbb{R}^2$.




## Exercícios

1. Prove que se $v_1 + W, ..., v_n + W$ são LI em $\frac{V}{W}$, então $v_1, ..., v_n$ são LI em $V$.

2. Sejam $V$ um espaço vetorial e $W$ um subespaço. Para $u, v \in V$ definamos $u \approx v$ se $u - v \in W$. Prove que $\approx$ é uma relação de equivalência em $V$ e que o conjunto das classes de equivalência é o espaço quociente $\frac{V}{W}$.

# 1.5 Somas e Somas Diretas

**Definição 1.10** *Sejam* $V$ *um espaço vetorial sobre* $K, U$ *e* $W$ *subespaços de* $V$. *A* <u>*soma*</u> *de* $U$ *e* $W$ *é definida por:*

$$U + W = \{u + w,\ u \in U,\ w \in W\}.$$

*É fácil ver que $U + W$ é um subespaço de $V$. De fato, se $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$ e $a \in K$, temos:*
*(a)* $0 = 0 + 0 \in U + W$
*(b)* $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$
*(c)* $a(u_1 + w_1) = au_1 + aw_1 \in U + W$

*Dizemos que $V$ é soma direta de $U$ e $W$, e escrevemos $V = U \oplus W$, se todo elemento $v \in V$ se escreve, de modo único, na forma $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$.*

**Proposição 1.9** *$V = U \oplus W$ se, e só se, $V = U + W$ e $U \cap W = \{0\}$.*

**Dem.** *Se $V = U \oplus W$ é claro que $V = U + W$. Além disso, se $v \in U \cap W$ temos, de modo único, $v = v + 0 = 0 + v$, donde $v = 0$, isto é $U \cap W = \{0\}$.*

*Reciprocamente, seja $v \in V$ arbitrário. Como $V = U + W$ temos $v = u + w$, com $u \in U$, $w \in W$. Se tivéssemos também $v = u_1 + w_1$, $u_1 \in U$, $w_1 \in W$, então teríamos $u - u_1 = w_1 - w \in U \cap W = \{0\}$, donde $u = u_1$ e $w = w_1$, ou seja, a representação de $\underline{v}$ na forma $u + w$ é única. Logo, $V = U \oplus W$.*

**Proposição 1.10** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$, de dimensão finita, e $W$ um subespaço de $V$. Existe subespaço $U$ de $V$ tal que $V = U \oplus W$.*

**Dem.** *Seja $\{w_1, ..., w_r\}$ base de $W$. Sabemos que existem vetores $u_1, ..., u_s \in V$ tais que $\{w_1, ..., w_r, u_1, ..., u_s\}$ seja base de $V$. Seja $U$ o subespaço gerado por $u_1, ..., u_s$. É claro que $V = U \oplus W$.*

**Obs.:** *Em geral existem muitos subespaços $U$ de $V$ tais que $V = U \oplus W$. Dizemos que um tal $U$ é um subespaço suplementar de $W$.*

**Proposição 1.11** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $K$, $U$ e $W$ dois de seus subespaços. Se $V = U \oplus W$ então dim $V$ = dim $U$ + dim $W$.*

**Dem.** *Sejam $\{u_1, ..., u_r\}$ e $\{w_1, ..., w_s\}$ bases de $U$ e $W$, respectivamente. Provemos que $\{u_1, ..., u_r, w_1, ...w_s\}$ é base de $V$. Se $v \in V$ então $v = u + w$, com $u \in U$ e $w \in W$, ou seja, $u = a_1u_1 + ... + a_ru_r$ e $w = b_1w_1 + ... + b_sw_s$. Portanto,*

$$v = a_1u_1 + ... + a_ru_r + b_1w_1 + ... + b_sw_s$$

*e os vetores $u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s$ geram $V$.*

*Seja* $a_1u_1 + ... + a_ru_r + b_1w_1 + ... + b_sw_s = 0$. *Então:*

$$a_1u_1 + ... + a_ru_r = -b_1w_1 - ... - b_sw_s.$$

*Como* $U \cap W = \{0\}$ *resulta* $a_1u_1 + ... + a_ru_r = 0$ *e* $b_1w_1 + ... + b_sw_s = 0$, *donde* $a_1 = ... = a_r = 0$ *e* $b_1 = ... = b_s = 0$, *ou seja,* $u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s$ *são LI.*

*Logo,* $\{u_1, ..., u_r, w_1, ..., w_s\}$ *é base de* $V$ *e* $dim\ V = r + s = dim\ U + dim\ W$.

*O conceito de soma direta se estende à soma de vários subespaços* $V_1, ..., V_n$ *do espaço vetorial* $V$. *Dizemos que* $V$ *é a soma direta de* $V_1, ..., V_n$, *e escrevemos* $V = V_1 \oplus V_2 \oplus ... \oplus V_n$, *se todo* $v \in V$ *se* <u>*escreve*</u>*, de* <u>*modo único*</u>*, na forma* $v = v_1 + v_2 + ... + v_n$, *onde* $v_i \in V_i$, $i = 1, 2, ..., n$.

**Proposição 1.12** *Sejam* $V$ *um espaço vetorial de dimensão finita sobre* $K$, $V_1, ..., V_r$ *subespaços de* $V$ *e, para cada* $i = 1, ..., r$, $\{v_{i1}, ... v_{in_i}\}$ *base de* $V_i$.

$V = V_1 \oplus ... \oplus V_r$ *se, e só se,* $B = \{v_{11}, ..., v_{1n_1}, ..., v_{r1}, v_{r2}, ..., v_{rn_r}\}$ *é base de* $V$.

**Dem.** *Se* $V = V_1 \oplus ... \oplus V_r$ *então todo* $v \in V$ *se escreve de modo único na forma* $v = v_1 + ... + v_r$, *onde* $v_i \in V_i$, $1 \leq i \leq r$. *Mas*

$$v_i = \sum_{k=1}^{n_i} a_{ki}v_{ik},\ 1 \leq i \leq r.$$

*Logo:*

$$v = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} a_{ki}v_{ik} \text{ e } B \text{ gera } V.$$

*Suponhamos que* $\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} a_{ki}v_{ik} = 0$. *Pondo* $v_i = \sum_{k=1}^{n_i} a_{ki}v_{ik}$, *temos que* $v_i \in V_i$, $i = 1, ..., r$. *Então:* $v_1 + ... + v_r = 0$ *e, como a soma é direta, temos* $v_i = 0$, *isto é,* $\sum_{k=1}^{n_i} a_{ki}v_{ik} = 0$, *donde* $a_{ki} = 0$ *pois* $v_{i1}, ..., v_{in_i}$ *são LI. Logo,* $B$ *é LI e, portanto,* $B$ *é base de* $V$.

*Reciprocamente, se* $B$ *é base de* $V$, *então* $v = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} a_{ki}v_{ik} = \sum_{i=1}^{r} v_i$, *onde* $v_i = \sum_{k=1}^{n_i} a_{ki}v_{ik}$ *pertence a* $V_i$, $i \leq i \leq r$. *Logo:* $V = V_1 + ... + V_r$. *A soma* *é direta pois se* $v_1 + ... + v_r = 0,\ v_i \in V_i$*, então* $\sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{n_i} a_{ki}v_{ik} = 0$*, donde* $a_{ki} = 0$ *e, portanto,* $v_i = 0,\ 1 \leq i \leq r$*.*

## Exercícios

1. Sejam $U, V, W$ os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^3$:
   $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + z = 0\}$; $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = z\}$ e $W = \{(0, 0, z) \in \mathbb{R}^3; z \in \mathbb{R}\}$. Mostre que $\mathbb{R}^3 = U + V$, $\mathbb{R}^3 = U + W$, $\mathbb{R}^3 = V + W$. Quando é que a soma é direta?

2. Sejam $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $U$ o subespaço das funções pares e $W$ o das ímpares. Mostre que $V = U \oplus W$.

3. Sejam U e W subespaços de V. Se
   $$V = U + W \text{ } e \text{ } dim\ V = dim\ U + dim\ W < \infty,$$
   prove que $V = U \oplus W$.

4. Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $K$, $U$ e $W$ subespaços de $V$. Prove:
   $$dim(U + W) \leq dim\ U + dim\ W$$

## 1.6 Exercícios do Capítulo 1

1. Determine uma base para o subespaço de $\mathbb{R}^4$ descrito por $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ tal que $x_1 = x_2 - 3x_3,\ x_3 = 2x_4$. Complete a base obtida a uma base do $\mathbb{R}^4$.

2. Em $V = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ considere $f_k(t) = e^{r_k t}$ onde $r_k \in \mathbb{R},\ 1 \leq k \leq n$. Prove que $f_1, ..., f_n$ são LI se, e só se, $r_1 \neq r_2 \neq ... \neq r_n$.

3. Sejam $v_1, ..., v_n$ LI e $u = b_1v_1 + ... + b_jv_j + ... + b_nv_n$ com $b_j \neq 0$. Prove que $v_1, ..., v_{j-1}, u, v_{j+1}, ..., v_n$ são LI.

4. Seja $W$ um subespaço do espaço vetorial $V$. Suponha que $v_1, ..., v_n \in V$ sejam LI e gerem um subespaço $U$ tal que $U \cap W = \{0\}$. Prove que os vetores $v_1 + W, ..., v_n + W$ são LI em $\dfrac{V}{W}$.

5. Sejam $V$ um espaço vetorial, $U$ e $W$ seus subespaços. Se $U$ e $W$ têm dimensões finitas, prove que:

$$dim\ U + dim\ W = dim(U + W) + dim(U \cap W).$$

6. Sejam $V$ um espaço vetorial real e $u, v \in V$. O segmento de reta de extremidades u e v é o conjunto $[u, v] = \{(1 - t)u + tv;\ 0 \leq t \leq 1\}$. $X \subset V$ é convexo se $u, v \in X \Rightarrow [u, v] \subset X$. Prove:
(a) Se $X, Y \subset V$ são convexos, então $X \cap Y$ é convexo.
(b) Se $X \subset V$ é convexo e $r, s, t$ são reais não negativos tais que $r + s + t = 1$, então $u, v, w \in X \Rightarrow ru + sv + tw \in X$.
(c) Se $X \subset V$, a envoltória convexa de $X$ é o conjunto $C(X)$ das combinações $t_1x_1 + ... + t_nx_n$, onde $t_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} t_i = 1$, $n \in \mathbb{N}$, chamadas combinações convexas dos elementos de $X$. Prove que $C(X)$ é convexo, que $X \subset C(X)$ e que se $C'$ é convexo e $X \subset C'$ então $C(X) \subset C'$.

7. Seja $V$ um espaço vetorial real. $A \subset V$ é uma variedade afim se $u, v \in A$, $t \in \mathbb{R} \Rightarrow (1 - t)u + tv \in A$. Prove:
(a) Se $A, B \subset V$ são variedades afins, então $A \cap B$ é variedade afim.
(b) Se $A \neq \emptyset$ é uma variedade afim em $V$, existe um único subespaço vetorial $W \subset V$ tal que para todo $x \in A$ tem-se

$$A = x + W = \{x + w; w \in W\}.$$

8. Dado o conjunto finito $X = \{a_1, ..., a_n\}$, ache uma base para o espaço vetorial real $\mathcal{F}(X, \mathbb{R}) = \{f : X \to \mathbb{R}\}$.

# Capítulo 2

# Aplicações Lineares

## 2.1 Definições e Exemplos

**Definição 2.1** *Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais sobre K. Dizemos que uma aplicação $T : V \to W$ é linear se:*

$$T(u + v) = T(u) + T(v)$$

$$T(av) = a \cdot T(u),$$

*quaisquer que sejam $u, v \in V$ e $a \in K$.*

**Exemplo 2.1.1** *A aplicação identidade $I : V \to V$, $I(v) = v$ é linear, bem como a aplicação zero, $0 : V \to V$, $0(v) = 0$ para todo $v \in V$.*

**Exemplo 2.1.2** *Seja $V = K[t]$ o espaço vetorial dos polinômios na variável $\underline{t}$ com coeficientes em K. A aplicação derivada $D : V \to V$, definida por $D(a_0 + a_1t + a_2t^2 + ... + a_mt^m) = a_1 + 2a_2t + ... + ma_mt^{m-1}$, é uma aplicação linear.*

**Exemplo 2.1.3** *Se $V_1$ e $V_2$ são espaços vetoriais sobre $K$ e $V = V_1 \times V_2$, as aplicações $p_1 : V \to V_1$ e $p_2 : V \to V_2$ definidas por $p_1(v_1, v_2) = v_1$ e $p_2(v_1, v_2) = v_2$ são lineares.*

**Exemplo 2.1.4** *Seja W um subespaço do espaço vetorial V. A aplicação $\pi : V \to \dfrac{V}{W}$, $\pi(v) = v + W$, é linear.*

**Exemplo 2.1.5** *Seja $V = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ o espaço vetorial real das funções contínuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. A aplicação $f \in V \longmapsto T(f) \in V$, onde*

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)dt, \ x \in [0, 1],$$

*é linear. É também linear a função* $f \in V \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f(t)dt \in \mathbb{R}$.

**Proposição 2.1** *Sejam V e W espaços vetoriais sobre K e* $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *uma base ordenada de V. Dada a sequência* $(w_1, ..., w_n)$ *de vetores de W, existe uma e uma única aplicação linear* $T : V \to W$ *tal que* $T(v_i) = w_i,\ 1 \leq i \leq n$.

**Dem.** *Seja* $v \in V$. *Então v se escreve, de modo único, como* $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$. *Definamos* $T : V \to W$ *por* $T(v) = a_1w_1 + ... + a_nw_n$. *É claro que* $T(v_i) = w_i,\ 1 \leq i \leq n$. *Mostremos que T é linear. Se* $u = b_1v_1 + ... + b_nv_n$, *então:*

$$T(u+v) = T[(a_1+b_1)v_1+...+(a_n+b_n)v_n] = (a_1+b_1)w_1+...+(a_n+b_n)w_n =$$

$$= (a_1w_1 + ... + a_nw_n) + b_1w_1 + ... + b_nw_n = T(v) + T(u).$$

*Se* $c \in K$, *temos*

$$T(cv) = T(ca_1v_1 + ... + ca_nv_n) = ca_1w_1 + ... + ca_nw_n =$$

$$= c(a_1w_1 + ... + a_nw_n) = c \cdot T(v).$$

*Logo, T é linear. Se* $L : V \to W$ *é aplicação linear tal que*

$$L(v_i) = w_i,\ 1 \leq i \leq n,$$

*então* $L(a_1v_1 + ... + a_nv_n) = a_1w_1 + ... + a_nw_n = T(v)$ *para todo* $v \in V$, *ou seja,* $T = L$, *o que mostra a unicidade de T.*

**Proposição 2.2** *Seja* $T : V \to W$ *linear. Então:*
*(a)* $T(0) = 0 \quad , \quad T(-v) = -v$.
*(b) Se* $U \subset V$ *é subespaço, então* $T(U) \subset W$ *é subespaço.*
*(c) Se* $U' \subset W$ *é subespaço, então* $T^{-1}(U') \subset V$ *é subespaço.*

**Dem.** *(a) Como T é linear,* $T(av) = aT(v)$ *para todo* $a \in K$ *e todo* $v \in V$. *Fazendo* $a = 0$, *vem:*

$$T(0 \cdot v) = 0 \cdot T(v),\ \text{donde: } T(0) = 0.$$

*Fazendo* $a = -1$, *vem:*

$$T(-v) = -T(v)$$

*(b)* $T(U) \subset W$ *é subespaço pois:*

*1.* $0 = T(0) \in T(U)$

*2. Se* $T(u), T(v) \in T(U)$ *então* $T(u) + T(v) = T(u + v) \in T(U)$

*3. Se* $a \in K$ *e* $T(v) \in T(U)$ *então* $aT(v) = T(av) \in T(U)$

*(c)* $T^{-1}(U') \subset V$ *é subespaço pois:*

*1.* $0 \in T^{-1}(U')$ *já que* $T(0) = 0 \in U'$

*2. Se* $u, v \in T^{-1}(U')$ *então* $T(u), T(v) \in U'$, *donde* $T(u) + T(v) = T(u + v) \in U'$, *donde* $u + v \in T^{-1}(U')$

*3. Se* $a \in K$ *e* $v \in T^{-1}(U')$ *então* $aT(v) = T(av) \in U'$ *e, portanto,* $av \in T^{-1}(U')$.

**Definição 2.2** *Seja* $T : V \to W$ *linear. O subespaço* $T(V) \subset W$ *é chamado de imagem de* $T$ *e anotado* $Im\ T$. *O subespaço* $T^{-1}(0) \subset V$ *é chamado de núcleo de* $T$ *e anotado* $\mathcal{N}(T)$. *Assim,*

$$Im\ T = \{T(v) \in W;\ v \in V\}$$

$$\mathcal{N}(T) = \{v \in V;\ T(v) = 0\}$$

**Obs.:** *Por definição* $T$ *é sobrejetora se* $Im\ T = W$ *e* $T$ *é injetora se* $u \neq v$ *implica* $T(u) \neq T(v)$.

**Proposição 2.3** *Seja* $T : V \to W$ *linear. São equivalentes:*
*(a)* $\mathcal{N}(T) = \{0\}$
*(b)* $T$ *é injetora*
*(c)* $T$ *transforma cada conjunto LI de vetores de* $V$ *em conjunto LI de vetores de* $W$.

**Dem.** $(a) \Leftrightarrow (b)$: $\mathcal{N}(T) = \{0\} \Leftrightarrow T(w) = 0$ *implica* $w = 0 \Leftrightarrow T(u - v) = 0$ *implica* $u - v = 0 \Leftrightarrow T(u) = T(v)$ *implica* $u = v \Leftrightarrow T$ *é injetora.*

$(b) \Rightarrow (c)$: *Seja* $X \subset V$ *um conjunto LI e seja* $Y = T(X)$. *Vamos provar que* $Y$ *é LI. De fato, se* $a_1y_1 + ... + a_ry_r = 0$ *onde* $r \in \mathbb{N}$ *e* $y_i = T(x_i)$, $1 \leq i \leq r$, $x_i \in X$, $a_i \in K$, *então* $a_1T(x_1) + ... + a_rT(x_r) = 0 \therefore T(a_1x_1 + ... + a_rx_r) = 0$, *donde* $a_1x_1 + ... + a_rx_r = 0$ *(pois* $\mathcal{N}(T) = \{0\}$*), o que implica* $a_1 = ... = a_r = 0$ *(pois* $X$ *é LI), resultando* $Y$ *ser LI.*

$(c) \Rightarrow (a)$: *Todo vetor* $v \neq 0$ *é LI, donde* $T(v)$ *é LI, ou seja,* $T(v) \neq 0$. *Portanto:* $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

**Obs.:** *Se* $T : V \to W$ *é linear e* $v_1, ..., v_n$ *geram* $V$, *então é claro que*

*$T(v_1), ..., T(v_n)$ geram $Im\ T$ pois todo $w \in Im\ T$ é da forma $w = T(v)$ para algum $v \in V$ e $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$. Resulta que, se $V$ tem dimensão finita, então $dim\ Im\ T \leq dim\ V$.*

**Definição 2.3** *Seja $T : V \to W$ linear, $V$ de dimensão finita. O posto de $T$ é a dimensão de $Im\ T$:*

$$r = posto(T) = dim\ Im\ T, \text{ donde } r \leq dim\ V.$$

**Proposição 2.4** *Seja $T : V \to W$ linear. São equivalentes:*
*(a) $T$ é sobrejetora*
*(b) $T$ transforma conjunto de geradores de $V$ em conjunto de geradores de $W$.*

**Dem.** *(a) $\Rightarrow$ (b):*

*Sejam $X$ um conjunto de geradores de $V$ e $Y = T(X)$. Vamos provar que $Y$ gera $W$. Se $w \in W$ e $T$ é sobrejetora, existe $v \in V$ tal que $w = T(v)$. Mas $v = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$, $a_i \in K$, $x_i \in X$. Logo, $T(v) = \sum_{i=1}^{m} a_i T(x_i) = \sum_{i=1}^{m} a_i y_i$ com $y_i \in Y$, ou seja, $Y$ gera $W$.*

*(b) $\Rightarrow$ (a):*

*Sejam $X$ um conjunto de geradores de $V$ e $Y = T(X)$. Então $Y$ gera $W$. Se $w \in W$, temos $w = \sum_{i=1}^{p} a_i y_i$, $a_i \in K$, $y_i \in Y$, $y_i = T(x_i)$, $x_i \in X$. Logo, $w = \sum_{i=1}^{p} a_i T(x_i) = T\left(\sum_{i=1}^{p} a_i x_i\right) = T(v)$ com $v \in V$, isto é, $T$ é sobrejetora.*

**Exemplo 2.1.6** *Seja $T : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, 2x_1 + x_2 + 3x_3, -x_1 - 2x_2 - 3x_3)$. $T$ é linear e $Im\ T$ é gerada por $T(1, 0, 0) = (1, 2, -1) = w_1, T(0, 1, 0) = (-1, 1, -2) = w_2$ e $T(0, 0, 1) = (0, 3, -3) = w_3$. É fácil ver que $w_1$ e $w_2$ são LI e que $w_3 = w_1 + w_2$. Portanto, $\{w_1, w_2\}$ é base de $Im\ T$ e $posto(T) = r = 2$. O núcleo de $T$ é definido pelas equações:*

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

*A solução deste sistema é dada por $x_1 = x_2 = -x_3$. Logo: $\mathcal{N}(T) = \{(-t, -t, t) \in \mathbb{C}^3;\ t \in \mathbb{C}\}$ e, por exemplo, $(-1, -1, 1)$ é base de $\mathcal{N}(T)$.*

*Observemos que $dim\ \mathbb{C}^3 = 3 = dim\ \mathcal{N}(T) + dim\ Im\ T$, o que ilustra o teorema seguinte.*

**Proposição 2.5** *(Teorema do núcleo e da imagem)*
*Sejam $V$, $W$ espaços vetoriais sobre $K$ e $T : V \to W$ linear. Se $V$ tem dimensão finita, então:*

$$dim\ V = dim\ \mathcal{N}(T) + dim\ Im\ T.$$

**Dem.** *Seja $\{v_1, ..., v_s\}$ base de $\mathcal{N}(T)$ e sejam $v_{s+1}, ..., v_n \in V$ tais que $\{v_1, ..., v_s, v_{s+1}, ..., v_n\}$ seja base de $V$. Se $w = T(v) \in Im\ T$ e $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, então $w = a_{s+1}T(v_{s+1}) + ... + a_nT(v_n)$ já que $T(v_1) = ... = T(v_s) = 0$; logo $T(v_{s+1}), ..., T(v_n)$ geram $Im\ T$.*

*Além disso, esses vetores são LI; de fato, se $b_{s+1}T(v_{s+1}) + .... + b_nT(v_n) = 0$, então $T(b_{s+1}v_{s+1} + ... + b_nv_n) = 0$, ou seja, $b_{s+1}v_{s+1} + ... + b_nv_n \in \mathcal{N}(T)$. Portanto, podemos escrever $b_{s+1}v_{s+1} + ... + b_nv_n = b_1v_1 + ... + b_sv_s$.*

*Como $v_1, ..., v_s, v_{s+1}, ..., v_n$ são LI, resulta $b_{s+1} = ... = b_n = 0$ (e também $b_1 = ... = b_s = 0$). Resulta que $\{T(v_{s+1}), ..., T(v_n)\}$ é base de $Im\ T$ e $dim\ Im\ T = n - s = dim\ V - dim\ \mathcal{N}(T)$, donde a tese.*

**Corolário 2.5.1** *Sejam $T : V \to W$ linear, $dim\ V = n$, $dim\ W = p$. Então:*
*(a) $T$ é injetora $\Leftrightarrow r = posto(T) = n$. Neste caso, $dim\ V \leq dim\ W$.*
*(b) $T$ é sobrejetora $\Leftrightarrow r = posto(T) = p$. Neste caso, $dim\ V \geq dim\ W$.*

**Corolário 2.5.2** *Seja $T : V \to W$ linear, com $dim\ V = dim\ W < \infty$. São equivalentes:*
*(a) $T$ é bijetora;*
*(b) $T$ é injetora;*
*(c) $T$ é sobrejetora;*
*(d) se $\{v_1, ..., v_n\}$ é base de $V$, então $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ é base de $W$;*
*(e) existe base $\{v_1, ..., v_n\}$ de $V$ tal que $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ seja base de $W$.*

**Dem.** *$(a) \Rightarrow (b)$: É óbvio.*

*$(b) \Rightarrow (c)$: Como $T$ é injetora, temos $posto(T) = dim\ V = dim\ W = n$, donde $Im\ T = W$.*

*$(c) \Rightarrow (d)$: $Tv_1, ..., Tv_n$ geram $Im\ T = W$. Como $dim\ W = n$, resulta que $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ é base de $W$.*

*$(d) \Rightarrow (e)$: É óbvio.*

*$(e) \Rightarrow (a)$: Seja $\{v_1, ..., v_n\}$ base de $V$ tal que $\{Tv_1, ..., Tv_n\}$ seja base de $W$. Como $Tv_1, ..., Tv_n \in Im\ T$ e geram $W$ resulta que $W \subset Im\ T$, donde $Im\ T = W$, ou seja, $T$ é sobrejetora.*

*Se $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ é tal que $T(v) = 0$, então*

$$a_1T(v_1) + ... + a_nT(v_n) = 0,$$

*donde $a_1 = ... = a_n = 0$ pois $Tv_1, ..., Tv_n$ são LI. Logo, $v = 0$ e $T$ é <u>injetora</u>. Portanto, $T$ é bijetora.*

## Exercícios

1. Seja $T : V \to W$ linear. Prove que são equivalentes:
   (a) T é injetora;
   (b) para toda decomposição $V = V_1 \oplus V_2$ tem-se $T(V) = T(V_1) \oplus T(V_2)$
2. Ache $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ linear tal que $T(1, 1) = -1$ e $T(1, 0) = 3$.
3. Seja $T : V \to W$ linear. Prove que se $T(v_1), ..., T(v_n)$ são LI, então $v_1, ..., v_n$ são LI.
4. Ache $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ linear cuja imagem seja gerada por (1,0,2,-4) e (0,2,-1,3).
5. Seja $T : V \to V$ linear. Prove que se $Tv_1, ..., Tv_n$ geram V, então $v_1, ..., v_n$ geram V.
6. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $T(x, y) = (ax + by, cx + dy)$, com $ad - bc \neq 0$. Prove:
   (a) $v \neq 0 \Rightarrow Tv \neq 0$.
   (b) Toda reta $l \subset \mathbb{R}^2$ é transformada por T numa reta.
   (c) T transforma retas paralelas em retas paralelas.

# 2.2 Composição e Inversão de Aplicações Lineares

**Proposição 2.6** *Sejam U, V, W espaços vetoriais sobre o corpo $K$ e $T : U \to V$, $L : V \to W$ aplicações lineares. Então a composta $L \circ T : U \to W$ é linear.*

**Dem.** *Se $u, v \in U$, então*

$$(L \circ T)(u + v) = L(T(u + v)) = L(Tu + Tv) = L \circ T(u) + L \circ T(v).$$

*Se $a \in K$ e $u \in U$, então*

$$(L \circ T)(au) = L(T(au)) = L(aT(u)) = aL(T(u)) = a(L \circ T)(u).$$

*Resulta que $L \circ T$ é linear.*

**Proposição 2.7** *Seja $T : V \to W$ linear bijetora. Então a aplicação inversa $T^{-1} : W \to V$ também é linear (e bijetora).*

**Dem.** *Sejam $w_1 = T(v_1)$ e $w_2 = T(v_2)$ elementos arbitrários de $W$. Então:*

$$T^{-1}(w_1+w_2) = T^{-1}(Tv_1+Tv_2) = T^{-1}(T(v_1+v_2)) = v_1+v_2 = T^{-1}(w_1)+T^{-1}(w_2).$$

*Se $a \in K$ e $w = T(v) \in W$, então: $T^{-1}(aw) = T^{-1}(aT(v)) = T^{-1}(T(av)) = av = aT^{-1}(w)$.*

*Resulta que $T^{-1} : W \to V$ é linear.*

**Definição 2.4** *Uma aplicação linear $T : V \to W$ é um isomorfismo de $V$ sobre $W$ se $T$ é bijetora. Se, além disso, $V = W$ então diremos que $T$ é um automorfismo de $V$. Se existe um isomorfismo de $V$ sobre $W$ dizemos que $V$ e $W$ são isomorfos.*

**Corolário 2.7.1** *A composta de dois isomorfismos é um isomorfismo. A inversa de um isomorfismo é um isomorfismo.*
**Obs.:** *Representamos por $\mathcal{L}(V, W)$ o conjunto das aplicações lineares de $V$ em $W$. No caso em que $V = W$ é usual chamar uma aplicação linear $T : V \to V$ de operador linear em $V$ e representar $\mathcal{L}(V, V)$ simplesmente por $\mathcal{L}(V)$ e por $GL(V)$ o conjunto dos automorfismos de $V$.*

**Proposição 2.8** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre o corpo $K$. Se $T, L \in GL(V)$ então $T \circ L \in GL(V)$ e $(T \circ L)^{-1} = L^{-1} \circ T^{-1}$.*

**Dem.** *Já vimos que a composta de automorfismos é automorfismo. Basta então verificar que*

$$(T \circ L) \circ (L^{-1} \circ T^{-1}) = (L^{-1} \circ T^{-1}) \circ (T \circ L) = I,$$

*operador identidade de $V$, o que é imediato.*

**Proposição 2.9** *Se $T : V \to W$ é linear sobrejetora, então $W$ é isomorfo ao espaço quociente $\dfrac{V}{\mathcal{N}(T)}$.*

**Dem.** *Seja $\pi : V \to \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)}$ a aplicação quociente, isto é, $\pi(v) = v + \mathcal{N}(T)$, $v \in V$. É imediato que $\pi$ é linear.*

*Seja $L : \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} \to W$ definida por $L(v+\mathcal{N}(T)) = T(v)$, ou seja, $L \circ \pi = T$ (dizemos então que o diagrama abaixo comuta). Mostremos que $L$ está bem definida* e é *injetora:*

$$L(u + \mathcal{N}(T)) = L(v + \mathcal{N}(T)) \Leftrightarrow T(u) = T(v) \Leftrightarrow T(u - v) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u - v \in \mathcal{N}(T) \Leftrightarrow u + \mathcal{N}(T) = v + \mathcal{N}(T).$$

*Além disso, $L$ é sobrejetora pois, dado $w \in W$, existe $v \in V$ tal que $T(v) = w$ (já que $T$ é sobrejetora) e, portanto, $L(v + \mathcal{N}(T)) = w$. Logo, $L$ é bijetora. Resta provar que $L$ é linear. Sejam $u, v \in V$, então: $L(u + \mathcal{N}(T) + v + \mathcal{N}(T)) = L(u + v + \mathcal{N}(T)) = T(u + v) = T(u) + T(v) = L(u + \mathcal{N}(T)) + L(v + \mathcal{N}(T))$. Se $a \in K$ e $v \in V$, então: $L(a(v + \mathcal{N}(T))) = (av+\mathcal{N}(T)) = T(av) = aT(v) = aL(v+\mathcal{N}(T))$. Resulta que $L : \dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} \to W$ é um isomorfismo.*

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "T"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & W \\
\dfrac{V}{\mathcal{N}(T)} \arrow[ur, "L"'] &
\end{tikzcd}$$

**Corolário 2.9.1** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$, $U$ e $W$ subespaços de $V$ tais que $V = U \oplus W$. Então, $\dfrac{V}{U}$ é isomorfo a $W$.*

**Dem.** *Seja $p : V \to W$ definida por $p(v) = w$, onde $v = u + w$ com $u \in U$ e*

*$w \in W$. É imediato que $p$ é linear sobrejetora e*

$$\mathcal{N}(p) = \{v \in V;\ p(v) = 0\} = U.$$

*Portanto, pela proposição 2.9, temos que $\dfrac{V}{U}$ é isomorfo a $W$.*

**Corolário 2.9.2** *Sejam $T : V \to W$ linear e $U \subset V$ subespaço tal que $V = \mathcal{N}(T) \oplus U$. Então $U$ é isomorfo a $Im\ T$.*

**Dem.** *Decorre da proposiçã 2.9 que $\dfrac{V}{\mathcal{N}(T)}$ é isomorfo a $Im\ T$. Pelo corolário 2.9.1 temos que $\dfrac{V}{\mathcal{N}(T)}$ é isomorfo a $U$. Resulta que $U$ e $Im\ T$ são isomorfos.*

**Proposição 2.10** *Sejam $U$ e $W$ subespaços do espaço vetorial $V$ de dimensão finita sobre o corpo $K$. Então:*

$$dim\ U + dim\ W = dim\ (U + W) + dim\ (U \cap W).$$

**Dem.** *Seja $T : U \times W \to V,\ T(u, w) = u - w$. É imediato que $T$ é linear. Além disso,*

$$Im\ T = \{v = u - w;\ u \in U,\ w \in W\} = U + W$$

$$\mathcal{N}(T) = \{(u, w) \in U \times W;\ u = w\} = \{(u, u) \in U \times W,\ u \in U \cap W\}.$$

*É fácil ver que a aplicação $u \in U \cap W \longmapsto (u, u) \in \mathcal{N}(T)$ é um isomorfismo. Portanto, $dim\ \mathcal{N}(T) = dim\ (U \cap W)$. Pela proposição 2.5, temos: $dim\ (U \times W) = dim\ (U + W) + dim\ (U \cap W)$, ou seja,*

$$dim\ U + dim\ W = dim\ (U + W) + dim(U \cap W).$$

**Proposição 2.11** *Todo espaço vetorial de dimensão $n$ sobre $K$ é isomorfo a $K^n$.*

**Dem.** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão $n$ sobre $K$. Seja $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de $V$. Se $v \in V$, então $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$, onde $a_i \in K,\ 1 \le i \le n$.*

*Seja $T : V \to K^n$ definida por $T(v) = T(a_1v_1 + ... + a_nv_n) = (a_1, ..., a_n) \in K^n$. É fácil verificar que $T$ é um isomorfismo.*

**Corolário 2.11.1** *Todos os espaços vetoriais de mesma dimensão finita $n$ sobre $K$ são isomorfos entre si.*

**Exemplo 2.2.1** *Seja $T : V \to V$ linear tal que $T^3 = 0$. Prove que $I - T$ é um automorfismo de $V$.*

*A igualdade formal $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\ldots$ nos sugere que $(I-T)^{-1} = I + T + T^2 + T^3 + \ldots = I + T + T^2$ já que $T^3 = 0$, donde $T^n = 0$ para $n \geq 3$. De fato, temos:*

$$(I-T)(I+T+T^2) = I + T + T^2 - T - T^2 - T^3 = I$$

$$(I+T+T^2)(I-T) = I - T + T - T^2 + T^2 - T^3 = I$$

*Portanto, $I - T$ é um automorfismo de $V$ e $(I-T)^{-1} = I + T + T^2$.*

**Exemplo 2.2.2** *$U$ e $W$ sendo dois subespaços suplementares do espaço vetorial $V$, isto é, $V = U \oplus W$, todo $v \in V$ se escreve, de modo único, na forma $v = u + w$, onde $u \in U$ e $w \in W$. Consideremos $T : U \times W \to U \oplus W$ definida por $T(u, w) = u + w$. É fácil ver que $T$ é linear bijetora, ou seja, $T$ é um isomorfismo de $U \times W$ sobre $U \oplus W$.*

*Reciprocamente, dados dois espaços vetoriais $U$ e $W$ sobre $K$, para todo $v = (u, w)$ de $V = U \times W$ temos, de modo único: $(u, w) = (u, 0) + (0, w)$. Se $U'$ e $W'$ são, respectivamente, os subespaços de $V$ descritos por $(u, 0)$ e $(0, w)$, então é claro que $U'$ é isomorfo a $U$ e que $W'$ é isomorfo a $W$. Então, $V = U \times W = U' \oplus W'$. Se identificarmos $U$ com $U'$ bem como $W$ com $W'$, então poderemos considerar $U$ e $W$ como subespaços suplementares de $U \times W$, o que significa identificar os dois espaços isomorfos $U \times W$ e $U \oplus W$. Nestas condições, a aplicação de $U \oplus W$ sobre $U$ dada por $u + w \longmapsto u$, se identifica com $p_1 : U \times W \to U$, $p_1(u, w) = u$, e é a projeção de $V = U \oplus W$ sobre o subespaço $U$, paralelamente ao subespaço suplementar $W$. Analogamente, a aplicação $u + w \longmapsto w$ se identifica com a projeção $p_2 : U \times W \to W$, $p_2(u, w) = w$ de $V$ sobre o subespaço $W$ paralelamente a $U$.*

*Em particular, se $V = U \oplus W$ tem dimensão finita, então: dim $(U \times W) =$ dim $(U \oplus W) =$ dim $U +$ dim $W$, já visto anteriormente.*

# Exercícios

1. Sejam $T, L \in \mathcal{L}(V)$ tais que $L \circ T = T \circ L$. Prove:
   (a) $L(\mathcal{N}(T) \subset \mathcal{N}(T)$;
   (b) $L(Im\ T) \subset Im\ T$.

2. Sejam $L : V \to U,\ T : U \to W$ lineares. Se U, V e W têm dimensão finita, prove que:
   (a) $posto(T \circ L) \leq posto(T)$;
   (b) $posto(T \circ L) \leq posto(L)$.

3. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K, L e T elementos de $\mathcal{L}(V)$ tais que $L \circ T = I$. Mostre que L é invertível e que $T = L^{-1}$.

4. Sejam $T : V \to U$ linear e $W \subset V$ subespaço. Seja $T|_W = L : W \to U$ a restrição de T a W, isto é, $T(w) = L(w)$ para todo $w \in W$. Prove:
   (a) L é linear;
   (b) $\mathcal{N}(L) = \mathcal{N}(T) \cap W$;
   (c) $Im\ L = T(W)$.

5. Seja $V = P_{n+1}$ o espaço vetorial dos polinômios de grau menor ou igual a n, com coeficientes reais. Ache um suplementar do subespaço W de V formado pelos polinômios $p(t)$ tais que $p(1) = 0$ e prove que $\dfrac{V}{W}$ é isomorfo a $\mathbb{R}$.

## 2.3 Álgebra das Aplicações Lineares

Se V e W são espaços vetoriais sobre o corpo K, vimos que $\mathcal{L}(V, W)$ representa o conjunto das aplicações lineares de V em W. Se $L, T \in \mathcal{L}(V, W)$ e $a \in K$, definimos $L + T$ e $aT$, aplicações de V em W, por:

$$(L + T)(v) = L(v) + T(v)$$

$$(aT)(v) = aT(v),$$

para todo $v \in V$. É fácil verificar que $L+T$ e $aT$ são lineares, isto é, elementos de $\mathcal{L}(V, W)$. Assim, no conjunto $\mathcal{L}(V, W)$ temos duas leis, $(L, T) \longmapsto L+T$ e $(a, T) \longmapsto aT$, e deixamos aos cuidados do leitor provar que são satisfeitos os oito postulados que definem uma estrutura vetorial. Lembramos apenas que a aplicação linear zero é a aplicação $0(v) = 0$ para todo $v \in V$ e que a oposta de $T \in \mathcal{L}(V, W)$ é a aplicação $(-T)$ tal que $(-T)(v) = -T(v)$ para todo $v \in V$. Concluímos que $\mathcal{L}(V, W)$, munido das leis de adição $(L, T) \longmapsto L+T$ e de multiplicação por escalar $(a, T) \longmapsto aT$, é um espaço vetorial sobre K.

### Estrutura de Anel de $\mathcal{L}(V)$

Se $L, T \in \mathcal{L}(V)$, vimos que $L + T$ e $L \circ T$ são elementos de $\mathcal{L}(V)$. Assim, $\mathcal{L}(V)$ está munido de duas leis, $(L, T) \longmapsto L + T$ e $(L, T) \longmapsto L \circ T$, que

tornam $\mathcal{L}(V)$ um anel com identidade, isto é:
(a) para a adição $\mathcal{L}(V)$ é um grupo abeliano:

1. $L+T=T+L$;
2. $(L+T)+S=L+(T+S)$;
3. existe $0 \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T+0=T$;
4. dado $T \in \mathcal{L}(V)$ existe $(-T) \in \mathcal{L}(V)$ tal que $T+(-T)=0$, quaisquer que sejam $L, T, S \in \mathcal{L}(V)$.

(b) o "produto" $(L,T) \longmapsto L \circ T$ tem as propriedades:

1. $(L \circ T) \circ S = L \circ (T \circ S)$;
2. existe $I \in \mathcal{L}(V)$ tal que $I \circ T = T \circ I = T$;
3. $(L+T) \circ S = L \circ S + T \circ S$ e $L \circ (T+S) = L \circ T + L \circ S$, quaisquer que sejam $L, T, S \in \mathcal{L}(V)$.

## Estrutura de Grupo de $GL(V)$

O conjunto $GL(V)$ dos automorfismos do espaço vetorial V é um subconjunto de $\mathcal{L}(V)$; se $L, T \in GL(V)$ vimos que $L \circ T$ e $T^{-1}$ pertencem a $GL(V)$ e a identidade I de V também pertence a $GL(V)$. Portanto, $GL(V)$ munido da operação $(L,T) \longmapsto L \circ T$ é um grupo, chamado grupo linear de V. $GL(V)$ é o grupo dos elementos invertíveis do anel $\mathcal{L}(V)$.

## Estrutura de Álgebra de $\mathcal{L}(V)$

Se V é um espaço vetorial sobre K, $\mathcal{L}(V)$ está munido das leis:
(1) adição: $(L,T) \longmapsto L+T$;
(2) multiplicação por escalar: $(a,T) \longmapsto aT$;
(3) produto: $(L,T) \longmapsto L \circ T$.

Para as leis (1) e (2), $\mathcal{L}(V)$ tem uma estrutura de espaço vetorial sobre K. Para as leis (1) e (3), $\mathcal{L}(V)$ tem uma estrutura de anel. Além disso, é fácil ver que $a(L \circ T) = (aL) \circ T = L \circ (aT)$, quaisquer que sejam $L, T \in \mathcal{L}(V)$ e $a \in K$. Vemos assim que $\mathcal{L}(V)$ tem uma estrutura de álgebra (linear) sobre K, de acordo com a seguinte definição.

**Definição 2.5** *Sejam K um corpo a A um conjunto munido de uma adição, de uma multiplicação por escalar e de um produto. Dizemos que A é uma álgebra sobre K se:*

*(1) A, munido da adição e da multiplicação por escalar, é um espaço vetorial sobre K.*
*(2) A, munido da adição e do produto, é um anel.*
*(3)* $a(L \cdot T) = (aL) \cdot T = L \cdot (aT)$*, quaisquer que sejam* $L, T \in A$ *e* $a \in K$*.*

**Exemplo 2.3.1** *O corpo* $\mathbb{C}$ *dos complexos é uma álgebra sobre* $\mathbb{R}$*.*

**Exemplo 2.3.2** $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *munido das leis* $f+g$*,* $f \cdot g$*,* $af$ *é uma álgebra sobre* $\mathbb{R}$*.*

**Exemplo 2.3.3** *No espaço vetorial* $\mathcal{L}(V)$ *consideremos o produto* $(L, T) \longmapsto [L, T] = L \circ T - T \circ L$ *(colchete de Lie de L e T). É imediato que:*
*(1)* $\Big[[L, T], S\Big] = \Big[L, [T, S]\Big]$
*(2)* $[L + T, S] = [L, S] + [T, S]$ *e* $[L, T + S] = [L, T] + [L, S]$
*(3)* $[aL, T] = [L, aT] = a[L, T]$*, quaisquer que sejam* $L, T, S \in \mathcal{L}(V)$ *e* $a \in K$*.*
*Portanto o espaço* $\mathcal{L}(V)$*, munido do produto* $(L, T) \longmapsto [L, T]$*, é uma álgebra sobre K, anotada* $gl(V)$*.*

## 2.4 Exercícios do Capítulo 2

1. Sejam $V_1,\ V_2$ espaços vetoriais isomorfos entre si, bem como $W_1$ e $W_2$. Prove que $\mathcal{L}(V_1, W_1)$ é isomorfo a $\mathcal{L}(V_2, W_2)$.

2. Sejam V, M espaços vetoriais sobre K, $V = V_1 \oplus V_2$. Prove que $\mathcal{L}(V_1 \oplus V_2, W)$ é isomorfo a $\mathcal{L}(V_1, W) \times \mathcal{L}(V_2, W)$.

3. Seja V o espaço vetorial real das funções $t \longmapsto x(t)$ de $[0, 1]$ em $\mathbb{R}$, de classe $C^\infty$. Consideremos em V os operadores $x \longmapsto f(x) = \dfrac{dx}{dt}$ e $x \longmapsto g(x)$ com $g(x)(t) = \displaystyle\int_0^t x(u)du$. Prove que se $x(0) \neq 0$ então $(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$.

4. Sejam V um espaço vetorial e $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de V. Prove que $r$ vetores $u_1, ..., u_r \in V$, $r \leq n$, são LI se, e só se, existe um automorfismo T de V tal que $T(v_j) = u_j,\ 1 \leq j \leq r$.

5. Sejam $f : V \to W$ linear e $\varphi : V \times W \to V \times W$ tal que $\varphi(v, w) = (v, w - f(v))$. Prove que $\varphi$ é um automorfismo de $V \times W$.

6. Dois operadores lineares $S, T \in \mathcal{L}(V)$ são <u>semelhantes</u> se existe operador invertível $P \in GL(V)$ tal que $S = P^{-1}TP$. Se V tem dimensão finita, prove que operadores semelhantes têm o mesmo posto.

7. Seja V um espaço vetorial de dimensão $n$ sobre K. Para $k = 1, 2, ..., n$, exiba $T : V \to V$ linear tal que $T^k = 0$ mas $T^j \neq 0$ se $j < k$.

8. Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T : V \to W$ linear. Prove:
(a) T é injetora $\Leftrightarrow$ existe $S : W \to V$ linear tal que $S \circ T = id_V$
(b) T é sobrejetora $\Leftrightarrow$ existe $S : W \to V$ linear tal que $T \circ S = id_W$

9. Seja V um espaço vetorial de dimensão infinita enumerável de base $(v_1, v_2, ..., v_n, ...)$. Seja $T : V \to V$ o operador linear definido por $T(v_{2k+1}) = 0,\ T(v_{2k}) = v_k,\ k \in \mathbb{N}$.
(a) Prove que T é sobrejetora mas não injetora.
(b) Prove que existe $S : V \to V$ linear injetora, mas não sobrejetora, tal que $T \circ S = id$.

10. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, $V' \subset V$ um subespaço, W um espaço vetorial, $W' \subset W$ um subespaço, e $T : V \to W$ linear. Prove:
(a) $dim\ \Big(T(V')\Big) = dim\ V' - dim\ (\mathcal{N}(T) \cap V')$
(b) $dim\ T^{-1}(W') = dim\ \mathcal{N}(T) + dim\ (Im\ T \cap W')$.

11. $E_0, E_1, ..., E_n$ sendo espaços vetoriais sobre o mesmo corpo K $(n \geq 2)$ dizemos que o diagrama

$$E_0 \xrightarrow{f_0} E_1 \to ... \to E_{k-1} \xrightarrow{f_{k-1}} E_k \xrightarrow{f_k} E_{k+1} \to ... \to E_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} E_n$$

é uma <u>sequência exata</u> se para $0 \leq k \leq n-2$ tem-se $\mathcal{N} f_{k+1} = Im\ f_k$, as aplicações $f_k$ sendo lineares $(0 \leq k \leq n-1)$. Se $E_0$ (resp. $E_n$) é igual a $\{0\}$, que escrevemos 0, não escreveremos $f_0$ (resp. $f_{n-1}$) pois só existe uma aplicação linear de 0 em $E_1$ (resp. de $E_{n-1}$ em 0).
(a) Prove:
$[0 \to E \xrightarrow{f} F$ é uma sequência exata $] \Leftrightarrow$ f é injetora
$[E \xrightarrow{f} F \to 0$ é uma sequência exata $] \Leftrightarrow$ f é sobrejetora.
(b) Prove que os diagramas seguintes são sequências exatas:

$$0 \to F \xrightarrow{i} E \xrightarrow{j} \frac{E}{F} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{N} f \xrightarrow{i} E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{j} \frac{F}{Im\ f} \to 0$$

($f$ aplicação linear, $i$ injeção canônica, $j$ sobrejeção canônica).

# Capítulo 3

# Matrizes

## 3.1 Definições

**Definição 3.1** *Sejam $K$ um corpo, $m$ e $n$ inteiros positivos e $I_n = \{1, 2, ..., n\}$. Uma matriz $m \times n$ sobre $K$ é uma função $(i, j) \in I_m \times I_n \longmapsto a_{ij} \in K$. Em geral os escalares $a_{ij}$ são dispostos em $m$ linhas e $n$ colunas, o primeiro índice indicando a linha e o segundo a coluna ocupadas por $a_{ij}$:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij}),\ 1 \leq i \leq m,\ 1 \leq j \leq n$$

*Os escalares $a_{ij}$ são os elementos da matriz $A = (a_{ij})$. Observemos que duas matrizes, $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$, ambas $m \times n$, são iguais se, e só se, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo par $(i, j)$.*

*A matriz zero, $m \times n$, é a que tem todos seus elementos iguais a zero.*

*A matriz $A$ é quadrada quando o número de linhas é igual ao de colunas, isto é, quando ela é do tipo $n \times n$; $n$ é a ordem da matriz quadrada $A$. Numa matriz quadrada os elementos $a_{ii}$, que têm os índices iguais, formam a diagonal principal.*

*A matriz identidade (ou unidade) de ordem $n$ é a matriz quadrada $I_n$ na qual todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais iguais a zero. Por exemplo, $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. O elemento genérico de $I_n$ é o* *símbolo de Kronecker, definido por:*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \neq j \end{cases}.$$

*Assim,* $I_n = (\delta_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

*Vamos introduzir no conjunto* $M_{m \times n}(K)$, *das matrizes* $m \times n$ *sobre* $K$, *uma estrutura vetorial. Para isto precisamos definir a adição de matrizes e o produto de uma matriz por um escalar.*

**Definição 3.2** *Sejam* $A = (a_{ij})$ *e* $B = (b_{ij})$ *matrizes* $m \times n$. *A soma* $C = A + B$ *é a matriz* $m \times n$, $C = (c_{ij})$, *tal que* $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ *para todo par* $(i, j)$.

*A adição matricial goza das seguintes propriedades de verificação imediata:*
*(1)* $A + B = B + A$
*(2)* $A + (B + C) = (A + B) + C$
*(3)* $A + 0 = A$, *onde 0 é a matriz zero* $m \times n$
*(4)* $A + (-A) = 0$ *onde, sendo* $A = (a_{ij})$, *temos* $(-A) = (-a_{ij})$.

**Definição 3.3** *Sejam* $c \in K$ *e* $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}(K)$. *A matriz* $B = (b_{ij})$, *onde* $b_{ij} = c \cdot a_{ij}$ *para todo par* $(i, j)$, *é o produto de c por A, anotado* $B = c \cdot A$. *É claro que* $B \in M_{m \times n}(K)$.

*A multiplicação de matriz por escalar tem as seguintes propriedades, de fácil verificação:*
*(1)* $1 \cdot A = A$
*(2)* $c \cdot (A + B) = c \cdot A + c \cdot B$
*(3)* $(c + d) \cdot A = c \cdot A + d \cdot A$
*(4)* $c(d \cdot A) = (cd) \cdot A$,
*quaisquer que sejam* $A, B \in M_{m \times n}(K)$ *e* $c, d \in K$.

*Vemos assim que* $M_{m \times n}$, *munido das leis de adição e de multiplicação por escalar, é um espaço vetorial sobre K. Quando* $m = n$ *escrevemos apenas* $M_n(K)$ *ou simplesmente* $M_n$.

*Vamos achar uma base para* $M_{m \times n}(K)$. *Para isso, consideremos as matrizes* $E_{ij}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, *onde cada* $E_{ij}$ *é* $m \times n$ *e tem todos os elementos iguais a zero, exceto o situado na linha* $i$ *e na coluna* $j$, *que é igual a um:*

$$E_{ij} = \begin{array}{cl} \begin{pmatrix} 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ 0 & ... & 1 & ... & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & ... & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \leftarrow \textit{linha } i \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \textit{coluna } j \end{array} & \end{array}$$

**Proposição 3.1** *O conjunto* $\{E_{11}, ..., E_{1n}, ..., E_{m1}, ..., E_{mn}\}$ *é uma base de* $M_{m\times n}(K)$.

**Dem.** *Se* $A = (a_{ij})$ *é* $m \times n$ *é claro que* $A = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij}$, *ou seja, as matrizes* $E_{ij}$ *<u>geram</u>* $M_{m\times n}(K)$. *Além disso, elas são LI, pois se* $\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}E_{ij} = 0$, *então* $A = (a_{ij}) = 0$, *donde* $a_{ij} = 0$ *para todo par* $(i, j)$.

**Corolário 3.1.1** *dim* $M_{m\times n}(K) = m \cdot n$.

## 3.2 Produto de Matrizes

**Definição 3.4** *Sejam* $A = (a_{ij})$ – $m \times n$ – *e* $B = (b_{ij})$ – $n \times p$, *ou seja, o número de <u>colunas</u> de A é igual ao número de <u>linhas</u> de B. O produto* $C = A \cdot B$ *é a matriz* $m \times p$, $C = (c_{ij})$, *tal que* $c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$.

**Exemplo 3.2.1**

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$$

*o que mostra que o produto não é comutativo.*

**Proposição 3.2** *(a)* $(AB)C = A(BC)$
*(b)* $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$; $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$

*(c)* $I_n A = AI_n = A$,
*onde se supõem definidos os produtos e somas (das matrizes) indicados, e em (c)* $A$ *é* $m \times n$.

**Dem.** *(a) Sejam:* $A = (a_{ij})$ *do tipo* $m \times n$ .
$B = (b_{ij})$ *do tipo* $n \times p$
$C = (c_{ij})$ *do tipo* $p \times q$

*Então:* $AB = (d_{ij})$ *é* $m \times p$ *e* $(AB)C = (e_{ij})$ *é* $m \times q$
$BC = (f_{ij})$ *é* $n \times q$ *e* $A(BC) = (g_{ij})$ *é* $m \times q$,
*ou seja, se o primeiro membro está definido, então o segundo também, e é do mesmo tipo.*

*Temos:*
$$e_{ij} = \sum_{k=1}^{p} d_{ik}c_{kj} = \sum_{k=1}^{p} c_{kj} \sum_{r=1}^{n} a_{ir}b_{rk}$$
$$g_{ij} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir}f_{rj} = \sum_{r=1}^{n} a_{ir} \sum_{k=1}^{p} b_{rk}c_{kj},$$
*o que mostra que* $e_{ij} = g_{ij}$ *para todo* $i$ *e todo* $j$. *As demonstrações de (b) e (c) são deixadas a cargo do leitor.*

## 3.3 Aplicação Linear × Matriz

Sejam V e W espaços vetoriais sobre o corpo K, $\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n)$ e $\mathcal{F} = (w_1, ..., w_m)$ bases ordenadas de V e W, respectivamente, e $T : V \longrightarrow W$ linear.

Se $v = x_1v_1 + ... + v_nv_n = \sum_{j=1}^{n} x_jv_j$, $T(v) = y_1w_1 + ... + y_mw_m = \sum_{i=1}^{m} y_iw_i$ e $T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$, então:

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} x_jT(v_j) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_jw_i.$$

Portanto:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, ..., m)$$

Pondo:

$$\big[v\big]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \ [Tv]_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \ \text{e} \ \big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = (a_{ij}) \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix},$$

o sistema acima pode ser escrito na forma matricial

$$\big[T(v)\big]_{\mathcal{F}} = \big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot \big[v\big]_{\mathcal{E}}.$$

Assim, fixadas as bases ordenadas $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, a toda aplicação linear $T : V \longrightarrow W$ podemos associar uma matriz $\big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = (a_{ij})$ definida por $T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$, ou seja,

$$\big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{in} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

$\big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$ é a matrix de T em relação às bases $\mathcal{E}$ de V e $\mathcal{F}$ de W. Ela é do tipo $m \times n$ e, para cada j, as componentes de $T(v_j)$ na base $\mathcal{F}$ formam a coluna j dessa matriz.

Reciprocamente, dada uma matriz $m \times n$, $A = (a_{ij})$, consideremos os vetores $u_j$, $1 \leq j \leq n$, definidos por $u_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i$. Seja $T : V \longrightarrow W$ a única aplicação linear tal que $T(v_j) = u_j$, $1 \leq j \leq n$. Então é claro que $\big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = A$. Existe, pois, uma bijeção entre $\mathcal{L}(V, W)$ e $M_{m \times n}(K)$, bijeção esta que depende da escolha das bases ordenadas $\mathcal{E}$ de V e $\mathcal{F}$ de W.

**Exemplo 3.3.1** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$ e $B = \{v_1, ..., v_n\}$ uma base de $V$. Sejam os operadores lineares $I(v) = v$ e $0(v) = 0$ para todo $v \in V$. É claro que $\big[I\big]_B^B = I_n$ e $\big[0\big]_B^B = 0$.*

**Exemplo 3.3.2** *Seja $V = P_n$ o espaço vetorial dos polinômios a uma variável e de grau menor que n, com coeficientes em K, juntamente com o* *polinômio zero. Sejam* $B = \{1, t, ..., t^{n-1}\}$ *base de* $V$ *e* $D : V \longrightarrow V$ *a aplicação derivada:*

$$D(a_0 + a_1 t + ... + a_{n-1} t^{n-1}) = a_1 + 2a_2 t + ... + (n-1) a_{n-1} t^{n-2}.$$

*Então:*

$$\big[D\big]_B^B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 2 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & n-1 \\ 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.3.3** *Sejam* $I : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *a identidade,* $\mathcal{E} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ *e* $\mathcal{F} = \{(1,0,0), (1,1,0), (1,1,1)\}$ *bases de* $\mathbb{R}^3$*. Vamos achar* $\big[I\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$*.*

*Temos:*

$$I(1,0,0) = (1,0,0); \quad I(0,1,0) = (1,1,0) - (1,0,0); \quad I(0,0,1) = (1,1,1) - (1,1,0).$$

*Portanto:*

$$\big[I\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.3.4** *Seja* $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *definida por* $T(x, y, z) = (x + y + z, y + z, z)$*. É claro que* $T$ *é linear. Sejam* $\mathcal{E}$ *e* $\mathcal{F}$ *as bases do exemplo 3.3.3. Vamos achar* $\big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$ *e* $\big[T\big]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$*.*

*Temos:* $T(1,0,0) = (1,0,0); \quad T(0,1,0) = (1,1,0); \quad T(0,0,1) = (1,1,1).$

*Portanto:*

$$\big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = I_3$$

*E:*

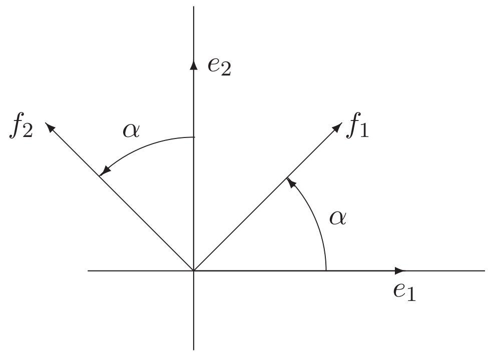
$$\big[T\big]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 3.3.5** *Seja* $A = (a_{ij})$ $m \times n$ *sobre* $K$*. Seja* $T_A : K^n \longrightarrow K^m$ *tal que* $T_A(X) = A \cdot X$*, onde* $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$*. É claro que* $T_A$ *é linear e que* $\big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = A$*, onde* $\mathcal{E}$ *e* $\mathcal{F}$ *são as bases canônicas de* $K^n$ *e* $K^m$*, respectivamente.*

**Exemplo 3.3.6** *(Rotação)*

*Sejam* $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$ *a base canônica do* $\mathbb{R}^2$ *e* $\mathcal{F} = (f_1, f_2)$ *onde*

$$\begin{array}{l} f_1 = \cos\alpha \cdot e_1 + sen\ \alpha \cdot e_2 \\ f_2 = -sen\ \alpha \cdot e_1 + \cos\alpha \cdot e_2, \quad \alpha \in \mathbb{R} \end{array} .$$




*Definamos* $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ *linear por meio de:*

$$\begin{array}{l} Te_1 = f_1 \\ Te_2 = f_2 \end{array}$$

*Então:*

$$\big[T\big]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha \\ sen\alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix}$$

*A imagem de* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *por* $T$ *é o vetor*

$$\begin{bmatrix} cos\ \alpha & -sen\ \alpha \\ sen\alpha & cos\ \alpha \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} x \cdot cos\ \alpha - y \cdot sen\ \alpha \\ x \cdot sen\alpha + y \cdot cos\ \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

*A transformação linear* $T$ *é a* <u>*rotação*</u> *de* $\alpha$ *em torno da origem.*

**Proposição 3.3** *Sejam* $V$ *e* $W$ *espaços vetoriais sobre* $K$, $\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n)$ *e* $\mathcal{F} = (w_1, ..., w_m)$ *bases ordenadas de* $V$ *e* $W$*, respectivamente. A aplicação* $T \longmapsto \big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$*, que a cada elemento de* $\mathcal{L}(V, W)$ *associa sua matriz em relação às bases dadas, é um isomorfismo de* $\mathcal{L}(V, W)$ *sobre* $M_{m \times n}(K)$*.*

**Dem.** *Sejam* $T$ *e* $S$ *elementos de*

$$\mathcal{L}(V, W),\ T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i,\ S(v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i,$$

*isto é,* $\big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = (a_{ij})$ *e* $\big[S\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = (b_{ij})$.

*Como* $(T+S)(v_j) = \sum_{i=1}^{m}(a_{ij}+b_{ij})w_i$ *resulta que*

$$\big[T+S\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = (a_{ij}+b_{ij})_{\substack{1\le i\le m\\ 1\le j\le n}} = \big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} + \big[S\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}.$$

*Se* $c \in K$ *temos* $(cT)(v_j) = \sum_{i=1}^{m} ca_{ij}w_i$, *isto é,* $\big[cT\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = (ca_{ij}) = c\cdot\big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$.

*Portanto, a aplicação* $T \longmapsto \big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$ *é linear (e bijetora), ou seja, um isomorfismo.*

**Corolário 3.3.1** *dim* $\mathcal{L}(V,W) =$ *dim* $V \cdot$ *dim* $W$.

**Proposição 3.4** *Sejam U, V, W espaços vetoriais sobre K,* $\mathcal{E} = (u_1,...,u_m)$, $\mathcal{F} = (v_1,...,v_n)$ *e* $\mathcal{G} = (w_1,...,w_p)$ *bases ordenadas de U, V, W, respectivamente. Se* $U \xrightarrow{S} V \xrightarrow{T} W$ *são lineares, então:*

$$\big[T\circ S\big]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}} = \big[T\big]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} \cdot \big[S\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}.$$

**Dem.** *Sejam:*

$$\big[T\big]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{F}} = (a_{ij}) \text{ - } p\times n$$

$$\big[S\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = (b_{ij}) \text{ - } n\times m$$

$$\big[T\circ S\big]_{\mathcal{G}}^{\mathcal{E}} = (c_{ij}) \text{ - } p\times m$$

*Então:*

$$T(v_k) = \sum_{i=1}^{p} a_{ik}w_i$$

$$S(u_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj}v_k$$

$$(T\circ S)(u_j) = \sum_{i=1}^{p} c_{ij}w_i$$

*Portanto:*

$$T\big(S(u_j)\big) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} T(v_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{p} a_{ik} b_{kj} w_i,$$

*donde:*

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

*que é a tese.*

*O conjunto $M_n(K)$ das matrizes de ordem n, munido das leis de adição e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial sobre K de dimensão $n^2$. $M_n(K)$, munido das operações de adição e multiplicação matriciais, é um anel (com unidade). Além disso, é fácil verificar que*

$$c(AB) = (cA)B = A(cB)$$

*quaisquer que sejam $A, B \in M_n(K)$ e $c \in K$. Resulta que $M_n(K)$ tem uma estrutura de álgebra sobre K. Vimos que o anel $M_n(K)$ não é comutativo; o exemplo*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*mostra que ele tem divisores de zero.*

*Seja V um espaço vetorial sobre K, de dimensão n. Vimos que $\mathcal{L}(V)$ e $M_n(K)$ são duas álgebras sobre K. Fixada uma base B de V, a aplicação bijetora $T \in \mathcal{L}(V) \overset{\phi}{\longmapsto} \big[T\big]_B^B \in M_n(K)$ goza das seguintes propriedades:*

*(1) $\big[L+T\big]_B^B = \big[L\big]_B^B + \big[T\big]_B^B$, isto é, $\phi(L+T) = \phi(L) + \phi(T)$*

*(2) $\big[aT\big]_B^B = a\big[T\big]_B^B$, isto é, $\phi(aT) = a \cdot \phi(T)$*

*(3) $\big[L \circ T\big]_B^B = \big[L\big]_B^B \cdot \big[T\big]_B^B$, isto é, $\phi(L \circ T) = \phi(L) \cdot \phi(T)$, quaisquer que sejam $L, T \in \mathcal{L}(V)$ e $a \in K$.*

*Uma tal $\phi$ chama-se um isomorfismo de álgebras, ou seja, $\mathcal{L}(V)$ e $M_n(K)$ são álgebras isomorfas.*

**Exemplo 3.3.7** *Vamos achar o centro do anel $M_n(K)$, isto é, vamos determinar as matrizes $A = (a_{ij})$ de $M_n(K)$ que comutam com toda matriz $P = (p_{ij})$ de $M_n(K)$, ou seja, tais que $AP = PA$. Devemos ter $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} p_{kj} = \sum_{k=1}^{n} p_{ik} a_{kj}$ para todo par $(i, j)$. Se $P = E_{ii}$, isto é, $p_{ii} = 1$ e $p_{rs} = 0$ para $r \neq i$ ou $s \neq i$, então $i \neq j$ implica $a_{ij} = 0$. Se $P = E_{ij}$ com $i \neq j$, isto é, $p_{ij} = 1$ e $p_{rs} = 0$ para $r \neq i$ ou $s \neq j$, então $a_{ii} = a_{jj}$. Logo, se*

*$A$ comuta com toda matriz de $M_n(K)$ ela é da forma $A = a \cdot I_n$, e é evidente que toda matriz $a \cdot I_n$, $a \in K$, comuta com toda matriz de $M_n(K)$. Estas matrizes têm o nome de matrizes escalares.*

**Definição 3.5** *Uma matriz quadrada $A$, $n \times n$, é invertível se existe matriz quadrada $B$, de mesma ordem, tal que $AB = BA = I_n$.*

*Se uma tal matriz $B$ existe, ela é única, pois se $AC = I_n$ e $BA = I_n$, temos: $B = B \cdot I_n = B(AC) = (BA)C = I_n \cdot C = C$. esta matriz $B$, caso exista, chama-se a inversa de $A$, e é anotada $B = A^{-1}$. Assim,*

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n,$$

*o que mostra também que $(A^{-1})^{-1} = A$.*

*Se $A$ e $B$, ambas $n \times n$, são invertíveis, então $AB$ é invertível e*

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

*De fato, $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I_n$ e $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1} \cdot A)B = B^{-1}B = I_n$. É claro que $I_n^{-1} = I_n$.*

*Vemos assim que o conjunto das matrizes invertíveis de $M_n(K)$, com a operação de multiplicação matricial, é um grupo. O isomorfismo $\phi : \mathcal{L}(K^n) \longrightarrow M_n(K)$ visto acima, transforma o grupo $GL(K^n) = GL(n, K)$ isomorficamente sobre o grupo das matrizes invertíveis de $M_n(K)$. Em particular,*

$$\left[T^{-1}\right]_B^B = \left(\left[T\right]_B^B\right)^{-1}.$$

**Exemplo 3.3.8** *Seja $A$, de ordem $n$, tal que $a_0 I_n + a_1 A + ... + a_n A^n = 0$ com $a_0 \neq 0$. Então $A$ é invertível.*

*De fato, temos:*

$$\left(-\frac{a_1}{a_0} I_n - ... - \frac{a_n}{a_0} A^{n-1}\right) \cdot A = A \cdot \left(-\frac{a_1}{a_0} I_n - ... - \frac{a_n}{a_0} A^{n-1}\right) = I_n.$$

*Logo, $A^{-1} = -\dfrac{a_1}{a_0} \cdot I_n - ... - \dfrac{a_n}{a_0} \cdot A^{n-1}$*

**Proposição 3.5** *Seja $A \in M_n(K)$. Se existe $B \in M_n(K)$ tal que $BA = I_n$ (ou $AB = I_n$), então $A$ é invertível e $B = A^{-1}$.*

**Dem.** *Sejam $T_A : K^n \longrightarrow K^n$ e $T_B : K^n \longrightarrow K^n$ as aplicações lineares associadas a $A$ e $B$, respectivamente. $BA = I_n$ equivale a $T_B \cdot T_A = id_{K^n}$, que implica ser $T_A$ injetora e $T_B$ sobrejetora e, portanto, ambas são bijetoras e $T_B = T_A^{-1}$, donde $A^{-1} = B$.*

## Exercícios

1. Dê uma base para $M_3(K)$.

2. Seja W o subespaço de $M_n(K)$ formado pelas matrizes cujos elementos são iguais a zero, exceto talvez os da diagonal principal. Qual a dimensão de W?

3. Seja $A \in M_n(\mathbb{R})$. $A = (a_{ij})$ é simétrica (resp. antissimétrica) se $a_{ij} = a_{ji}$ (resp. $a_{ij} = -a_{ji}$) para todo $(i, j)$. Ache uma base para o espaço das matrizes simétricas (resp. antissimétricas) $3 \times 3$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_2, x_4)$. Ache uma matriz associada a T.

5. Sejam $\mathcal{E} = \big((1, 1, 0), (-1, 1, 1), (0, 1, 2)\big)$ e $\mathcal{F} = \big((2, 1, 1), (0, 0, 1), (1, 1, 1)\big)$ bases de $\mathbb{C}^3$. Ache $\big[I\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$, onde $I : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ é a identidade.

6. Seja V o subespaço de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\}$ gerado pelas funções $1,\ t,\ e^t,\ e^{2t},\ te^{2t}$ e seja $D : V \longrightarrow V$ o operador de derivação. Se $B = (1,\ t,\ e^t,\ e^{2t},\ te^{2t})$ é base de V, ache $\big[D\big]_B^B$.

7. Estabeleça um isomorfismo entre o espaço vetorial real das matrizes simétricas $n \times n$ e o espaço das matrizes reais triangulares inferiores ($a_{ij} = 0$ se $i < j$). Idem entre as matrizes antissimétricas e as triangulares inferiores com a diagonal principal nula.

## 3.4 Mudança de Bases

Sejam V um espaço vetorial sobre K, $\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n)$ e $\mathcal{F} = (w_1, ..., w_n)$ bases ordenadas de V. Se $v \in V$, então $\big[v\big]_{\mathcal{E}} = P \cdot \big[v\big]_{\mathcal{F}}$, onde $P = \big[I\big]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = (p_{ij})$ é tal que $w_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij} v_i$.

**Definição 3.6** *$P = \big[I\big]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$ é a <u>matriz de passagem</u> da base $\mathcal{E}$ para a base $\mathcal{F}$.*

**Exemplo 3.4.1** *Sejam $V = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ – base canônica, $\mathcal{F} = \big((1, -1, 1), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\big) = (f_1, f_2, f_3)$. Então:*

$$P = \big[I\big]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

*Se* $v = 2f_1 + f_2 + 3f_3$, *então* $\left[v\right]_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$, *isto é,* $v = 6e_1 + e_2 + 5e_3$.

**Proposição 3.6** *Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais sobre $K$,*

$$\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n),\ \mathcal{E}' = (v'_1, ..., v'_n)$$

*bases ordenadas de $V$,*

$$\mathcal{F} = (w_1, ..., w_m),\ \mathcal{F}' = (w'_1, ..., w'_m)$$

*bases ordenadas de $W$,*

$$P = \left[id_v\right]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$$

*a matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{E}'$, $Q = \left[id_W\right]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}$ a matriz de passagem de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{F}'$.*

*Se $T : V \longrightarrow W$ é linear, então:*

$$\left[T\right]_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{E}'} = Q^{-1} \cdot \left[T\right]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot P.$$

**Dem.** *Temos $T = id_W \cdot T \cdot id_V$. Pela proposição 3.4, vem:*

$$\left[T\right]_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{E}'} = \left[id_W\right]_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \cdot \left[T\right]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot \left[id_V\right]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$$

*Mas:*

$$I_n = \left[id_W\right]_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}'} = \left[id_W\right]_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} \cdot \left[id_W\right]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}$$

*e*

$$I_n = \left[id_W\right]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = \left[id_W\right]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'} \cdot \left[id_W\right]_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}},$$

*o que mostra que $\left[id_W\right]_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{F}} = Q^{-1}$. Resulta:*

$$\left[T\right]_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{E}'} = Q^{-1} \cdot \left[T\right]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} \cdot P$$

**Corolário 3.6.1** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{E}'$ bases de $V$ e $P = \left[id_V\right]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ a matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{E}'$. Se $T : V \longrightarrow V$ é linear, então:*

$$\left[T\right]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}'} = P^{-1} \cdot \left[T\right]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} \cdot P$$

**Definição 3.7** *Dizemos que as matrizes $A, B \in M_{m\times n}(K)$ são equivalentes se existem matrizes $Q \in GL(m, K)$ e $P \in GL(n, K)$ tais que $B = QAP$.*

**Obs.:** *A proposição 3.6 nos diz que se $A$ e $B$ são matrizes associadas à mesma aplicação linear $T : V \longrightarrow W$, então $A$ e $B$ são equivalentes. Reciprocamente, suponhamos $A$ e $B$ equivalentes, isto é, $B = QAP$ onde $A, B \in M_{m\times n}(K)$, $P \in GL(n, K)$ e $Q \in GL(m, K)$.*
*Sejam $\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n)$ e $\mathcal{F} = (w_1, ..., w_m)$ bases ordenadas dos espaços vetoriais $V$ e $W$ e $T : V \longrightarrow W$ linear tal que $A = \big[T\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$. Definamos $\mathcal{E}' = (v_1', ..., v_n')$ e $\mathcal{F}' = (w_1', ..., w_m')$ por $v_j' = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij}v_i$ e $w_j' = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} q_{ij}w_i$, onde $P = (p_{ij})$ e $Q^{-1} = (q_{ij})$.*
*Como $P$ e $Q$ são invertíveis, $\mathcal{E}'$ e $\mathcal{F}'$ são bases de $V$ e $W$, respectivamente, $P = \big[id_V\big]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}'}$ e $Q^{-1} = \big[id_W\big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}'}$.*
*Pela proposição 3.6, temos:*

$$\big[T\big]_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{E}'} = QAP, \text{ isto é, } B = \big[T\big]_{\mathcal{F}'}^{\mathcal{E}'},$$

*o que mostra que $A$ e $B$ representam a mesma aplicação linear $T : V \longrightarrow W$.*

**Definição 3.8** *Dizemos que as matrizes $A, B \in M_n(K)$ são semelhantes se existe $P \in GL(n, K)$ tal que $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Como na observação, acima é fácil ver que $A, B \in M_n(K)$ são semelhantes se, e só se, elas representam um mesmo operador linear $T : V \longrightarrow V$, onde $\dim_K V = n$.*

**Obs.:** *É fácil verificar que as relações "A e B são equivalentes" e "A e B são semelhantes", são relações de equivalência (isto é, reflexivas, simétricas e transitivas).*

**Exemplo 3.4.2** *Seja $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_3,\ 3x_1 + 2x_2 + x_3,\ x_2 + 4x_3)$ e sejam $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ – base canônica e $\mathcal{F} = \big((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\big)$ bases de $\mathbb{R}^3$.*
*Temos:*

$$T(1, 0, 0) = (1, 3, 0)$$
$$T(0, 1, 0) = (0, 2, 1)$$
$$T(0, 0, 1) = (2, 1, 4)$$

*Portanto:*

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} = A.$$

*Por outro lado, se* $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$, *temos:*

$$\begin{aligned} T(f_1) &= (1,3,0) = -2f_1 + 3f_2 \\ T(f_2) &= (1,5,1) = -4f_1 + 4f_2 + f_3 \\ T(f_3) &= (3,6,5) = -3f_1 + f_2 + 5f_3 \end{aligned}$$

*Portanto:*

$$[T]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} -2 & -4 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} = B.$$

*A matriz de passagem de* $\mathcal{E}$ *para* $\mathcal{F}$ *é* $P = [I]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, *ou seja,* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, *e é imediato verificar que*

$$AP = PB = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \text{ isto é, } B = P^{-1} \cdot A \cdot P.$$

## Posto de uma Matriz

Seja $A = (a_{ij})$ matriz $m \times n$ sobre K. Os vetores-coluna de A são os vetores $A_1, ..., A_n \in K^m$ definidos por

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{ij} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \quad (1 \leq j \leq n)$$

**Definição 3.9** *O posto de uma matriz A é a dimensão do subespaço de* $K^m$ *gerado pelos vetores-coluna de A, ou seja, o posto de A é o número máximo de vetores-coluna de A linearmente independentes.*

**Proposição 3.7** *Sejam V, W espaços vetoriais sobre K,* $\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n)$ *e* $\mathcal{F} = (w_1, ..., w_m)$ *bases ordenadas de V e W, respectivamente, e* $T : V \longrightarrow W$ *linear. Se* $A = [T]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$, *então:*

$$posto(A) = posto(T).$$

**Dem.** *Seja* $A = (a_{ij})$. *Dizer que* $A = \big[T\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}$ *significa dizer que* $T(v_j) = \displaystyle\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i$, *ou seja,* $A_j = \big[T(v_j)\big]_{\mathcal{F}}$ $(j = 1, ..., n)$, *e o isomorfismo de* $K^m$ *sobre* $W$ *que leva a base canônica de* $K^m$ *na base* $\mathcal{F}$ *de* $W$, *transforma o espaço gerado pelos vetores-coluna* $A_1, ..., A_n$ *de* $A$ *sobre o espaço gerado pelos vetores* $T(v_1), ..., T(v_n)$ *de* $W$, *ou seja, estes espaços têm a mesma dimensão e, portanto,* $posto(A) = posto(T)$.

**Proposição 3.8** *Seja* $A \in M_{m\times n}(K)$ *de posto* $r$. *Então* $r \leq m$, $r \leq n$ *e* $A$ *é equivalente à matriz* $m \times n$:

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{c:c} I_r & 0 \\ \hdashline 0 & 0 \end{array}\right] & \begin{array}{l} r \\ m-r \end{array} \\ \begin{array}{cc} r & n-r \end{array} & \end{array}$$

**Dem.** *Seja* $T : K^n \longrightarrow K^m$ *linear tal que* $A = \big[T\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}$, *onde* $\mathcal{E}$ *e* $\mathcal{F}$ *são as bases canônicas de* $K^n$ *e* $K^m$, *respectivamente.*

*Como* $n = dim\ \mathcal{N}(T) + dim\ Im\ T$ *temos que* $dim\ \mathcal{N}(T) = n - r \geq 0$. *Podemos, então, escolher uma base* $\mathcal{E}' = (v_1, ..., v_n)$ *de* $K^n$ *de modo que* $(v_{r+1}, ..., v_n)$ *seja base de* $\mathcal{N}(T)$. *É claro que os vetores* $T(v_1), ..., T(v_r)$ *são LI em* $K^m$ *(verifique!), donde* $r \leq m$ *e podemos considerar uma base de* $K^m$ *da forma* $\mathcal{F}' = (Tv_1, ..., Tv_r, w_{r+1}, ..., w_m)$. *Obtemos:*

$$\big[T\big]^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{F}'} = \textit{matriz da figura 3.8.}$$

*Resulta que* $A = \big[T\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}$ *é equivalente a* $B =$ *matriz da figura 3.8* :

$$B = QAP,\ Q = \big[id\big]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}'},\ P = \big[id\big]^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{E}}.$$

**Corolário 3.8.1** *Duas matrizes $A, B \in M_{m\times n}(K)$ são equivalentes se, e só se, elas têm o mesmo posto.*

**Dem.** *Se $A$ e $B$ são equivalentes, elas representam, em relação a bases diferentes, a mesma aplicação linear $T : K^n \longrightarrow K^m$. Portanto,*

$$posto(A) = posto(T) = posto(B).$$

*Reciprocamente, se $posto(A) = posto(B) = r$, então $A$ e $B$ são equivalentes à matriz da figura 3.8 e, portanto, elas são equivalentes.*

**Corolário 3.8.2** *A matriz $A \in M_{m\times n}(K)$ é invertível se, e só se,*

$$posto(A) = n.$$

**Dem.** *A matriz $A$ representa um operador linear*

$$T : K^n \longrightarrow K^m \text{ e } posto(T) = posto(A) = n$$

*se, e só se, $T$ é sobrejetora (donde bijetora), isto é, se, e só se, $T \in GL(n, K)$ e, portanto, se, e só se, $A$ é invertível.*

## 3.5 Exercícios do Capítulo 3

1. Obtenha bases $\mathcal{E}$ de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^3$ de modo que $[T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, onde $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y \\ 3x-2y \\ x+3y \end{bmatrix}$.

2. Calcule o posto das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

   Mostre que os espaços gerados pelas linhas e colunas de A coincidem, o que não ocorre com B.

3. Seja a matriz $n \times n$ cujas linhas são os vetores

$$v_1 = (1, 2, ..., n), \ v_2 = (2, 3, ..., n, n+1), \ etc.$$

Prove que o posto da matriz é 2 e que o espaço-linha coincide com o espaço-coluna.

4. Ache reais a, b, c tais que $ax + by + cz = 0$ seja o plano gerado pelas linhas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

5. Prove que toda matriz antissimétrica $3 \times 3$ não-nula tem posto 2. Dê exemplo de uma matriz antissimétrica invertível $4 \times 4$.

6. Sejam V um espaço vetorial de dimensão n sobre K e $T : V \longrightarrow V$ linear. T é <u>nilpotente</u> de <u>índice p</u> se existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $T^{p-1} \neq 0$ e $T^p = 0$.
(a) Prove que se T é nilpotente e existem $\lambda \in K, \ x \in V, \ x \neq 0$ tais que $T(x) = \lambda x$, então $\lambda = 0$.
(b) Prove que se T é nilpotente de índice p e $T^{p-1}(x) \neq 0$, então os vetores $x, T(x), ..., T^{p-1}(x)$ são LI.
(c) T é nilpotente de índice n $\Leftrightarrow$ existe base $\mathcal{E}$ de V tal que na matriz $A = \big[T\big]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = (a_{ij})$ – $n \times n$ – se tenha $a_{ij} = 0$ exceto $a_{i,i+1} = 1$ $(1 \leq i \leq n-1)$.

7. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$; ache $A^n, \ n \in \mathbb{N}$.

8. Prove que $\begin{bmatrix} cos\ \theta & -sen\ \theta \\ sen\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{bmatrix}$ são semelhantes sobre $\mathbb{C}$.

9. Seja $A = (a_{ij})$ – $n \times n$. O <u>traço</u> de A é o número $tr(A) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.
Prove que $tr : M_n(K) \longrightarrow K$ é linear, que $tr(AB) = tr(BA)$, e que $tr(P^{-1}AP) = tr(A)$, quaisquer que sejam $A, B \in M_n(K)$ e $P \in GL(n, K)$.

10. Sejam $T : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tal que $T(A) = PA$, onde $P \in M_2(\mathbb{R})$ é fixa. Prove que $tr(T) = 2tr(P)$.

# Capítulo 4

# Formas Lineares. Dualidade

## 4.1 Definição

Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K. Considerando K um espaço vetorial sobre si mesmo, $\mathcal{L}(V, K)$ é um espaço vetorial sobre K, designado por $V^*$ e chamado de dual de V; seus elementos são chamados de formas (ou funcionais) lineares em V. O dual de $V^*$ é o bidual de V, anotado $V^{**}$. Os elementos de $V^*$ serão designados por letras gregas tais como $\alpha, \beta, \omega,$ *etc.* Assim, uma forma linear $\omega \in V^*$ é uma aplicação linear $\omega : V \longrightarrow K$.

Se $\mathcal{E} = \{v_1, ..., v_n\}$ é uma base de V e se $v = x_1v_1 + ... + x_nv_n$, então $\omega(v) = x_1\omega(v_1) + ... + x_n\omega(v_n)$. Pondo $\omega(v_i) = a_i$, temos: $\omega(v) = a_1x_1 + ... + a_nx_n$, que é a representação de $\omega$ na base $\mathcal{E}$.

**Exemplo 4.1.1** *Se $V = K^n$, a aplicação $\pi_i(x_1, ..., x_n) \longmapsto x_i$ $(1 \leq i \leq n)$ é uma forma linear em $K^n$, chamada a i-ésima forma coordenada.*

**Exemplo 4.1.2** *Se $V = C^0([0,1], \mathbb{R})$ é o espaço vetorial real das funções contínuas $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ a função $f \in V \longmapsto \int_0^1 f(t)dt \in \mathbb{R}$ é uma forma linear em V.*

**Proposição 4.1** *Sejam V um espaço vetorial sobre K e $(v_1, ..., v_n)$ uma base ordenada de V. Para cada i, $1 \leq i \leq n$, seja $\omega_i : V \longrightarrow K$ a forma linear definida por $\omega_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & se \quad i = j \\ 0 & se \quad i \leq j \end{cases}$ $(1 \leq i \leq n)$.*

*Então, $(\omega_1, ..., \omega_n)$ é uma base de $V^*$ e as coordenadas de $\omega \in V^*$ nesta base, são $\omega(v_1), ..., \omega(v_n)$.*

**Dem.** *Sabemos que dim $V^*$ = dim $\mathcal{L}(V, K) = n$ e que as condições $\omega_i(v_j) = \delta_{ij}$ $(j = 1, ..., n)$ determinam univocamente a forma $\omega_i$. Basta então provar* *que* $\omega_1, ..., \omega_n$ *são LI. Para isso, suponhamos que* $\omega = a_1\omega_1 + ... + a_n\omega_n = 0$. *Então, para* $j = 1, ..., n$, *temos* $\omega(v_j) = 0$, *ou seja,* $\sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i(v_j) = 0$, *ou* $\sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{ij} = 0$, *donde* $a_j = 0$. *Este cálculo mostra também que se*

$$\omega = a_1\omega_1 + ... + a_n\omega_n, \text{ então } a_j = \omega(v_j)$$

.

**Definição 4.1** *Se* $(v_1, ..., v_n)$ *é base ordenada de* $V$, *a base* $(\omega_1, ..., \omega_n)$ *de* $V^*$, *tal que* $\omega(v_j) = \delta_{ij}$ $(1 \leq j \leq n)$, *chama-se base* <u>*dual*</u> *da base* $(v_1, ..., v_n)$.

**Exemplo 4.1.3** *Sejam* $V = K^n$ *e* $(e_1, ..., e_n)$ *a base canônica de* $K^n$. *Seja* $\pi_i : K^n \longrightarrow K$ *a i-ésima forma coordenada, isto é,* $\pi_i(x_1, ..., x_n) = x_i$. *É claro que* $\pi_i(e_j) = \delta_{ij}$, *de modo que a base dual da base canônica de* $K^n$ *é a base* $(\pi_1, ..., \pi_n)$ *de* $(K^n)^*$.

**Obs.** *Se* $V$ *e* $W$ *têm a* <u>*mesma*</u> *dimensão* <u>*finita*</u> *sobre* $K$, *a escolha de bases* $\mathcal{E}$ *de* $V$ *e* $\mathcal{F}$ *de* $W$ *nos permite definir um isomorfismo que leva* $\mathcal{E}$ *sobre* $\mathcal{F}$, *e todo isomorfismo entre* $V$ *e* $W$ *é obtido dessa forma. Assim, em geral, há mais de um isomorfismo entre* $V$ *e* $W$ *e não temos uma maneira natural para preferir um ou outro desses isomorfismos. Entretanto, no caso de* $V$ *e* $V^{**}$, *podemos distinguir um isomorfismo* $J : V \longrightarrow V^{**}$ *definido independente da escolha de bases, isto é, um isomorfismo canônico, que nos permite identificar* $V$ *a* $V^{**}$.

**Proposição 4.2** *Seja* $V$ *um espaço vetorial de dimensão* <u>*finita n*</u> *sobre* $K$. *A aplicação canônica*

$$\begin{array}{rlll} J: & V \longrightarrow V^{**} & & \\ & v \longmapsto J_v: & V^* \longrightarrow K & \\ & & \omega \longmapsto \omega(v) & \end{array}$$

*é um isomorfismo entre* $V$ *e* $V^{**}$.

**Dem.** *É fácil verificar que* $J_v = J(v)$ *é um elemento de* $V^{**}$, *bem como que* $J$ *é linear. Basta então provar que* $J$ *é injetora, já que* $\dim V = \dim V^{**} = n$. *Para isto, seja* $v \neq 0$; *tomemos uma base de* $V$ *da forma* $(v, v_1, ..., v_{n-1})$ *e* *consideremos a base dual correspondente* $(\omega, \omega_1, ..., \omega_{n-1})$*. Então,* $\omega(v) = 1 = J_v(\omega)$*, ou seja,* $J_v \neq 0$*. Assim,* $v \neq 0$ *implica* $J_v \neq 0$*, o que mostra ser* $\underline{J}$ *injetora.*

**Obs.** *(1) Identificando-se* $v \in V$ *a* $J_v \in V^{**}$*, a igualdade* $J_v(\omega) = \omega(v)$ *se escreve* $v(\omega) = \omega(v)$*, e é usual usar-se a notação* $< v, \omega >$ *para este escalar.*
*(2) No caso em que V é de dimensão infinita, prova-se que* $J : V \longrightarrow V^{**}$ *é injetora, mas* *<u>nunca</u>* *sobrejetora, ou seja, J* *<u>não é</u>* *um isomorfismo neste caso.*

# Exercícios

1. Sejam $B_1 = (v_1, ..., v_n)$, $B_2 = (u_1, ..., u_n)$ bases do espaço vetorial V, $B_1^* = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ e $B_2^* = (\beta_1, ..., \beta_n)$ as bases duais correspondentes. Se $v_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} u_i$ e $\alpha_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} b_{ij} \beta_i$, $i \leq j \leq n$, qual a relação entre as matrizes $A = (a_{ij}) e B = (b_{ij})$?

2. Estude a independência linear das formas lineares sobre $\mathbb{R}^4$, onde $ab \neq 0$:
$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - a x_3,$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 - \frac{1}{a} x_4,$$
$$f_3(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - b x_4,$$
$$f_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 - \frac{1}{b} x_4.$$

3. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita e $W \subset V$ um subespaço. Se $f \in W^*$ mostre que existe $g \in V^*$ tal que $g|_W = f$.

4. Sejam V um espaço vetorial real de dimensão finita, e $v_1, v_2, ..., v_p$ vetores não nulos de V. Prove que existe $f \in V^*$ tal que $f(v_i) \neq 0$, $i = 1, 2, ..., p$.

5. Seja $f : V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma linear não-nula. Prove que existe $v_0 \in V$ tal que $f(v_0) = 1$. Seja $W = \mathbb{R}v_0$ a reta gerada por $v_0$. Prove que $V = W \oplus \mathcal{N}(f)$.

6. Sejam $f, g : V \longrightarrow \mathbb{R}$ formas lineares não-nulas e $dim\ V = n$. Prove que $\mathcal{N}(f) = \mathcal{N}(g) \Leftrightarrow \underline{f}$ é múltiplo de $\underline{g}$.

## 4.2 Anulador de um Subespaço

**Definição 4.2** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$ e $U \subset V$ um subespaço. Chama-se anulador de $U$ ao conjunto $U^0 = \{\omega \in V^*;\ \omega(u) = 0$ para todo $u \in U\}$. É fácil ver que $U^0 \subset V^*$ é um subespaço.*

*Se $\omega \in V^*$ pode-se mostrar sem dificuldade que $\omega \in U^0$ se, e só se, $\omega$ se anula numa base de $U$.*

**Proposição 4.3** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $K$ e $U \subset V$ um subespaço. Então:*

$$dim\ U + dim\ U^0 = dim\ V.$$

**Dem.** *Como o caso $U = \{0\}$ é trivial, vamos supor $U \neq \{0\}$. Seja $(v_1, ..., v_n)$ base de $V$ tal que $(v_1, ..., v_p)$ seja base de $U$. Se $(\omega_1, .., \omega_n)$ é a base dual, então $< v_j, \omega_i >= \omega_i(v_j) = 0$ para $i = 1, ..., p$ e $i = p+1, ..., n$, ou seja, as formas $\omega_{p+1}, ..., \omega_n$ pertencem a $U^0$. Vamos provar que elas formam uma base de $U^0$. Como elas são LI, basta provar que elas geram $U^0$. Para isto, seja $\omega \in U^0$. Se $\omega = a_1\omega_1 + ... + a_n\omega_n$, então, para $j = 1, ..., p$ temos:*

$$0 = \omega(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i\omega_i(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i\delta_{ij} = a_j,$$

*ou seja, $\omega = a_{p+1}\omega_{p+1} + ... + a_n\omega_n$, como queríamos.*

**Corolário 4.3.1** *Nas hipóteses da proposição 4.3, temos $(U^0)^0 = U$ (supondo-se identificados $V$ e $V^{**}$).*

**Dem.** *$(U^0)^0 = \{v \in V; < \omega, v >= 0\ \forall\omega \in U^0\}$. Portanto, se $u \in U$, então $u \in (U^0)^0$, isto é, $U \subset (U^0)^0$.*

*Por outro lado,*

$$dim\ (U^0)^0 = dim\ V^* - dim\ U^0 = dim\ V - dim\ U^0 = dim\ U,$$

*donde $U$=$(U^0)^0$.*

**Obs.** *Se $\omega \in V^*$, $\omega \neq 0$, o subespaço de $V$, $H = \{v \in V; < \omega, v >= 0\}$, tem dimensão igual a $(dim\ V - 1)$ e chama-se um hiperplano de $V$.*

**Exemplo 4.2.1** *Seja $W$ o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, 2, 0, 1)$, $v_2 = (2, 1, 3, 0)$ e $v_3 = (0, 3, -3, 2)$. Vamos achar uma base para o anulador $W^0$.*

*Se* $(v, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ *e* $\omega \in (\mathbb{R}^4)^*$*, então* $\omega(x, y, z, t) = ax + by + cz + dt$*, onde* $a, b, c, d \in \mathbb{R}$*, e* $\omega \in W^0$ *se, e só se,* $\omega(v_1) = \omega(v_2) = \omega(v_3) = 0$*, ou seja, se e só se,*

$$\left\{ \begin{array}{r} a + 2b + d = 0 \\ 2a + b + 3c = 0 \\ 3b - 3c + 2d = 0 \end{array} \right. \quad \textit{se, e só se,} \quad \left\{ \begin{array}{l} a = -2c + \dfrac{d}{3} \\ b = c - \dfrac{2d}{3} \end{array} \right. .$$

*Resulta que* $\omega_1$ *e* $\omega_2$*, tais que* $\omega_1(x, y, z, t) = -2x + y + z$*,* $\omega_2(x, y, z, t) = x - 2y + 3t$*, formam uma base de* $W^0$ *(obtidas fazendo-se* $c = 1,\ d = 0$ *e* $c = 0,\ d = 3$*, respectivamente).*

**Exemplo 4.2.2** *Seja V um espaço vetorial de dimensão* $\underline{n}$ *sobre K. Todo subespaço W de V é a interseção de um número finito de hiperplanos de V. De fato, seja* $(v_1, ..., v_n)$ *base de V tal que* $(v_1, ..., v_p)$ *seja base de W. Seja* $(\omega_1, ..., \omega_n)$ *a base dual de* $(v_1, ..., v_n)$*. Então:*

$$v \in W \Leftrightarrow \omega_{p+1}(v) = ... = \omega_n(v) = 0,$$

*ou seja,* $W = \displaystyle\bigcap_{j=p+1}^{n} H_j$*, onde* $H_j = \mathcal{N}(\omega_j)$ *é o hiperplano definido por* $\omega_j$*.*

## Exercícios

1. Seja $W \subset \mathbb{R}^5$ o subespaço gerado pelos vetores $\omega_1 = (2, -2, 3, 4, -1)$, $\omega_2 = (-1, 1, 2, 5, 2)$ $\omega_3 = (0, 0, -1, -2, 3)$ e $\omega_4 = (1, -1, 2, 3, 0)$. Ache uma base para o anulador $W^0$ de W.

2. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K, U e W subespaços de V. Prove:
   *(a)* $(U + W)^0 = U^0 \cap W^0$; $(U \cap W)^0 = U^0 + W^0$
   *(b)* $V = U \oplus W \Rightarrow V^* = U^0 \oplus W^0$.

# 4.3 Transposição

Sejam V, W espaços vetoriais sobre K e $T : V \longrightarrow W$ linear. Se $\beta \in W^*$ então $\beta \circ T : V \longrightarrow K$ é linear, isto é, $\beta \circ T \in V^*$.

**Definição 4.3** *A aplicação* $T^t : W^* \longrightarrow V^*$ *definida por* $T^t(\beta) = \beta \circ T$ *para toda* $\beta \in W^*$*, chama-se a* <u>*transposta*</u> *de T:*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[rr, "T"] \arrow[dr, "\beta \circ T = T^t(\beta)"'] & & W \arrow[dl, "\beta"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

*Assim,* $< T^t(\beta), v >=< \beta, T(v) >$ *para todo* $v \in V$.

**Proposição 4.4** *A transposta* $T^t : W^* \longrightarrow V^*$ *da aplicação linear* $T : V \longrightarrow W$*, é uma aplicação linear.*

**Dem.**

$$T^t(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta) \circ T = \alpha \circ T + \beta \circ T = T^t(\alpha) + T^t(\beta)$$

$$T^t(a\beta) = (a\beta) \circ T = a(\beta \circ T) = aT^t\beta,$$

*quaisquer que sejam* $\alpha, \beta \in W^*$ *e* $a \in K$.

**Exemplo 4.3.1** *Se* $V = W$ *e* $T = id_V$*, então:*

$$(id_V)^t(\beta) = \beta \circ id_V = \beta \text{ para todo } \beta \in V^*,$$

*ou seja,* $(id_V)^t = id_{V^*}$.

**Proposição 4.5** *Sejam U, V, W espaços vetoriais sobre K.*
*(a) A aplicação* $T \in \mathcal{L}(U, V) \longmapsto T^t \in \mathcal{L}(V^*, U^*)$ *é linear.*
*(b) Se* $T \in \mathcal{L}(U, V)$ *e* $S \in \mathcal{L}(V, W)$*, então* $(S \circ T)^t = T^t \circ S^t$*. Além disso, se* $T$ *é bijetora então* $T^t$ *é bijetora e* $(T^{-1})^t = (T^t)^{-1}$*.*
*(c) Se U e V têm dimensão finita, então* $T \longmapsto T^t$ *é um isomorfismo entre* $\mathcal{L}(U, V)$ *e* $\mathcal{L}(V^*, U^*)$ *e* $(T^t)^t = T$ *(supondo-se identificados* $U$ *com* $U^{**}$ *e* $V$ *com* $V^{**}$*).*

**Dem.** *(a) Sejam* $L, T \in \mathcal{L}(U, V)$ *e* $a \in K$. *Para todo* $\beta \in V^*$ *temos:*
$(L+T)^t(\beta) = \beta \circ (L+T) = \beta \circ L + \beta \circ T = L^t(\beta) + T^t(\beta)$
$(aT)^t(\beta) = \beta \circ (aT) = a(\beta \circ T) = aT^t(\beta)$
*Resulta:* $(L+T)^t = L^t + T^t$ *e* $(aT)^t = a \cdot T^t$.

*(b)* $(S \circ T)^t(\omega) = \omega \circ (S \circ T) = (\omega \circ S) \circ T = T^t(\omega \circ S) = T^t\big(S^t(\omega)\big) = (T^t \circ S^t)(\omega)$ *para todo* $\omega \in W^*$. *Logo:* $(S \circ T)^t = T^t \circ S^t$.
*Se* $T$ *é um isomorfismo temos* $T \circ T^{-1} = id_V$, $T^{-1} \circ T = id_V$ *e, como* $(id_V)^t = id_{V^*}$, *vem:*

$$T^t \circ (T^{-1})^t = id_{U^*} \text{ e } (T^{-1})^t \circ T^t = id_{V^*},$$

*donde resulta que* $(T^t)^{-1} = (T^{-1})^t$.
*(c) Se* $U$ *e* $V$ *têm dimensão finita, podemos identificar* $U$ *com* $U^{**}$ *e* $V$ *com* $V^{**}$, *de modo que* $(T^t)^t \in \mathcal{L}(U, V)$. *Se* $u \in U$ *e* $\beta \in V^*$, *então:*

$$< (T^t)^t u, \beta > = < u, T^t(\beta) > = < \beta, T(u) >,$$

*donde* $(T^t)^t = T$. *Resulta que* $T \longmapsto T^t$ *é sobrejetora e, como* $\mathcal{L}(U, V)$ *e* $\mathcal{L}(V^*, U^*)$ *têm a mesma dimensão finita, esta aplicação é um isomorfismo.*

**Proposição 4.6** *Seja* $T : V \longrightarrow W$ *linear. Então:* $(Im\ T)^0 = \mathcal{N}(T^t)$.

**Dem.** $\omega \in (Im\ T)^0 \Leftrightarrow < \omega, T(v) > = 0\ \forall v \in V \Leftrightarrow < v, T^t(\omega) > = 0$
$\forall v \in V \Leftrightarrow T^t(\omega) = 0 \Leftrightarrow \omega \in \mathcal{N}(T^t)$.

**Proposição 4.7** *Sejam* $V$ *e* $W$ *espaços vetoriais de dimensão finita sobre* $K$ *e* $T : V \longrightarrow W$ *linear. Então:*

$$posto(T) = posto(T^t).$$

**Dem.** *Sejam* $n = dim\ V$, $p = dim\ W$. *Como* $(Im\ T)^0 = \mathcal{N}(T^t)$ *temos:*
$posto(T^t) = dim\ W^* - dim\ \mathcal{N}(T^t) = dim\ W^* - dim\ (Im\ T)^0 =$
$= dim\ W^* - (dim\ W^* - dim\ Im\ T) = dim\ Im\ T = posto(T)$.

**Proposição 4.8** *Sejam* $V$ *e* $W$ *espaços vetoriais de dimensão finita sobre* $K$, $\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n)$ *base de* $V$, $\mathcal{F} = (w_1, ..., w_m)$ *base de* $W$, $\mathcal{E}^* = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ *e* $\mathcal{F}^* = (\beta_1, ..., \beta_m)$ *as bases duais correspondentes. Se* $T : V \longrightarrow W$ *é linear* *e* $\left[T\right]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = A = (a_{ij})$*, então* $\left[T^t\right]^{\mathcal{F}^*}_{\mathcal{E}^*} = B = (b_{ij})$ *é tal que* $b_{ij} = a_{ji}$ *para todo par* $(i, j)$*.*

**Dem.** *Temos:*

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \text{ e } \beta_j \circ T = T^t(\beta_j) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \alpha_i.$$

*Então:*

$$\beta_j\big(T(v_k)\big) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \beta_j(w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} \delta_{ji} = a_{jk}.$$

*E:*

$$\beta_j\big(T(v_k)\big) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \alpha(v_k) = \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \delta_{ik} = b_{kj}.$$

*Portanto:*

$$a_{jk} = b_{kj} \quad (j = 1, ..., m; k = 1, ..., n).$$

**Definição 4.4** *Seja* $A = (a_{ij})$ $m \times n$ *sobre* $K$*. A matriz* $B = (b_{ij})$ $n \times m$ *sobre* $K$*, tal que* $b_{ij} = a_{ji}$ *para todo par* $(i, j)$*, chama-se a* <u>*transposta*</u> *de* $A$*, anotada* $B = A^t$*.*

*A proposição 4.8 nos diz que* $\left[T^t\right]^{\mathcal{F}^*}_{\mathcal{E}^*} = \left(\left[T\right]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}\right)^t$*.*

**Corolário 4.8.1** *(a) Se* $A, B \in M_{m \times n}(K)$ *e* $c \in K$*, então:*

$$(A + B)^t = A^t + B^t$$

$$(cA)^t = c \cdot A^t$$

*(b) Se* $A \in M_{m \times n}(K)$ *e* $B \in M_{n \times p}(K)$*, então:*

$$(AB)^t = B^t \cdot A^t$$

*(c) Se* $A \in M_n(K)$ *é invertível, então:*

$$(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$$

*(d) Se* $A \in M_{m \times n}(K)$*, então:*

$$posto(A) = posto(A^t),$$

*ou seja, o número de vetores-coluna de A linearmente independentes coincide com o número de vetores-linha de A linearmente independentes.*

**Dem.** *Imediata.*

## 4.4 Exercícios do Capítulo 4

1. Em $V = \mathbb{R}^4$ consideremos o subespaço W gerado por

$$(1,1,1,1);\ (-1,1,-2,2);\ (-1,5,-4,8)\ e\ (-3,1,-5,3).$$

   (a) Ache a dimensão de W e a dimensão de $W^0$.
   (b) Mostre que a imagem de $v = (x, y, z, t) \in V$ por $f \in W^0$ pode se escrever $f(v) = 4ax + 4by - (3a + b)z - (a + 3b)t$.
   (c) Ache uma base $(f_1, f_2)$ de $W^0$, e escreva $f_1$ e $f_2$ na base dual da base canônica de V.

2. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K. Prove que $f_1, ..., f_p \in V^*$ são LI se, e só se, dados $\alpha_1, ..., \alpha_p \in K$ quaisquer, existe $v \in V$ tal que $f_i(v) = \alpha_i,\ 1 \leq i \leq p$.

3. Sejam $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ base do espaço vetorial V sobre K, $\mathcal{E}^* = (e_1^*, ..., e_n^*)$ a base dual de $\mathcal{E}$ e $\varphi : V \longrightarrow V^*$ o isomorfismo definido por $\varphi(e_i) = e_i^*,\ 1 \leq i \leq n$. Ache todos os automorfismos $u : V \longrightarrow V$ tais que $< x, \varphi(y) >=< u(x), (\varphi \circ u)(y) >$ para $x, y \in V$ quaisquer.

# Capítulo 5

# Determinantes

**Obs.** Neste capítulo, por motivos técnicos, vamos supor que a característica do corpo K é diferente de 2; por exemplo podemos tomar $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$.

## 5.1 Aplicações r-lineares alternadas

**Definição 5.1** *Sejam V e W espaços vetoriais sobre K. Uma aplicação* $f : V \times \overset{r}{\ldots} \times V \longrightarrow W$ *é r-linear se:*
*(a)* $f(v_1, ..., v_i + u_i, ..., v_r) = f(v_1, ..., v_i, ..., v_r) + f(v_1, ..., u_i, ..., u_r)$
*(b)* $f(v_1, ..., av_i, ..., v_r) = a \cdot f(v_1, ..., v_i, ..., v_r)$
*quaisquer que sejam* $v_1, ..., v_i, u_i, ..., v_r \in V,\ a \in K$ *e* $1 \leq i \leq r$.

*O conjunto de todas as aplicações r-lineares de V em W, representado por* $\mathcal{L}_r(V, W)$*, munido das leis naturais de adição e multiplicação por escalar, é um espaço vetorial sobre K. Por convenção,* $\mathcal{L}_0(V, W) = W$ *e* $\mathcal{L}_1(V, W) = \mathcal{L}(V, W)$.

**Definição 5.2** $f \in \mathcal{L}_r(V, W)$ *é <u>alternada</u> se* $f(v_1, ..., v_r) = 0$ *toda vez que dois dos vetores* $v_i$ *são iguais.*

*As aplicações r-lineares alternadas formam o subespaço* $\mathcal{A}_r(V, W)$ *de* $\mathcal{L}_r(V, W)$. *Convencionamos que* $\mathcal{A}_0(V, W) = W$ *e* $\mathcal{A}_1(V, W) = \mathcal{L}(V, W)$.

**Definição 5.3** $f \in \mathcal{L}_r(V, W)$ *é <u>antissimétrica</u> se* $f(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_r) = -f(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ...v_r)$, $1 \leq i, j \leq r$, $i \neq j$.

*No caso em que W=K, os elementos de* $\mathcal{L}(V, W)$ *são chamados de <u>formas r-lineares</u>. Em particular,* $\mathcal{L}_1(V, W) = V^*$ *é o dual de V. Os elementos de* $\mathcal{A}_r(V, K)$*, isto é, as formas r-lineares alternadas, são também chamados de r-covetores.*

**Proposição 5.1** $f \in \mathcal{L}_r(V, W)$ *é alternada se, e só se, f é antissimétrica.*

**Dem.** *Se $f \in \mathcal{L}_r(V,W)$ é alternada, então*

$$0 = f(v_1, ..., v+u, ...., v+u, ..., v_r) =$$

$$= f(v_1, ..., v, ..., v, ..., v_r) + f(v_1, ..., u, ..., u, ..., v_r) +$$

$$+ f(v_1, ..., v, ..., u, ..., v_r) + f(v_1, ..., u, ..., v, ..., v_r) =$$

$$= f(v_1, ..., v, ..., u, ..., v_r) + f(v_1, ..., u, ..., v, ..., v_r),$$

*donde resulta que $f$ é antissimétrica.*

*Reciprocamente, se $f$ é antissimétrica então*

$$f(v_1, ..., v, ..., v, ..., v_r) = -f(v_1, ..., v, ..., v, ..., v_r)$$

*donde*
$2f(v_1, ..., v, ..., v, ..., v_r) = 0$ *e, como $2 \neq 0$ em $K$, resulta* $f(v_1, ..., v, ..., v, ..., v_r) = 0$*, isto é, $f$ é alternada.*

**Definição 5.4** *Uma permutação de um conjunto $X$ é toda bijeção de $X$ sobre si mesmo.*

*O conjunto das permutações de $X$, munido das leis de composição de aplicações, é um grupo chamado grupo simétrico de $X$ ou grupo de permutações de $X$, anotado $\mathcal{S}_X$. Se $X = \{1, 2, ..., n\} = I_n$, representamos $\mathcal{S}_X$ por $\mathcal{S}_n$; $\mathcal{S}_n$ tem $n!$ elementos.*

**Definição 5.5** *Uma transposição de $\mathcal{S}_n$ é uma permutação $\tau$ tal que existem inteiros $i \neq j$, $i \leq i, j \leq n$, para os quais $\tau(i) = j$, $\tau(j) = i$ e $\tau(k) = k$ para $k \neq i$, $k \neq j$, ou seja, $\tau$ troca $i$ e $j$ mantendo os demais elementos fixos. É claro que $\tau^2 = id$ e $\tau^{-1} = \tau$.*

**Proposição 5.2** *Toda permutação $\sigma \in \mathcal{S}_n$ pode ser expressa como um produto de transposições.*

**Dem.** *(por indução) Se $n = 1$, não há nada a provar. Suponhamos $n > 1$ e admitamos o teorema verdadeiro para $(n-1)$. Se $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e $\sigma(n) = n$, então a restrição $\sigma' = \sigma|_{I_{n-1}}$ pertence a $\mathcal{S}_{n-1}$. Pela hipótese de indução, existem transposições $\tau_1', ..., \tau_k' \in \mathcal{S}_{n-1}$ tais que $\sigma' = \tau_1'...\tau_k'$. Para cada $i$, $i \leq i \leq k$, seja $\tau_i \in \mathcal{S}_n$ a transposição tal que $\tau_i|_{I_{n-1}} = \tau_i'$ e $\tau_i(n) = n$. Então, é claro que $\sigma = \tau_1...\tau_k$. Se $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e $\sigma(n) = k \neq n$, seja $\tau \in \mathcal{S}_n$ a transposição tal que $\tau(k) = n$, $\tau(n) = k$. Então, $\tau\sigma = \tau_1...\tau_k$, isto é, $\sigma = \tau\tau_1...\tau_k$.*

**Proposição 5.3** *A cada permutação $\sigma \in \mathcal{S}_n$ é possível associar um sinal, 1 ou -1, anotado $\varepsilon(\sigma)$, tal que:*
*(1) se $\tau$ é uma transposição, então $\varepsilon(\tau) = -1$*
*(2) se $\sigma, \rho \in \mathcal{S}_n$, então $\varepsilon(\sigma\rho) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\rho)$.*

**Dem.** *Seja $\sigma \in \mathcal{S}_n$ e consideremos os números*

$$\pi_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (j-i) = (2-1)\big[(3-1)(3-2)\big]...\big[(n-1)(n-2)...2 \cdot 1\big]$$

*e* $\sigma(\pi_n) = \displaystyle\prod_{1 \le i < j \le n} \big[\sigma(j) - \sigma(i)\big].$

*Como $\sigma$ é bijetora, cada fator de $\pi_n$, a menos do sinal, aparece em $\sigma(\pi_n)$ uma e uma só vez, e vemos que $\sigma(\pi_n) = \pm\pi_n$. Se $\tau \in \mathcal{S}_n$ é uma transposição, é claro que $(\tau\sigma)(\pi_n) = -\sigma(\pi_n)$.*
*Logo, se $\sigma = \tau_1...\tau_k$ é um produto de transposições, temos $\sigma(\pi_n) = (-1)^k\pi_n$, donde $(-1)^k = \dfrac{\sigma(\pi_n)}{\pi_n}$, o que mostra que a paridade do inteiro $k$ só depende de $\sigma$ e não da sua expressão como produto de transposições. Definimos o sinal de $\sigma$ por $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$. Logo: $\sigma(\pi_n) = \varepsilon(\sigma)\pi_n$. Para uma transposição $\tau$, $\tau(\pi_n) = -\pi_n$, donde $\varepsilon(\tau) = -1$, o que prova (1).*

*Se $\rho \in \mathcal{S}_n$, temos $(\sigma\rho)(\pi_n) = (\tau_1...\tau_k\rho)(\pi_n) = (-1)^k\rho(\pi_n) = \varepsilon(\sigma)\rho(\pi_n) = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\rho)\pi_n$.*
*Por outro lado, $(\sigma\rho)(\pi_n) = \varepsilon(\sigma\rho) \cdot \pi_n$. Resulta: $\varepsilon(\sigma\rho) = \varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\rho)$, o que prova (2).*

**Corolário 5.3.1** *Se $\sigma \in \mathcal{S}_n$ se exprime como produto de transposições de duas maneiras distintas, $\sigma = \tau_1...\tau_k = \tau'_1...\tau'_s$, então $k$ e $s$ têm a mesma paridade (pois $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k = (-1)^s$).*

**Definição 5.6** *Seja $\sigma \in \mathcal{S}_n$. Se $\varepsilon(\sigma) = 1$ dizemos que $\sigma$ é uma permutação par; se $\varepsilon(\sigma) = -1$ dizemos que $\sigma$ é uma permutação ímpar.*

*Se uma permutação par se escreve como produto de transposições, $\sigma = \tau_1...\tau_k$, é claro que $k$ é um número par, e reciprocamente.*

**Proposição 5.4** *Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais sobre $K$ e $f \in \mathcal{L}_r(V, W)$. $f$ é antissimétrica se, e só se,*

$$f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(r)}) = \varepsilon(\sigma)f(v_1, ..., v_r)$$

*quaisquer que sejam $v_1, ..., v_r \in V$ e $\sigma \in \mathcal{S}_r$.*

**Dem.** *Por definição, $f \in \mathcal{L}_r(V,W)$ é antissimétrica se, e só se,*

$$f(v_{\tau(1)}, ..., v_{\tau(r)}) = \varepsilon(\tau) f(v_1, ..., v_r)$$

*qualquer que seja a transposição $\tau \in \mathcal{S}_r$.*

*Se $\sigma \in \mathcal{S}_r$, podemos escrever $\sigma$ como um produto de transposições: $\sigma = \tau_1 ... \tau_k$. Então, $f$ é antissimétrica se, e só se,*

$$f(v_{\sigma(1)}, ..., v_{\sigma(r)}) = f(v_{\tau_1 ... \tau_k(1)}, ..., v_{\tau_1 ... \tau_k(r)}) =$$

$$= \varepsilon(\tau_k) f(v_{\tau_1 ... \tau_{k-1}(1)}, ..., v_{\tau_1 ... \tau_{k-1}(r)}) = ... =$$

$$= \varepsilon(\tau_k) ... \varepsilon(\tau_1) f(v_1, ..., v_r) = \varepsilon(\sigma) f(v_1, ..., v_r).$$

**Proposição 5.5** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$ e $f \in \mathcal{A}_r(V,K)$. Se $v_1, ..., v_r \in V$ são linearmente dependentes (LD), então $f(v_1, ..., v_r) = 0$.*

**Dem.** *Existem escalares $a_1, ..., a_r$, não todos nulos, tais que $a_1 v_1 + ... + a_r v_r = 0$. Se, por exemplo, $a_i \neq 0$, temos:*

$$0 = f(v_1, ..., v_{i-1}, 0, v_{i+1}, ..., v_r) =$$

$$= f(v_1, ..., v_{i-1}, \sum_{k=1}^{r} a_k v_k, v_{i+1}, ..., v_r) =$$

$$= a_i f(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, ..., v_r),$$

*donde $f(v_1, ..., v_r) = 0$.*

**Proposição 5.6** *Se $dim_K V = n$ então $dim_K \mathcal{A}_n(V,K) = 1$.*

**Dem.** *Para maior clareza, comecemos com o caso $n = 2$. Sejam $(e_1, e_2)$ base de $V$, $v_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2$, $v_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2$. Se $f \in \mathcal{A}_2(V,K)$, então:*

$$f(v_1, v_2) = f(a_{11}e_1 + a_{21}e_2, a_{12}e_1 + a_{22}e_2) =$$

$$= a_{11}a_{12} f(e_1, e_1) + a_{11}a_{22} f(e_1, e_2) + a_{21}a_{12} f(e_2, e_1) + a_{21}a_{22} f(e_2, e_2) =$$

$$= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) f(e_1, e_2).$$

*Se $D : V \times V \longrightarrow K$ é definida por $D(v_1, v_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, é fácil ver que $D \in \mathcal{A}_2(V,K)$. Além disso, $D(e_1, e_2) = 1$. O cálculo acima nos mostra que $f = aD$ ($a = f(e_1, e_2)$), ou seja, que $D$ é uma base de $\mathcal{A}_2(V,K)$.*

*Consideremos agora o caso geral. Seja* $(e_1, ..., e_n)$ *uma base de* $V$*. Se* $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ *e* $f \in \mathcal{A}_n(V, K)$*, temos:*

$$f(v_1, ..., v_n) = f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} e_{i1}, ..., \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} e_{i_n}\right) =$$

$$= \sum_{i_1,...,i_n=1}^{n} a_{i_1 1} ... a_{i_n n} \cdot f(e_{i_1}, ..., e_{i_n}).$$

*Como* $f$ *é alternada temos que* $f(e_{i_1}, ..., e_{i_n}) = 0$ *sempre que* $i_j = i_k$ *com* $j \neq k$*, de forma que teremos na soma acima apenas as parcelas onde* $\{i_1, ..., i_n\}$ *for uma permutação de* $\{1, ..., n\}$*. Assim,*

$$f(v_1, ..., v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(n)n} \cdot f(e_{\sigma(1)}, ..., e_{\sigma(n)}) =$$

$$= f(e_1, ..., e_n) \cdot \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(n)n},$$

*soma de* $n!$ *parcelas, cada uma correspondente a uma permutação de* $\mathcal{S}_n$*.*

*Seja* $D : V \times \overset{n}{\cdots} \times V \longrightarrow K$ *definida por* $D(v_1, ..., v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(n)n}$*.*

*Então:*

*(a)* *D é n-linear:* $D(v_1, ..., v_i' + c v_i'', ..., v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma_{(1)}1} ... (a'_{\sigma(i)i} + c a''_{\sigma(i)i}) ... a_{\sigma(n)n} =$
$= D(v_1, ..., v_i', ..., v_n) + c D(v_1, ..., v_i'', ..., v_n)$.

*(b)* $D$ *é* *antissimétrica*: *se* $i < j$ *e* $v_i = v_j$*, temos:*

$$D(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(i)i} ... a_{\sigma(j)j} ... a_{\sigma(n)n}.$$

*Seja* $\tau$ *a transposição de* $\mathcal{S}_n$ *tal que* $\tau(i) = j$*,* $\tau(j) = i$ *e seja* $\sigma\tau = \alpha$*. Então,* $\varepsilon(\alpha) = -\varepsilon(\sigma)$ *e*

$$D(v_1, ..., v_i, ..., v_j, ..., v_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma\tau(1)1} ... a_{\sigma\tau(j)i} ... a_{\sigma\tau(i)j} ... a_{\sigma\tau(n)n} =$$

$$= - \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\alpha) a_{\alpha(1)1} ... a_{\alpha(j)i} ... a_{\alpha(i)j} ... a_{\alpha(n)n} =$$

$$= -D(v_1, ..., v_j, ..., v_i, ..., v_n).$$

*(c)* $D(e_1, ..., e_n) = 1$.

*Como* $e_j = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} e_i$, *temos:*

$$D(e_1, ..., e_n) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma)\delta_{\sigma(1)1}...\delta_{\sigma(n)n} = \varepsilon(id)\delta_{11}...\delta_{nn} = 1.$$

*Logo, se* $f \in \mathcal{A}_n(V, K)$ *temos:*
$f(v_1, ..., v_n) = f(e_1, ..., e_n)D(v_1, ..., v_n)$, *ou seja,* $f = aD$, *onde* $a = f(e_1, ..., e_n)$.
*Portanto,* $D$ *gera o espaço vetorial* $\mathcal{A}_n(V, K)$ *e dim* $\mathcal{A}_n(V, K) = 1$.
**Obs.** *Dado* $a \in K$, $f = aD$ *é a única forma n-linear alternada em* $V$ *tal que* $f(e_1, ..., e_n) = a$.

**Corolário 5.6.1** *Sejam* $V$ *um espaço vetorial de dimensão* $n$ *sobre* $K$ *e* $f \in \mathcal{A}_n(V, K)$, $f \neq 0$. *Os vetores* $v_1, ..., v_n \in V$ *são LD se, e só se,* $f(v_1, ..., v_n) = 0$.

**Dem.** *Já vimos, na proposição 5.5, que se* $v_1, ..., v_n$ *são LD então* $f(v_1, ..., v_n) = 0$. *Reciprocamente, suponhamos que* $v_1, ..., v_n$ *sejam LI, ou seja, uma base de* $V$. *Seja* $D \in \mathcal{A}_n(V, K)$ *tal que* $D(v_1, ..., v_n) = 1$. *Então:*

$$f = f(v_1, ..., v_n) \cdot D$$

*donde* $f(v_1, ..., v_n) \neq 0$ *(pois* $f \neq 0$*).*

## 5.2 Determinante de um Operador Linear

Se V e W são espaços vetoriais sobre K e $T : V \longrightarrow W$ é linear, então T induz uma aplicação linear $T^* : \mathcal{A}_r(W, K) \longrightarrow \mathcal{A}_r(V, K)$ definida por

$$(T^*f)(v_1, ..., v_r) = f(Tv_1, ..., Tv_r),$$

onde $f \in \mathcal{A}_r(W, K)$ e $v_1, ..., v_r \in V$.

Se $L : V \longrightarrow W$ e $T : U \longrightarrow V$ são lineares, então $(L \circ T)^* = T^* \circ L^*$ já que $(L \circ T)^* f(u_1, ..., u_r) = f(LTu_1, ..., LTu_r) = L^* f(Tu_1, ..., Tu_r) =$
$= T^*(L^*f)(u_1, ..., u_r)$ quaisquer que sejam $u_1, ..., u_r \in U$ e $f \in \mathcal{A}_r(W, K)$.

**Definição 5.7** *Sejam* $V$ *um espaço vetorial de dimensão* $n$ *sobre* $K$ *e* $T : V \longrightarrow V$ *linear. Como dim* $\mathcal{A}_n(V, K) = 1$, *existe um único escalar* $\underline{a}$ *tal que* $T^*(f) = af$ *para todo* $f \in \mathcal{A}_n(V, K)$. *Dizemos que este escalar* $\underline{a}$ *é o* <u>*determinante*</u> *do operador* $T$, *e escrevemos* $a = det\ T$. *Assim, det* $T$ *é o escalar tal que*

$$f(Tv_1, ..., Tv_n) = det\ T \cdot f(v_1, ..., v_n)$$

*quaisquer que sejam* $v_1, ..., v_n \in V$ *e* $f \in \mathcal{A}_n(V, K)$.

**Proposição 5.7** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão $n$ sobre $K$.*
*(1) Se $I : V \longrightarrow V$ é a identidade, então $det\ I = 1$.*
*(2) Se $L, T \in \mathcal{L}(V)$, então $det(L \circ T) = det\ L \cdot det\ T$.*
*(3) $T \in \mathcal{L}(V)$ é invertível $\Leftrightarrow det\ T \neq 0$.*

**Dem.** *Para todo $f \in \mathcal{A}_n(V, K)$ e $v_1, ..., v_n \in V$ arbitrários, temos:*
*(1) $f(Iv_1, ..., Iv_n) = det\ I \cdot f(v_1, ..., v_n)$, donde $det\ I = 1$.*
*(2) $det(L \circ T) \cdot f = (L \circ T)^* f = T^*(L^* f) = det\ T \cdot (L^* f) = det\ T \cdot det\ L \cdot f$, donde $det(L \circ T) = det\ L \cdot det\ T$.*
*(3) Se $T$ é invertível então $det\ T \cdot det\ T^{-1} = det\ I = 1$, donde $det\ T \neq 0$. Reciprocamente, seja $det\ T \neq 0$. Se $(v_1, ..., v_n)$ é base de $V$, tomemos $f \in \mathcal{A}_n(V, K)$ tal que $f(v_1, ..., v_n) \neq 0$. Então,*

$$f(Tv_1, ..., Tv_n) = det\ T \cdot f(v_1, ..., v_n) \neq 0.$$

*Pelo corolário da proposição 5.6, $(Tv_1, ..., Tv_n)$ é base de $V$ e, portanto, $T$ é invertível.*

**Definição 5.8** *Seja $A = (a_{ij})$ uma matriz em $K$, quadrada de ordem $n$. Se $T_A : K^n \longrightarrow K^n$ é o operador linear associado a $A$, definimos o <u>determinante</u> de $A$, $det\ A$, como sendo $det\ T_A$.*

*Sejam $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ a base canônica de $K^n$ e $D$ a única forma $n$-linear alternada tal que $D(e_1, ..., e_n) = 1$. Então:*

$$det\ A = D(T_A(e_1), ..., T_A(e_n)) = D(A_1, ..., A_n),$$

*onde $A_1, ..., A_n$ são os vetores-coluna de $A$.*

*Vimos, na proposição 5.6, que $D(A_1, ..., A_n) = D\left(\sum_{i=1}^{n} a_{i1}e_i, ..., \sum_{i=1}^{n} a_{in}e_i\right) =$ $= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1)1} ... a_{\sigma(n)n}$, que é a definição clássica de $det\ A$.*

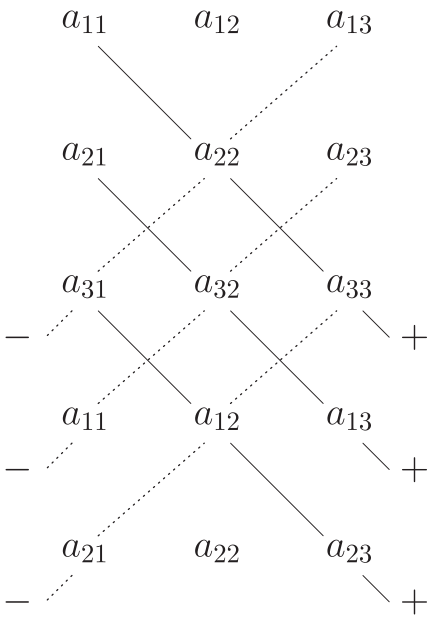
**Definição 5.9** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$ e $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ uma base de $V$. Dada uma sequência de $n$ vetores, $(v_1, ..., v_n)$, chama-se <u>determinante desses vetores em relação à base $\mathcal{E}$</u>, o escalar $det_{\mathcal{E}}(v_1, ..., v_n) = D(v_1, ..., v_n)$.*
*Se $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$, $1 \leq j \leq n$, então a matriz $A = (a_{ij})$ é $n \times n$ e $det_{\mathcal{E}}(v_1, ..., v_n) = det\ A$.*

*É usual a notação $det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}$ para o determinante da matriz $A = (a_{ij})$.*

**Exemplo 5.2.1** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ *pois a permutação* $\{1,2\} \longrightarrow (1,2)$ *é <u>par</u> e* $\{1,2\} \longrightarrow (2,1)$ *é <u>ímpar</u>.*

**Exemplo 5.2.2** *Dentre as* $3! = 6$ *permutações de* $\{1,2,3\}$ *temos 3 que são pares, a saber:* $\begin{matrix} \{1,2,3\} \longrightarrow (1,2,3) \\ \{1,2,3\} \longrightarrow (2,3,1) \\ \{1,2,3\} \longrightarrow (3,1,2) \end{matrix}$ *e 3 que são ímpares:* $\begin{matrix} \{1,2,3\} \longrightarrow (1,3,2) \\ \{1,2,3\} \longrightarrow (3,2,1) \\ \{1,2,3\} \longrightarrow (2,1,3) \end{matrix}$.

*Portanto:* $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33}$, *e temos a seguinte regra prática (regra de Sarrus):*




*Repetimos as duas primeiras linhas do determinante; os produtos "paralelos" à diagonal principal são precedidos do sinal + e aqueles "paralelos" à diagonal secundária são precedidos do sinal −.*

**Obs.** *Para os determinantes de ordem superior a 3 não temos regras práticas de cálculo; eles serão calculados pelo processo da seção 5.3 a seguir.*

**Proposição 5.8** *Seja A uma matriz de ordem n. Então:* $det\ A = det\ A^t$.

**Dem.** *Se* $A = (a_{ij})$ *então* $A^t = (a'_{ij})$ *com* $a'_{ij} = a_{ji}$. *Temos:*

$$det\ A^t = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a'_{\sigma(1)1} \ldots a'_{\sigma(n)n} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{1\sigma(1)} \ldots a_{n\sigma(n)}.$$

*Mas,* $a_{1\sigma(1)}...a_{n\sigma(n)} = a_{\sigma^{-1}(1)1}...a_{\sigma^{-1}(n)n}$ *e* $\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma)$*. Portanto,*

$$det\ A^t = \sum_{\sigma^{-1}\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) a_{\sigma^{-1}(1)1}...a_{\sigma^{-1}(n)n} = det\ A$$

*pois se* $\sigma$ *percorre* $\mathcal{S}_n$*,* $\sigma^{-1}$ *também percorre* $\mathcal{S}_n$*.*
**Obs. 1** *A proposição 5.8 mostra que det A é também o determinante dos vetores-linha de A.*
**Obs. 2** *Como a aplicação* $(v_1, ..., v_n) \longmapsto det(v_1, ..., v_n)$ *é n-linear alternada, temos um certo número de propriedades que, para comodidade do leitor, são listadas abaixo:*
*(1)* $det(v_1, ..., v_i'+cv_i'', ..., v_n) = det(v_1, ..., v_i', ..., v_n)+c\cdot det(v_1, ..., v_i'', ..., v_n),\ c \in K$*.*
*(2) Toda permutação* $\sigma \in \mathcal{S}_n$ *sobre as colunas (ou linhas) da matriz* $A \in M_n(K)$ *transforma det A em* $\varepsilon(\sigma)det\ A$*. Em particular, toda transposição sobre as colunas (ou linhas) de A transforma det A em* $-det\ A$*.*
*(3) Se uma coluna (ou linha) de A é nula, então* $det\ A = 0$*.*
*(4) Se duas colunas (ou duas linhas) de A são proporcionais, então* $det\ A = 0$*.*
*(5)* $det(v_1, ..., v_{i-1}, \sum_{k=1}^{n} a_k v_k, v_{i+1}, ..., v_n) = a_i \cdot det(v_1, ..., v_i, ..., v_n)$*.*
*(6)* $det(v_1, ..., v_n) = 0 \Leftrightarrow v_1, ..., v_n$ *são LD.*
*(7)* $det\ I_n = 1$*.*
*(8)* $det\ (AB) = det\ A \cdot det\ B$*.*
*(9)* $det\ A^t = det\ A$*.*
*(10) A é invertível* $\Leftrightarrow det\ A \neq 0$*.*

## 5.3 Desenvolvimento em relação aos elementos de uma coluna (ou de uma linha)

**Definição 5.10** *Seja* $A = (a_{ij})$ *uma matriz* $n \times n$*. Seja* $A_{ij}$ *a matriz obtida de A pela supressão da linha* $\underline{i}$ *e da coluna* $\underline{j}$*.* $A_{ij}$ *é uma matriz de ordem* $(n-1)$*, e det* $A_{ij}$ *chama-se o* <u>*menor*</u> *associado ao elemento* $a_{ij}$*. O escalar* $C_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot det\, A_{ij}$ *chama-se o* <u>*cofator*</u> *de* $a_{ij}$*.*

**Proposição 5.9** *O determinante de uma matriz quadrada é igual à soma dos produtos dos elementos de uma coluna qualquer pelos seus respectivos cofatores.*

**Dem.** *Seja* $A = (a_{ij})$ *–* $n \times n$ *– e sejam* $A_1, ..., A_n$ *seus vetores-coluna. A* *função* $X \longmapsto det(A_1, ..., X, ..., A_n)$ *onde* $X$ *substitui* $A_j$*, é uma forma linear* $\beta_j : K^n \longrightarrow K$*. Logo,*

$$det\ A = \beta_j(A_j) = \beta_j(a_{1j}e_1 + ... + a_{nj}e_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\beta_{ij},$$

*onde* $(e_1, ..., e_n)$ *é a base canônica de* $K^n$ *e* $\beta_{ij} = \beta_j(e_i)$*. Os escalares* $\beta_{ij}$ *não dependem de* $A_j$*, isto é, de* $a_{1j}, ..., a_{nj}$*.*

$$\textit{Temos: } \beta_{ij} = \beta_j(e_i) = \left| \begin{array}{ccccc} a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \iddots & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \iddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \\ & & \uparrow & & \\ & & \textit{coluna } j & & \end{array} \right| \leftarrow \textit{linha } i$$

*e* $\beta_{ij} = det\ \tilde{A}$*.*

$$\textit{Portanto: } \beta_{ij} = (-1)^{i-1} \begin{vmatrix} a_{i1} & \cdots & 1 & \cdots & a_{in} \\ a_{11} & \cdots & 0 & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} \begin{vmatrix} 1 & a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$= (-1)^{i+j}det\ B$*, onde a matriz* $B = (b_{ij})$ *foi obtida de* $\tilde{A}$ *trocando-se sucessivamente a linha* $\underline{i}$ *com as (i-1) linhas que a precedem em* $\tilde{A}$ *e, a seguir, a coluna* $\underline{j}$ *sucessivamente com as (j-1) colunas que a antecedem. Observemos que o menor det* $B_{11}$*, de* $b_{11} = 1$ *em* $B$ *coincide com o menor det* $A_{ij}$ *de* $a_{ij}$ *em* $A$*. Além disso, sabemos que det* $B = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(1)1}...b_{\sigma(n)n}$*.*

*Se* $\sigma(1) \neq 1$*, o termo correspondente é nulo, pois, neste caso,* $b_{\sigma(1)1} = 0$*, e det* $B$ *reduz-se à soma*

$$det\ B = \sum_{\substack{\sigma \in \mathcal{S}_n \\ \sigma(1) = 1}} \varepsilon(\sigma) b_{\sigma(2)2}...b_{\sigma(n)n}.$$

*Se* $\sigma'$ *é a permutação de* $\{2, .., n\}$ *tal que* $\sigma'(i) = \sigma(i)$ *para* $2 \leq i \leq n$*, os conjuntos ordenados* $\{1, \sigma(2), ..., \sigma(n)\}$ *e* $\{\sigma'(2), ..., \sigma'(n)\}$ *apresentam o mesmo número de inversões, donde* $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma')$ *e, então, det* $B = \sum_{\sigma' \in \mathcal{S}_{n-1}} \varepsilon(\sigma') b_{\sigma'(2)2}...b_{\sigma'(n)n} = det\ B_{11}$*.*

*Logo,*

$$\beta_{ij} = (-1)^{i+j} det\ B = (-1)^{i+j} det\ B_{11} = (-1)^{i+j} det\ A_{ij} = C_{ij}$$

*e, portanto,*

$$det\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}.$$

**Definição 5.11** *Dizemos que uma matriz $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ – é* <u>*triangular superior*</u> *se $a_{ij} = 0$ sempre que $i > j$. Analogamente se define uma matriz triangular inferior.*

**Corolário 5.9.1** *O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto de seus elementos diagonais.*

**Dem.** *De fato,*

$$det\ A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & 0 & \dots & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & a_{(n-1)(n-1)} & a_{(n-1)n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ 0 & \dots & a_{3(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}$$

*e, por indução:*

$$det\ A = a_{11} a_{22} \dots a_{nn}.$$

**Exemplo 5.3.1** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$
$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}$, *como antes.*

**Exemplo 5.3.2** $D_n = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1+x & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1+x \end{vmatrix} +$

$$+ \begin{vmatrix} x & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1+x & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & \dots & 1+x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix} + xD_{n-1}.$$

*Logo:*

$$D_n = x^{n-1} + xD_{n-1}$$

*Donde:*
$xD_{n-1} = x^2 D_{n-2} + x^{n-1}$
$x^2 D_{n-2} = x^3 D_{n-3} + x^{n-1}$
$\vdots$
$x^{n-2} D_2 = x^{n-1} D_1 + x^{n-1}$
$x^{n-1} D_1 = x^{n-1}(1+x) = x^{n-1} + x^n.$
*Somando estas $n$ igualdades, obtemos:*

$$D_n = x^n + nx^{n-1}.$$

*Seja $A = (a_{ij})$ – $n \times n$. Vimos que $A$ é invertível se existe $B$ – $n \times n$ – tal que $AB = BA = I_n$ (Notação: $B = A^{-1}$) e que basta ser $BA = I_n$ (ou $AB = I_n$) para que seja $B = A^{-1}$.*

**Proposição 5.10** *Sejam $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ – e $C_{ij}$ o cofator de $a_{ij}$ em $A$. Então:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ik} = \delta_{jk} \cdot det\ A = \begin{cases} det\ A & se \quad j = k \\ 0 & se \quad j \neq k \end{cases}.$$

**Dem.** *Basta considerar o caso $j \neq k$, por exemplo, $j < k$. Seja $B = (B_1, ..., B_n)$ a matriz tal que $B_i = A_i$, $i \neq k$, e $B_k = A_j$, ou seja,*

$$B = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} \phantom{a_{11}} & \phantom{\dots} & \uparrow & \phantom{\dots} & \uparrow & \phantom{\dots} & \phantom{a_{1n}} \\ & & coluna\ j & & coluna\ k & & \end{array} \end{array}$$

*É claro que $det\ B = 0$. Desenvolvendo $det\ B$ pelos elementos da coluna $k$, temos:*

$$det\ B = a_{1j}C_{1k} + a_{2j}C_{2k} + ... + a_{nj}C_{nk},$$

*isto é,* $det\ B = 0 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ik},\ j \neq k.$

**Proposição 5.11** *Seja $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ – e $B = (C'_{ij})$ a transposta da matriz dos cofatores dos elementos de $A$, isto é, $C'_{ij} = C_{ji}$ = cofator de $a_{ji}$ em $A$. Então:*

$$BA = (det\ A) \cdot I_n.$$

**Dem.** *Se* $BA = (d_{ij})$, *temos:*

$$d_{kj} = \sum_{i=1}^{n} C'_{ki} \cdot a_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ik} = \delta_{jk} \cdot det\ A.$$

*Logo:*

$$BA = det\ A \cdot I_n.$$

**Corolário 5.11.1** *Se* $A = (a_{ij})$ *–* $n \times n$ *– é invertível, então* $A^{-1} = \dfrac{1}{det\ A} \cdot B$, *onde* $B = (C'_{ij})$ *e* $C'_{ij} = C_{ji} =$ *cofator de* $a_{ji}$ *em* $A$.

*A matriz* $B$ *é a* *adjunta* *(clássica) de* $A$, $B = adj\ A$. *Então:*

$$A^{-1} = \frac{adj\ A}{det\ A}.$$

**Proposição 5.12** *Seja* $A$ *–* $m \times n$ *– de posto* $r$. *Existe submatriz* $r \times r$ *de* $A$ *com determinante* $\neq 0$, *e toda submatriz* $k \times k$ *de* $A$, *com* $k > r$, *tem determinante igual a zero.*

**Dem.** *A tem posto r se, e só se, existem r, e não mais que r, linhas de A que são LI. Podemos supor que sejam as r primeiras (já que a troca de linhas não altera o posto),* $L_1, ..., L_r$. *Seja* $B = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_r \end{bmatrix}$ *–* $r \times n$ *– cujo posto é r, donde existem r, e não mais que r, colunas de B que são LI. Sejam* $B_{j_1}, ..., B_{j_r}$ *essas colunas e* $C = [B_{j_1}, ..., B_{j_r}]$ *–* $r \times r$; *C tem posto r, donde det* $C \neq 0$ *e é a "maior" submatriz quadrada de A com essa propriedade.*

**Exercício** *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{bmatrix}$. *Estude o posto de A conforme os valores de* $t \in \mathbb{R}$.

## Exercícios

1. Sejam $a_1, ..., a_n$ números dados. Prove que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ a_1 & a_2 & ... & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & ... & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & ... & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{i>j} (a_i - a_j).$$

É o determinante de Vandermonde.

2. Seja $A = (a_{ij}) - n \times n$, tal que $a_{ij} = 0$ se $i + j \leq n$. Calcule $det\ A$. Por exemplo, $\begin{vmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & b & c \\ d & e & f \end{vmatrix} = -abd$.

3. Prove: $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

4. Calculando $\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{vmatrix}$, prove que
$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) = (xx' + yy')^2 + (xy' - yx')^2.$$

5. Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, prove que
$$\begin{vmatrix} 1 & sen\ a & cos\ a \\ 1 & sen\ b & cos\ b \\ 1 & sen\ c & cos\ c \end{vmatrix} = sen(b-c) + sen(c-a) + sen(a-b).$$

6. Seja $A = \begin{bmatrix} B & C \\ 0 & D \end{bmatrix}$, onde B é $r \times r$, C é $r \times (n-r)$ e D é $(n-r) \times (n-r)$. Prove que $det\ A = det\ B \cdot det\ D$.

## 5.4 Matrizes Elementares

**Definição 5.12** *Sejam $A$ e $B$ matrizes $m \times n$ sobre o corpo $K$. Dizemos que $A$ é linha-equivalente a $B$ se $B$ pode ser obtida de $A$ por intermédio de um número finito das seguintes operações, chamadas operações elementares sobre as linhas:*
*(a) $T_{ij}$ – trocar de posição as linhas $i$ e $j$ ($i \neq j$)*
*(b) $T_i(k)$ – multiplicar a linha $i$ por $k \in K,\ k \neq 0$*
*(c) $T_{ij}(\lambda)$ – somar à linha $i$ a linha $j$ multiplicada por $\lambda \in K$.*

**Definição 5.13** *Uma matriz obtida da identidade por meio de uma única operação elementar, chama-se uma matriz elementar.*

**Exemplo 5.4.1** *As matrizes* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *são elementares.*

**Proposição 5.13** *Sejam $\underline{e}$ uma operação elementar e $E = e(I_m)$ a matriz elementar $m \times m$ correspondente. Para toda matriz $A = (a_{ij})$ – $m \times n$, tem-se: $e(A) = E \cdot A$.*

**Dem.** *Seja $L_i = (a_{i1}...a_{in})$ a i-ésima linha de A. Então:* $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$. *Se* $B \in M_{n\times p}(K)$, *é fácil ver que* $AB = \begin{bmatrix} L_1B \\ \vdots \\ L_mB \end{bmatrix}$. *Se* $e_1 = (1,0,...,0), ..., e_m = (0,...,0,1)$ *são* $1 \times m$, *é claro que* $e_1A = L_i$ *e* $I_m = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$.

*(1)* $e = T_{ij}$. *Então:* $E = e(I_m) = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$, $e(A) = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$.

*Logo:*

$$EA = \begin{bmatrix} e_1A \\ \vdots \\ e_jA \\ \vdots \\ e_iA \\ \vdots \\ e_mA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} = e(A).$$

*(2)* $e = \underset{k\neq 0}{T_i(k)}$. *Então:* $E = e(I_m) = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ ke_i \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$, $e(A) = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ kL_i \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$.

*Logo:*

$$EA = \begin{bmatrix} e_1A \\ \vdots \\ ke_iA \\ \vdots \\ e_mA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ kL_i \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} = e(A).$$

*(3)* $e = \underset{i<j}{T_{ij}(\lambda)}$. *Então:* $E = e(I_m) = \begin{bmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_i + \lambda e_j \\ \vdots \\ e_j \\ \vdots \\ e_m \end{bmatrix}$, $e(A) = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \lambda L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix}$.

*Logo:*

$EA = \begin{bmatrix} e_1A \\ \vdots \\ (e_i + \lambda e_j)A \\ \vdots \\ e_jA \\ \vdots \\ e_mA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i + \lambda L_j \\ \vdots \\ L_j \\ \vdots \\ L_m \end{bmatrix} = e(A)$, *e a proposição está demonstrada em todos os casos.*

**Proposição 5.14** *Duas matrizes $A$ e $B$, $m \times n$ sobre $K$, são linha-equivalentes se, e só se, existem matrizes elementares $m \times m$, $E_1, ..., E_r$, tais que $E_r ... E_1 A = B$.*

**Dem.** *$A$ é linha-equivalente a $B$ se, e só se, existem operações elementares $e_1, ..., e_r$ tais que $e_r(...(e_2(e_1(A)))...) = B$. Pondo $E_i = e_i(I_m)$, vem: $E_r ... E_1 A = B$.*

**Obs. 1** *As operações elementares são bijetoras. De fato, $T_{ij}^{-1} = T_{ij}$, $T_i(k)^{-1} = T_i\left(\dfrac{1}{k}\right)$ e $T_{ij}(\lambda)^{-1} = T_{ij}(-\lambda)$.*

**Obs. 2** *A inversa de uma matriz elementar é também elementar e se $E = e(I_n)$ e $E' = e^{-1}(I_n)$, então $E \cdot E' = e(e^{-1}(I_n)) = I_n$, donde $E' = E^{-1}$.*

**Proposição 5.15** *Seja $A \in M_n(\mathbb{K})$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

*(a) $A$ é invertível*

*(b) $A$ é linha-equivalente a $I_n$*
*(c) $A$ é um produto de matrizes elementares*
**Dem.**
$(a) \Rightarrow (b)$: *Como $A$ é invertível temos $\det A \neq 0$, donde existe algum $a_{i1} \neq 0$. Usando, se necessário, a operação $T_{1i}$, podemos supor $a_{11} \neq 0$. Neste caso, a operação $T_1\left(\dfrac{1}{a_{11}}\right)$ muda $A$ na matriz $B$ linha-equivalente a $A$:*

$$B = \begin{bmatrix} 1 & b_{12} & ... & b_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{bmatrix},$$

*onde $b_{1i} = \dfrac{a_{1i}}{a_{11}}$ $(i = 2, 3, ..., n)$.*

*Aplicando a $B$, sucessivamente, as operações $T_{21}(-a_{21}), ..., T_{n1}(-a_{n1})$, chegamos à matriz $C$ linha-equivalente a $A$:*

$$C = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & ... & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & ... & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & c_{n2} & ... & c_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Como $C = PA$, onde $P$ é um produto de matrizes elementares e, portanto, invertível, resulta que $C$ é invertível. Logo, $\det C = \begin{vmatrix} c_{22} & ... & c_{2n} \\ c_{n2} & ... & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$ e podemos, como acima, supor $c_{22} \neq 0$. Usando, sucessivamente, as operações $T_2\left(\dfrac{1}{c_{22}}\right)$, $T_{12}(-c_{12}), ..., T_{n2}(-c_{n2})$, a matriz $C$ transforma-se em $D$, linha-equivalente a $A$:*

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & d_{13} & ... & d_{1n} \\ 0 & 1 & d_{23} & ... & d_{2n} \\ 0 & 0 & d_{33} & ... & d_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & d_{n3} & ... & d_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Prosseguindo desta maneira chegaremos, após um número finito de operações elementares, à matriz $I_n$.*
$(b) \Rightarrow (c)$: *Se $A$ é linha-equivalente a $I_n$ então existem matrizes elementares $E_1, ..., E_r$ tais que $E_r...E_1A = I_n$, donde $A = E_1^{-1}...E_r^{-1}$. Como a inversa de uma matriz elementar é também elementar, resulta que $A$ é um produto de matrizes elementares.*

*(c) $\Rightarrow$ (a): Se $A = E_1 ... E_r$, cada $E_j$ sendo elementar, então $A$ é invertível, pois cada $E_j$ é invertível.*

**Proposição 5.16** *A mesma sequência finita de operações elementares que muda a matriz invertível $A \in M_n(K)$ na identidade $I_n$, muda $I_n$ em $A^{-1}$.*

**Dem.** *Sejam $e_1, ..., e_r$ operações elementares que mudam $A$ em $I_n$ e $E_1, ..., E_r$ as matrizes elementares correspondentes. Então: $E_r ... E_2 E_1 A = I_n$, donde $A^{-1} = E_r ... E_1 I_n$.*

**Exemplo 5.4.2** *Calculemos a inversa de*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

*Escrevamos $I_3$ ao lado de $A$ e efetuemos as operações elementares indicadas, que transformam $A$ em $I_3$:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{31}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_2\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 6 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{32}(-6)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3/2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_3(-1)}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3/2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3/2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{23}\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 3/2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3/2 & -1 \end{bmatrix}$$

*Portanto:*

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 3/2 & -1 \\ -1 & -1/2 & 1/2 \\ 2 & 3/2 & -1 \end{bmatrix}$$

*Da mesma maneira que operamos sobre as linhas de $A$ – $m \times n$ – podemos operar sobre as colunas. Obtemos assim as* <u>*operações elementares sobre as*</u>

*colunas:*
*(a)* $T'_{ij}$ *– trocar de posição as colunas* $i$ *e* $j$, $i \neq j$.
*(b)* $T'_i(k)$ *– multiplicar a coluna* $i$ *por* $k \neq 0$.
*(c)* $T'_{ij}(\lambda)$ *– somar à coluna* $i$ *a coluna* $j$ *multiplicada por* $\lambda \in K$.

*Se* $e'$ *é uma operação elementar sobre as colunas, então* $E' = e'(I_n)$ *é uma matriz (coluna-) elementar de ordem* $n$. *Valem propriedades análogas as obtidas anteriormente, a saber:*

**Proposição 5.13'** *Se* $A \in M_{m\times n}(K)$, *então* $e'(A) = AE'$.
**Definição** $A, B \in M_{m\times n}(K)$ *são coluna-equivalentes se* $B$ *pode ser obtida de* $A$ *por meio de um número finito de operações elementares sobre as colunas.*

**Proposição 5.14'** $A, B \in M_{m\times n}(K)$ *são coluna-equivalentes se, e só se, existem matrizes elementares* $E'_1, ..., E'_r$ *tais que* $AE'_1...E'_r = B$.
**Obs.** *As operações elementares (sobre as colunas) são bijetoras:*

$$(T'_{ij})^{-1} = T'_{ij};\ T'_i(k)^{-1} = T'_i\left(\frac{1}{k}\right)$$

*e* $T'_{ij}(\lambda)^{-1} = T'_{ij}(-\lambda)$.

*As inversas das matrizes elementares são também elementares:*

$$se\ E' = e'(I_n)\ então\ (E')^{-1} = (e')^{-1}(I_n).$$

**Proposição 5.15'** *Seja* $A \in M_n(K)$. *São equivalentes:*
*(a)* $A$ *é invertível.*
*(b)* $A$ *é coluna-equivalente a* $I_n$.
*(c)* $A$ *é um produto de matrizes (coluna-)elementares.*
**Definição** *Se* $A, B \in M_{m\times n}(K)$, *escrevemos* $A \sim B$ *quando for possível transformar* $A$ *em* $B$ *por meio de uma sequência finita de operações elementares (sobre as linhas e/ou colunas). É claro que* $\sim$ *é uma relação de equivalência.*

**Proposição 5.17** *Sejam* $A, B \in M_{m\times n}(K)$. $A \sim B$ *se, e só se,* $A$ *e* $B$ *são equivalentes, isto é, se, e só se, existem matrizes invertíveis* $P \in M_m(K)$ *e* $Q \in M_n(K)$ *tais que* $B = PAQ$.
**Dem.** *Se* $A \sim B$ *existem matrizes elementares* $E_1, ..., E_r, E'_1, ..., E'_s$ *tais que* $B = E_r...E_1 \cdot A \cdot E'_1...E'_s$, *ou seja,* $B = PAQ$ *com* $P$ *e* $Q$ *invertíveis.*

*Reciprocamente, se $B = PAQ$ com $P$ e $Q$ invertíveis, $P \in M_m(K)$ e $Q \in M_n(K)$, então existem matrizes elementares tais que $P = E_r ... E_1$ e $Q = E'_1 ... E'_s$, o que mostra que $A \sim B$.*

**Corolário 5.17.1** *(a) $A, B \in M_{m\times n}(K)$ são linha-equivalentes se, e só se, existe $P \in M_m(K)$ invertível tal que $B = PA$.*
*(b) $A, B \in M_{m\times n}(K)$ são coluna-equivalentes se, e só se, existe $Q \in M_n(K)$ invertível tal que $B = AQ$.*
**Obs.** *É claro que se $A$ e $B$ são linha-equivalentes (ou coluna-equivalentes, ou equivalentes), então pelo corolário 3.8.1 da proposição 3.8, posto$(A)$ = posto$(B)$, de modo que podemos usar as operações elementares para estudar a dependência ou independência linear de vetores.*

**Exemplo 5.4.3** *Sejam os vetores de $\mathbb{R}^4$ : $v_1 = (-1, 0, 1, 2)$, $v_2 = (3, 4, -2, 5)$ e $v_3 = (1, 4, 0, 9)$. Seja*

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix}$$

*a matriz cujas colunas são esses vetores. O posto de $A$ é a dimensão do espaço gerado por $v_1, v_2, v_3$. Operando sobre as linhas de $A$, temos:*

$$A \xrightarrow{T_1(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{41}(-2)}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_2(\frac{1}{4})} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 11 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{32}(-1)}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 11 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{42}(-11)} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = B,$$

*donde posto$(A)$ = posto$(B) = 2$, de modo que $v_1, v_2, v_3$ são LD e geram um espaço de dimensão 2; $(v_1, v_2)$ é uma base para este subespaço de $\mathbb{R}^4$.*

**Exemplo 5.4.4** *Vamos estudar a independência linear das formas lineares sobre $\mathbb{R}^4$, onde $ab \neq 0$:*

$$f_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 - ax_3; \quad f_2 = x_2 - \frac{1}{a}x_4;$$

$$f_3 = x_1 - bx_4; \qquad\qquad f_4 = x_2 - \frac{1}{b}x_4.$$

*As formas $f_j$ são elementos de $(\mathbb{R}^4)^*$; em relação à base de $(\mathbb{R}^4)^*$, dual da base canônica de $\mathbb{R}^4$, temos:*

$$f_1 = (1, 0, -a, 0); \quad f_2 = (0, 1, 0, \frac{-1}{a});$$

$$f_3 = (1, 0, 0, -b); \quad f_4 = (0, 1, 0, \frac{-1}{b}).$$

*e a matriz cujas linhas são estes vetores é*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/a \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -1/b \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{31}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/a \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 1 & 0 & -1/b \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{42}(-1)}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/a \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{b-a}{ab} \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -1/a \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{b-a}{ab} \end{bmatrix} = B.$$

*Vemos que se $a \neq b \neq 0$ as quatro formas são LI. Se $a = b \neq 0$ elas geram um subespaço de $(\mathbb{R}^4)^*$ de dimensão 3, do qual $(f_1, f_2, f_3)$ é uma base.*

## 5.5 Equações Lineares

Sejam V e W espaços vetoriais sobre K e $T : V \longrightarrow W$ linear. Se $b \in W$, a equação $T(x) = b$ chama-se uma equação linear. A equação $T(x) = 0$ é a equação homogênea associada. Resolver a equação $T(x) = b$ é achar todos os $x \in V$ tais que $T(x) = b$, ou seja, é determinar o conjunto-solução $T^{-1}(b)$. A equação é impossível se $T^{-1}(b) = \varnothing$. O conjunto-solução de $T(x) = 0$ é o núcleo $\mathcal{N}(T)$, que é um subespaço de V; portanto, $T(x) = 0$ sempre tem a solução $x = 0$, dita trivial.

**Proposição 5.18** *Se $x_p \in V$ é uma solução de $T(x) = b$, o conjunto-solução é $x_p + \mathcal{N}(T)$.*

**Dem.** *Se $T(x) = T(x_p) = b$, então $T(x - x_p) = 0$, donde $x - x_p \in \mathcal{N}(T)$, ou seja, $x \in x_p + \mathcal{N}(T)$. Reciprocamente, se $x \in x_p + \mathcal{N}(T)$, então $x - x_p \in \mathcal{N}(T)$, donde $T(x - x_p) = 0$ e $T(x) = T(x_p) = b$.*

**Corolário 5.18.1** *São equivalentes:*
*(a) a equação linear $T(x) = b$ tem, no máximo, uma solução;*
*(b) a equação homogênea $T(x) = 0$ tem apenas a solução trivial $x = 0$;*
*(c) $T : V \longrightarrow W$ é injetora.*

*Um caso simples é aquele em que $T$ é um isomorfismo; neste caso, $T(x) = b \Leftrightarrow x = T^{-1}(b)$.*

**Proposição 5.19** *Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais de mesma dimensão $n$ sobre $K$, $T : V \longrightarrow W$ linear, $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$ bases de $V$ e $W$, respectivamente, $\big[T\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = A \in M_n(K)$. São equivalentes:*
*(a) $T$ é um isomorfismo;*
*(b) posto$(T)$ = posto$(A) = n$;*
*(c) os vetores-coluna e os vetores-linha de $A$ são LI*
*(d) $A$ é invertível;*
*(e) det $A \neq 0$;*
*(f) para todo $b \in W$ a equação $T(x) = b$ tem solução única;*
*(g) a equação $T(x) = 0$ só tem a solução $x = 0$.*

**Dem.** *Imediata.*

**Proposição 5.20** *Sejam $V$, $W$ espaços vetoriais sobre $K$, dim $V = n$, dim $W = m$ e $T : V \longrightarrow W$ linear. Se $m < n$ a equação homogênea $T(x) = 0$ tem solução não-trivial.*

**Dem.** *Seja $\{v_1, ..., v_n\}$ uma base de $V$. Se $m < n$ então $T(v_1), ..., T(v_n)$ são LD, donde existem escalares $x_1, x_2, ..., x_n$, não todos nulos, tais que $x_1T(v_1) + ... + x_nT(v_n) = 0$, donde $T(x_1v_1 + ... + x_nv_n) = 0$, isto é, $x = x_1v_1 + ... + x_nv_n$ é solução $\neq 0$ de $T(x) = 0$.*

**Obs. 1** *A equação $T(x) = 0$ tem $\mathcal{N}(T)$ como espaço-solução. Portanto, a dimensão do espaço-solução de $T(x) = 0$ é dim $\mathcal{N}(T) = n -$ posto$(T)$.*

**Obs. 2** *Sejam $T : K^n \longrightarrow K^n$ linear, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n$, $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^m$ e $A = (a_{ij})$ a matriz $m \times n$ associada a $T$. A equação $T(x) = b$ escreve-se* *também* $A \cdot x = b$ *ou* $x_1A_1 + ... + x_nA_n = b$*, onde os* $A_j$ *são os vetores-coluna de* $A$*, ou ainda*

$$a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m$$

*sistema de* $\underline{m}$ *equações lineares a* $\underline{n}$ *incógnitas.* $A = (a_{ij})$ *é a* *matriz dos coeficientes. A expressão* $x_1A_1 + ... + x_nA_n = b$ *nos diz que* $Ax = b$ *tem solução* $x$ *se, e só se, o vetor* $b$ *pertence ao espaço-coluna de* $A$*, ou ainda, se, e só se, o posto de* $A$ *é igual ao posto da matriz* $(A|b)$ *que é a* *matriz completa* *do sistema (Teorema de Rouché-Capelli).*

**Definição 5.14** *O sistema linear* $Ax = b$ *é um sistema de Cramer se* $A \in M_n(K)$ *é invertível.*

**Proposição 5.21** *(Regra de Cramer) O sistema de Cramer* $A \cdot x = b$*, onde* $A \in GL(n, K)$*, tem solução única* $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$*, onde* $x_i = \dfrac{det\ B_i}{det\ A}$ $(i = 1, ..., n)$*, onde* $B_i$ *é a matriz obtida de* $A$ *substituindo-se o vetor-coluna* $A_i$ *pelo vetor* $b$ *do segundo membro.*

**Dem.** *A equação* $x_1A_1 + ... + x_nA_n = b$ *nos permite escrever* $det(A_1, ..., \overset{\overset{col.i}{\downarrow}}{b}, ..., A_n) = x_i det(A_1, ..., A_i, ..., A_n) = x_i \cdot det\ A$*, donde* $x_i \cdot det\ A = det\ B_i$ *e* $x_i = \dfrac{det\ B_i}{det\ A} = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & ... & b_1 & ... & a_{1n} \\ a_{n1} & ... & b_n & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1i} & ... & a_{1n} \\ a_{n1} & ... & a_{ni} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}}$ $(i = 1, ..., n)$.

**Exemplo 5.5.1**

$$2x_1 + 3x_2 = 8$$
$$7x_1 - 9x_2 = -11$$

*Como* $det\ A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -39 \neq 0$*, o sistema é de Cramer e:*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ -11 & -9 \end{vmatrix}}{-39} = 1; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 7 & -11 \end{vmatrix}}{-39} = 2.$$

**Proposição 5.22** *Sejam as equações lineares $Ax = a$ e $Bx = b$, onde $A, B \in M_{m\times n}(K)$ e $a, b \in K^m$. Se $C = (A|a)$ e $D = (B|b)$ são linha-equivalentes, então as duas equações lineares têm as mesmas soluções.*

**Dem.** *Pondo* $y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \\ -1 \end{pmatrix}$, *a equação $Ax = a$ se escreve $Cy = 0$. Se $\underline{C}$ e $\underline{D}$ são linha-equivalentes, existe $P \in M_m(K)$, invertível, tal que $P \cdot C = D$. Se $Dy = 0$ vem $P(Cy) = 0$, donde $Cy = 0$. Reciprocamente, se $Cy = 0$ então $P(Cy) = 0$, isto é, $Dy = 0$. Logo as equações $Cy = 0$ e $Dy = 0$ têm as mesmas soluções, ou seja, $Ax = a$ e $Bx = b$ têm as mesmas soluções.*

**Exemplo 5.5.2** *Seja o sistema*

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 0 \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

*A matriz completa do sistema é*

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{12}} \xrightarrow{T_{21}(-2)} \xrightarrow{T_{31}(-4)} \xrightarrow{T_2(-1/5)} \xrightarrow{T_{32}(15)} B,$$

*onde* $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1/5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 \end{bmatrix}$ *e obtemos:*

$$x_3 = \frac{1}{6}$$

$$x_2 - x_3 = -\frac{1}{5}$$

$$x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0$$

*e a solução (única) é* $x = \begin{bmatrix} 13/30 \\ -1/30 \\ 1/6 \end{bmatrix}$.

**Exemplo 5.5.3** $\begin{array}{llllll} x_1 & & -x_3 & -3x_4 & +x_5 & = -2 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -2x_4 & -x_5 & = 11 \\ & x_2 & & -x_4 & -3x_5 & = 0 \\ & 4x_2 & -5x_3 & -9x)4 & -12x_5 & = -15 \end{array}$ *. A matriz completa é*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -2 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & -9 & -12 & -15 \end{bmatrix} \longrightarrow \dots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*e obtemos o sistema*

$$\begin{array}{llllll} x_1 & & & -2x_4 & +x_5 & = 1 \\ & x_2 & & -x_4 & -3x_5 & = 0 \\ & & x_3 & +x_4 & & = 3 \end{array}$$

*ou:*

$$\begin{array}{l} x_1 = 2x_4 - x_5 + 1 \\ x_2 = x_4 + 3x_5 \\ x_3 = -x_4 + 3 \end{array} .$$

*Trata-se de um sistema* <u>*indeterminado*</u>*; existem infinitas soluções*

$$x = \begin{bmatrix} 2x_4 - x_5 + 1 \\ x_4 + 3x_5 \\ -x_4 + 3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

*onde* $x_p = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ *é a solução particular e* $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ *é base do espaço-solução da equação homogênea associada.*

**Exemplo 5.5.4**

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$4x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

*A matriz completa é* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \ldots \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$*, e o sistema é* ***impossível*** *já que a última equação* $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = -4$ *é impossível.*

**Obs.** *(decomposição LU) Seja* $A$ *–* $n \times n$ *uma matriz que pode ser reduzida à forma triangular apenas pelo uso da operação* $T_{ij}(\lambda)$*; por exemplo, seja*

$$A = A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 4 & -1 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{T_{21}(-1/2)} A^{(2)} \xrightarrow{T_{31}(-2)} A^{(3)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & -9 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{T_{32}(3)} \begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} = U.$$

*Sejam:* $l_{21} = \dfrac{1}{2}$*;* $l_{31} = 2$ *opostos dos multiplicadores usados na primeira linha e* $l_{32} = -3$ *o oposto do usado na segunda linha. Se* $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ *é a matriz triangular inferior cujos elementos* $l_{ij}$*, para* $i < j$*, são os números acima e* $l_{ii} = 1$*, então é fácil verificar que* $A = LU$*. Os detalhes da decomposição* $LU$ *podem ser encontrados na referência [6].*

## Exercícios

1. Resolva:

   (a) $\begin{matrix} x + y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ -x + 2y - 4z = 3 \end{matrix}$ (b) $\begin{matrix} x - 2y + z + t = 1 \\ -2x + y + 2z + 2t = 0 \\ 6y + z = -2 \end{matrix}$ .

2. Sejam $a \neq b \neq c \neq d$ números reais distintos. Prove que existe um único polinômio $p(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3$ tal que $p(a) = a'$; $p(b) = b'$; $p(c) = c'$; $p(d) = d'$, onde $a', b', c', d'$ são reais dados.

3. Ache a decomposição LU da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$.

# Capítulo 6

# Autovalores e Autovetores

## 6.1 Definições

**Definição 6.1** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre o corpo $K$ e $T : V \longrightarrow V$ linear. Dizemos que $v \in V$ é um* <u>*autovetor*</u> *de $T$ se existe $a \in K$ tal que*

$$T(v) = av.$$

*Se $v \neq 0$, o escalar $\underline{a}$ é univocamente determinado pois $a_1 v = a_2 v$ implica $(a_1 - a_2)v = 0$ e, como $v \neq 0$, vem $a_1 = a_2$.*

**Definição 6.2** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$ e $T : V \longrightarrow V$ linear. Dizemos que $a \in K$ é um* <u>*autovalor*</u> *de $T$ se existe $v \in V$, $v \neq 0$, tal que $T(v) = av$.*
**Obs.** *Ao invés de autovetor e autovalor, usam-se também os termos* <u>*vetor próprio*</u> *ou* <u>*vetor característico*</u> *e* <u>*valor próprio*</u> *ou* <u>*valor característico*</u>.

**Exemplo 6.1.1** *Se $v \in V$ é um autovetor do operador linear $T : V \longrightarrow V$ e $c \in K$, então $\underline{cv}$ também é um autovetor de $T$ pois $T(cv) = cT(v) = cav = a(cv)$, supondo $T(v) = av$.*

**Exemplo 6.1.2** *Seja $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ o espaço vetorial real das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$, isto é, indefinidamente deriváveis, e seja $D : V \longrightarrow V$ o operador de derivação. Se $f \in V$, $f(t) = e^{at}$, $a \in \mathbb{R}$, então $Df(t) = a \cdot e^{at}$, ou seja, $Df = af$, e $\underline{f}$ é um autovetor de $D$, com autovalor $\underline{a}$.*

**Exemplo 6.1.3** *Se $a = 0$ é um autovalor de $T : V \longrightarrow V$ linear, existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = 0$, donde $\mathcal{N}(T) \neq \{0\}$ e $T$ não é injetora.*

**Proposição 6.1** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$, $T : V \longrightarrow V$ linear, $a \in K$ e $V(a) = \{v \in V;\ T(v) = av\}$. Então $V(a)$ é um subespaço de $V$ tal que $T\big(V(a)\big) \subset V(a)$, isto é, $V(a)$ é $T$-invariante.*

**Dem.** *É claro que $0 \in V(a)$; se $v_1, v_2 \in V(a)$, então $T(v_1) = av_1$, $T(v_2) = av_2$, donde $T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) = av_1 + av_2 = a(v_1 + v_2)$. Se $c \in K$, então $T(cv_1) = cT(v_1) = cav_1 = a(cv_1)$. Logo, $V(a)$ é subespaço de $V$. Se $v \in V(a)$ então $T(v) = av$ e $T(Tv) = T(av) = aT(v)$, donde $T\big(V(a)\big) \subset V(a)$. $V(a)$ é o autoespaço de $T$ associado ao autovalor $\underline{a}$. $V(a) = \{0\}$ significa que a não é autovalor de $T$.*

**Proposição 6.2** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $K$ e $T : V \longrightarrow V$ linear. São equivalentes:*
*(a) $a \in K$ é autovalor de $T$;*
*(b) $T - aI$ não é invertível;*
*(c) $det(T - aI) = 0$.*

**Dem.** *Já vimos anteriormente que (b) e (c) são equivalentes. Basta, então, provar que (a) e (b) são equivalentes.*
*(a) $\Rightarrow$ (b): Se $\underline{a}$ é autovalor de $T$, existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = av$, isto é, $(T - aI)v = 0$, donde $T - aI$ não é invertível.*
*(b) $\Rightarrow$ (a): Se $T - aI$ não é invertível, existe $v \neq 0$ tal que $(T - aI)v = 0$, donde $T(v) = av$, ou seja, $\underline{a}$ é autovalor de $T$.*

**Proposição 6.3** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$ e $T : V \longrightarrow V$ linear. Se $a \neq b$ são autovalores de $T$, então $V(a) \cap V(b) = \{0\}$.*

**Dem.** *$T(v) = av = bv$ implica $(a - b)v = 0$, donde $v = 0$ (pois $a \neq b$).*

**Proposição 6.4** *Sejam $V$ um espaço vetorial sobre $K$ e $T : V \longrightarrow V$ linear. Sejam $v_1, ..., v_m$ autovetores não nulos de $T$ com autovalores $a_1, ..., a_m$, respectivamente. Se $a_1 \neq a_2 \neq ... \neq a_m$, então $v_1, ..., v_m$ são linearmente independentes.*

**Dem.** *(indução) Para $m = 1$, um vetor $v_1 \neq 0$ é LI. Suponhamos $m > 1$ e admitamos o teorema verdadeiro para $(m - 1)$ autovetores. Se tivermos uma relação linear*

$$b_1v_1 + b_2v_2 + ... + b_mv_m = 0, \tag{6.1}$$

*então* $b_1T(v_1) + ... + b_mT(v_m) = 0$*, donde:*

$$a_1b_1v_1 + a_2b_2v_2 + ... + a_mb_mv_m = 0. \tag{6.2}$$

*Sem perda de generalidade podemos supor* $a_1 \neq 0$*. Multiplicando (6.1) por* $a_1$ *e subtraindo o resultado de (6.2), obtemos:* $(a_2 - a_1)b_2v_2 + ... + (a_m - a_1)b_mv_m = 0$.

*Como* $a_2 - a_1 \neq 0, ..., a_m - a_1 \neq 0$*, concluimos, por indução, que* $b_2 = ... = b_m = 0$*, e (6.1) nos dá* $b_1v_1 = 0$*, donde* $b_1 = 0$*, ou seja,* $v_1, ..., v_m$ *são LI.*

**Corolário 6.4.1** *Se dim* $V = n$*, todo operador linear* $T : V \longrightarrow V$ *tem, no máximo,* $\underline{n}$ *autovalores distintos.*

**Corolário 6.4.2** *Se* $a_1, ..., a_m$ *são autovalores de* $T : V \longrightarrow V$ *linear e* $a_1 \neq a_2 \neq ... \neq a_m$*, então o subespaço* $V(a_1) + ... + V(a_m)$ *é soma direta de* $V(a_1), ..., V(a_m)$.

**Dem.** *Seja* $v_i \in V(a_i)$*,* $i = 1, ...m$*. Se* $v_1 + v_2 + ... + v_m = 0$*, vamos mostrar que* $v_1 = ... = v_m = 0$*. Se* $p < m$ *destes vetores fossem diferentes de 0, por exemplo,* $v_{i1}, ..., v_{ip}$*, e os* $(m - p)$ *restantes fossem iguais a 0, teríamos* $v_{i1}+...+v_{ip} = 0$*, isto é,* $v_{i1}, ..., v_{ip}$ *seriam LD em contradição com a proposição 6.4. Resulta que* $V(a_1) + ... + V(a_m) = V(a_1) \oplus ... \oplus V(a_m)$.

**Exemplo 6.1.4** *Seja* $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$*. Se* $a_1 \neq ... \neq a_m$ *são reais distintos, então* $e^{a_1t}, ..., e^{a_mt}$ *são autovetores do operador de derivação* $D : V \longrightarrow V$ *com autovalores distintos e, portanto, as funções* $e^{a_1t}, ..., e^{a_mt}$ *são LI. Como* $\underline{m}$ *é arbitrário, resulta que* $V = C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ *não tem dimensão finita.*

**Definição 6.3** *Seja* $A \in M_n(K)$*. Os autovetores e autovalores de* $A$ *são os autovetores e autovalores da aplicação linear associada* $T_A : K^n \longrightarrow K^n$*,* $T_A(x) = A \cdot x$*. Assim,* $x \in K^n$ *é autovetor de* $A$ *se existe* $a \in K$ *tal que* $A \cdot x = ax$.

**Proposição 6.5** *Seja* $A \in M_n(K)$*. São equivalentes:*
*(a)* $a \in K$ *é autovalor de* $A$*;*
*(b)* $A - aI_n$ *não é invertível;*
*(c)* $det(A - aI_n) = 0$.
**Obs.** *Se* $B = P^{-1}AP$*, onde* $A \in M_n(K)$ *e* $P \in M_n(K)$ *é invertível, então* $A$ *e* $B$ *têm os mesmos autovalores pois se* $Ax = ax$*,* $x \neq 0$ *e* $y = P^{-1}x$*, então:*

$$By = P^{-1}APy = P^{-1}Ax = P^{-1}(ax) = ay.$$

*Como $y \neq 0$, resulta que $\underline{a}$ é autovalor de $B$. A recíproca é análoga. É bom notar, entretanto, que os autovetores de $A$ e $B$, associados ao autovalor $\underline{a}$, são $\underline{x}$ e $y = P^{-1}x$, respectivamente.*

**Definição 6.4** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão $\underline{n}$ sobre $K$ e $T : V \longrightarrow V$ linear. O polinômio característico de $T$ é $P_T(t) = det(T - tI)$. Se $A \in M_n(K)$, o polinômio característico $P_A(t)$ é o polinômio da aplicação linear associada $T_A : K^n \longrightarrow K^n$, isto é, $P_A(t) = det(T_A - tI) = det(A - t \cdot I_n)$. Se $A = (a_{ij})$, então:*

$$P_A(t) = det(A - tI_n) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \dots & a_{in} \\ a_{21} & a_{22} - t & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - t \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n t^n + (-1)^{n-1}(a_{11} + \dots + a_{nn})t^{n-1} + \dots + det\ A$$

*(o termo independente é $P_A(0) = det\ A$).*

**Proposição 6.6** *Matrizes semelhantes têm o mesmo polinômio característico.*

**Dem.** *De fato se $B = P^{-1}AP$ então as matrizes $A$ e $B$ representam o mesmo operador linear $T : K^n \longrightarrow K^n$ e, portanto, têm o mesmo polinômio característico $P_T(t) = det(T - tI)$.*

*Uma demonstração direta é a seguinte:*

$$det(B - tI_n) = det(P^{-1}AP - tI_n) = det(P^{-1}(A - tI_n)P) = det(A - tI_n)$$

*pois $det\ P^{-1} \cdot det\ P = 1$.*

**Obs.** *Se $P_T(t) = P_A(t) = c_n t^n + c_{n-1}t^{n-1} + \dots + c_1 t + c_0$, então $c_n = (-1)^n$ e $c_0 = det\ T = det\ A$. Os coeficientes $c_j$, $j = 0, 1, \dots, n$, só dependem do operador $T$.*

**Definição 6.5** *$(-1)^{n-1}c_{n-1}$ é o traço de $T$, e escrevemos $tr\ T = (-1)^{n-1}c_{n-1}$. O traço de $A \in M_n(K)$ é o traço de $T_A : K^n \longrightarrow K^n$, $T_A(x) = A \cdot x$ : $tr\ A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.*

*Se $A$ e $B$ são semelhantes, temos $tr\ A = tr\ B$ pois $P_A(t) = P_B(t)$.*

**Proposição 6.7** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão $n$ sobre $K$ e $T : V \longrightarrow V$ linear. $a \in K$ é um autovalor de $T$ se, e só se, $\underline{a}$ é uma raiz do polinômio característico de $T$.*

**Dem.** *$a \in K$ é autovalor de $T \Leftrightarrow det(T - aI) = 0 \Leftrightarrow a$ é raiz de $P_T(t)$.*

**Exemplo 6.1.5** *Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$, então $P_A(t) = \begin{vmatrix} 1-t & 1 \\ 2 & 2-t \end{vmatrix} = t^2 - 3t$, e os autovalores de $A$ são $a = 0$ e $a = 3$.*

*Procuremos autovetores $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ associados a estes autovalores. Para $a = 0$, temos:*

$$x_1 + x_2 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 = 0.$$

*Logo, $x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ é autovetor associado a $a = 0$, para todo $x_1 \in K$.*

*Para $a = 3$, temos:*

$$-2x_1 + x_2 = 0$$
$$2x_1 - x_2 = 0.$$

*Logo, $y = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ é autovetor associado a $a = 3$, para todo $x_1 \in K$.*

*Os autoespaços correspondentes são as retas pela origem de $K^2$ geradas por $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, respectivamente.*

**Exemplo 6.1.6** *Se $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ então $P_A(t) = t^2+1$. Se $A \in M_2(\mathbb{R})$ vemos que $A$ não tem autovalores. Se $A \in M_2(\mathbb{C})$ então $\underline{i}$ e $\underline{-i}$ são autovalores de $A$.*
**Obs.** *Se $T : V \longrightarrow V$ é linear e $dim_K\ V = n$, temos que $P_T(t)$ tem grau $\underline{n}$, de modo que $T$ tem, no máximo, $\underline{n}$ autovalores. Quando $K = \mathbb{C}$, $P_T(t)$ tem pelo menos uma raiz, de modo que, neste caso, $T$ sempre tem um autovetor não nulo.*

**Proposição 6.8** *Sejam $V$ um espaço-vetorial de dimensão $n$ sobre $K$ e $L, T : V \longrightarrow V$ lineares. $L \circ T$ e $T \circ L$ têm os mesmos autovalores.*

**Dem.** *Se $a = 0$ é autovalor de $L \circ T$, existe $u \neq 0$ tal que $L(Tu) = 0$, donde $L \circ T$ não é invertível; logo, $det(L \circ T) = det\ L \cdot det\ T = 0$, donde*

*$det(T \circ L) = 0$ e $T \circ L$ não é invertível, donde existe $v \neq 0$ tal que $T(Lv) = 0$, isto é, $a = 0$ é autovalor de $T \circ L$.*

*Se $a \neq 0$ é autovalor de $L \circ T$, existe $u \neq 0$ tal que $L(Tu) = au$. Seja $v = T(u)$; então: $T(Lv) = T(au) = av$. Se fosse $v = T(u) = 0$ então teríamos $LTu = 0$, donde $au = 0$, donde $u = 0$, contradição. Portanto, $TLv = av$ com $v \neq 0$, donde $\underline{a}$ é autovalor de $T \circ L$. Analogamente se prova que todo autovalor de $T \circ L$ é também autovalor de $L \circ T$.*

**Proposição 6.9** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão $\underline{n}$ sobre $K$ e $T : V \longrightarrow V$ linear. Se o polinômio característico $P_T(t)$ admite em $K$ uma raiz $\underline{a}$ de multiplicidade $\underline{m}$, então $1 \leq dim\ V(a) \leq m$.*

**Dem.** *Seja $\mathcal{E} = (u_1, ..., u_r, v_1, .., v_s)$ base de $V$ tal que $(u_1, ..., u_r)$ seja base de $V(a)$. Temos:*

$$\begin{array}{llll}
T(u_1) = au_1 & & & \\
T(u_2) = & au_2 & & \\
\vdots & & & \\
T(u_r) = & & au_r & \\
T(v_1) = a_{11}u_1 & +...+ & a_{r1}u_r + b_{11}v_1 + ... + b_{s1}v_s & \\
T(v_s) = a_{1s}u_1 & +...+ & a_{rs}u_r + b_{1s}v_1 + ... + b_{ss}v_s &
\end{array}$$

*Logo:*

$$\left[T\right]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \left[\begin{array}{c:c} aI_r & A \\ \hdashline 0 & B \end{array}\right]$$

*onde $A = (a_{ij})$ é $r \times s$ e $B = (b_{ij})$ é $s \times s$.*

*Então:*

$$P_T(t) = \begin{vmatrix} a-t & 0 & ... & 0 & a_{11} & ... & a_{1s} \\ 0 & a-t & ... & 0 & a_{21} & ... & a_{2s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a-t & a_{r1} & ... & a_{rs} \\ 0 & 0 & ... & 0 & b_{11}-t & ... & b_{1s} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & b_{s1} & ... & b_{ss}-t \end{vmatrix} = (a-t)^r det(B-tI_s).$$

*Como $\underline{a}$ é raiz de multiplicidade $\underline{m}$, temos $r \leq m$, donde $1 \leq dim\ V(a) \leq m$.*

## 6.2 Diagonalização

**Definição 6.6** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão $\underline{n}$ sobre $K$ e $T : V \longrightarrow V$ linear. Dizemos que $T$ é <u>diagonalizável</u> se existe base de $V$ formada por autovetores de $T$, ou seja, se, e só se, $T$ tem $\underline{n}$ autovetores linearmente independentes. Em relação a essa base, a matriz de $T$ é da forma* $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$, *$\lambda_j \in K$, ou seja, todos os elementos fora da diagonal principal são iguais a zero. Uma tal matriz é dita <u>diagonal</u>; os elementos da diagonal principal são os autovalores de $T$.*

**Definição 6.7** *Seja $A = (a_{ij})$ – $n \times n$. $\underline{A}$ é <u>diagonalizável</u> se existe matriz invertível $P$ – $n \times n$ – tal que $P^{-1}AP = D$, onde $D$ é diagonal, isto é, se $\underline{A}$ é semelhante a uma matriz diagonal.*

**Proposição 6.10** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $K$ e $T : V \longrightarrow V$ linear. $T$ é diagonalizável se, e só se, existe base $\mathcal{E}$ de $V$ tal que $\left[T\right]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = D$ seja diagonal.*

**Dem.** *Se $T$ é diagonalizável existe base $\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n)$ de $V$ formada por autovetores de $T$: $T(v_i) = \lambda_i v_i$ $(1 \leq i \leq n)$. Logo:*

$$\left[T\right]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

*Reciprocamente, seja* $\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n)$ *base de* $V$ *tal que* $\big[T\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \lambda_2 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \lambda_n \end{bmatrix}$. *Então:* $T(v_i) = \lambda_i v_i,\ 1 \leq i \leq n$, *e* $\mathcal{E}$ *é formada por autovetores de* $T$*; portanto,* $T$ *é diagonalizável.*

**Obs.** *Seja* $\mathcal{F}$ *base de* $V$ *e seja* $A = \big[T\big]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}$. $T$ *é diagonalizável se, e só se, existe base* $\mathcal{E}$ *de* $V$ *tal que* $\big[T\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = D$ *seja diagonal. Mas,*

$$D = \big[T\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \big[Id\big]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} \cdot \big[T\big]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}} \cdot \big[Id\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = P^{-1}AP,$$

*ou seja,* $T$ *é diagonalizável se, e só se,* $A = \big[T\big]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}}$ *é diagonalizável;* $P = \big[Id\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}}$ *é a matriz de passagem da base* $\mathcal{E}$ *para a base* $\mathcal{F}$ *e as colunas de* $P$ *são os autovetores de* $A$.

**Proposição 6.11** *Sejam* $V$ *um espaço vetorial de dimensão* $\underline{n}$ *sobre* $K$ *e* $T : V \longrightarrow V$ *linear.* $\underline{T}$ *é diagonalizável se, e só se:*
*(a) o polinômio característico* $P_T$ *de* $T$ *tem suas* $\underline{n}$ *raízes em* $K$*;*
*(b) para cada raiz* $\lambda_i$ *de* $P_T$*, de ordem de multiplicidade* $m_i$*, tem-se* $\dim V(\lambda_i) = m_i$.

**Dem.** *Se* $T$ *é diagonalizável e* $\mathcal{E}$ *é base de* $V$ *na qual* $\big[T\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ *é diagonal, então* $\mathcal{E}$ *é formada de autovetores de* $T$*. Podemos supor que os elementos de* $\mathcal{E}$ *estão ordenados de maneira a termos primeiro os autovetores associados a* $\lambda_1$*, depois aqueles associados a* $\lambda_2$*, e assim por diante, de modo que*

$$\big[T\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & \lambda_1 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ 0 & ... & 0 & \lambda_2 & ... & 0 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & \lambda_2 & ... & 0 & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & ... & \lambda_k & ... & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & ... & 0 & 0 & ... & 0 & ... & 0 & ... & \lambda_k \end{bmatrix} \in M_n(K).$$

*Então:*

$$V = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus ... \oplus V(\lambda_k),$$

*donde dim* $V =$ *dim* $V(\lambda_1) + ... +$ *dim* $V(\lambda_k) = n$. *Como dim* $V(\lambda_i) \leq m_i$ *e* $m_1 + ... + m_k = n$, *resulta dim* $V(\lambda_i) = m_i$ $(1 \leq i \leq k)$.

*Reciprocamente, as* $\underline{n}$ *raízes de* $P_T$ *estando em* $K$, *suponhamos que dim* $V(\lambda_i) = m_i$, $1 \leq i \leq k$. *A relação* $m_1 + ... + m_k = n$ *nos dá*

$$dim\ \left[V(\lambda_1) \oplus ... \oplus V(\lambda_k)\right] = n \therefore V = V(\lambda_1) \oplus ... \oplus V(\lambda_k).$$

*A reunião das bases dos* $V(\lambda_i)$ $(1 \leq i \leq n)$ *é uma base de* $V$ *formada por autovetores de* $T$, *donde* $T$ *é diagonalizável.*

**Exemplo 6.2.1** *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. *Os autovalores de* $A$ *são as raízes de* $\begin{vmatrix} 1-t & 2 \\ 3 & 2-t \end{vmatrix} = 0$, *isto é, de* $t^2 - 3t - 4 = 0$, *ou seja,* $t_1 = -1$ *e* $t_2 = 4$. *Para* $t = -1$ *a equação* $(A - I_2) \cdot x = 0$, *onde* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, *nos dá* $x_1 + x_2 = 0$, *donde* $x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{R}$.

*Para* $t = 4$ *obtemos* $3x_1 + 2x_2 = 0$, *donde* $x = 3x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $x_2 \in Real$. *O vetor* $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ *gera* $V(-1)$, *quanto que* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *gera* $V(4)$. *A matriz de passagem da base canônica de* $V = \mathbb{R}^2$ *para a base* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ *é* $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$, *cuja inversa é* $P^{-1} = \dfrac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$, *matriz diagonal.*

**Exemplo 6.2.2** $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ *não é diagonalizável. De fato,* $P_A(t) = (1-t)^2$ *tem a raiz dupla* $t = 1$ *e* $(A - I_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$ *nos dá* $x_2 = 0$, *donde* $x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Assim, dim* $V(1) = 1 < 2$, *e* $A$ *não é diagonalizável.*

**Exemplo 6.2.3** $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ *é diagonalizável em* $M_3(\mathbb{C})$ *mas não o é em* $M_3(\mathbb{R})$. *De fato, os autovalores de* $A$ *são* $a_1 = 0$, $a_2 = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $a_3 = -\dfrac{3}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

**Exemplo 6.2.4** $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ *é diagonalizável. De fato, temos:*

$$P_A(t) = -(t-1)(t+2)^2.$$

*É fácil comprovar que* $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *é base de* $V(1)$ *e que* $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ *é base de* $V(-2)$*, ou seja, dim* $V(1) = 1$ *e dim* $V(-2) = 2$*. Resulta que* $A \in M_3(\mathbb{R})$ *é diagonalizável. Se* $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$*, então* $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

**Proposição 6.12** *Sejam* $V$ *um espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *sobre* $K$ *e* $T : V \longrightarrow V$ *linear tal que* $P_T(t)$ *tenha todas suas raízes em* $K$*. Existe uma base de* $V$ *na qual a matriz de* $T$ *é triangular (superior).*

**Dem.** *(indução)*
*Para dim* $V = 1$ *nada há a provar. Suponhamos o teorema verdadeiro para dim* $V = n-1$*. Seja* $a_1 \in K$ *um dos autovalores de* $T$ *e* $v_1 \neq 0$ *um autovetor associado a* $a_1$*, isto é,* $Tv_1 = a_1 v_1$*. Sejam* $V_1 = Kv_1$ *o subespaço gerado por* $v_1$*,* $W$ *um suplementar qualquer de* $V_1$ *e* $\mathcal{F} = (w_2, ..., w_n)$ *uma base de* $W$*. Como* $v_1 \neq W$*,* $\mathcal{E}' = (v_1, w_2, ..., w_n)$ *é base de* $V$ *e*

$$[T]_{\mathcal{E}'}^{\mathcal{E}'} = \begin{bmatrix} a_1 & b_{12} & ... & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & ... & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & b_{n2} & ... & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Como, em geral,* $T(W)$ *não está contido em W, consideremos as projeções* $p_1 : V \longrightarrow V_1$ *e* $p_2 : V \longrightarrow W$*. Então,* $Im(p_2T) \subset W$ *e podemos considerar a aplicação linear* $p_2 \cdot T : W \longrightarrow W$*. Como* $p_2(V_1) = 0$ *e* $p_2(w_j) = w_j$*,* $j = 2, ..., n$*, temos:*

$$p_2T(w_j) = p_2(b_{1j}v_1 + b_{2j}w_2 + ... + b_{nj}w_n) = b_{2j}w_2 + ... + b_{nj}w_n,$$

*donde:*

$$[p_2T]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} b_{22} & ... & b_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n2} & ... & b_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Resulta:* $P_T(t) = (a_1 - t)\, det(p_2T - tI)$, *e podemos concluir que os autovalores de* $p_2T : W \longrightarrow W$ *estão em* $K$, *já que eles são também autovalores de* $T$. *Pela hipótese de indução, existe base* $G = (u_2, ..., u_n)$ *de* $W$ *tal que* $\left[p_2T\right]_G^G = \begin{bmatrix} c_{22} & c_{23} & ...c_{2n} & \\ 0 & c_{33} & ... & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & c_{nn} \end{bmatrix}$ *é matriz triangular. Se* $\mathcal{E} = (v_1, u_2, ..., u_n)$ *é a base de* $V$ *obtida acrescentando-se* $v_1 \neq W$ *a* $G$, *temos:*

$$\left[T\right]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_1 & c_{12} & ... & c_{1n} \\ 0 & c_{22} & ... & c_{2n} \\ 0 & 0 & ... & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & c_{nn} \end{bmatrix}, \text{ matriz triangular.}$$

**Corolário 6.12.1** *Seja* $A \in M_n(\mathbb{C})$. *Existe* $P \in M_n(\mathbb{C})$, *invertível, tal que* $B = P^{-1}AP$ *seja triangular.*

**Obs.** *Se* $\mathcal{E} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *é base de* $V$ *na qual* $\left[T\right]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ *é triangular superior, sejam:*

$V_1 = Kv_1 =$ *espaço gerado por* $v_1$

$V_2 =$ *espaço gerado por* $v_1, v_2$

$\vdots$

$V_n = V =$ *espaço gerado por* $v_1, v_2, ..., v_n$.

*Então:*

(1) $V_i \subset V_{i+1}$; (2) $dim\ V_i = i$; (3) $T(V_i) \subset V_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

*Reciprocamente, se* $V_1, ..., V_n = V$ *são subespaços de* $V$ *satisfazendo (1), (2) e (3) acima, então existe base* $\mathcal{E}$ *de* $V$ *na qual* $\left[T\right]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ *é triangular superior. De fato, basta tomar* $(v_1)$ *base de* $V_1$, $(v_1, v_2)$ *base de* $V_2$, $(v_1, v_2, v_3)$ *base de* $V_3$ *e assim por diante até chegar a uma base* $(v_1, v_2, ..., v_n)$ *de* $V_n = V$.

# Exercícios

1. Ache os autovalores e autovetores e $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

2. Verifique se $A = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ é diagonalizável.

## 6.3 Polinômios de Operadores e Matrizes

Sejam $K[t]$ o conjunto dos polinômios a uma variável com coeficientes no corpo K, V um espaço vetorial sobre K, $T : V \longrightarrow V$ linear e $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_m t^m$ um elemento de $K[t]$.

**Definição 6.8** $p(T) = a_0 I + a_i T + ... + a_m T^m : V \longrightarrow V$.
*Se* $A \in M_n(K)$, *definimos:* $p(A) = a_0 I_n + a_1 A + ... + a_m A^m \in M_n(K)$.

**Exemplo 6.3.1** *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ *e* $p(t) = t^3 - 2t + 3$. *Então:*

$$p(A) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^3 - 2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

**Obs.** *Se* $\mathcal{E}$ *é base de V,* $A = \big[T\big]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$ *e* $\phi : \mathcal{L}(V) \longrightarrow M_n(K)$ *é o isomorfismo de álgebras tal que* $\phi(T) = \big[T\big]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = A$, *então*

$$\phi\big(p(T)\big) = \phi(a_0 I + ... + a_m T^m) = a_0 \phi(I) + ... + a_m \phi(T^m) =$$

$$= a_0 I_n + a_1 A + ... + a_m A^m = p(A),$$

*ou seja,* $\big[p(T)\big]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = p(A)$.

**Proposição 6.13** *Sejam* $p, q \in K[t]$, $c \in K$, *V um espaço vetorial sobre K e* $T : V \longrightarrow V$ *linear. Então:*
*(a)* $(p + q)(T) = p(T) + q(T)$
*(b)* $(pq)(T) = p(T) \cdot q(T) = q(T) \cdot p(T)$
*(c)* $(cp)(T) = c \cdot p(T)$.

**Dem.** *Suponhamos* $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$ *e* $q(t) = b_0 + b_1 t + ... + b_m t^m$, $m \leq n$, *e seja* $b_i = 0$ *se* $i > m$. *Então:*
*(a)* $(p + q)(t) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)t + ... + (a_n + b_n)t^n$, *donde*

$$(p + q)(T) = (a_0 + b_0)I + (a_1 + b_1)T + ... + (a_n + b_n)T^n =$$

$$= (a_0 I + a_1 T + ... + a_n T^n) + (b_0 I + b_1 T + ... + b_n T^n) =$$

$$= p(T) + q(T)$$

.

*(b)* $(pq)(t) = c_0 + c_1 t + ... + c_{n+m} t^{n+m} = \sum_{k=0}^{m+n} c_k t^k$, *onde*

$$c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + ... + a_k b_0 = \sum_{i=0}^{k} a_i b_{k-i}.$$

*Então:* $(pq)(T) = \sum_{k=0}^{m+n} c_k T^k$ *e* $p(T) \cdot q(T) = \left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right)\left(\sum_{j=0}^{m} b_j T^j\right) =$

$= \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_i b_j T^{i+j} = \sum_{k=0}^{m+n} c_k T^k = (pq)(T) = (qp)(T) = q(T) \cdot p(T).$

*(c)* $(cp)(T) = ca_0 I + ca_1 T + ... + ca_n T^n = c \cdot p(T)$.

**Obs.** *É claro que a proposição 6.13 continua válida se trocarmos o operador linear* $T : V \longrightarrow V$ *por uma matriz quadrada* $A$.

**Exemplo 6.3.2** *Sejam* $A, P \in M_n(K)$, $P$ *invertível e* $\underline{m}$ *um inteiro positivo. Temos:* $(P^{-1}AP)^2 = P^{-1}AP \cdot P^{-1}AP = P^{-1}A^2P$ *e, por indução, vê-se facilmente que* $(P^{-1}AP)^m = P^{-1}A^mP$.

*Se* $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_m t^m$, *então* $p(P^{-1}AP) = \sum_{k=0}^{m} a_k (P^{-1}AP)^k =$

$= \sum_{k=0}^{m} a_k P^{-1} A^k P = P^{-1} \cdot \sum_{k=0}^{m} a_k A^k P = P^{-1} \cdot p(A) \cdot P.$

**Proposição 6.14** *(Cayley-Hamilton) Sejam* $V$ *um espaço vetorial de dimensão* $n \geq 1$ *sobre* $K$ *e* $T : V \longrightarrow V$ *linear.* $T$ *é um zero de seu polinômio característico, isto é,* $P_T(T) = 0$.

**Dem.** *Para facilitar vamos provar o teorema no caso em que* $K = \mathbb{C}$.

*Vimos, na proposição 6.11, que existem subespaços* $V_1, ..., V_n$ *de* $V$ *tais que* $V_i \subset V_{i+1}$, $\dim V_j = j$ *e* $T(V_i) \subset V_i$ $(1 \leq i \leq n)$ *e base* $\mathcal{E} = (v_1, v_2, ..., v_n)$ *de* $V$ *tal que* $V_i =$ *espaço gerado por* $v_1, ..., v_i$ $(1 \leq i \leq n)$. *Em relação à base* $\mathcal{E}$ *a matriz de* $T$ *é triangular superior:*

$$[T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

*Então:* $Tv_i = a_{ii}v_i +$ *um vetor de* $V_{i-1}$.
*Como* $(T - a_{ii}I)v_i = Tv_i - a_{ii}v_i$ *resulta que* $(T - a_{ii}I)v_i \in V_{i-1}$. *Além disso, o polinômio característico de* $T$ *é dado por* $P_T(t) = (-1)^n(t - a_{11})...(t - a_{nn})$ *de modo que* $P_T(T) = (-1)^n(T - a_{11}I)...(T - a_{nn}I)$.
*Vamos provar, por indução, que* $(T - a_{11}I)...(T - a_{ii}I)v = 0$ *para todo* $v \in V_i$ $(1 \leq i \leq n)$.

*Para* $i = 1$, *temos* $(T - a_{11}I)v_1 = Tv_1 - a_{11}v_1 = 0$. *Admitamos o teorema verdadeiro para* $i - 1$. *Todo elemento de* $V_i$ *é da forma* $u + cv_i$ *com* $u \in V_{i-1}$ *e* $c \in \mathbb{C}$. *Como* $TV_{i-1} \subset V_{i-1}$ *resulta que* $(T - a_{ii}I)u$ *está em* $V_{i-1}$. *Por indução,*

$$(T - a_{11}I)...(T - a_{i-1,i-1}I)(T - a_{ii}I)u = 0.$$

*Por outro lado,* $(T - a_{11}I)cv_i$ *pertence a* $V_{i-1}$ *e, por indução,*

$$(T - a_{11}I)...(T - a_{ii}I)cv_i = 0.$$

*Logo, para* $v \in V_i$, *temos*

$$(T - a_{11}I)...(T - a_{ii}I)v = 0$$

*e* $i = n$ *prova o teorema.*
**Obs.** *É claro que a proposição 6.14 continua válida se substituirmos* $T : V \longrightarrow V$ *por uma matriz* $A \in M_n(K)$.

**Exemplo 6.3.3** *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \end{bmatrix}$. *Temos:* $P_A(t) = (1 - t)(t - 3)^2$.

*Para* $t = 1$, $(A - I_3)x = 0$ *nos dá* $x = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $x_1 \in \mathbb{R}$.

*Para* $t = 3$, $(A - 3I_3)x = 0$ *nos dá* $x = x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $x_3 \in \mathbb{R}$.

*Como dim* $V(3) = 1 < 2$, $A$ *não é diagonalizável. Os vetores* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *geram* $V(1)$ *e* $V(3)$, *respectivamente. Para obter uma base de* $\mathbb{R}^3$ *devemos tomar um terceiro vetor que seja independente desses dois. Por exemplo,* $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. *Obtemos a base* $\mathcal{F} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ *de* $\mathbb{R}^3$. *Se*

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, *então* $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$, *matriz triangular na qual os elementos da diagonal principal são os autovalores de A. Como* $P_A(t) = P_B(t) = (1-t)(3-t)^2$, *temos* $P_A(A) = P_B(B) = 0$, *ou seja,* $(I_3 - A)(3I_3 - A)^2 = 0$, *que se pode verificar diretamente pelo cálculo.*

## 6.4 Exercícios do Capítulo 6

1. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$, onde a, b e c são reais. Ache os autovalores e autovetores de A e determine os casos em que A é diagonalizável.

2. Se possível, diagonalize $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$.

3. Prove que não existem matrizes A, B – $n \times n$ – tais que
$$\big[A, B\big] = AB - BA = I_n.$$

4. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita sobre K, $T : V \longrightarrow V$ linear.
(a) Prove que T e $T^t$ têm o mesmo polinômio característico.
(b) Sejam $V(\lambda)$ o auto-espaço associado ao autovalor $\lambda$ de T e $V'(\lambda)$ o auto-espaço associado ao autovalor $\lambda$ de $T^t$. Prove que $V(\lambda)$ e $V'(\lambda)$ têm a mesma dimensão.

5. Sejam $A \in M_n(\mathbb{C})$ a matriz "circulante" $A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$ e $P = (p_{jk})$ – $n \times n$ – tal que $p_{jk} = e^{\frac{2\pi i}{n} jk}$.
(a) Calcule $P\overline{P}$ e ache $P^{-1}$.
(b) Se $w = e^{\frac{2\pi i}{n}}$, mostre que o vetor $x = \begin{bmatrix} 1 \\ w \\ \vdots \\ w^{n-1} \end{bmatrix}$ é um autovetor de A. Qual é o autovalor correspondente?
(c) Prove que $P^{-1}AP$ é uma matriz diagonal.

# Capítulo 7

# Produto Interno

Neste capítulo o corpo K será ou $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ e usaremos a notação $\mathbb{K}$.

## 7.1 Definições e Exemplos

**Definição 7.1** *Seja $V$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$. Um produto interno em $V$ é uma função que a cada par $(u, v) \in V \times V$ associa um escalar, anotado $\langle u, v\rangle$, de modo que:*
*(a) $\langle u_1 + u_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + \langle u_2, v\rangle$*
*(b) $\langle au, v\rangle = a\langle u, v\rangle$*
*(c) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$, onde a barra indica conjugação complexa,*
*(d) $\langle v, v\rangle$ é um real positivo para todo $v \in \mathbb{K},\ v \neq 0$*
*quaisquer que sejam $u, v, u_1, u_2 \in V$ e $a \in \mathbb{K}$.*

**Exemplo 7.1.1** *Seja $V = \mathbb{K}^n$. Se $u = (x_1, ..., x_n)$ e $v = (y_1, ..., y_n)$, definimos $\langle u, v\rangle = x_1\overline{y}_1 + ... + x_n\overline{y}_n$ e obtemos um produto interno em $\mathbb{K}^n$.*

**Exemplo 7.1.2** *Seja $V = C^0([0, 1], \mathbb{K})$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{K}$. Se $f, g \in V$, definimos um produto interno em $V$ por $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt$.*

**Exemplo 7.1.3** *Seja $V = C^1([0, 1], \mathbb{R})$ o espaço vetorial das funções contínuas $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ que têm derivada primeira contínua. Se $f, g \in V$, definimos um produto interno em $V$ por $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 \big[f(t)g(t) + f'(t)g'(t)\big]dt$.*

**Exemplo 7.1.4** *Sejam $V_1$ e $V_2$ espaços vetoriais sobre o mesmo corpo ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) e $\langle , \rangle_2$ um produto interno em $V_2$. Se $T : V_1 \longrightarrow V_2$ é linear injetora,* *definimos um produto interno em* $V_1$ *por* $\langle u,v\rangle_1 = \langle T(u),T(v)\rangle_2$. *Por exemplo, seja* $T : V_1 = C^0\big([0,1],\mathbb{R}\big) \longrightarrow V_2 = C^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$, $\langle,\rangle_2$ *como no exemplo 7.1.2 acima, tal que* $T(f)(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}f(t)$. *É claro que* $T$ *é linear injetora. Portanto,* $\langle f,g\rangle_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{-t^2}f(t)g(t)dt$ *é um produto interno em* $V_1$.

**Definição 7.2** *Seja* $V$ *um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$ *munido de produto interno* $\langle,\rangle$. *Se* $v \in V$ *definimos sua* *norma* *por* $\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$. *A* *distância* *entre* $u,v \in V$ *é definida por* $d(u,v) = \|u-v\|$.

**Proposição 7.1** *(Pitágoras) Seja* $V$ *um espaço vetorial com produto interno* $\langle,\rangle$. *Se* $u,v \in V$, *então* $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ *se, e só se,* $Re\langle u,v\rangle = 0$, *onde* $Re\ z$ *indica a parte real do número complexo* $z$.

**Dem.** $\|u+v\|^2 = \langle u+v,u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle +$
$+\langle v,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + \langle u,v\rangle + \overline{\langle u,v\rangle} = \|u\|^2 + \|v\|^2 +$
$+2Re\langle u,v\rangle$.
*Portanto,* $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$ *se, e só se,* $Re\langle u,v\rangle = 0$.

**Corolário 7.1.1** *Se* $\langle u,v\rangle = 0$ *então* $\|u+v\| \geq \|u\|$ *com igualdade* $\Leftrightarrow v =$ $= 0$.

**Corolário 7.1.2** *(lei do paralelogramo) Se* $u,v \in V$, *então:*

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\big(\|u\|^2 + \|v\|^2\big).$$

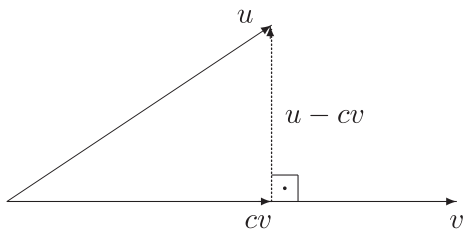
**Proposição 7.2** *Seja* $V$ *um espaço vetorial com produto interno* $\langle,\rangle$. *Então:*
*(a)* $\|av\| = |a|\cdot\|v\|$
*(b)* $\|v\| > 0$ *se* $v \neq 0$
*(c)* $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\|\cdot\|v\|$ *(desigualdade de Cauchy-Schwarz)*
*(d)* $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ *(desigualdade triangular),*
*quaisquer que sejam* $u,v \in V$ *e* $a \in \mathbb{K}$.

**Dem.** *(a)* $\|av\| = \sqrt{\langle av,av\rangle} = \sqrt{a\bar{a}\langle v,v\rangle} = \sqrt{|a|^2\cdot\langle v,v\rangle} = |a|\cdot\|v\|$.

*(b) Se* $v \neq 0$ *temos* $\langle v,v\rangle > 0$, *donde* $\|v\| > 0$.

*(c) A desigualdade é verdadeira para* $v = 0$. *Suponhamos* $v \neq 0$ *e determinemos* $c \in \mathbb{K}$ *de modo que* $cv$ *seja a projeção ortogonal de* $u$ *ao longo de* $v$, *isto é, tal que* $\langle u-cv,v\rangle = 0$, *donde* $c = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle}$. *Pelo corolário 7.1.1 da*

*proposição 7.1 temos* $\|u\| \geq \|cv\| = \dfrac{|\langle u,v\rangle|}{\|v\|^2} \cdot \|v\|$, *donde,* $|\langle u,v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$, *com igualdade* $\Leftrightarrow u = cv$.




*(d)* $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2Re\langle u,v\rangle \leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u,v\rangle| \leq$
$\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\|u\| \cdot \|v\| = \big(\|u\| + \|v\|\big)^2$, *donde a tese.*

**Exemplo 7.1.5** *Aplicando a desigualdade de Cauchy-Schwarz aos exemplos 7.1.1 e 7.1.2 anteriores, obtemos:*

*(7.1.1)* $\left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y}_i\right| \leq \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{1/2} \cdot \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{1/2}$

*(7.1.2)* $\left|\displaystyle\int_0^1 f(t)\overline{g(t)}dt\right| \leq \left(\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^2dt\right)^{1/2} \cdot \left(\displaystyle\int_0^1 |g(t)|^2dt\right)^{1/2}$.

**Definição 7.3** *Seja* $V$ *um espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$. $u, v \in V$ *são ortogonais ou perpendiculares se* $\langle u,v\rangle = 0$, *o que indicamos por* $u \perp v$. *Se* $S \subset V$, *definimos* $S^\perp = \{v \in V; \langle u,v\rangle = 0\ \forall u \in S\}$. *É imediato que* $S^\perp$ *é um subespaço de V, chamado espaço ortogonal de S. Se U é o subespaço de V gerado por S, então* $S^\perp = U^\perp$ *pois se v é perpendicular a todos os elementos de S, é perpendicular também às combinações lineares de elementos de S, ou seja, aos elementos de U. Escrevemos* $v \perp S$ *para indicar que v é perpendicular a todos os elementos de S; neste caso, dizemos que v é perpendicular a S.*

**Exemplo 7.1.6** *Sejam* $V = C^0([0,2\pi],\mathbb{R})$, $g_1(t) = cos\ kt$, $g_2(t) = sen\ kt$, *onde k é um inteiro positivo,* $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. *Temos:*

$$\|g_1\|^2 = \int_0^{2\pi} cos^2kt \cdot dt = \pi$$

$$\|g_2\|^2 = \int_0^{2\pi} sen^2kt \cdot dt = \pi$$

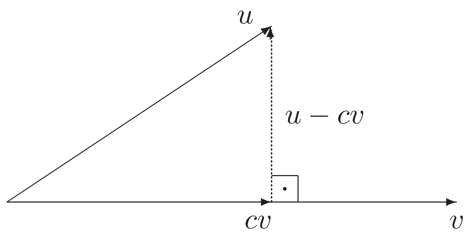
*Os coeficientes de Fourier de $f \in V$ são os números*

$$a_k = \frac{\langle f, g_1\rangle}{\|g_1\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos\ kt \cdot dt,$$

$$b_k = \frac{\langle f, g_2\rangle}{\|g_2\|^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sen\ kt \cdot dt$$

*e* $\dfrac{a_0}{2} = \dfrac{\langle f, 1\rangle}{\|1\|^2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)dt.$

*Devido a esse exemplo, é usual (no caso geral) chamar* $c = \dfrac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}$ *de coeficiente de Fourier de $u$ em relação a $v$; o vetor $cv$ é a projeção ortogonal de $u$ sobre $v$.*




**Definição 7.4** *Seja $V$ um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Dizemos que $S \subset V$ é um conjunto ortogonal se dois vetores quaisquer de $S$ são ortogonais. $S \subset V$ é um conjunto ortonormal se $S$ é ortogonal e $\|v\| = 1$ para todo $v \in S$.*

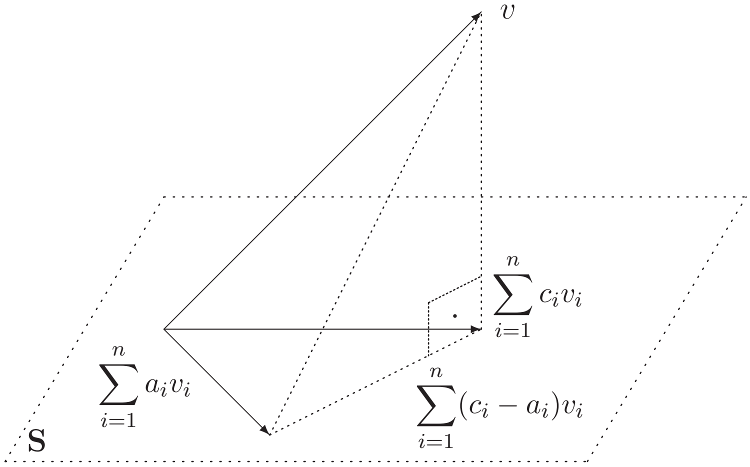
**Exemplo 7.1.7** *A base canônica de $\mathbb{K}^n$ é um conjunto ortonormal relativamente ao produto interno usual de $\mathbb{K}^n$.*

**Proposição 7.3** *Seja $V$ um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Se $X \subset V$ é um conjunto ortogonal de vetores não nulos, então $X$ é linearmente independente.*

**Dem.** *Suponhamos $a_1x_1 + ... + a_nx_n = 0,\ n \in \mathbb{N},\ a_i \in \mathbb{K},\ x_i \in X$. Então: $\langle x_i, \sum_{k=1}^{n} a_kx_k\rangle = 0$, donde $\langle x_i, a_ix_i\rangle = 0$, isto é, $\overline{a_i}\|x_i\|^2 = 0$ e, portanto, $a_i = 0\ (i = 1, ..., n)$, o que mostra ser $X$ linearmente independente.*

**Proposição 7.4** *Seja $\{v_1, ..., v_n, ...\}$ um conjunto ortogonal de vetores não-nulos num espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Sejam $v \in V$ e $c_i = \dfrac{\langle v, v_i \rangle}{\|v_i\|^2}$ $(i = 1, 2, ...)$.*

*(a) Se $a_1, ..., a_n \in \mathbb{K}$, então $\left\| v - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\| \leq \left\| v - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right\|$, com igualdade se, e só se, $a_i = c_i$ $(i = 1, ..., n)$*




*(b) $\sum_{i=1}^{\infty} |c_i|^2 \cdot \|v_i\|^2 \leq \|v\|^2$ (desigualdade de Bessel)*

**Dem.** $\langle v - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, v_j \rangle = \langle v, v_j \rangle - \sum_{i=1}^{n} c_i \langle v_i, v_j \rangle = c_j \|v_j\|^2 - c_j \|v_j\|^2 = 0$ $(j = 1, .., n)$, *ou seja, o vetor* $v - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ *é perpendicular ao subespaço $S$ gerado por* $v_1, ..., v_n$*; em particular ao vetor* $\sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i) v_i$*. Do corolário 7.1.1 do teorema de Pitágoras, resulta que* $\left\| v - \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\| \leq \left\| v - \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \right\|$*, com igualdade se, e só se,* $\sum_{i=1}^{n} (c_i - a_i) v_i = 0$*, o que equivale a* $a_i = c_i$ $(i = 1, ..., n)$*.*

*Ainda pelo corolário 7.1.1 do teorema de Pitágoras, temos* $\|v\|^2 \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \right\|^2 =$

$\sum_{i,j=1}^{n}\langle c_iv_i, c_jv_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\|v_i\|^2$, *válida para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Portanto,*

$$\sum_{i=1}^{\infty}|c_i|^2 \cdot \|v_i\|^2 \leq \|v\|^2.$$

**Exemplo 7.1.8** *Dada a função contínua* $f : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$, *vamos achar, dentre os polinômios trigonométricos de grau* $\underline{m}$, $P(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 cos\ t + b_1 sen\ t + ... + a_m cos\ mt + b_m sen\ mt$, $a_i \in \mathbb{R}$, $b_i \in \mathbb{R}$, *o que minimiza a integral*

$$\int_0^{2\pi}\big[f(t) - P(t)\big]^2 dt.$$

*Seja* $V = C^0\big([0, 2\pi], \mathbb{R}\big)$ *com o produto interno* $\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$. *As funções* $1, cos\ t,\ sen\ t, ...,\ cos\ nt,\ sen\ nt, ...$ *pertencem a* $V$ *e formam um conjunto ortogonal de vetores não-nulos, pois*

$$\int_0^{2\pi} cos\ kt \cdot dt = \int_0^{2\pi} sen\ kt \cdot dt = \int_0^{2\pi} cos\ kt \cdot cos\ ht \cdot dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} cos\ kt \cdot sen\ lt \cdot dt = \int_0^{2\pi} sen\ kt \cdot sen\ lt \cdot dt = 0$$

*se* $k \neq h$, $k \neq l$, *respectivamente, e*

$$\int_0^{2\pi} 1^2 dt = 2\pi,\ \int_0^{2\pi} cos^2 kt \cdot dt = \int_0^{2\pi} sen^2 kt \cdot dt = \pi \quad (k = 1, 2, ...)$$

*Pela proposição 7.4,* $\|f - P\|^2 = \int_0^{2\pi}\big[f(t) - P(t)\big]^2 dt$ *é mínimo quando os coeficientes de* $P(t)$ *são os coeficientes de Fourier de* $f$ *em relação às funções* $1,\ cos\ t,\ sen\ t, ....$ *Então:*

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt, \qquad donde \quad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) cos\ kt \cdot dt \qquad e \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) sen\ kt \cdot dt$$

*E a desigualdade (abstrata) de Bessel, nos dá:*

$$\frac{a_0^2}{4} \cdot 2\pi + a_1^2 \cdot \pi + b_1^2 \cdot \pi + ... + a_n^2 \cdot \pi + b_n^2 \cdot \pi + ... \leq \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt,$$

*ou seja,* $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|f(t)|^2dt,$
*que é a desigualdade clássica de Bessel.*

**Exercício** Sejam $a_1, ..., a_n$ reais não nulos. Prove:

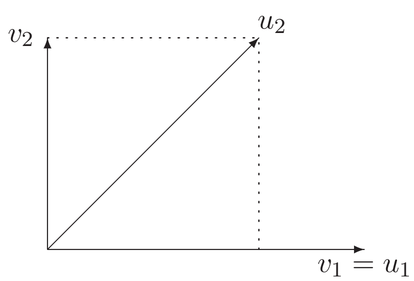
$$(a_1^2+...+a_n^2)\left(\frac{1}{a_1^2}+...+\frac{1}{a_n^2}\right)\geq n^2.$$

## 7.2 Bases Ortonormais

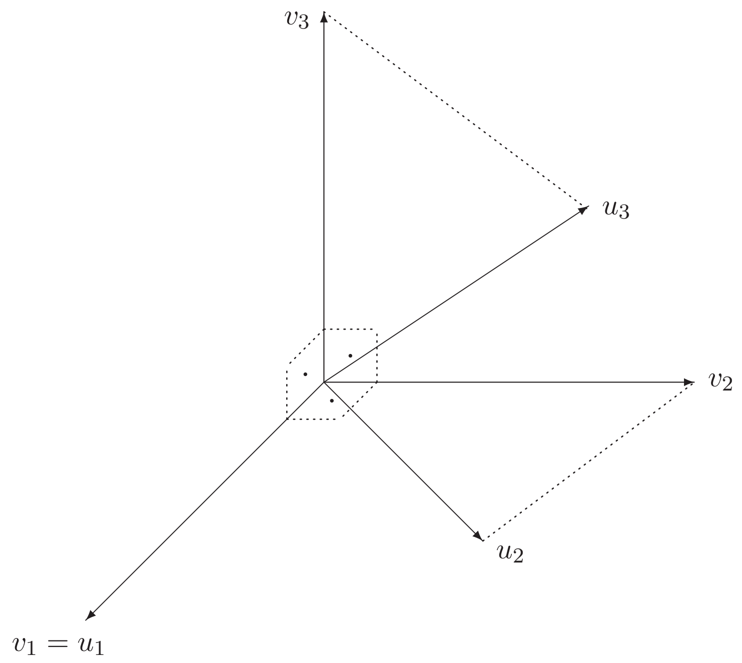
**Definição 7.5** *Seja $V$ um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Uma base $(v_1, ..., v_n)$ de $V$ é ortogonal se o conjunto $\{v_1, ..., v_n\}$ é ortogonal, isto é, $\langle v_i, v_j\rangle = 0$ se $i \neq j$. Se, além disso, $\|v_j\| = 1$ $(j = 1, ..., n)$ então $(v_1, ..., v_n)$ é uma base ortonormal.*

**Proposição 7.5** *Todo espaço vetorial com produto interno, de dimensão finita $n \geq 1$, tem uma base ortonormal.*

**Dem.** *Seja $(u_1, ..., u_n)$ base de $V$. A partir desta base vamos obter uma base ortogonal, pelo chamado processo de ortogonalização de Gram-Schmidt.*




*Seja $v_1 = u_1$ $(\neq 0)$; para achar $v_2$ ponhamos $v_2 = u_2 - a_1v_1$, onde $a_1 \in \mathbb{K}$ é escolhido de modo que $\langle v_2, v_1\rangle = 0$, isto é, $\langle u_2 - a_1v_1, v_1\rangle = 0$, donde* $a_1 = \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2}$.




*Como* $u_1$ *e* $u_2$ *são LI, é claro que* $v_2 \neq 0$*; além disso, o espaço gerado por* $v_1$ *e* $v_2$ *é o mesmo gerado por* $u_1$ *e* $u_2$*. A seguir, para achar* $v_3$*, ponhamos* $v_3 = u_3 - b_2v_2 - b_1v_1$*, onde* $b_1$ *e* $b_2$ *são escolhidos de modo que* $\langle v_3, v_1 \rangle = \langle v_3, v_2 \rangle = 0$*, donde* $b_1 = \dfrac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}$ *e* $b_2 = \dfrac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2}$*.*

*Como* $u_3$ *não está no espaço gerado por* $v_1$ *e* $v_2$*, temos* $v_3 \neq 0$*; além disso, o espaço gerado por* $v_1, v_2, v_3$ *é o mesmo gerado por* $u_1, u_2, u_3$*. Por indução, suponhamos construídos* $v_1, ..., v_{k-1}$ *que formam um conjunto ortogonal de vetores não-nulos e são tais que o espaço por eles gerado é o mesmo gerado por* $u_1, ..., u_{k-1}$*. Para achar* $v_k$*, ponhamos* $v_k = u_k - c_{k-1}v_{k-1} - ... - c_1v_1$*, onde* $c_1, ..., c_{k-1}$ *são escolhidos de modo que* $\langle v_k, v_1 \rangle = ... = \langle v_k, v_{k-1} \rangle = 0$*, donde* $c_1 = \dfrac{\langle u_k, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2}, ..., c_{k-1} = \dfrac{\langle u_k, v_{k-1} \rangle}{\|v_{k-1}\|^2}$*. Como* $u_k$ *não pertence ao espaço gerado por* $v_1, ..., v_{k-1}$ *temos* $v_k \neq 0$*; além disso, o espaço gerado por* $v_1, ..., v_k$ *é o mesmo gerado por* $u_1, ..., u_k$*. Obteremos assim, por esse processo, uma sequência* $(v_1, ..., v_n)$ *de vetores não-nulos, dois a dois ortogonais, donde LI, ou seja, uma base ortogonal de V. Para obter uma base ortonormal basta substituir cada* $v_i$ *por* $\dfrac{v_i}{\|v_i\|}$*.*

**Exemplo 7.2.1** *Vamos achar uma base ortogonal para o subespaço W de* $V = C^0\big([0,1], \mathbb{R}\big)$*, com* $\langle f, g \rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)dt$*, gerado pelas funções* $1, t, t^2$*.*

*Seja* $f_1(t) = 1$ *e tomemos* $f_2(t) = t - af_1(t) = t - a$ *onde* $a = \dfrac{\langle t, f_1\rangle}{\|f_1\|^2} = \displaystyle\int_0^1 t \cdot dt = \frac{1}{2}$. *Logo:* $f_2(t) = t - \dfrac{1}{2}$.
*Ponhamos* $f_3(t) = t^2 - bf_2(t) - cf_1(t)$, *onde* $b, c \in \mathbb{R}$ *são dados por:*
$b = \dfrac{\langle t^2, f_2\rangle}{\|f_2\|^2}$ *e* $c = \dfrac{\langle t^2, f_1\rangle}{\|f_1\|^2}$.

*Temos:*

$$\|f_1\|^2 = 1; \quad \|f_2\|^2 = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \frac{1}{12}; \quad \langle t^2, f_1\rangle = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3};$$

$$\langle t^2, f_2\rangle = \int_0^1 t^2\left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \frac{1}{12}.$$

*Logo:*

$$f_3(t) = t^2 - f_2(t) - \frac{1}{3}f_1(t) = t^2 - t + \frac{1}{6}.$$

*Portanto,* $\left(1, t - \dfrac{1}{2}, t^2 - t + \dfrac{1}{6}\right)$ *é uma base ortogonal de* $W$.

**Proposição 7.6** *Sejam* $V$ *um espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$ *e* $W \subset V$ *um subespaço de dimensão finita. Então:*

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

**Dem.** *Seja* $(v_1, ..., v_r)$ *uma base ortonormal de* $W$. *Se* $v \in V$, *seja*

$$u = v - \sum_{i=1}^{r} \langle v, v_i\rangle v_i.$$

*Temos:*

$$\langle u, v_j\rangle = \langle v - \sum_{i=1}^{r}\langle v, v_i\rangle v_i, v_j\rangle = \langle v, v_j\rangle - \sum_{i=1}^{r}\langle v, v_i\rangle \delta_{ij} =$$

$$= \langle v, v_j\rangle - \langle v, v_j\rangle = 0 \quad (j = 1, ..., r)$$

*ou seja,* $u \in W^{\perp}$. *Como* $\displaystyle\sum_{i=1}^{r}\langle v, v_i\rangle v_i \in W$, *temos* $V = W + W^{\perp}$.
*Se* $v \in W \cap W^{\perp}$ *então* $\langle v, v\rangle = 0$, *donde* $v = 0$, *isto é,* $W \cap W^{\perp} = \{0\}$.
*Logo:* $V = W \oplus W^{\perp}$.

**Corolário 7.6.1** *Nas condições da proposição 7.6, se V tem dimensão finita, então: dim* $V = $ *dim* $W +$ *dim* $W^{\perp}$.

**Obs.** *Sejam* $V$ *um espaço vetorial com produto interno* $\langle , \rangle$ *e* $(e_1, ..., e_n)$ *uma base* *ortonormal* *de* $V$. *Se* $u, v \in V$, $u = a_1e_1 + ... + a_ne_n$, $v = b_1e_1 + ... + b_ne_n$, *então* $\langle u, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_ie_i, b_je_j\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_i\overline{b_j}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}$, *igual ao produto interno usual dos vetores* $a = (a_1, ..., a_n)$ *e* $b = (b_1, ..., b_n)$ *de* $\mathbb{K}^n$. *Se a base* $(e_1, ..., e_n)$ *não é ortonormal e se* $\langle e_i, e_j\rangle = g_{ij} \in \mathbb{K}$, *então* $\langle u, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}a_i\overline{b_j}$.

*Se* $V$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$, *de dimensão* $n$, *uma maneira de se definir um produto interno em* $V$ *é a seguinte: tome uma base arbitrária* $(e_1, ..., e_n)$ *de* $V$ *e defina o produto interno, de* $u = a_1e_1 + ... + a_ne_n$ *por* $v = b_1e_1 + ... + b_ne_n$, *por meio de* $\langle u, v\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}$. *Em relação a este produto interno, a base* $(e_1, ..., e_n)$ *é ortonormal.*

## Exercícios

1. Seja $\mathcal{E} = (u_1, u_2, u_3)$ a base de $\mathbb{R}^3$ formada pelos vetores $u_1 = (1, 1, 1)$, $u_2 = (1, -1, 1)$ e $u_3 = (1, -1, -1)$, e seja $\mathcal{F} = (v_1, v_2, v_3)$ a base ortogonal obtida de $\mathcal{E}$ pelo processo de Gram-Schmidt. Ache a matriz P de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$. Observe que P é triangular superior.

2. Dado o vetor unitário $u = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ forme a matriz $A = (\alpha_i\alpha_j)$ – $n \times n$. Seja $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ o operador cuja matriz na base canônica é $I_n - 2A$. Prove que para todo $v \in \mathbb{R}^n$ tem-se $H(v) = v - 2\langle v, u\rangle u$ e que $\|Hv\| = \|v\|$. (H é a reflexão no hiperplano de $\mathbb{R}^n$ cuja normal é u).

3. Em $M_{\mathbb{R}}(n)$ considere $\langle A, B\rangle = \sum_{i,j} a_{ij}b_{ij}$, onde $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$. Mostre que $\langle , \rangle$ é um produto interno. Mostre que o subespaço $\mathcal{A}$ das matrizes antissimétricas é o complemento ortogonal do subespaço $\mathcal{S}$ das matrizes simétricas em $M_{\mathbb{R}}(n)$.

## 7.3 Relações entre V e $V^*$

Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$. Se $v \in V$, a aplicação $u \in V \overset{T_v}{\longmapsto} \langle u, v\rangle \in \mathbb{K}$ é uma forma linear, isto é, um elemento do dual $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$.

**Proposição 7.7** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, munido de um produto interno $\langle,\rangle$. A aplicação $v \in V \stackrel{T}{\longmapsto} T_v \in V^*$, $T_v(u) = \langle u, v\rangle$, é bijetora.*

**Dem.** $T_{v_1+v_2}(u) = \langle u, v_1 + v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle = T_{v_1}(u) + T_{v_2}(u)$.

$T_{av}(u) = \langle u, av\rangle = \overline{a}\langle u, v\rangle = \overline{a}T_v(u)$, *de modo que $T$ não é linear se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Dizemos que ela é semi-linear.*

$T : V \longrightarrow V^*$ *é injetora: $T_{v_1} = T_{v_2}$ se, e só se, $\langle u, v_1\rangle = \langle u, v_2\rangle$ para todo $u \in V \Leftrightarrow \langle u, v_1 - v_2\rangle = 0$ para todo $u \in V \Leftrightarrow v_1 = v_2$.*

$T : V \longrightarrow V^*$ *é sobrejetora: dado $w \in V^*$, seja $(v_1, ..., v_n)$ uma base ortonormal de $V$ e seja $v = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ com $a_i = \overline{w(v_i)}$. Então, $T_v(v_i) = \langle v_i, v\rangle = \overline{a_i} = w(v_i)$, $1 \leq i \leq n$, e, portanto, $T_v = w$.*

**Obs.** *No caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ a aplicação $T$ é linear bijetora, isto é, um isomorfismo entre $V$ e $V^*$.*

*No caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ a aplicação $T$ é semi-linear bijetora; ela é um anti-isomorfismo entre $V$ e $V^*$.*

*Se $W \subset V$ é um subespaço, vimos que $W^\perp$ é subespaço de $V$ e $W^0$ é subespaço de $V^*$, onde*
$W^\perp = \{v \in V;\ \langle u, v\rangle = 0\ \forall u \in W\}$ e
$W^0 = \{\alpha \in V^*;\ \alpha(u) = 0\ \forall u \in W\}$.

*Se $v \in W^\perp$ então $T_v \in W^0$ pois $T_v(u) = \langle u, v\rangle = 0$ para todo $u \in W$. Assim, $T : V \longrightarrow V^*$ leva $W^\perp$ em $W^0$.*

*Um argumento análogo ao usado na proposição 7.7 mostra que $T : W^\perp \longrightarrow W^0$ é um isomorfismo no caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e um anti-isomorfismo no caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Observemos também que se $\dim V = n$ e $\dim W = r$ então $\dim W^\perp = n - r$, como já vimos anteriormente.*

*A proposição 7.7 nos diz que, dado um funcional linear $w \in V^*$, existe um e um único vetor $v \in V$ tal que $w = T_v$, isto é, $w(u) = \langle u, v\rangle$ para todo $u \in V$, ou seja, $v \in V$ representa a forma linear $w \in V^*$.*

**Exemplo 7.3.1** *Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação diferenciável. A diferencial de $f$ em $p \in U$ é o funcional linear $df(p) \in (\mathbb{R}^n)^*$ tal que, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $df(p) \cdot (v) = \dfrac{\partial f}{\partial v}(p) =$ derivada de $\underline{f}$ no ponto $\underline{p}$ na direção de $\underline{v}$.*

*Considerando em $\mathbb{R}^n$ o produto interno usual, o vetor que representa $df(p)$ é o gradiente de $\underline{f}$ em $\underline{p}$, $\nabla f(p) = grad\ f(p)$. Assim, $\nabla f(p)$ é o vetor de $\mathbb{R}^n$ tal que $df(p) \cdot v = \langle \nabla f(p), v\rangle = \dfrac{\partial f}{\partial v}(p)$. Se $(e_1, ..., e_n)$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ e $\nabla f(p) = a_1e_1 + ... + a_ne_n$, então $a_i = \langle \nabla f(p), e_i\rangle = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(p)$, $(1 \leq i \leq n)$,* *ou seja,* $\nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$.

**Exemplo 7.3.2** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle , \rangle$, $T_v(u) = \langle u, v\rangle$, que sabemos ser semi-linear bijetora. Vamos definir um produto interno em $V^*$ por meio de $\langle T_v, T_u\rangle = \langle u, v\rangle$. De fato, temos:*
*(a)* $\langle T_{v_1} + T_{v_2}, T_u\rangle = \langle T_{v_1+v_2}, T_u\rangle = \langle u, v_1+v_2\rangle = \langle u, v_1\rangle + \langle u, v_2\rangle = \langle T_{v_1}, T_u\rangle + \langle T_{v_2}, T_u\rangle$.
*(b)* $\langle aT_v, T_u\rangle = \langle T_{\overline{a}v}, T_u\rangle = \langle u, \overline{a}v\rangle = a\langle u, v\rangle = a\langle T_v, T_u\rangle$.
*(c)* $\langle T_v, T_u\rangle = \langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle} = \overline{\langle T_u, T_v\rangle}$.
*(d)* $\langle T_v, T_v\rangle = \langle v, v\rangle = \|v\|^2 > 0$ *se* $v \neq 0$.

*A partir de $(V^*, \langle , \rangle)$, usando o método acima, podemos introduzir um produto interno em $V^{**}$. Seja $L : V^* \longrightarrow V^{**}$ definido por $L_\alpha(\beta) = \langle \beta, \alpha\rangle$, $\alpha, \beta \in V^*$. Definimos $\langle L_\alpha, L_\beta\rangle = \langle \beta, \alpha\rangle$. Vamos mostrar que $L \circ T : V \longrightarrow V^{**}$ coincide com o isomorfismo canônico $J : V \longrightarrow V^{**}$, $J_v(\alpha) = \alpha(v)$, $v \in V$, $\alpha \in V^*$, isto é, vamos mostrar que $L_{T_v} = J_v$.*

*Temos: $L_{T_v}(T_u) = \langle T_u, T_v\rangle = \langle v, u\rangle = T_u(v) = J_v(T_u)$, donde resulta $L_{T_v} = J_v$, ou seja, $L \circ T = J$.*

## 7.4 Adjunta

Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita, ambos com produto interno, e $T : V \longrightarrow W$ linear.

**Proposição 7.8** *Existe uma única aplicação linear $T^* : W \longrightarrow V$ tal que $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$ para todo $v \in V$ e todo $w \in W$.*

**Dem.** *Seja $w \in W$ fixo mas arbitrário e seja $\beta : V \longrightarrow \mathbb{K}$ o funcional linear definido por $\beta(v) = \langle Tv, w\rangle$. Pela proposição 7.7 existe um único $u = T^*w \in V$ tal que $\beta(v) = \langle v, T^*w\rangle$, ou seja, $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$. Vamos mostrar que $T^* : W \longrightarrow V$ assim definida é linear. Se $v \in V$, $w_1, w_2 \in W$ temos:*
$\langle v, T^*(w_1 + w_2)\rangle = \langle Tv, w_1 + w_2\rangle = \langle Tv, w_1\rangle + \langle Tv, w_2\rangle = \langle v, T^*w_1\rangle + \langle v, T^*w_2\rangle = \langle v, T^*w_1 + T^*w_2\rangle$ *o que mostra ser $T^*(w_1 + w_2)$ igual a $T^*w_1 + T^*w_2$.*

*Se $a \in \mathbb{K}$, temos: $\langle v, T^*(aw)\rangle = \langle Tv, aw\rangle = \overline{a}\langle Tv, w\rangle = \overline{a}\langle v, T^*w\rangle = \langle v, aT^*w\rangle$ para todo $w \in W$, donde $T^*(aw) = aT^*(w)$.*

**Definição 7.6** *A aplicação linear $T^* : W \longrightarrow V$ tal que $\langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$ quaisquer que sejam $v \in V$, $w \in W$, chama-se a adjunta de $T$. Se $V = W$ e*

*$T = T^*$ o operador linear $T : V \longrightarrow V$ chama-se auto-adjunto (se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ diz-se também que $T$ é simétrico; se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ diz-se também que $T$ é hermitiano).*

**Proposição 7.9** *Seja $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, com produto interno $\langle , \rangle$. Se $a \in \mathbb{K}$ e $L, T : V \longrightarrow V$ são lineares, então:*
*(a) $(L + T)^* = T^* + L^*$;*
*(b) $(aT)^* = \overline{a} \cdot T^*$;*
*(c) $(L \circ T)^* = T^* \circ L^*$;*
*(d) $(T^*)^* = T$.*

**Dem.**
*(a)* $\langle (L+T)(u), v\rangle = \langle Lu+Tu, v\rangle = \langle Lu, v\rangle + \langle Tu, v\rangle = \langle u, L^*v\rangle + \langle u, T^*v\rangle =$
$= \langle u, L^*v + T^*v\rangle = \langle u, (L^* + T^*)(v)\rangle$ *quaisquer que sejam* $u, v \in V$.
*Portanto:* $(L + T)^* = L^* + T^*$.
*(b)* $\langle (aT)(u), v\rangle = \langle aT(u), v\rangle = a\langle u, T^*v\rangle = \langle u, \overline{a}T^*(v)\rangle =$
$= \langle u, (\overline{a}T^*)(v)\rangle$, *donde* $(aT)^* = \overline{a}T^*$.
*(c)* $\langle (L \circ T)(u), v\rangle = \langle L(Tu), v\rangle = \langle Tu, L^*v\rangle = \langle u, T^*L^*v\rangle = \langle u, T^* \circ L^*(v)\rangle$,
*donde* $(L \circ T)^* = T^* \circ L^*$.
*(d)* $\langle T^*u, v\rangle = \overline{\langle v, T^*u\rangle} = \overline{\langle Tv, u\rangle} = \langle u, Tv\rangle$, *donde* $(T^*)^* = T$.
**Obs.** *Se $L = L^*$ e $T = T^*$ são operadores auto-adjuntos em V, então $(L \circ T)^* = T^* \circ L^* = T \circ L$ e $L \circ T$ é auto-adjunto se, e só se, $T \circ L = L \circ T$.*

**Exemplo 7.4.1** *Sejam $V$ e $W$ espaços vetoriais de dimensão finita munidos de produto interno, $\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n)$ e $\mathcal{F} = (w_1, ..., w_m)$ bases ortonormais de $V$ e $W$, respectivamente. Se $T : V \longrightarrow W$ é linear e $\big[T\big]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} = A = (a_{ij})$ – $m \times n$, vamos mostrar que $\big[T^*\big]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}} = A^* = \overline{A}^t$, $A^* = (b_{ij})$ – $n \times m$.*
*Temos:*

$$\langle v_i, T^*w_j\rangle = \langle Tv_i, w_j\rangle$$

*Mas:*

$$\langle v_i, T^*w_j\rangle = \langle v_i, \sum_{k=1}^{n} b_{kj}v_k\rangle = \overline{b_{ij}}$$

$$\langle Tv_i, w_j\rangle = \sum_{k=1}^{m} \langle a_{ki}w_k, w_j\rangle = a_{ji}.$$

*Portanto,* $\overline{b_{ij}} = a_{ji}$, *donde* $A^* = \overline{A}^t$.

**Definição 7.7** *Seja $A = (a_{ij})$ – $m \times n$. A adjunta de $A$ é a matriz $A^* = \overline{A}^t = (b_{ij})$ – $n \times m$, onde $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$. Se $A$ é quadrada e $A = A^*$ dizemos que $A$ é auto-adjunta (simétrica se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, hermitiana se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).*

**Exemplo 7.4.2** *Os autovalores de um operador auto-adjunto $T = T^* : V \longrightarrow V$ são reais.*

*De fato, se $v \neq 0$ e $Tv = \lambda v = T^* v$, temos:*
$\langle Tv, v\rangle = \langle v, T^* v\rangle$, *donde,* $\langle \lambda v, v\rangle = \langle v, \lambda v\rangle$ *e daí vem:* $\lambda\langle v, v\rangle = \overline{\lambda}\langle v, v\rangle$, *donde* $\lambda = \overline{\lambda}$.

**Exemplo 7.4.3** *Os autovetores, associados a autovalores distintos, de um operador auto-adjunto $T = T^* : V \longrightarrow V$, são ortogonais.*

*De fato, se $Tv_1 = \lambda_1 v_1,\ Tv_2 = \lambda_2 v_2,\ \lambda_1 \neq \lambda_2$, então*
$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle v_1, v_2\rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2\rangle - \langle v_1, \lambda_2 v_2\rangle = \langle Tv_1, v_2\rangle - \langle v_1, Tv_2\rangle = 0$, *donde* $\langle v_1, v_2\rangle = 0$.

**Obs.** *A proposição 7.8 mostra que se dim $V$ é finita, todo $T \in \mathcal{L}(V)$ tem um adjunto $T^* \in \mathcal{L}(V)$. Se $V$ não tem dimensão finita, dado $T \in \mathcal{L}(V)$ pode ou não existir $T^* \in \mathcal{L}(V)$ tal que $\langle Tv, u\rangle = \langle v, T^* u\rangle$ para $u, v \in V$ quaisquer.*

**Exemplo 7.4.4** *Seja $V$ o espaço vetorial real das funções $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^\infty$ que se anulam fora de $[0, 1]$, com o produto interno $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. Seja $D : V \longrightarrow V$ o operador de derivação. Temos:*

$$\langle Df, g\rangle = \int_0^1 f'(t)g(t)dt = f(t)g(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 f(t)g'(t)dt = -\langle f, Dg\rangle = \langle f, D^* g\rangle,$$

*donde $D^* = -D$. Neste exemplo $V$ tem dimensão infinita.*

**Proposição 7.10** *Seja $V$ um espaço vetorial complexo, de dimensão finita, munido de um produto interno $\langle , \rangle$. Se $T : V \longrightarrow V$ é linear e tal que $\langle Tv, v\rangle = 0$ para todo $v \in V$, então $T = 0$.*

**Dem.** *Se $u, v \in V$, temos a identidade*

$$\langle T(u + v), u + v\rangle - \langle Tu, u\rangle - \langle Tv, v\rangle = \langle Tu, v\rangle + \langle Tv, u\rangle.$$

*Mas se $\langle Tw, w\rangle = 0$ para todo $w \in V$, então essa identidade nos dá:*

$$\langle Tu, v\rangle + \langle Tv, u\rangle = 0 \quad \Box$$

*Substituindo-se u por iu ($i^2 = -1$), obtemos:*
$\langle Tv, iu\rangle + \langle T(iu), v\rangle = 0$, *donde*
$-i\langle Tv, u\rangle + i\langle Tu, v\rangle = 0$, *ou ainda*
$-\langle Tv, u\rangle + \langle Tu, v\rangle = 0 \quad \Diamond$
*Somando $\Box$ com $\Diamond$, vem: $2\langle Tu, v\rangle = 0$, donde $\langle Tu, v\rangle = 0$ para todo $u \in V$ e para todo $v \in V$, donde $T = 0$.*

**Proposição 7.11** *Sejam $V$ um espaço vetorial real, de dimensão finita, munido de um produto interno $\langle , \rangle$ e $T : V \longrightarrow V$ linear simétrico. Se $\langle Tv, v\rangle = 0$ para todo $v \in V$, então $T = 0$.*

**Dem.** *A identidade $\langle T(u + v), u + v\rangle - \langle Tu, u\rangle - \langle Tv, v\rangle = \langle Tu, v\rangle + \langle Tv, u\rangle$ nos dá*

$$\langle Tu, v\rangle + \langle Tv, u\rangle = 0.$$

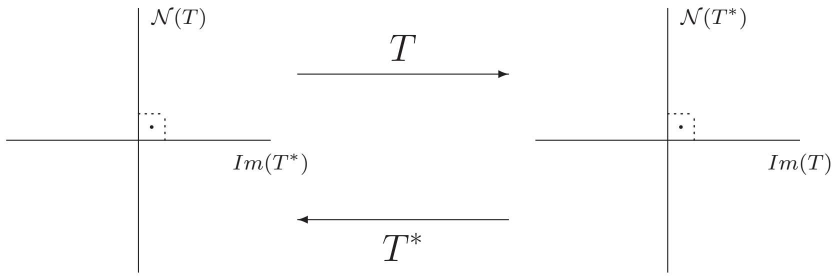
*Mas, $\langle Tv, u\rangle = \langle v, Tu\rangle = \langle Tu, v\rangle$.*
*Portanto, $2\langle Tu, v\rangle = 0$, donde $T = 0$.*

**Proposição 7.12** *Sejam $V$, $W$ espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, munidos de produto interno, e $T : V \longrightarrow W$ linear. Então:*

$$\begin{array}{lcl} (a)\ \mathcal{N}(T^*) = (Im\ T)^{\perp} & ; & (b)\ Im\ T^* = \mathcal{N}(T)^{\perp} \\ (c)\ \mathcal{N}(T) = (Im\ T^*)^{\perp} & ; & (d)\ Im\ T = \mathcal{N}(T^*)^{\perp} \end{array}$$

**Dem.** *É suficiente provar (a), as outras igualdades sendo consequências imediatas. Temos:*
*$v \in \mathcal{N}(T^*) \Leftrightarrow T^*v = 0 \Leftrightarrow \langle u, T^*v\rangle = 0$ para todo $u \in V \Leftrightarrow \langle Tu, v\rangle = 0$ para todo $u \in V \Leftrightarrow v \in (Im\ T)^{\perp}$.*

**Corolário 7.12.1** *O posto de $T^*$ é igual ao posto de $T$.*
**Dem.** *$dim\ Im\ T^* = dim\ V - dim\ \mathcal{N}(T) = dim\ Im\ T$*




## 7.5 Exercícios do Capítulo 7

1. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ munido de um produto interno, e seja $(v_1, ..., v_n)$ uma base de V. Dados $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{K}$ arbitrários, prove que existe um, e um único, vetor $w \in V$ tal que $\langle w, v_j\rangle = a_j$, $1 \le j \le n$.

2. Se T é invertível e $TST^*$ é auto-adjunto, prove que S é auto-adjunto.

3. Seja $T : V \longrightarrow V$ um operador diagonalizável. Prove que é possível definir um produto interno em V em relação ao qual $T = T^*$.

4. Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$ e seja $T : V \longrightarrow V$ um operador diagonalizável. Se $W \subset V$ é um subespaço tal que $T(W) \subset W$, prove que $T\big|_W : W \longrightarrow W$ é diagonalizável em W.

5. Sejam $S, T : V \longrightarrow V$ operadores auto-adjuntos. Prove que existe base ortonormal de V formada por autovetores comuns a S e T se, e só se, $S \circ T = T \circ S$.

6. Seja $M_n(\mathbb{C})$ o espaço vetorial complexo das matrizes $n \times n$. Prove que $\langle A, B \rangle = tr(AB^*)$ é um produto interno em $M_n(\mathbb{C})$ e ache o complemento ortogonal do subespaço das matrizes diagonais (Obs. $B^* = \overline{B}^t$).

7. Seja W um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial V munido de produto interno. Se $E : V \longrightarrow W$ é a projeção ortogonal de V sobre W, prove que $\langle E(u), v \rangle = \langle u, E(v) \rangle$ para $u, v \in V$ quaisquer.

8. Sejam $V = W_1 \oplus W_2$, $\langle , \rangle_1$ e $\langle , \rangle_2$ produtos internos em $W_1$ e $W_2$ respectivamente. Mostre que existe um único produto interno $\langle , \rangle$ em V tal que $W_2 = W_1^{\perp}$ e $\langle u, v \rangle = \langle u, v \rangle_k$ quando $u, v \in W_k,\ k = 1, 2$.

9. Seja V um espaço vetorial complexo com produto interno. Prove que $T : V \longrightarrow V$ linear é auto-adjunto se, e só se, $\langle Tv, v \rangle$ é real para todo $v \in V$.

# Capítulo 8

# Operadores Unitários e Normais

## 8.1 Definições

**Definição 8.1** *Sejam V, W espaços vetoriais sobre $\mathbb{K}$, munidos de produto interno. Dizemos que $T : V \longrightarrow W$ é uma <u>isometria</u> se T é linear bijetora e $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$ quaisquer que sejam $u, v \in V$.*

*Assim, uma isometria é um isomorfismo que preserva o produto interno.*

**Proposição 8.1** *Seja V um espaço vetorial com produto interno. Então:*
$4\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2$ *se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.
$4\langle u, v\rangle = \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\langle u - iv\rangle^2$ *se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, *quaisquer que sejam* $u, v \in V$.
**Dem.** *Exercício.*

**Proposição 8.2** *Sejam V, W espaços vetoriais de mesma dimensão <u>finita</u> sobre $\mathbb{K}$, munidos de produto interno, e $T : V \longrightarrow W$ linear. São equivalentes:*
$(a)\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$; $(b)\|Tv\| = \|v\|$;
$(c)$ *T é isometria;* $(d)$ *T leva base ortonormal de V em base ortonormal de W;*
*(e) T leva alguma base ortonormal de V em base ortonormal de W.*

**Dem.** $(a) \Rightarrow (b)$*: Óbvio.*
$(b) \Rightarrow (c)$*: se* $v \neq 0$ *então* $T(v) \neq 0$*, donde T é injetora e, como* dim $V =$ dim $W$*, T é bijetora. Pela proposição 8.1, e pela hipótese, temos (no caso* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*):*
$4\langle Tu, Tv\rangle = \|T(u + v)\|^2 - \|T(u - v)\|^2 + i\|T(u + iv)\|^2 - i\|T(u - iv)\|^2 =$
$= \|u + v\|^2 - \|u - v\|^2 + i\|u + iv\|^2 - i\|u - iv\|^2 = 4\langle u, v\rangle$, *donde* $\langle Tu, Tv\rangle =$
$\langle u, v\rangle$*. Portanto, T é isometria.*

*(c) $\Rightarrow$ (d): seja $(v_1, ..., v_n)$ base ortonormal de $V$. Como $T$ é isomorfismo, $(Tv_1, ..., Tv_n)$ é base de $W$. Do fato de ser $\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, resulta que essa base de $W$ é ortonormal.*
*(d) $\Rightarrow$ (e): Óbvio.*
*(e) $\Rightarrow$ (a): seja $(v_1, ..., v_n)$ base ortonormal de $V$ tal que $(Tv_1, ..., Tv_n)$ seja base ortonormal de $W$. Então:*

$$\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}.$$

*Se $u = a_1v_1 + ... + a_nv_n$ e $v = b_1v_1 + ... + b_nv_n$, então:*
$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}$ e $\langle Tu, Tv \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} a_iT(v_i), \sum_{j=1}^{n} b_jT(v_j) \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_i\overline{b_j}\langle Tv_i, Tv_j \rangle =$
$= \sum_{i,j=1}^{n} a_i\overline{b_j}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_i\overline{b_i}.$
*Portanto,*

$$\langle Tu, Tv \rangle = \langle u, v \rangle$$

**Corolário 8.2.1** *Sejam $V$, $W$ espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, munidos de produto interno. $V$ e $W$ são isométricos (isto é, existe isometria $T : V \longrightarrow W$) se, e só se, $\dim V = \dim W$.*

**Dem.** *Sejam $(v_1, ..., v_n)$ e $(w_1, ..., w_n)$ bases ortonormais de $V$ e $W$, respectivamente. Definamos $T : V \longrightarrow W$ linear por $T(v_i) = w_i,\ 1 \leq i \leq n$. Então $T$ é isometria. A recíproca é imediata.*

**Definição 8.2** *Sejam $V$ um espaço vetorial com produto interno $\langle , \rangle$ e $T : V \longrightarrow V$ linear. Dizemos que $T$ é um operador unitário se $T$ é uma isometria.*

*No caso de $V$ ter dimensão finita, a proposição 8.2 mostra que $T$ é unitário se, e só se, preserva o produto interno. No caso em que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ um operador unitário é usualmente chamado de ortogonal.*

**Exemplo 8.1.1** *Seja $V_1 = C^0([0,1], \mathbb{R})$ o espaço vetorial real das funções contínuas $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ com o produto interno $\langle f, g \rangle_1 = \int_0^1 f(t)g(t)e^{-t^2}dt$, e seja $V_2 = C^0([0,1], \mathbb{R})$ com o produto interno $\langle f, g \rangle_2 = \int_0^1 f(t)g(t)dt$. A aplicação $T : V_1 \longrightarrow V_2$ definida por $(Tf)(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}f(t),\ t \in [0,1]$, é linear bijetora e preserva o produto interno pois $\langle Tf, Tg \rangle_2 = \int_0^1 e^{-t^2}f(t)g(t)dt = \langle f, g \rangle_1$. Portanto, $T : V_1 \longrightarrow V_2$ é uma isometria.*

**Proposição 8.3** *Sejam $V$ um espaço vetorial com produto interno, de dimensão finita e $T : V \longrightarrow V$ linear. $T$ é unitário se, e só se, $T^* \circ T = I(= T \circ T^*)$.*

**Dem.** *$T$ é unitário se, e só se, $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$ para todo $u, v \in V$, o que equivale a $\langle T^*Tu, v\rangle = \langle u, v\rangle$ e, portanto, equivale a $T^* \cdot T = I$.*

**Definição 8.3** *Dizemos que $A \in M_n(\mathbb{K})$ é unitária se $A^*A = I_n$. Lembremos que $A^* = \overline{A^t}$. Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ temos $A^* = A^t$ e é usual dizer que $A$ é ortogonal se $A^tA = I_n$.*

**Corolário 8.3.1** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno e $T : V \longrightarrow V$ linear. $T$ é unitário se, e só se, a matriz de $T$ em alguma (ou toda) base ortonormal de $V$ é uma matriz unitária.*
**Dem.** *Imediata.*

**Exemplo 8.1.2** *Consideramos o $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual. Um movimento rígido é uma aplicação $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\|Tu - Tv\| = \|u - v\|$ para todo $u, v \in \mathbb{R}^n$. Por exemplo, $T_{v_0}(v) = v + v_0$, onde $v_0 \in \mathbb{R}^n$ é fixo, ou seja, uma translação, é um movimento rígido.*
*(a) Vamos mostrar que se $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um movimento rígido tal que $T(0) = 0$, então $T$ é linear e ortogonal. Observemos que, neste caso, $\|Tu\| = \|T(u) - T(0)\| = \|u - 0\| = \|u\|$. Além disso,*

$$\|Tu - Tv\|^2 = \langle Tu - Tv, Tu - Tv\rangle = \|Tu\|^2 + \|Tv\|^2 - 2\langle Tu, Tv\rangle.$$

*Por outro lado, $\|Tu - Tv\|^2 = \|u - v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u, v\rangle$.*
*Resulta: $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$, ou seja, se $T$ é movimento rígido e $T(0) = 0$, então $T$ preserva o produto interno.*
*Temos:*

$$\|T(u+v)-T(u)-T(v)\|^2 = \|T(u+v)\|^2+\|Tu\|^2+\|Tv\|^2-2\langle T(u+v), T(u)\rangle-$$

$$-2\langle T(u+v), T(v)\rangle + 2\langle Tu, Tv\rangle = \|u+v\|^2 + \|u\|^2 + \|v\|^2 - 2\langle u+v, u\rangle-$$

$$-2\langle u+v, v\rangle + 2\langle u, v\rangle = 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle - 2\|u\|^2 - 2\|v\|^2 - 4\langle u, v\rangle+$$

$+2\langle u, v\rangle = 0$. *Logo: $T(u + v) = T(u) + T(v)$.*
*Analogamente,*

$$\|T(av)-aT(v)\|^2 = \|T(av)\|^2+a^2\|Tv\|^2-2a\langle T(av), T(v)\rangle = \|av\|^2+a^2\|v\|^2-$$

$-2a\langle av, v\rangle = 0$.
*Logo:* $T(av) = aT(v), \quad a \in \mathbb{R}$.
*Portanto, $T$ é uma aplicação linear ortogonal.*

*(b) Sejam $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ movimento rígido, $T(0) = v_0$ e $T_{-v_0}(v) = v - v_0$. A composta de movimentos rígidos é um movimento rígido, como é fácil de se verificar, de modo que $L = T_{-v_0} \circ T$ é um movimento rígido e $L(0) = T_{-v_0}(T(0)) = T_{-v_0}(v_0) = 0$. Pela parte (a) vem que $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é um operador ortogonal. Como $(T_{-v_0})^{-1} = T_{v_0}$ e $L = T_{-v_0} \circ T$, vem $L = T_{-v_0}^{-1} \circ T$, donde $T = T_{v_0} \circ L$, ou seja, todo movimento rígido é a composta de uma translação com um operador ortogonal:*

$$T(v) = L(v) + v_0, \qquad \textit{para todo } v \in \mathbb{R}^n.$$

**Definição 8.4** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, munido de um produto interno e $T : V \longrightarrow V$ linear. Dizemos que $T$ é normal se $T$ comuta com seu adjunto, isto é, se $T \circ T^* = T^* \circ T$. É claro que todo operador auto-adjunto é normal, bem como todo operador unitário; é claro também que se $T : V \longrightarrow V$ é normal e $a \in \mathbb{K}$, então $aT$ é normal. Em geral, a soma e o produto (composta) de operadores normais não são normais, mas vale o seguinte resultado.*

**Proposição 8.4** *Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, munido de um produto interno e $T_1, T_2 : V \longrightarrow V$ operadores normais. Se $T_1 \circ T_2^* = T_2^* \circ T_1$ (ou $T_2 \circ T_1^* = T_1^* \circ T_2$), então $T_1 + T_2$ e $T_1 \circ T_2$ são operadores normais.*

**Dem.** *É claro que $T_1 \circ T_2^* = T_2^* \circ T_1$ se, e só se, $T_2 \circ T_1^* = T_1^* \circ T_2$.*
*Temos:*

$$(T_1+T_2)(T_1+T_2)^* = (T_1+T_2)(T_1^*+T_2^*) = T_1 \circ T_1^* + T_1 \circ T_2^* + T_2 \circ T_1^* + T_2 \circ T_2^*.$$

*E:*

$$(T_1+T_2)^* \cdot (T_1+T_2) = (T_1^*+T_2^*)(T_1+T_2) = T_1^* \circ T_1 + T_1^* \circ T_2 + T_2^* \circ T_1 + T_2^* \circ T_2.$$

*Como $T_1 \circ T_1^* = T_1^* \circ T_1$, $T_2 \circ T_2^* = T_2^* \circ T_2$, $T_1 \circ T_2^* = T_2^* \circ T_1$ e $T_2 \circ T_1^* = T_1^* \circ T_2$, vem que $T_1 + T_2$ é normal.*
*Temos também:*

$$T_1T_2(T_1T_2)^* = T_1T_2T_2^*T_1^* = T_1T_2^*T_2T_1^* = T_2^*T_1T_1^*T_2 = T_2^*T_1^*T_1T_2 = (T_1T_2)^*T_1T_2,$$

*donde $T_1T_2$ é normal.*

**Proposição 8.5** *Sejam $V$ um espaço vetorial complexo de dimensão finita, munido de um produto interno, e $T : V \longrightarrow V$ linear. $T$ é normal se, e só se, $\|T^*v\| = \|Tv\|$ para todo $v \in V$.*

**Dem.** $\|T^*v\| = \|Tv\|$ *se, e só se,* $\langle T^*v, T^*v\rangle = \langle Tv, Tv\rangle$ *se, e só se,* $\langle TT^*v, v\rangle = \langle T^*Tv, v\rangle$ *para todo* $v \in V$ *se, e só se,* $TT^* = T^*T$ *pela proposição 7.10.*

**Definição 8.5** *Dizemos que $A \in M_n(\mathbb{K})$ é normal se $AA^* = A^*A$.*
**Obs.** *É imediato verificar que $T : V \longrightarrow V$ é normal se, e só se, a matriz de $T$ numa base ortonormal de $V$ é uma matriz normal.*

**Exemplo 8.1.3** $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$ *é normal pois*

$$A^* = \overline{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

*e*

$$AA^* = A^*A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

**Exemplo 8.1.4** $T : V \longrightarrow V$ *é normal* $\Leftrightarrow T - \lambda I$ *é normal,* $\lambda \in \mathbb{K}$.
*Temos:* $(T - \lambda I)(T - \lambda I)^* = (T - \lambda I)(T^* - \overline{\lambda} I) = TT^* - \lambda T^* - \overline{\lambda} T + |\lambda|^2 I.$
$(T - \lambda I)^* \cdot (T - \lambda I) = (T^* - \overline{\lambda} I)(T - \lambda I) = T^*T - \overline{\lambda} T - \lambda T^* + |\lambda|^2 I.$
*Logo,* $T - \lambda I$ *é normal* $\Leftrightarrow TT^* = T^*T \Leftrightarrow T$ *é normal.*

**Exemplo 8.1.5** *Se $V$ é um espaço vetorial complexo, $T : V \longrightarrow V$ é normal e $Tv = \lambda v$, $v \neq 0$, então $T^*v = \overline{\lambda} v$.*
*De fato, se $T$ é normal, então $\|(T - \lambda I)v\| = \|(T^* - \overline{\lambda} I)(v)\| = 0$, donde $T^*v = \overline{\lambda} v$. Se $T$ é unitário então $\langle Tv, Tv\rangle = \langle \lambda v, \lambda v\rangle = |\lambda|^2 \langle v, v\rangle = \langle v, v\rangle$, donde $|\lambda| = 1$.*

**Proposição 8.6** *(Teorema Espectral para Operadores Normais)*
*Sejam $V$ um espaço vetorial de dimensão finita $n \geq 1$ sobre o corpo $\mathbb{K}$, munido de um produto interno, e $T : V \longrightarrow V$ um operador normal. Se o polinômio característico de $T$ tem todas suas raízes em $\mathbb{K}$ (por exemplo, se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), então existe base ortonormal $\mathcal{F}$ de $V$ formada por autovetores de $T$, isto é, a matriz $[T]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}}$ é diagonal.*

**Dem.** *Já vimos que existe base $\mathcal{E}$ de $V$ na qual a matriz de $T$ é triangular superior. Usando o processo de Gram-Schmidt obtemos, a partir de $\mathcal{E}$, uma base ortonormal $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_n)$ de $V$ na qual $[T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}} = B = (b_{ij})$ é triangular superior e temos $[T^*]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}} = B^* = \overline{B^t}$. Como $T \circ T^* = T^* \circ T$ obtemos $BB^* = B^*B$. Comparando os elementos diagonais de $BB^*$ e $B^*B$, vemos que:*

$$\begin{array}{rrrcl} |b_{11}|^2 & +|b_{12}|^2 + ... & +|b_{1n}|^2 & = & |b_{11}|^2 \\ & |b_{22}|^2 + ... & +|b_{2n}|^2 & = & |b_{12}|^2 + |b_{22}|^2 \\ & & & \vdots & \\ & & |b_{nn}|^2 & = & |b_{1n}|^2 + |b_{2n}|^2 + ... + |b_{nn}|^2 \end{array},$$

*donde resulta que $b_{ij} = 0$ para $i \neq j$, ou seja, $B$ é diagonal e $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_n)$ é base ortonormal de $V$ formada por autovetores de $T$.*

**Corolário 8.6.1** *Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $T$ é unitário, então $T$ é diagonalizável.*

**Corolário 8.6.2** *S e $T$ é auto-adjunto, então $T$ é diagonalizável.*

**Obs.** A recíproca da proposição 8.6 também é verdadeira, isto é, se existe base ortonormal $\mathcal{F}$ de V formada por autovetores de T, então T é normal. De fato, se $[T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}} = B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$ então $B^* = \begin{bmatrix} \overline{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \overline{\lambda_n} \end{bmatrix}$ e $BB^* = B^*B = \begin{bmatrix} |\lambda_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |\lambda_n|^2 \end{bmatrix}$ e B é normal, donde T é normal.

## 8.2 Operadores Positivos

**Definição 8.6** *Sejam $V$ um espaço vetorial com produto interno e $T : V \longrightarrow V$ linear. Dizemos que $T$ é positivo, e escrevemos $T > 0$, se $T = T^*$ e $\langle Tv, v\rangle > 0$ para todo $v \neq 0$. Se $T = T^*$ e $\langle Tv, v\rangle \geq 0$ para todo $v \in V$, dizemos que $T$ é não-negativo, e escrevemos $T \geq 0$.*

**Proposição 8.7** *Um operador auto-adjunto $T : V \longrightarrow V$ é positivo (resp. não-negativo) se, e só se, seus autovalores são todos positivos (resp. não-negativos).*
**Dem.** *Se $T > 0$ e $Tv = \lambda v$ com $v \neq 0$, então $\lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle Tv, v\rangle > 0$, donde $\lambda > 0$. Reciprocamente, se os autovalores de $T$ são todos positivos, seja $(v_1, ..., v_n)$ base ortonormal de $V$ tal que $Tv_i = \lambda_i v_i$, $1 \leq i \leq n$. Se*

*$v \in V$ então $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ e $\langle Tv, v\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} \langle a_i\lambda_i v_i, a_j v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i |a_i|^2 > 0$, donde $T > 0$. O caso $T \geq 0$ é análogo.*

**Corolário 8.7.1** *Seja $T \geq 0$. Se $v \in V$ é tal que $\langle Tv, v\rangle = 0$, então $Tv = 0$.*

**Dem.** *Sejam $\lambda_1, ..., \lambda_r$ os autovalores não-nulos de $T$ e $v = \sum_{i=1}^{r} a_i v_i$ como acima. Então, $\langle Tv, v\rangle = 0$ nos dá $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i |a_i|^2 = 0$ donde $a_1 = ... = a_r = 0$, o que implica $Tv = 0$.*

**Corolário 8.7.2** *$T : V \longrightarrow V$ é positivo se, e só se, $T$ é invertível e $T \geq 0$.*
**Dem.** *Se $T > 0$ então $T \geq 0$ e $Tv \neq 0$ para todo $v \neq 0$, donde $T$ é invertível. Reciprocamente, se $T \geq 0$ é invertível então $Tv \neq 0$ para todo $v \neq 0$ e $\langle Tv, v\rangle$ é positivo pelo corolário 8.7.1, donde $T > 0$.*

**Obs.** Seja $T : V \longrightarrow V$, $dim\ V = n$, um operador normal. Se $\mathcal{E} = (u_1, ..., u_n)$ é base ortonormal de V e $A = [T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}$ então $AA^* = A^*A$. Seja $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_n)$ base ortonormal de V formada por autovetores de T. Então:

$$[T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix} = D.$$

Temos:

$$[T]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{F}} = [I]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{F}} \cdot [T]^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}} \cdot [I]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}},$$

donde $P^{-1}AP = D$, onde $P = [I]^{\mathcal{F}}_{\mathcal{E}}$ é a matriz de passagem da base <u>ortonormal</u> $\mathcal{E}$ para a base <u>ortonormal</u> $\mathcal{F}$, ou seja, P é <u>unitária</u>. Resulta que toda matriz <u>normal</u> pode ser <u>unitariamente diagonalizada</u>. Se A é matriz <u>simétrica</u> então P é <u>ortogonal</u>.

**Exemplo 8.2.1** *Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. Então: $det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} =$*
$= (3-\lambda)^2(-3-\lambda)$.

*(a) $\lambda = -3$:*

$$\begin{array}{r} 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0 \end{array},$$

*donde* $\widetilde{X_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ *é autovetor, donde* $X_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ *é autovetor unitário.*

*(b)* $\lambda = 3$*:* $-2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0$*, donde* $x_1 = -x_2 - x_3$ *e* $\widetilde{X_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $\widetilde{X_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *são autovetores. Como* $\widetilde{X_2}$ *e* $\widetilde{X_3}$ *não são ortogonais, usamos Gram-Schmidt para ortogonalizá-los. Obtemos:* $X_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ *e* $X_3 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$.

*Os vetores* $X_1, X_2, X_3$ *formam uma base ortonormal de* $\mathbb{R}^3$ *de modo que* $H = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$ *é matriz ortogonal (*$H^{-1} = H^t$*) tal que* $H^{-1}AH = D = \begin{bmatrix} -3 & & 0 \\ & 3 & \\ 0 & & 3 \end{bmatrix}$.

**Definição 8.7** *Seja* $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{K})$*. Dizemos que* $A$ *é* *<u>positiva</u>* *(resp. não-negativa) se o operador* $T_A : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ $T_A(x) = Ax$*, é positivo (resp. não-negativo). Assim,* $A > 0$ *se, e só se,* $A = \overline{A}^t$ *(*$A$ *é hermitiana) e* $\langle T_A(x), x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i\overline{x_j} > 0$ *para todo* $x = (x_1, ..., x_n) \neq 0$*. Da proposição 8.7 resulta que uma matriz hermitiana é positiva se, e só se, seus autovalores são todos positivos.*

**Definição 8.8** *Uma matriz* $B = (b_{ij})$ *–* $n \times n$ *– chama-se raiz quadrada de* $A = (a_{ij})$ *–* $n \times n$ *– se* $A = B^2$*.*

**Proposição 8.8** *Toda matriz positiva (resp. não-negativa)* $A = (a_{ij})$ *–* $n \times n$ *– tem raiz quadrada positiva (resp. não negativa).*

**Dem.** *Sejam* $\lambda_1, ..., \lambda_n$ *os autovalores de* $A$*, todos positivos. Pelo teorema espectral existe matriz unitária* $P$ *–* $n \times n$ *– tal que* $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$.

*Seja* $B = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \sqrt{\lambda_n} \end{bmatrix}$; *então* $B^2 = D$.

*Seja* $C = PBP^{-1}$, *donde* $C^2 = PB^2P^{-1} = PDP^{-1} = A$, *ou seja, a matriz* $C$ *é raiz quadrada de* $A > 0$, *e* $C > 0$ *pois é auto-adjunta e seus autovalores são positivos.*

**Obs.** Os autovalores de um operador normal, associados a autovalores distintos, são ortogonais. De fato, sejam: $Tv = \alpha v$, $Tu = \beta u$, $\alpha \neq \beta$, $u, v \in V$.
Temos: $\langle Tv, u\rangle - \langle v, T^*u\rangle = 0$, donde $\langle \alpha v, u\rangle - \langle v, \overline{\beta} u\rangle = 0$, donde $(\alpha - \beta)\langle v, u\rangle = 0$, donde $\langle v, u\rangle = 0$ pois $\alpha \neq \beta$.

## 8.3 Matrizes Simétricas Positivas. Decomposição de Cholesky

**Definição 8.9** *Seja* $A = (a_{ij})$ – $n \times n$ – *e* $s \leq n$ *um natural. A submatriz principal de ordem* $s$ *de* $A$ *é a submatriz* $A_s$ *obtida de* $A$ *pela supressão das últimas* $(n - s)$ *linhas e colunas.*

**Exemplo 8.3.1** $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$. *Então:* $A_1 = [a_{11}]$; $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *e* $A_3 = A$.

**Proposição 8.9** *Seja* $A$ *uma matriz simétrica de ordem* $n$. *São equivalentes:*

*(a)* $A$ *é positiva* ($A > 0$), *isto é,* $\langle Ax, x\rangle = x^tAx > 0$ *para todo* $x \neq 0$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

*(b) As submatrizes principais* $A_1, ..., A_n$ *de* $A$ *são todas positivas.*

*(c)* $A$ *pode ser reduzida à forma triangular superior usando-se apenas operações do tipo* $T_{ij}(\lambda)$ *e com pivôs positivos.*

*(d)* $A$ *tem uma fatoração (de Cholesky)* $A = LL^t$ *onde* $L$ *é triangular inferior com elementos diagonais positivos.*

**Dem.**

$(a) \Rightarrow (b)$: *Seja* $1 \leq s \leq n$; *vamos provar que* $A_s > 0$. *Seja* $X_s = (x_1, ..., x_s)^t \neq 0$ *em* $\mathbb{R}^s$ *e* $X = (x_1, ..., x_s, 0, ..., 0)^t \in \mathbb{R}^n$.

*Então:* $X_s^t A_s X_s = X^t AX > 0$, *ou seja,* $A_s > 0$ *(donde det* $A_s > 0$ *já que det* $A_s$ *é o produto dos autovalores de* $A_s$*, todos positivos).*

$(b) \Rightarrow (c)$*: Para simplificar, vamos tomar uma matriz* $4 \times 4$*:*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}.$$

*Por hipótese,* $A_1 > 0$, $A_2 > 0$, $A_3 > 0$, $A_4 = A > 0$. *Em particular, det* $A_1 = a_{11} > 0$ *e podemos usá-lo como pivô, de modo que*

$$A \longrightarrow A^{(1)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \overset{(1)}{a_{22}} & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \\ 0 & \times & \times & \times \end{bmatrix},$$

*onde det* $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & \overset{(1)}{a_{22}} \end{pmatrix} = \text{det } A_2 > 0$, *donde* $\overset{(1)}{a_{22}} = \dfrac{\text{det } A_2}{a_{11}} > 0$, *e podemos usar* $\overset{(1)}{a_{22}}$ *como pivô, obtendo*

$$A \longrightarrow A^{(1)} \longrightarrow A^{(2)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \overset{(1)}{a_{22}} & \times & \times \\ 0 & 0 & \overset{(2)}{a_{33}} & \times \\ 0 & 0 & \times & \times \end{bmatrix}.$$

*Como det* $A_3 = a_{11} \cdot \overset{(1)}{a_{22}} \cdot \overset{(2)}{a_{33}} > 0$, *resulta* $\overset{(2)}{a_{33}} > 0$ *e podemos usá-lo como pivô, obtendo*

$$A \longrightarrow A^{(1)} \longrightarrow A^{(2)} \longrightarrow A^{(3)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & \overset{(1)}{a_{22}} & \times & \times \\ 0 & 0 & \overset{(2)}{a_{33}} & \times \\ 0 & 0 & 0 & \overset{(3)}{a_{44}} \end{bmatrix} = U,$$

*com det* $A_4 = \text{det } A_3 \cdot \overset{(3)}{a_{44}} > 0$, *donde* $\overset{(3)}{a_{44}} > 0$ *e* $U$ *triangular superior com elementos diagonais positivos.*

$(c) \Rightarrow (d)$*: Se* $A$ *pode ser reduzida à forma triangular superior* $U = (u_{ij})$, $u_{kk} > 0$, *usando-se apenas operações elementares do tipo* $T_{ij}(\lambda)$, *então*

*$A = LU$, onde $L$ é triangular inferior com diagonal formada apenas por números 1:*

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \\ e_{21} & & 1 & & \\ ... & ... & ... & \ddots & ... \\ e_{n1} & & e_{n2} & ... & 1 \end{bmatrix} = (e_{ij}),$$

*onde $e_{kk} = 1$ e, para $i > j$, $e_{ij}$ = oposto do multiplicador $\lambda$ usado em $T_{ij}(\lambda)$ (veja a observação no fim do capítulo 5). Então:*

$$A = LU = \begin{bmatrix} 1 & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ e_{21} & & 1 & & \\ ... & ... & ... & \ddots & \\ e_{n1} & & e_{n2} & ... & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & & & & 0 \\ & \ddots & & & \\ & & u_{22} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{u_{12}}{u_{11}} & ... & \frac{u_{1n}}{u_{11}} \\ & \ddots & & \\ & 1 & ... & \frac{u_{2n}}{u_{22}} \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= LDU_1.$$

*Essa decomposição é <u>única</u> pois se fosse $A = L_1D_1U_1 = L_2D_2U_2$ com $L_1, L_2$ triangulares inferiores, $D_1, D_2$ diagonais, $U_1, U_2$ triangulares superiores, $L_1$, $L_2$, $U_1$, $U_2$ com diagonais formadas apenas por números 1, viria $D_2^{-1}L_2^{-1}L_1D_1 = U_2U_1^{-1}$ onde o primeiro membro é triangular inferior e o segundo membro é triangular superior, ambos com diagonal formada apenas por números 1, donde $U_2U_1^{-1} = I_n$, o que implica $U_1 = U_2$ e $D_2^{-1}L_2^{-1}L_1D_1 = I_n$, ou seja, $L_2^{-1}L_1 = D_2D_1^{-1}$, a diagonal do primeiro membro tendo todos os elementos iguais a 1, donde $D_2D_1^{-1} = I_n$, que implica $D_1 = D_2$ e $L_1 = L_2$.*

*Logo, $A = LDU_1$, donde $A^t = U_1^tDL^t = A = LDU_1$, donde $U_1 = L^t$ e $A = LDL^t = LD^{1/2}D^{1/2}L^t = L_1L_1^t$, que é a decomposição de Cholesky.*

*(d) $\Rightarrow$ (a): Temos $A = LL^t = A^t$. Seja $x \neq 0$, donde $y = L^tx \neq 0$ e $x^tAx = x^tLL^tx = y^ty = \|y\|^2 > 0$, ou seja, $A > 0$.*

## 8.4 Teorema dos Valores Singulares

**Lema 8.4.1** *Seja $T : V \longrightarrow W$ uma aplicação linear entre espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, munidos de produto interno. Então $\mathcal{N}(T^*T) = \mathcal{N}(T)$.*

**Dem.** *É claro que $\mathcal{N}(T^*T) \subset \mathcal{N}(T)$. Seja $v \in \mathcal{N}(T^*T)$, isto é, $T^*Tv = 0$, donde $Tv \in \mathcal{N}(T^*) = (Im\ T)^\perp$, donde $Tv \in Im\ T \cap (Im\ T)^\perp$, donde $Tv = 0$, ou seja, $v \in \mathcal{N}(T)$, resultando a tese.*

**Proposição 8.10** *Sejam $V$, $W$ espaços vetoriais de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$, munidos de produto interno, e $T : V \longrightarrow W$ linear. Os operadores $T^*T : V \longrightarrow V$ e $T^*T : W \longrightarrow W$ são não-negativos e têm o mesmo posto de $T$; eles são positivos se, e só se, $T$ é invertível.*

**Dem.** *Como $(T^*T)^* = T^*T$, resulta que $T^*T$ é auto-adjunto; analogamente para $TT^*$. Se $v \in V$, tem-se $\langle T^*Tv, v\rangle = \|Tv\|^2 \geq 0$, donde $T^*T \geq 0$; analogamente para $TT^*$; além disso, $\langle T^*Tv, v\rangle > 0$ se $v \neq 0$ se, e só se, $\|Tv\| > 0$, isto é, se, e só se, $T$ é invertível. Pelo Lema anterior, $\mathcal{N}(T^*T) = \mathcal{N}(T)$, donde resulta posto$(T^*T) =$ dim $V -$ dim $\mathcal{N}(T^*T) =$ $=$ dim $V -$ dim $\mathcal{N}(T) =$ posto$(T) =$ posto$(T^*) =$ posto$(TT^*)$.*

**Corolário 8.10.1** *$T : V \longrightarrow W$ linear é injetora se, e só se, $T^*T$ é invertível; $T$ é sobrejetora se, e só se, $TT^*$ é invertível.*

**Dem.** *$T$ é injetora $\Leftrightarrow$ posto$(T) =$ dim $V \Leftrightarrow$ posto$(T^*T) =$ dim $V \Leftrightarrow$ $T^*T$ é invertível. Analogamente para $TT^*$.*

**Obs.** *Seja $A = (a_{ij})$ – $m \times n$. Se posto$(A) = n$ então $A^*A$ é invertível, donde positiva, e $AA^* \geq 0$. Se posto$(A) = m$ então $AA^* > 0$ e $A^*A \geq 0$.*

**Exemplo 8.4.1** $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *tem posto igual a 2. Então,*

$AA^* = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 11 \end{pmatrix}$ *é positiva e* $A^*A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 13 \end{bmatrix}$ *é não-negativa.*

**Proposição 8.11** *(Teorema dos Valores Singulares)*

*Sejam $U$ e $V$ espaços vetoriais de dimensão <u>finita</u> sobre $\mathbb{K}$, munidos de produto interno, e $T : U \longrightarrow V$ linear de posto igual a $r$. Existem bases ortonormais $\mathcal{E} = (u_1, ..., u_n)$ de $U$, $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_m)$ de $V$ tais que*

$$\begin{array}{lll} Tu_i = \sigma_i v_i & ,1 \leq i \leq r & ; \quad T^*v_i = \sigma_i u_i \quad ,1 \leq i \leq r \\ Tu_j = 0 & ,r+1 \leq j \leq n & ; \quad T^*v_k = 0 \quad ,r+1 \leq k \leq m \end{array},$$

*onde os números $\sigma_1, ..., \sigma_r$ são <u>positivos</u>: são os <u>valores singulares</u> de $T$.*

**Dem.** *$T^*T : U \longrightarrow U$ é não-negativa e tem posto $r$. Pelo teorema espectral existe base ortonormal $\mathcal{E} = (u_1, ..., u_n)$ de $V$ tal que* $[T^*T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & \lambda_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & 0 \end{bmatrix}$,

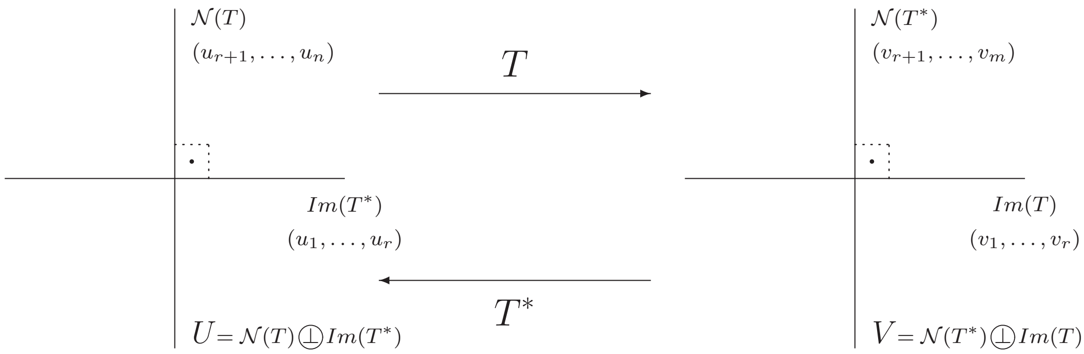
*onde $\lambda_1 = \sigma_1^2, ..., \lambda_r = \sigma_r^2$ são positivos. Então,*

*$(1 \leq i, j \leq r)$ $\langle Tu_i, Tu_j \rangle = \langle T^*Tu_i, u_j \rangle = \sigma_i^2 \cdot \delta_{ij}$, e os vetores $Tu_i, Tu_j$ são 2 a 2 ortogonais e não-nulos, já que $\|Tu_i\| = \sigma_i$ $(1 \leq i \leq r)$. Além disso, $Tu_k = 0$, $r+1 \leq k \leq n$, pois $\mathcal{N}(T) = \mathcal{N}(T^*T)$.*

*Para $1 \leq i \leq r$, seja $v_i = \dfrac{1}{\sigma_i} Tu_i$, donde $\|v_i\| = 1$ e*

$$\begin{array}{ll} Tu_i = \sigma_i v_i & ,1 \leq i \leq r \\ Tu_j = 0 & ,r+1 \leq j \leq n \end{array}.$$

*Os vetores $v_1, ..., v_r$ formam uma base ortonormal de $Im\ T$, que estendemos a uma base ortonormal $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_m)$ de $V$ tomando $(v_{r+1}, ..., v_m)$ base ortonormal de $\mathcal{N}(T^*) = (Im\ T)^{\perp}$. Portanto, $T^*v_k = 0$, $r+1 \leq k \leq m$ e $T^*v_i = \dfrac{1}{\sigma_i} T^*Tu_i = \sigma_i u_i$, $1 \leq i \leq r$. $\mathcal{F}$ é base ortonormal de autovetores de $TT^*$ já que $TT^*v_i = T(\sigma_i u_i) = \sigma_i^2 v_i = \lambda_i v_i$.*




**Obs.** *A aplicação linear $T^+ : V \longrightarrow U$ definida por*

$$T^+(v_i) = \frac{1}{\sigma_i} u_i,\ 1 \leq i \leq r \quad ; \quad T^+(v_k) = 0\ ,\ r+1 \leq k \leq m,$$

*é tal que*

$$\begin{array}{ll} TT^+(v_i) = T\left(\dfrac{1}{\sigma_i} u_i\right) = v_i, & 1 \leq i \leq r \\ TT^+(v_k) = 0, & r+1 \leq k \leq m \\ T^+T(u_i) = T^+(\sigma_i v_i) = u_i, & 1 \leq i \leq r \\ T^+T(u_j) = 0, & r+1 \leq j \leq n \end{array}$$

**Definição 8.10** *$T^+ : V \longrightarrow U$ é a pseudo-inversa de $T : U \longrightarrow V$.*

**Obs.** *Nas condições do Teorema dos Valores Singulares, seja $A = [T]_{\mathcal{F}_1}^{\mathcal{E}_1}$ – $m \times n$ – onde $\mathcal{E}_1$ e $\mathcal{F}_1$ são bases ortonormais de $U$ e $V$, respectivamente. Temos*

$$\sum = \Big[T\Big]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}} = \left[\begin{array}{ccc:c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \\ \hdashline & 0 & & 0 \end{array}\right] = [I]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{F}_1}[T]_{\mathcal{F}_1}^{\mathcal{E}_1}[I]_{\mathcal{E}_1}^{\mathcal{E}} = QAP \ ,$$

*ou seja, existem matrizes* <u>*unitárias*</u> $Q =$ *matriz de passagem de* $\mathcal{F}$ *para* $\mathcal{F}_1$, $P =$ *matriz de passagem de* $\mathcal{E}_1$ *para* $\mathcal{E}$, *tais que*

$$QAP = \sum = \left[\begin{array}{ccc:c} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & \sigma_r & \\ \hdashline & 0 & & 0 \end{array}\right] \ ,$$

*onde* $\sigma_1, ..., \sigma_r$ *são os valores singulares da matriz* $A$ *de posto* $r$.

**Obs.** *Sejam* $V$ *um espaço vetorial de dimensão finita sobre* $(\mathbb{K})$ *munido de produto interno, e* $T : V \longrightarrow V$ *linear* <u>*invertível*</u>*. Pelor Teorema dos Valores Singulares existem bases ortonormais* $\mathcal{E} = (u_1, ..., u_n)$ *e* $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_n)$ *tais que* $T^*Tu_i = \sigma_1^2 u_i$ *e* $Tu_i = \sigma_i v_i, \quad 1 \leq i \leq n$.

*Seja* $H$ *tal que* $H^2 = T^*T$*. Então* $H > 0$*. Defina* $U = TH^{-1} \therefore U^* = H^{-1}T^* \therefore U^*U = H^{-1}T^*TH^{-1} = H^{-1}H^2H^{-1} = I$*, isto é,* $U$ *é unitária e* $T = UH$*, ou seja, toda aplicação linear* <u>*invertível*</u> *é o* <u>*produto*</u> *de uma aplicação* <u>*unitária*</u> *por uma aplicação* <u>*positiva*</u>*.*

## 8.5 Exercícios do Capítulo 8

1. Sejam V um espaço vetorial de dimensão finita, munido de um produto interno , e $T : V \longrightarrow V$ linear. Se $a, b \in \mathbb{K}$ são tais que $|a| = |b|$, prove que $aT + bT^*$ é normal.

2. Seja $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual. Se $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ é um operador unitário (ortogonal) mostre que a matriz de T na base canônica é $\begin{bmatrix} cos\ \theta & -sen\ \theta \\ sen\ \theta & cos\ \theta \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} cos\ \theta & sen\ \theta \\ sen\ \theta & -cos\ \theta \end{bmatrix}$ para algum real $\theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

3. Seja $V = \mathbb{C}^2$ com o produto interno usual. Seja $T : V \longrightarrow V$ o operador linear cuja matriz na base canônica é $A = \begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. Mostre que T é normal e ache uma base ortonormal de V formada por autovetores de T.

4. Ache a decomposição de Cholesky $LL^t$ da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix}$.

5. Seja A – $n \times n$ – (simétrica e) positiva, $A = QDQ^t$ onde Q é ortogonal e D é diagonal. Ache matriz invertível B tal que $A = B^t B$.

6. Seja A – $n \times n$ – (simétrica e) negativa ($A < 0$).
   (a) Qual o sinal de $det\ A$?
   (b) Mostre que as submatrizes principais de A são negativas.
   (c) Mostre que os determinantes das submatrizes principais de A alternam em sinal.

# Capítulo 9

# Formas Bilineares e Quadráticas

## 9.1 Generalidades

**Definição 9.1** *Seja $K$ um corpo de característica $\neq 2$; por exemplo $K = \mathbb{R}$ ou $K = \mathbb{C}$. Sejam $U$, $V$, $W$ espaços vetoriais sobre $K$. Uma aplicação $T : U \times V \longrightarrow W$ é <u>bilinear</u> se $T$ é linear em cada variável separadamente, isto é, se*

$$\begin{array}{ll} T(u_1 + u_2, v) = T(u_1, v) + T(u_2, v); & T(\lambda u, v) = \lambda T(u, v) \\ T(u, v_1 + v_2) = T(u, v_1) + T(u, v_2); & T(u, \lambda v) = \lambda T(u, v) \end{array}$$

*quaisquer que sejam $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in K$.*

*Com as leis usuais de adição e produto por escalar, o conjunto das aplicações bilineares $T : U \times V \longrightarrow W$ é um espaço vetorial sobre $K$, anotado $\mathcal{L}(U, V; W)$. Quando $U = V$ e $W = K$, representamos $\mathcal{L}(V, V; K)$ por $\mathcal{L}_2(V; K)$ e dizemos que $f \in \mathcal{L}_2(V; K)$ é uma <u>forma bilinear</u>.*

**Exemplo 9.1.1** $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longmapsto \langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *é uma forma bilinear em $\mathbb{R}^n$.*

**Exemplo 9.1.2** *Se $f, g \in V^*$ definimos seu <u>produto tensorial</u> $f \otimes g$ e seu <u>produto exterior</u> $f \wedge g$ por:*

$$(f \otimes g)(u, v) = f(u) \cdot g(v) \quad ; \quad (f \wedge g)(u, v) = f(u)g(v) - f(v)g(u).$$

*É fácil ver que $f \otimes g$ e $f \wedge g$ são formas bilineares em $V$.*

**Exemplo 9.1.3** *Se $V = C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R},$ contínua $\}$ e $f, g \in V$, então $(f, g) \longmapsto \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$ é uma forma bilinear em $V$.*

**Exemplo 9.1.4**

$$\phi : \mathcal{L}(U,V) \times \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathcal{L}(U,W)$$
$$(S,T) \longrightarrow \phi(S,T) = T \circ S$$

*é uma aplicação bilinear.*

**Proposição 9.1** *Seja*

$$\begin{array}{rrrl} \phi : \mathcal{L}(U,V;W) \longrightarrow & \mathcal{L}(U,\mathcal{L}(V,W)) & & \\ T \longrightarrow & \phi T : U \longrightarrow & \mathcal{L}(V,W) & \\ & u \longmapsto & \phi T(u): & V \longrightarrow W \\ & & & v \longmapsto \phi T(u)(v) = T(u,v) \end{array}$$

*onde $U$, $V$, $W$ são espaços vetoriais sobre $K$.*

*Então, $\phi$ é um isomorfismo canônico.*

**Dem.** *Seja*

$$\begin{array}{rrl} \psi : \mathcal{L}(U;\mathcal{L}(V,W)) \longrightarrow & \mathcal{L}(U,V;W) & \\ S \longmapsto & \psi S : U \times V \longrightarrow & W \\ & (u,v) \longmapsto & \psi S(u,v) = S(u)(v) \end{array}$$

*É fácil verificar que $\phi$ e $\psi$ estão bem definidas, são lineares, $\phi \circ \psi = id$, $\psi \circ \phi = id$, ou seja, $\phi$ e $\psi$ são isomorfismos e $\psi = \phi^{-1}$.*

**Corolário 9.1.1**

$$\begin{array}{rrrl} \phi : \mathcal{L}_2(V;K) \longrightarrow & \mathcal{L}(V,V^*) & & \\ f \longrightarrow & \phi f : V \longrightarrow & V^* & \\ & u \longmapsto & \phi f(u): & V \longrightarrow K \\ & & & v \longmapsto f(u,v) \end{array}$$

*é um isomorfismo canônico que nos permite identificar $\mathcal{L}_2(V;K)$ com $\mathcal{L}(V,V^*)$.*

**Definição 9.2** *$f \in \mathcal{L}_2(V;K)$ é simétrica se $f(u,v) = f(v,u)$ quaisquer que sejam $u,v \in V$.*

*$f \in \mathcal{L}_2(V;K)$ é antissimétrica se $f(u,v) = -f(v,u)$ quaisquer que sejam $u,v \in V$; neste caso, $f(v,v) = -f(v,v)$ donde $f(v,v) = 0$ para todo $v \in V$, isto é, $f$ é alternada.*

**Obs.** *O conjunto das formas bilineares simétricas (resp. antissimétricas) em $V$ é um subespaço vetorial $\mathcal{S}_2(V;K)$ (resp. $\mathcal{A}_2(V;K)$) de $\mathcal{L}_2(V;K)$ e temos $\mathcal{L}_2(V;K) = \mathcal{S}_2(V;K) \oplus \mathcal{A}_2(V;K)$. De fato, $\mathcal{S}_2(V;K)$ e $\mathcal{A}_2(V;K)$ têm interseção igual a $\{0\}$ e se $f \in \mathcal{L}_2(V;K)$ então $g(u,v) = \frac{1}{2}[f(u,v)+$ $+f(v,u)]$ e $h(u,v) = \frac{1}{2}[f(u,v) - f(v,u)]$ são tais que $g \in \mathcal{S}_2(V;K)$, $h \in \mathcal{A}_2(V;K)$ e $f = g + h$.*

## 9.2 Matriz de uma forma bilinear

Sejam:

- $\mathcal{E} = (u_1, ..., u_m)$ base ordenada de U
- $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_n)$ base ordenada de V
- $f : U \times V \longrightarrow K$ forma bilinear

Se $u \in U$, $v \in V$, $u = \sum_{i=1}^{m} x_i u_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} y_j v_j$, então $f(u, v) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i y_j f(u_i, v_j)$.

Pondo $a_{ij} = f(u_i, v_j)$ vem $f(u, v) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j$. A matriz $A = (a_{ij})$ – $m \times n$ – é chamada de matriz de f em relação às bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$.

Se $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = [u]_{\mathcal{E}}$ e $Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = [v]_{\mathcal{F}}$, então

$$f(u, v) = (x_1, ..., x_m) \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & ... & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = X^t AY.$$

Fixadas as bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$, a aplicação $f \in \mathcal{L}(U, V; K) \longmapsto A \in M_{m \times n}(K)$ é um isomorfismo, como se verifica facilmente, de modo que $dim\ \mathcal{L}(U, V; K) = dim\ U \cdot dim\ V = mn$, em particular, $dim\ \mathcal{L}_2(V; K) = n^2$.

**Obs.** Se $(v_1, ..., v_n)$ é base ordenada de V e $A = (a_{ij})$ com $a_{ij} = f(v_i, v_j)$, vemos que $f \in \mathcal{L}_2(V; K)$ é simétrica se, e só se, $a_{ij} = a_{ji}$ para todo par $(i, j)$.

## 9.3 Mudanças de Bases

Sejam: $\mathcal{E} = (u_1, ..., u_m)$; $\mathcal{E}' = (u'_1, ..., u'_m)$ bases ordenadas de U, $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_n)$, $\mathcal{F}' = (v'_1, ..., v'_n)$ bases ordenadas de V. Então:

$$\begin{array}{c} u'_i = \sum_{r=1}^{m} p_{ri} u_r \\ v'_j = \sum_{s=1}^{n} q_{sj} v_s \end{array},$$

onde P e Q são as matrizes de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{E}'$ e de $\mathcal{F}$ para $\mathcal{F}'$, respectivamente.

Temos:

$$f(u'_i, v'_j) = a'_{ij} = \sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n} p_{ri}q_{sj}a_{rs} = \sum_{s=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{m} p^t_{ir}\cdot a_{rj}\right) q_{sj},$$

donde $A' = P^t \cdot A \cdot Q$, que é a relação entre a matriz $A'$ de $f \in \mathcal{L}(U, V; K)$ nas bases $\mathcal{E}'$ e $\mathcal{F}'$ e a matriz A de f nas bases $\mathcal{E}$ e $\mathcal{F}$. No caso em que $U = V$, $\mathcal{E} = \mathcal{F}$, $\mathcal{E}' = \mathcal{F}'$ e $v'_j = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}v_i$, temos $P = Q$ e $A' = P^t \cdot A \cdot P$.

## 9.4 Formas Quadráticas

**Definição 9.3** *Seja $f \in \mathcal{L}_2(V; K)$. A função $q : V \longrightarrow K$ definida por $q(v) = f(v, v)$ chama-se uma forma quadrática em V. O conjunto $Q(V)$ das formas quadrátivas em V é um espaço vetorial com as leis usuais de adição e produto por escalar. A aplicação $f \in \mathcal{L}_2(V; K) \longmapsto q \in Q(V)$ é linear sobrejetora, mas não é injetora. Se $g(u, v) = \frac{1}{2}[f(u, v) + f(v, u)]$, então g é simétrica e $g(v, v) = f(v, v) = q(v)$ de modo que podemos sempre supor que a forma bilinear que define q é simétrica e a aplicação $g \in \mathcal{L}_2(V; K) \longmapsto q \in Q(V)$ é bijetora. Para obter g a partir de q, observemos que*

$$q(u + v) = g(u + v, u + v) = g(u, u) + g(v, v) + 2g(u, v),$$

*donde $g(u, v) = \frac{1}{2}[q(u+v)-q(u)-q(v)]$; g é a forma polar de q. Se $A = (a_{ij})$ – $n\times n$ – é a matriz de g na base $\mathcal{E}$ de V e se $X = [v]_{\mathcal{E}}$, então $q(v) = X^t\cdot A\cdot X$, e dizemos também que A é matriz de q na base $\mathcal{E}$.*

**Exemplo 9.4.1** *$q : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $q(x) = q(x_1, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n}(x_i)^2$ é uma forma quadrática em $\mathbb{R}^n$.*

**Exemplo 9.4.2** *$q : C^0([0, 1], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $q(f) = \int_0^1 [f(t)]^2 dt$ é uma forma quadrática em $C^0([0, 1], \mathbb{R})$.*

## 9.5 Formas Bilineares Simétricas Reais

**Proposição 9.2** *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita, munido de um produto interno. Para cada forma bilinear $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ existe* *uma e uma única aplicação <u>linear</u> $F : V \longrightarrow V$ tal que $f(u,v) = \langle u, F(v)\rangle$ para $u, v \in V$ quaisquer.*

**Dem.** *Seja $v \in V$ arbitrário. A função $u \in V \longmapsto f(u,v)$ é uma forma linear em V, isto é, um elemento de $V^*$. Portanto, existe um e um único $\zeta = F(v) \in V$ tal que $f(u,v) = \langle u, \zeta\rangle = \langle u, F(v)\rangle$, e obtemos $F : V \longrightarrow V$.*

*Se $u, v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, temos:*

$$\langle u, F(v_1 + \lambda v_2)\rangle = f(u, v_1 + \lambda v_2) = f(u, v_1) + \lambda f(u, v_2) =$$
$$= \langle u, F(v_1)\rangle + \lambda\langle u, F(v_2)\rangle = \langle u, F(v_1) + \lambda F(v_2)\rangle,$$

*resultando $F(v_1 + \lambda v_2) = F(v_1) + \lambda F(v_2)$, donde F é linear.*

**Proposição 9.3** *Seja $q : V \longrightarrow \mathbb{R}$ uma forma quadrática definida num espaço vetorial real V de dimensão <u>n</u> munido de um produto interno. Existe base ortonormal $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ de V relativa à qual $q(v) = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2$, onde $v = x_1 u_1 + ... + x_n u_n$, e $\lambda_1, ..., \lambda_n$ são os autovalores de <u>q</u>.*

**Dem.** *Seja $f : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ bilinear simétrica tal que $q(v) = f(v,v)$ para $v \in V$ qualquer, e seja $F : V \longrightarrow V$ linear tal que $f(u,v) = \langle u, F(v)\rangle$ para $u, v \in V$ quaisquer. Se $\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n)$ é base ortonormal de V então $f(v_i, v_j) = \langle v_i, F(v_j)\rangle$ mostra que a matriz de f na base $\mathcal{E}$ coincide com a matriz de F na mesma base. Resulta que $\phi : f \in \mathcal{L}_2(V;\mathbb{R}) \longmapsto F \in \mathcal{L}(V)$ é um isomorfismo e que f é <u>simétrica</u> se, e só se, F é <u>auto-adjunta</u>. Neste caso, existe base ortonormal de V formada por autovetores de F (ou de f, ou de q), isto é, existe base ortonormal $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ tal que $f(u_i, u_j) = \langle u_i, F(u_j)\rangle = \lambda_j \delta_{ij}$. Se $v = \sum_{i=1}^{n} x_i u_i$ então*

$$q(v) = f(v,v) = \sum_{i,j=1}^{n} f(u_i, u_j) x_i x_j = \sum_{i,j} \lambda_j \delta_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (x_i)^2 = \lambda_1 x_1^2 + ... + \lambda_n x_n^2,$$

*combinação de quadrados.*

**Corolário 9.3.1** *Nas condições da proposição 9.3, existe base ortonormal $\mathcal{G} = (w_1, ..., w_n)$ de V relativa à qual se tem*

$$q(v) = \sum_{i=1}^{s} (x_i)^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} (x_j)^2$$

*para todo $v = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i \in V$.*

**Dem.** *Reordenamos a base* $\mathcal{F} = (u_1, ..., u_n)$ *da proposição 9.3 de modo que*

$$\begin{array}{ll} f(u_i,u_i) = q(u_i) = \lambda_i > 0 & \text{para } 1 \le i \le s \\ f(u_j,u_j) = q(u_j) = \lambda_j < 0 & \text{para } s+1 \le j \le s+t \\ f(u_k,u_k) = q(u_k) = 0 & \text{para } s+t+1 \le k \le n. \end{array}$$

*Pondo:*

$$\begin{array}{ll} w_i = \dfrac{u_i}{\sqrt{\lambda_i}} & \text{para } 1 \le i \le s \\ w_j = \dfrac{u_j}{\sqrt{-\lambda_j}} & \text{para } s+1 \le j \le s+t \\ w_k = u_k & \text{para } s+t+1 \le k \le n, \end{array}$$

*obtemos*

$$\begin{array}{ll} f(w_i,w_i) = 1 & \text{para } 1 \le i \le s \\ f(w_j,w_j) = -1 & \text{para } s+1 \le j \le s+t \\ f(w_k,w_k) = 0 & \text{para } s+t+1 \le k \le n. \end{array}$$

*Portanto, se* $v = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$*, temos* $q(v) = \sum_{i=1}^{s} (x_i)^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} (x_j)^2$.

**Corolário 9.3.2** *Se* $\mathcal{E} = (v_1, ..., v_n)$ *e* $\mathcal{E}' = (v'_1, ..., v'_n)$ *são bases ortonormais de* $V$ *nas quais* $q(v) = \sum_{i=1}^{s} (x_i)^2 - \sum_{j=s+1}^{s+t} (x_j)^2 = \sum_{i=1}^{s'} (x_i)^2 - \sum_{j=s'+1}^{s'+t'} (x_j)^2$ *para* $v = \sum x_i v_i = \sum x_j v'_j$ *qualquer, então* $s = s'$ *e* $t = t'$.

**Dem.** *Sejam:*

$$\begin{array}{l} U = \text{subespaço de } V \text{ gerado por } v_1, ..., v_s \\ W' = \text{subespaço de } V \text{ gerado por } v'_{s'+1}, ..., v'_n. \end{array}$$

*Então:* $\dim U = s$ *e* $\dim W' = n - s'$.

*Se* $v \in U,\ v \neq 0$*, temos* $q(v) > 0$*. Se* $v \in W'$*, então* $q(v) \le 0$*. Resulta que* $U \cap W' = \{0\}$ *e, portanto,*

$$\dim U + \dim W' = \dim(U + W') \le \dim V = n,$$

*donde:* $s + n - s' \le n$*, ou seja,* $s \le s'$.

*Por simetria, obtemos:* $s' \le s$*. Logo,* $s = s'$.

*Como* $s + t = s' + t' = r =$ *posto de* $F$ *(=posto de* $f$*=posto de* $q$*), resulta* $t = t'$.

**Obs.** *O par* $(s, t)$ *é univocamente determinado por* $q$*;* $t$ *é a maior dimensão de um subespaço de* $V$ *restrita ao qual* $\underline{q}$ *é* <u>*negativa*</u>*:* $\underline{t}$ *é a dimensão do* *subespaço de* $V$ *gerado por* $v_{s+1}, ..., v_{s+t}$. *Por definição,* $\underline{t}$ *é o* *índice* *da forma quadrática* $\underline{q}$. *Quando* $q(v) \geq 0$ *para* $v \in V$ *qualquer, dizemos que o* *índice* *de* $q$ *é* *zero*.

**Exemplo:** $q : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$, $q(x, y, z, t) = -x^2 + y^2 + z^2 + t^2$ tem posto $r = 4$ e índice $t = 1$.

Vamos apresentar, por meio de exemplos, o método de Lagrange para a diagonalização de uma forma quadrática.

**Exemplo 9.5.1** $q(x, y, z) = x^2 + z^2 - 4xy + 4xz$.

*Como existe o termo quadrado "puro"* $x^2$ *vamos completar o quadrado:*

$$q(x, y, z) = x^2 - 4x(y-z) + z^2 = [x-2(y-z)]^2 - 4(y-z)^2 + z^2 = (x-2y+2z)^2 - 4y^2 - 3z^2 + 8yz$$

*e a existência de* $y^2$ *nos permite completar o quadrado:*

$$q(x, y, z) = (x - 2y + 2z)^2 - 4(y - z)^2 + z^2$$

*Pondo:*

$$\begin{aligned} u &= x - 2y + 2z \\ v &= y - z, \end{aligned}$$

*obtemos*

$$q(u, v, z) = u^2 - 4v^2 + z^2,$$

*forma de* *posto* $r = 3$ *e* *índice* $t = 1$.

**Exemplo 9.5.2** $q(x, y, z) = 4xy - 2xz + yx$

*Como não existe nenhum quadrado puro, fazemos*

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ y &= u - v, \end{aligned}$$

*donde* $xy = u^2 - v^2$ *e*

$$q(u, v, z) = 4u^2 - 4v^2 - 2z(u + v) + z(u - v) = 4u^2 - 4v^2 - uz - 3vz =$$

$$= 4\left(u^2 - \frac{z}{4}u\right) - 4\left(v^2 + \frac{3z}{4}v\right) = 4\left[\left(u - \frac{z}{8}\right)^2 - \frac{z^2}{164}\right] - 4\left(v + \frac{3z}{8}\right)^2 + \frac{9z^2}{16} =$$

$$4\left(u - \frac{z}{8}\right)^2 - 4\left(v + \frac{3z}{4}v\right)^2 + \frac{z^2}{2}.$$

*Fazendo:* $\alpha = u - \frac{z}{8}$; $\beta = v + \frac{3z}{8}$, *vem:*

$$q(\alpha, \beta, z) = 4\alpha^2 - 4\beta^2 + \frac{z^2}{2},$$

*forma de posto* $r = 3$ *e índice* $t = 1$.

# Capítulo 10

# Miscelânea

## 10.1 Orientação

Seja V um espaço vetorial real, de dimensão finita $n \geq 1$, e seja B o conjunto das bases ordenadas de V.

**Definição 10.1** *Duas bases ordenadas $\mathcal{E} = (u_1, ..., u_n)$ e $\mathcal{F} = (v_1, ..., v_n)$ de V são equivalentes, anotado $\mathcal{E} \sim \mathcal{F}$, se o determinante da matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$ é positivo.*

*Se $v_j = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} p_{ij} u_i$, então a matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$ é a matriz invertível $P = (p_{ij})$ e $\mathcal{E} \sim \mathcal{F}$ se, e só se, det $P > 0$. Observemos que $P = [I]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, onde $I : V \longrightarrow V$ é a identidade.*

**Proposição 10.1** *A relação $\mathcal{E} \sim \mathcal{F}$ é uma relação de equivalência sobre B.*

**Dem.** *(a) $\mathcal{E} \sim \mathcal{E}$, pois det $[I]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} =$ det $I_n = 1 > 0$.*

*(b) $\mathcal{E} \sim \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F} \sim \mathcal{E}$: com efeito, se $P = [I]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, então $P^{-1} = [I]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}$. Portanto, det $P > 0 \Leftrightarrow$ det $P^{-1} > 0$.*

*(c) $\mathcal{E} \sim \mathcal{F}$, $\mathcal{F} \sim \mathcal{G} \Rightarrow \mathcal{E} \sim \mathcal{G}$: sejam $P = [I]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}}$, $Q = [I]_{\mathcal{F}}^{\mathcal{G}}$. A matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{G}$ é $R = [I] = PQ$. Logo, det $R =$ det $P \cdot$ det $Q > 0$.*

**Proposição 10.2** *A relação $\mathcal{E} \sim \mathcal{F}$ determina duas classes de equivalência no conjunto B de todas as bases ordenadas de V.*

**Dem.** *Fixemos uma base $\mathcal{E} = (u_1, ..., u_n)$ em V e seja $\overline{\mathcal{E}} = (-u_1, u_2, ..., u_n)$. A matriz de passagem de $\mathcal{E}$ para $\overline{\mathcal{E}}$ tem determinante igual a*

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = -1,$$

*ou seja, $\mathcal{E}$ e $\overline{\mathcal{E}}$ estão em classes distintas, $B_1$ e $B_2$. Se $\mathcal{F}$ é base ordenada arbitrária de $V$, temos*

$$R = [I]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{F}} = [I]_{\mathcal{E}}^{\overline{\mathcal{E}}} \cdot [I]_{\overline{\mathcal{E}}}^{\mathcal{F}} = PQ,$$

*onde $P$, $Q$ e $R$ são as matrizes de passagem de $\mathcal{E}$ para $\overline{\mathcal{E}}$, de $\overline{\mathcal{E}}$ para $\mathcal{F}$ e de $\mathcal{E}$ para $\mathcal{F}$, respectivamente. Então:*

*det $R$ = det $P\cdot$det $Q = -$det $Q$, donde resulta que ou $\mathcal{F} \in B_1$ ou $\mathcal{F} \in B_2$, ou seja, só existem duas classes de equivalência.*

**Definição 10.2** *Qualquer uma das classes $B_1$ ou $B_2$ diz-se uma orientação de $V$. $V$ possui, portanto, duas orientações.*

**Definição 10.3** *Um espaço vetorial orientado é um espaço vetorial associado a uma de suas orientações. Mais precisamente, é um par $(V, O)$ onde $O$ é uma orientação do espaço vetorial real $V$.*

**Definição 10.4** *Se $(V, O)$ é um espaço vetorial orientado, as bases que pertencem à orientação $O$ chamam-se positivas. As outras são chamadas negativas.*

**Exemplo 10.1.1** *O espaço $\mathbb{R}^n$ possui uma orientação canônica, que é aquela determinada pela base canônica $(e_1, ..., e_n)$.*

**Obs.** O conceito de orientação depende essencialmente da relação de ordem dos números reais, não podendo ser estendido a espaços vetoriais sobre um corpo qualquer.

## 10.2 Volume de Paralelepípedo

Sejam V um espaço vetorial real de dimensão n, munido de um produto interno, e $v_1, ..., v_n \in V$.

**Definição 10.5** *O paralelepípedo de arestas $v_1, ..., v_n$ é o conjunto*

$$P(v_1, ..., v_n) = \{x = t_1v_1 + ... + t_nv_n;\ 0 \leq t_i \leq 1\}.$$

*Seja $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ uma base ortonormal de $V$. Se $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}e_i$, $A = (a_{ij})$ – $n\times n$ – define-se o volume de $P(v_1, ..., v_n)$ por $v\big(P(v_1..., v_n)\big) = |$det $A|$.*

*Se $\mathcal{E}' = (e'_1, ..., e'_n)$ é outra base ortonormal de $V$ e $e'_i = \sum_{k=1}^{n} p_{ki}e_k$, $P = (p_{ij})$ – $n \times n$ – matriz ortogonal, de transição da base $\mathcal{E}$ para a base $\overline{\mathcal{E}}$, então*

$|det\ P| = 1$ *e* $v_j = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} e'_i = \sum_{i=1}^{n} a'_{ij} \sum_{k=1}^{n} p_{ki} e_k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} p_{ki} a'_{ij} e_k = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k,$ *donde* $A = PA'$ *e* $|det\ A| = |det\ A'|$, *o que mostra que* $v\big(P(v_1, ..., v_n)\big)$ *não depende da base ortonormal usada na sua definição.*

**Proposição 10.3** *Seja* $T : V \longrightarrow V$ *linear. Então:*

$$v\big(P(Tv_1, ..., Tv_n)\big) = |det\ T| \cdot v\big(P(v_1, ..., v_n)\big).$$

**Dem.** *Com as notações usadas acima, temos:* $v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, *donde*

$$Tv_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} T(e_i) = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ij} b_{ki} e_k = \sum_{k=1}^{n} \left( \sum_{i=1}^{n} b_{ki} a_{ij} \right) e_k,$$

*onde* $B = [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}$; *portanto,*

$$v\big(P(Tv_1, ..., Tv_n\big) = |det\ BA| = |det\ T||det\ A| = |det\ T| v\big(P(v_1, ..., v_n)\big).$$

## 10.3 Matriz de Gram

Sejam $v_1, ..., v_k \in V$, onde V é um espaço vetorial real de dimensão $\underline{n}$, munido de um produto interno.

Se $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$, a matriz de Gram de $v_1, ..., v_k$ é $G = (g_{ij}) - k \times k$. Seja W um subespaço de dimensão $\underline{k}$ contendo $v_1, ..., v_k$ (se $v_1, ..., v_k$ são LI, W é único). Seja $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ base ortonormal de V tal que $(e_1, ..., e_k)$ seja base ortonormal de W. Então: $v_j = \sum_{i=1}^{k} a_{ij} e_i$, $v\big(P(v_1, ..., v_k)\big) = |det\ A|$ e $v_1, ..., v_k$ são LI $\Leftrightarrow$ $det\ A \neq 0 \Leftrightarrow v\big(P(v_1, ..., v_k)\big) > 0$.

**Proposição 10.4** $v\big(P(v_1, ..., v_k)\big) = \sqrt{det\ G}$.

**Dem.** *Com as notações acima, temos:*

$$g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \langle \sum_{r=1}^{k} a_{ri} e_r, \sum_{s=1}^{k} a_{sj} e_s \rangle = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}^t a_{rj},$$

*donde* $G = A^t A$ *e* $det\ G = (det\ A)^2$, *resultando* $v\big(P(v_1, ..., v_k)\big) = |det\ A| = \sqrt{det\ G}$. *Além disso,* $det\ G \geq 0$, *e* $det\ G = 0 \Leftrightarrow det\ A = 0 \Leftrightarrow v_1, ..., v_k$ *são LD.*

**Obs.** Se $v_1, ..., v_k$ são 2 a 2 ortogonais, então

$$det\ G = \begin{bmatrix} |v_1|^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & |v_k|^2 \end{bmatrix} = |v_1|^2 ... |v_k|^2 = (det\ A)^2,$$

donde $|det\ A| = v\big(P(v_1, ..., v_k)\big) = |v_1|...|v_k|$. Se $\{v_1, ..., v_k\}$ é conjunto ortonormal, então $P(v_1, ..., v_k)$ é o cubo unitário $I_k$ e $v(I_k) = 1$.

## 10.4 Produto Vetorial

Sejam V um espaço vetorial real, de dimensão $(n+1)$, munido de um produto interno $\langle , \rangle$, orientado, e $v_1, ..., v_n \in V$. A função

$$\begin{aligned} f : V &\longrightarrow \ \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ f(x) = det_{\mathcal{E}}(v_1, ..., v_n, x), \end{aligned}$$

onde $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_{n+1})$ é base positiva de V, ortonormal, é linear, donde existe um e um único $u \in V$, $u = v_1 \times ... \times v_n$, tal que $f(x) = \langle u, x \rangle$ para todo $x \in V$. Este vetor $u = v_1 \times ... \times v_n$ chama-se o produto vetorial de $v_1, ..., v_n$.

**Obs.** (a) $u = v_1 \times ... \times v_n$ é forma n-linear dos vetores $v_1, ..., v_n$.

(b) Seja $A = [v_1, ..., v_n]$ a matriz $(n+1) \times n$ cujas colunas são os vetores $v_j$ escritos na base $\mathcal{E}$. Seja $A_{(i)}$ – $n \times n$ – a submatriz obtida de A pela omissão da linha $\underline{i}$. Temos:

$$\langle u, e_j \rangle = det\ [v_1, ..., v_n, e_j] = (-1)^{n+1+j} det\ A_{(j)}.$$

Então:

$$u = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} det\ A_{(i)} \cdot e_i,$$

donde $|u|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} (det\ A_{(i)})^2 \geq 0$ e $|u| = 0 \Leftrightarrow det\ A_{(i)} = 0$ para todo $\underline{i}$, $1 \leq i \leq n+1 \Leftrightarrow posto\ A < n \Leftrightarrow v_1, ..., v_n$ são LD.

(c) $u \perp v_j$ $(1 \leq j \leq n)$ pois $\langle u, v_j \rangle = det(v_1, ..., v_n, v_j) = 0$.

(d) $|u|^2 = det_{\mathcal{E}}[v_1, ..., v_n, u] = v\big(P(u, v_1, ..., v_n)\big) = |u| v\big(P(v_1, ..., v_n)\big)$, donde $|u| = v\big(P(v_1, ..., v_n)\big)$.

(e) $v_1, ..., v_n$ são LI $\Leftrightarrow v\big(P(v_1, ..., v_n)\big) = |u| > 0$. Neste caso, $det(u, v_1, ..., v_n) = |u|^2 > 0$ e $(v_1, ..., v_n, v_1 \times ... \times v_n)$ tem a mesma orientação que $(e_1, ..., e_{n+1})$.

É fácil ver que o produto vetorial $u = v_1 \times ... \times v_n$ é o único vetor de V satisfazendo (c), (d) e (e).

Pode-se representar $u = v_1 \times ... \times v_n$ pelo determinante simbólico

$$\begin{vmatrix} v_{11} & ... & v_{1n} & e_1 \\ v_{21} & ... & v_{2n} & e_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ v_{n+1,n} & ... & v_{n+1,n} & e_{n+1} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{n+1+i} det\ A_{(i)} e_i = u.$$

# Exercícios de Revisão

1. Sejam $p_1, ..., p_n \in P_n(K)$, isto é, polinômios de grau menor que $\underline{n}$. Se, para $j = 1, ..., n$, $p_j(2) = 0$, prove que $\{p_1, ..., p_n\}$ é um conjunto linearmente dependente.

2. Prove que não existe $T : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ linear cujo núcleo seja $\{(x_1, ..., x_5) \in \mathbb{R}^5 | x_1 = x_2 \ e \ x_3 = x_4 = x_5\}$.

3. Seja $T : V \longrightarrow W$ linear, V de dimensão finita. Prove que existe subespaço $U \subset V$ tal que $\mathcal{N}(T) \cap U = \{0\}$ e $Im\ T = T(U)$.

4. Seja $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $T(x_1, ..., x_n) = (x_1 + ... + x_n, ..., x_1 + ... + x_n)$. Ache os autovalores e autovetores de T.

5. Sejam $V = U \oplus W$, $P : V \longrightarrow W$, $P(u + w) = w$, onde $u \in U$ e $w \in W$. Mostre que $\underline{0}$ e $\underline{1}$ são os únicos autovalores de P e ache os autovetores correspondentes.

6. Dê exemplo de um operador linear invertível $T : V \longrightarrow V$, $dim\ V = n$, cuja matriz em alguma base só tem zeros na diagonal principal.

7. Se $a_1, ..., a_n,\ b_1, ..., b_n \in \mathbb{R}$, prove que
$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_j b_j\right)^2 \leq \left(\sum_{j=1}^{n} j \cdot a_j^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{b_j^2}{j}\right).$$

8. Seja $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, $T(z_1, ..., z_n) = (0, z_1, ..., z_{n-1})$. Ache $T^*$.

9. Prove que todo operador auto-adjunto $T : V \longrightarrow V$ tem uma raiz cúbica, $dim\ V = n$.

10. Sejam $T : V \longrightarrow V$ linear, $dim\ V = n$. Prove que V tem base formada por autovetores de T se, e só se, existe produto interno em V que torna T auto-adjunto.

11. Se $T : V \longrightarrow V$ é normal, prove que $Im\ T = Im\ T^*$.

12. Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ prove que todo operador normal $T : V \longrightarrow V$, $dim\ V = n$ tem uma raiz quadrada.

13. Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ e $T : V \longrightarrow V$ operador normal, $dim\ V = n$. Prove que $T = T^* \Leftrightarrow$ todos os autovalores de T são reais.

14. Sejam $T : V \longrightarrow V$ linear, $dim\ V = n$, $T = T^*$. Prove que os valores singulares de T são os módulos de seus autovalores.

15. Prove que todo polinômio mônico é o polinômio característico de algum operador linear. Para isso, considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & ... & 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & ... & 0 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & ... & 0 & 0 & -a_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & ... & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

16. Sejam $T : V \longrightarrow V$, $dim\ V = n$, $T > 0$ e $tr\ T = 0$. Prove que $T = 0$.

17. Sejam $(e_1, ..., e_n)$ base ortonormal de V e $T : V \longrightarrow V$ linear. Prove: $tr(T^*T) = |Te_1|^2 + ... + |Te_n|^2$.

18. Sejam $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, $T : V \longrightarrow V$ linear, $\mathcal{E} = (e_1, ..., e_n)$ base ortonormal de V, e $\lambda_1, ..., \lambda_n$ os autovalores de T. Se $A = [T]_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}} = (a_{ij})$ – $n \times n$ – prove que

$$|\lambda_1|^2 + ... + |\lambda_n|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2.$$

# Referências Bibliográficas

[1] Axler, S. – Linear Algebra Done Right – Springer, New York, 1996.

[2] Gelfand, I. – Lectures on Linear Algebra – Interscience, New York, 1961.

[3] Hoffman, K.; Kunze, R. – Linear Algebra – Prentice-Hall, New Jersey, 1971.

[4] Júdice, E.D. – Introdução à Álgebra Linear – Belo Horizonte, 1960.

[5] Lang, S. – Linear Algebra – Springer, New York, 2004.

[6] Leon, S. – Álgebra Linear – LTC, Rio de Janeiro, 1999.

[7] Lima, E.L. – Álgebra Linear – IMPA, Rio de Janeiro, 1996.

[8] Queysanne, M. – Algèbre – Armand Colin, Paris, 1964.

[9] Simmons, G. – Introduction to Topology and Modern Analysis – McGraw-Hill, New York, 1963.