1) Dado $M_2(\mathbb{R})$, onde $A = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$

1) Construa um isomorfismo entre W e (o $\mathbb{R}$-espaço) $\mathbb{C}$.

Sejam V um espaço vetorial de dimensão n sobre $\mathbb{R}$ e L e $T: V \to V$ lineares. $L \circ T$ e $T \circ L$ tem os mesmos auto valores.

Se $a = 0$ é auto valor de $L \circ T$, existe $u \neq 0$ tal que $LT(u) = 0$ donde $L \circ T$ não é invertível, logo $\det(L \circ T) = \det L . \det T = 0$, donde $\det(T \circ L) = 0$ e $T \circ L$ não é injetiva, donde existe $v \neq 0$ tal que $T(L(v)) = 0$, isto é, $a = 0$ é auto valor de $T \circ L$.

Se $a \neq 0$ é auto valor de $L \circ T$, existe $u \neq 0$ tal que $L(T(u)) = au$. Seja $v = T(u)$, então $T(Lv) = T(au) = av$.

Se fosse $v = T(u) = 0$ então teríamos $LTu = 0$, donde a é autovalor de ToL. Analogamente se para qualquer autovalor de ToL é também autovalor de LoT.

Então: $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, temos que a, b são autovalores p/ T e L.

2) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, ao aplicar um operador em $\mathbb{R}^2$, organizamos os valores de (a, b) em pares ordenados. Formando uma reta no plano.

3) Tomamos um polinômio característico irredutível: (x^2+1).

Base canônica de $\mathbb{R}^2$: $B = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_{B} \xrightarrow{T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{[T]_B}$

$pT(x) = x^2 + 1$

onde $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x, y) \mapsto (-y, x)$

Temos que $[T]_B$ possui um polinômio irredutível.

$p_T(x) = x^2+1$, e não possui raízes nos Reais. Segue que não tem autovalores nos reais.

Assim $p_T(x) = x^2+1$, possui duas raízes complexas: $x = \pm i$, então podemos escrever os autovalores $\mathbb{C}^2$.

portanto $p_T(x) = (x-i).(x+i)$

$$[i Id_2 - T]_C = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}$$

Então $(x,y) \in Aut(T)(i)$, se e somente se

$$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, temos $Aut_T(i) = [(i,+1)]$

Para $Aut(T)(-i) = [(i,-1)]$.

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Assim temos que $B = \{(i,1),(i,-1)\}$ é uma base para $\mathbb{C}^2$ sobre $\mathbb{C}$, e nesta base, T tem sua forma diagonal:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

Se tomarmos dois autovalores para w, sendo $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$.
Assim temos que:

$$w = \begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Então $T(w) = \lambda w$, temos:

$$T(1) = (1-i)\,1 = 1 - i$$
$$T(-1) = (1-1) \cdot -1 = -1 + i$$
$$T(1) = (1+i) \cdot 1 = 1 + i$$
$$T(-1) = (1+i) - 1 = -1 - i$$

Assim temos uma base B', escolhemos λ_2. Assim temos:

$$T(1) = 1 + i$$
$$T(-1) = -1 - i$$

$$B' = \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1-i \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$B' \in R = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

A nova base será dada por:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$B'' = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in W$$

4) Um polinômio $p(x) \in p(K)$ de grau igual a 2 ε irredutível se ele pode ser escrito como produto das diagonais, de uma dada matriz em R^2. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, obtida a partir de

um operador linear T:

$$T(x,y) \to (-y,x)$$

Onde suas raízes não podem ser expressas em $\mathbb{R}$.
Somente em $\mathbb{C}$, sendo:

$$p(x) = q(x).r(x)$$

Onde $q(x)$ e $r(x)$ são polinômios de grau 1.