Formas Quadráticas e Cônicas

Stela Zumerle Soares[1]
(stelazs@gmail.com)

Antônio Carlos Nogueira[2]
(anogueira@ufu.br)

Faculdade de Matemática, UFU, MG

1. Resumo

Nesse trabalho pretendemos apresentar alguns resultados da álgebra linear. Nosso objetivo é exibir os conceitos de formas bilineares e formas quadráticas. Além disso, faremos a classificação das cônicas no plano.

2 - Formas Bilineares

<u>Definição 2.1</u> - Seja V um espaço vetorial sobre o corpo F. Uma forma bilinear sobre V é uma função f, que associa a cada par ordenado de vetores α, β em V, um escalar $f(\alpha, \beta)$ em F, e que satisfaz

$$\begin{aligned} f(c\alpha_1 + \alpha_2, \beta) &= cf(\alpha_1, \beta) + f(\alpha_2, \beta) \\ f(\alpha, c\beta_1 + \beta_2) &= cf(\alpha, \beta_1) + f(\alpha, \beta_2) \end{aligned}.$$

A função nula de $V \times V$ é também uma forma bilinear. Além disso, toda combinação linear de formas bilineares sobre V é uma forma bilinear.
Assim, o conjunto das formas bilineares sobre V é um subespaço vetorial do espaço das funções de $V \times V$ em F.

<u>Exemplo 2.1</u> – Seja V um espaço vetorial sobre o corpo F e sejam L_1 e L_2 funcionais lineares sobre V. Definamos f por

$$f(\alpha, \beta) = L_1(\alpha) L_2(\beta).$$

Fixando β e considerando f como uma função de α, então temos simplesmente um múltiplo escalar do funcional linear L_1.
Com α fixo, f é um múltiplo escalar de L_2.
Assim, é evidente que f é uma forma bilinear sobre V.

<u>Definição 2.2</u> – Seja V um espaço vetorial de dimensão finita e seja $\beta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ uma base ordenada de V. Se f é uma forma bilinear sobre V, a matriz de f em relação à base

---

[1] Bolsista do PET -Matemática da Universidade Federal de Uberlândia
[2] Docente da Faculdade de Matemática da Universidade Federal de Uberlândia

ordenada β é a matriz $n \times n$ A com elementos $A_{ij} = f(\alpha_i, \alpha_j)$. Às vezes indicaremos esta matriz por $[f]_\beta$.

Teorema 2.1 – Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre o corpo F. Para cada base ordenada β de V, a função que associa a cada forma bilinear sobre V sua matriz em relação à base ordenada β é um isomorfismo do espaço $L(V,V,F)$ no espaço das matrizes $n \times n$ sobre o corpo F.

Demonstração: Observamos anteriormente que $f \to [f]_\beta$ é uma correspondência bijetora entre os conjuntos das formas bilineares sobre V e o conjunto de todas as matrizes $n \times n$ sobre F. E isso é uma transformação linear, pois

$$(cf+g)(\alpha_i, \alpha_j) = cf(\alpha_i, \alpha_j) + g(\alpha_i, \alpha_j)$$

Para todos i e j. Isto diz simplesmente que

$$[cf+g]_\beta = c[f]_\beta + [g]_\beta. \blacksquare$$

Corolário – Se $\beta = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$ é uma base ordenada de V e $\beta^* = \{L_1, \cdots, L_n\}$ é a base dual de V^*, então as n^2 formas bilineares

$$f_{ij}(\alpha, \beta) = L_i(\alpha) L_j(\beta) \quad , \quad 1 \le i \le n \quad , \quad 1 \le j \le n$$

formam uma base do espaço $L(V,V,F)$. Em particular, a dimensão de $L(V,V,F)$ é n^2.

Demonstração: A base dual $\{L_1, \cdots, L_n\}$ é definida essencialmente pelo fato de que $L_i(\alpha)$ é a i-ésima coordenada de α em relação à base ordenada β (para todo α em V). Ora, as funções f_{ij} definidas por

$$f_{ij}(\alpha, \beta) = L_i(\alpha) L_j(\beta)$$

são formas bilineares do tipo considerado no exemplo 1. Se

$$\alpha = x_1\alpha_1 + \cdots + x_n\alpha_n \text{ e } \beta = y_1\alpha_1 + \cdots + y_n\alpha_n,$$

então

$$f_{ij}(\alpha, \beta) = x_i y_j.$$

Seja f uma forma arbitrária sobre V e seja A a matriz de f em relação à base ordenada β. Então

$$f(\alpha,\beta)=\sum_{i,j} A_{ij}x_i y_j$$

o que diz simplesmente que

$$f=\sum_{i,j} A_{ij} f_{ij}(\alpha,\beta).$$

Agora é evidente que as n^2 formas f_{ij} formam uma base de $L(V,V,F)$.■

Outra maneira de demonstrar o corolário:
A matriz da forma bilinear f_{ij} em relação à base ordenada β é a matriz "unitária" $E^{i,j}$, cujo único elemento não-nulo é um 1 na linha i e coluna j. Como estas matrizes $E^{i,j}$ constituem uma base do espaço das matrizes $n\times n$, as formas f_{ij} constituem uma base do espaço das formas bilineares. ■

Definição 2.3 – Uma forma bilinear f sobre um espaço vetorial V é dita não-degenerada (ou não-singular) se sua matriz em relação a alguma (toda) base ordenada de V é uma matriz não-singular, ou seja, se $Posto(f)=n$.

2.1 - Formas Bilineares Simétricas e Formas Quadráticas

Nesta seção descreveremos um tipo especial de forma bilinear, as chamadas formas bilineares simétricas.

Definição 2.4 - Seja f uma forma bilinear sobre o espaço vetorial V. Dizemos que f é simétrica se $f(\alpha,\beta)=f(\beta,\alpha)$, para quaisquer vetores α, β em V.

Se V é de dimensão finita, a forma bilinear f é simétrica se, e somente se, sua matriz A em relação a alguma ou (toda) base ordenada é simétrica, isto é, $A=A^t$. Para ver isto, perguntamos quando é que a forma bilinear

$$f(X,Y)=X^tAY$$

é simétrica.
Isto acontece se, e somente se, $X^tAY=Y^tAX$ para todas matrizes-colunas X e Y.
Como X^tAY é uma 1×1 matriz, temos $X^tAY=Y^tA^tX$. Assim, f é simétrica se, e somente se, $Y^tA^tX=Y^tAX$ para todas X,Y. Evidentemente, isto significa apenas que $A=A^t$. Em particular, deve-se notar que se existir uma base ordenada de V em relação à qual f seja representada por uma matriz diagonal, então f é simétrica, pois qualquer matriz diagonal é uma matriz simétrica.

Se f é uma forma bilinear simétrica, a forma quadrática associada a f é a função q de V em F definida por

$$q(\alpha) = f(\alpha,\alpha).$$

Se F é um subcorpo do corpo dos números complexos, a forma bilinear simétrica f é completamente determinada por sua forma quadrática associada, de acordo com a seguinte identidade, conhecida por identidade de polarização:

$$f(\alpha,\beta) = \frac{1}{4}q(\alpha+\beta) - \frac{1}{4}q(\alpha-\beta).$$

Demonstração:

Temos que:

$$\begin{aligned}
&q(\alpha+\beta) = \\
&f(\alpha+\beta,\alpha+\beta) = \\
&f(\alpha+\beta,\alpha) + f(\alpha+\beta,\beta) = \\
&f(\alpha,\alpha) + f(\beta,\alpha) + f(\alpha,\beta) + f(\beta,\beta) = \\
&f(\alpha,\alpha) + 2f(\alpha,\beta) + f(\beta,\beta) = \\
&q(\alpha) + 2f(\alpha,\beta) + q(\beta). \qquad (1)
\end{aligned}$$

Temos também que:

$$\begin{aligned}
&q(\alpha-\beta) = \\
&f(\alpha-\beta,\alpha-\beta) = \\
&f(\alpha-\beta,\alpha) - f(\alpha-\beta,\beta) = \\
&f(\alpha,\alpha) - f(\beta,\alpha) - f(\alpha,\beta) + f(\beta,\beta) = \\
&f(\alpha,\alpha) - 2f(\alpha,\beta) + f(\beta,\beta) = \\
&q(\alpha) - 2f(\alpha,\beta) + q(\beta). \qquad (2)
\end{aligned}$$

Fazendo (1) – (2), obtemos:

$$\begin{aligned}
&q(\alpha+\beta) - q(\alpha-\beta) = \\
&q(\alpha) + 2f(\alpha,\beta) + q(\beta) - q(\alpha) + 2f(\alpha,\beta) - q(\beta) = \\
&4f(\alpha,\beta)
\end{aligned}$$

E então,

$$f(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}(q(\alpha+\beta)-q(\alpha-\beta))$$

$$\Rightarrow f(\alpha,\beta)=\frac{1}{4}q(\alpha+\beta)-\frac{1}{4}q(\alpha-\beta)).\blacksquare \quad (3)$$

Observe que, fazendo (1)+(2), obtemos a identidade do paralelogramo

$$q(\alpha+\beta)+q(\alpha-\beta)=2(q(\alpha)+q(\beta)). \quad (4)$$

Uma classe importante de formas bilineares simétricas consiste dos produtos internos sobre espaços vetoriais reais. Se V é um espaço vetorial real, um produto interno sobre V é um a forma bilinear simétrica f sobre V que satisfaz

$$f(\alpha,\alpha)>0\text{, se } \alpha\neq 0\ . \quad (5)$$

Se f é uma forma bilinear dada pelo produto escalar, então a forma quadrática associada é

$$q(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2\ .$$

Em outras palavras, $q(\alpha)$ é o quadrado do comprimento de α.
Para a forma bilinear $f_A(X,Y)=X^tAY$, a forma quadrática associada é

$$q_A(X)=X^tAX=\sum_{i,j}A_{ij}x_ix_j\ .$$

Uma forma bilinear que satisfaz a equação (5) é dita positiva definida. Assim, um produto interno sobre um espaço vetorial real é uma forma bilinear simétrica positiva definida sobre aquele espaço. Note que, um produto interno é não degenerado.

Dois vetores α,β são ditos ortogonais em relação ao produto interno f se $f(\alpha,\beta)=0$. A forma quadrática $q(\alpha)=f(\alpha,\alpha)$ toma apenas valores não-negativos e $q(\alpha)$ é usualmente considerado como o quadrado do comprimento de α.

Observe que se f é uma forma bilinear simétrica sobre um espaço vetorial V, é conveniente dizer que α e β são ortogonais em relação à f se $f(\alpha,\beta)=0$. Mas não é aconselhável considerar $f(\alpha,\alpha)$ como sendo o quadrado do comprimento de α. Por exemplo, se V é um espaço vetorial complexo, podemos ter $f(\alpha,\alpha)=\sqrt{-1}=i$, ou num espaço vetorial real $f(\alpha,\alpha)=-2$.

Teorema 2.2 – Seja V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo de característica zero, e seja f uma forma bilinear simétrica sobre V. Então, existe uma base ordenada de V em relação à qual f é representada por uma matriz diagonal.

Demonstração: O que precisamos encontrar é uma base ordenada

$$\beta=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$$

tal que $f(\alpha_i,\alpha_j)=0$ para $i\neq j$, ou seja

$$\begin{pmatrix} f_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & f_{nn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} * & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Se $f=0$ ou $n=1$, o teorema é verdadeiro, pois a matriz 1×1 é uma matriz diagonal.
Assim, podemos supor $f\neq 0$ e $n>1$. Se $f(\alpha,\alpha)=0$ para todo α em V, a forma quadrática q é identicamente 0 e a identidade de polarização mostra que $f=0$, pois $f(\alpha,\alpha)=\frac{1}{4}q(\alpha+\alpha)-\frac{1}{4}q(\alpha-\alpha)$.
Assim, existe um vetor α em V tal que $f(\alpha,\alpha)=q(\alpha)\neq 0$.
Seja W o subespaço unidimensional de V que é gerado por α e seja $W^{\perp}$ (W ortogonal) o conjunto de vetores β em V tais que $f(\alpha,\beta)=0$. Afirmamos agora, que $V=W\oplus W^{\perp}$.
Certamente os subespaços W e $W^{\perp}$ são independentes. Um vetor típico em W é $c\alpha$, onde c é um escalar.
Se $c\alpha$ está, também, em $W^{\perp}$, então $f(c\alpha,c\alpha)=c^2 f(\alpha,\alpha)=0$.
Mas, $f(\alpha,\alpha)\neq 0$, logo $c=0$. Além disso, todo vetor em V é a soma de um vetor em W e um em $W^{\perp}$. De fato, seja γ um vetor arbitrário em V e coloquemos:

$$\beta=\gamma-\frac{f(\gamma,\alpha)}{f(\alpha,\alpha)}\alpha.$$

Então

$$f(\alpha,\beta)=f(\alpha,\gamma)-\frac{f(\gamma,\alpha)}{f(\alpha,\alpha)}f(\alpha,\alpha)$$

E como f é simétrica, $f(\alpha,\beta)=0$, (pois f é diagonal e $\alpha \neq \beta$).
Portanto, β está no subespaço $W^{\perp}$. A expressão

$$\gamma = \frac{f(\gamma,\alpha)}{f(\alpha,\alpha)}\alpha + \beta$$

nos mostra que $V = W \oplus W^{\perp}$.

A restrição de f a $W^{\perp}$ é uma forma bilinear simétrica sobre $W^{\perp}$. Como $W^{\perp}$ tem dimensão $(n-1)$ (pois W tem $\dim = 1$), podemos supor, por indução, que $W^{\perp}$ possua uma base $\{\alpha_2,\cdots,\alpha_n\}$ tal que

$$f(\alpha_i,\alpha_j)=0 \quad , \quad i \neq j\,(i \geq 2, j \geq 2)$$

Colocando $\alpha = \alpha_1$, obtemos uma base $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ de V tal que $f(\alpha_i,\alpha_j)=0$ para $i \neq j$.■

Obs: Em termos das coordenadas dos vetores $\alpha = x_1\alpha_1 + x_2\alpha_2 + \cdots + x_n\alpha_n$ e $\beta = y_1\alpha_1 + y_2\alpha_2 + \cdots + y_n\alpha_n$ relativamente à base $\{\alpha_1,\cdots,\alpha_n\}$ do teorema 2.2 a forma bilinear f se expressa como $f(\alpha,\beta) = \sum \lambda_i x_i y_i$.
Em particular, a forma quadrática q associada a f é dada por uma combinação linear de quadrados:

$$q(\alpha) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2.$$

Os escalares $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ são os autovalores da matriz da forma bilinear.

2.2 – Formas Quadráticas no plano

De acordo com o teorema 1, uma forma quadrática no plano pode ser representada por uma matriz simétrica $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$. Isto é feito da seguinte maneira: a matriz simétrica real $A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ associa ao vetor $v_s = (x,y) \in R^2$, referido à base canônica $S = \{e_1, e_2\}$, ($e_1 = (1,0)$ e $e_2 = (0,1)$), o polinômio $ax^2 + 2bxy + cy^2$ que é um polinômio homogêneo do 2º grau em x e y chamado forma quadrática no plano.

Na forma matricial, este polinômio é representado por:

$$v_s^t A v_s = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

sendo a matriz simétrica A a matriz da forma quadrática.
Assim, a cada vetor v_s corresponde um número real:

$$p = ax^2 + 2bxy + cy^2 .$$

2.2.1 – Redução da Forma Quadrática à Forma Canônica.

A forma quadrática no plano $v_s^t A v_s$ pode ser reduzida através de mudanças de coordenadas à forma:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$$

onde λ_1 e λ_2 são os autovalores da matriz A, e x' e y' as componentes do vetor v na base $P = \{u_1, u_2\}$, isto é, $v_p = (x', y')$, sendo u_1 e u_2 os autovetores associados a λ_1 e λ_2.

Demonstração:
Temos que a matriz P é a matriz mudança de base de P para S, pois:

$$[I]_S^P = S^{-1}P = IP = P$$

E, portanto:

$$v_s = Pv_p$$

logo,

$$v_s^t A v_s = \left(Pv_p\right)^t A\left(Pv_p\right)$$

ou,

$$v_S^t A v_S = v_P^t \left(P^t AP\right) v_P .$$

Como P diagonaliza A ortogonalmente

$$P^t AP = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix};$$

conclui-se que,

$$v_S^t A v_S = v_P^t D v_P \, ,$$

ou,

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

ou ainda,

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 . \quad \blacksquare$$

A forma $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2$ é denominada forma canônica da forma quadrática no plano, ou também, forma quadrática diagonalizada.
O que na verdade acabamos de fazer foi uma mudança de base ou uma mudança de referencial.
Essa mudança de referencial corresponde a uma rotação de um ângulo θ do sistema xOy até o sistema $x'Oy'$. A matriz responsável por essa rotação é a matriz ortogonal P, cujas colunas são os autovetores u_1 e u_2 de A.

3 – Cônicas.

Chama-se cônica a todo conjunto de pontos M do plano cujas coordenadas x e y, em relação à base canônica, satisfazem a equação do 2º grau:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

onde a, b, c não são todos nulos.

3.1- Equação reduzida de uma Cônica.

Dada a cônica C de equação

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \quad (6)$$

queremos, através de mudanças de coordenadas, reduzí-la a uma equação de uma forma mais simples, chamada equação reduzida da cônica. Para isto seguimos as seguintes etapas.

1ª etapa: Eliminação do termo em xy:

1º passo: escrever a equação na forma matricial

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0 \quad (7)$$

ou,

$$v_s^t A v_s + N v_s + f = 0 .$$

2º passo: calcular os autovalores λ_1 e λ_2 e os autovetores unitários $u_1 = (x_{11}, x_{12})$ e $u_2 = (x_{21}, x_{22})$ da matriz simétrica A.

3º passo: substituir na equação (7) a forma quadrática:

$$v_s^t A v_s = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ pela forma canônica}$$

$$v_P^t D v_P = \begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \text{ e}$$

$$v_s = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ por } P v_P = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

tendo o cuidado para que $\det(P) = 1$, a fim de que essa transformação seja uma rotação. Assim, a equação (7) se transforma em:

$$\begin{pmatrix} x' & y' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{11} & x_{21} \\ x_{12} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + f = 0$$

ou,

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + px' + qy' + f = 0 \quad (8)$$

que é a equação da cônica dada em (7), porém referida ao sistema $x'Oy'$, cujos eixos são determinados pela base $P = \{u_1, u_2\}$.

Observe que enquanto a equação (7) apresenta o termo misto xy, a equação (8) é desprovida dele.

Portanto da equação (7) para a (8) ocorreu uma simplificação.

2ª etapa: Translação de eixos:

Conhecida a equação da cônica

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + px' + qy' + f = 0. \quad (9)$$

Para se obter a equação reduzida efetua-se uma nova mudança de coordenadas, que consiste na translação do último referencial $x'Oy'$ para o novo, o qual denominaremos $xO'y$. A seguir é feita a análise das duas possibilidades:

(I) Supondo λ_1 e λ_2 diferentes de zero, podemos escrever:

$$\lambda_1\left(x'^2 + \frac{p}{\lambda_1}x'\right) + \lambda_2\left(y'^2 + \frac{q}{\lambda_2}y'\right) + f = 0$$

$$\lambda_1\left(x'^2 + \frac{p}{\lambda_1}x' + \frac{p^2}{4\lambda_1^2}\right) + \lambda_2\left(y'^2 + \frac{q}{\lambda_2}y' + \frac{q^2}{4\lambda_2^2}\right) + f - \frac{p^2}{4\lambda_1} - \frac{q^2}{4\lambda_2} = 0$$

$$\lambda_1\left(x' + \frac{p}{2\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2\left(y' + \frac{q}{2\lambda_2}\right)^2 + f - \frac{p^2}{4\lambda_1} - \frac{q^2}{4\lambda_2} = 0.$$

Fazendo:

$$f - \frac{p^2}{4\lambda_1} - \frac{q^2}{4\lambda_2} = -F$$

e por meio das fórmulas de translação:

$$X = x' + \frac{p}{2\lambda_1} \qquad \text{e} \qquad Y = y' + \frac{q}{2\lambda_2}$$

vem,

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 - F = 0$$
$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F. \quad (10)$$

A equação (10) é a equação reduzida de uma cônica de centro, e como se vê, o 1º membro é a forma canônica da forma quadrática do plano.

(II) Se um dos autovalores for igual a zero, $\lambda_1 = 0$, por exemplo, a equação (9) fica:

$$\lambda_2 y'^2 + px' + qy' + f = 0$$

ou seja,

$$\lambda_2\left(y'^2 + \frac{q}{\lambda_2}y'\right) + px' + f = 0$$

$$\lambda_2\left(y'^2 + \frac{q}{\lambda_2}y' + \frac{q^2}{4\lambda_2^2}\right) + px' + f - \frac{q^2}{4\lambda_2} = 0$$

$$\lambda_2\left(y' + \frac{q}{2\lambda_2}\right)^2 + p\left(x' + \frac{f}{p} - \frac{q^2}{4p\lambda_2}\right) = 0\,.$$

Fazendo, por meio de uma translação:

$$X = x' + \frac{f}{p} - \frac{q^2}{4p\lambda_2} \qquad \text{e} \qquad Y = y' + \frac{q}{2\lambda_2}$$

vem,

$$\lambda_2 Y^2 + pX = 0\,. \qquad (11)$$

A equação (11) é a equação reduzida de uma cônica sem centro.

Se $\lambda_2 = 0$, a equação (9) fica:

$$\lambda_1 x'^2 + px' + qy' + f = 0$$

$$\lambda_1\left(x'^2 + \frac{p}{\lambda_1}x'\right) + qy' + f = 0$$

$$\lambda_1\left(x'^2 + \frac{p}{\lambda_1}x' + \frac{p^2}{4\lambda_1^2}\right) + qy' + f - \frac{p^2}{4\lambda_1} = 0$$

$$\lambda_1\left(x' + \frac{p}{2\lambda_1}\right)^2 + q\left(y' + \frac{f}{q} - \frac{p^2}{4q\lambda_1}\right) = 0\,.$$

Fazendo por meio de uma translação:

$$Y = y' + \frac{f}{p} - \frac{p^2}{4q\lambda_1} \qquad \text{e} \qquad X = x' + \frac{p}{2\lambda_1}$$

vem,

$$\lambda_1 X^2 + qY = 0\,.$$

3.2- Classificação das Cônicas.

I) A equação reduzida de uma cônica de centro é:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 = F\,.$$

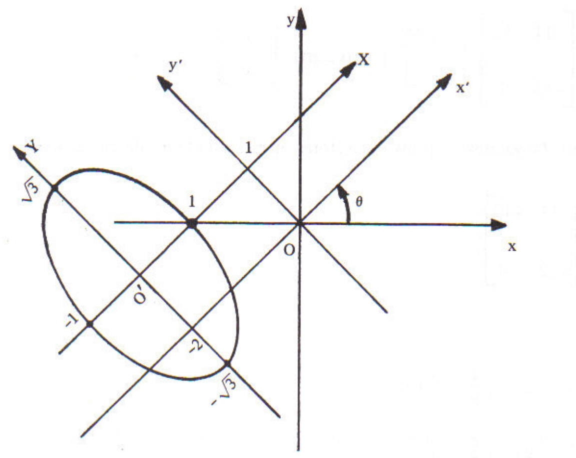
- Se λ_1 e λ_2 forem de mesmo sinal, a cônica será do gênero elipse.
- Se λ_1 e λ_2 forem de sinais contrários, a cônica será do gênero hipérbole.

II) A equação de uma cônica sem centro é:

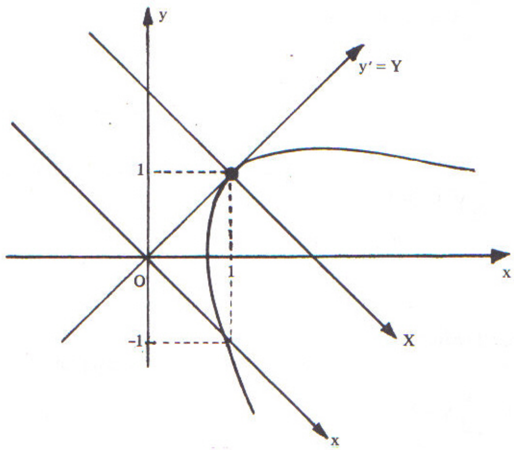
$$\lambda_2 Y^2 + pX = 0 \qquad \text{ou} \qquad \lambda_1 X^2 + qY = 0\,.$$

Uma cônica representada por qualquer uma dessas equações é do gênero parábola.
É usada a mesma classificação para as formas quadráticas.

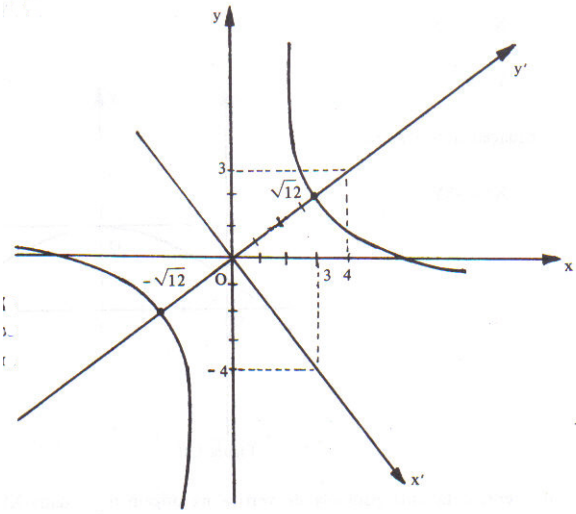
Exemplo 3.1:
a) Para a cônica de equação $2x^2 + 2y^2 + 2xy + 7\sqrt{2}\,x + 5\sqrt{2}\,y + 10 = 0$, a matriz A é dada por $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ e seus autovalores são $\lambda_1 = 3 \; e \; \lambda_2 = 1$. Portanto, pela classificação de cônicas, como os sinais dos autovalores são iguais, a cônica em questão é uma elipse.



b) Para a cônica de equação $x^2 + 2xy + y^2 - 8x + 4 = 0$, a matriz A é dada por $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e como um de seus autovalores é nulo, concluímos que esta cônica é uma parábola.



c) A equação $4x^2 - 3y^2 + 24xy - 156 = 0$, representa uma hipérbole, pois a matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 12 \\ 12 & -3 \end{pmatrix}$ apresenta autovalores de sinais opostos ($\lambda_1 = -12 \; e \; \lambda_2 = 13$).



3. Referências bibliográficas

[1] HOOFMAN, K. & KUNZE, R. **Álgebra Linear**. São Paulo: Polígono, Editora da Universidade de São Paulo,1971.

[2] GREUB, W. **Linear Algebra**. 4ª ed. Nova York: Springer-Verlag, 1974.

[3] STEINBRUCH, A. & WINTERLE, P. **Álgebra Linear**. 2ª ed. São Paulo: Makron Books, 1987.

[4] LIMA, E. L. **Álgebra Linear**. 2ª ed. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1996 (Coleção Matemática Universitária).