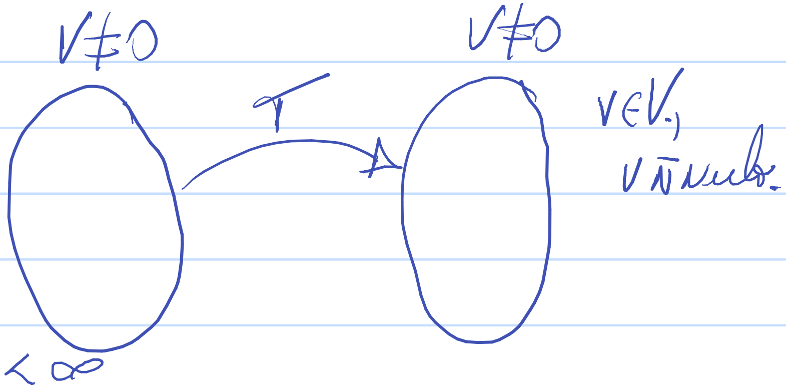
Espaços Vetoriais T-Cíclicos

Sejam $T:V \to V$ um operador linear, onde V é um K-espaço vetorial de dimensão finita, e $v \in V$ um vetor não nulo.



Consideremos os vetores $v, T(v), \ldots, T^i(v), \ldots$, com $i \in \mathbb{N}$. Como a dimensão de V é finita, existe $l \geq 0$ tal que $B = \{v, T(v), \ldots, T^l(v)\}$ é l.i. Mas $\{v, T(v), \ldots, T^{l+1}(v)\}$ é l.d. Logo, existem únicos $\lambda_0, \ldots, \lambda_l$ tais que:

$$T^{l+1}(v) = \sum_{i=0}^{l} \lambda_i T^i(v), \text{ isto é, } \left(T^{l+1} - \sum_{i=0}^{l} \lambda_i T^i\right)(v) = 0$$

Denotando por $m_T(x)$ o polinômio $\left(x^{l+1} - \sum_{i=0}^{l} \lambda_i x^i\right)$, temos que:

$$m_{T|V}(T)(v) = 0$$

Não é difícil ver que $m_{T,v}(x)$ é o polinômio mônico de menor grau que satisfaz esta última relação. Além disto, $m_{T,v}(x)$ divide $m_T(x)$.

$m_T(x)$ = polinômio minimal

Temos que o grau de $m_{T,v}(x) <$ grau de $m_T(x)$, então: $m_{T,v}(x) \mid m_T(x)$

Com as notas anteriores, denote agora por $C_T(v)$ o subespaço de V com base B. É claro que $C_T(v)$ é T-invariante.

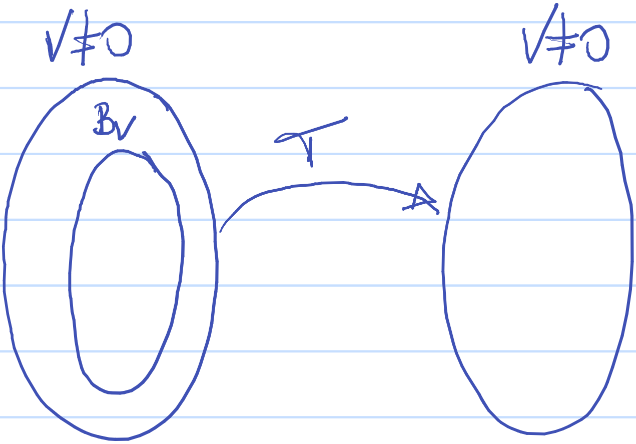
T-invariante: se $w \in W \rightarrow T(w) \in W$.

Observe também que $\dim_K C_T(v) = 1$, se e somente se v for um autovetor de T.

Definição: Sejam V um K-espaço de dimensão $n \geq 1$ e $T \in L(V,V)$.

a) Dizemos que $v \in V$ é um vetor T-cíclico se $V = C_T(v)$ ou, equivalentemente, se:
$\{v, T(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$ for uma base de V.

b) Dizemos que V é T-cíclico se V possuir um vetor T-cíclico.



$\dim_K V = n \geq 1$

$V = C_T(v)$ ou $\{v, T(v), \ldots, T^{n-1}(v)\} = B_V$

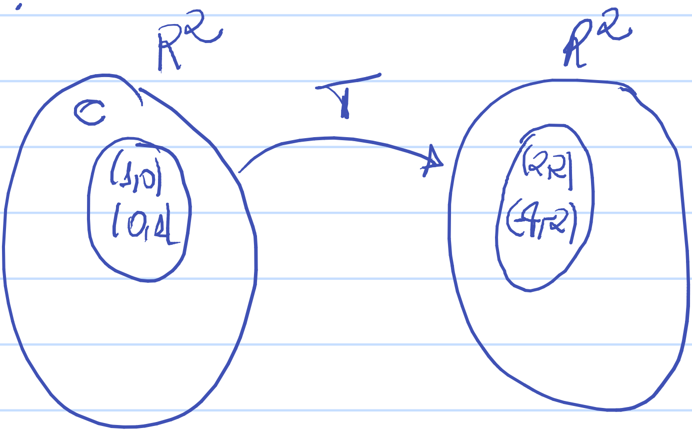
Seja agora $V = C_T(v)$ um espaço T-cíclico de dimensão n e $m_{T,v}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$. Se considerarmos a base $B = \{v, T(v), \ldots, T^{n-1}(v)\}$ como construída então a matriz $[T]_B$ será:

$m_{T,V}(x) = x^N + a_{N-1}x^{N-1} + \dots + a_0$

$$[T]_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & -a_1 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -a_{N-1} \end{bmatrix}$$

Esta matriz é chamada de matriz companheira de $m_{T,V}(x)$.

<u>Exemplo</u>: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ o operador linear dado por $T(x,y) = (2x-4y, 2x-2y)$. Com relação à base canônica $C = \{(1,0),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, a sua matriz será:



$$[T]_C = \begin{array}{cc} T(v_1) & T(v_2) \\ \end{array}$$
$$[T]_C = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad p_T(x) = \det(T - \lambda I)$$

$$p_T(x) = \det\left(\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) =$$

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 2 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\cdot(-2-\lambda) - (-8)$$
$$= \cancel{-4} - \cancel{2\lambda} + \cancel{2\lambda} + \lambda^2 + \cancel{8}$$
$$= \lambda^2 + 4$$

$$p_T(x) = \lambda^2 + 4$$

Para o polinômio minimal, temos:

$$m_T(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i$$

Obs: Revisão - Polinômio minimal:
Seja $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dado por:
$$T(x,y,z,w) = (3x - 4z, 3y + 5z, -z, -w)$$
Obtenha o polinômio minimal de T, T é diagonalizável?

$T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $T(x,y,z,w) = (3x-4z, 3y+5z, -z, -w)$

$$A = [T]_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$, em relação a base canônica de $\mathbb{R}^4$,

$m_T(x) = m_A(x) = ?$

$p_T(x) = \det(x.I - A) = \det$:

$$\det \begin{pmatrix} x-3 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & x-3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & x+1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x+1 \end{pmatrix}$$

diagonal principal

$p_T(x) = (x-3)^2 . (x+1)^2$, os possíveis polinômios minimal de T são:

$$m_T(x) = \begin{cases} f_1(x) = (x-3)(x+1) \\ f_2(x) = (x-3)^2(x+1) \\ f_3(x) = (x-3)(x+1)^2 \\ f_4(x) = p_T(x) = (x-3)^2(x+1)^2 \end{cases}$$

① De acordo com o Teorema de Cayley-Hamilton: Um operador linear $T \in L(V,V)$ é um zero de seu polinômio característico $p_T(x)$, isto é $p_T(T) = 0$.

Temos que T é diagonalizável se e somente se, $m_T(x)$ for do tipo linear.

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\ldots\ldots(x-\lambda_n) = 0, \text{ dado } \lambda_i \in \mathbb{R} \quad i=1,\ldots,n$$

Aplicamos uma opção na matriz A.

$f_1(A) = [A - 3I] \cdot [A + 1I]$, com isso:

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \right) \cdot$$

$$\left[\begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Temos que $m_T(x) = (x-3)(x+1)$, e com isso temos que T é diagonalizável.

- Encontre o polinômio minimal de T.

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix},$$ temos que $p_T(x) =$ $\det(T - \lambda I) =$ $p_T(x) = (x-1)^2 (x-4)$

Os possíveis candidatos a $m_T(x)$ são:

$f_1(t) = (x-1)^2 \cdot (x-4)$

$f_2(t) = (x-1) \cdot (x-4)$

Segundo o teorema de Cayley-Hamilton, começamos com o de menor grau. E testamos para $p(t)(t) = 0$.

$$f_1(T) = [T - 1I] \cdot [T - 4I] = 0$$

$$\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&2&3\end{bmatrix}-1\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\cdot$$

$$\left(\begin{bmatrix}1&1&1\\0&2&1\\0&2&3\end{bmatrix}-4\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)=0$$

$$\left(\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&2&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-3&1&1\\0&-2&1\\0&2&1\end{bmatrix}\right)=0$$

Temos portanto que: $m_T(x)=(x-1).(x-4)$

Voltando ao exemplo:

$$p_T(x)=\det\begin{pmatrix}x-2&4\\-2&x+2\end{pmatrix}=(x-2)(x+2)-(-8)$$
$$=(x^2+4)=(x+2)(x-2)$$

Possíveis candidatos a $m_T(x)$:

$f_1(T)=(x^2+4)=(x+2)(x-2)$

Temos agora: $v=(a,b)\in\mathbb{R}^2$, um vetor não nulo.

$B(a,b) = \{(a,b),\ T(a,b) = (2a-4b,\ 2a-2y)\}$
é l.i.

$(2a-4b,\ 2a-2b) = a(2,2) + b(-4,-2)$

Verificar a dependencia linear:

$a(2,2) + b(-4,-2) = 0$, somente se admitir somente a solução trivial.

$$\begin{cases} 2a - 4b = 0 \\ 2a - 2b = 0 \end{cases} \ominus$$

$0 + 2b = 0 \qquad b = 0.,\ a = a$

Tem somente solução trivial.

e portanto B é uma base de $\mathbb{R}^2$.
Agora; a matriz companheira será:

$V = (a,b)$, e uma base $\{2a-4b,\ 2a-2y\}$
$V = (a,b) = C_T(V)$

Temos que $M_{T,V}(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$
um polinômio cujo coeficiente do termo mais alto grau é igual a 1.

Polinômio minimal de um operador linear:

Definição: Definimos o polinômio minimal de um operador $T: V \to V$ como o polinômio minimal de qualquer matriz representante de T, $[T]_B^B$ (onde B é uma base qualquer de V).

Teorema: Um operador linear $T: V \to V$ é diagonalizável se, e somente se, o polinômio minimal de T é da forma:
$m_T(x) = (x-\lambda_1).(x-\lambda_2).\ldots.(x-\lambda_n)$, com $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ autovalores distintos.

E $m_T(x) = 0$.

Matriz Companheira: Seja $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ um polinômio cujo coeficiente do termo mais alto grau é igual a 1.

Chama-se Matriz Companheira de f (ou associada ao polinômio f) à $N \times N$ matriz quadrada "C_f" onde todos os elementos da subdiagonal principal ("paralela" à principal e logo abaixo) são iguais a 1, cujá última coluna é formada pelos opostos dos coeficientes dos coeficientes de $f(x)$ e tal que todos os seus demais elementos são nulos, da seguinte forma:

$$C_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & & & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & & 1 & -a_{N-1} \end{bmatrix}$$

Ex: Encontre a matriz companheira de $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$.

$$
f(x) = \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \end{array}
$$

$$
f(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow C_f = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & +4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

Propriedade: O polinômio minimal e o polinômio característico da matriz companheira de f são iguais ao próprio polinômio f.

Voltando ao exemplo:

Como $p_T(x) = \underset{a_2}{x^2} + \underset{a_1}{0.x} + \underset{a_0}{4}$

$[T]_{B(a,b)}$, e $v \in V$ é um vetor T-cíclico e v é não nulo, onde $v = (a,b)$

$$
[T]_{B(a,b)} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \to a_0 \\ a_1 \end{array}
$$

diagonal Principal

Subdiagonal "

É a matriz companheira de x^2+4.

Observa-se que, neste exemplo,

$V = cT(a,b)$ para todo vetor $(a,b) \neq 0$.

$B(a,b) = \{\underbrace{(a,b)}_{v}, \underbrace{T(a,b)}_{T(v)} = (2a-4b, 2a-2b)\}$

↳ é uma base de V

<u>Exemplo</u>: Seja agora $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ tal que sua matriz com relação à base canônica C seja:

Dado o espaço vetorial em $\mathbb{C}^3$, temos:

$$[T]_C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

1) Vamos calcular o polinômio característico:

$$p_T(x) = \det(T - xId) = \begin{bmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 2-x & 0 \\ 0 & 1 & 2-x \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 2-x & 0 \\ 0 & 1 & 2-x \end{bmatrix} \begin{matrix} 2-x & 0 \\ 1 & 2-x \\ 0 & 1 \end{matrix}$$

$pt(x) = (2-x)^3$ ou $(x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Agora calcular o $mt(x)$, possíveis:

$f_1 = (x-2)^3$

$f_2 = (x-2)^2$

$f_3 = (x-2)$

Começamos pelo polinômio de menor grau cujo $pt(x) = 0$.

$$\left[\begin{pmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 2-x & 0 \\ 0 & 1 & 2-x \end{pmatrix}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Para $(x-2)^2$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

Portanto o $m_T(x) = (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$

Temos portanto que: $p_T(x) = m_T(x)$

Transformação na matriz

Para $v_1 = (1,0,0)$, temos $T(v_1) = (2,1,0)$, $T^2(v_1) = (4,4,1)$

$$T \circ T = T^2 \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow T^2, \text{ então } T^2(v_1) = (4,4,1)$$

Temos uma base, para um dado vetor $v_1 \in$ base canônica de T. $v_1 = (1,0,0) \neq \vec{0}$

$B' = \{v_1, T(v_1), T^2(v_1)\} = \{(1,0,0), (2,1,0), (4,4,1)\} \in V$

Verificar se B' é l.i:

$\alpha(1,0,0) + \alpha_1(2,1,0) + \alpha_3(4,4,1) = 0$

$$\begin{cases} \alpha_1 = 0 & \rightarrow \alpha_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0 & \rightarrow \alpha_2 = 0 \\ 4\alpha_1 + 4\alpha_2 + \alpha_3 = 0 & \rightarrow \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Temos que $B' \in \mathbb{C}^3$, B' é uma base de $\mathbb{C}^3$ e $v_1 \in \mathbb{C}^3$, então $\mathbb{C}^3 = C_T(v_1)$.

Agora vamos considerar $v_2 = (0,1,0)$, temos que $T(v_2) = (0,2,1)$ e o $T^2(v_2) = (0,4,4)$.

Formamos então: $\{(0,1,0), (0,2,1), (0,4,4)\}$

$$\alpha_1(0,1,0) + \alpha_2(0,2,1) + \alpha_3(0,4,4) = 0$$

$$\begin{cases} \cancel{\alpha_1 . 0 + \alpha_2 0 + \alpha_3 0 = 0} \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 . 0 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0 \rightarrow \alpha_2 = -4\alpha_3 \end{cases}$$

$$\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 + 2(-4\alpha_3) + 4\alpha_3 = 0 \qquad \alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - 8\alpha_3 + 4\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 - 4\alpha_3 = 0$$

$$\alpha_1 = 4\alpha_3$$

Então: $(x, y, z) = (4\alpha_3, -4\alpha_3, \alpha_3)$
$= \alpha_3(4, -4, 1)$

Portanto dado $B_1 = \{v_2, T(v_2), T^2(v_2)\}$ é l.d.

Formamos a matriz companheira em relação a base B':

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 8 \\ 1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \begin{array}{l} -a_0 \\ -a_1 \\ -a_2 \end{array}$$

$$p_T(x) = m_T(x) = (x-2)^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$$

Formamos a matriz companheira.

Observamos que nos exemplos anteriores, quando V é T-cíclico, então os polinômios $p_T(x)$ e $m_T(x)$ coincidem. Na realidade, esta é uma caracterização dos espaços T-cíclicos.

Temos que um polinômio $p(x) \in P(K)$ de grau maior ou igual a 1 é "irredutível" se ele "não pode ser escrito" como produto: $p(x) = q(x) \cdot r(x)$, onde $q(x)$ e $r(x)$ são polinômios de grau maior ou igual a 1.

Lema: Seja $T: V \to V$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial de dimensão finita. Então existe um vetor $v \in V$ tal que $m_T(x) = m_{T,v}(x)$.

Demonstração:

Vamos considerar inicialmente o caso em que $m_T(x) = (f(x))^m$, onde $f(x)$ é um polinômio irredutível em $P(K)$.

Como $m_T(x)$ é o polinômio mônico de menor grau para o qual T se anula, então existe um vetor $v \in V$ tal que:

$$(f(T))^{m-1}(v) \neq 0. \quad (1)$$

Vamos mostrar que, neste caso, um tal v satisfaz as condições requeridas. Como vimos acima, $m_{T,v}(x)$ divide $m_T(x)$ e, como $f(x)$ é irredutível, concluímos que $m_{T,v}(x) = (f(x))^l$ para algum $l \leq m$.

De (1), segue então que $m = l$ e, portanto, $m_{T,v}(x) = m_T(x)$ como queríamos mostrar.

Vamos agora considerar o caso geral, isto é, consideremos $m_T(x) = (f_1(x))^{m_1} \cdots \cdots (f_r(x))^{m_r}$, onde $m_i \geq 1$ e $f_1, \ldots, f_r$ são

são polinômios irredutíveis mônicos distintos. Para cada $i=1,\ldots,r$, denote por V_i o núcleo $Nuc(f_i(T)^{M_i})$. Então, $V = V_1 \oplus \ldots \oplus V_r$. Denotando, para cada i, por $T_i : V_i \to V_i$ a restrição de T a V_i, teremos que $m_{T_i}(x) = (f_i(x))^{M_i}$.

Usando-se o caso particular provado anteriormente, para cada $i=1,\ldots,r$, existe um vetor v_i tal que:

$$m_{T_i}(x) = m_{T_i,v_i}(x).$$

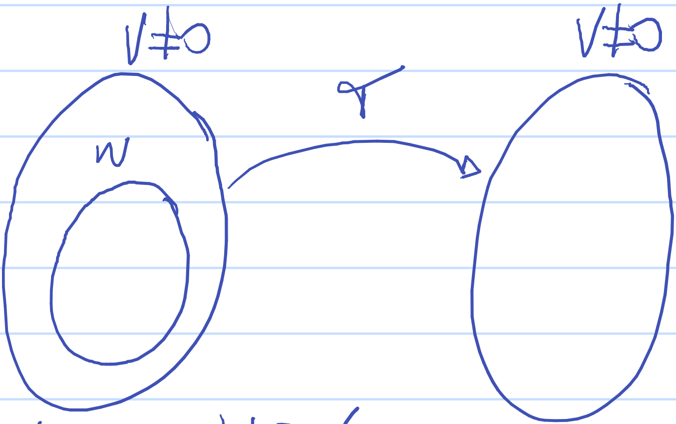
Escreva $v = v_1 + \ldots + v_r$ e observe que

$$\sum_{i=1}^{r} m_{T,v}(T_i)(v_i) = 0.$$

Mas como $m_{T,v}(T_i)(v_i) \in V_i$, concluímos que $m_{T,v}(T_i)(v_i) = 0$, para cada $i=1,\ldots,r$.

Logo, $m_{T,v}(x)$ é um múltiplo de $m_T(x)$, é um múltiplo de cada polinômio $m_{T_i}(x)$, e consequentemente, um múltiplo de $m_T(x)$. Lembre que $f_1, \ldots, f_i$ são polinômios irredutíveis distintos, e o resultado está provado.

<u>Corolário</u>: Seja $T: V \to V$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial de dimensão finita. Então existe um subespaço T-cíclico de V com dimensão igual ao grau do polinômio m_T.



$\dim_K V \leq n$, $W \subseteq V$

$\dim_K W$ = grau do $m_T(x)$, se W é T-cíclico.

<u>Demonstração</u>: Pela proposição anterior, existe $v \in V$ tal que $m_{T,v} = m_T$. Defina uma transformação linear:

$$\gamma : P(\mathbb{K}) \longrightarrow V$$
$$f \longrightarrow f(T)(v)$$

Observe que $Im\,\gamma_v$ é um subespaço T-cíclico de V com base $\{v, T(v), T^2(v), \ldots, T^{s-1}(v)\}$ para algum s. Como $m_{T,v} = m_T$, segue então que s é o grau de $m_T(x)$.

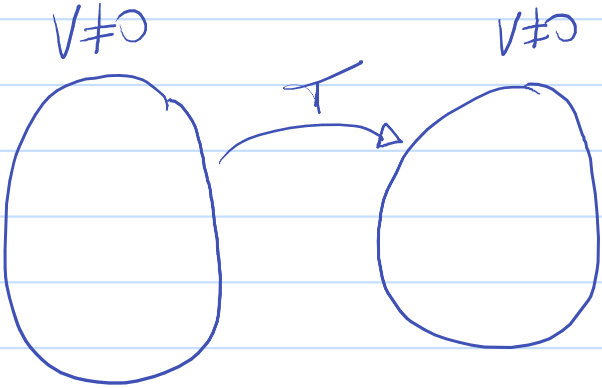
$\blacksquare$

Teorema: Seja $T: V \to V$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial de dimensão n. As seguintes afirmações são equivalentes.

a) V é T-cíclico

b) o grau de $m_T(x)$ é n.

c) $m_T(x) = p_T(x)$.



$\dim_K V \leq n$, V é T-cíclico, $m_T(x) = p_T(x)$

Demonstração:

1) a ⟶ b, Como V é T-cíclico, então existe um vetor não nulo $v \in V$ tal que $V = C_T(v)$. Em particular, o grau de $m_{T,v}(x)$ é n. Observe que em geral, o grau de $m_T(x)$ é no máximo n.
Como $m_{T,v}(x)$ divide $m_T(x)$, segue que o grau de $m_T(x)$ é n.

2) b ⟶ c, Pelo teorema de Cayley-Hamilton, $m_T(x)$ divide $p_T(x)$, o que implica que $m_T(x) = p_T(x)$, pois ambos os polinômios são mônicos, de mesmo grau e múltiplos um do outro.

$c \to a$.) Pelo corolário acima, existe um subespaço T-cíclico W de V com dimensão igual ao grau de $m_T(x)$. Como, por hipótese, o grau de $m_T(x)$ é n concluímos que $W = V$, o que prova nosso resultado.

$\blacksquare$