10.6 Exercícios

1. O Teorema 9.14 mostra que toda matriz simétrica é congruente a uma matriz diagonal. Dada a equivalência entre os Teoremas 9.11 e 9.14, podemos concluir que a Lei da Inércia é uma afirmação sobre matrizes simétricas. Ela garante que, no Teorema 9.14, o número de termos positivos, negativos e nulos na matriz diagonal D independe da mudança de variável utilizada. Por outro lado, sabemos que, se D for a diagonalização da matriz A, então os elementos diagonais de D são os autovalores de A. Mas sabemos que os autovalores de A independem da base na qual a matriz é representada. Isso não implica a Lei da Inércia?

2. Considere a matriz simétrica
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$
Ache uma matriz ortogonal (isto é, $P^t = P^{-1}$) e uma matriz diagonal D tais que
$$P^{-1}AP = D.$$

3. Sejam E um espaço euclidiano e $T : E \to E$ uma isometria. Se λ for um autovalor de T, mostre que $|\lambda| = 1$.

4. Sejam E um espaço euclidiano complexo e λ um autovalor do operador normal $T : E \to E$. Mostre que todo autovetor de T é autovetor de T^* correspondente ao autovalor $\bar{\lambda}$. Conclua então que autovetores associados a autovalores distintos de um operador normal são sempre ortogonais.

5. Seja E um espaço euclidiano complexo. Sejam $S, T : E \to E$ operadores lineares, com $ST = TS$. Mostre que ST tem um autovetor em comum.

6. Sejam $N : E \to E$ um operador normal no espaço euclidiano complexo E. Mostre que, se x for um autovetor de N, então $W = < x >^{\perp}$ é invariante por N e N^*.

7. Mostre, por indução, que todo operador normal $N : E \to E$ definido em um espaço euclidiano complexo E possui uma base ortonormal formada por autovetores.

8. Sejam $R, S, T : E \to E$ operadores auto-adjuntos definidos no espaço euclidiano E. Suponha que $RT = TR$, $ST = TS$ e que em cada auto-espaço de T, tanto R quanto S tenham um único autovalor. Mostre que R possui uma base ortonormal formada por elementos que são autovetores das três aplicações.

9. Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear entre espaços euclidianos. Qual a relação entre os autovalores de T^*T e os de TT^*?

10. Seja $T : E \to E$ um operador linear definido no espaço real E. Mostre que existe uma base ortonormal $\mathcal{B}$ na qual $T_{\mathcal{B}}$ é diagonal se, e somente se, T for auto-adjunto.

11. Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear entre os espaços euclidianos E e F. Mostre:

    (a) se T for injetora, então T^*T possui inversa;

    (b) $\operatorname{im} T^* = \operatorname{im}(T^*T)$ e $\operatorname{im} T = \operatorname{im}(TT^*)$;

    (c) se T for sobrejetora, então TT^* possui inversa.

12. Mostre que um operador T é positivo definido se, e somente se, $T \geq 0$ e T for invertível.

13. Mostre que são equivalentes as seguintes condições sobre um operador $P : E \to E$ definido num espaço euclidiano E.

    (a) $P = T^2$ para algum operador auto-adjunto T;

    (b) $P = S^*S$ para algum operador S;

    (c) P é positivo semidefinido.

14. Com a notação do Teorema 10.10 mostre, utilizando o cálculo funcional, que $P = \sqrt{H}$ é positiva semidefinida.

15. Verifique que a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ i & 2 \end{pmatrix}$$

é normal. Encontre uma matriz unitária U tal que U^*AU seja diagonal.

16. Sejam E um espaço euclidiano complexo e $N : E \to E$ um operador normal. Verifique que o procedimento utilizado na demonstração alternativa dos Teoremas 10.2 e 10.4, na página 204, também prova que N é diagonalizável.

17. Mostre que, se todos os autovalores de uma aplicação $T : E \to E$ tiverem valor absoluto igual a 1, então T é unitária.

18. Seja $N : E \to E$ um operador normal no espaço euclidiano E. Mostre que existe uma matriz unitária (ortogonal) U tal que $N^* = UN$, e deduza daí que $\operatorname{im} N^* = \operatorname{im} N$.

19. Seja N um operador normal no espaço euclidiano E. Mostre que existe um operador auto-adjunto A positivo semidefinido e um operador unitário (ortogonal) U tal que

$$N = UA = AU.$$

Se N for invertível, U e A são únicos. (É usual denotar $A = |N|$. Compare com o Exercício 18.)

20. Seja $N : E \to E$ um operador no espaço euclidiano E. Usando o cálculo funcional, mostre que N^* é um polinômio em N se, e somente se, N for normal. (Compare com o Exercício 42 do Capítulo 8.)

21. Dê exemplos de operadores $M, N : E \to E$ definidos no espaço euclidiano complexo E, com N normal, tais que os auto-espaços de M sejam invariantes por N e $NM \neq MN$.

22. Mostre que, na decomposição polar $T = PU$ do operador $T : E \to E$, temos $PU = UP$ se, e somente se, T for normal. (Esse enunciado merece interpretação, uma vez que em geral não há unicidade de U. Se T for normal, então P comuta com toda matriz unitária tal que $T = PU$. Reciprocamente, se P comuta com algum U tal que $T = PU$, então T é normal.)

23. Seja A uma matriz (real) anti-simétrica. Mostre que A^2 é uma matriz simétrica negativa semidefinida. Conclua daí que os autovalores não-nulos de uma matriz anti-simétrica são imaginários puros.

24. Sejam $M, N : E \to E$ operadores no espaço euclidiano E, sendo N normal. Mostre que $NM = MN$ implica $N^*M = MN^*$.

25. Sejam $M, N : E \to E$ operadores normais no espaço euclidiano E. Se $MN = NM$, mostre que $M^*N = NM^*$ e $MN^* = N^*M$. Em particular, NM é normal.

26. Sejam $M, N : E \to E$ operadores normais definidos no espaço euclidiano complexo E e $S : E \to E$ um operador arbitrário. Mostre que, se $NS = SM$, então $N^*S = SM^*$.

27. Sejam $M, N : E \to E$ operadores normais definidos no espaço euclidiano E. Suponha que MN seja normal. Mostre que N comuta com M^*M.

28. Sejam $M, N : E \to E$ operadores normais definidos no espaço euclidiano E. Suponha que MN seja normal. Mostre que NM é normal.

29. Sejam $S, T : E \to E$ dois operadores auto-adjuntos no espaço euclidiano E. Mostre que $ST = TS$ se, e somente se, existe um operador auto-adjunto $R : E \to E$ tal que $S = p(R)$ e $T = q(R)$.

30. Mostre que uma matriz

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

preserva sua forma ou é transformada na matriz

$$\begin{pmatrix} \cos(-\theta) & \operatorname{sen}(-\theta) \\ -\operatorname{sen}(-\theta) & \cos(-\theta) \end{pmatrix}$$

quando submetida a uma matriz mudança de base ortogonal.

31. Dê um exemplo mostrando que não há unicidade de U na decomposição polar de $T : E \to E$, se esse operador não for invertível.

32. Sejam E, F espaços euclidianos. Dois operadores lineares $T : E \to E$ e $S : F \to F$ são *unitariamente equivalentes* se existir uma aplicação linear unitária $U : E \to F$ tal que $U^*SU = T$. Mostre que S, T são unitariamente equivalentes se, e somente se, existirem bases ortonormais $\mathcal{B}$ de E e $\mathcal{C}$ de F tais $T_{\mathcal{B}} = S_{\mathcal{C}}$.

33. Com a notação do Exercício 32, sejam S e T operadores normais. Mostre que os operadores S e T são unitariamente equivalentes se, e somente se, tiverem o mesmo polinômio mínimo. Conclua que dois operadores normais semelhantes são sempre unitariamente equivalentes.

9.4 Exercícios

1. Seja X um espaço vetorial. Mostre que o espaço das formas $\mathcal{S}(X)$ é um espaço vetorial com as definições usuais de soma de funções e multiplicação de função por escalar.

2. Seja B uma forma no espaço vetorial X. Mostre que vale a identidade
$$q_B(x+y) + q_B(x-y) = 2\big(q_B(x) + q_B(y)\big),$$
que generaliza a identidade do paralelogramo.

3. Sejam X um espaço vetorial *real* e $B \in \mathcal{S}(X)$. Verifique a igualdade
$$B(x,y) + B(y,x) = \frac{1}{2}\big[q_B(x+y) - q_B(x-y)\big]. \tag{9.8}$$
(Essa identidade nos mostra que, se a forma $B : X \times X \to \mathbb{R}$ for *simétrica*, então o lado esquerdo da equação nos fornece uma expressão para B em termos de q.)

4. Seja $B : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por
$$B(x,y) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_2y_1 + 7x_2y_2,$$
em que $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$.

   (a) Mostre que B é uma forma bilinear que não é simétrica. Obtenha a forma quadrática associada a B;

   (b) Defina[1]
$$\bar{B}(x,y) = \frac{1}{4}\big[q_B(x+y) - q_B(x-y)\big].$$
   Mostre que $\bar{B}$ é uma forma bilinear simétrica, que não coincide com B, mas à qual também está associada a forma quadrática q_B.

5. Dê exemplo de uma forma bilinear à qual está associada uma forma quadrática identicamente nula.

[1]Compare com o Exercício 3.

6. Seja X um espaço vetorial complexo e $B \in \mathcal{S}(X)$. Mostre a *identidade de polarização*:

$$B(x,y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)] + \frac{i}{4}[q(x+iy) - q(x-iy)].$$

Se X for real e B for simétrica, então vale:

$$B(x,y) = \frac{1}{4}[q(x+y) - q(x-y)].$$

(Note que as identidades de polarização dadas pelo Lema 8.9 são casos particulares das identidades anteriores.)

Assim, dada uma forma quadrática q, definida num espaço *complexo* X, sempre conseguimos recuperar a forma $B \in \mathcal{S}(X)$ que a define. Se X for um espaço *real*, esse resultado só é válido se soubermos que B é uma forma simétrica. (Compare com o Exercício 4.)

7. Seja E um espaço euclidiano *complexo*. Mostre que uma forma sesquilinear $B \in \mathcal{S}(E)$ é hermitiana se, e somente se, a forma quadrática $q(x) = B(x,x)$ for real para todo $x \in E$.

8. Sejam X um espaço vetorial e $B : X \times X \to \mathbb{K}$ uma forma positiva semidefinida. Mostre que $q_B(y) = 0$ se, e somente se, $B(x,y) = 0$ para todo $x \in X$.

9. Sejam X um espaço vetorial e B uma forma positiva semidefinida. Mostre a desigualdade

$$|B(x,y)| \leq \sqrt{q_B(x)}\,\sqrt{q_B(y)},$$

que é uma generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

10. Seja B uma forma no espaço X e $\{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base de X. Mostre que B está caracterizada pela matriz (a_{ij}), em que $a_{ij} = B(x_i, x_j)$. Expresse $B(x,y)$ em termos dessa matriz.

11. Seja B uma forma no espaço euclidiano E e $\mathcal{B}$ uma base de E. Se A for a matriz que representa B (nessa base), definimos o *posto* de B como sendo o posto de A.

Mostre que o posto de uma forma está bem definido.

(a) Mostre que o posto de uma forma está bem definido.

(*b*) Seja B uma forma de posto 1 no espaço euclidiano real E. Mostre que existem funcionais lineares $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : E \to \mathbb{R}$ tais que $B(x, y) = f(x)g(y)$.

12. Se a matriz que representa uma forma $B : E \times E \to \mathbb{K}$ (com relação a uma base ortonormal) for invertível, mostre que, para todo $x_0 \in E$, existe $y_0 \in E$ tal que $B(x_0, y_0) \neq 0$.

13. Mostre o Teorema de Lagrange 9.13 para o caso de formas quadráticas hermitianas, adaptando a demonstração apresentada para o caso de formas quadráticas simétricas.

14. Enuncie o Teorema de Lagrange (Teoremas 9.11 e 9.13) como um resultado sobre a diagonalização de uma forma sesquilinear auto-adjunta.

15. Dada a forma quadrática $ax^2 + bxy + cy^2$, encontre a matriz simétrica que a representa.

16. Considere a forma quadrática $q : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} q(x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_1^2 + 6x_1x_2 + 5x_2^2 - 4x_1x_3 - 12x_2x_3 \\ &\quad + 4x_3^2 - 4x_2x_4 - x_3x_4 - x_4^2. \end{aligned}$$

Coloque q na forma diagonal.

Definição 9.18 *Duas matrizes A e B em $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ são* ***congruentes*** *se existir uma matriz invertível $M \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ tal que $A = M^*BM$.*

17. Mostre que a congruência de matrizes é uma relação de equivalência em $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

18. Sejam $A, B \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ matrizes congruentes. Mostre que $\det A > 0$ se, e somente se, $\det B > 0$.

19. Mostre que toda matriz simétrica (hermitiana) é congruente a uma matriz diagonal cujas entradas assumem apenas os valores -1, 0 e 1.

20. Mostre que uma forma quadrática simétrica (hermitiana) $q(x) = \langle x, Ax \rangle$ é positiva definida no espaço euclidiano E se, e somente se, a matriz $A_{\mathcal{B}}$ que representa A numa base ortonormal $\mathcal{B}$ for positiva definida, tal qual definido no Exercício 19 do Capítulo 8. Verifique o mesmo resultado para uma forma negativa definida, positiva semidefinida e etc.

21. Mostre que uma forma quadrática hermitiana (simétrica) $q(x) = \langle x, Ax\rangle$ é positiva definida se, e somente se, A for congruente a I.

22. Faça um diagrama para a relação $M^*AM = D$ em termos de mudanças de bases.

Definição 9.19 *Seja* $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. *Para cada* $r \leq n$, *a submatriz* (a_{ij}), $1 \leq i, j \leq r \leq n$ *é a* ***submatriz principal*** *de* A *de ordem* r, *denotada por* A_r. *O determinante de* A_r *é o* ***menor principal de ordem*** r.

23. Mostre que, se todos os menores principais de uma matriz simétrica (hermitiana) $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ forem positivos, então a matriz A é positiva definida.

24. Mostre que todos os menores principais de uma matriz simétrica (hermitiana) $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ positiva definida são positivos.

25. Mostre que uma matriz simétrica (hermitiana) $A = (a_{ij})$ é negativa definida se, e somente se, seus menores principais tiverem sinais alternados, com $\det A_1 = a_{11} < 0$.

26. Seja X um espaço *complexo*. Além das formas sesquilineares definidas em E, são importantes as formas $B : X \times X \to \mathbb{C}$ tais que para quaisquer $\alpha \in \mathbb{C}$ e $u_1, u_2, v_1, v_2 \in E$,

    (*i*) $B(\alpha u_1 + u_2, v) = \alpha B(u_1, v) + B(u_2, v)$;

    (*ii*) $B(u, \alpha v_1 + v_2) = \alpha B(u, v_1) + B(u, v_2)$.

    Essas são as formas *bilineares* definidas em X. Denotaremos por $\mathcal{B}(X)$ o conjunto das formas bilineares[2] em X. Uma forma bilinear é *simétrica*, se $B(u, v) = B(v, u)$, e anti-simétrica, se $B(u, v) = -B(v, u)$ para quaisquer $u, v \in X$.

    Verifique as seguintes afirmações:

    (*a*) Seja $\mathcal{B} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ uma base de X. Então existe um isomorfismo entre o espaço $\mathcal{B}(X)$ e o espaço $\mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$.

[2] Como a estrutura bilinear não está em acordo com uma estrutura de produto interno num espaço complexo, não consideramos aqui espaços euclidianos.

(b) Seja $\mathcal{B}$ uma base de X e A a matriz que representa B nessa base. A forma B é simétrica se, e somente se, a matriz A for simétrica. A forma B é anti-simétrica se, e somente se, A for anti-simétrica.

(c) O espaço $\mathcal{B}(X)$ é a soma direta dos subespaços das formas simétricas e anti-simétricas.

(d) Sejam $\mathcal{C}$ uma outra base de X e $P = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$. Se A representar a forma B na base $\mathcal{B}$ e C representar B na base $\mathcal{C}$, então $C = P^{\mathrm{t}}AP$.

(e) Está bem definido o posto de uma forma B como o posto de uma matriz que representa B. Uma forma bilinear B é *não-degenerada* se o seu posto for igual à $\dim X$.

(f) Se B for uma forma bilinear simétrica, definindo $q(v) = B(v, v)$, vale

$$B(u,v) = \frac{1}{4}[q(u+v) - q(u-v)], \tag{9.9}$$

chamada *identidade de polarização*.

(g) Se B for uma forma bilinear simétrica, existe uma base de X na qual B é representada por uma matriz diagonal (compare com o Exercício 14). Em particular, dada uma matriz simétrica $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$, existe uma matriz invertível $P \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ tal que $P^{\mathrm{t}}AP$ é diagonal.

(h) Seja B uma forma bilinear não-degenerada. Mostre que a cada operador $T : X \to X$ está associado um único operador T' tal que $B(Tx, y) = B(x, T'y)$. Vale: $(T_1T_2)' = T_2'T_1'$; $(cT_1 + T_2)' = cT_1' + T_2'$; $(T')' = T$.

(i) Seja B uma forma bilinear anti-simétrica. Então o posto de B é par e, nesse caso, B pode ser representada por uma matriz diagonal em blocos

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathcal{J} \\ -\mathcal{J} & 0 \end{pmatrix},$$

em que $\mathcal{J}$ é a matriz quadrada

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 1 & 0 \\ \vdots & \iddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(j) Enuncie e demonstre um resultado análogo ao do item (h) para uma forma bilinear anti-simétrica.