Mostre que um operador linear T num espaço de dimensão finita V é diagonalizável se, e somente se seu polinômio é um produto de fatores lineares distintos.

Sejam $T \in \mathcal{L}(V,V)$ e $m_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_r - \lambda)$ o polinômio minimal de T. Então T é diagonalizável.

Temos que $m_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \dots (\lambda_r - \lambda) = m_1(\lambda) \dots m_r(\lambda)$ o polinômio minimal de T. Então:

i) $V = Nuc(\lambda_1 I - T) \oplus \dots \oplus Nuc(\lambda_r I - T)$,
ii) O polinômio minimal da restrição de T a $Nuc(\lambda_j I - T)$ é $m_j(\lambda)$, $j = 1 \dots r$.

Como $V = Nuc(\lambda_1 I - T) \oplus \dots \oplus Nuc(\lambda_r I - T)$, seja $0 \neq w$ e $w \in Nuc(\lambda_i I - T)$.
Então $(\lambda_i I - T)(w) = 0$ e daí $T(w) = \lambda_i w$.
Portanto todo vetor não nulo do $Nuc(\lambda_i I - T)$ é autovalor associado a λ_i.

Como a união das bases do $Nuc(\lambda_1 I - T), \ldots, Nuc(\lambda_r I - T)$ é base de V, segue que temos uma base de autovetores para V e portanto T é diagonalizável.

Agora se tomarmos T como um operador diagonalizável e sejam: $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ os autovalores distintos de T. Então o polinômio minimal de T é o polinômio $m_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \ldots (\lambda_r - \lambda)$.

Precisamos apenas mostrar que $m(T) = 0$. Se v é um autovetor, então um dos operadores $(T - \lambda_1 I), (T - \lambda_2 I), \ldots, (T - \lambda_r I)$ aplica v em zero. Portanto $m(T)(v) = (T - \lambda_1 I).(T - \lambda_2 I) \ldots (T - \lambda_r I)(v) = 0$, para todo autovetor v, e como existe uma base de autovetores de T, segue que $m(T) = 0$, e logo é o minimal.