1) Seja $\|\cdot\|$ uma norma no espaço E. Mostre que $\|0\| = 0$.

Norma: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ (sendo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), temos que uma norma em V é uma aplicação:

$$\|\cdot\| : V \to \mathbb{K}\ (\mathbb{R})$$

Satisfazendo:

i) $\forall v \in V$, $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$

ii) $\forall v \in V$, $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$

iii) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Tomamos que $v = 0$, ou seja, o vetor nulo como a norma representa o comprimento de um vetor no espaço vetorial, então:

$$\|u\| = \sqrt{u^2} = \sqrt{0^2} = 0$$

---

2) Seja E um espaço vetorial "euclidiano" complexo. Dê um exemplo mostrando que a validade do Teorema de Pitágoras não implica que $x \perp y$.

Como E é um espaço euclidiano, então possui produto interno. Tomamos dois vetores em $\mathbb{C}$:

$v = (1,0)$ e $u = (i,0)$, então:

$$\langle v,u \rangle = \langle (1,0),(i,0) \rangle = i + 0 + 0 + 0 = i \neq 0$$

portanto $v \not\perp u$.

3) Seja E um espaço com produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$. Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz da seguinte maneira:

Para $x, y \in E$, desenvolva a expressão:

$$0 \leq \langle x - \alpha t y, x - \alpha t y \rangle$$

Escolhendo $\alpha = \langle x, y \rangle$, obtenha um trinômio do segundo grau com coeficientes reais. Analise esse trinômio e obtenha a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Tomamos $\alpha = \langle x, y \rangle$, então:

$$\langle x - \langle x,y \rangle t y, x - \langle x,y \rangle t y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, -\langle x,y \rangle t y \rangle + \langle -\langle x,y \rangle t y, x \rangle + \langle -\langle x,y \rangle t y, -\langle x,y \rangle t y \rangle$$

$$\langle x, x \rangle + \langle x, -\alpha t y \rangle + \langle -\alpha t y, x \rangle + \langle \alpha t y, -\alpha t y \rangle$$

$$\langle x, x \rangle - 1 \langle x, \alpha t y \rangle - \langle \alpha t y, x \rangle + \langle \alpha t y, \alpha t y \rangle$$

$$\langle x, x \rangle - 2 \langle x, \alpha t y \rangle + \langle \alpha t y, \alpha t y \rangle$$

$$\langle x, x \rangle - 2t \langle x, \alpha y \rangle + t \langle \alpha y, \alpha y \rangle$$

$$\langle x, x \rangle - 2t \alpha \langle x, y \rangle + t \alpha \langle y, y \rangle$$

$$\langle x, x \rangle - 2t \langle x, y \rangle \langle x, y \rangle + t \langle x, y \rangle \langle y, y \rangle$$

$$\|x\|^2 - 2t \|\langle x, y \rangle\|^2 + t \langle x, y \rangle \|y\|^2 \geqslant 0$$

$$\|x\|^2 - 2t \|\alpha\|^2 + t \alpha \|y\|^2 \geqslant 0$$

$$\|x\|^2 + t \alpha \|y\|^2 \geqslant 2t \|\alpha\|^2$$

4) Seja $C([a,b],K)$ o espaço das funções contínuas $f:[a,b] \to K$. Mostre que:

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

① Define um produto interno nesse espaço

- Simetria: $\langle f,g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt$

$$\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt = \int_a^b \overline{g(t)}\,f(t)\,dt =$$

$\langle g,f \rangle$, para $f,g \in \mathbb{R}$

- $\langle f, g+h \rangle = \int_a^b f(t).\left(\overline{g(t)}+\overline{h(t)}\right)dt =$

$$\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt + \int_a^b f(t).\overline{h(t)}\,dt = \langle f,g \rangle + \langle f,h \rangle$$

- $\langle f, \lambda g \rangle = \int_a^b f(t)\,\lambda\overline{g(t)}\,dt = \int_a^b \lambda f(t)\,\overline{g(t)}\,dt =$

$$\lambda \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \lambda \langle f,g \rangle$$

- $\langle f,f \rangle \geq 0$ se $f \neq 0$

$$\int_a^b f(t).f(t)\,dt = \int_a^b (f(t))^2\,dt > 0$$

se $f=0 \longrightarrow \int_a^b (f(t))^2\,dt = 0$

3) Defina $\langle u, v\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$ para $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que esse é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

Um produto interno foi definido como:

$\langle u, v\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2.$

- $\langle v+u, w\rangle = \langle v, w\rangle + \langle u, w\rangle$
  $\langle v, u+w\rangle = \langle v, u\rangle + \langle v, w\rangle$

- $\langle \lambda v, u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle = \langle v, \lambda u\rangle$

- $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$

- $\langle v, v\rangle \geq 0$, se $v = 0 \to \langle v, v\rangle = 0$

1) $\langle v, u\rangle = \langle u, v\rangle$

$\langle v, u\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$

$\langle u, v\rangle = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - y_1x_2 + 2y_1y_2$

2) $\langle \lambda v, u\rangle = \lambda\langle v, u\rangle = \langle v, \lambda u\rangle$

$\langle \lambda v, u\rangle = \langle \lambda(x_2, y_2), (x_1, y_1)\rangle = 2\lambda x_2x_1 - \lambda x_2y_1 - x_1\lambda y_2 + 2\lambda y_1y_2 = \lambda(2x_2x_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2y_1y_2 = \lambda\langle(x_2, y_2), (x_1, y_1)\rangle =$

$\langle (x_2, y_2), \lambda(x_1, y_1)\rangle = \langle v, u\lambda\rangle$

Se $u=(x_1, y_1)$, $v=(x_2, y_2)$ e $w=(x_3, y_3)$

$\langle v, u+w \rangle = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$

$\langle (x_2, y_2), (x_1, y_1) \rangle + \langle (x_2, y_2), (x_3, y_3) \rangle =$

$(2x_2x_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 2y_2y_1) + (2x_2x_3 -$

$x_2y_3 - y_2x_3 + 2y_2y_3) = \langle v, u \rangle + \langle v, w \rangle$

4) $\langle v, v \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle (x_2, y_2), (x_2, y_2) \rangle =$

$2x_2x_2 - x_2y_2 - y_2x_2 + 2y_2y_2 =$

$2x_2^2 - 2x_2y_2 + 2y_2^2 = 2(x_2^2 - x_2y_2 + y_2^2)$

Se $V=(0,0) \longrightarrow \langle v, v \rangle = 0$

$2(x_2^2 - x_2y_2 + y_2^2) = 2.(x_2^2 - y_2^2)^2$

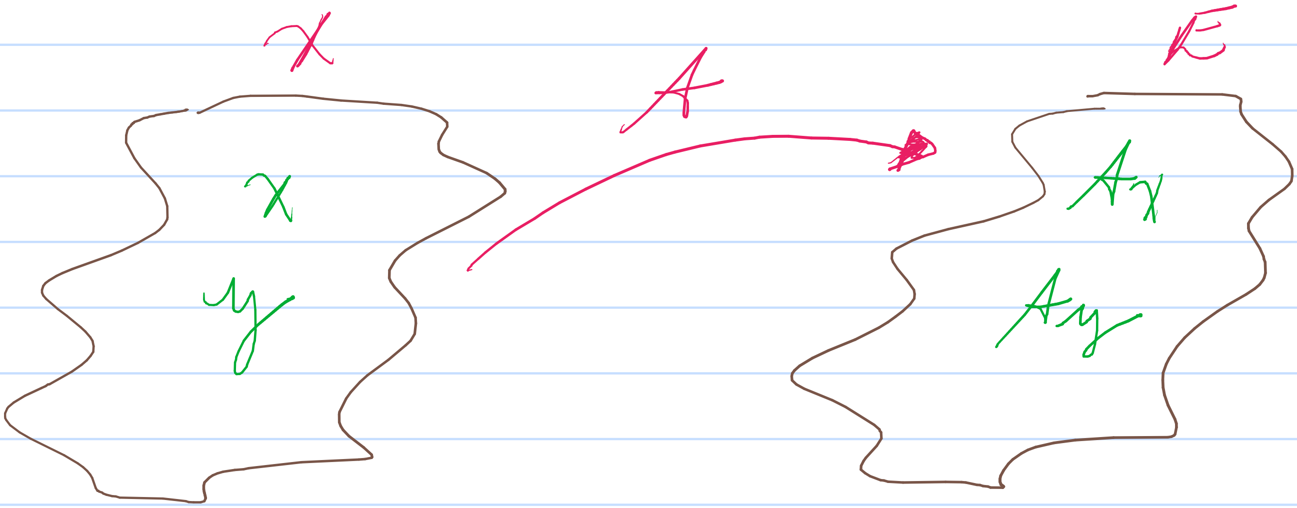
Precisamos que $x_2^2 - y_2^2 \geq 0$ se $x_2, y_2 = 0$

$x_2^2 - y_2^2 = 0$; se $x_2, y_2 \neq 0$ então

$(x_2^2 - y_2^2)^2 \geq 0$.

6) Seja E um espaço com produto interno e $A: X \to E$ um isomorfismo entre o espaço vetorial X e E. Para $x, y \in X$ defina $\langle x, y \rangle = \langle Ax, Ay \rangle$.

Mostre que está assim definido um produto interno em X.



Como entre X e E são espaços isomorfos, então as propriedade de E se aplica à X. Logo como E tem um produto interno, X também terá.

$\langle Ax, Ay \rangle$ é um produto interno, logo:

$\langle Ax, Ay \rangle \longrightarrow \lambda$, onde $\lambda \in \mathbb{R}$.

$(Ax)^{-1} = x$ e $(Ay)^{-1} = y$

$\langle Ax^{-1}, Ay^{-1} \rangle \longrightarrow \beta$, onde $\beta \in \mathbb{R}$

$\langle Ax^{-1}, Ay^{-1} \rangle = \langle x, y \rangle \longrightarrow \beta$

Assim X tem produto interno.

$\langle Ax, Ay \rangle = A \langle x, y \rangle$

7) Seja E um espaço normado que satisfaz a identidade do paralelogramo.

Definindo $\langle \cdot , \cdot \rangle : E \times E \to K$ por meio da identidade de polarização conveniente, mostre que $\langle \cdot , \cdot \rangle$ é um produto interno em E e que a norma de E é gerada por esse produto interno.

(iii) Regra do Paralelogramo: para quaisquer $u, v \in V$ sobre K: $\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$ "Se tiver uma norma que não vem da regra do paralelogramo, então não provém do P.I."

$\langle u, u \rangle \equiv f(\vec{u})$, $(f(\vec{u}))^{1/2}$ é uma norma.

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ induz uma norma: $\|\vec{u}\| = (\langle u, u \rangle)^{1/2}$

Utilizada no teorema: Seja V um espaço vetorial com o produto interno e $\| \cdot \|$ a norma induzida por ele. Valem: (iii)

Tomamos E como um espaço vetorial que possui uma norma induzida pelo produto interno.

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2)$$

Temos que $u, v \in E$, e $E \times E \to K$ ou:
$\langle u, v \rangle \to \lambda$, $\lambda \in K$

Como a norma satisfaz pela regra do paralelogramo, então ela provém do produto interno.

Tomamos a identidade:

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2,$$ onde

$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle$ e $\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v \rangle$ para V no Real.

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\|u+v\|^2 - \frac{1}{4}\|u-v\|^2$$

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}\langle u+v, u+v \rangle - \frac{1}{4}\langle u-v, u-v \rangle$$

$$= \frac{1}{4}\left[\langle u, u \rangle + \langle u, v \rangle + \langle v, u \rangle + \langle v, v \rangle\right] - \frac{1}{4}\left[\langle u, u \rangle + \langle u, -v \rangle + \langle -v, u \rangle + \langle -v, -v \rangle\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle\right] - \frac{1}{4}\left[\langle u, u \rangle + 2\langle u, -v \rangle + (-1)\langle v, v \rangle\right]$$

$$= \frac{1}{4}\left[\langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle + \langle v, v \rangle\right] - \frac{1}{4}\left[\langle u, u \rangle - 2\langle u, v \rangle - \langle v, v \rangle\right]$$

$\langle u, v \rangle = 0$. Portanto $u \perp v$

E todo espaço vetorial que possui um produto interno, também induz uma norma.

8) Considere agora o espaço $C([-\pi, \pi], R)$ com o produto interno definido no exercício 7. Mostre que o conjunto:

$$X = \{1, \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t, \dots\}$$

É um conjunto ortogonal.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt$$

Então para o espaço C, temos:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \overline{g(t)} dt$$, como está em R então $\overline{g(t)} = g(t)$.

Dado $\{v_1, \dots, v_N\}$ é um conjunto de vetores de V, dizemos que este conjunto é ortogonal se quaisquer dois vetores de V distintos do conjunto são ortogonais.
Isto é: $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \forall i, j$.

1) Se $f(t) = 1$

2) $\langle \operatorname{sen} t, \cos t \rangle = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} t . \cos t \, dt = 0 \rightarrow \int_{-\pi} \operatorname{sen} t . \cos t \, dt = -\frac{1}{2} \cos^2(t) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

3) $\langle \operatorname{sen} 2t, \cos 2t \rangle = 0$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} 2t \cos 2t \, dt = -\frac{1}{8} \cos(4t) \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 \sin t \, dt = -\cos t \Big|_{-\pi}^{\pi} = 0$$

Portanto é ortogonal

9) Considere então o espaço vetorial $C([-1,1], \mathbb{R})$ com o produto interno definido no exercício 4.

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt$$

Seja $P \subset C([-1,1], \mathbb{R})$ o subespaço formado por todas as funções pares e $I \subset C([-1,1], \mathbb{R})$ o subespaço formado por todas as funções ímpares. Mostre que $I = P^\perp$.

Tomamos um subespaço V das funções pares, e um subespaço W das funções ímpares. Onde $V = W^\perp$ ou $W = V^\perp$, dado por:

$$V^\perp = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V \}$$

Tomamos P as funções pares: $f(t) = 2t$
" I as " ímpares: $g(t) = 2t + 1$

Então: $$\int_{-1}^{1} f(t)\, g(t)\, dt = \int_{-1}^{1} 2t \cdot (2t+1)\, dt =$$

$$\int_{-1}^{1} (4t^2 + 2t)\, dt = \int_{-1}^{1} 4t\, dt + \int_{-1}^{1} 2t\, dt = 0$$

Temos que $f(t) \perp g(t)$, logo:

$\langle P, I \rangle = 0 = \langle P, P^{\perp} \rangle = 0$, onde

$I = P^{\perp}$

---

10) Seja E um espaço com produto interno. Interprete geometricamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz em termos de normas dos vetores não-nulos y e $\text{proj}_x y$.

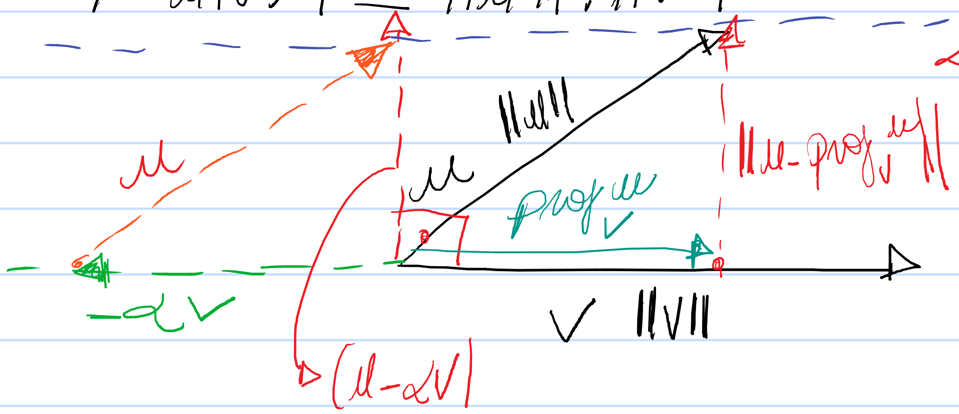
__Teorema:__ Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Seja V um espaço com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e tome $\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$.

Vale que quaisquer $u, v \in V$:

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| . \|v\|$$

$\langle u, v \rangle = 0$



Existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $(u - \alpha v) \perp v$

De fato basta tomar $\alpha = \|v\|^{-2} . \langle u, v \rangle$

Pelo teorema de Pitágoras aplicado a:
$-\alpha v$ e $(u-\alpha v)$, temos:

$$\|u\|^2 = \|-\alpha v\|^2 + \|u-\alpha v\|^2$$

Mas $\|u-\alpha v\|^2 \geq 0$, logo: $\|u\|^2 \geq \|-\alpha v\|^2$

Basta, então substituir o valor de α que temos:

$$\|u\|^2 \geq \|\alpha v\|^2 \quad ., \alpha = \|v\|^{-2} \cdot \langle u, v\rangle$$

$$\geq \| \|v\|^{-2} \cdot \langle u, v\rangle \cdot v \|^2$$

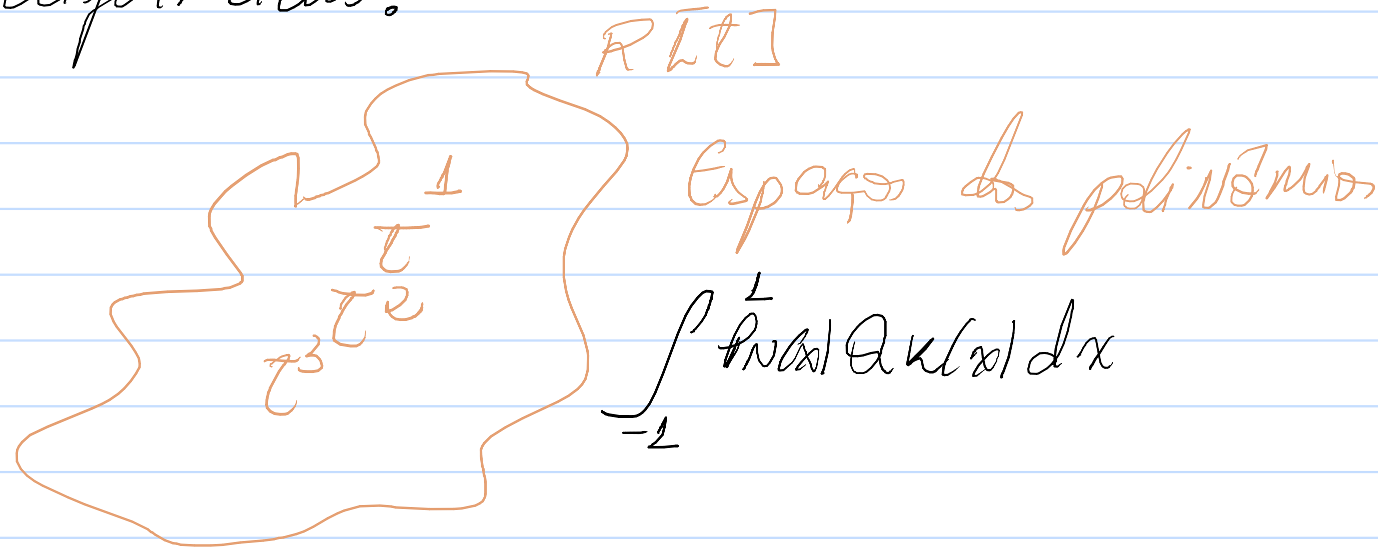
$$\geq \| \frac{1}{\|v\|^2} \cdot \langle u, v\rangle \cdot v \|^2$$

$$\geq \frac{1}{\cancel{\|v\|^2}} \cdot \|\langle u, v\rangle\| \, \cancel{\|v\|^2}$$

$$\|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \geq \|\langle u, v\rangle\|^2$$

11| Seja $R[t]$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes em R. Nesse espaço, considere o produto interno definido em $C([-1,1],R)$. Verifique que:

$\chi = \{1, t, t^2, \ldots\}$ é uma base desse espaço. Encontre os 4 primeiros termos da base $\{p_1, p_2, \ldots\}$ obtida ao se aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à base χ. Os polinômios $p_n(t)$ são os polinômios de Legendre, que são úteis no estudo de equações diferenciais.



$$\int_{-1}^{1} P_N(x)\, Q_K(x)\, dx$$

Temos que $\chi = \{1, t, t^2, \ldots\}$ é uma base formada por vetores L.I.:

$$\chi = \{(1,0,0,0,\ldots), (0,1,0,0,\ldots), (0,0,1,0,0,\ldots), \ldots\}$$

Relação de Ortogonalidade:

$\int_{-1}^{1} P_N(x) . Q_K(x)\, dx$, sendo $Q_K(x)$ um polinômio qualquer de grau $K < N$

$$\int_{-1}^{1} P_N(x) . P_M(x)\, dx = \begin{cases} 0, & \text{se } M \neq N \\ \dfrac{2}{2M+1}, & \text{se } M = N \end{cases}$$

Formula de Rodrigues:

$$P_N(x) = \frac{1}{2^N . N!} . \frac{d^N}{dx^N} (x^2-1)^N$$

Tomamos $v_1 = (1,0,0,0,\dots)$ e fixamos em W_1, então $V_1 = W_1$.

Encontramos $w_2 = ?$

$$w_2 = V_2 - \frac{\langle V_2 . W_1 \rangle}{\| W_1 \|} . W_1$$

Tomamos: $V_1 = 1$, $V_2 = t$, $V_3 = t^2$, $V_4 = t^3$

$$V_1 = W_1 = 1 \; ; \int_{-1}^{1} 1 dt = 2$$

$$W_2 = V_2 - \frac{\langle V_2, W_1 \rangle}{\| W_1 \|} . W_1 = t^2 - \frac{\langle t^2, 2 \rangle}{\|\cancel{2}\|} . \cancel{2}$$

$$= t^2 - 4/3$$

$$\int_{-1}^{1} 2t^2 dt = 2 . \frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = 2 . \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$W_3 = V_3 - \frac{\langle V_3, W_1 \rangle}{\| W_1 \|} . W_1 - \frac{\langle V_3, W_2 \rangle}{\| W_2 \|} . W_2$$

$$W_3 = t^3 - \frac{\langle t^3, 2 \rangle}{\cancel{2}} . \cancel{2} - \frac{\langle t^3, t^2 - 4/3 \rangle}{\| t^2 - 4/3 \|} . (t^2 - 4/3)$$

$$\int_{-1}^{1} 2t^3 dt = 2 . \frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1} = 0 \quad \int_{-1}^{1} t^3 (t^2 - 4/3) dt = \int_{-1}^{1} t^5 - \frac{4}{3} t^3 dt$$

$$\int_{-1}^{1} t^5 \, dt - \frac{4}{3}\int_{-1}^{1} t^3 \, dt = \frac{t^6}{6}\Big|_{-1}^{1} - \frac{4}{3}\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1} =$$

$$0 - 0 = 0$$

$$w_3 = t^3$$

12) No processo de Gram-Schmidt, passe de uma base $\{u_1, \ldots, u_N\}$ do espaço euclidiano E uma base ortogonal $\{x_1, \ldots, x_N\}$ sem normalizar os vetores ortogonais em cada passo do processo.

$$\underset{\text{Base arbitraria}}{\{u_1, \ldots, u_N\}} \xrightarrow[\text{Processo ortogonalização}]{} \underset{\text{Base ortogonal}}{\{x_1, \ldots, x_N\}}$$

Verifique que $0 \leq \|x_i\| \leq \|u_i\| \ \forall \ i = 1, \ldots, N$.

Se tomarmos $x_1 = u_1$ fixando o primeiro vetor da base ortogonal, então:

$$0 \leq \|x_1\| \leq \|u_1\|$$

Como $u_2 = x_2 - \frac{\langle x_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|} \cdot u_1$

$$u_2 + \frac{\langle x_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|} \cdot u_1 = x_2$$

$$u_2 \cdot \|u_1\| + \langle x_2, u_1 \rangle \cdot u_1 = x_2 \cdot \|u_1\|$$

$$u_2 \|u_1\| = x_2 \cdot \|u_1\| - \langle x_2, u_1 \rangle \cdot u_1$$

Portanto $x_2 \geq u_2$. Dado que u_2 foi ortogonalizado.

O mesmo para $x_3 \geq u_3$ e sucessivamente.

$$0 \leq \|x_i\| \leq \|u_i\| \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

Prove que $\|x_i\| = 0$ implica que u_i está no espaço gerado por $(u_1, \ldots, u_{i-1})$, enquanto $\|x_i\| = \|u_i\|$ significa que u_i é ortogonal a cada vetor x_j, para $j = 1, \ldots, i-1$.

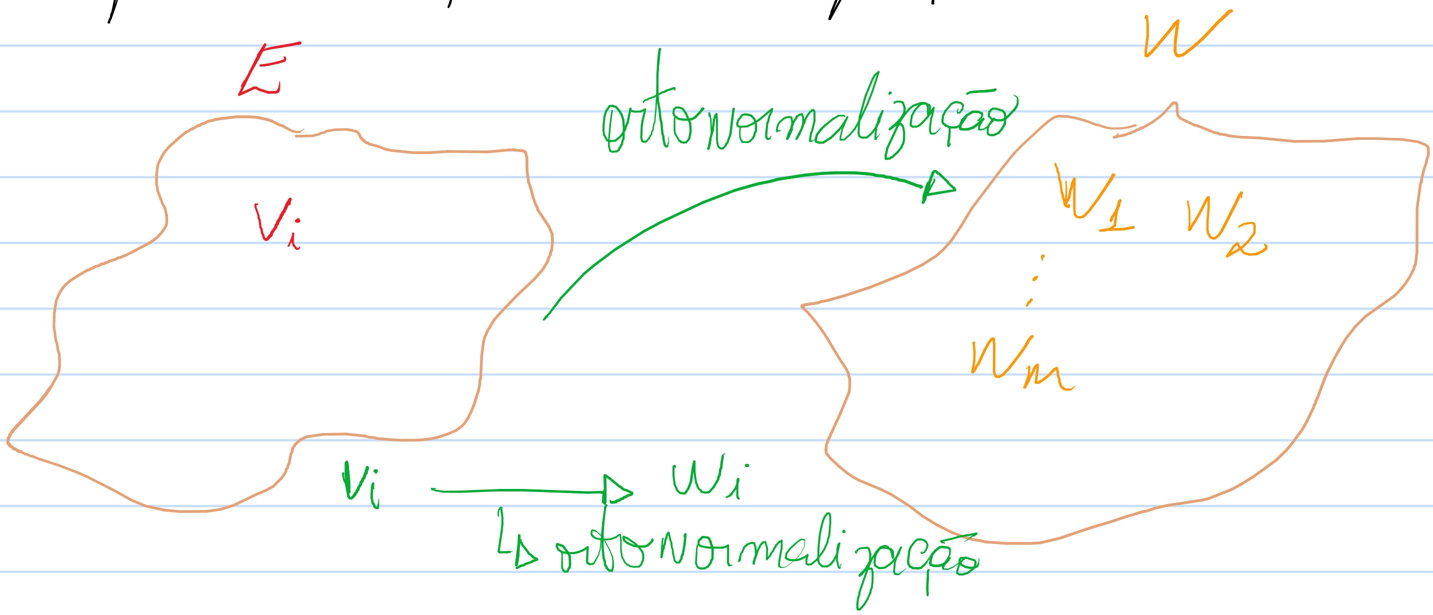
Se $\|x_i\| = 0$ para $i = 1, \ldots, N$, temos que

$\|x_i\| = \sqrt{x_i \cdot x_i} = 0$, então $x_i = 0$.

13) Sejam E um espaço com produto interno e $\{w_1, \dots, w_m\}$ uma base ortonormal do subespaço W. Mostre que, para todo $v \in E$, vale a desigualdade de Bessel.

$$\sum_{j=1}^{m} |\langle v, w_j \rangle|^2 \leq \|v\|^2$$

Como E é um espaço com produto interno, então induz uma norma.
Temos $\{w_1, \dots, w_m\}$ uma base ortonormal, logo é L.I, do subespaço W.



Tomamos w_1, onde:

$$|\langle v, w_1 \rangle|^2 \leq \|v\|^2 = |\langle v, w_1 \rangle|^2 \leq \left(\sqrt{\langle v, v \rangle}\right)^2 =$$
$$|\langle v, w_1 |^2 \leq \langle v, v \rangle = \frac{|\langle v, w_1 \rangle|^2}{\langle v, v \rangle} \leq 1$$

O mesmo acontece para w_j, onde $j = 1, \dots, N$

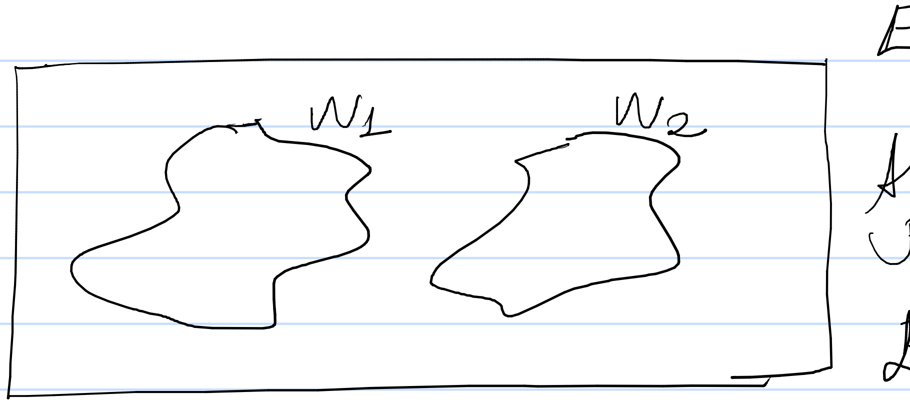
$$|\langle v, w_j \rangle|^2 \leq \|v\|^2 \longrightarrow \frac{|\langle v, w_j \rangle|^2}{\langle v, v \rangle} \leq 1$$

Portanto vale a desigualdade de Bessel.

14) Sejam W_1, W_2 subespaços do espaço com produto interno E. Mostre que:

a) $(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$

Tomamos o espaço vetorial E, onde W_1 e W_2 estão contidos em E.



$(W_1 \cup W_2) \subseteq E$

Se $(W_1 + W_2) = V$, então:

$$E = V \oplus (W_1 + W_2)^\perp$$

Temos que $v_i \in V$ e $v_i \notin (W_1 + W_2)^\perp$, e $w \notin V$, então:

$$\langle v_i, w_i \rangle = 0 \rightarrow v_i \perp w_i$$

Como $(W_1 + W_2)^\perp$ é um subespaço com somente um ponto em comum, temos que:

$$w_1 \in W_1^\perp \quad e \quad w_2 \in W_2^\perp, \text{ mas } w_1 \text{ e } w_2 \notin V.$$

$\langle v_1, w_1 \rangle = 0$ e $\langle v_2, w_2 \rangle = 0 \rightarrow v_1 \perp w_1$ e $v_2 \perp w_2$
e $\langle v_2, w_1 \rangle = 0$ e $\langle v_1, w_2 \rangle = 0$, logo:

$$v_1, v_2 \perp W_1^\perp \quad e \quad v_1, v_2 \perp W_2^\perp$$

Portanto, $W_1^\perp$ e $W_2^\perp$ são iguais e:
$w_1 \in W_2^\perp$ e $w_2 \in W_1^\perp$. Então:

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

b) $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

Tomamos $W = (W_1 \cap W_2)^{\perp}$ e temos que $E = W \oplus V$, onde $V = W_1 + W_2$.

Se $w_1 \in W$ e $w_2 \in W$, então $w_1, w_2 \notin V$. E temos que:

$$w_1 \perp V \quad e \quad w_2 \perp V$$

Então $w_1 \in W_2^{\perp}$ e $w_1 \in W_1^{\perp}$, o mesmo vale para $w_2 \in W_1^{\perp}$ e $w_2 \in W_1^{\perp}$! Assim temos que:

$$w_1 \in (W_1^{\perp} + W_2^{\perp}) \quad e \quad w_2 \in (W_1^{\perp} + W_2^{\perp})$$

Portanto: $(W_1 \cap W_2)^{\perp} = W_1^{\perp} + W_2^{\perp}$

---

17) Consideremos o espaço l_0, do exercício 15, se $x \in l_0$ então $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m$ para únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ em que:

$$m = m(x) \in \mathbb{N} \text{ depende de } x.$$

Defina $T: l_0 \to l_0$ por:

$$T(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_m) e_1$$

Mostre que T não possui adjunta.

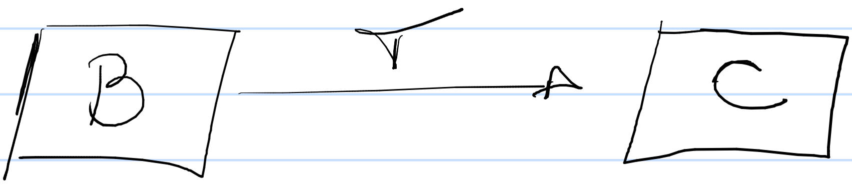
20) Sejam $B=\{v_1,\ldots,v_N\}$ e $C=\{w_1,\ldots,w_M\}$ bases ortonormais dos espaços euclidianos E, F, respectivamente.

E, F possuem produtos internos.

$\langle v_i, v_j\rangle = \alpha$ e $\langle w_i, w_j\rangle = \beta$.

Seja $T: E \to F$ uma aplicação linear. Mostre que, para $i\in\{1,\ldots,m\}$ e $j\in\{1,\ldots,N\}$

$$T_B^C = A = (a_{ij}),\ \text{em que } a_{ij} = \langle w_i, T(v_j)\rangle$$



; (a_{ij})

Onde: $T: B \to C$, $\langle v_i, v_j\rangle \longrightarrow \underbrace{\langle w_i, T(v_j)\rangle}_{a_{ij}}$

$$\langle w_i, T(v_j)\rangle = \langle T^*(w_i), v_j\rangle$$

Como toda aplicação linear, existe uma única aplicação linear $T^*: C \to B$, a adjunta, temos que:

$$\langle w_i, T(v_j)\rangle = \langle T^*(w_i), v_j\rangle$$

Pelo teorema de representação Riesz existe $w_i \in C$ tal que $T(v) = \langle v, w_i \rangle$, mas pela definição de $T(v)$ temos:

$$\langle w_i, v_j \rangle = \langle w_i, T(v_j) \rangle$$

Defina $T_v^* = w$, temos uma aplicação

$$T^* : C \longrightarrow B$$

E satisfaz a condição: $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle$, ou seja $a_{ij} = b_{ij}$.

Esta T^* é unicamente determinada.

Como $\langle w_i, v_j \rangle = \langle w_i, T(v_j) \rangle = a_{ij}$

Se $B, C \in \mathbb{R}$, então $\underline{a_{ij}} = \overline{a_{ij}}$, logo:

$\langle w_i, T(v_j) \rangle = \langle T(w_i), v_j \rangle = \langle v_j, T(w_i) \rangle = a_{ji}$, então:

$$\langle v_j, T(w_i) \rangle = \overline{a_{ji}} = \overline{\langle T(w_i), v_j \rangle} = b_{ij}$$

21) Sejam E, F espaços euclidianos. Dadas as aplicações $S, T \in \mathcal{L}(E, F)$, defina:

$$\langle S, T \rangle = tr(ST^*)$$

$$E \xrightarrow{\mathcal{L}} F \; ; \; E \xrightarrow{S} F \qquad E \xrightarrow{T} F \; \Big\{ \langle S, T \rangle$$

Mostre que assim está definido um produto interno em $\mathcal{L}(E, F)$.

Temos que S, T transformações, onde:

$$E_i \xrightarrow{S} F_i \quad e \quad E_j \xrightarrow{T} f_i \rightarrow$$

$$\langle S, T \rangle = \langle F_i, F_j \rangle$$

Traço: é a soma dos elementos da diagonal principal.

Se tomarmos i com linhas de uma matriz e j como as colunas temos que para a matriz dada por: $[S, T]$, bases ortonormais $(\mathcal{L}.I)$, então:

$\langle F_i, F_j \rangle = \delta_{ij}$, onde $i = j \rightarrow 1$, e $i \neq j = 0$.

Logo:

$$\langle S, T \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$\langle S, T \rangle = tr(ST^*)$$

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ forem, respectivamente, as matrizes de S e T com relação a bases ortonormais de E, F, mostre que:

$\langle A, B \rangle = \langle a_{ij}, b_{ij} \rangle$, e tomamos a condição:

$$\begin{cases} i = j \longrightarrow \langle a_{ij}, b_{ij} \rangle = 1 \\ i \neq j \longrightarrow \langle a_{ij}, b_{ij} \rangle = 0 \end{cases}$$

onde:

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} . \overline{b_{ij}}$$

Temos que $T^* = \overline{b_{ij}}$, ou:

$$T^* : F \longrightarrow E$$

22) Considere o espaço $C([0,\pi], \mathbb{R}]$ com o produto interno definido no exercício 14 e seu subespaço $\mathbb{R}_2[t]$.

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \int_0^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt$$

Tome o funcional linear $l: \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$ dado por:

$$l(p) = \langle p(t), \operatorname{sen} t\rangle$$

Ache $q \in \mathbb{R}_2[t]$ tal que:

$$l(p) = \langle p(t), q(t)\rangle, \forall p \in \mathbb{R}_2[t]$$

Pelo teorema de representação de Riesz, temos que existe um único $q(t)$ tal que:

$$l(p) = \langle p(t), \operatorname{sen} t\rangle = \langle p(t), q(t)\rangle$$

para todo $p \in \mathbb{R}_2[t]$.

$$\langle p(t), \operatorname{sen} t\rangle = \langle p(t), q(t)\rangle$$

$$\int_0^{\pi} p(t) \cdot \operatorname{sen} t \, dt = \int_0^{\pi} p(t) \cdot \overline{q(t)}\, dt$$

Como estamos trabalhando em $\mathbb{R}$, então: $\overline{q(t)} = q(t)$, logo:

$$\int_0^{\pi} p(t) \cdot \operatorname{sen} t \, dt = \int_0^{\pi} p(t) \cdot q(t)\, dt$$

Portanto $q(t) = \operatorname{sen} t$.

24) Ache $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma a minimizar o valor da integral.

$$\int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 \, dx.$$

26) Considere a matriz $P = (V_1, \dots, V_N)$, cujas colunas são os vetores $\{V_1, V_2, \dots, V_N\}$ de uma base ortonormal do K^N. Mostre que: $PP^* = P^*P = I$

Tomamos:

$P = [V_1 \ V_2 \ \dots \ V_N]$, e esta base é ortonormal, logo é l.i.

Como as colunas formam um conjunto ortonormal, temos que $P^T = P^{-1}$. E como P é ortogonal temos que P^T, também será ortogonal.

Temos um caso de Isometria, assim:

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "T"] & P^* = P^{-1} \arrow[l, bend left, "T^*"] \end{tikzcd}$$

Então $T(V_1) = W_1$ e $T^*(W_1) = V_1$, vale sucessivamente até V_N.

Tomamos $W_i \in P^*$ e $V_i \in P$, assim: $\langle W_i, V_i \rangle$

$\langle W_i, V_i \rangle = \langle T(V_i), T^*(W_i) \rangle = \langle T(V_i), T^{-1}(W_i) \rangle =$
$\langle W_i, V_i \rangle$

Como P é formado por colunas, P^* é formado por linha, logo temos que que T é um operador auto-adjunto. E como é ortonormal seu produto é unitário, logo é a identidade.

27) Em $\mathbb{R}^3$ verifique que:

$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 4x_3 y_3$

① define um produto interno.
Encontre a adjunta da aplicação linear T dada por:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ com relação a esse produto interno.

i) Verificar o produto interno:

a) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \forall u, v \in V$

$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1 y_1 + 3x_2 y_2 + 4x_3 y_3 = \langle (y_1, y_2, y_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle$

b) Positividade: $\langle u, u \rangle \geq 0$, $\forall u \in V$ e $\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

$\langle (x_1, x_2, x_3), (x_1, x_2, x_3) \rangle = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 \geq 0.$

$\langle (0,0,0), (0,0,0) \rangle = 0.$

c) Distributividade: $\langle u + w, v \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$ $\forall u, w, v \in V$

$\langle (x_1 + w_1, x_2 + w_2, x_3 + w_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle =$
$2(x_1 + w_1) y_1 + 3(x + w_2) y_2 + 4(x_3 + w_3) y_3 =$

$2x_1y_1 + 2w_1y_1 + 3x_2y_2 + 3w_2y_2 + 4x_3y_3 + 4w_3y_3 = (2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3) +$

$(2w_1y_1 + 3w_2y_2 + 4w_3y_3) = \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle + \langle (w_1, w_2, w_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$

d) Homogeneidade: $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$, $\forall u, v \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\langle \lambda(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2\lambda x_1y_1 + 3\lambda x_2y_2 + 4\lambda x_3y_3 = \lambda(2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3) =$

$\lambda \langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle$

b) D) Dada a aplicação:

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{cases} x + 0y + z = T(x) \\ 2x - y + 3z = T(y) \\ 3x - y + 4z = T(z) \end{cases}$$

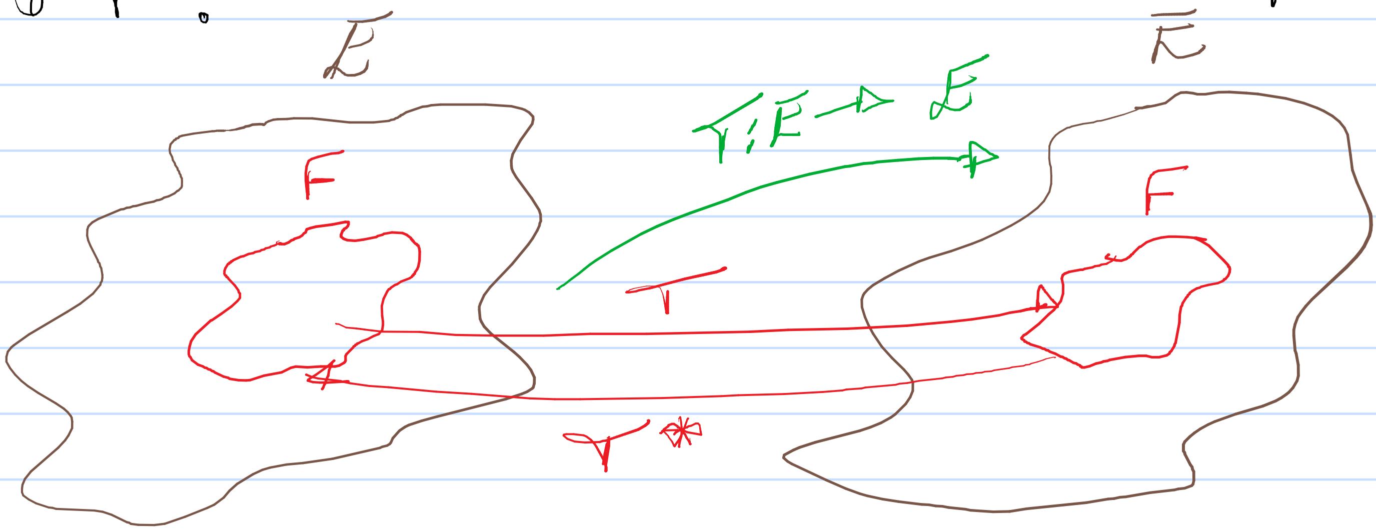
$$\begin{cases} x + z = T(x) \\ 2x - y + 3z = T(y) \\ 3x - y + 4z = T(z) \end{cases}$$

- Todo espaço vetorial munido de um produto interno, possui uma base ortonormal.

- Dado um operador linear T em V, existe um único operador linear T^* em V tal que:

$\langle T(v), w \rangle = \langle v, T^*(w) \rangle \; \forall v, w \in V$

29) Sejam E um espaço euclidiano e $T: E \to E$ um operador. Suponha que $F \subset E$ seja um subespaço invariante por T e T^*.



a) Mostre que $(T/_F)^* = T^*/_F$

Temos que $(f_1, \dots, f_N) \in F$ ou $(f_1, \dots, f_N) \in E$,

Temos que T e T^* são T-invariantes, logo:

$(f_i, T(f_i)) \in F$, logo:

$$\begin{tikzcd} (f_1, \dots, f_N) \arrow[r, "T"] & (Tf_1, \dots, Tf_N) \arrow[l, bend left, "T^*"] \end{tikzcd}$$

$T(f_i) = \lambda f_i \to \lambda \in \mathbb{R}$ e $f_i \in F$, como T é invariante então $\lambda = 1$ e $Tf_i = \lambda f_i = f_i$, portanto $Tf_i = f_i$ e com isso:

$$(T/_F) = f_i = (T/_F)^*$$

28) Seja $T: X \to X$ um operador sobre o espaço euclidiano X. Suponha que $Tv = \lambda v$ e $T^* w = \mu w$, com $\lambda \neq \bar{\mu}$. Mostre que $\langle v, w \rangle = 0$.

Temos que mostrar que $\langle v, w \rangle = 0$, ou seja $v \perp w$. Como T é um operador linear dado por:

$$T: X \to X : \begin{cases} Tv = \lambda v \\ T^* w = \mu w \end{cases}, \text{ com } \lambda \neq \bar{\mu}$$

Temos que $Tv = \lambda v$, ou seja, uma modificação no vetor v, e $T^* w = \mu w$ que também modifica w.

Temos que $v, w \in X$, assim:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & X \\ v & & Tv = \lambda v \\ \mu w & \xleftarrow[T^*]{} & w \end{array}$$

Pelo teorema de representação de Riesz, temos que dado o operador linear T em X, existe um único operador linear T^* em X tal que:

$$\langle T(v), \mu w \rangle = \langle \lambda v, T^*(w) \rangle \ \forall v, w \in X \text{ e}$$
$$\bar{\mu} \langle T(v), w \rangle = \lambda \langle v, T^*(w) \rangle \quad \mu, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Mas $\bar{\mu} \neq \lambda$, então os produtos são iguais.
$$\bar{\mu} \langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, \mu w \rangle$$

Como é um espaço euclidiano, então tem produto interno.

$$\bar{\mu} \langle T(v), w \rangle = \lambda \langle v, T^*(w) \rangle$$

$$\langle T(v) - \lambda v, \mu w - T^*(w) \rangle = 0$$

$$\langle T(v) - T^*(\lambda v), T(\mu w) - T^*(w) \rangle = 0$$

$$\langle (T - T^*) v, \lambda v \rangle + \langle (T - T^*) \mu w, w \rangle = 0$$

Continuação 29:

Tomamos agora T^*, que é a adjunta de T, então:

$$T^* = T^{-1} = T^{-1}T\, fi = Id\, fi = fi$$

Isto porque T^* é invariante em $F \subset E$.

Logo: $T^*|_F = fi = (T|_F)^*$

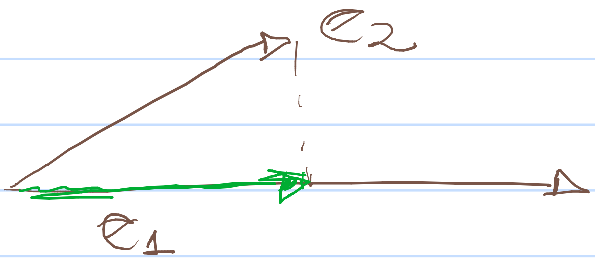
Temos que T é um operador normal, isto porque $T \circ T^* = T^* \circ T$, e T é auto-adjunto.

Tomamos $T^*(-fi)$, onde $-fi = \lambda fi$ e $\lambda = -1 \in \mathbb{R}$ e $fi \in F$: $T fi = \lambda fi = -fi$, então:

$$T^* = -T, \text{ se } \lambda = -1.$$

Portanto T^* é auto adjunto normal se $\lambda = 1$ e T^* é anti-auto-adjunto se $\lambda = -1$.

30) Sejam E um espaço euclidiano e $\pi : E \to E$ uma projeção:



$\{e_i\} \in E$

π_E : projeção

Como π é uma projeção, então E possui uma base ortogonal!

a) Mostre que π é uma projeção ortogonal (isto é, que $\pi = (\operatorname{im} \pi)^{\perp}$)), se e somente se, $\langle \pi x, x - \pi x \rangle = 0$ para todo $x \in E$.

Tomamos $(e_i) \in E$, onde $i = 1, \dots, n$ e temos que $\pi : E \to E$ é dito ser um operador ortogonal quando: $\pi^* \pi = \pi \pi^* = I_E$. Assim π é ortogonal quando π é invertível e $\pi^* = \pi^{-1}$.

Tomamos $e_1, e_2 \in E$, então pelo teorema de representação de Riesz, existe um único operador linear π^* em E tal que:

$$\langle \pi(e_1), e_2 \rangle = \langle e_1, \pi^*(e_2) \rangle, \forall e_1, e_2 \in E$$

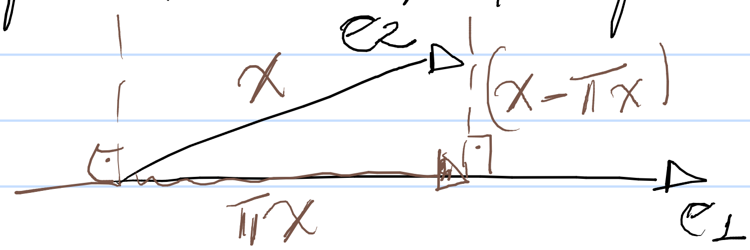
Temos que:

$$\langle e_1, e_2 \rangle = \langle \pi(e_1), \pi(e_2) \rangle = \langle e_1, \pi^* \pi(e_2) \rangle$$

Assim:

$$\langle e_1, (\pi^* \pi - I_E)(e_2) \rangle = 0$$

Então: $(\pi^* \pi - I_E)(e_2) = 0$, $\forall e_2 \in E$, implica que $\pi^* \pi = I_E$, e portanto π é ortogonal.



Tomamos $\text{nuc}\,\pi = (\text{im}\,\pi)^{\perp}$

Temos que $\text{nuc}\,\pi = (\text{im}\,\pi^*)^{\perp}$, como $\pi^* = \pi^{-1}$ temos que a $\text{Im}\,\pi^* = \text{Im}\,\pi^{-1}$.

$$\text{nuc}\,\pi = (\text{im}\,\pi^{-1})^{\perp} = (\pi)^{\perp} = \pi^{\perp} = 0$$

Isto porque a origem é o único ponto de intersecção entre 2 planos perpendiculares, portanto:

$$\langle \pi x, x - \pi x \rangle = \langle \pi x, x \rangle + \langle \pi x, -\pi x \rangle = 0$$
$$= \langle \pi x, x \rangle - 1 \langle \pi x, \pi x \rangle = 0$$
$$= 0 - \langle \pi x, \pi x \rangle$$
$$\langle \pi x, x - \pi x \rangle = -\langle \pi x, x \pi \rangle$$
$$\langle \pi x, x - \pi x \rangle + \langle \pi x, \pi x \rangle = 0$$
$$\langle \pi x, \pi x \rangle + \langle x - \pi x, \pi x \rangle = 0$$
$$\cancel{\langle \pi x, \pi x \rangle} + \langle x, \pi x \rangle + \cancel{\langle \pi x, -\pi x \rangle} = 0$$
$$\langle x, \pi x \rangle = 0$$

Portanto $x \perp \pi x$.

b) Mostre que, se uma projeção $\pi: E \to E$ satisfazer $\|\pi x\| \leq \|x\|$ $\forall x \in E$, então π é ortogonal.

$$\|\pi x\| \leq \|x\| \to (\|\pi x\| - \|x\|)^2 \leq (0)^2 =$$

$$-2\|\pi x\| . \|x\| + \|\pi x\|^2 + \|x\|^2 \leq 0$$

$$\|\pi x\|^2 + \|x\|^2 \leq 2\|\pi x\| . \|x\|$$

$$\langle \pi x, \pi x \rangle + \langle x, x \rangle \leq 2\|\pi x\| . \|x\|$$

$$\|\pi x\|^2 + \|x - \pi x\|^2 = \|x\|^2$$

$$\langle \pi x, \pi x \rangle + \langle x - \pi x, x - \pi x \rangle = \langle x, x \rangle$$

$$\langle \pi x, \pi x \rangle + \langle x, x \rangle + \langle x, -\pi x \rangle + \langle -\pi x, x \rangle + \langle -\pi x, -\pi x \rangle = \langle x, x \rangle$$

$$\cancel{\langle \pi x, \pi x \rangle} - \cancel{\langle \pi x, \pi x \rangle} - 2\langle x, \pi x \rangle = \cancel{\langle x, x \rangle} - \cancel{\langle x, x \rangle}$$

$$-2\langle x, \pi x \rangle = 0 \to \langle x, \pi x \rangle = 0$$

e temos que $x \perp \pi x$.

31) Sejam E um espaço euclidiano e $\pi : E \longrightarrow E$ uma projeção. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) π é normal:

Temos que E é um espaço com produto interno, então se $(x_1, \dots, x_n) \in E$, então:

$$\pi : E \longrightarrow E$$
$$(x_i) \longrightarrow \pi(x_i) \quad , \text{ onde } i: 1, \dots, n$$

Assim x_i, $\pi(x_i)$ pertence a E e portanto π é t-invariante e $\pi^* = \pi^{-1}$.

$$(x_1, x_2) = (\pi x_1, \pi x_2) \longrightarrow \langle \pi x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, \pi^* x_2 \rangle$$

Então $\pi \circ \pi^* = \pi^* \circ \pi$

$$\langle \pi x_1, x_2 = \langle x_1, \pi^* x_2 \rangle = \langle \pi x_1, \pi(\pi^*(x_2)) \rangle$$
$$= \langle \pi x_1, (\pi \circ \pi^*) x_2 \rangle = \langle x_1 \pi, I_E x_2 \rangle =$$
$$\langle \pi x_1, x_2 \rangle$$

b) π é auto-adjunto:

Se π é auto-adjunto, então $\pi = \pi^*$, como $\pi : E \longrightarrow E$ e $(x_i) \in E \longrightarrow (\pi x_i) \in E$

$\langle x_1, \pi x_2 \rangle = \langle \pi x_1, x_2 \rangle$, como $\pi^* = \pi$, então:

$$\langle \pi^* x_1, \pi x_2 \rangle = \langle \pi x_1, \pi^* x_2 \rangle = \langle \pi x_1, x_2 \rangle =$$
$$\langle x_1, x_2 \rangle$$

c) π é uma projeção ortogonal sobre sua imagem.

Temos que $(x_1, \dots, x_N) \in E$ e $(\pi x_1, \dots, \pi x_N) \in E$, então:

$$\pi : E \longrightarrow E$$
$$x_i \longrightarrow \pi x_i, \text{ onde } i = 1, \dots, N$$

Temos que π é normal e auto-adjunto, mas $\pi^* = \pi^{-1}$, onde $\pi x_i = \pi^* x_i = x_i$, assim:

$$\langle \pi x_i, \pi x_j \rangle = \langle \pi^* x_i, \pi^* x_j \rangle = \langle x_i, x_j \rangle$$

Temos portanto que π é isometria e com isso temos que: $\pi \circ \pi^* = I = \pi^* \circ \pi$,

$\langle x_i, x_j \rangle = \langle T(x_i), T(x_j) \rangle = \langle x_i, \pi^*(\pi(x_j)) \rangle = \langle x_i, (\pi^* \pi - I_E)(x_j) \rangle = 0$

$(\pi^* \pi - I_E)(x_j) = 0$, $\forall x_j \in E$ e $\pi^* \pi = I_E$ e portanto π é ortogonal.

32) Sejam $S, T: E \to E$ operadores auto-adjuntos no espaço euclidiano E. Mostre que ST é auto-adjunto se, e somente se, $ST = TS$.

Temos que ST é auto-adjunto, e se $ST = TS$ então $ST + TS = 2ST$. Como $2ST$ é auto-adjunto, e $2 \in \mathbb{R}$;

$$2\langle STv, w\rangle = \langle 2STv, w\rangle$$
$$= \langle v, 2STw\rangle$$
$$= 2\langle v, STw\rangle$$

Assim se E é real ou complexo, temos que:
$\langle STv, w\rangle = \langle v, STw\rangle$ então ST é auto-adjunto.

Temos também que ST é auto-adjunto, então: $\langle STv, w\rangle = \langle v, STw\rangle$, e:

$$\langle STv, w\rangle = \langle v, (ST)^{*}w\rangle$$
$$= \langle v, T^{*}S^{*}w\rangle$$
$$= \langle v, TSw\rangle,$$ porque T, S são auto-adjuntos.

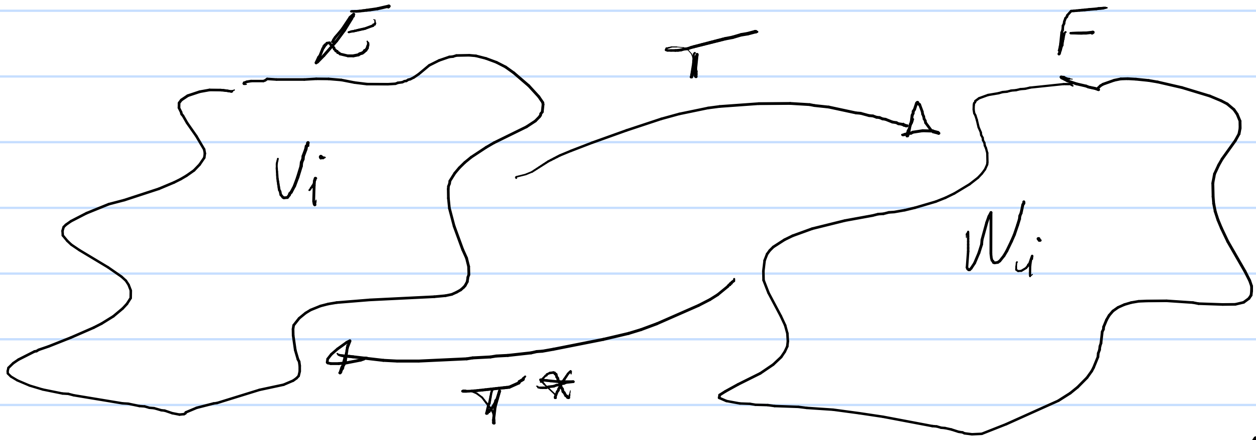
Assim: $\langle v, STw\rangle = \langle v, TSw\rangle \ \forall v, w \in E$,

$\langle v, STw\rangle = \langle v, TSw\rangle \ \forall v, w \in E$,
$\langle v, (ST - TS)w\rangle = 0 \ \forall v, w \in E$, então temos:
$v = (ST - TS)w$, e:
$$\|(ST - TS)w\|^2 = 0 \ \forall w \in E,$$ portanto
$$ST - TS = 0 \longrightarrow ST = TS.$$

33) Sejam E, F espaços euclidianos e $T: E \to F$ uma aplicação linear. Mostre que:

a) T é injetora se, e somente se, T^* for sobrejetora.

Temos que E e F são espaços euclidianos, ou seja, munidos com produto interno.



i) Tomamos T como uma função injetora, onde $T: E \to F$, com isso temos que:

$$(v_1, \dots, v_n) \in E \xrightarrow{T} (Tv_1, \dots, Tv_n) \in F$$

E temos $T^*: F \to E$, onde $\operatorname{Im} T^* \subset E$ e o $\operatorname{Nuc} T \subset E$. Agora:

$\operatorname{im}(T^*)^{\perp} = \{v \in E : \langle v, T^*w \rangle = 0, \forall w \in F\} = \{v \in E : \langle Tv, w \rangle = 0, \forall w \in F\} = \{v \in E : Tv = 0\} = \operatorname{Nuc} T$.

Portanto, temos que: $\operatorname{im}(T^*)^{\perp} = \operatorname{Nuc} T = \{0\}$

Isto implica que: $\operatorname{im}(T^*) = (\operatorname{im}(T^*)^{\perp})^{\perp} = \{0\}^{\perp} = E$

Com isto temos que T^* é sobrejetiva.

ii) Supomos agora T^* sobrejetiva, então $im(T^*) = E$.

Sabemos que $im(T^*)^{\perp} = nuc(T)$, isto implica que:

$$E = (im(T^*)^{\perp})^{\perp} = nuc(T)^{\perp}$$

Assim, temos que ~~{0}~~ $E = nuc T$, e então T é injetiva.

b) T é sobrejetivo se, e somente se, T^* for injetora.

i) Supomos T sobrejetiva, então:

$im T(V) = W_i$ e $im T^* W = V_i$, como também $nuc T \subset E$ e $nuc T^* \subset F$

$Im T = (nuc T^*)^{\perp}$, então para cada $v_i \in E$ temos que $Im T(v_i) = (nuc T^*)^{\perp} \neq (nuc T^*)$, ou seja todos os elementos diferentes de zero! portanto somente para $W = 0$, temos que $(Im T^*) = nuc T$, e portanto T é sobrejetivo e T^* é injetivo.

Agora tomamos T^* injetivo, então:

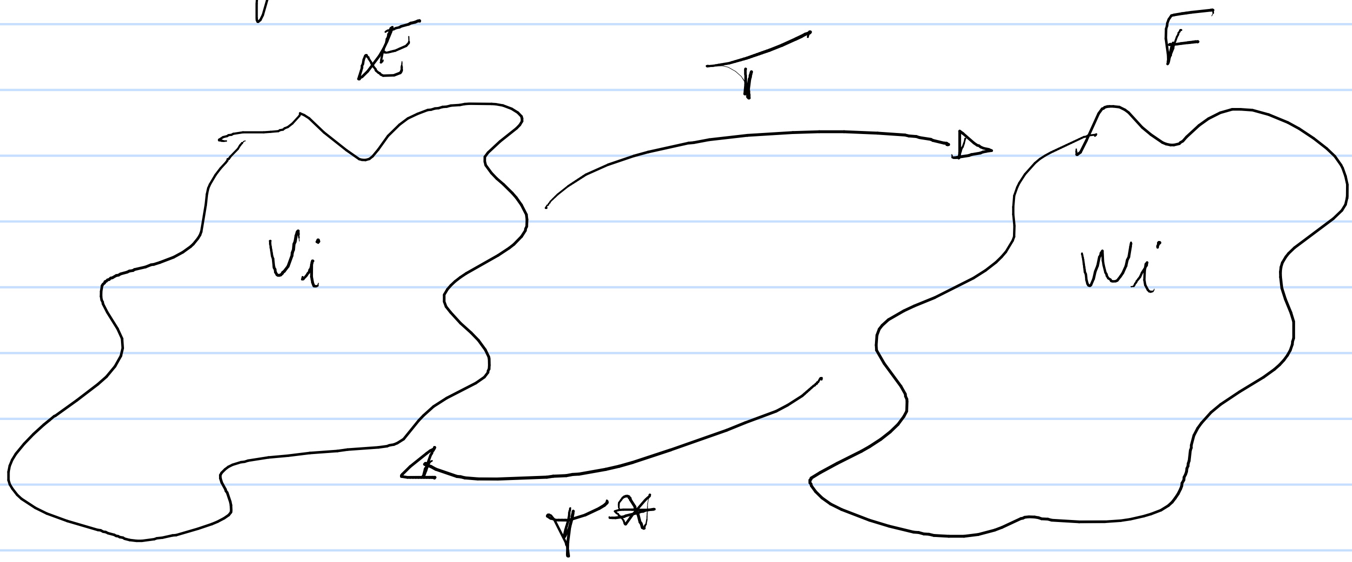
$Im T^* \subset E$ e $(nuc T^*)^{\perp} \subset E$, assim: $\langle T^* w_i, v_i \rangle = \langle v_i, w_i \rangle = 0$

Então $Im(T^*) = (im(T^*)^\perp) = \{0\} \in E$

Portanto T^* é injetiva

34) Sejam E, F espaços euclidianos e $T: E \to F$ uma aplicação linear. Mostre que:

$T^*T: E \to E$ e $TT^*: F \to F$ tem o mesmo posto de T (e de T^*).



Posto: a dimensão da imagem, ou seja, igual ao número de linhas não nulas da matriz na forma escada.

Temos que $T^*T: E \to E$, ou seja:

$$T^*T(v_i) = T^*(w_i) = v_i$$

Então para cada v_i temos um w_i, e para $v=0$ temos o $w=0$, portanto a T é sobrejetiva.

Temos que $TT^*: F \to F$, ou seja:

$$TT^*(w_i) = T(v_i) = w_i$$

Assim temos que E é isomorfo a F, portanto se $b_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base de E e $b_2 = \{w_1, \dots, w_n\}$ é uma base de F, então:

$\mathrm{im}\, T = \mathrm{im}\, T^*$ e $\mathrm{Nuc}\, T = \mathrm{Nuc}\, T^*$

Como $E = \mathrm{Nuc}\, T^* \oplus \mathrm{im}\, T = (\mathrm{Nuc}\, T^*)^\perp$
e $F = \mathrm{Nuc}\, T \oplus \mathrm{Im}\, T^* = (\mathrm{Nuc}\, T)^\perp$

Então: $E = F$

$$\mathrm{Nuc}\, T^* \oplus (\mathrm{Nuc}\, T^*)^\perp = \mathrm{Nuc}\, T \oplus (\mathrm{Nuc}\, T)^\perp$$

Como a imagem do núcleo é nula, então $\mathrm{Nuc}\, T^* = 0$ e $\mathrm{Nuc}\, T = 0$, portanto:

$$(\mathrm{Nuc}\, T^*)^\perp = (\mathrm{Nuc}\, T)^\perp$$
$$\mathrm{Im}\, T = \mathrm{Im}\, T^*$$

Portanto T e T^* tem o mesmo posto.

35) Seja E um espaço com produto interno e $\alpha, \beta \in E$ vetores fixos.

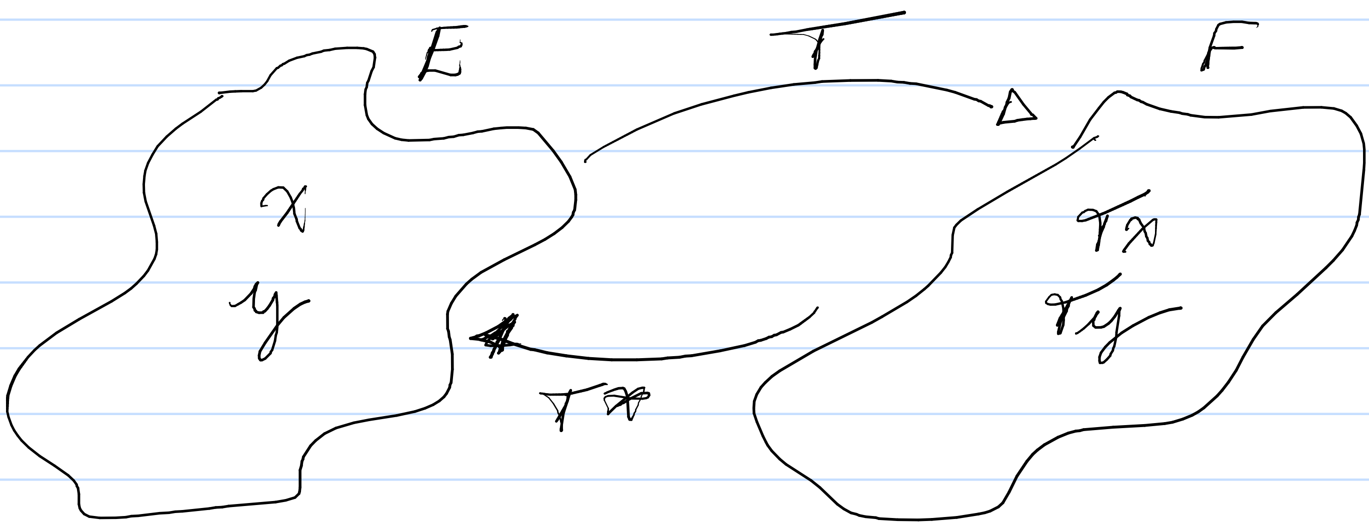
Mostre que $Tx = \langle x, \alpha \rangle \beta$ define uma aplicação linear em E.

Temos que $E = \{x, \alpha, \beta, \dots\}$, como é tem um produto interno e pelo teorema de representação de Riesz, temos que:

$$\langle x, \alpha \rangle = Tx \quad e \quad \beta = T\alpha$$

Mostre que T^* existe e obtenha sua expressão.

36) Um isomorfismo dos espaços com produto E e F é uma bijeção linear $T: E \to F$ que satisfaz, adicionalmente, $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in E$ (isto é, T é uma isometria).



Seja $T: E \to F$ uma aplicação linear entre os espaços euclidianos E e F, com dim E = dim F. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

a) T preserva o produto interno.;

Escolhemos uma base ortonormal sendo $\{v_1, \dots, v_N\}$ e $\{w_1, \dots, w_N\}$ de E e F, respectivamente.

Pelo teorema de representação de Riesz, temos uma única representação da transformação linear:

$T: E \to F$, onde $Tv_i = w_i$ para cada i, e então T para cada elemento da base de F. Além do mais, se:

$v = a_1 v_1 + \dots + a_N v_N$

é um elemento arbitrário de E, então $Tv = a_1 w_1 + \dots + a_n w_n$ e pelo teorema de pitágoras:

$$\|Tv\|^2 = a_1^2 + \dots + a_n^2 = \|v\|^2$$

O mesmo vale p/ T^*, onde:

$$T^* w_i = v_i$$

b) T é um isomorfismo (de espaço com produto interno).

Assumimos que existe um produto interno $\langle \cdot , \cdot \rangle$ sobre V fazendo T uma isometria. Então existe uma base ortonormal:

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$

Tomamos uma representação em matriz do nosso automorfismo T: B: $A = [T]_B$. Então:

$$[Tv]_B = [T]_B [v]_B$$

Onde $[u]_B$ é a coordenada do vetor $u \in E$.

Temos que: $\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle v_i, j \rangle = \delta_{ij}$

Temos a bilinearidade do produto interno que implica:

$\langle Tv_i, Tv_j \rangle = \langle [Tv_i]_B, [Tv_j]_B \rangle = \langle [T]_B [v_i]_B, [T]_B [v_j]_B \rangle = \langle Ae_i, Ae_j \rangle = \langle A_i, A_j \rangle$

Temos que: $\langle A_i, A_j \rangle = \delta_{ij}$

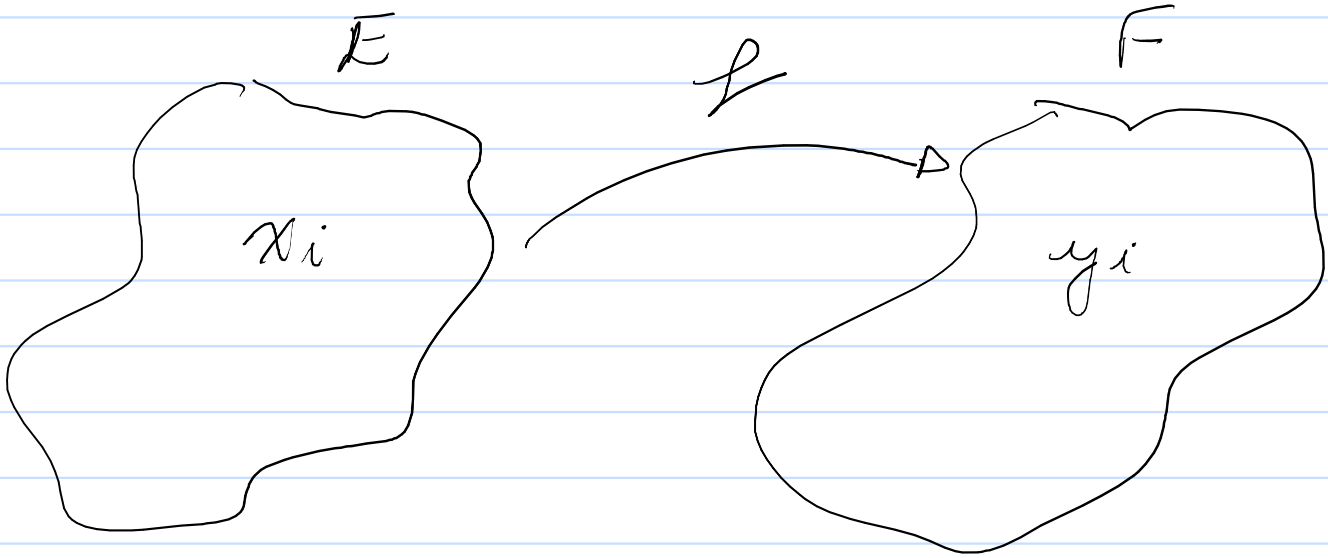
Temos que as colunas de A forma uma base ortonormal de R^n, então:

$$A = [T]_B \text{ é uma matriz ortogonal}$$

C) D) Todo que fiz foi baseado em bases ortonormais, então esta respondido.

u) Sejam B e C bases ortonormais de E e F, respectivamente. Mostre também que T_B^C é uma matriz ortogonal unitária se, e somente se, T for uma isometria.

37) Sejam E, F espaços euclidianos e $f: E \rightarrow F$ uma aplicação que preserva o produto interno. Mostre que f é linear.



Teorema: Sejam V e W espaços euclidianos (tem produto interno). Se $T: V \rightarrow W$ é uma isometria tal que $T(0)=0$, então T é linear.

Tomamos f como uma aplicação linear e tomamos x_i como a base de E e y_i como a base de F. Assim ter:

$$f(x_0) = y_0 = 0 \text{ para } x_0 = 0$$

Então pelo teorema temos que f é linear.

Assim tomamos $f(x_1+x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ e $f(\lambda x_1) = \lambda f(x_1)$, para qualquer $x_1, x_2 \in E$ e para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Como f é uma isometria, vale que:

$$\|fx_1 - fx_2\| = \|x_1 - x_2\| = \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle^{1/2}$$

$$\langle fx_1 - fx_2, fx_1 - fx_2\rangle^{1/2} = \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle^{1/2}$$

Temos que $f(0) = 0$ e $\|f(x_1)\| = \|x_1\|$ e $\|fx_2\| = \|x_2\|$.

Entretanto: $\|f(x_1) - f(x_2)\|^2 = \langle f(x_1) - f(x_2), f(x_1) - f(x)_2\rangle =$

$\langle f(x_1), f(x_1)\rangle + \langle f(x_2), f(x_2)\rangle - \langle f(x_1), f(x_2)\rangle - \langle f(x_2), f(x_1)\rangle$

$\|f(x_1)\|^2 + \|f(x_2)\|^2 - 2\langle f(x_1), f(x_2)\rangle$

E também: $\|f(x_1) - f(x_2)\|^2 = \|x_1 - x_2\|^2 = \langle x_1 - x_2, x_1 - x_2\rangle =$

$\langle x_1, x_1\rangle + \langle x_2, x_2\rangle - \langle x_1, x_2\rangle - \langle x_2, x_1\rangle$

$= \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 - 2\langle x_1, x_2\rangle$

Então:

$$\cancel{\|fx_1\|^2} + \cancel{\|fx_2\|^2} - 2\langle fx_1, fx_2\rangle = \cancel{\|x_1\|^2} + \cancel{\|x_2\|^2} - 2\langle x_1, x_2\rangle$$

Como $\|fx_1\|^2 = \|x_1\|^2$ e $\|fx_2\|^2 = \|x_2\|^2$

$$-\cancel{2}\langle fx_1, fx_2\rangle = -\cancel{2}\langle x_1, x_2\rangle$$

$$\langle f(x_1), f(x_2)\rangle = \langle x_1, x_2\rangle$$

38) Seja E um espaço euclidiano complexo. Dê exemplo de uma isometria $M: E \to E$, com $M(0) = 0$, que não é linear.

Uma isometria em $\mathbb{C}$ é uma função M que preserva distância ou, o que no caso é o mesmo, conserva o módulo já que a distância entre 2 complexos:

z_1, z_2 é $|z_1 - z_2|$

Assim, M satisfaz a condição:

$$|M(z_1) - M(z_2)| = |z_1 - z_2|$$

Também devemos considerar pelo enunciado que $M(0) = 0$.

Onde $z = a + bi$ e $\bar{z} = a - bi$

Assim se M representa simetria, temos que