Forma de Jordan

A forma diagonal é a melhor matriz similar para facilitar manipulações, então busca-se a matriz diagonal sempre que possível.

① Dada uma matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 3, \quad p_A(x) = (\lambda-3)^2$$
$$m_A(x) = (\lambda-3)^2$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0x + 5y = 0 \\ 0x + 0y = 0 \end{cases}$$

Uma linha nula, gera um autovetor.

$y = 0$, x é qualquer valor.

$$\lambda = 3, \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Posto}(A - 3I) = \begin{array}{cc} & \text{Pivo} \\ & \downarrow \end{array}\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

↳ Número de Pivos

A nulidade:

$N_j = N - p$

$N_i = 2 - 1 = 1$

↳ grau de liberdade

Como a nulidade $N_i = 1$, implica de ter um autovetor. Ou seja uma solução.

Como tem somente uma solução, não se pode obter a matriz P dos autovetores.

$P = [V_1 \quad V_2]$ porque tem somente um autovetor. Não se pode construir a matriz P e P^{-1}.

Podemos forçar uma matriz P, dado que precisamos construir uma matriz p/ facilitar as manipulações.

$AP = P$?

$$\begin{array}{c} \lambda \\ \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

- Das famílias de matrizes similares de A, é a que mais se aproxima da matriz diagonal.

$P^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} P = A \rightarrow P^{-1} \cdot 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} P = A \rightarrow$

$P^{-1} 3 . P = A \rightarrow 3 P^{-1} . P = A \rightarrow 3 . I = A$

Então ao forçar temos que a similar, é ela mesma para autovalores repetidos.

Então: $A \sim \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $(A-3I)\vec{x}=0$, implica em v_1

Então $(A-3I)v_2 \neq 0$, assim:

$$A[v_1 \ v_2] = [\lambda v_1 \ \ ?] = P[J] = P\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A[v_1 \ v_2] = [\lambda v_1 \ \ v_1 + \lambda v_2]$$

$(A-\lambda I)v_2 \neq 0$, como $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ então

$$(A-\lambda I)v_2 = v_1 \therefore Av_2 = v_1 + \lambda v_2$$

$$\begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{cases} \lambda v_1 + 0 v_2 \\ v_1 + \lambda v_2 \end{cases}$$

Poriada $\rightarrow$ $AP = PJ$ $A \sim P$

$$J = P^{-1}AP, \quad A = PJP^{-1}$$

Então a idéia é aproximar uma matriz que não pode ser diagonalizada para uma matriz mais próxima possível.

Detalhes importantes:

1) Posto J = Posto A
2) $tr(J) = tr(A)$
3) $det(J) = det(A)$
4) $\lambda(J) = \lambda(A)$

Então dada: $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$tr(A) = tr(J) = 6$, $det(A) = det(J) = 9$, $\lambda(A) = \lambda(J)$, ~~Posto~~ (J) = Posto (A): Número de linhas ou colunas L.I

$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$, $p_T(x) = \lambda(4-\lambda)+4 = -\lambda^2+4\lambda+4 = 0 \rightarrow (\lambda-2)^2$

1) Autovalores $\lambda = 2, 2$, $p_T(x) = (\lambda-2)^2$:
$m_T(x) \overset{!}{=} (\lambda-2)^2$

2) geramos os Autovetores:

$$\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -2x+4y=0 \\ -x+2y=0 \end{cases}$$

$\alpha_1 = 2\alpha_2$, logo α_2 gera e gera um autovetor

$$\begin{cases} -2x+4y=0 \\ \cancel{-x+2y=0} \end{cases}$$

$+2x=4y$

$x=2y$

Fixamos o y.

$(x,y)=(2y,y)=y(2,1)$

para $\lambda=2$ temos $v_1=(2,1)$, com um autovetor não construímos uma matriz P invertível.

E também: $A-2I=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

As linhas/colunas são L.D, logo o posto é 1. ∄1 pivo

Para uma Matriz 2x2, sempre teremos um autovetor se $\lambda_1=\lambda_2$. Ou seja, uma solução.

$(A-\lambda I)x=0 \rightarrow \vec{v}_1$. Então a partir de v_1 obtemos v_2.

$(A-\lambda I)v_2 \neq 0$ e $=v_1$

$Av_2-\lambda v_2=v_1$

$Av_2=v_1+\lambda v_2$

Assim $A[v_1\ v_2]=[\lambda v_1\quad v_1+\lambda v_2]$

Ex: $\begin{cases} -4y = 8 \\ x+4y-7 \end{cases}$

$A = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$; $p_T(\lambda) = \lambda(4-\lambda)+4 = -\lambda^2+4\lambda+4 =$
$p_T(\lambda) = (\lambda-2)^2$
$m_T(\lambda) = (\lambda-2)^2$

$\lambda = 2, 2$

- Buscamos os autovetores p/ $\lambda=2$.

$(A-2I) = \begin{bmatrix} -\lambda & -4 \\ 1 & 4-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda=2} \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Possui posto 1, porque as linhas/colunas são l.d., e tem somente um pivô.
Nulidade $N_i = 2-1=1$, isto significa que temos pelo menos uma solução, ou seja, um auto-vetor.

Temos que o Núcleo da transformação, como:
$(A-2I) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, então Nuc $(A-2I)$

$$\begin{cases} -2x - 4y = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow x = -2y$$

$V_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, Idéia de Jordan: $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$

precisamos partir de: $AV_2 = V_1 + \lambda V_2$, ou $(A - \lambda I) V_2 = V_1$.

Então:

$$\begin{bmatrix} -2 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$, para encontrar V_2.

$\begin{cases} 2a - 4b = -2 \\ a + 2b = 1 \end{cases}$, $L_1 = -2L_2$, temos uma infinidade de soluções.

Assim se $b = 0$, $a = 1$. Assim $V_2 = (1, 0)$

Assim $P = [V_1, V_2] = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = ?$ $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ +2 & 1 \end{bmatrix}$$

λV_1 $\quad V_1 + 2V_2$

$2V_1$

$$A = [V_1 \; V_2] = [\lambda V_1 \;\; V_1 + \lambda V_2] \rightarrow \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}}_{AP} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}}_{J}$$

$$P^{-1}AP = J$$
$$P.P^{-1}AP = PJ$$
$$IAP.P^{-1} = PJP^{-1}$$
$$A.I = PJP^{-1}$$
$$A = PJP^{-1}$$

$$A\vec{x} = \vec{C}$$
$$PJP^{-1}\vec{x} = \vec{C}$$
$$P^{-1}PJP^{-1}\vec{x} = P^{-1}\vec{C}$$
$$IJP^{-1}\vec{x} = P^{-1}\vec{C}$$
$$JP^{-1}P\vec{x} = P^{-1}\vec{C}P$$
$$JI\vec{x} = P^{-1}\vec{C}P$$
$$J\vec{x} = P^{-1}\vec{C}P$$
$$J\vec{x} = DP$$

Como $P^{-1}\vec{C} = D$

Então:

$$J.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P^{-1}\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ -7 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y = -7 \\ 0x + 2y = -6 \end{cases}$$

- $2y = -6$
  $y = -3$
- $2x + y = -7$
  $2x = -7 - y$
  $2x = -7 - (-3)$
  $2x = -4$
  $x = -2$

Assim a solução do sistema dado na base dos vetores $v_1 = (-2, 2)$ e $v_2 = (1, 0)$ é $y = (-2, -3)$.

Para obter a resposta na base canônica:

$$y = P^{-1}x$$
$$Py = PP^{-1}x$$
$$Py = x$$

$\Rightarrow x = Py$, para obter uma resposta na base canônica.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{bmatrix} -2 \\ -3 \end{bmatrix}}_{y} = \begin{bmatrix} +1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 2: Suponha:

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 0z = a \\ 0x + 2y + z = b \\ 0x + 0y + 2z = c \end{cases}$$

$$2z = c$$
$$z = c/2$$
$$2y + z = b$$
$$2y = b - z$$
$$y = \frac{\frac{b - c/2}{2}}{2}$$

$$y = \frac{b}{2} - \frac{c}{4} = \frac{2b - c}{4}$$

$$2x + y = a$$
$$2x = a - y$$
$$x = \frac{a - \frac{2b-c}{4}}{2} = \frac{a}{2} - \frac{2b-c}{8} \Rightarrow \frac{8a - 2b - c}{16}$$

Exemplo 3:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$3z = c \qquad -y + 2c = b \qquad 2x + 3y - z = a$

Exemplo 4:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$2x = a \qquad -y = b \qquad 3z = c$

$$\begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \ddots \\ & 0 & & 1 \\ & & & \lambda \end{bmatrix}$$

Superdiagonal

Discussão de uma matriz A cujos autovalores são idênticos:

A_{3x3}: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

Caso 1: $Pt(A - \lambda I) = 1$.

$p(x) = (x - \lambda)^3 = 0$

Seja $\lambda = a$

A nulidade: $Ni = N - p = 3 - 1 = 2$, então temos 2 autovetores (solução), a liberdade p/ gerar o subespaço é 2. (variáveis livres).

O autovetor (oculto) é chamado de autovetor generalizado, também nesta situação com $M_a \neq M_g$ não temos como construir a matriz diagonal.

$Posto(A-\lambda I) = 1 = Posto(J-\lambda I)$

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \\ 0 & \lambda & \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

"Temos somente um pivô"

$$(J-\lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \qquad (J_2-\lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Caso 2: $Posto(A-\lambda I) = 2 = Posto(J-\lambda I)$

$N_1 = 3 - 2 = 1$, um autovetor para gerar o subespaço. Temos 2 autovetores generalizados.

$$J_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, (J_1 - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}, (J_2 - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

"Em ambas temos 2 pivos."

Caso 3: Posto$(A-\lambda I) = 3 =$ Posto $(J - \lambda I)$

Impossível.

$Ax = \lambda x$, e $(A - \lambda I)x = 0$

Como para termos solução diferente da trivial $(A - \lambda I) = 0$

Ou seja, 3 pivos: $Ni = 3-3 = 0$. Sem liberdade para gerar um subespaço.

Assim a solução é única e trivial.

Exemplo:

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2y - z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 = \det \neq 0$$

A única solução: $x = y = z = 0$

$\to$ 3 vetores L.I

. 3 Pivos

Caso 4: Posto $(A-\lambda I)=0=$ Posto $(J-\lambda I)$

$Ni = N - p = 3 - 0 = 3$

Geramos 3 autovetores, ou seja não temos nenhuma linha ou coluna l.I. somente l.d.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{(A-\lambda I)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Forma de Jordan: Matrizes P e P^{-1}

A_{3x3}. Autovalores idênticos

$A\bar{x} = \bar{C}$

$P=$ matriz formada pelos autovetores,
Se sabermos o posto $(A-\lambda I)$ podemos escrever J; $J \sim A$

1) posto$(A-\lambda I)=1$, $Ni = 3-1=2$. Com isso temos 2 vetores linearmente independente, p/ gerar o núcleo.
E consequentemente o subespaço.
Temos 2 soluções do sistema homogêneo

$(A-\lambda I)x = 0$. $\quad Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2$

a) Caso 1 = v_1 e v_2:

$Av_3 = v_2 + \lambda v_3$, assim: $\lambda_1 = \lambda_2$

$$A\underbrace{[v_1 \ v_2 \ v_3]}_{P} = [\lambda_1 v_1 \ \ \lambda_2 v_2 \ \ v_2 + \lambda v_3]$$

$$AP_1 = \underbrace{[v_1, v_2, v_3]}_{P_1} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{J_1}$$

$Av_3 = v_2 + \lambda v_3$

b) Caso 2: v_1 e v_3:

$A = [v_1 \ v_2 \ v_3] = [\lambda v_1 \ \ Av_2 \ \ \lambda v_3]$

$Av_2 = v_1 + \lambda v_2 \qquad \qquad Av_2 \to v_1 + \lambda v_2$

$$AP_2 = \underbrace{[v_1 \ v_2 \ v_3]}_{P_2} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{J_2}$$

$Av_2 = v_1 + \lambda v_2$

Então: $AP_1 = P_1 \cdot J_1$, $A \sim J_1$

$AP_2 = P_2 \cdot J_2$, $A \sim J_2$

Caso 2: posto$(A-\lambda I)$ = posto$(J-\lambda I) = 2$

Portanto $N_i = 3-2 = 1$.
Temos uma solução, ou um autovetor.
Com isso temos 2 autovetores generalizados,

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ V_{13} \end{bmatrix},$$ V_2 e V_3 são autovetores generalizados (criados)

$$AV_2 = V_1 + \lambda V_2$$
$$AV_3 = V_2 + \lambda V_3$$

$$\rightarrow A\overbrace{[V_1 \; V_2 \; V_3]}^{P} =$$

$$[\lambda V_1, \; V_1+\lambda V_2 \;\; V_2+\lambda V_3] =$$

$$\underbrace{[V_1 \; V_2 \; V_3]}_{P_3} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}}_{J_3}$$

$$(A-\lambda I) =$$

$$(J-\lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Posto$(J-\lambda I) = 2$

Exercício: Resolver o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y + 8z = 0 \\ 2y + 3z = 7 \\ 5z = 5 \end{cases}$$

Resposta:
$y = 2$
$z = 1$
$x = -5$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$p_T(x) = (x-2)^2 \cdot (x-5)$
$m_T(x) = (x-2)^2 \cdot (x-5)$

Para $\lambda = 2$ $(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

$\text{Posto}(A - 2I) = 2$

$\nu_i = 3 - 2 = 1$, um vetor generalizado, ou seja possui somente uma solução!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 0x + y + 8z = 0 \\ 0x + 0y + 3z = 0 \\ \cancel{0x + 0y + 3z = 0} \end{cases}$$

Pertence ao mesmo subespaço.

$z = 0$
$y + 8z = 0$
$y = -8 \cdot 0 = 0$
$y = 0$

x_1 pode ser qualquer valor.
$V_1 = (1, 0, 0)$

$Av_2 = v_1 + \lambda v_2$

$(A - 2I)v_2 = v_1 \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 0a + b + 8c = 1 \\ 0a + 0b + 3c = 0 \rightarrow c = 0 \\ 0a + 0b + 3c = 0 \rightarrow 3c = 0 \rightarrow c = 0 \end{cases}$$

$b + 8c = 1$ $\quad a =$ qualquer valor

$b + 8.0 = 1$

$b = 1$ $\quad V_2 = (1, 1, 0)$, generalizado.

Para $\lambda = 5$, $(A - \lambda I) = 0$

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 & 8 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} -3x + y + 8z = 0 \\ 0x - 3y + 3z = 0 \\ \cancel{0x + 0y + 0z = 0} \end{cases}$$

Um autovetor.

$-3y + 3z = 0$

$3y = 3z$

$y = z$

Fixamos o z.

$-3x + y + 8z = 0$

$-3x + 9z = 0$

$-3x = -9z \rightarrow x = 3z$

$V_3 = (3z, z, z) = z(3, 1, 1)$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad P^{-1}.A.P = J$$

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}.A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J.$$

$$A\vec{x} = \vec{c}$$

$$P^{-1} P J P^{-1} \bar{x} = P^{-1} \vec{c}$$

$$I J \underbrace{P^{-1} \bar{x}}_{y} = \vec{D}$$

$$I J y = \vec{D}$$

$$J y = \vec{D}$$

$$A [v_1 \ v_2 \ v_3] = [2v_1 \ \ v_1 + 2v_2 \ \ 5v_3]$$

$\underline{\lambda = 2}$

$$[v_1 \ v_2 \ v_3] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = [2v_2, v_1 + 2v_2, 5v_3]$$

Posto e Multiplicidade do Autovalor

Exemplo:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} & & 1 & 2 & & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & -3 & 13 & & & & \\ & 2 & 5 & 0 & & & \\ & & 2 & 8 & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & 0 & & & 3 & & \\ & & & & & 3 & \\ & & & & & & 5 \end{bmatrix} \end{array} \quad 7 \times 7$$

$$p_T(\lambda) = (\lambda-2)^4 \cdot (\lambda-3)^2 \cdot (\lambda-5)$$
$$m_T(\lambda) = (\lambda-2)^4 (\lambda-3) \cdot (\lambda-5)$$

Para $\lambda = 2$ a multiplicidade é 4, posto$(A-2I)$?

posto$(A-2I) = N -$ número de colunas sem pivô:

posto$(A-2I) = 4$

$N_i = 7 - 4 = 3$

Para $\lambda=2$ a Ma $=4$, mas o Ni (Nulidade é 3). Então teremos soluções iguais a zero, ou seja 3 autovetores. Assim p/ $\lambda=2$ temos 1 autovetor generalizado.

Para $\lambda=3$ a Ma $=2$, posto$(A-3I)=6$
Ni $=7-6=1$ um autovetor. Assim teremos um autovetor generalizado.

Para $\lambda=5$ a Ma $=1$, posto$(A-5I)=6$
Ni $=7-6=1$ um autovetor. Assim para $\lambda=5$ não teremos autovetor generalizado.

Estes autovetores e vetores generalizados vão formar J.

$$A=[V_1 \ V_2 \ V_3 \ V_3+\lambda V_4 \ V_5 \ V_5+\lambda V_6 \ V_7]=PJ.$$

$$P=[V_1 \dots V_7]$$

Objetivo Principal: Forma de Jordan

Resolver o sistema de equações lineares:

$Ax = c$, A(matriz) e c (vetor independente).

A': matriz triangular

Ex: $\left\{\begin{array}{l} x + y = 1 \\ x - y = 0 \end{array}\right.$ com A sobre os coeficientes e c sobre os termos independentes.

$$A' = \begin{bmatrix} x & & X \\ & x & \\ 0 & & x \end{bmatrix}$$

Autovalores de A ou A',

$|A' - \lambda I| = 0$ — autovalores, geram:

$p^A(x) : (\lambda_1 - x)^{r_1} \cdots \cdots (\lambda_2 - x)^{r_n}$

Com A ou A', obtemos n (número de linha/número de coluna), p (posto da matriz) e Ni (Nulidade: grau de liberdade para gerar o espaço ou subespaço).

$$Ni = n - p$$

Ni: Número de soluções, ou número de autovetores para um dado autovalor.

$$(A - \lambda I)x = 0$$

posto (número de pivos, ou linhas/colunas em l.i).

Com a multiplicidade α, n_i podemos construir a forma de cada vetor dos autovetores P

Ainda se desconhece cada autovetor

$$A = [V_1 \; V_2 \; V_3] = [\lambda V_1 \; \lambda V_2 \; \underbrace{V_2 + \lambda V_3}_{*}]$$

$$V_1 = \begin{bmatrix} V_{11} \\ V_{12} \\ V_{13} \end{bmatrix}, \; V_2 = \begin{bmatrix} V_{21} \\ V_{22} \\ V_{23} \end{bmatrix}, \; V_3 = \begin{bmatrix} V_{21} + \lambda V_{31} \\ V_{22} + \lambda V_{32} \\ V_{23} + \lambda V_{33} \end{bmatrix}$$

* Autovetor generalizado

Então:

$$[V_1 \; V_2 \; V_3] \cdot \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Se não tiver o 1, não teremos autovetor generalizado.

Calcular os autovetores respectivos à λ:

$Ax = C$ $\quad A = PJP^{-1}$ $\quad \rightarrow IJy = D$

$PJP^{-1}x = C$ $\quad\quad Jy = D$

$P^{-1}PJP^{-1}x = P^{-1}C$

Polinomio Minimal

Sem calcular os autovetores:

$$A \cdot [V_1\ V_2\ V_3] = [\lambda V_1\ \ \lambda V_2\ \ V_2+\lambda V_3] \rightarrow$$

$$[V_1\ V_2\ V_3] \cdot \overbrace{\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}}^{J}$$

Alem calcular os autovetores, vamos obter a matriz J. $A[V_1\ V_2\ V_3]$ = Forma AV

$Ax = C$, Com o J calcula-se os autovetores. Dada:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \therefore A - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \therefore A_1 - \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda I)^2 = \underbrace{(A-\lambda I)}_{\neq 0} \cdot \underbrace{(A-\lambda I)}_{\neq 0} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \therefore (A-\lambda I)^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \therefore (A-\lambda I)^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \therefore (A-\lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\hookrightarrow (A-\lambda I)^3 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \therefore (A-\lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\hookrightarrow (A-\lambda I)^2 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \therefore (A-\lambda I) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$\hookrightarrow (A-\lambda I)^4 = 0$$

$$p_T(x) = (\lambda-2)^5 \cdot (\lambda-8)^2$$

$$J_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 8 & 1 \\ & & & & & & 8 \end{bmatrix}$$

$$(J_1 - 2\lambda I)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 6 & 1 \\ & & & & & & 6 \end{bmatrix}$$

posto$(J_1 - 2\lambda I) = 3$

$N_i = 7 - 3 = 4$

$Ma(2) = 5 - N_i = 1$

4 soluções (autovetores), 1 autovetor generalizado

$J_1 \neq J_2$, $p_T(1) = p_T(2)$

$$p_T(x) = (\lambda-2)^5 \cdot (\lambda-8)^2$$

$$J_2 = \begin{bmatrix} 2 & & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 2 & 1 & & \\ & & & & 2 & & \\ & & & & & 8 & 1 \\ & & & & & & 8 \end{bmatrix}$$

$$(J_2 - 2I)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ & 0 & & & & & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 6 & 1 \\ & & & & & & 6 \end{bmatrix}$$

posto$(J_2 - 2I) = 3$

$N_i = 7 - 3 = 4$

$Ma(2) = 5 - N_i = 1$

1 autovetor generalizado, 4 soluções (autovetores).