Seja V um espaço euclidiano complexo e $T: V \to V$ um operador linear tal que:

$$T^* = T$$

Mostre que se T possui autovalor, então este auto-valor é um número real.

Com $T^* = T$, então é autoadjunto e sua matriz é igual a sua transposta.

Temos o Lema 1: Seja $T: V \to V$ um operador linear, com E um espaço euclidiano (sobre $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), V tem produto interno fixado.) Valem:

i) $T = T^* \to \langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R} \ \forall v \in V$

ii) Se $\langle Tv, v \rangle \in \mathbb{R}$, $\forall v \in V$ e V for um espaço vetorial complexo, então: $T = T^*$

Lema 2: Considere $T: V \to V$ um operador linear com V um espaço vetorial complexo (sobre $\mathbb{C}$). Vale que:

$$\langle Tv, v \rangle = 0 \leftrightarrow T \text{ é o operador nulo.}$$

Temos que $T = T^*$, logo a matriz A é sua a sua transposta A^t.

Temos que se T é auto-adjunto então T é normal, assim:

$$\operatorname{Nuc} T = \operatorname{Nuc} T^*$$
$$\langle Tv, Tv \rangle = \langle T^*Tv, v \rangle = \langle TT^*v, v \rangle =$$
$$\langle T^*v, T^*v \rangle$$

Assim $Tv=0 \leftrightarrow T^*v=0$

Também para autovetores de um operador normal, correspondem autovalores distintos, então:

Tomando u, v autovetores, então:
$$(T-\lambda I)v = 0 \text{ e } (T^* - \bar{\lambda} I) = 0$$
Agora v também é autovetor de T^* com autovalor $\bar{\lambda}$:

$$(\alpha - \lambda) \langle u, v \rangle = \langle \alpha u, v \rangle - \langle u, \bar{\lambda} v \rangle$$
$$= \langle Tu, v \rangle - \langle u, T^* v \rangle$$
$$= \langle Tu, v \rangle - \langle Tu, v \rangle$$
$$= 0$$
Portanto são ortogonais

E como T é auto-adjunto, temos λ sendo um autovalor de T, e temos v sendo um vetor diferente de zero em V, sendo que $Tv = \lambda v$, então:

$$\lambda \|v\|^2 = \langle \lambda v, v \rangle = \langle Tv, v \rangle = \langle v, Tv \rangle =$$
$$\langle v, \lambda v \rangle = \bar{\lambda} \|v\|^2$$

Assim $\lambda = \bar{\lambda}$, e temos que λ é real.