Aula 2 - Assíncrona

<u>Notação</u>: $L(V) = \{T: V \to V \mid T \text{ é linear}\}$

<u>Exercício</u> 1) Mostrar que $L(V)$ é um espaço vetorial.

2) Calcule a dimensão de $L(V)$

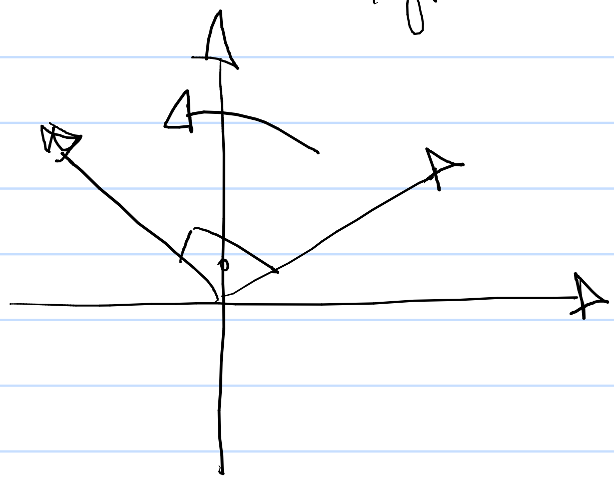
<u>Lembrando que</u>: $\dim V < \infty$ e V está definida sobre um corpo K ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

3) Sobre (1) e (2) quando $V = \mathbb{Q}[x]$, base p/ V é $\{1, x, x^2, \ldots\}$, base infinita.

<u>Definição</u>: Dado um operador linear $T \in L(V)$, dizemos que $\vec{v} \in V \setminus \{0\}$ é um auto-vetor associado ao auto-valor $\lambda \in K$ se $T(v) = \lambda . v$

Ex: Considere $\mathbb{R}^2$ e $T(x,y) = (-y, x)$

Para cada $(x,y) \xrightarrow{T}$ é rotacionamos $(-y, x)$



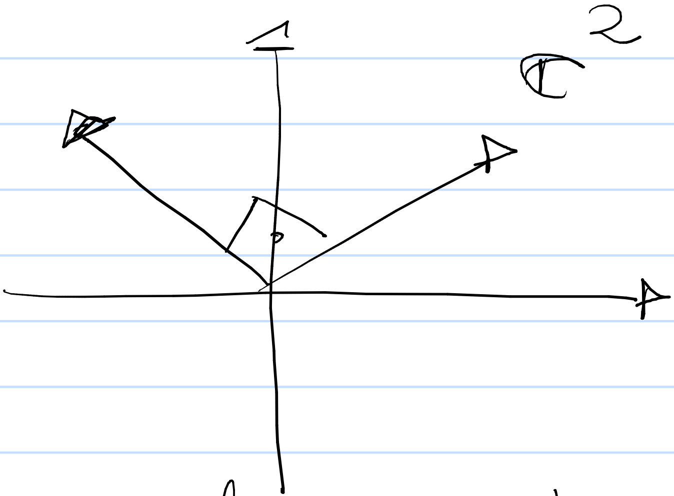
$T(v) = \lambda . v$ ∴ induz um sistema linear

$T(x,y) = (-y,x) = \lambda (x,y)$

$$\begin{cases} -y = \lambda x \\ x = \lambda y \end{cases}, \quad y \neq 0 \text{ ou } x \neq 0$$

$\lambda^2+1=0$, não tem solução em $\mathbb{R}$.

2) Ao trocar $\mathbb{R}^2$ por $\mathbb{C}^2$, $T(x,y)=(-y,x)$



$\mathbb{C}^2$ Tem autovalor

Def.: Dados $T\in\mathcal{L}(V)$ e λ um autovalor de T:

$$V(\lambda)=V_\lambda=\{v\in V \mid Tv=\lambda v\}$$

$V(\lambda)$ é chamado o auto-espaço associado a λ.

Exercício: V_λ é um subespaço vetorial de V (Vale para dimensão $V=+\infty$)

Teorema: Dado $T\in\mathcal{L}(V)$, vale que $\lambda\in K$ é um auto-valor de T se, e somente se, $T-\lambda Id_V$ não é injetivo.

Prova: Basta notar que v é auto-vetor associado a um auto-valor λ se, e somente se: $T(v)$, $T(v)=\lambda v$, assim λ é autovalor se e somente se $(Tv-\lambda Id_V)v=0$.

Teorema: Autovetores associados a auto-valores distintos são L.I.

Prova: Sejam $v_1, \ldots, v_N$ auto-vetores associados aos auto-valores $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ (Indução em N).

$\lambda_i = \lambda_j$, sempre que $i \neq j$

Assuma que $a_1, \ldots, a_N \in K$ são tais que

$$a_1 v_1 + \ldots + a_N v_N = 0 \quad (1)$$

Aplicando o operador T, ganhamos:

$$a_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + a_N \lambda_N v_N = 0 \quad (2)$$

Multiplicando (1) por λ_N ($\lambda_N \neq 0$) e fazendo

$$\lambda_N (1) - (2) = a_1(\lambda_N - \lambda_1) v_1 + \ldots + a_{N-1}(\lambda_N - \lambda_{N-1}) v_{N-1} = 0$$

Por hipótese, $\{v_1, \ldots, v_{N-1}\}$ é L.I. logo:

$$a_1 \underbrace{(\lambda_N - \lambda_1)}_{\neq 0} = \ldots = a_{N-1} \underbrace{(\lambda_N - \lambda_{N-1})}_{\neq 0} = 0$$

Porque todos os autovalores são distintos

Então $a_1 = \ldots = a_{N-1} = 0$

Resta mostrar que $a_N = 0$

Obs: Se T possui $\dim V$ autovalores distintos, então T possui uma base formada por auto-vetores.