Formas de Jordan

① Dado V um K espaço vetorial de dimensão finita.

Teorema: Seja $T: V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre K tal que:
$p_T(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_r)^{m_r}$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$, se $i \neq j$. Então $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, onde, para cada $i = 1, \ldots, r$, temos:

a) $\dim_K U_i = m_i$;
b) o subespaço U_i é T-invariante;
c) a restrição do operador $\lambda_i Id - T$ a U_i, é nilpotente.

Demonstração: Para cada $i = 1, \ldots, r$, considere a transformação:

$$T_i = \lambda_i Id - T : V \to V$$

Temos que:

Seja $T: V \to V$ um operador linear, onde V é um $\mathbb{K}$-espaço vetorial de dimensão finita. Então T é a soma direta de um operador nilpotente e um operador invertível. Além disso, tal decomposição é essencialmente única.

Onde $V = U_i \oplus W_i'$, onde U_i e W_i' são T_i-invariantes e as restrições de T_i a U_i e a W_i' são nilpotente e invertível, respectivamente.

Como U_i e W_i' são T_i-invariantes, então serão também T-invariantes. Sejam:

$$T': U_i \to U_i \quad e \quad T'': W_i' \to W_i'$$

As restrições de T a U_i e a W_i', respectivamente.

Segue que: $p_T(x) = p_{T'}(x) \cdot p_{T''}(x)$.

Observe que λ_i é o único autovalor de T' e, como λ_i não é autovalor de T'', concluímos que:

$$p_{T'}(x) = (x-\lambda_i)^{m_i}$$

Em particular, $\dim_K U_i = m_i$ e a interseção $U_i \cap (U_1 + \ldots + U_{i-1} + U_{i+1} + \ldots + U_r)$ é $\{0\}$.

Um simples argumento usando as dimensões dos espaços envolvidos implica que:

$$V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r,$$

Como queríamos. $\blacksquare$

Vamos agora utilizar o teorema anterior para construir a forma de Jordan de um operador linear.

Seja $T: V \to V$ um operador linear tal que: $p_T(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \ldots (x-\lambda_r)^{m_r}$, com $r \geq 1$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$.

Pelo Teorema 5.6.1:

Sejam $T: V \to V$ um operador linear, onde V é um espaço vetorial de dimensão finita sobre K tal que $p_T(x) = (x-\lambda_1)^{m_1} \cdots (x-\lambda_r)^{m_r}$, $m_i \geq 1$ e $\lambda_i \neq \lambda_j$ se $i \neq j$.
Então $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$, onde, para cada $i = 1, \ldots, r$, temos:

a) $\dim_K U_i = m_i$,
b) o subespaço U_i é T-invariante
c) a restrição do operador $\lambda_i Id - T$ a U_i é nilpotente.

Existe uma decomposição $V = U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ satisfazendo as propriedades (a), (b) e (c) do enunciado do teorema.
Para cada $i = 1, \ldots, r$, considere o operador $T_i = T|_{U_i} : U_i \to U_i$.

Temos que $\overline{T}_i = T_i - \lambda_i Id_{U_i}$ é nilpotente e, portanto, existe uma base B_i de U_i e números t_i, $m_{i1} \geq m_{i2} \geq \cdots \geq m_{it_i}$, tais que:

$$[T_i]_{B_i} = \begin{bmatrix} J_{m_{i1}}(\lambda_i) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & J_{m_{i2}}(\lambda_i) & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & 0 & & J_{m_{it_i}}(\lambda_i) \end{bmatrix}$$

Onde, cada $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, t_i$,

$$J_{m_{ij}}(\lambda_i) = \begin{bmatrix} \lambda_i & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \lambda_i & & 0 \\ \vdots & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda_i \end{bmatrix} \in M_{m_{ij}}(K)$$

É o correspondente bloco de Jordan, observe que, como a soma $U_1 \oplus \ldots \oplus U_r$ é direta, segue que $B = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_r$ é a base de V. Portanto,

$$[T]_B = \begin{bmatrix} [T_1]_{B_1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & [T_2]_{B_2} & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & [T_r]_{B_r} \end{bmatrix}$$

A matriz anterior é chamada de forma de Jordan associada a T. Os números t_i, m_{ij}, $i = 1, \ldots, r$ e $j = 1, \ldots, t_i$ estão bem determinados a partir de T, isto é, dado T, a forma de Jordan está bem determinada. Além disso, dois operadores lineares $S \in \mathcal{L}(V,V)$ e $T \in \mathcal{L}(V',V')$ têm a mesma forma de Jordan se e somente se existir um isomorfismo:

$$\phi : V \to V' \text{ tal que } \phi^{-1} T \phi = S$$

Exemplo: Seja $T : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^5$ um operador linear tal que: $p_T(x) = (x+1)^3 \cdot (x-2)^2$.

Observe que não estamos especificando a transformação linear. Na realidade, podem existir várias transformações lineares com os dados anteriores.

$$\begin{bmatrix} x+1 & & & & \\ & x+1 & & & \\ & & (x+1) & & \\ & & & (x-2) & \\ & & & & (x-2) \end{bmatrix} \quad (\lambda I - T)$$

$$\Rightarrow [T] = \begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}$$

Tomando uma base canônica de $\mathbb{C}^5$:

$$\begin{bmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 2 & \\ & & & & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{matrix} e_1=(1,0,0,0,0) \\ e_2=(0,1,0,0,0) \\ e_3=(0,0,1,0,0) \\ e_4=(0,0,0,1,0) \\ e_5=(0,0,0,0,1) \end{matrix}$$

$T(1,0,0,0,0) = (-1,0,0,0,0) \Rightarrow T: (e_1) = (-x)$

$T(0,1,0,0,0) = (0,-1,0,0,0) \Rightarrow T: e_2 = (-y)$

$T(0,0,1,0,0) = (0,0,-1,0,0) \Rightarrow T: e_3 = (-z)$

$T(0,0,0,1,0) = (0,0,0,2,0) \Rightarrow T: e_4 = (2w)$

$T(0,0,0,0,1) = (0,0,0,0,2) \Rightarrow T: e_5 = (2t).$

Então: $T(x,y,z,w,t) = (-x,-y,-z,2w,2t)$

As possíveis formas de Jordan associadas a T são:

$$JM_{ij}(\lambda i) = \begin{bmatrix} \lambda i & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda i & \cdots & 0 & \vdots \\ \vdots & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & \lambda i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

As possíveis diferenças entre as possíveis formas de Jordan, residem na subdiagonal variando a posição de números 1.

A rigor, as demonstrações feitas anteriormente possibitam a construção da forma de Jordan, mas na prática isso pode ser bastante trabalhoso. Contudo os resultados anteriores são de grande utilidade.

Sejam $T: V \to V$, ri e mij, $i = 1, \dots, t$ e $j = 1, \dots, ri$ como em (5.6.2). Para cada $i = 1, \dots, t$ e $j = 1, \dots, ri$, defina o polinômio $qij(x) = (x - \lambda i)^{mij}$. Chamamos de polinômio divisor elementar de T de multiplicidade mij associado a λi. Quando $mij = 1$, para algum i, j, dizemos que o correspondente polinômio qij é simples.

Segue facilmente da construção feita que o polinômio característico de T é o produto de todos os seus divisores elementares, isto é:

$$pT(x) = \prod_{i,j} qij(x)$$

Observe também que os números m_{ij} representam os tamanhos dos blocos de Jordan. É claro que T será diagonalizável se e somente se todos os blocos de Jordan tiverem tamanho 1.

Por outro lado, para cada i, teremos $m_{i1} \geq \dots\dots \geq m_{ir_i}$. De onde se conclui que T será diagonalizável se e somente se $m_{i1} = 1$ para todo $i = 1, \dots, t$.

Considere o bloco de Jordan $J_r(\lambda)$ com $\lambda \in K$. Observe que:

$$(J_r(\lambda) - \lambda Id_r)^r = 0, \text{ e}$$
$$(J_r(\lambda) - \lambda Id_r)^{r-1} \neq 0$$

Sejam agora $\lambda \in K$ e A a matriz $m \times m$ formada por blocos de Jordan $(J_{r_1}(\lambda), \dots\dots, J_{r_s}(\lambda))$ na diagonal e matrizes nulas no resto. Se $r_1 \geq r_i$, $\forall i = 2, \dots, s$, não é difícil ver que $(A - \lambda Id_m)^{r_1} = 0$ e $(A - \lambda Id_m)^{r_1 - 1} \neq 0$.

Utilizando esta observação, segue-se que:

$$q_{i1}(T_i) = (T_i - \lambda_i I d_{ri})^{m_{i1}} = 0,$$

Isto é, que o operador T_i é anulado pelo polinômio q_{i1}, $\forall i = 1, \dots, t$. Como a soma $T = T_1 \oplus \dots \oplus T_t$ é direta, concluímos que T é anulado pelo polinômio:

$$q_{11}(x) q_{21}(x) \dots q_{t1}(x) = (x-\lambda_1)^{m_{11}} (x-\lambda_2)^{m_{21}} \dots (x-\lambda_t)^{m_{t1}},$$

Mas não por nenhum outro grau menor. Pela definição dada, este polinômio é de fato o polinômio minimal $m_T(x)$.

Exemplos:

a) Seja $T: \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ a transformação linear dada por:

$$T(y_1, y_2, y_3, y_4) = (8y_1 - y_2, 4y_1 + 12y_2, 9y_3 + 2y_4, 2y_3 + 6y_4)$$

Com relação à base canônica $\underline{can}$, temos:

$T(e_1) = T(1,0,0,0) = (8-0,\ 4+0,\ 0+0,\ 0+0) =$
$= (8, 4, 0, 0)$

$T(e_2) = T(0,1,0,0) = (0-1,\ 0+12,\ 0,\ 0) = (-1, 12, 0, 0)$
$T(e_3) = T(0,0,1,0) = (0-0, 0+0, 9+0, 2+0) = (0,0,9,2)$
$T(e_4) = T(0,0,0,1) = (0-0, 0-0, 0+2, 0+6) = (0,0,2,6)$

$$A = [T]_{can} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) & T(e_4) \end{array} \\ \begin{bmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 12 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Portanto, $p_T(x) = \det(xId_4 - [T]_{can}) =$
$(x-10)^3(x-5)$.

Com relação ao polinômio minimal, temos as seguintes possibilidades:

$m_T(x)_1 = (x-10)(x-5)$
$m_T(x)_2 = (x-10)^2(x-5)$
$m_T(x)_3 = (x-10)^3(x-5)$

"É o polinômio de menor grau dado que aquela $p_T(x)$, se for T-cíclico são coincidentes."

Cada uma destas possibilidades trará uma possível forma de Jordan.

Nesse exemplo, como temos a transformação T dada explicitamente, é possível calcular o polinômio minimal. Observe que:

$$T(y_1, y_2, y_3, y_4) = (8y_1 - y_2, 4y_1 + 12y_2, 9y_3 + 2y_4, 2y_3 + 6y_4)$$

Assim: $p_T(x) = (A - 10\,Id_4) \cdot (A - 5\,Id_4)$

$$\begin{bmatrix} 8-\lambda & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 12-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda=10} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\lambda = 5 \rightarrow \begin{bmatrix} 8-5 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 12-5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9-5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

A

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & -5 & 0 & 0 \\ 20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nula $\qquad$ $B \neq 0$

Portanto $(x-10)(x-5)$ não pode ser polinômio minimal. No entanto:

$$(A-10Id_4)^2\cdot(A-5Id_4)=$$

A

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}^2 \cdot \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right] = 0$$

Nula B

Logo, $(x-10)^2\cdot(x-5)$ é o polinômio minimal de T. Isso quer dizer que a forma de Jordan de T terá um bloco de Jordan $J_2(10)$, pois a raiz 10 tem multiplicidade 2 em $m_T(x)$. Segue então que:

$J_2(10)$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

é a forma de Jordan de T.

$$p_T(x)=(x-10)^3(x-5)$$

b) Seja $T\in L(\mathbb{R}^4,\mathbb{R}^4)$ um operador linear com polinômio característico: $p_T(x)=(x+2)^4$.

$P_T(x) = (x+2)^4$

$$\begin{bmatrix} x+2 & & & \\ & x+2 & & \\ & & x+2 & \\ & & & x+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +2 \end{bmatrix}$$

$[A]_{can}$

$$p_T(x) = \det(xId_4 - A) = (x+2)^4$$

$$T(x, y, z, w) = (-2x, -2y, -2z, -2w)$$

Os candidatos a $m_T(x)$:

1) $(x+2)^4 = m_T(x)_1$

2) $m_T(x)_2 = (x+2)^3$

3) $m_T(x)_3 = (x+2)^2$

4) $m_T(x)_4 = (x+2)^1$

"O polinômio minimal é o polinômio que torna $p_T(x) = 0$, se for T-cíclico $p_T(x) = m_T(x)$."

O polinômio minimal é $m_T(x) = (x+2)^2$. Como $\lambda = -2$ é uma raiz dupla de $m_T(x)$, a forma de Jordan de T terá um bloco de Jordan $J_2(-2)$. Observe, no entanto, que a partir das informações dadas não é possível distinguir exatamente entre as seguintes possíveis formas de Jordan.

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Diferenças: entre a quantidade "1"

Outra fonte:

Teorema TF8: Seja $T \in L(V,V)$ onde $\dim V < \infty$ e p_T é um produto de fatores lineares. Então, existe uma base B de V tal que $[T]_B$ é uma matriz diagonal por blocos, onde os blocos diagonais são da forma:

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & 1 & c & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & c \end{bmatrix}$$

Mais ainda, só existe uma matriz deste tipo, salvo reordenação dos blocos.

Ex: $\begin{bmatrix} c & 0 \\ 1 & c \end{bmatrix}_{2\times 2}$, $\begin{bmatrix} c \end{bmatrix}_{1\times 1}$

$$\begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 \\ 0 & 1 & c \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

Todos na diagonal principal

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 3 & & & & \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc|c} c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c & 0 \ \ 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \end{array}\right] \\ \begin{array}{cccccc} & & & & & 1 \end{array} \end{array}$$

$p^T(x) = (x-c)^3 \cdot (x-d)^2 \cdot (x-e)^1$

$m^T(x) = (x-c)^3 \cdot (x-d) \cdot (x-e)$, se $c = d$, então:

$m^T(x) = (x-c)^3 (x-e)$

↓ Somente o bloco de maior grau

Propriedades:

- Os elementos da diagonal dos blocos são autovalores de T.
- Se $p^T(x) = (x-c_1)^{d_1} \cdots (x-c_k)^{d_k}$, a soma das dimensões dos blocos que correspondem a c_i e d_i.

- O polinômio minimal de T é $m_T(x) = (x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k}$, onde r_i é o tamanho do maior bloco de Jordan associado ao autovalor c_i.

- O operador T é diagonalizável se, e somente se, todos os blocos de Jordan têm dimensão 1.

Lembrando que uma dada matriz é diagonalizável se, e somente se, o $m_T(x)$ é um produto de fatores lineares distintos. Ou seja:

$$m_T(x) = (x - c).(x - d).(x - e) \rightarrow \text{diagonalizável}$$

Matriz Semelhantes

$T: V \rightarrow V$; Domínio $\rightarrow$ Contradomínio

$\alpha = \{u_1, \ldots, u_n\}$ bases

$\beta = \{w_1, \ldots, w_n\}$

Qual a relação entre: $[T]_\alpha^\alpha$ $[T]_\beta^\beta$

Matriz mudança de base:

$$M^{\alpha}_{\beta} \quad e \quad M^{\beta}_{\alpha} \longrightarrow M_{\alpha\beta}$$

Input

$$[V]_\beta = M^{\alpha}_{\beta} \cdot [V]_\alpha$$

output

$$[V]_\alpha = M^{\beta}_{\alpha} [V]_\beta$$

$$M^{\beta}_{\alpha} = \left(M^{\alpha}_{\beta}\right)^{-1}$$

Diagrama matricial:

$$\begin{tikzcd}
V^{\alpha} \arrow[r, "{[T]^{\alpha}_{\alpha}}"] \arrow[d, shift right, "M^{\alpha}_{\beta}"'] & V^{\alpha} \arrow[d, "M^{\alpha}_{\beta}"] \\
V_{\beta} \arrow[r, "{[T]^{\beta}_{\beta}}"] \arrow[u, shift right, "M^{\beta}_{\alpha}"'] & V_{\beta} \arrow[u, shift left]
\end{tikzcd}$$

$$\underbrace{[T]^{\alpha}_{\alpha}}_{A} = \underbrace{M^{\beta}_{\alpha}}_{P} \underbrace{[T]^{\beta}_{\beta}}_{B} \underbrace{M^{\alpha}_{\beta}}_{P^{-1}}$$

Definição: Dados $A, B \in M_{n \times n}$, dizemos que A, B são semelhantes, se existe $P \in M_{n \times n}$ inversível tal que: $A = PBP^{-1}$ ou
$AP = PB$

Notação $A \sim B$

Exemplo: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a + b = 4a \\ a + 3b = 4b \end{cases} \quad b = a \quad \begin{cases} \text{Se } a, b = 1 \\ c = -1 \text{ e } d = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3c + d = 2c \\ c + 3d = 2d \end{cases} \quad d = -c \quad P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Invertível

$\det \neq 0$

Como P não é única, então:

$P = 2P = Q$

$A = QBQ^{-1}$

Exemplo: $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} 3a + b = a \\ a + 3b = b \end{cases} \quad \begin{cases} b = -2a \\ a = -2b \end{cases} \quad a = b = 0,$$

logo as duas matrizes não são semelhantes.

Pois $\begin{bmatrix} 0 & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$ é não invertível.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$Tr_A = 5$ $\qquad$ $Tr_B = 5$

$|A| = 4 - 6 = -2 = \det$ $\qquad$ $|B| = -6 + 4 = \det$

Então: $B = P^{-1}AP$ com $P = \begin{array}{cc} v_1 & v_2 \\ \left[\begin{array}{c} x \\ z \end{array}\right. & \left.\begin{array}{c} y \\ w \end{array}\right] \end{array}$

$\Leftrightarrow PB = AP$

$\beta = \{v_1, v_2\}$, base. P não é única, seus múltipos também satisfaz.

$$PB = \begin{bmatrix} 6x + 4y & -x - y \\ 6z + 4w & -z - w \end{bmatrix}$$

$$AP = \begin{bmatrix} x + 2z & y + 2w \\ 3x + 4z & 3y + 4w \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 6x + 4y = x + 2z \\ -x - y = y + 2w \\ 6z + 4w = 3x + 4z \\ -z - w = 3y + 4w \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 5x + 4y - 2z = 0 \\ x + 2y + 2w = 0 \\ 3x - 2z - 4w = 0 \\ 3y + z + 5w = 0 \end{cases}$$

Matriz Associada p/ escalonar:

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 6 & 2 & 10 \\ 0 & 6 & 2 & 10 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow$$

Mesmo subespaço

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 5/3 \end{array}\right]$$

Id | P

Forma de Jordan

$$\begin{cases} x - \frac{2}{3}z - \frac{4}{3}w = 0 \\ y + \frac{1}{3}z + \frac{5}{3}w = 0 \end{cases}$$

Então:
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}z + \frac{4}{3}w \\ -\frac{1}{3}z - \frac{5}{3}w \\ z \\ w \end{pmatrix} = z\underbrace{\begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} + w\underbrace{\begin{pmatrix} 4/3 \\ -5/3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

Pode ser P

Uma solução: $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, ou

$P = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

$B = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$

Aí: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, B.

$\det = 3$

$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 2/3 \end{bmatrix}$

Assim: $P^{-1} \cdot A =$

$\begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ -1 & 2/3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix}$

Agora: $(P^{-1}A) \cdot P = \begin{bmatrix} 1 & 4/3 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = B$

$B = P^{-1} A P$