completando a prova de (i).

Como $\|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq \|A\|\,\|Bx\| \leq \|A\|\,\|B\|\,\|x\|$, (ii) está provado.

Para mostrar (iii), afirmamos que

$$\|x\| = \sup_{\|y\|=1} \big|\langle x, y\rangle\big|.$$

Para provar nossa afirmação, notamos que $\big|\langle x, y\rangle\big| \leq \|x\|\,\|y\| \leq \|x\|$, se $\|y\| = 1$. A desigualdade contrária é obtida ao tomarmos $y = x/\|x\|$.

Aplicando esse resultado, obtemos

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| = \sup_{\|x\|=1=\|y\|} \big|\langle Ax, y\rangle\big|. \qquad \square$$

8.9 Exercícios

1. Seja $\|\cdot\|$ uma norma no espaço E. Mostre que $\|0\| = 0$.

2. Seja E um espaço euclidiano complexo. Dê um exemplo mostrando que a validade do Teorema de Pitágoras não implica que $x \perp y$.

3. Seja E um espaço com o produto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Demonstre a desigualdade de Cauchy-Schwarz da seguinte maneira: para $x, y \in E$, desenvolva a expressão $0 \leq \langle x - \alpha t y, x - \alpha t y\rangle$. Escolhendo $\alpha = \langle x, y\rangle$, obtenha um trinômio do segundo grau com coeficientes reais. Analise esse trinômio e obtenha a desigualdade de Cauchy-Schwarz.

4. Seja $C([a,b],\mathbb{K})$ o espaço das funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{K}$. Mostre que
$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$
define um produto interno nesse espaço.

5. Defina $\langle u, v\rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$, para $u = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ e $v = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$. Mostre que esse é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

6. Seja E um espaço com produto interno e $A : X \to E$ um isomorfismo entre o espaço vetorial X e E. Para $x, y \in X$ defina $\langle x, y\rangle := \langle Ax, Ay\rangle$. Mostre que está assim definido um produto interno em X. (Compare esse Exercício com a Observação 8.8.)

7. Seja E um espaço normado que satisfaz a identidade do paralelogramo. Definindo $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \to \mathbb{K}$ por meio da identidade de polarização conveniente, mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em E e que a norma de E é gerada por esse produto interno.

8. Considere agora o espaço $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ com o produto interno definido no Exercício 4. Mostre que o conjunto

$$X := \{1, \operatorname{sen} t, \cos t, \operatorname{sen} 2t, \cos 2t, \ldots\}$$

é um conjunto ortogonal.

9. Considere então o espaço vetorial $C([-1,1], \mathbb{R})$ com o produto interno definido no Exercício 4. Seja $\mathcal{P} \subset C([-1,1], \mathbb{R})$ o subespaço formado por todas as funções pares e $\mathcal{I} \subset C([-1,1], \mathbb{R})$ o subespaço formado por todas as funções ímpares. Mostre que $\mathcal{I} = \mathcal{P}^{\perp}$.

10. Seja E um espaço com produto interno. Interprete geometricamente a desigualdade de Cauchy-Schwarz em termos de normas dos vetores não-nulos y e $proj_x y$.

11. Seja $\mathbb{R}[t]$ o espaço vetorial de todos os polinômios com coeficientes em $\mathbb{R}$. Nesse espaço, considere o produto interno definido em $C([-1,1], \mathbb{R})$. Verifique que

$$X = \{1, t, t^2, \ldots\}$$

é uma base desse espaço. Encontre os 4 primeiros termos da base $\{p_1, p_2, \ldots\}$ obtida ao se aplicar o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt à base X. Os polinômios $p_n(t)$ são os *polinômios de Legendre*, que são úteis no estudo de equações diferenciais.

12. No processo de Gram-Schmidt, passe de uma base arbitrária $\{u_1, \ldots, u_n\}$ do espaço euclidiano E para uma base *ortogonal* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ sem normalizar os vetores ortogonais em cada passo do processo. Verifique que $0 \leq \|x_i\| \leq \|u_i\|$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Prove que $\|x_i\| = 0$ implica que u_i está no espaço gerado por $u_1, \ldots, u_{i-1}$, enquanto $\|x_i\| = \|u_i\|$ significa que u_i é ortogonal a cada vetor x_j, para $j = 1, \ldots, i-1$.

13. Sejam E um espaço com produto interno e $\{w_1, \ldots, w_m\}$ uma base ortonormal do subespaço W. Mostre que, para todo $v \in E$, vale a

desigualdade de Bessel

$$\sum_{j=1}^{m} |\langle v, w_j \rangle|^2 \leq \|v\|^2.$$

14. Sejam W_1, W_2 subespaços do espaço com produto interno E. Mostre que

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp \quad \text{e} \quad (W_1 \cap W_2)^\perp = W_1^\perp + W_2^\perp.$$

15. Seja ℓ_0 o espaço de todas as seqüências (x_i) com $x_i = 0$ exceto talvez para um número finito de índices.

    (a) Verifique que $\{e_1, \ldots, e_n, \ldots\}$ é uma base de ℓ_0, em que e_i é a seqüência cujo i-ésimo elemento é igual a 1, os restantes sendo todos nulos. Dado $x \in \ell_0$, temos que existe $m = m(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m$.

    (b) Defina $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$, com $\delta_{ij} = 0$, se $i \neq j$ e $\delta_{ii} = 0$. Estenda linearmente para os elementos de ℓ_0 e verifique que está, assim, definido um produto interno em ℓ_0.

    (c) Considere $f : \ell_0 \to \mathbb{K}$ definido por

    $$f(x) = f(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m) = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{2} + \ldots + \frac{\alpha_m}{m}.$$

    Mostre que não existe $v \in \ell_0$ tal que $f(x) = \langle x, v \rangle$ para todo $x \in \ell_0$. (Esse contra-exemplo é uma adaptação daquele apresentado em [1].)

16. Prove o Corolário 8.23. O que acontece se E for um espaço complexo?

17. Consideremos o espaço ℓ_0, introduzido no Exercício 15. Se $x \in \ell_0$, então $x = \alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m$ para únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, em que $m = m(x) \in \mathbb{N}$ depende de x. Defina $T : \ell_0 \to \ell_0$ por

    $$T(\alpha_1 e_1 + \ldots + \alpha_m e_m) = (\alpha_1 + \ldots + \alpha_m) e_1.$$

    Mostre que T não possui adjunta. (Exemplo presente em [1].)

18. Considere o espaço de polinômios $\mathbb{R}[t]$ como no Exercício 11. Seja $D : \mathbb{R}[t] \to \mathbb{R}[t]$ definido por $Dp = p'$ (derivação em t). Mostre que não existe um operador $D^* : \mathbb{K}[t] \to \mathbb{K}[t]$ tal que $\langle Dp, q \rangle = \langle p, D^* q \rangle$.

19. Seja E um espaço euclidiano e $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base qualquer desse espaço. Defina $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Se $u = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ e $v = \beta_1 v_1 + \ldots + \beta_n v_n$, mostre que vale

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} \alpha_i \overline{\beta_j}. \tag{8.10}$$

Verifique então que a matriz $G = (g_{ij})$ é hermitiana e *positiva definida*, isto é,

$$[u]_{\mathcal{B}}^{\mathrm{t}} G [\bar{u}]_{\mathcal{B}} > 0 \quad \forall\, 0 \neq u \in E.$$

Reciprocamente, mostre que, se G for uma matriz hermitiana e positiva definida, então (8.10) define um produto interno[6] em E. A matriz G é a *matriz de Gram* dos vetores $v_1, \ldots, v_n$. Também se denota $G = G(v_1, \ldots, v_n)$.

20. Sejam $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $\mathcal{C} = \{w_1, \ldots, w_m\}$ bases *ortonormais* dos espaços euclidianos E e F, respectivamente. Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear. Mostre que, para $i \in \{1, \ldots, m\}$ e $j \in \{1, \ldots, n\}$,

$$T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = A = (a_{ij}), \quad \text{em que} \quad a_{ij} = \langle w_i, T(v_j) \rangle.$$

Conclua que $(T^*)_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = B = (b_{ij})$, em que $b_{ij} = \overline{a_{ji}}$, generalizando assim o Exemplo 8.27.

21. Sejam E, F espaços euclidianos. Dadas as aplicações $S, T \in \mathcal{L}(E, F)$, defina

$$\langle S, T \rangle = \operatorname{tr}(ST^*).$$

Mostre que assim está definido um produto interno em $\mathcal{L}(E, F)$. Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ forem, respectivamente, as matrizes de S e T com relação a bases ortonormais de E e F, mostre que

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j} a_{ij} \overline{b_{ij}}.$$

22. Considere o espaço $C([0, \pi], \mathbb{R})$ com o produto interno definido no Exercício 4 e seu subespaço $\mathbb{R}_2[t]$. Tome o funcional linear $\ell : \mathbb{R}_2[t] \to \mathbb{R}$ dado por

$$\ell(p) = \langle p(t), \operatorname{sen} t \rangle.$$

[6] Veja também os Exercícios 23 e 24 do Capítulo 9 para a relação entre produtos internos e matrizes.

Ache $q \in \mathbb{R}_2[t]$ tal que

$$\ell(p) = \langle p(t), q(t) \rangle \quad \forall\, p \in \mathbb{R}_2[t].$$

23. Considere o espaço $C([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ com o produto interno definido no Exercício 4 e seu subespaço $\mathbb{R}_5[t]$. Ache $p \in \mathbb{R}_5[t]$ de modo que

$$\int_{\pi}^{\pi} |\operatorname{sen} t - p(t)|^2 dt$$

assuma o menor valor possível. Compare as aproximações de $\operatorname{sen} t$ obtidas por meio desse polinômio e da série de Maclaurin de $\operatorname{sen} t$.

24. Ache $a, b, c \in \mathbb{R}$ de forma a minimizar o valor da integral

$$\int_{-1}^{1} |x^3 - ax^2 - bx - c|^2 dx.$$

25. Seja $T : E \to E$ um operador definido no espaço euclidiano real E. Mostre que

$$T_{\mathbb{C}}^*(u + iv) = T^*u + iT^*v$$

e, em particular, que a complexificação de um operador normal (respectivamente, auto-adjunto e antiauto-adjunto) é um operador normal (respectivamente, auto-adjunto e antiauto-adjunto).

26. Considere a matriz $P = (v_1 \ v_2 \ \ldots \ v_n)$, cujas colunas são os vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de uma base ortonormal do $\mathbb{K}^n$. Mostre que

$$PP^* = P^*P = \mathrm{I}.$$

27. Em $\mathbb{R}^3$ verifique que

$$\big\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \big\rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 4x_3y_3$$

define um produto interno. Encontre a adjunta da aplicação linear T dada por

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

com relação a esse produto interno.

28. Seja $T : X \to X$ um operador sobre o espaço euclidiano X. Suponha que $Tv = \lambda v$ e $T^*w = \mu w$, com $\lambda \neq \bar{\mu}$. Mostre que $\langle v, w \rangle = 0$.

29. Sejam E um espaço euclidiano e $T : E \to E$ um operador. Suponha que $F \subset E$ seja um subespaço invariante por T e T^*. Mostre que $(T|_F)^* = T^*|_F$. Assim, a restrição de um operador normal (respectivamente, auto-adjunto ou antiauto-adjunto) a um subespaço invariante tanto por T como por T^* é normal (respectivamente, auto-adjunto ou antiauto-adjunto).

30. Sejam E um espaço euclidiano e $\pi : E \to E$ uma projeção. Mostre que π é uma projeção ortogonal (isto é, $\ker \pi = (\operatorname{im} \pi)^\perp$) se, e somente se, $\langle \pi x, x - \pi x \rangle = 0$ para todo $x \in E$. Mostre que, se uma projeção $\pi : E \to E$ satisfizer $\|\pi x\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$, então π é ortogonal.

31. Sejam E um espaço euclidiano e $\pi : E \to E$ uma projeção. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

    (a) π é normal;

    (b) π é auto-adjunta;

    (c) π é uma projeção ortogonal sobre sua imagem.

32. Sejam $S, T : E \to E$ operadores auto-adjuntos no espaço euclidiano E. Mostre que ST é auto-adjunto se, e somente se, $ST = TS$.

33. Sejam E, F espaços euclidianos e $T : E \to F$ uma aplicação linear. Mostre que

    (a) T é injetora se, e somente se, T^* for sobrejetora;

    (b) T é sobrejetora se, e somente se, T^* for injetora.

34. Sejam E, F espaços euclidianos e $T : E \to F$ uma aplicação linear. Mostre que $T^*T : E \to E$ e $TT^* : F \to F$ têm o mesmo posto de T (e de T^*).

35. Seja E um espaço com produto interno e $\alpha, \beta \in E$ vetores fixos. Mostre que $Tx = \langle x, \alpha \rangle \beta$ define uma aplicação linear em E. Mostre que T^* existe e obtenha sua expressão.

36. Um *isomorfismo* dos espaços com produto interno E e F é uma bijeção linear $T : E \to F$ que satisfaz, adicionalmente, $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$, para todos $x, y \in E$ (isto é, T é uma isometria).

Seja $T : E \to F$ uma aplicação linear entre os espaços euclidianos E e F, com $\dim E = \dim F$. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:

(a) T preserva o produto interno;

(b) T é um isomorfismo (de espaços com produto interno);

(c) T leva toda base ortonormal de E em base ortonormal de F;

(d) T leva alguma base ortonormal de E em uma base ortonormal de F.

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases ortonormais de E e F, respectivamente. Mostre também que $T_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ é uma matriz ortogonal (unitária) se, e somente se, T for uma isometria.

37. Sejam E, F espaços euclidianos e $f : E \to F$ uma aplicação que preserva produto interno. Mostre que f é linear.

38. Seja E um espaço euclidiano complexo. Dê exemplo de uma isometria $M : E \to E$, com $M(0) = 0$, que não é linear.

39. Seja E um espaço com produto interno. Dê exemplo de uma aplicação $M : E \to E$ tal que $M^*M = \mathrm{I}$, mas $MM^* \neq \mathrm{I}$.

40. Sejam E, F espaços euclidianos e $M : E \to F$ uma isometria linear. Dê uma interpretação para MM^*.

41. Sejam $T : E \to E$ um operador e m o polinômio mínimo de T. Mostre que o polinômio mínimo de T^* é $\overline{m}$. Se r for o polinômio interpolador de T com respeito a uma função f, conclua que o polinômio interpolador de T^* com respeito a $\bar{f}$ é $\bar{r}$.

42. Seja $T : E \to E$ um operador linear no espaço euclidiano E. Mostre que nem sempre existe um polinômio p tal que $T^* = p(T)$.

43. Seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Suponha que $A^* = -A$. Mostre que e^A é ortogonal (ou unitária).

44. Sejam E, F dois espaços com produto interno. Considere a soma direta $E \oplus F$ definida no Exercício 37 do Capítulo 1. Mostre que $E \oplus F$ é um espaço com produto interno se definirmos

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle y_1, y_2 \rangle.$$

Mostre também que o gráfico de uma aplicação linear $T : E \to F$ é um subespaço de $E \oplus F$.

45. Considere o espaço com produto interno $E \oplus F$, tal qual no Exercício 44.

    (a) Defina $U : E \oplus F \to F \oplus E$ por $U(x, y) = (y, -x)$. Mostre que U^* existe e obtenha sua expressão. Obtenha também U^*U e UU^*.

    (b) Se $T : E \to E$ possuir adjunta $T^* : E \to E$, qual é a relação entre os gráficos de T e T^*?

46. Considere $z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{K}^n$ e defina

$$\begin{aligned} \|z\|_\infty &= \max_{1 \le i \le n} |z_i|, \\ \|z\|_{\text{sum}} &= \|z_1\| + \ldots + \|z_n\| \\ \|z\| &= \sqrt{z_1 \bar{z}_1 + \ldots + z_n \bar{z}_n}. \end{aligned}$$

Mostre que $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_{\text{sum}}$ e $\|\cdot\|$ são normas em $\mathbb{K}^n$. Mostre também que

$$\|z\|_\infty \le \|z\| \le \|z\|_{\text{sum}} \le n\|z\|_\infty.$$

47. Seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Mostre que $\|A\| = \|A^*\|$ e $\|A^*A\| = \|A\|^2$.

48. Seja $A \in \mathbb{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Se A for normal, mostre que $\|A^2\| = \|A\|^2$.

49. Considere que $E = \mathbb{K}^n$ e resolva os Exercícios 7 e 8 do Apêndice F.

50. Aceite o fato que todo espaço vetorial possui uma base (um resultado que é demonstrado utilizando-se o lema de Zorn). Mostre então que todo espaço vetorial possui um produto interno e, portanto, uma norma.

Definição 8.51 *Sejam $v_1, \ldots, v_r$ vetores em $\mathbb{K}^n$. O conjunto*

$$x_1 v_1 + \ldots + x_r v_r \quad \textit{com} \quad 0 \le x_i \le 1 \quad \forall\, i = 1, \ldots, r$$

é o ***paralelepípedo*** $\mathcal{P} = \mathcal{P}(v_1, \ldots, v_r)$ *gerado por* $\{v_1, \ldots, v_r\}$. *Definimos indutivamente o* ***volume*** *(r-dimensional) do* ***paralelepípedo*** *por* $\text{vol}(\mathcal{P}(v_1)) = \|v_1\|$ *e, supondo definido o volume do paralelepípedo gerado por $k-1$ vetores, definimos* $\text{vol}(\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_k)) = \|h\|\ \text{vol}(\mathcal{P}(v_2, \ldots, v_k))$, *em que $\|h\|$ é a altura do paralelepípedo, isto é, se w for a projeção de v_1 sobre o espaço gerado por* $\{v_2, \ldots, v_k\}$, *então* $h = v_1 - w$.

51. Dado um conjunto arbitrário $\{v_1, \ldots, v_k\}$ do espaço euclidiano E de dimensão n, considere a matriz A, $k \times n$, cujas linhas são as coordenadas de v_i com relação a uma base *ortogonal* $\mathcal{B}$ de E:

$$A = \begin{pmatrix} [v_1]_{\mathcal{B}}^{\mathrm{t}} \\ \vdots \\ [v_k]_{\mathcal{B}}^{\mathrm{t}} \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que AA^* é a matriz de Gram $G(v_1, \ldots, v_k) = (\langle v_i, v_j \rangle)$; conclua então que $\det G(v_1, \ldots, v_k)$ é diferente de zero se os vetores $v_1, \ldots, v_k$ forem linearmente independentes e nulo se esses vetores forem linearmente dependentes;[7]

(b) mostre que

$$\det G(v_1, \ldots, v_k) = \|h\|^2 \det G(v_2, \ldots, v_k),$$

em que $v_1 = h + w$, sendo h ortogonal ao espaço gerado por $v_2, \ldots, v_k$; conclua a *desigualdade de Hadamard*:

$$0 \leq \det G \leq \|v_1\|^2 \ldots \|v_k\|^2;$$

(c) Mostre que

$$[\mathrm{vol}(\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_k))]^2 = \det G(v_1, \ldots, v_k).$$

52. Seja $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{K}^n$ vetores linearmente independentes. Conclua que

$$\mathrm{vol}(\mathcal{P}(v_1, \ldots, v_n)) = |D(v_1, \ldots, v_n)|,$$

em que D é a função determinante.

53. Seja $T : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ um operador linear e $\mathcal{P}$ um paralelepípedo n-dimensional em $\mathbb{K}^n$. Mostre que $T(\mathcal{P})$ é um paralelepípedo e $\mathrm{vol}(T(\mathcal{P})) = |\det T| \, \mathrm{vol}(\mathcal{P})$.

Observação 8.52 Uma vez estabelecida a relação entre determinantes e volumes, estamos em condições de interpretar o significado geométrico das outras duas

[7] O item (b) garante que $\det G(v_1, \ldots, v_k) \geq 0$.

operações elementares sobre as linhas de uma matriz A (compare com a Observação 4.4). O produto de uma linha por uma constante positiva c multiplica o volume do paralelepípedo formado pelas linhas de A também por c. (Isso é evidente, se c for um inteiro ou mesmo uma fração.) A substituição de uma linha de A por sua soma com outra linha certamente não altera o determinante de A, pois a altura do paralelepípedo (gerado pelas linhas de A) não é modificada: a projeção do vetor altura sobre o espaço gerado pelos demais vetores permanece a mesma. Isto também pode ser visto de outra maneira: se a linha a ser alterada corresponder a um vetor vertical (o que podemos obter por uma mudança de base), adicionar a essa uma outra linha de A corresponde a inclinar o paralelepípedo. Pelo Princípio de Cavalieri, o volume não se altera.