Forma Diagonal

Definição 8 *Seja $T \in L(V)$. Dizemos que T é* **diagonalizável** *se existe uma base de V formada de autovetores.*

Nos próximos quatro exemplos veremos a diagonalização ou não de certos operadores lineares.

Exemplo 27 *Seja $T \in L(\mathbb{R}^2)$; $T(x,y) = (x, 2y)$.*

É diagonalizável pois o conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ formada de autovetores.
Como fica a matriz de T em relação à essa base?

$$T(1,0) = (1,0) = 1(1,0) + 0(0,1)$$

e

$$T(0,1) = (0,2) = 0(1,0) + 2(0,1).$$

Portanto, $T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Exemplo 28 *Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$; $T(x,y,z) = (7y - 6z, -x + 4y, 2y - 2z)$.*

Obtemos os autovalores 1,-1,2 e autovetores associados $(9,3,2), (5,1,2)$ e $(4,2,1)$, respectivamente que formam uma base de $\mathbb{R}^3$ e portanto T é diagonalizável. Qual a matriz de T em relação à essa base?

$$T(9,3,2) = (9,3,2) = 1(9,3,2) + 0(5,1,2) + 0(4,2,1),$$

$$T(5,1,2) = (-5,-1,-2) = 0(9,3,2) + (-1)(5,1,2) + 0(4,2,1) \text{ e}$$

$$T(4,2,1) = (8,4,2) = 0(9,3,2) + 0(5,1,2) + 2(4,2,1).$$

Portanto, $T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Exemplo 29 *Seja $T \in L(\mathbb{R}^3)$; $T(x,y,z) = (x-3y+3z, 3x-5y+3z, 6x-6y+4z)$.*

Obtemos os autovalores -2 e 4 e autovetores associados $(1,1,0)$ e $(1,0,-1)$ a -2 e $(1,1,2)$ a 4 que formam uma base de $\mathbb{R}^3$ e portanto T é diagonalizável e a matriz de T em relação à essa base é

$$T] = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 30 *Seja* $T \in L(\mathbb{R}^3)$; $T(x,y,z) = (-3x + y - z, -7x + 5y - z, -6x + 6y - 2z)$.

Então, T não é diagonalizável pois não possui uma base de autovetores.

Teorema 10 *Sejam* $T \in L(V)$, *e* $dim V = n$. *Suponha que* T *possua* n *autovalores distintos* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. *Então* T *é diagonalizável.*

Prova. Sejam $v_1, \ldots, v_n$ autovetores não nulos associados aos autovalores distintos $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
Do teorema 3 sabemos que eles são linearmente independentes. Logo base, pois $dim V = n$.
Então T é diagonalizável. Como temos:

$$\begin{array}{cccccc}
Tv_1 = & \lambda_1 v_1 = & \lambda_1 v_1 + & 0v_2 + & \cdots + & 0v_n \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
Tv_n = & \lambda_n v_n = & 0v_1 + & 0v_2 + & \cdots + & \lambda_n v_n
\end{array}$$

segue que

$$T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

Definição 9 *Chamamos de* **multiplicidade algébrica** *de um autovalor a quantidade de vezes que ele aparece como raiz do polinômio característico . Chamamos de* **multiplicidade geométrica** *de um autovalor* λ *a dimensão do auto-espaço* $V(\lambda)$.

Sugestão 10 *Verifique no exemplo 6 as multiplicidades geométricas.*

Teorema 11 *O operador linear* $T \in L(V)$ *é diagonalizável se, e só se,*

i) o polinômio característico de T *tem todas as raízes em* K;

ii) a multiplicidade algébrica de cada autovalor λ_i *é igual à multiplicidade geométrica de* λ_i.

Prova Vamos fazer a demonstração para um caso particular.
$(\Rightarrow)$ Vamos inicialmente supor que $\{v_1, v_2, u_1, u_2, u_3, w\}$ seja uma base de autovetores de V onde $\{v_1, v_2\}$, $\{u_1, u_2, u_3\}$ e $\{w\}$ são os autovetores associados aos

autovalores distintos λ_1, λ_2 e λ_3 respectivamente.
A matriz de T em relação a essa base é

$$T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}.$$

Logo $p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^2(\lambda_2 - \lambda)^3\lambda_3$ cujas raízes estão em K.
Mostremos agora que $V(\lambda_1) = [v_1, v_2]$; $V(\lambda_2) = [u_1, u_2, u_3]$ e $V(\lambda_3) = [w]$.
É claro que $[v_1, v_2] \subset V(\lambda_1)$; $[u_1, u_2, u_3] \subset V(\lambda_2)$ e $[w] \subset V(\lambda_3)$.
Seja $v \in V(\lambda_1)$. Então $Tv = \lambda_1 v$ e por outro lado temos:

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + b_1u_1 + b_2u_2 + b_3u_3 + cw \quad (I)$$

e multiplicando λ_1 por (I) obtemos

$$\lambda_1 v = a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_1v_2 + b_1\lambda_1u_1 + b_2\lambda_1u_2 + b_3\lambda_1u_3 + c\lambda_1w \quad (II)$$

Aplicando T em (I) obtemos

$$\lambda_1 v = a_1Tv_1 + a_2Tv_2 + b_1Tu_1 + b_2Tu_2 + b_3Tu_3 + cTw$$

e portanto,

$$\lambda_1 v = a_1\lambda_1v_1 + a_2\lambda_1v_2 + b_1\lambda_2u_1 + b_2\lambda_2u_2 + b_3\lambda_2u_3 + c\lambda_3w \quad (III)$$

Igualando (II) e (III) obtemos $b_1\lambda_1 = b_1\lambda 2$; $b_2\lambda_1 = b_2\lambda 2$; $b_3\lambda_1 = b_3\lambda 2$ e $c\lambda_1 = c\lambda_3$, donde segue que $b_1 = b_2 = b_3 = c = 0$ e portanto $v = a_1v_1 + a_2v_2 \in [v_1, v_2]$.
Portanto, $V(\lambda_1) = [v_1, v_2]$ e $dimV(\lambda_1) = 2$.
Logo, temos multiplicidade algébrica = multiplicidade geométrica.
Analogamente concluimos que $V(\lambda_2) = [u_1, u_2, u_3]$, donde $dimV(\lambda_2) = 3$ e $V(\lambda_3) = [w]$ donde $dimV(\lambda_3) = 1$.
$(\Leftarrow)$ Agora, assumamos por hipótese, que o polinômio característico de T possa ser fatorado sobre K. Suponhamos $p(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^2(\lambda_2 - \lambda)^3(\lambda_3 - \lambda)$ onde $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ e $2 + 3 + 1 =$ grau $p(\lambda) = dimV$. Também $dimV(\lambda_1) = 2$; $dimV(\lambda_2) = 3$ e $dimV(\lambda_3) = 1$.
Seja $H = V(\lambda_1) + V(\lambda_2) + V(\lambda_3)$. Mostremos que

$$V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = V(\lambda_1) \cap V(\lambda_3) = V(\lambda_2) \cap V(\lambda_3) = \{0\}.$$

Com efeito, seja $u \in V(\lambda_i) \cap V(\lambda_j)$. Então $Tu = \lambda_i u = \lambda_j u$ e daí $(\lambda_i - \lambda_j)u = 0$ e portanto $u = 0$ desde que $\lambda_i \neq \lambda_j$. Assim, $V(\lambda_2) \cap V(\lambda_1) = \{0\}$ e $V(\lambda_3) \cap (V(\lambda_1) + V(\lambda_2)) = \{0\}$, então $H = V(\lambda_1) \oplus V(\lambda_2) \oplus V(\lambda_3)$.

Sendo H um subespaço de V e de mesma dimensão como V segue que $H = V$. Então $\beta = \{v_1, v_2, u_1, u_2, u_3, w\}$, onde $\{v_1, v_2\}$ é base de $V(\lambda_1)$, $\{u_1, u_2, u_3\}$ é base de $V(\lambda_2)$ e $\{w\}$ é base de $V(\lambda_3)$ será base de V formada por autovetores. Logo T é diagonalizável. ∎

Proposição 9 *Sejam $T \in L(V)$ e $m(\lambda) = \lambda - \lambda_1$ o polinômio minimal de T. Então $V = Ker(T - \lambda_1 I)$.*

$Ker \subset V$

Prova. Como, $m(\lambda) = \lambda - \lambda_1$ então $m(T) = T - \lambda_1 I = 0$. Logo, para $v \in V$ temos $m(T)v = (T - \lambda_1 I)v = 0$. ∎

$V \subset Ker(T - \lambda_1 I)$

Proposição 10 *Sejam $T \in L(V)$ e $m(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) = m_1(\lambda)m_2(\lambda)$ o polinômio minimal de T. Então;*

i) $V = Ker(\lambda_1 I - T) \oplus Ker(\lambda_2 I - T)$.

ii) O polinômio minimal da restrição de T a $Ker(\lambda_i I - T)$ é $m_i(\lambda)$, $i = 1, 2$.

Prova. Provemos inicialmente o ítem i). Como $m_1(\lambda)$ e $m_2(\lambda)$ são primos entre si, existem polinômios $r(\lambda)$ e $s(\lambda)$ tais que: $r(\lambda)m_1(\lambda) + s(\lambda)m_2(\lambda) = 1$.
Portanto, para o operador T,

$$r(T)m_1(T) + s(T)m_2(T) = I. (*)$$

Seja $v \in V$, então aplicando $(*)$ temos

$$r(T)m_1(T)v + s(T)m_2(T)v = v.$$

Mas, $m_2(T)r(T)m_1(T)v = r(T)m_1(T)m_2(T)v = r(T)0v = 0$.
Logo, $r(T)m_1(T)v \in Ker(\lambda_2 I - T)$.
Semelhantemente, $s(T)m_2(T)v \in Ker(\lambda_1 I - T)$.
Portanto, $V = Ker(\lambda_1 I - T) + Ker(\lambda_2 I - T)$.
Vamos agora provar que é de maneira única.
Suponha $v = u + w = u_1 + w_1$; $u, u_1 \in Ker(\lambda_1 I - T)$ e $w, w_1 \in Ker(\lambda_2 I - T)$.
Temos

$$r(T)m_1(T)(v) = r(T)m_1(T)(u) + r(T)m_1(T)(w) = r(T)m_1(T)(w)$$

e

$$r(T)m_1(T)(v) = r(T)m_1(T)(u_1) + r(T)m_1(T)(w_1) = r(T)m_1(T)(w_1)$$

Aplicando $(*)$ em w e w_1 obtemos

$$w = r(T)m_1(T)(w) + s(T)m_2(T)(w) = r(T)m_1(T)(w)$$

e

$$w_1 = r(T)m_1(T)(w_1) + s(T)m_2(T)(w_1) = r(T)m_1(T)(w_1).$$

Portanto,

$$w = r(T)m_1(T)w = r(T)m_1(T)v = r(T)m_1(T)w_1 = w_1.$$

Analogamente, $u = u_1$. Portanto, $V = Ker(\lambda_1 I - T) \oplus Ker(\lambda_2 I - T)$.
Passemos agora ao ítem ii). Sejam $\hat{m}_1(\lambda)$ o polinômio minimal da restrição T_1 de T ao $Ker(\lambda_1 I - T)$ e $\hat{m}_2(\lambda)$ o polinômio minimal da restrição T_2 de T ao $Ker(\lambda_2 I - T)$. Temos, $m_1(T_1)(u) = (\lambda_1 I - T_1)(u) = \lambda_1 u - T_1 u = \lambda_1 u - Tu = (\lambda_1 I - T)u = 0$, para todo $u \in Ker(\lambda_1 I - T)$. Logo, $m_1(T_1) = 0$. Assim, também, $m_2(T_2) = 0$. Portanto, $\hat{m}_1(\lambda) | m_1(\lambda)$ e $\hat{m}_2(\lambda) | m_2(\lambda)$. Logo, $\hat{m}_1(\lambda) = m_1(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)$ e $\hat{m}_2(\lambda) = m_2(\lambda) = (\lambda_2 - \lambda)$. ■

Teorema 12 *Sejam $T \in L(V)$ e $m(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_r - \lambda) = m_1(\lambda) \cdots m_r(\lambda)$ o polinômio minimal de T. Então;*

i) $V = Ker(\lambda_1 I - T) \oplus \cdots \oplus Ker(\lambda_r I - T)$.

ii) O polinômio minimal da restrição de T a $Ker(\lambda_j I - T)$ é $m_j(\lambda)$, $j = 1, \ldots, r$.

Prova. Prova-se por indução em r, usando as proposições anteriores. ■

Teorema 13 *Sejam $T \in L(V)$ e $m(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_r - \lambda)$ o polinômio minimal de T. Então T é diagonalizável.*

Prova. Pelo teorema anterior temos $V = Ker(\lambda_1 I - T) \oplus \cdots \oplus Ker(\lambda_r I - T)$. Seja $w \in Ker(\lambda_i I - T)$.Então $(\lambda_i I - T)(w) = 0$ e daí $T(w) = \lambda_i w$. Portanto todo vetor de $Ker(\lambda_i I - T)$ é autovetor associado a λ_i.Como a união de bases de $Ker(\lambda_1 I - T), \ldots, Ker(\lambda_r I - T)$ é base de V, segue que temos uma base de autovetores para V e portanto T é diagonalizável. ■

Teorema 14 *Seja T um operador linear diagonalizável e sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ autovalores distintos de T. Então o polinômio minimal de T é o polinômio $m(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda) \cdots (\lambda_r - \lambda)$.*

Prova. Precisamos apenas mostrar que $m(T) = 0$. Se v é um autovetor, então um dos operadores $\lambda_1 I - T, \lambda_2 I - T, \ldots, \lambda_r I - T$ leva v no zero.
Portanto $m(T)v = (\lambda_1 I - T)(\lambda_2 I - T) \cdots, (\lambda_r I - T)v = 0$ para todo autovetor v e como existe uma base de autovetores de T, segue que $m(T) = 0$.
Logo é o minimal. ■

Exemplo 31 *Verificar se $T \in L(\mathbb{R}^3)$ é diagonalizável onde*

$$T(x, y, z) = (7y - 6z, -x + 4y, 2y - 2z).$$

Temos

$$A = T]_C = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -6 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix},$$

onde C denota a base canônica de $\mathbb{R}^3$ e

$$p(\lambda) = det \begin{bmatrix} -\lambda & 7 & -6 \\ -1 & 4-\lambda & 0 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2).$$

Logo, $m(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$. Portanto esse operador é diagonalizável. Assim existe uma base $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ de autovetores de T de $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T]_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

a saber $v_1 = (9,3,2)$ associado ao autovalor $\lambda = 1$, $v_2 = (5,1,2)$ associado ao autovalor $\lambda = -1$ e $v_3 = (4,2,1)$ associado ao autovalor $\lambda = 2$.

Exemplo 32 *Verificar se é diagonalizável o operador $T \in L(\mathbb{R}^4)$ cuja matriz em relação á base canônica é*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Temos

$$p(\lambda) = det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^3(4-\lambda).$$

Logo, $m(\lambda) = (3-\lambda)^2(4-\lambda)$. Portanto esse operador não é diagonalizável.

Exemplo 33 *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$. *Ver se elas são diagonalizáveis encaradas como matrizes sobre $\mathbb{R}$ e também sobre $\mathbb{C}$.*

Para o caso real temos:

$$p_A(\lambda) = det \begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda)+1 = (\lambda-2)^2.$$

Então $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ ou $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)$.
Agora,

$$m_A(A) = A - 2I = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Logo, $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ e A não é diagonalizável em $\mathbb{R}$.

Vejamos de outra forma.

Para $\lambda = 2$ temos $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Então

$$\begin{cases} 3x - y = 2x \\ x + y = 2y \end{cases}$$

Portanto, $V(2) = [(1,1)]$ e $dim V(2) = 1 =$ multiplicidade geométrica $\neq 2 =$ multiplicidade algébrica.

Ainda,

$p_B(\lambda) = det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} = (1-\lambda)(-1-\lambda) + 2 = \lambda^2 + 1.$

Portanto não tem autovalor em $\mathbb{R}$ e daí B não é diagonalizável em $\mathbb{R}$.

Para o caso complexo temos:

$p_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ e $m_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$.

Ainda $V(2) = [(1,1)]$ e portanto A não é diagonalizável em $\mathbb{C}$.

Também, $p_B(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda + i)(\lambda - i) = m_B(\lambda)$ e portanto B é diagonalizável em $\mathbb{C}$.

De outra forma, para $\lambda = i$ temos $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Então $\begin{cases} (1-i)x - y = 0 \\ 2x - (i-1)y = 0 \end{cases}$ ou equivalentemente $(1-i)x + y = 0$.

Portanto, $V(i) = \{(x, (1-i)x)\} = [(1, 1-i)]$ e $dim V(i) = 1$, donde segue que multiplicidade geométrica $=$ multiplicidade algébrica.

Para $\lambda = -i$ temos $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Então $\begin{cases} (1+i)x - y = 0 \\ 2x + (i-1)y = 0 \end{cases}$ ou equivalentemente $(-1-i)x + y = 0$.

Portanto, $V(-i) = \{(x, (1+i)x)\} = [(1, 1+i)]$ e $dim V(-i) = 1$, donde segue que multiplicidade geométrica $=$ multiplicidade algébrica.

Sugestão 11 *Dada a matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$ *encontrar uma matriz inversível P tal que $P^{-1}AP$ é diagonal.*

Sugestão 12 *Para cada matriz* $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ *encontrar, quando possível, matrizes inversíveis* P_1, P_2 *e* P_3 *tais que* $P_1^{-1}AP_1$, $P_2^{-1}BP_2$ *e* $P_3^{-1}CP_3$ *são diagonais.*

Exemplo 34 *Suponhamos que* A *seja uma matriz* 2×2 *com elementos reais e simétrica (* $A^t = A$ *). Então* A *é semelhante sobre* $\mathbb{R}$ *a uma matriz diagonal.*

Suponhamos $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a \\ a & a_{22} \end{bmatrix}$. Então, o polinômio característico é $p(\lambda) = \lambda^2 + (-a_{11} - a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a^2$. Se $A = 0$ ou $A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{bmatrix}$ o resultado é imediato. Suponhamos A diferente dessas duas. Calculando o discriminante de $p(\lambda)$ obtemos: $\Delta = a_{11}^2 + 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4(a_{11}a_{22} - a^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a^2$. Portanto $\Delta > 0$ e assim $p(\lambda)$ tem duas raizes reais e distintas o que implica que A tem dois autovalores reais e distintos e portanto A é diagonalizável.

Exemplo 35 *Seja* N *uma matriz complexa* 2×2 *tal que* $N^2 = 0$. *Então* $N = 0$ *ou* N *é semelhante sobre* $\mathbb{C}$ *a* $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Suponhamos $N \neq 0$. Então existe $v \neq 0$ tal que $Nv \neq 0$ e $N^2v = 0$, onde $N : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$. Afirmamos que $\beta = \{v, Nv\}$ é base de $\mathbb{C}^2$. Mostremos inicialmente que β é linearmente independente.
Com efeito, se $av + bNv = 0$ então aplicando N obtemos $aNv + bN^2v = 0$ ou equivalentemente $aNv = 0$ e portanto $a = 0$ donde segue que $bNv = 0$ e consequentemente $b = 0$ e portanto β é de fato linearmente independente.
Agora, como $dim_{\mathbb{C}}\mathbb{C}^2 = 2$, segue que é base e como $Nv = 0v + 1Nv$ e $N(Nv) = 0 = 0v + 0Nv$ temos imediatamente que $N]_\beta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Exemplo 36 *Seja* $T \in L(\mathbb{R}^4)$ *representado em relação á base ordenada canônica pela matriz*

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{bmatrix}.$$

Em que condições sobre a,b e c T *é diagonalizável?*

Temos $p(\lambda) = \lambda^4$. Para ser diagonalizável, $m(\lambda) = \lambda$ e daí deveríamos ter $m(T) = 0$. Logo, $a = b = c = 0$.

Exemplo 37 *Toda matriz A, tal que $A^2 = A$, é semelhante a uma matriz diagonal.*

Inicialmente observemos que as únicas matrizes diagonais D tais que $D^2 = D$ são matrizes em que os elementos da diagonal são 0 ou 1.
Se $A = 0$ ou $A = I$ o resultado é imediato. Suponhamos então que $A \neq 0$ e $A \neq I$. Notemos que $q(x) = x^2 - x$ é um polinômio que anula a matriz A, desde que $q(A) = A^2 - A = 0$. Assim, os possíveis polinômios minimais para A são da forma $m(x) = x + a$ ou $m(x) = x^2 + bx + c$ para alguns a, b e c.
Mostremos agora, que não podemos ter $m(x) = x + a$. De fato, se $m(x) = x + a$, como $m(A) = 0$ então deveríamos ter que $A + aI = 0$ e portanto $A = -aI$ donde seguiria que $A = 0$ ou $A = I$ o que é um absurdo.
Suponhamos então que $m(x) = x^2 + bx + c$. Logo, como $m(A) = 0$ então deveríamos ter que $A^2 + bA + cI = 0$ e como $A^2 = A$, então teríamos $(b+1)A + cI = 0$. Logo, $b + 1 = 0$, senão teríamos $A = \frac{-c}{b+1} I$ e portanto $A = 0$ ou $A = I$ o que é um absurdo, e daí $b = -1$ e $c = 0$ donde segue que $m(x) = x^2 - x$ e portanto A é diagonalizável.
$m(x) = x(x-1)$

Sugestão 13 *Mostre que se A é uma matriz tal que $A^2 = A$, então o polinômio característico de A é da forma $p_A(\lambda) = \lambda^m(\lambda - 1)^p$ onde $m + p$ é a ordem da matriz A.*

Proposição 11 *Seja $T \in L(V)$ diagonalizável e W um subespaço $T-$invariante. Então T_W é diagonalizável.*

Prova. Temos que T é diagonalizável. Então o polinômio mínimo de T se fatora em fatores lineares distintos. Pela Proposição 4, o polinômio minimal de T_W divide o de T. E daí também se fatora em fatores lineares distintos. Logo T_W é diagonalizável.

Exemplo 38 *Responda se é verdadeira ou falsa a afirmação abaixo: Se a matriz triangular A for semelhante a uma matriz diagonal, então A já é diagonal.*

Falso. Vejamos um contra-exemplo. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.
Então $p(x) = (1-x)(2-x) = m(x)$ e portanto A é diagonalizável e

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = P^{-1}AP.$$

Sugestão 14 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

uma matriz sobre o corpo real $\mathbb{R}$. Encontre condições necessárias e suficientes em a,b e c, para que A seja diagonalizável.

Forma Triangular

Vamos iniciar esta seção com algumas **propriedades de matriz triangular:**

a) Se nenhum elemento da diagonal principal é 0, então A é inversível.

b) Se um elemento da diagonal principal é 0, então A é não inversível.

c) Os autovalores de A são exatamente os elementos de sua diagonal principal.

d) Se A é uma matriz quadrada de ordem n e todos os elementos de sua diagonal principal são nulos, então $A^n = 0$.

e) $det A$ =produto dos elementos de sua diagonal principal (No determinante consideramos sempre um produto de n elementos tal que um e só um elemento provém de cada linha e um e só um elemento provém de cada coluna).

Definição 10 *O operador linear T se diz triangulável se existir uma base em relação à qual T seja representado por uma matriz triangular.*

Teorema 15 *Se T é triangulável, então o polinômio característico de T tem a forma: $p(x) = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_r)^{d_r}$, $c_i \in K$.*
E então o polinômio minimal de T tem a forma: $m(x) = (x - c_1)^{e_1} \cdots (x - c_r)^{e_r}$, $c_i \in K$ e $e_i \leq d_i$, $i = 1, \ldots, r$.

Prova: Como T é triangulável então é semelhante a uma matriz triangular B. Como matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico, então $det(T - xI) = det(B - xI)$ e das propriedades de matriz triangular sabemos que o $det(B - xI)$ é igual ao produto dos elementos da diagonal da matriz $(B - xI)$. Logo, $p(x) = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_r)^{d_r}$, $c_i \in K$. Como o polinômio minimal divide o polinômio característico, então $m(x) = (x - c_1)^{e_1} \cdots (x - c_r)^{e_r}$, $c_i \in K$ e $e_i \leq d_i$, $i = 1, \ldots, r$. ■

Teorema 16 *Seja $T \in L(V)$ com todos os seus autovalores distintos $c_1, \ldots, c_r$ em K e seu polinômio característico $p(x) = (x - c_1)^{d_1} \cdots (x - c_r)^{d_r}$.*
Então T é triangulável.

Prova: A demonstração será feita por indução na dimensão de V.
Faremos inicialmente para os casos de dimensão $1, 2$ e depois para n.

$dim V = 1$.

Neste caso, cada representação matricial de T é uma matriz 1×1, que é triangular.

$dim V = 2$.

Neste caso temos $p(x) = (x - c_1)(x - c_2)$, $c_1 \neq c_2$ ou $p(x) = (x - c_1)^2$.

Se $p(x) = (x - c_1)(x - c_2)$, $c_1 \neq c_2$, então T é diagonalizável e daí triangulável.
Se $p(x) = (x - c_1)^2$, então temos dois candidatos a polinômio minimal: $m_1(x) = (x - c_1)$ e $m_2(x) = p(x)$.
Se for $m_1(x)$, então é diagonalizável e daí triangular.
Suponhamos agora que seja o $m_2(x)$.Existe $v \neq 0 \in V$ tal que $Tv = c_1 v$. Seja $\bar{V} = V/[v]$; $dim\bar{V} = dimV - dim[v] = 1$. Seja $\{v_1 + [v]\}$ base de $\bar{V}$.Assim $\{v, v_1\}$ é base de V.
Temos $\bar{T} : \bar{V} \to \bar{V}$ dada por $\bar{T}(u + [v]) = Tu + [v]$. Vejamos qual a matriz de $\bar{T}$ em relação a esta base. Temos $\bar{T}(v_1 + [v]) = Tv_1 + [v]$.Um representante seria: $Tv_1 + av = bv + dv_1 + av = dv_1 + (b+a)v$. Logo $\bar{T}(v_1 + [v]) = dv_1 + [v] = d(v_1 + [v])$ e portanto $\bar{T}] = [d]$. Assim, d é autovalor de $\bar{T}$ e daí $\bar{p}(x) = (x - d)$. Como $\bar{p}|p$, então $d = c_1$ e assim, $\bar{T}(v_1 + [v]) = c_1 v_1 + [v]$ e portanto, $Tv_1 = c_1 v_1 + \alpha v$.
Logo,

$$T] = \begin{bmatrix} c_1 & \alpha \\ 0 & c_1 \end{bmatrix}$$

e T é triangular.

Agora, suponha que $dimV = n > 2$ e que o teorema vale para espaços de dimensão menor do que n.
Como o polinômio característico de T se fatora em polinômios lineares, T tem pelo menos um autovalor e portanto pelo menos um autovetor não nulo v, digamos , $Tv = a_{11} v$.
Seja $W = [v]$. Então W é $T-$invariante. Faça $\bar{V} = V/W$. Então $dim\bar{V} = n - 1$.
Seja $\bar{T}(u + W) = Tu + W$. Sabemos que $\bar{p}|p$ e também $\bar{m}|m$. Assim $\bar{V}$ e $\bar{T}$ satisfazem as hipóteses do teorema.
Portanto, por indução,existe uma base $\{v_2 + W, \ldots, v_n + W\}$ de $\bar{V}$ tal que $\bar{T}(v_2 + W) = a_{22}(v_2 + W)$, $\bar{T}(v_3 + W) = a_{32}(v_2 + W) + a_{33}(v_3 + W)$, $\ldots$, $\bar{T}(v_n + W) = a_{n2}(v_2 + W) + \cdots + a_{nn}(v_n + W)$.
Então $\{v, v_2, \ldots, v_n\}$ é base de V. Como $\bar{T}(v_2 + W) = a_{22}(v_2 + W)$, temos $\bar{T}(v_2 + W) - a_{22}(v_2 + W) = 0$ e portanto $Tv_2 + W - a_{22} + W = 0$ e daí $Tv_2 - a_{22}v_2 \in W$.
Logo, $Tv_2 - a_{22}v_2 = a_{12}v$, ou equivalentemente, $Tv_2 = a_{12}v + a_{22}v_2$.
Analogamente, para $i = 3, \ldots, n$, $Tv_i - a_{2i}v_2 - \cdots - a_{ii}v_i \in W$, logo, $Tv_i = a_{1i}v + a_{2i}v_2 + \cdots + a_{ii}v_i$. Assim, $Tv = a_{11}v$, $Tv_2 = a_{12}v + a_{22}v_2$, $\ldots$, $Tv_n = a_{1n}v + a_{2n}v_2 + \cdots + a_{nn}v_n$ e portanto a matriz de T nessa base é triangular. E olhando para essa matriz triangular, os elementos da diagonal $a_{11}, \ldots, a_{nn}$, são os autovalores c_i repetido d_i vezes. ∎

Corolário 1 *Se $T \in L(V)$ tem todos os autovalores em K, então T é triangulável.*

Exemplo 39 *Verifique se* $A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{bmatrix}$ *é triangulável.*

Temos $p_A(x) = (x-4)(x+2)^2$ e portanto A tem todos os seus autovalores em $\mathbb{R}$, donde segue que A é triangulável.
Temos $m_A(x) = (x-4)(x+2)^2$ e portanto A não é diagonalizável.
Para o autovalor $x = 4$, $v = (0,1,1)$ é autovetor.
Consideremos $W = [(0,1,1)]$ e $\bar{V} = \mathbb{R}^3/W$. Então $dim\bar{V} = 2$.
Afirmamos que $\{(1,1,0)+W, (0,1,0)+W\}$ é base de $\bar{V}$.
Precisamos só mostrar que são linearmente independentes .
Com efeito, se $a((1,1,0)+W) + b((0,1,0)+W) = W$ então $a(1,1,0)+W+b(0,1,0)+W = W$ e portanto $(a, a+b, 0) + W = W$.
Assim, $(a, a+b, 0) = x(0,1,1)$ ou equivalentemente, $a = 0, a+b = x$ e $0 = x$.
Logo, $a = b = 0$ e daí é linearmente independente.
Consideremos então a seguinte base do $\mathbb{R}^3$, $\{(0,1,1),(1,1,0),(0,1,0)\}$.
Então,
$A(0,1,1) = (0,4,4) = 4(0,1,1) + 0(1,1,0) + 0(0,1,0)$
$A(1,1,0) = (-2,-2,0) = 0(0,1,1) - 2(1,1,0) + 0(0,1,0)$
$A(0,1,0) = (1,5,6) = 6(0,1,1) + 1(1,1,0) - 2(0,1,0)$ e logo

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Se $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e daí obtemos $P^{-1}AP = B$. ■

Sugestão 15 *Achar uma base triangular para as aplicações de $\mathbb{C}^2$ representadas pelas matrizes* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & i \\ 1 & i \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ i & i \end{bmatrix}$.