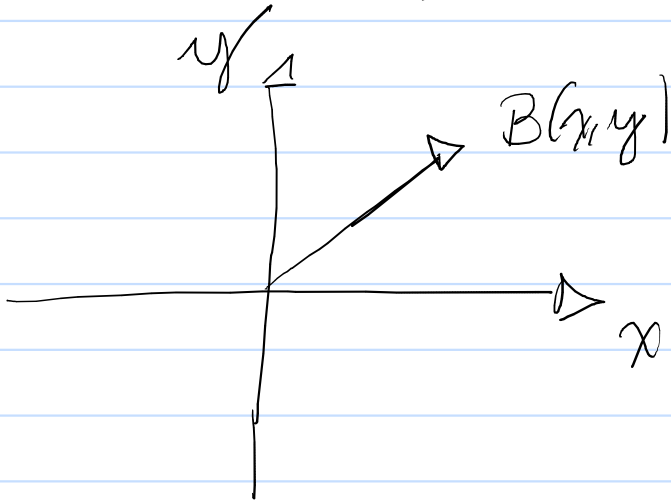
Faça o exercício 9 da secção 9.4, página 197.

9) Sejam X um espaço vetorial, e B uma forma positiva semidefinida. Mostre a desigualdade:

$$|B(x,y)| \leq \sqrt{q_B(x)}\,\sqrt{q_B(y)}$$

Que é uma generalização da desigualdade de Cauchy-Schwarz.

Temos X sendo um espaço vetorial, e B dado por $B(x,y) \geq 0 \ \forall x,y \in X$.



Temos que $B(x,y)$ é uma forma bilinear ≥ 0, então:

$$|B(x,y)| \geq 0 \quad \forall\, x,y \in X$$

Como $B(x,x) = q_B(x)$ e $B(y,y) = q_B(y)$, temos que "q" é uma função quadrática associada a B. Se tratarmos como vetores, pela regra do paralelogramo, temos:

$$B(x,y) \leq B(x,x) + B(y,y)$$
$$\leq q_B(x) + q_B(y)$$

$$|B(x,y)| \leq |q_B(x)| + |q_B(y)|$$

Como $q_B(x) \perp q_B(y)$, então: $\langle q_B(x), q_B(y) \rangle = 0$

$$B(x,y) \leq B(x,x) + B(y,y)$$
$$\leq B(x+y, x+y)$$
$$\leq B(x,x) + B(x,y) + B(y,x) + B(y,y)$$
$$\leq B(x,x) + 2(B(x,y)) + B(y,y)$$

Tomamos a forma da inequação de Cauchy-Schwarz: Temos V sendo um espaço vetorial real, e supomos:

$V \times V \to \mathbb{R}$, é uma forma bilinear simétrica e positiva semidefinida, isto é:

$B(x,x) \geq 0 \ \forall x$, então para qualquer $x, y \in V$ temos:

$$|B(x,y)|^2 \leq B(x,x) . B(y,y)$$

Como temos um produto interno, temos as propriedades:

1) Comutativa: $(x,y) = (y,x)$ $\forall x, y \in X$, se X fosse complexo, então o lado direito seria

o conjugado, mas vamos tomar como real.

2) linearidade: $(\alpha x + \beta y, z) = \alpha(x, z) + \beta(y, z)$, $\forall x, y, z \in X$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

3) Positiva definida: $(x, x) \geq 0 \quad \forall x \in X$.
A igualdade vale somente para $x = 0$, onde $0 \in \mathbb{R}$.

Assim: $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ e $\forall x, y \in X$, temos:

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y)$$

Se $y = 0$ então a desigualdade esta satisfeita, tomamos agora p/ $y \neq 0$, então tomamos λ como:

$$+\lambda = -\frac{(x, y)}{(y, y)}$$

Assim:

$$0 \leq (x, x) + 2\lambda(x, y) + \lambda^2(y, y)$$

$$0 \leq (x, x) + 2\left(\frac{-(x, y)}{(y, y)}\right) \cdot (x, y) + \left(\frac{-(x, y)^2}{(y, y)}\right) \cdot (y, y)$$

$$0 \leq (x, x) - \frac{2(x, y)^2}{(y, y)} + \frac{(x, y)^2}{(y, y)^{\cancel{2}}} \cdot \cancel{(y, y)}$$

$$0 \leq \frac{(x, x)(y, y) - 2(x, y)^2 + (x, y)^2}{(y, y)}$$

$$0\cdot(y,y) \leq (x,x)(y,y) - 2(x,y)^2 + (x,y)^2$$

$$0 \leq (x,x)(y,y) - (x,y)^2$$

$$(x,y)^2 \leq (x,x)\cdot(y,y)$$

$$(x,y) \leq \sqrt{(x,x)}\cdot\sqrt{(y,y)}$$, então:

$$B(x,y) \leq \sqrt{B(x,x)}\cdot\sqrt{B(y,y)}$$

$$B(x,y) \leq \sqrt{q_B(x)}\cdot\sqrt{q_B(y)}$$