Polinômios Minimais de Operadores e o Teorema de Cayley-Hamilton

Dado um operador linear $T \in \mathcal{L}(V,V)$, onde $\dim_K V < \infty$, existe um polinômio $p_T(x)$ cujas raízes nos trazem informações importantes sobre o comportamento de T.

Se $T: V \to V$ for um operador linear então é claro que, para cada $i \geq 0$, T^i também será um operador em $\mathcal{L}(V,V)$. Por outro lado, temos:

<u>Teorema</u>: Sejam U e V dois espaços vetoriais sobre K com dimensão n e m, respectivamente. Então o espaço $\mathcal{L}(U,V)$ tem dimensão $m.n$.

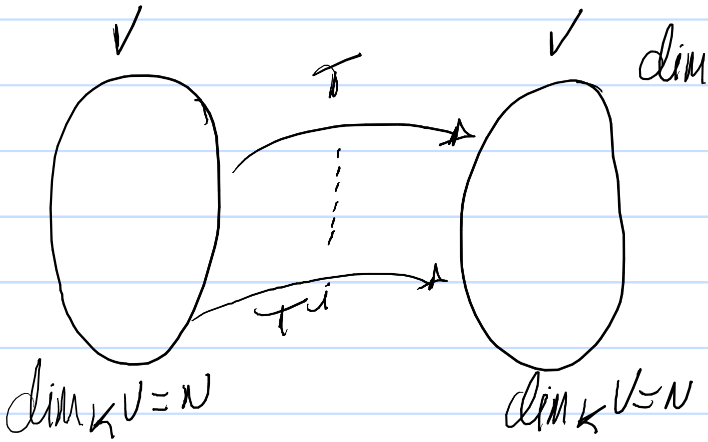
Assim $\dim_K \mathcal{L}(V,V)$ é n^2. Portanto, existe $m \geq 1$ tal que $T^0 = Id, T, \ldots, T^{m-1}$ seja l.i em $\mathcal{L}(V,V)$ enquanto

$T^0, T, \ldots, T^m$ é l.d. Logo, existem $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in k$ tais que:

$$T^m = \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i, \text{ isto é, } T^m(v) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i(v),$$

$\forall v \in V$

$\dim_k \mathcal{L}(V,V) = n^2$



- $T^0 = Id, T, \ldots, T^{m-1}$ seja l.i. em $\mathcal{L}(V,V)$
- $T^0, T, \ldots, T^m$ é l.d., ou:

$$\underbrace{\underbrace{T^0, T, \ldots, T^{m-1}}_{\text{l.i}}, T^m}_{\text{l.d}}$$

$\exists\, a_0, a_1, \ldots, a_{m-1} \in k$ tais que:

$$T^m = \sum_{i=0}^{m-1} a_i t^i, \text{ isto é } T^m(v) = \sum_{i=0}^{m-1} a_i T^i(v), \forall v \in V$$

Considere então o polinômio:

$$m(T)(x) = x^{n} - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{i}$$, temos então

que $m(T)(v) = 0, \forall v \in V$. Isto é, $m(T) = 0$

- $\underbrace{T^{0} = Id, T, \dots, T^{n-1}}_{n}$, é l.i, já
- $\underbrace{T^{0}, T, \dots, T^{n}}_{n+1}$, é l.d

→ Deve existir algum T que é combinação linear com outro. Com coeficiente não todos nulos que é igual ao operador nulo.

Em razão disto existe um $\underline{m}$ mínimo número natural tal que $I, T, T^{2}, \dots, T^{m}$ são l.d. Temos $m \leq n^{2}$ no máximo para cumprir a propriedade de l.d.

Temos:

$a_0 I + a_1 T + a_2 T^{2} + \dots + a_m T^{m} = 0$, existe algum coeficiente que é $\neq 0$.

Então se $a_m T^m = 0$, logo:

$$a_0 I + a_1 T + \dots + a_{m-1} T^{m-1} = 0$$

Assim teríamos $\underline{m}$ termos e o $(m-1)$ teria a menor propriedade e isto não pode acontecer, então pela escolha inicial o termo com a condição mínima deve ser o $a_m T^m$.

Temos que $a_m \neq 0$, e dividimos a_m por a_m e supor $a_m = 1$. Teremos então:

$$a_0 I + a_1 T + a_2 T^2 + \dots + a_{m-1} T^{m-1} + T^m = 0$$

Temos o polinômio:

$$m_T(x) = x^m - \sum_{i=0}^{m-1} a_i x^i \longrightarrow m_T(T) = 0$$

Este é o operador linear zero, que associa cada vetor ao vetor nulo. Assim ao aplicar no operador resultará no vetor nulo.

Ex: Seja $T \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ definido por:

$$T(x, y, z) = (x, x+y, z)$$

Calcule p_T e m_T.

Partimos de uma matriz na base canônica.

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad p_T(x) = (\lambda Id - T)$$

$$\xrightarrow{T} \begin{array}{ccc} \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right. & & \left.\right) \\ T_1 & T_2 & T_3 \end{array}$$

$$\det T: \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ -1 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & -x \end{pmatrix}$$

$$(x-1)^3 = p_T(x)$$

Para o polinômio mínimo:

$$\overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{l.i} \quad \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}^{l.i}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I \qquad\qquad [T] \qquad\qquad [T]^2$$

identidade $\qquad$ operador

$$A^2 - 2A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$$

$$\left(m(A)(x) = x^n - \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i \right)$$

Temos agora a condição desejada:

$$A^2 - 2A + I = 0 \rightarrow m_T(x) = x^2 - 2x + 1$$

$$\Downarrow$$

$$(x-1)^2$$

Temos portanto que:

$p_T(x) = (x-1)^3$

$m_T(x) = (x-1)^2$

$p_T(x) \neq m_T(x)$, mas possuem as mesmas raízes, $x = 1$

Temos também que: $p_T(x) / m_T(x)$

Exemplo: Seja $T \in (\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^3)$ dado por:

$T(a,b,c) = (a, a+b, c)$. Calcule o polinômio característico;

Tomando a base canônica temos:

$pt(x) = (x-1)^3$

Observe também:

$T^2(a,b,c) = (a, 2a+b, c)$, de acordo com a redução anterior.

$T^2(a,b,c) = (a, 2a+b, c) = (2a, 2a+2b, 2c) - (a,b,c) = 2T(a,b,c) - Id(a,b,c)$

$\forall (a,b,c) \in \mathbb{C}^3$

Assim, $T^2 = 2T - Id$ ou $T^2 - 2T + Id = (T - Id)^2 = 0$

Temos portanto, que o polinômio $mT(x)$ é definido como: $(x-1)^2$.

Temos que: $\dfrac{(x-1)^3}{(x-1)^2} = (x-1)^1$

Observações:

Seja $T \in \mathcal{L}(V,V)$ um operador linear. Se $p(x) \in P(K)$ for um polinômio tal que: $p(T)(v)=0$, $\forall v \in V$, então $p(x)$ é um múltiplo de $m_T(x)$.

① De fato, faça a divisão de $p(x)$ por $m_T(x)$, isto é:

$$p(x) = m_T(x) \cdot q(x) + r(x), \text{ onde } r(x)=0$$
ou $\text{grau}(r(x)) < \text{grau}(m_T(x))$.

Suponha que $r(x) \neq 0$, então:

$$r(x) = \sum_{i=0}^{s} b_i x^i, \text{ com } b_s \neq 0 \text{ e}$$

$$s = \text{grau}(r(x)) < \text{grau}(m_T(x)).$$

Para $v \in V$, temos:

$$0 = p(T)(v) = (m_T \cdot q)(T)(v) + r(T)(v) =$$
$$(m_T(T) \circ q(T))(v) + r(T)(v)$$

Temos que $m_T(T)$ e $q(T)$ são polinômios em T, eles comutam e segue que:

$(m_T(T) \circ q(T))(v) + r(T)(v) =$

$(q(T) \circ m_T(T))(v) + r(T)(v) =$

$q(T)(m_T(v)) + r(T)(v) = r(T)(v)$

Logo, $\sum_{i=0}^{1} b_i T^i(v)$, $\forall v \in V$ e portanto,

Segue então que $\{T^0, T, \dots, T^1\}$ é l.d., uma contradição com a definição de $m_T(x)$. Portanto, $r(x) = 0$, e o resultado está provado.

Usando uma terminologia clássica da teoria de anéis, dizemos que $m_T(x)$ é um gerador do ideal de todos os polinômios $p(x)$ tais que $p(T)(v) = 0$, $\forall v \in V$.

Observamos também que $m_T(x)$ é o único polinômio mônico com esta propriedade. Isto justifica a seguinte definição.

Um polinômio é chamado mônico quando o coeficiente do termo de maior grau é 1. Ex: $x^3 + 4x^2 - 5x + 3$.

Definição: O polinômio minimal de um operador linear T em $\mathcal{L}(V,V)$ é o polinômio mônico $m_T(x)$ de menor grau tal que $m_T(T)(v) = 0$, $\forall v \in V$.

Definimos anteriormente dois polinômios relacionados a uma transformação linear T, a saber, o polinômio característico $p_T(x)$ e o polinômio minimal $m_T(x)$.

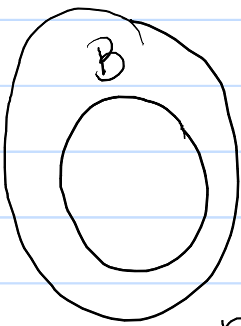
Pelo teorema de Cayley-Hamilton $p_T(x)$ se anula em T, e portanto, $m_T(x)$ é um divisor de $p_T(x)$. Eles possuem as mesmas raízes, e tais combinações são úteis na descrição das formas de Jordan.

Teorema de Cayley-Hamilton: Um operador linear $T \in \mathcal{L}(V,V)$ é um zero de seu polinômio característico $p_T(x)$, isto é, $p_T(T) = 0$.

Demonstração:

Seja $\mathcal{B}$ uma base de V e escreva $A = [T]_{\mathcal{B}}$. Considere também $A' = xId_V - A$ e portanto $p^T(x) = \det A'$.

$V \neq 0$



$A = [T]_{B}$, uma matriz de transformação linear em $\mathcal{B}$.

$A' = (xId_N - A)$ e

$p^T(x) = \det(A') = 0$

Por fim, seja $B = ad(A') = (b_{ij})$ a matriz adjunta a A'. Os elementos b_{ij} são os cofatores da matriz $(xId_N - A)$ e, portanto, representam polinômios em x de grau no máximo $(N-1)$.

Escrevendo cada par i,j tal polinômio como:

$$b_{ij} = b_{ij}^{(0)} + b_{ij}^{(1)}x + \dots + b_{ij}^{(N-2)} x^{(N-1)}$$

Se denotarmos, $k = 0, 1, \dots, N-1$

$$B^k = \begin{bmatrix} b_{11}^{(k)} & b_{12}^{(k)} & \cdots & b_{1N}^{(k)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{N1}^{(k)} & b_{N2}^{(k)} & \cdots & b_{NN}^{(k)} \end{bmatrix}$$

Temos que $B = B^{(0)} + B^{(1)}x + \dots + B^{(N-1)}x^{(N-1)}$

Agora, escrevendo $pT(x) = a_0 + a_1(x) + \dots + x^N$ e usando o fato que:

$$B.A' = ad(A').A' = (\det A')Id_N = pT(x)Id_N$$

Segue que:

$$(B^{(0)} + B^{(1)}x + \dots + B^{(N-1)}x^{(N-1)})(xId_N - A) = (a_0 + a_1x + \dots + x^N)Id_N$$

Logo, comparando-se os coeficientes destes polinômios, temos que:

$$\begin{cases} a_0 Id_N = -B^{(0)} \cdot A \\ a_1 Id_N = B^{(0)} - B^{(1)} \cdot A \\ \vdots \\ a_{N-1} Id_N = B^{(N-2)} - B^{(N-1)} \cdot A \\ Id_N = B^{(N-1)} \end{cases}$$

Multiplicando-se estas equações por Id_N, A, A^2, ..., A^N, respectivamente, e somando-as teremos que:

$$p_T(T) = a_0 Id_N + a_1 A + \dots + A^N = 0$$

Como queríamos mostrar.

<u>Teorema de Cayley-Hamilton</u>: Seja $T \in \mathcal{L}(V,V)$, onde $\dim(V) < \infty$. Então $p_T(T) = 0$, onde p_T é o polinômio característico de T.

$P_T(x) = \det(xI - [T]_B)$, gera um polinômio característico, independente da base.

Dado que $A = xI - [T]_B$

$A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = p_T(x) I$

A $Adj(A) = (c_{ij})$, onde $c_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$

Temos que A_{ij} = determinante $(n-1)(n-1)$ obtida retirando a linha i e a coluna j.

$$A = xI - [T]_B = \begin{pmatrix} x-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x-a_{22} & & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & & x-a_{nn} \end{pmatrix}$$

Temos que:

$A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = p_T(x) \cdot I$

E os coeficientes da $Adj(A)$ são polinômios de grau no máximo $(n-1)$, então:

$Ad(A) = B_0 + B_1 x_1 + \dots + B_{n-1} x^{n-1}$

Onde as matrize B_i são matrizes com coeficientes constantes; com coeficientes num corpo.

Então: $B_0, B_1, \ldots, B_{N-1} \in M_{(N-1)\times(N-1)}(K)$

Temos: $A = xI - [T]$,

$$Adj(A) = B_0 + B_2 x + \cdots + B_{N-1} x^{(N-1)}$$

$$A \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = p_T(x) \cdot I$$

$$(xI - [T]) \cdot Adj(A) = Adj(A) \cdot A = p_T(x) \cdot I$$

e $p_T = a_0 + a_1 x + \ldots + a_N x^N$

$C = [T]$

$$\begin{cases} -C\cancel{B_0} = a_0 I & \\ I\cancel{B_0} - C\cancel{B_1} = a_1 I & xC = a_1 C \\ I\cancel{B_1} - C\cancel{B_2} = a_2 I & xC^2 = a_2 C^2 \\ \vdots & \\ I\cancel{B_{(N-2)}} - \cancel{C \cdot B_{(N-1)}} = a_{N-1} I & xC^{N-1} = a_{N-1} C^{N-1} \\ \cancel{C^N} \cdot B_{(N-1)} = a_N I & xC^N = a_N C^N \end{cases}$$

Somamos tudo

Somamos:

$$a_0 I + a_1 C + \dots + a_N C^N = 0$$

E também: $p_T(C) = p_T([T])$

Temos que:

$$C = [T]_B, \ [P_T(T)]_B = P_T(C) = 0$$

Acontece somente se $p_T(T) = 0$
e o polinômio característico sempre anula o operador.

__Proposição:__ Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão $N \geq 1$ e $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Então, os polinômios característicos e minimal de T têm as mesmas raízes a menos de multiplicidade.

__Demo:__ Sejam $p_T(x)$ e $m_T(x)$ os polinômios característico e minimal de T, respectivamente, e seja $\lambda \in K$. Precisamos mostrar que $p_T(\lambda) = 0$ se e somente $m_T(\lambda) = 0$.

Suponha inicialmente que $p_T(\lambda)=0$, isto é, que λ seja um autovalor de T. Então existe $0 \neq v \in V$ tal que $T(v)=\lambda v$.

Observe que, para cada $i \geq 1$, temos

$T^i(v) = \lambda^i v$, agora se escrevermos $m_T(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$, teremos então que:

$$0 = m_T(T)(v) = \left(\sum_{i=0}^{m} a_i T^i\right)(v) =$$
$$\left(\sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i\right) v$$

e portanto, $m_T(\lambda) = \sum_{i=0}^{m} a_i \lambda^i = 0$, pois $v \neq 0$.

Logo, λ é uma raiz de $m_T(x)$.

Suponhamos agora que $m_T(\lambda)=0$. Então, $m_T(x) = (x-\lambda)q(x)$. Pela condição de minimalidade no grau do polinômio m_T, segue que $q(T) \neq 0$ e, portanto, existe $u \in V$ tal que $q(T)(u) \neq 0$.
Se denotamos $v = q(T)(u)$, teremos então:

$$0 = m_T(T)(u) = (T - \lambda Id)(q(T)(u)) =$$
$$(T - \lambda Id)(v)$$

E portanto v é um autovetor de T associado ao autovalor λ. Logo, $p_T(\lambda) = 0$ e o resultado está demonstrado.

Este teorema garante que o $m_T(x)$, sem é divisor de $p_T(x)$:

$$p_T(T) = 0 \rightarrow m_T / p_T$$

$$T(x, y, z) = (x, x+y, z)$$

$$p_T(t) = (t-1)^3 \text{ e } m_T(T) = (t-1)^2$$

Com isso toda raiz de $m_T(x)$ também é raiz de $p_T(x)$.

As raízes são os autovalores λ, do operador linear.

Teorema: Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Seja W um subespaço T-invariante. Então $p_{T_W} \mid p_T$ e $m_{T_W} \mid m_T$.

Sejam $B' = \{u_1, \dots, u_m\}$ uma base de W e $B = \{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ uma base de V.
Temos que B é uma base completada de B', e temos que a matriz de transformação linear na base B é dada por:

$$[T]_B = \left(\begin{array}{c|c} [T_W]_{B'} & \Sigma \\ \hline 0 & \Sigma \end{array}\right)$$

Para calcular o polinômio pode-se usar qualquer base, vamos usar a base B para T e B' para T_W.

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T_W]_{B'} & X \\ 0 & X \end{pmatrix}$$

$$P_T(x) = \det(xI - [T]_B) =$$

$$\det \left(\begin{array}{c|c} (xI_m - [T_W]_{B'}) & -D \\ \hline 0 & (xI_{n-m} - E) \end{array} \right)$$

Como esta matriz é triangular superior por blocos, então $p_T(x)$ será:

$$P_T(x) = P_{T_W}(x) \cdot \det(xI_{n-m} - E)$$

Temos que $P_{T_W} \mid P_T$, assim o grau de p_{T_W} é menor do que o grau $p_T(x)$.

Para os polinomios minimais, temos:

$M_T(T) = 0 \rightarrow M_T(T_W) = 0$ porque T_W esta sobre a restrição do operador Nulo. Mas se temos um polinomio que anulam o operador, este polinomio é multiplo do polinomio minimal.

Temos que:

$$m_{T_W} \mid m_T$$

<u>Teorema</u>: Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Seja W um subespaço T-invariante. T induz um operador linear:

$$T_{V/W} \in \mathcal{L}(V/W, V/W).$$

Dado um operador em uma aplicação quociente:

$$\pi : V \longrightarrow V/W$$
$$u \longrightarrow u+W$$

Então: $\pi \circ T \in \mathcal{L}(V, V/W)$, pelo teorema do isomorfismo pode-se induzir uma aplicação no quociente em qualquer espaço que contenha um núcleo.

Se $W \subseteq$ Núcleo, temos $u \in W \rightarrow$ $(\pi \circ T)(u) = \pi(T(u))$, assim $T(u) \in W$ e a imagem por π é o vetor nulo do espaço quociente. Assim:

$$\pi(T(u)) = 0$$

$T(u) \in W$ porque W é um sub-espaço T-invariante. Com isso:

$$W \subseteq Nuc(\pi \circ T)$$

Sempre que acontecer, temos:

$$\pi : V \longrightarrow V/W \text{ e } W \subset Nuc(\pi \circ T)$$

e $\pi \circ T$ induz uma transformação linear $T_{V/W}$ de V/W. Assim:

$$\pi \circ T : V \longrightarrow V/W$$

Ou seja $T_{V/W} \in \mathcal{L}(V/W, V/W)$

Temos: $T_{V/W}(u + W) = (\pi \circ T)(u) = T(u) + W$

$$T_{V/W}(u + W) = T(u) + W$$

Assim definimos um operador linear no quociente de V/W.

Com isso se tomarmos $B' = \{u_1, \dots, u_m\}$ uma base de W tal que $B = \{u_1, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_n\}$ é uma base de V.

O conjunto:

$$C = \{u_{m+1} + W, u_{m+2} + W, \dots, + u_n + W\}$$

é uma base ordenada de V/W. Calcule $[T_{V/W}]_C$.

Temos que B é uma base estendida de B', com isso podemos determinar uma base p/ o quociente.

$$[T]_B = \begin{array}{cc} \underbrace{m\ 1^{\circ}\text{ colunas}}_{\downarrow} & \underbrace{n-m\text{ ultima}}_{\downarrow} \\ \left(\begin{matrix} [T_W]_{B'} & A \\ 0 & B \end{matrix}\right) & \end{array}$$

$B = [T_{V/W}]_C$

$[T_{V/W}]_C$, em $C = \{u_{m+1} + W, \dots, + u_n + W\}$

$T(u_{m+1}) = \cancel{a_{1,m+1} \cdot u_1 + \dots + a_{m,m+1}\, u_m} +$

o quociente anula esta parte

$a_{m+1,m+1}\, u_{m+1} + \dots + a_{n,m+1} \cdot u_n$

Porque $V/W = V - W$

Por isso $B = [T_{V/W}]_C$ é de fato a matriz induzida no quociente.

Definição: Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Dizemos que T é triangularizável se existe uma base B de V tal que $[T]_B$ é triangular superior.

Teorema: Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in \mathcal{L}(V,V)$. Então T é triangularizável se, e somente se, o polinômio minimal de T é um produto de fatores lineares em $K[x]$.

Temos que T é triangularizável, se e somente se, o polinômio minimal de T é um produto de fatores lineares no anel do polinômio.

Se T é triangularizável, se e somente se o polinômio minimal de T é um produto de fatores lineares.

T é triangularizável $\Rightarrow \exists$ base de V tal que a matriz:

$$[T]_B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & a_{22} & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & & a_{NN} \end{pmatrix}$$

é triangular superior.

$p_T(x) = (x-a_{11}).(x-a_{22}),\dots(x-a_{NN})$, assim temos um produto de fatores lineares.

Agora vamos supor que o polinomio minimal é produto de fatores lineares.
Prova: Por indução na dimensão de V, com isso mostramos que o operador é triangularizável.

Temos que mostrar que vale para $\dim V = 1$, para dimensão $< N$ e então para $\dim_K V = N$. (Indução Natural)

Hipótese: o polinômio minimal é um produto de fatores lineares, mas somente garante que o polinômio minimal tem uma raiz.

$$m_T = (x-c_1)(x-c_2)\ldots\ldots(x-c_k)$$

Se considerarmos c_1 uma raiz de m_T, então também é uma raiz de $p_T(x)$, e também um autovalor.

Temos $c = c_1$ é um autovalor de T, agora construímos o subespaço de autovetores associados a c.

$$W = \text{Nuc}(T - cI) \neq \{0\}$$

é não trivial $\neq$ nulo e c é um autovalor.

1) $\dim W = \dim V \to [T]_B = cI$, esta já é diagonal e também triangular

2) $\dim W < \dim V$, se considerar bases adequadas podemos associar a matriz de T com as matrizes dos operadores induzidos por c em W e V/W.

Temos 3 bases:

$B' = \{u_1, \ldots, u_m\}$ base de W

$B = \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ base de V

$C = \{u_{m+1} + W, \ldots, u_n + W\}$ base de V/W

$$[T]_B = \begin{pmatrix} [T]_{B'} & A \\ 0 & [T_{V/W}]_C \end{pmatrix}$$

$\dim W < \dim V$, usando a hipótese de indução:

$\dim V/W = (\dim V - \dim W) < \dim V$

Isto porque como a $\dim W \geq 1$, e $\dim V > \dim W$, e W era um espaço de autovetor.

Temos que W e V/W tem dimensão menor, como consequência estas duas matrizes são triangularizável.

Aplicando a hipótese de indução:

Temos que dado uma base B de V tal que:

$$[T]_{\hat{B}} = \begin{pmatrix} \text{Triangular superior} & A \\ 0 & \text{Triangular superior} \end{pmatrix}$$

Como a dim V/W < dim V e a dim W < dim V, temos que em ambos os casos geram polinômios de grau menor do que V, logo são divisores. Assim temos que também é diagonalizável.

Para ser mais rigoroso, escolhe-se uma base em W, (canônica). Já para o operador

$T_{V/W}$ → encontra uma base:

$\hat{C} = \{v_{m+1}+W, \ldots, v_n+W\}$ para V/W

tal que:

$[T_{V/W}]_{\hat{C}}$ é triangular

O mesmo para T_W:

$\hat{B}' = \{v_1, \ldots, v_m\}$ tal que $[T_W]_{\hat{B}'}$ Δ

Ao fazer a união: $\hat{B}'$ e $\hat{C}$, obtém a base buscada desde o início.

Em consequência, temos o:

Corolário: Sejam V um K-espaço vetorial de dimensão n e $T \in L(V,V)$. Suponha que K é algebricamente fechado. Então T é triangularizável.

Como qualquer polinômio é produto de fatores lineares, então usando o teorema:

"Sejam V um K-espaço de dimensão n e $T \in L(V,V)$. Então T é triangularizável se, e somente se, o polinômio minimal de T é um produto de fatores lineares em $K[x]$.

① Dado $[T]_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\bar{n}$ diagonalizável, $T \in L(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$

Qualquer operador é triangularizável, mas não é verdadeiro que é diagonalizável.

$p_T(x) = x^2$, o único $\lambda = 0$, $Ma = 2$ mas $Mg = 1$, $2 \neq 1$ $\bar{n}$ diagonalizável.

$T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2)$, Δ não diagonalizável, o que garante que sobre um corpo algebricamente fechado

Sempre que todos os operadores são triangularizáveis, mas não é sempre diagonalizável. Como garante o teorema.