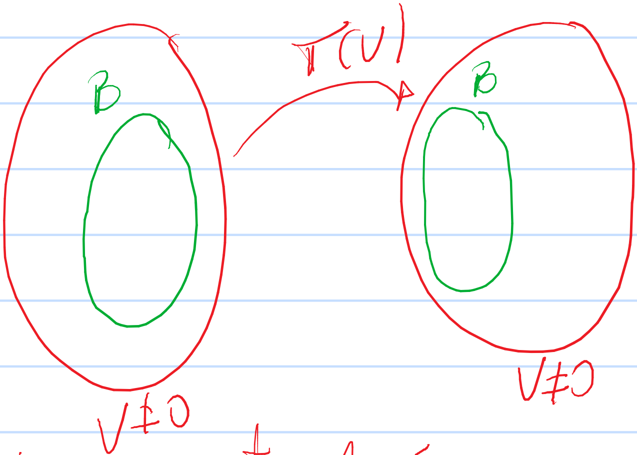
Formas Canônicas

Um operador linear é uma transformação linear: V é um espaço vetorial sobre um corpo K.



- Domínio = contra domínio
- $\dim_K V = n$

$[T]_B \in M_n K$

Se $[T]_B$ for uma matriz diagonal, então informações sobre Núcleo de T e o seu posto podem ser obtidas facilmente.

Operadores Diagonalizáveis

Seja $T: V \to V$ um operador linear e suponha que exista uma base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V, tal que $[T]_B$ tenha forma diagonal.

$$[T]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

$\lambda_i \in K$ para $i = 1, \dots, n$. Assim:

$T(v_i) = \lambda_i v_i$ para $i = 1, \dots, n$, isto é, a imagem de qualquer vetor da base B por T é um múltiplo deste vetor.

Definições: $T: V \to V$, um operador linear.

a) Um autovalor de T é um elemento $\lambda \in K$ tal que existe um vetor não nulo $v \in V$ com

$T(v) = \lambda v.$

b) Se λ é um autovalor de T, então todo vetor não nulo $v \in V$ tal que $T(v) = \lambda v$ é chamado de autovetor de T associado a λ. Denotado por $Aut_T(\lambda)$ o subespaço de V gerado por todos os autovetores associados a λ.

c) Suponha que $\dim_K V = n < \infty$. T é diagonalizável se existir uma base B tal que $[T]_B$ é diagonal, equivale dizer que existe uma base formada por autovetores de T.

Revisão Autovalores e Autovetores

Lembrando: Um operador linear é uma transformação em que o domínio e o contradomínio são os mesmos;
$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, etc.
Autovalor: um número
Autovetor: um vetor

Um exemplo prático seria, dado um vetor qualquer ao se aplicar uma transformação linear, se este vetor não sofrer deflexão nenhuma. Somente alterar seu modulo, ou seja ele for alongado. Então temos o autovalor no modulo e a direção o autovetor.

Autoespaço: Dado λ, um autovalor de $T: V \longrightarrow V$, dizemos que os vetores $v_1, \ldots, v_k$ tais que:

$$T(v_i) = \lambda v_i, \quad i = 1, \ldots, k$$

Temos k (vetores) associados ao mesmo λ, e estes vetores são uma base para o subespaço dado por:

$$Aut_T(\lambda) = [v_1, \ldots, v_k]$$

Então os autovetores, associados a um único valor λ, formam a base p/ um auto-espaço.

Dada uma transformação linear T e sua respectiva matriz $[T]_{B|C}$ chama-se o polinômio característico de $[T]_{B|C}$, dado por:

$$P_{[T]_{B|C}}(\lambda) = \det([T]_{B|C} - \lambda I)$$

onde I é a matriz identidade de mesma dimensão de $[T]_{B|C}$.

λI = subtrai-se λ na diagonal principal

Definição: Duas matrizes A e B são ditas semelhantes quando existe uma terceira matriz M invertível tal que:

$$A = M^{-1} B . M$$

Corolário: Dado um operador linear $T: V \longrightarrow V$ com matriz $[T]_{B1}$ e $[T]_{B2}$, ou seja no mesmo espaço vetorial mas com bases diferentes as matrizes são semelhantes, não iguais.

Onde $\beta_2 \neq \beta_2$, bases distintas de V.

Assim existe M^{-1} tal que:

$$[T]_{\beta_1} = M^{-1}[T]_{\beta_2} M$$

Ou seja $[T]_{\beta_1} \sim [T]_{\beta_2}$, semelhantes

<u>Proposição:</u> Matrizes semelhantes possuem o mesmo polinômio característico.

Seja $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ e seja $P_B = \det(B - \lambda I)$

Com $A \sim B$. Então existe M^{-1} tal que

$A = M^{-1} B M$, então:

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \det(M^{-1}BM - \lambda I) =$$

$$\det(M^{-1}BM - M^{-1}\lambda M) = \det(\cancel{M^{-1}}(B - \lambda I)\cancel{M})$$

= "Cancela pela propriedade multiplicativa do determinante"

$= \det(B - \lambda I)$

obs: $\det(\cancel{M^{-1}}) \cdot \det(B-\lambda I) \cdot \cancel{\det M}$
$(1/\det M)$

Como todos são números podemos cancelar

Corolário: Um operador linear $T: V \to V$ possui o mesmo polinômio característico independente da escolha da base para V.

Então $P_{[T]_{B,C}} = P_T(\lambda)$ o polinômio característico da matriz $[T]$

Proposição: Seja $T: V \to V$ um operador linear, e V um K-espaço vetorial de dimensão finita. Então os autovalores de T são as raízes de seu polinômio característico.

Dem: Suponha existir λ e v tais que
$$T(v) = \lambda v \to [T]v - \lambda v = 0$$

Vetor coluna

$$\underbrace{([T] - \lambda . Id)}v = 0$$

Transformação linear, porém $v \neq 0$ é tal que $v \in Nuc([T] - \lambda Id)$

Como $Nuc([T] - \lambda Id) \neq \{0\}$

Para encontrar o NucT era necessário resolver um sistema homogeneo, e um sistema homogeneo somente tem solução nula quando o determinante é diferente de zero. Assim se:

$det([T] - \lambda Id) = 0$, para ter mais soluções do que a nula.

Contudo: $det([T] - \lambda Id) = 0$, é o polinômio caracteristico: $P_T(\lambda) = 0$

Então se existir autovalores e autovetores, os autovalores são as raízes do polinômio caracteristico.

Exemplo: $T(x,y) = (y,x)$, encontre seus autovalores; $T: R^2 \to R^2$

1) Encontre a matriz da transformação:

Não depende da escolha de base, então a mais simples de todas. A base canônica, monta-se a matriz de transformação:

$[T]_{can}$, sendo $\beta = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$,

logo $T(e_1) = T(1,0) = (0,1)$ → Primeira Coluna
$T(e_2) = T(0,1) = (1,0)$ → Segunda coluna

Ou seja: $[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Não precisa escolher outra base, se não for determinada, isto porque:
"Um operador linear $T: V \to V$ possui o mesmo polinômio característico independente da escolha da base para V."

2:) Calcula-se o polinômio característico:

$$P_T(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (\lambda^2 - 1) = 0$$

Logo os autovalores são as raízes de:

$x^2 - 1 = 0$

$x^2 = 1 \longrightarrow x = \pm 1$ ou $\lambda = \pm 1$

Para cada autovalor gera um auto espaço.

<u>Autovetores</u>: Queremos v tal que $T(v) = \lambda v$, sendo λ um autovalor conhecido. Assim, se:

$[T]$ é a matriz de T, em termos matriciais, temos a seguinte equação:

Sempre que trabalhamos em termos matriciais o vetor v é sempre coluna,

$$[T]v = \lambda v \longrightarrow [T]v - \lambda v = 0 \longrightarrow$$

Matriz $= ([T] - \lambda Id)v = 0$ → vetor coluna

$$\begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda = \pm 1, \quad [T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = (1)$$

Vamos encontrar os autovetores referentes a $\lambda = 1$. Ou seja, vamos determinar $Aut_T(1)$

Queremos $v = (a, b)$ tal que $([T] - \lambda Id) = 0$

Então:

$$(1) = ([T] - \lambda Id) \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = 0$$

Para $\lambda = 1$, temos que:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -a + b = 0 \\ a - b = 0 \end{cases} \rightarrow$$ Escalonamos, para encontrar uma base p/ um sistema homogêneo.

$$\begin{cases} -a+b=0 \\ a-b=0 \end{cases} \xrightarrow{L_2 = L_2 + L_1} \begin{cases} -a+b=0 \\ 0b=0 \end{cases}$$

diagonal

$b=b$, $a=b$

Portanto $v=(a,b)=(b,b)=b(1,1)$

O número de linhas que zera, é o número de autovetores que terá.

Se $b=1$, temos $v=(1,1)$, este é o autovetor associado ao autovalor 1.

Logo $Aut_T(1)=[(1,1)]$

Agora o autovetor relativo ao autoespaço, dado pelo autovalor (-1).

$$\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} \xrightarrow{\lambda=-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a+b=0 \\ \cancel{a+b=0} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ 0b=0 \end{cases} \quad \boxed{\begin{matrix} b=b \\ a=-b \end{matrix}}$$

Ou seja $V = (a,b) = (-b,b) = b(-1,1)$

$V = (-1,1)$

Portanto $Aut_T(-1) = [(-1,1)]$

Diagonalização: Se duas matrizes A e B são semelhantes então existe M tal que:

$$A = M^{-1} B M$$

Se $A \sim D$, matriz diagonal, ou seja

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \lambda_k \end{bmatrix}, \text{ então } D^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & & \lambda_k^n \end{bmatrix}$$

Desta forma $A = M^{-1} D M$ e portanto:

$$A^2 = (M^{-1} D M)^2 = M^{-1} D \cancel{M} \cdot \cancel{M^{-1}} D M$$
$$= M^{-1} D^2 M$$

De forma geral:

$$A^n = M^{-1} D^n M$$

Matrizes estão relacionadas com transformações lineares, equivale a potências de matrizes: $F \circ G = [F] \cdot [G]$, ou $[T] \cdot [T] = T^2$.

Suponha que $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ seja tal que, λ_1 e λ_2 sejam seus autovalores e $Aut(\lambda_1) = [v_1]$ e $Aut(\lambda_2) = [v_2]$.

Então: $T(v_1) = \lambda_1 v_1$

$T(v_2) = \lambda_2 v_2$

Então, como matrizes $[T] \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_1 \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 \end{bmatrix}$

$$[T] \cdot \begin{bmatrix} | \\ v_2 \\ | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_2 v_2 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$[T] \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}}_{M} = \begin{bmatrix} | & | \\ \lambda v_1 & \lambda v_2 \\ | & | \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{bmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{bmatrix}}_{M}$$

$$[T] \cdot M = D \cdot M \Rightarrow M^{-1}[T] \cdot M = M^{-1} M D$$

$M^{-1}[T]M = D$, ou seja: $[T] \sim D$

M = é a matriz formada por autovetores

Ao fixar a ordem dos autovalores na matriz D, a matriz M deve prevalecer a ordem dos vetores. Ou seja:

- λ_1 com V_1, λ_2 com V_2

<u>Definição</u>: Seja V um espaço vetorial de dimensão finita um operador linear $T: V \to V$ é dito diagonalizável se existe uma base de V formada pelos autovetores de T.

Ou seja se juntar todos os vetores do auto-espaço irá formar o próprio espaço vetorial V.

Portanto, quando o conjunto de todos os autovetores obtidos formam uma base para V.

<u>Definição</u>: Dado $P_T(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{k_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{k_2} \cdots (\lambda - \lambda_n)^{k_n}$, polinômio característico de T, onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são seus autovalores, então dizemos, dado um autovalor λ_i, $1 \leq i \leq n$. Chamamos de multiplicidade

algébrica desse λ_i o número:

$$M_a(\lambda_i) = k_i$$

A multiplicidade algébrica é o número de vez que é raiz do polinômio característico.

Por exemplo: um polinômio grau 2, temos que $M_a = 2$.

Chamamos de Multiplicidade Geométrica de λ_i o número:

$$M_g(\lambda_i) = \dim Aut_T(\lambda_i)$$

A multiplicidade geométrica é o número de autovetores.

"Pode ser $\mathbb{C}$, e outros"

<u>Teorema</u>: Seja V um $\mathbb{R}$-espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathcal{L}(V,V)$, um operador linear, então $[T]$ é diagonalizável se e somente se:

1) $P_T(\lambda)$ deve possuir todas raízes em $\mathbb{R}$ (se a raiz for complexa no espaço $\mathbb{R}$ então não é diagonalizável, somente em $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, etc).

2) Para cada autovalor λ, devemos ter:

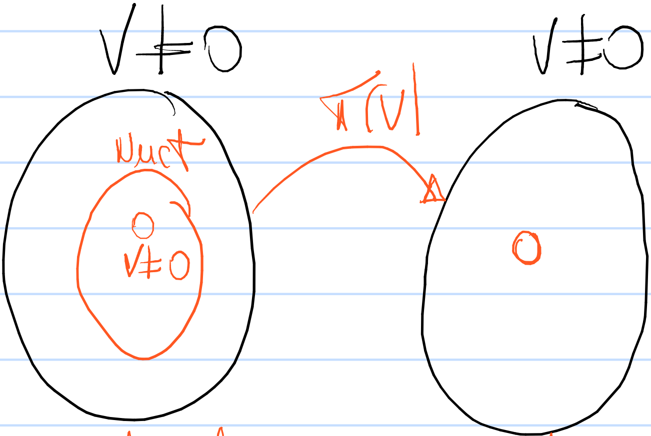
$$M_a = M_g$$

Neste caso, $[T]$ é tal que: $M^{-1}[T].M = D$

onde M é a matriz com colunas formadas por autovetores e D a matriz diagonal dada por $D = \text{diagonal}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Observações:

a) Se $T: V \to V$ um operador linear não injetor. Então 0 é um autovalor de T. De fato, como T não é injetor, existe um vetor não nulo em $\text{Nuc}\,T$. Daí $T(v) = 0 = 0.v$



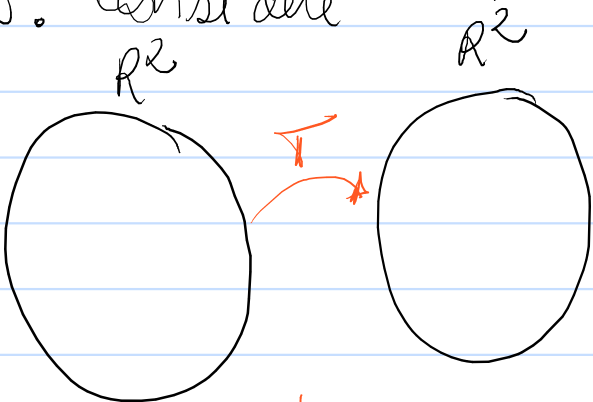
T(V): operador linear não injetor

Então existe $\lambda = 0$, $T(v) = \lambda v$

Como $v \neq 0$ $v \in$ Nuc T, $T(v) = 0 . v = 0$

Então $0 \in$ Im T possui dois elementos no domínio

b) Existem operadores lineares que não possuem autovalores. Considere



$T(x, y) = (-y, x)$, utilizamos a base canônica de R^2.

$[T]_{can}$, sendo $\beta = \{e_1 = (1,0), e_2 = (0,1)\}$

$$T(e_1) = (1,0) = (0,1)$$
$$T(e_2) = (0,1) = (-1,0)$$

Então $[T]_{can} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Para o polinômio característico:

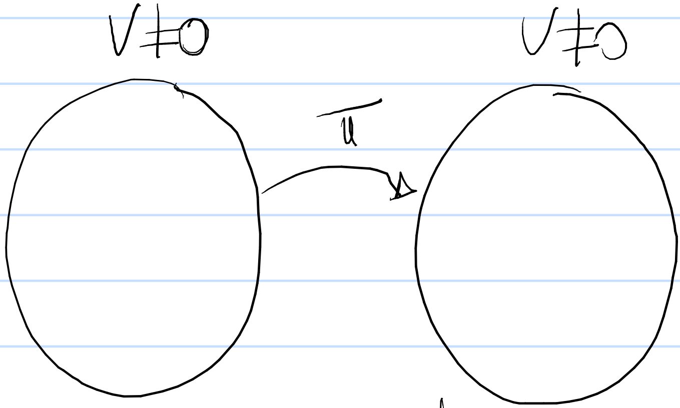
$$P_T(\lambda) = \det\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

$$P_T(\lambda) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 1 = 0$$
$$\lambda^2 = -1$$

O polinômio característico não possui autovalores nos reais, somente nos complexos como o espaço vetorial esta nos reais temos que a T não possui autovalores.

De acordo com considerações posteriores que todo operador $T \in L(V,V)$ onde V é um $\mathbb{C}$ espaço vetorial de dimensão finita possui autovalores.

Seja $T: V \to V$ um operador linear onde V é um K-espaço vetorial de dimensão finita.



Se $\lambda \in K$ for um autovalor de T, então existe $v \neq 0$ tal que $T(v) = \lambda v$, o que é equivalente a dizer que $(\lambda Id - T)(v) = 0$ onde $Id: V \to V$ é a transformação identidade em V. Segue então que:

$$\lambda \in K \to T(v) = \lambda v \;,\; \overbrace{(\lambda Id - T)}^{\text{Matriz}}(v) = 0$$

$$(\lambda Id(v) - T(v)) = 0 \to \lambda(Id(v) - \lambda(v)) = 0 \;,\; \text{como}$$

$$\lambda(T(v) - \underbrace{\lambda(v)}_{T(v)}) = 0$$

$$\lambda \text{ é autovalor de } T \iff Nuc\underbrace{(\lambda Id - T)}_{\text{Matriz}} \neq 0$$

λ é autovalor de $T \Leftrightarrow Nuc(\lambda Id - T) \neq 0$

se $Nuc(\lambda Id - T) = 0$