2) Seja $T: V \to V$ um operador linear. Mostre que se todo vetor de V for autovetor de T, então existe um $\lambda \in K$ tal que $T(v) = \lambda v$, $\forall v \in V$.

Temos que se todo $\lambda \in T$, dado por $T(v_i) = \lambda v_i$, então temos um λv_i para cada vetor de V.

Assim temos que mostrar que todos os autovalores associados à uma base de V são iguais. Suponha que não sejam iguais, ou seja, o autovalor associado ao elemento da base v_i é diferente do que o autovalor associado ao elemento da base v_j. Então:

$$\lambda_i v_i \neq \lambda_j v_j$$

Temos que:

$$T(v_i + v_j) = T(v_i) + T(v_j) = \lambda_i v_i + \lambda_j v_j$$

Que é igual ao vetor coluna com λ_i na posição i, λ_j na posição j e zero nas posições restantes.

$[V_1 + V_j + \vec{0} + \vec{0} + \ldots] \in V$

Como $\lambda_i \neq \lambda_j$ então segue que $(v_i + v_j)$ Não é autovetor, o que é uma contradição já que se formou uma nova base dada por:

$\left[(v_1 - v_j), 0, 0, \ldots\right] \in V$ e $\lambda_i = \lambda_j =$ novo autovalor.

3) Se $T: V \to V$ operador e V um espaço vetorial sobre K. Mostre que se $p_T(x)$ tiver todas as suas raízes em K e se elas forem simples, isto é, com multiplicidade algébrica 1, então T é diagonalizável.

Teorema: Seja $T \in L(V,V)$ e $\dim V = n$. Suponha que T possua n autovalores distintos. Então T é diagonalizável.

Sejam $(v_1, \dots, v_N)$ autovetores não nulos associados aos autovalores distintos $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$. Então pelo teorema:

"Autovetores associados a autovalores distintos são linearmente independentes."

Assim sabemos que eles são linearmente independentes, logo forma uma base, pois $\dim V = N$. Então T é diagonalizável.

$$T(v_1) = \lambda_1 v_1 = \lambda_1 v_1 + 0v_2 + \dots + 0v_N$$

$$\vdots$$

$$T(v_N) = \lambda_N v_N = 0v_1 + 0v_2 + \dots + \lambda_N v_N$$

Segue que:

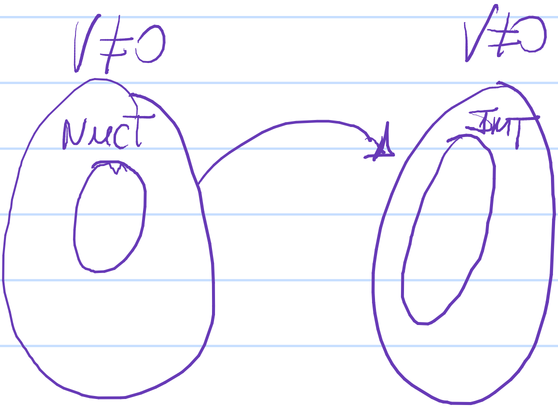
$$[T] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & & \lambda_N \end{bmatrix}$$

Assim associamos a um polinômio $p(x)$ com autovalores de $Ma = 1$.

T é diagonalizável

4) Seja $T: V \to V$ um operador linear. Mostre que $\dim_K \operatorname{Im} T = m$, então T tem no máximo $m+1$ autovalores.

Seja $\dim_K V = n$, a dimensão de V. Pelo teorema núcleo e da imagem segue que $\dim \operatorname{Nuc} T = n - m$.



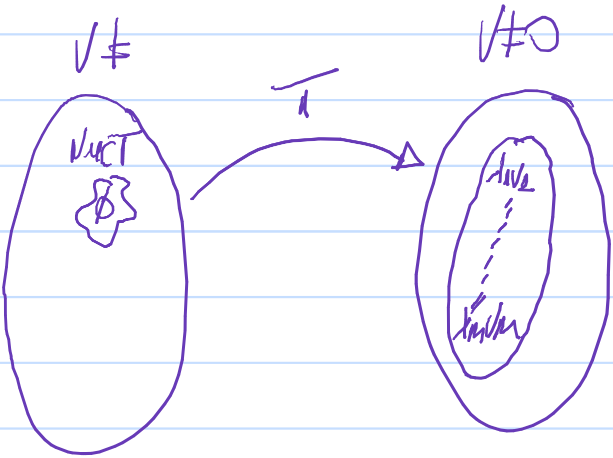
$$\dim_K V = n = \underbrace{\dim_K \operatorname{Nuc} T}_{(n-m)} + \underbrace{\dim_K \operatorname{Im} T}_{m}$$

Devemos considerar dois casos:

1) $m = n$
2) $m < n$

Para o caso 1, segue que $\dim_K \operatorname{Nuc} T = 0$.

Ou seja $Nuc\,T \subset V$ é vazio e T é injetiva. Portanto não tem autovalor. Assim tomando em consideração que $\dim_K Im\,T = n$, é possível encontrar uma base de V com até n autovetores L.I, que podem estar associados a no máximo n autovalores.



Como $n \leq n+1$ então esta justificado para $m = n$.

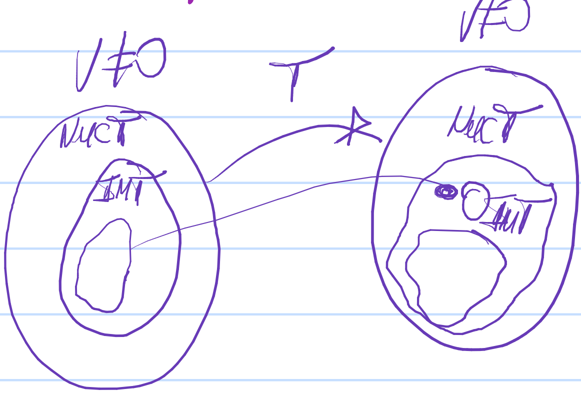
Agora para o segundo caso que $m < n$. Segue que a dimensão do $Nuc\,T$ é no mínimo 1. Então:

$$\dim_K Nuc\,T = n - m \geq 1$$

Neste caso 0 será um autovalor de T.
Levando em consideração que a $\dim_K \operatorname{Im} T = m$ então é possível encontrar uma base de V com até K autovetores l.i, que podem estar associados a no máximo m autovalores distintos e diferentes de zero e também $(k-m)$ autovetores associados ao autovalor 0. Assim, temos $(m+1)$ autovalores distintos.

5) Seja $T: K^2 \to K^2$ tal que $T \circ T = 0$.
Mostre que:
a) $\operatorname{Im} T \subseteq \operatorname{Nuc} T$
b) Se $T \neq 0$, então existe uma base de K^2 tal que

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



a) Se tomarmos $v_1 \in \operatorname{Im} T$, então existe um $u_1 \in \mathbb{R}^2$ tal que:

$$T(u_1) = v_1,$$ portanto: $T(T(u_1)) = T(v_1) = 0$ pelo enunciado! Assim temos que $v_1 \in \operatorname{Nuc} T$ e $T(u_1) = 0 \in \operatorname{Im} T$.
E $T(0) = 0 \in \operatorname{Nuc} T$.

b) Como $v_1 \in \operatorname{Im} T / \{0\}$, consideremos o conjunto $\{v_1, T(v_1)\}$. Se tal conjunto for l.i, então será uma base para $\mathbb{R}^2$.

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 T(v_1) = 0 \rightarrow \alpha_1(T(v_1)) + \alpha_2(T(T(v_1))) =$$

$$\alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 T(0) = \alpha_1 T(v_1) + \alpha_2 . 0 = \alpha_1 T(v_1) =$$
$$\alpha_1 . 0 = 0$$
Assim $\alpha_1, \alpha_2 = 0$.

Agora com $T \neq 0$ e dada $\{v_1, T(v_1)\}$ então:
$T = T + 1$. Assim: $(v_1, T(v_1)) = (0, T(0)) =$
$(0, 0+1) = (0, 1) \in \operatorname{Im} T$.

6) Mostre que se $A \in M_2(\mathbb{C})$, então A é semelhante sobre $\mathbb{C}$ a uma matriz de um dos seguintes tipos:

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \text{ com } a,b \in \mathbb{C} \text{ ou } \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix} \text{ com } a \in \mathbb{C}$$

Por definição uma matriz é semelhante a outra se o polinômio característico for o mesmo.

Assim seja $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$, e seu polinômio

$$p_T(x) = (x-\lambda)(w-\lambda) - yz$$
$$p_T(x) = xw - x\lambda - \lambda w + \lambda^2 - yz$$
$$p_T(x) = \lambda^2 - \lambda(x+w) + (xw - yz)$$

Como $\det(A) = xw - yz$, temos que:

$$p_T(x) = \lambda^2 - \lambda(x+w) + \det A.$$

Se $p_T(x) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \dfrac{(x+w) \pm \sqrt{(-x-w)^2 + 4\det A}}{2}$

Então temos duas situações a considerar:

1) $\det A = 0$ 2) $\det A \neq 0$

Para o primeiro caso temos $\det A = 0$, então:

$$\lambda_{1,2} = \frac{(x+w) \pm \sqrt{(-x-w)^2 \mp 4 \cdot 0}}{2} = \frac{(x+w) \pm \sqrt{(-x-w)^2}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{(x+w) \pm (-x-w)}{2}$$

Temos: $\lambda_1 = \frac{\cancel{x}+\cancel{w}-\cancel{x}-\cancel{w}}{2} = \frac{0}{2} = 0$

$$\lambda_2 = \frac{x+w+x+w}{2} = \frac{2x+2w}{2} = \frac{\cancel{2}(x+w)}{\cancel{2}} = (x+w)$$

Então temos dois autovalores distintos.

$0 \neq x+w$ e $x+w \neq 0 \rightarrow x \neq -w$

Portanto temos: $\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & w \end{pmatrix} = D$

Assim é diagonalizável.

Agora consideramos $x = -w$, então: $\lambda = 0$

$x+w = -w+w = 0.$

Então teremos $Ma(0) = 2$, assim podemos ter $Mg = 1$ ou $Mg = 2$. Para $Mg = 1$ não teremos diagonalização porque:

$Ma \neq Mg.$

E com isso teremos somente um autovetor para formar uma base com outro vetor L.i. Chegando à forma de Jordan dada:

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 1 & x \end{pmatrix}$$

Se $Mg=2$, então teremos que será diagonalizável dado que:

$Ma = 2 = Mg$

Para o caso 2, com $\det \neq A$, com isso teremos que: $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Logo:

$Ma = 2$, consequentemente:

$Mg = 2$

logo será diagonalizável.

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

7) Seja A uma matriz 2x2 simétrica em $M_2(\mathbb{R})$

Dada uma matriz $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a \\ a & a_{22} \end{pmatrix}$, então o polinômio característico de A será:

$$p^T(\lambda) = \lambda^2 + (-a_{11} - a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a^2.$$

Se $A = 0$ ou $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{11} \end{pmatrix}$ o resultado é imediato.

Suponhamos A diferente dessas duas matrizes, calculamos o determinante de $p(\lambda)$ e obtemos:

$$p^T(\lambda) = \lambda^2 + \lambda(-a_{11} - a_{22}) + a_{11}a_{22} - a^2$$

$$\Delta = (-a_{11} - a_{22})^2 - 4 \cdot 1 \cdot (a_{11}a_{22} - a^2)$$
$$\Delta = a_{11}^2 - 2a_{11}a_{22} + a_{22}^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a^2$$
$$\Delta = a_{11}^2 + a_{22}^2 + 4a^2 - 6a_{11}a_{22}$$

Temos que $\Delta > 0$ e então $p(\lambda)$ tem duas raízes reais distintas, o que implica que A tem dois autovalores reais e distintos e portanto A é diagonalizável.

15) Seja $T: P_2(\mathbb{R}) \to P_2(\mathbb{R})$ tal que:

$$[T]_{B,C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Onde $B = \{\frac{1}{2}x^2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}x\}$ e $C = \{x^2, x, 1\}$

Mostre que T é diagonalizável.

Temos que $[T]_C = [T]_{B,C} \cdot M_{C,B}$

$[T]_{B,C}$, $B \xrightarrow{T} C$, então:

$B = \{\frac{1}{2}x^2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}x\} \xrightarrow{T} \{x^2, x, 1\}$

$T\left(\frac{1}{2}x^2\right) = x^2$, $(x2)$ $\quad T\left(\frac{-1}{2}\right) = 1$, $(x2)$

$T\left(\frac{1}{2}x\right) = x$, $(x2)$ $\quad T(P_2\mathbb{R}) = (2 P_2(\mathbb{R}))$

Então: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, precisamos construir a matriz M, dos autovetores.

$$[T]_{C,B} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}$$

$$C = \{x^2, x, 1\} \xrightarrow{T} B = \left\{\frac{1}{2}x^2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}x\right\}$$

$T(x^2) = \frac{1}{2}x^2, \ (\overset{\circ}{\circ}2) \qquad p_T(\lambda) = \left(\frac{1}{2}-\lambda\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}-\lambda\right)$

$T(x) = \frac{1}{2}x, \ (\overset{\circ}{\circ}2) \qquad \lambda = +\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

$T(1) = -\frac{1}{2}, \qquad T(P_2(\mathbb{R})) = \left(\frac{1}{2}P_2(\mathbb{R})\right)$

$M_{C,B} \rightarrow T(P_2(\mathbb{R})) \rightarrow (2 P_2(\mathbb{R}))$

$$M_{C,B} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$[T]_C = [T]_{B,C} \cdot [M]_{C,B}$$

$$[T]_C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Temos que T é diagonalizável.