Quais são todos os funcionais lineares $f: V \to K$? ($K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Um funcional linear é uma aplicação linear de V em K.

$\dim K = 1$ e $\dim V = \infty$

Exemplo 1: $f: V \to K$, $x \to \langle x, y \rangle$ assumindo que V tem um produto interno. (f é linear)

$$
\begin{aligned}
f(v+\lambda w) &= \langle v+\lambda w, u \rangle \\
&= \langle v, u \rangle + \lambda \langle w, u \rangle \\
&= f(v) + \lambda f(w)
\end{aligned}
$$

Teorema de representação de Riesz: (V espaço vetorial sobre K de dimensão finita e com produto interno fixado.) Se $f: V \to K$ é um funcional linear, então existe um único $u \in V$ tal que:

$f: V \to K$ é dado por $f(v) = \langle v, u \rangle \; \forall v \in V$ contido em V.

Obs: $\{ f: V \to K \mid f$ é funcionais lineares $\} = V'$

$\to \{ u \in V \mid f(v) = \langle v, u \rangle \} = V$

V' é chamado o espaço dual de V, também espaço vetorial e se for Real é isomorfo a V.

Corolário: Se V é um espaço vetorial real de dimensão finita, então:

$V' = \{f: V \to K \mid f$ é funcional linear$\}$ está em bijeção com V, adicionalmente V' é também um espaço vetorial isomorfo a V.

O dual de um espaço vetorial real é isomorfo ao próprio espaço vetorial.

$$V' \cong V$$

Aula 27/01/2021: Adjunta de uma Transformação Linear

Definição: Sejam V e W espaços vetoriais de dimensão finita e $T: V \to W$ uma transformação linear. Fixe em V e W produtos internos, a adjunta de T é uma transformação linear T^*:

$T^*: W \to V$ "O produto interno de $\mathbb{R}^2$ é o usual"

Que satisfaz a seguinte condição: $\forall v \in V$ e $\forall w \in W$: $\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle$

$\langle Tv, w \rangle$ É o produto interno em W

$\langle v, T^* w \rangle$ Produto interno em V

Exemplo: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$ ou seja:

$T(x,y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, matriz de T nas bases canônicas de $\mathbb{R}^2$

A adjunta de T é caracterizada por:

$$\langle T(x_1,y_1),(x_2,y_2)\rangle = \langle ax_1+by_1, cx_1+dy_1, (x_2,y_2)\rangle = (ax_1+by_1)x_2 + (cx_1+dy_1)y_2$$

$$= (ax_2+cy_2)x_1 + (bx_2+dy_2)y_1$$

$$= \langle (x_1,y_1),(ax_2+cy_2, bx_2+dy_2)\rangle$$

Logo T^* é dado por:

$$T^*(x_2,y_2) = (ax_2+cy_2, bx_2+dy_2)$$
$$= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

onde $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Moral da história: Para $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ qualquer transformação linear, existe a sua adjunta T^* que é dada pela matriz transposta da matriz de T na base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Teorema: A adjunta de uma transformação linear T sempre existe, é unicamente determinada.

Afirmação: T^* é linear.

Afirmação: T^* é unicamente determinada por T.

Propriedades da adjunta de uma transformação linear:

i) Se $Id: V \to V$ é a identidade, então $Id = Id^*$.

ii) Sejam $S, T: V \to W$ transformação lineares. Vale:

$$(S+T)^* = S^* + T^*$$

iii) Se $T: V \to W$ é uma transformação linear, então $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$

iv) Se $T: V \to W$ e $S: W \to U$, são transformações lineares, então:

$$(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$$

iv) $(T^*)^* = T$

v) Sejam $T: V \to V$ uma transformação linear, se T for invertível, ou T^* for invertível então:

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

__Teorema:__ Seja $T: V \to V$ um operador linear. Se W é subespaço invariante por T, então $W^\perp$ é invariante por T^*.

__Teorema:__ Seja $T: V \to W$ uma aplicação linear, valem:

i) $Nuc\, T^* = (Im\, T)^\perp$

ii) $Nuc\, T = (Im\, T^*)^\perp$

iii) $Im\, T^* = (Nuc\, T)^\perp$

iv) $Im\, T = (Nuc\, T^*)^\perp$

v) $posto(T) = posto(T^*)$

lembrando que posto é a dimensão da imagem dela

Obs: Vale a seguinte decomposição:

$$V = \mathrm{Nuc}\, T^{*} \oplus \mathrm{Im}\, T = (\mathrm{Nuc}\, T^{*})^{\perp}$$