4) Seja o operador linear $T: R^4 \to R^4$ dado por $T(x, y, z, w) = (ay, az, aw, -ax)$, com a número real fixado qualquer.

Prove a seguinte afirmação ou dê um contra exemplo.

"T não é diagonalizável para qualquer escolha de a, (exceto) quando $a = 0$."

Temos que se $a = 0$ então:

$T(x, y, z, w) = (0.y, 0.z, 0.w, -0.x)$, logo a matriz de T possuirá uma diagonal de zeros.

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

, e tomando uma base canônica teremos uma matriz nula.

$T(1,0,0,0) = T(0,1,0,0) = T(0,0,1,0) = T(0,0,0,1) = (0,0,0,0)$

Assim $p_T(\lambda) = \lambda^4 = 0$ e $D = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & 0 \\ 0 & & 0 & \\ & & & 0 \end{bmatrix}$

Será diagonalizável.

Tomamos agora $a \neq 0$ e $a \in R$.

$T(1,0,0,0) = (0,0,0,-1)$ $\quad T(0,0,0,1) = (0,0,1,0)$

$T(0,1,0,0) = (1,0,0,0)$

$T(0,0,1,0) = (0,1,0,0)$

Portanto:

$$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \\ -a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_T(\lambda) = \lambda^4 + a^4 = 0$$

$$\left(\lambda - \frac{(1+i).\sqrt{2}.a}{2}\right) . \left(\lambda + \frac{(1+i).\sqrt{2}.a}{2}\right) . \left(\lambda - \frac{(1-i).\sqrt{2}.a}{2}\right) . \left(\lambda + \frac{(1-i).\sqrt{2}.a}{2}\right) = 0$$

Portanto temos que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_4$, todos autovalores distintos, mas não pertence a $\mathbb{R}^4$. Pertence aos complexos, portanto não é diagonalizável em $\mathbb{R}^4$.

Já para $a=0$, temos: $[T] = M.D.M^{-1}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$