Produto interno

Definição: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K. Um produto interno em V é uma aplicação $\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow K$ satisfazendo às seguintes propriedades:

i) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$,

ii) $\langle u + \lambda v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle$,

iii) $\langle v, v \rangle \geq 0$ e $\langle v, v \rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$

Um espaço V com produto interno é chamado euclidiano se ele tem dimensão finita.

Portanto um produto interno é uma operação com vetores que leva a um escalar, ex: $\langle u, v \rangle$, $\langle u \cdot v \rangle$, $u \cdot v$

Axiomas:

Simetria: $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$
Linearidade: $\langle \lambda u, v \rangle = \lambda \langle u, v \rangle$
$\langle u + v, w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle w, v \rangle$
Positividade: $\langle u, u \rangle > 0$
$\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Exemplo: Se $V = \mathbb{R}^n$, o produto interno canônico (também chamado produto escalar) é definido por:

$$\langle x, y\rangle = x\cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i = (x_1 \dots x_N)\begin{pmatrix} y_1\\ \vdots \\ y_N\end{pmatrix},$$

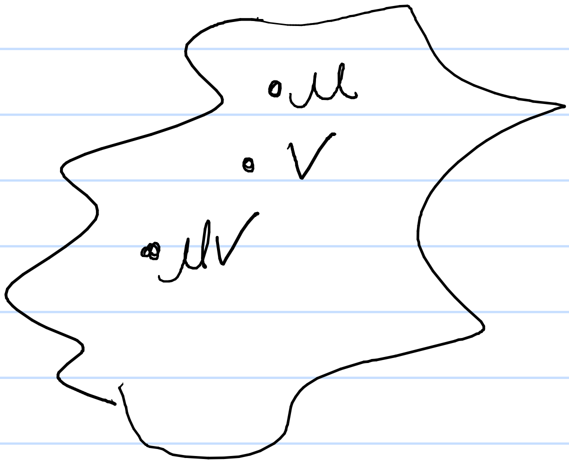
em que $x=(x_1,\dots,x_N)$ e $y=(y_1,\dots,y_N)$.

Com esta mesma notação, esse é um caso particular do produto interno canônico em $\mathbb{C}^N$, definido por:

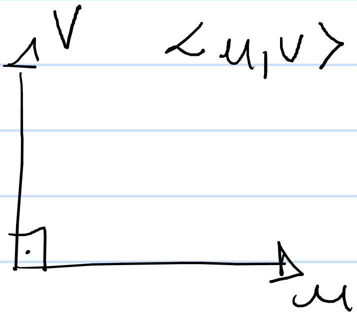
$$\langle x, y\rangle = x\cdot y = \sum_{i=1}^{N} x_i \overline{y_i} = (x_1 \dots x_N)\cdot\begin{pmatrix} \overline{y_1}\\ \vdots \\ \overline{y_N}\end{pmatrix}$$

<u>Observação</u>: Se o espaço vetorial V possui uma base $B=\{v_1,\dots,v_N\}$ então: $\langle x,y\rangle = [x]_B^T[\overline{y}]_B$ define um produto interno em V.

<u>Definição</u>: Sejam u, v vetores do espaço com produto interno V. Esses vetores são <u>ortogonais</u> (ou <u>perpendiculares</u>) se $\langle u,v\rangle = 0$. Nesse caso escrevemos $u \perp v$.



V



$\langle u,v\rangle = 0$

<u>Norma</u>: Seja V um espaço vetorial sobre o corpo K. Uma <u>norma</u> em V é uma aplicação $\|\cdot\|: V \to [0, \infty)$ satisfazendo às seguintes propriedades:

i) $\|v\| > 0$ se $v \neq 0$
ii) $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|, \forall \lambda \in K$
iii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Se V possui uma norma, dizemos que V é um espaço <u>normado</u>.

O valor $\|v\|$ pode ser interpretado geometricamente como o comprimento do vetor v. Se $\|v\| = 1$, o vetor v é chamado <u>unitário</u>.

Seja V um espaço com produto interno, consideremos (com abuso de notação) $\|v\| := \langle v, v \rangle^{1/2}$.

<u>Teorema 6.2.2 (Pitágoras)</u>: Seja V um espaço com produto interno e $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$. Então, se $x \perp y$, temos:

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

<u>Proposição 6.2.3</u>: (Desigualdade de Cauchy-Schwarz): Seja V um espaço com produto interno. Então, se $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$, temos para todos $x, y \in E$.

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| . \|y\|$$

Proposição 6.2.4: Todo espaço com produto interno V tem uma norma definida por $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$.

Proposição 6.2.5: Em todo espaço com produto interno vale a identidade do paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

Bases ortonormais

Definição: Seja V um espaço com produto interno. Um conjunto $X \subset V$ é ortogonal se $u \perp v$ para quaisquer $u, v \in X$. Se, além disso, todos os seus vetores são unitários, então X é ortonormal.

Lema: Todo conjunto ortogonal formado por vetores não nulos é linearmente independente.

Proposição 6.3.3: Seja $\{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de um espaço euclidiano V. Então:

i) $u = \langle u, u_1\rangle v_1 + \ldots + \langle u, u_n\rangle v_n$;

ii) $\|u\|^2 = |\langle u, v_1\rangle|^2 + \ldots + |\langle u, v_n\rangle|^2$

Os conjuntos ortogonais e ortonormais são sempre L.I. Então é uma base de algum espaço.

<u>Base ortogonal</u>: produto interno de um vetor com cada um dos outros é igual a zero. Então vai ser ortogonal quando todos os vetores da base são perpendiculares entre si.

<u>Base ortonormal</u>: além da propriedade da base ortogonal, o produto interno de um vetor com ele mesmo deve ser 1. O módulo de todos os vetores deve ser 1.

<u>Exemplo</u>: Tomamos $\alpha = \{(1,1,1), (-2,1,1), (0,-1,1)\}$ é um conjunto L.I, em base do $\mathbb{R}^3$.

<u>Obs</u>: Para ser ortogonal todos os produtos internos deve ser 0.

i) $\langle (1,1,1), (-2,1,1) \rangle = -2+1+1 = 0$
ii) $\langle (1,1,1), (0,-1,1) \rangle = 0-1+1 = 0$
iii) $\langle (-2,1,1), (0,-1,1) \rangle = 0-1+1 = 0$

Portanto a base é ortogonal.

<u>Obs</u>: Para ser ortonormal o produto interno entre os vetores deve ser 1. (Com ele mesmo).

$\langle \underbrace{(1,1,1)}_{V_1}, \underbrace{(1,1,1)}_{V_1} \rangle = 1+1+1 = 3$. A base não é ortonormal.

Pode-se transformar uma base em ortonormal, com a normalização.

Normalização: $\dfrac{V}{\|V\|} \rightarrow \dfrac{V}{\sqrt{\langle x, x \rangle}}$

Com isso temos:

$\alpha' = \left\{ \dfrac{(1,1,1)}{\sqrt{3}}, \dfrac{(-2,1,1)}{\sqrt{6}}, \dfrac{(0,-1,1)}{\sqrt{2}} \right\}$ é ortonormal

Matrizes ortogonais: as colunas formam um conjunto ortonormal (são os vetores), temos que $A^T = A^{-1}$, se a matriz for ortogonal

Se A, B são ortogonais, então $C = AB$ também será ortogonal.

Se A é ortogonal A^T também será, logo as linhas de A também forma um conjunto ortonormal.

Exemplos: matriz identidade (base canônica nas colunas), todas as matrizes de rotação e reflexão.

"Para calcular a norma a base deve ser ortonormal."

$\|\vec{u}\|^2 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)$

Produto interno de Matrizes:

$V = M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = \text{traço} = tr(B^t \cdot A)$

Ex: $V = M_{3\times 2}(\mathbb{R})$, $\langle A, B \rangle = tr \langle B^t \cdot A \rangle$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} m & n \\ o & p \\ q & r \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} m & o & q \\ n & p & r \end{pmatrix}$$

$$B^t \cdot A = \begin{pmatrix} m & o & q \\ n & p & r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ma + oc + qe & mb + od + qf \\ na + pc + re & nb + pd + rf \end{pmatrix}$$

$$tr(B^t \cdot A) = [(am + co + eq) + (bn + dp + fr)]$$

Este produto, é o produto de cada elemento das matrizes A e B.

. Polinômios $V = P_n(\mathbb{R})$, temos dois produtos internos que são mais utilizados para os polinômios.

1) Escolha k números reais distintos $x_1, x_2, \dots, x_k$ onde $k \geq n+1$, defina.

$$\langle p, q \rangle = p(x_1)q(x_1) + p(x_2)q(x_2) + \dots + p(x_k)q(x_k)$$

b) Escolha reais $a<b$ e defina $\langle p,q\rangle = \int_a^b p(t)\,q(t)\,dt$.

No conjunto das funções contínuas, $V = C([a,b])$, tome $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx$

Exemplo: Escolhidos os pontos $x_1=-1$, $x_2=0$ e $x_3=1$, calcule a norma de $p(t)=t^2-1$ e $q(t)=2t+1$.

- $\langle p,p\rangle = p(-1).p(-1) + p(0).p(0) + p(1).p(1) =$
$= (0.0) + (-1).(-1) + (0.0) = 1 \to \|p\| = \sqrt{1} = 1.$

- $\langle q,q\rangle = q(-1)^2 + q(0)^2 + q(1)^2 = 1+1+9 = 11$
$\|q\| = \sqrt{11}$

Exemplo: Sejam V um espaço com produto interno, $u,v \in V$ com $\|u\|=2$, $\|v\|=3$ e $\langle u,v\rangle = 4$, determine $\|u+v\|$ e $\|u-v\|$.

$\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 = (2)^2 + 2.(4) + (3)^2 = 21$

$\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u,u\rangle - \langle u,v\rangle - \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u,v\rangle + \|v\|^2 = (2)^2 - (4).2 + (3)^2 = 5$

Logo: $\|u+v\| = \sqrt{21}$ e $\|u-v\| = \sqrt{5}$

Propriedades: Sejam V um espaço vetorial com produto interno, $u, v \in V$ e $\beta \in \mathbb{R}$.

1) $\|\beta . u\| = |\beta| . \|u\|$

2) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ → Desigualdade Triangular

3) $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| . \|v\|$ → Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Definição: Seja V um espaço vetorial com produto interno, uma base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ é ortogonal se os vetores de B forem dois a dois ortogonais.

Uma base $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ é ortonormal se for ortogonal e todos os seus vetores tiverem norma 1.

$E = \{e_1, e_2, \dots, e_i\}$ é ortonormal $\langle e_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

Teorema 6.3.4: (Gram-Schmidt):

Dada uma base arbitrária $\{u_1, \dots, u_n\}$ do espaço euclidiano V, existe uma base ortonormal $\{x_1, \dots, x_n\}$ de V formada por vetores x_i que são combinação lineares dos vetores $u_1, \dots, u_n$, para todo $i = 1, \dots, n$.

O teorema de Gram-Schmidt garante a existência de uma infinidade de bases ortonormais para espaços euclidianos. Dada uma base ortonormal $\{x_1, \dots, x_n\}$ temos:

$x = a_1 x_1 + \dots + a_N x_N$

Os escalares a_i podem ser facilmente determinados. Como a base é ortonormal, temos que:

$$a_i = \langle x, x_i \rangle \quad i = 1, \dots, N$$

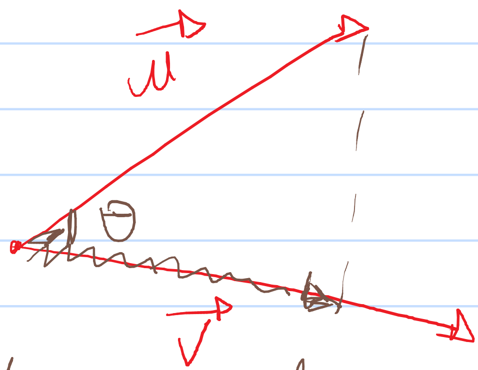
Consideremos então um outro vetor $y \in V$. Então:

$\langle x, y \rangle = \langle a_1 x_1 + \dots + a_N x_N, b_1 x_1 + \dots + b_N x_N \rangle = a_1 \bar{b}_1 + \dots + a_N \bar{b}_N$,

Como ortogonalizar estes vetores?

Projeções: $\text{proj}_v u = \dfrac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} v$

Sejam $\vec{u}$ e $\vec{v}$ vetores quaisquer não paralelos.



Projeção de $\vec{u}$ em $\vec{v}$.

$\| \text{proj}_v u \| = \| \vec{u} \| . \cos \theta$

Projetar no chão multiplica pelo cosseno, para projetar na parede multiplica pelo seno.

$$\| \text{proj}_v u \| = \| \vec{u} \| . \cos\theta$$
$$= \| \vec{u} \| . \underbrace{\frac{\langle u, v \rangle}{\| \vec{u} \| . \| \vec{v} \|}}_{\cos\theta}$$

Então:

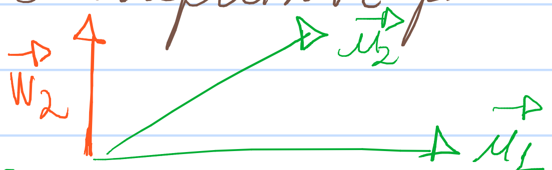
$$proj_{\vec v}\, u = \|proj_{\vec v}\, u\| \frac{\vec v}{\|\vec v\|} = \frac{\langle \vec u , \vec v \rangle}{\|\vec v\|} \cdot \frac{\vec v}{\|\vec v\|}$$

$$= \frac{\langle \vec u , \vec v \rangle}{\|\vec v\|^2} \cdot \vec v = \underbrace{\frac{\langle \vec u , \vec v \rangle}{\langle \vec v , \vec v \rangle}}_{\text{Número}} \cdot \vec v$$

$$\underbrace{\text{número} \cdot v}_{} = \text{vetor}$$

Como ortogonalizar estes vetores?

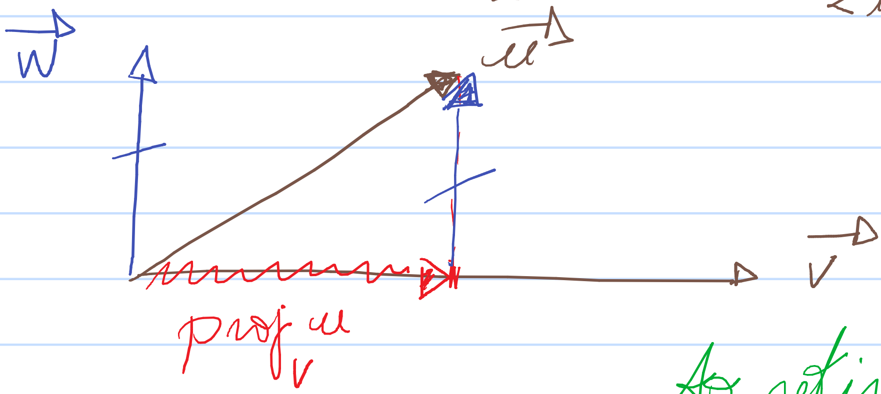
Logo, para ortogonalizar dois vetores u_1 e u_2, basta fazer o seguinte processo:



$w_1 = u_1$

Construímos

$$w_2 = u_2 - proj_{u_1} u_2 = u_2 - \frac{\langle u_2 , u_1 \rangle}{\langle u_1 , u_1 \rangle} \cdot u_2$$

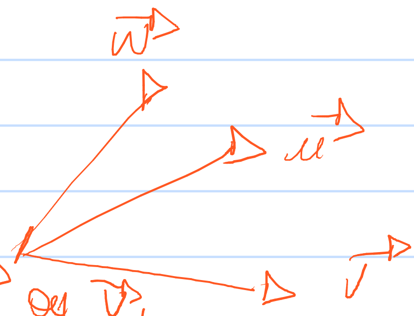


$proj_{v} \vec u + \vec w = \vec u$

$\vec w = \vec u - proj_{\vec v} \vec u$

Ao retirarmos a projeção, retiramos a inclinação de $\vec u$.

Se estivermos em $\mathbb{R}^3$:



retiramos $\vec u$ e $\vec v$, ou seja, subtraímos pela projeção de $\vec u$ e $\vec v$.

Para retirar a inclinação de w, faz em relação a $\vec u$ ou $\vec v$, ou seja, subtrair pela projeção de $\vec u$ ou $\vec v$. Já para o 3: (no caso w)

Repete o processo para dimensão superior.

Exemplo: $u_1 = (1,1,1,1)$, $u_2 = (1,1,2,4)$, $u_3 = (1,2,-4,3)$

Pelo processo de Gram-Schmidt:

$\vec{w_1} = (1,1,1,1) = \vec{u_1}$ fixado

$$\vec{W_2} = (1,1,2,4) - proj_{\vec{W_1}} \vec{W_2} = (1,1,1,1) - \frac{\langle (1,1,2,4), (1,1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle} \cdot (1,1,1,1)$$

Resolver o problema; Sejam $\vec{u_1}, \vec{u_2}, \vec{u_3}$, ortogonalize $[u_1, u_2, u_3]$, o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores dados.

$$= (1,1,2,4) - \frac{1+1+2+4}{1+1+1+1} \cdot (1,1,1,1)$$

$$= (1,1,2,4) - \frac{8}{4}(1,1,1,1)$$

$$= (1,1,2,4) - 2(1,1,1,1)$$

$$= (1,1,2,4) - (2,2,2,2) = (-1,-1,0,2) = \vec{W_2}$$

Temos que:

, deve ser!!!

Para testar, fazemos o produto interno.

$$\langle (1,1,1,1), (-1,-1,0,2) \rangle = (0,0,0,0) = 0,$$

Portanto $W_1 \perp W_2$.

Ainda falta o $\vec{w_3}$.

$\vec{w_1} = (1,1,1,1)$, $\vec{w_2} = (-1,-1,0,2)$, $\vec{w_3} = ?$

Partimos de $\vec{u_3} = (1,2,-4,3)$.

$$\vec{w_3} = (1,2,-4,3) - \operatorname{proj}_{\vec{w_1}} \vec{u_3} - \operatorname{proj}_{\vec{w_2}} \vec{u_3}$$

$$\operatorname{proj}_{\vec{w_1}} \vec{u_3} = \frac{\langle u_3, w_1 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} \cdot w_1 = \frac{\langle (1,2,-4,3), (1,1,1,1) \rangle}{\langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle} \cdot (1,1,1,1)$$

$$= \frac{1+2-4+3}{4} \cdot (1,1,1,1) = \frac{2}{4}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\operatorname{proj}_{\vec{w_2}} \vec{u_3} = \frac{\langle (1,2,-4,3), (-1,-1,0,2) \rangle}{\langle (-1,-1,0,2), (-1,-1,0,2) \rangle} \cdot (-1,-1,0,2)$$

$$= \frac{-3+6}{6} \cdot (-1,-1,0,2) = \frac{3}{6}(-1,-1,0,2) = \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 1\right)$$

$$\vec{w_3} = (1,2,-4,3) - \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{2}, 0, 1\right)$$

$$\vec{w_3} = (1,2,-4,3) - \left(0, 0, \frac{-1}{2}, \frac{-3}{2}\right)$$

$$\vec{w_3} = \left(1, 2, \frac{-9}{2}, \frac{3}{2}\right) = (2,4,-9,3)$$

Testamos (produto interno $=0$) pelo $\vec{w_1}$ e $\vec{w_2}$, assim:

$\langle \vec{w_1}, \vec{w_3} \rangle = (2+4-9+3) = 0 \qquad \vec{w_1} \perp \vec{w_3}$

$\langle \vec{w_2}, \vec{w_3} \rangle = (-2-4+0+6) = 0 \qquad \vec{w_2} \perp \vec{w_3}$

Estes vetores estão ortogonalizados, não significa que são normalizados.

Bases ortonormais: Lembre-se de que a norma de um vetor é um número que representa seu tamanho. Sendo $\langle \cdot , \cdot \rangle$ um produto interno de um espaço vetorial real, a norma é dada por:

$$\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$$

Definição: Uma base β diz-se ortonormal quando todos os seus elementos são dois a dois ortogonais, e a norma de cada um deles é 1.

Dica: Para encontrar uma base ortonormal, basta primeiro ortogonalizar e depois normalizar:

Caso geral: Um espaço vetorial de dimensão n.

Precisamos do processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt:

$$\vec{w_1} = \vec{v_1}$$

$$\vec{w_2} = \vec{v_2} - \text{proj}_{\vec{w_1}} \vec{v_2}$$

$$\vec{w_3} = \vec{v_3} - \text{proj}_{\vec{w_1}} \vec{v_3} - \text{proj}_{\vec{w_2}} \vec{v_3}$$

$$\vdots$$

$$\vec{w_n} = \vec{v_n} - \text{proj}_{\vec{w_1}} \vec{v_n} - \dots - \text{proj}_{\vec{w_{n-1}}} \vec{v_n}$$

Agora podemos normalizá-los; comprimimos os vetores.

$$\vec{w_1}' = \frac{\vec{w_1}}{\|\vec{w_1}\|} = \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{\langle \vec{w_1}, \vec{w_1} \rangle}} = \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{\langle (1,1,1,1), (1,1,1,1) \rangle}}$$

$$= \frac{(1,1,1,1)}{\sqrt{4}} = \frac{1}{2}(1,1,1,1) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$\vec{w_2}' = \frac{\vec{w_2}}{\|\vec{w_2}\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,0,2) = \left(\frac{-1}{\sqrt{6}}, \frac{-1}{\sqrt{6}}, 0, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\vec{w_3}' = \frac{\vec{w_3}}{\|\vec{w_3}\|} = \frac{(2,4,-9,3)}{\sqrt{110}} = \left(\frac{2}{\sqrt{110}}, \frac{4}{\sqrt{110}}, \frac{-9}{\sqrt{110}}, \frac{3}{\sqrt{110}}\right)$$

Aí $\beta = \{w_1', w_2', w_3'\}$ é uma base ortonormal para o espaço gerado por $[u_1, u_2, u_3]$.

Teorema: Todo espaço vetorial Euclidiano admite uma base ortonormal

"Espaços com produto interno"

Teorema 6.3.5 (de representação de Riez): Toda aplicação linear $l: V \to \mathbb{R}$ num espaço euclidiano V pode ser escrito como um produto interno. Mais precisamente, existe um único $y \in V$ tal que:

$$l(x) = \langle x, y \rangle \quad \forall x \in V$$

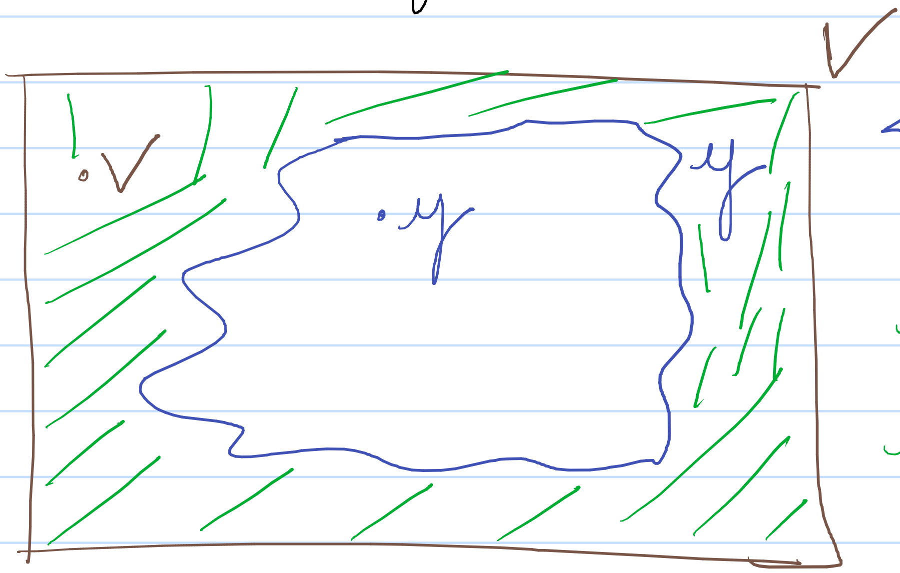
Corolário: Se V é um espaço euclidiano real, a aplicação $l \to y$ é um isomorfismo entre V' e V.

Projeções ortogonais

Definição: Se $\mathcal{Y} \subset V$ um subespaço com produto interno V. O complemento ortogonal de $\mathcal{Y}$, denotado $\mathcal{Y}^\perp$, é o conjunto:

$$\mathcal{Y}^\perp = \{ v \in V \langle v, y \rangle = 0 \ \forall y \in \mathcal{Y} \}$$

Claramente $\mathcal{Y}^\perp$ é um subespaço de V.



$\langle v, y \rangle = 0$
$v \in \mathcal{Y}^\perp$

$\mathcal{Y}^\perp + \mathcal{Y}$
$\mathcal{Y}^\perp \cap \mathcal{Y} = \{0\}$.

Teorema 6.4.2: Para qualquer subespaço $\mathcal{Y} \subset V$ de um espaço euclidiano temos:

$$V = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^\perp$$

Além disso, vale:

$$(\mathcal{Y}^\perp)^\perp = \mathcal{Y}$$

Definição 6.4.4: Na decomposição:

$$V = \mathcal{Y} \oplus \mathcal{Y}^\perp$$
$$v = y + z$$

a componente y é chamada projeção ortogonal de v em $\mathcal{Y}$ e denotada por $y = \pi_{\mathcal{Y}} v$.

Teorema 6.4.5: Sejam V um espaço euclidiano e $\mathcal{Y} \subset V$ um subespaço. A aplicação:

$$\pi_{\mathcal{Y}} : V \to \mathcal{Y}$$

É linear e satisfaz $\pi_{\mathcal{Y}}^2 = \pi_{\mathcal{Y}}$. A aplicação $\pi_{\mathcal{Y}}$ é a projeção ortogonal de V em $\mathcal{Y}$.

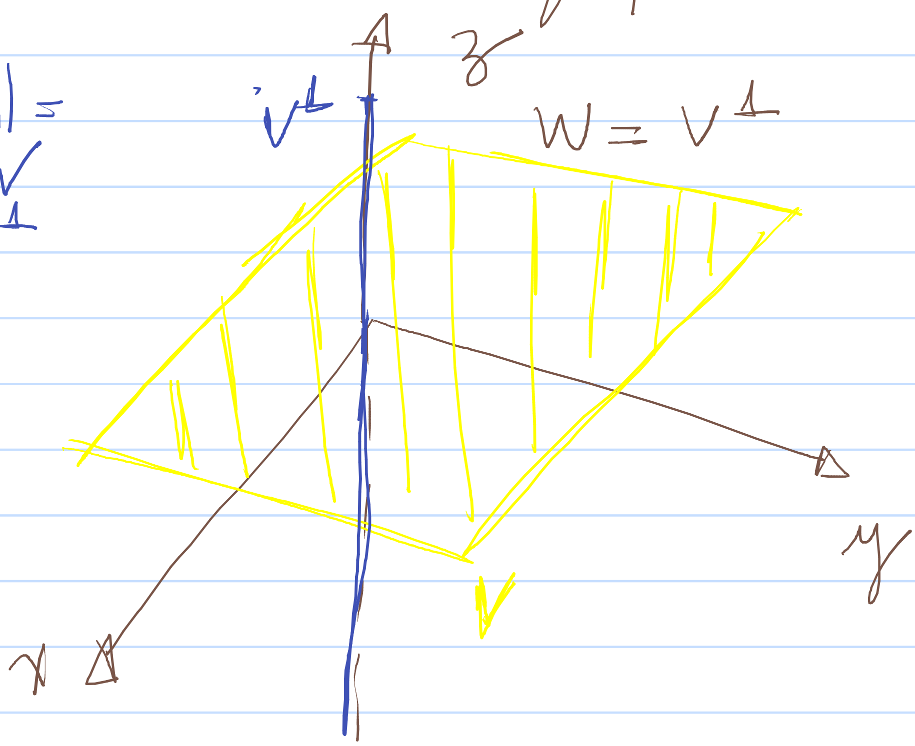
Teorema 6.4.6: Seja $\mathcal{Y}$ um subespaço euclidiano V e $v \in V$. Entre todos os elementos $y \in \mathcal{Y}$, aquele com menor distância até v é o elemento $\pi_{\mathcal{Y}} v$.

O complemento ortogonal de um conjunto V é um conjunto W em que todos os elementos são ortogonais aos elementos de V.

Representação: $W = V^{\perp}$

"$V^{\perp}$ sempre será um subespaço vetorial"

$V^{\perp} = (0,0,z) =$
eixo $z \perp V$
$(0,0,0) \in V^{\perp}$



$$V^{\perp} = \{ w \in \mathbb{R}^n \mid \langle v, w \rangle = 0, \forall v \in V \}$$

A adjunta de uma aplicação linear

Sejam V, W espaços euclidianos.

Proposição 6.5.1: Dada uma aplicação linear $T: V \to W$, existe uma única aplicação linear $T^*: W \to V$, chamada adjunta de T, satisfazendo:

$$\langle Tv, w \rangle = \langle v, T^* w \rangle \quad \forall v \in V, w \in W$$

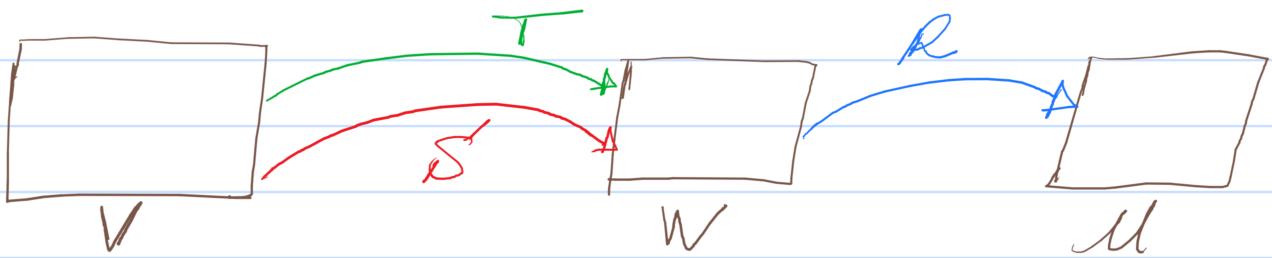
Exemplo 6.5.2: Seja $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por $T(x,y) = (ax+by, cx+dy)$. A representação de T com relação à base canônica do $\mathbb{R}^2$ é a matriz.

$$\begin{aligned} T(1,0) &= (a,c) \\ T(0,1) &= (b,d) \end{aligned} \to [T]_\varepsilon = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \text{ então:}$$

$$\begin{aligned} \langle T(x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle &= (ax_1 + by_1)x_2 + (cx_1 + dy_1)y_2 \\ &= (ax_2 + cy_2)x_1 + (bx_2 + dy_2)y_1 \\ &= \langle (x_1, y_1), (ax_2 + cy_2, bx_2 + cy_2) \rangle \end{aligned}$$

Onde conclui-se que: $[T^*]_\varepsilon = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$

Proposição 6.5.3: Sejam V, W, U espaços euclidianos e $T, S: V \to W$ e $R: W \to U$ aplicações lineares e $\lambda \in K$. Então vale:



i) $I^* = I$
ii) $(T+S)^* = T^* + S^*$
iii) $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$
iv) $(RT)^* = T^* R^*$
v) $(T^*)^* = T$
vi) $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

Teorema 6.5.4: Sejam V, W espaços euclidianos e $T: V \to W$ uma aplicação linear. Então:

i) $\text{nuc}(T^*) = (\text{Im}T)^\perp$
ii) $\text{nuc}(T) = (\text{Im}T^*)^\perp$
iii) $\text{Im}T^* = (\text{nuc}T)^\perp$
iv) $\text{Im}T = (\text{nuc}T^*)^\perp$
v) posto de T = posto de T^*

Definição 6.5.5: Uma aplicação $T: V \to V$ é chamada auto-adjunta se $T^* = T$.

Note que, se B é uma base ortonormal de V, $[T^*]_B \overset{!}{=} ([T]_B)^*$. Além disso, se $T_B = A$ é auto-Adjunta, $P^{-1}AP = B \to$ que B é auto-adjunta.
Uma matriz A é auto-adjunta se $A^* = A$. No caso real, isso equivale a $A^T = A$ e a matriz é simetrica.

Operadores Autoadjuntos:

$T: V \to V$, $\langle T(v), u \rangle = \langle v, T(u) \rangle$, $\forall v, u \in V$

1) β é base ortonormal de V., $[T]_\beta^\beta$ simétrica $\rightarrow$ T é autoadjunto.
Uma matriz A é simétrica se $A = A^T$

2) Autovetores associados a autovalores distintos são sempre ortogonais

$$\underbrace{v_1 \neq v_2 \neq \dots \neq v_1}_{l.I} \rightarrow \underbrace{\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \dots \neq \lambda_n}$$

Exemplo: $\lambda_1 \neq \lambda_2$, geram $v_1 \neq v_2$

$$\lambda_1 \langle v_1, v_2 \rangle = \langle \lambda_1 v_1, v_2 \rangle = \langle T(v_1), v_2 \rangle = \langle v_1, T(v_2) \rangle = \langle v_1, \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_2 \langle v_1, v_2 \rangle$$

Definição de operadores autoadjuntos

Então: $(\lambda_1 - \lambda_2) . \langle v_1, v_2 \rangle = 0$, mas $\lambda_1 \neq \lambda_2$ então $\lambda_1 - \lambda_2 \neq 0$. Logo $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$ e v_1 e v_2 são ortogonais.

3) Todo operador autoadjunto é diagonalizável. (Teorema espectral)

Norma de uma aplicação linear: Seja $T: V \rightarrow V$ uma aplicação linear definida no espaço euclidiano V.

Definimos: $\|T\| = \max\limits_{x \neq 0} \dfrac{\|Tx\|}{\|x\|}$, chamamos $\|T\|$ de norma da aplicação linear T.

$$\|Tx\| \leq \|T\| . \|x\|$$

Temos que $\|\cdot\|$ definida anteriormente é uma norma no espaço $\mathcal{L}(V)$ de todas as aplicações lineares de V em V.

<u>Proposição 6.6.2</u>: Seja $T: V \to V$ uma aplicação linear definida no espaço euclidiano V. Então:

i) A aplicação $\|\cdot\|: \mathcal{L}(V) \to [0, \infty)$ é uma norma;

ii) $\|ST\| \leq \|S\| \cdot \|T\|$

<u>Isometrias</u>

<u>Definição 6.7.1</u>: Seja $M: V \to V$ uma aplicação (não necessariamente linear) definida no espaço euclidiano V. A aplicação M é uma isometria se, para quaisquer $x, y \in V$, temos:

$$\|Mx - My\| = \|x - y\|$$

Temos que a composta de duas isometrias é uma isometria. Um exemplo de uma isometria é uma <u>translação</u>:

$$Tx = x + a, \ \forall a \in V \text{ fixo}$$

<u>Teorema 6.7.2</u>: Seja $M: V \to V$ uma isometria no espaço euclidiano V, com $M(0) = 0$, então:

i) Se V é um espaço sobre $\mathbb{R}$, então M é linear., Supondo adicionalmente que M seja linear no caso complexo, então vale:

ii) $M^*M = I$, reciprocamente, se essa igualdade é satisfeita, então M é uma isometria.

iii) M possui inversa e sua inversa é uma isometria

iv) Se V é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, então $\det M = \pm 1$. No caso complexo, $|\det M| = 1$.

O significado geométrico de (iv) é que uma aplicação que preserva distâncias também preserva volumes.
Uma aplicação linear M que satisfaz $M^*M = I$ é chamada ortogonal no caso real e <u>unitária</u> no caso complexo.

Como antes, uma matriz A é <u>ortogonal</u> (respectivamente, <u>unitária</u>) se $A^TA = I$ (respectivamente $A^*A = I$).