7

Livro: Introdução à Álgebra Linear
Autores: Abramo Hefez
Cecília de Souza Fernandez

Capítulo 7: Espaços com Produto Interno

Sumário

Neste capítulo, apresentaremos a noção de produto interno em espaços vetoriais. Esta noção, como veremos, generaliza a noção de produto escalar em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$ e enriquece a estrutura de um espaço vetorial, permitindo definir vários conceitos de caráter geométrico previamente estudados em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

1 Produto Interno

Seja V um espaço vetorial. Um *produto interno* em V é uma função que a cada par de vetores u e v em V associa um número real, denotado por $\langle u, v\rangle$, que satisfaz as seguintes condições:

Para quaisquer vetores u, v e w de V e qualquer número real k,

PI 1 $\langle v, v\rangle \geq 0$;

PI 2 $\langle v, v\rangle = 0$ se, e somente se, $v = 0$;

PI 3 $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;

PI 4 $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$;

PI 5 $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$.

Um espaço vetorial com um produto interno é chamado, abreviadamente, de *espaço com produto interno*.

Exemplo 1. Sejam $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ vetores em $\mathbb{R}^n$. Definimos

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n\,. \tag{1}$$

Note que

$$\langle u, u\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \geq 0,$$

e que

$$\langle u, v\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n = y_1x_1 + y_2x_2 + \cdots + y_nx_n = \langle v, u\rangle,$$

mostrando que as condições 1 e 3 da definição de produto interno são satisfeitas. A condição 2 também é satisfeita já que

$$\langle u, u\rangle = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0 \iff x_1 = \cdots = x_n = 0 \iff u = 0.$$

Se $w = (z_1, z_2, \ldots, z_n)$, então

$$\begin{aligned} \langle u+v, w\rangle &= (x_1+y_1)z_1 + (x_2+y_2)z_2 + \cdots + (x_n+y_n)z_n \\ &= (x_1z_1 + x_2z_2 + \cdots + x_nz_n) + (y_1z_1 + y_2z_2 + \cdots + y_nz_n) \\ &= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle, \end{aligned}$$

mostrando que a condição 4 é satisfeita. A condição 5 também é satisfeita, pois se $k \in \mathbb{R}$, então

$$\langle ku, v\rangle = (kx_1)y_1 + (kx_2)y_2 + \cdots + (kx_n)y_n = k(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) = k\langle u, v\rangle.$$

Assim, (1) define um produto interno em $\mathbb{R}^n$, chamado de *produto interno usual de* $\mathbb{R}^n$ ou *produto escalar de* $\mathbb{R}^n$, generalizando a noção de produto escalar de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2. Sejam $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ e $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$ vetores em $\mathbb{R}[x]_2$. Defina

$$\langle p(x), q(x)\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2\,. \tag{2}$$

Temos que (2) define um produto interno em $\mathbb{R}[x]_2$. De fato, por meio do isomorfismo de espaços vetoriais,

$$\begin{array}{rccc} T\colon & \mathbb{R}[x]_2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & a_0 + a_1x + a_2x^2 & \mapsto & (a_0, a_1, a_2) \end{array}$$

o produto $\langle p(x), q(x)\rangle$ não é outro que o produto interno usual de $\mathbb{R}^3$.

O próximo resultado apresenta algumas propriedades básicas dos produtos internos.

Proposição 7.1.1. *Seja V um espaço com produto interno. Se $u, v, w \in V$ e se $k \in \mathbb{R}$, então*

(i) $\langle 0, u\rangle = \langle u, 0\rangle = 0$;

(ii) $\langle u, v+w\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle$;

(iii) $\langle u, kv\rangle = k\langle u, v\rangle$;

(iv) $\langle u, v - w\rangle = \langle u, v\rangle - \langle u, w\rangle$.

Demonstração Provaremos apenas (ii) e deixaremos os demais itens como exercício (ver Problema 1.3).

De fato, pela condições PI 3 e PI 4 da definição de produto interno temos que

$$\langle u, v + w\rangle = \langle v + w, u\rangle = \langle v, u\rangle + \langle w, u\rangle = \langle u, v\rangle + \langle u, w\rangle.$$

■

Seja V um espaço com produto interno. Definimos a *norma* do vetor v de V, ou *comprimento* de v, denotado por $||v||$, como o número real

$$||v|| = \langle v, v\rangle^{1/2}.$$

Se $||v|| = 1$, dizemos que v é um *vetor unitário*.

A *distância* $d(u, v)$ entre dois vetores u e v de V é definida como

$$d(u, v) = ||u - v|| = \sqrt{\langle u - v, u - v\rangle}.$$

Por exemplo, se $u = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $v = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ são vetores de $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual, então

$$||u|| = \langle u, u\rangle^{1/2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$$

e

$$\begin{aligned} d(u, v) &= ||u - v|| = \langle u - v, u - v\rangle^{1/2} \\ &= \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}. \end{aligned}$$

Observe que, no caso de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, $||u||$ e $d(u, v)$ são precisamente a norma e a distância usuais de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$.

Problemas

1.1* Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{9}\, x_1y_1 + \frac{1}{4}\, x_2y_2$$

define um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

(b) Esboce o círculo unitário no sistema de coordenadas xy em $\mathbb{R}^2$, usando a distância obtida a partir do produto interno em (a).

(c) Esboce o círculo unitário no sistema de coordenadas xy em $\mathbb{R}^2$, usando a distância obtida a partir do produto interno usual.

(d) Você nota alguma diferença entre os círculos obtidos em (a) e em (b)?

1.2 Sejam $u = (x_1, x_2)$ e $v = (y_1, y_2)$ vetores em $\mathbb{R}^2$. Mostre que as expressões a seguir definem produtos internos em $\mathbb{R}^2$.

(a) $\langle u, v\rangle = 3x_1y_1 + 5x_2y_2\,.$

(b) $\langle u, v\rangle = 4x_1y_1 + x_2y_1x_1y_2 + 4x_2y_2\,.$

1.3 Conclua a demonstração da Proposição 7.1.1.

1.4 Suponha que u, v e w sejam vetores tais que

$$\langle u, v\rangle = 2,\quad \langle u, w\rangle = -3,\quad \langle v, w\rangle = 5,\quad ||u|| = 1,\quad ||v|| = 2 \;\text{ e }\; ||w|| = 1.$$

Calcule o valor de cada uma das seguintes expressões:

(a) $\langle u + v, v + w\rangle$; (b) $\langle 2v + w, 2u - v\rangle$; (c) $||u + v + w||$.

2 Ângulos entre Vetores e Ortogonalidade

Recordemos que no Capítulo 4 vimos que o ângulo θ, com $0 \leq \theta \leq \pi$, entre dois vetores não nulos u e v em $\mathbb{R}^3$, dotado do produto escalar, satisfaz a igualdade

$$\cos\theta = \frac{u \cdot v}{||u||\,||v||}\,\cdot \tag{1}$$

Nosso primeiro objetivo nesta seção será o de definir o conceito de ângulo entre dois vetores não nulos de um espaço com produto interno, utilizando

(1), onde o produto escalar é substituído pelo produto interno. Para que uma tal definição faça sentido, devemos assegurar que

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{||u||\,||v||} \leq 1$$

para quaisquer dois vetores não nulos u e v de V. Veremos, no próximo resultado, que isto sempre ocorre.

Teorema 7.2.1. (Desigualdade de Cauchy-Schwarz) *Se u e v são vetores de um espaço com produto interno V, então*

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u||\,||v||, \tag{2}$$

com igualdade valendo se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.
Demonstração A desigualdade é clara se u é o vetor nulo de V. Suponhamos, então, u diferente do vetor nulo. Para qualquer $t \in \mathbb{R}$, temos que $\langle tu + v, tu + v\rangle \geq 0$, ou seja, para qualquer $t \in \mathbb{R}$,

$$\langle u, u\rangle t^2 + 2\langle u, v\rangle t + \langle v, v\rangle \geq 0. \tag{3}$$

Definamos $p(t) = \langle u, u\rangle t^2 + 2\langle u, v\rangle t + \langle v, v\rangle$, $t \in \mathbb{R}$. Por (3), p é uma função polinomial não negativa. Além disso, como o coeficiente do termo quadrático é não negativo, segue que o discriminante Δ de $p(t)$ é um número real não positivo. Portanto,

$$\begin{aligned}\Delta &= 4\langle u, v\rangle^2 - 4\langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \\ &= 4\langle u, v\rangle^2 - 4||u||^2\,||v||^2 \leq 0,\end{aligned}$$

o que equivale a

$$\langle u, v\rangle^2 \leq ||u||^2\,||v||^2.$$

Extraindo a raiz quadrada em ambos os lados da desigualdade acima, obtemos (2). Deixaremos a parte que trata da igualdade em (2) como exercício (cf. Problema 2.3) ■

Cabe observar que o Teorema 7.2.1 foi provado, em 1821, por Augustin Cauchy (França, 1789 - 1857) para $V = \mathbb{R}^n$, com o produto interno usual. O resultado geral, para um espaço com produto interno arbitrário, foi provado em 1885, por Hermann Schwarz (Alemanha, 1843 - 1921).

Vamos agora definir a noção de ângulo em espaços com produto interno arbitrários. Suponhamos que u e v são vetores não nulos de um espaço com produto interno V. Dividindo ambos os lados da desigualdade (2) por $||u||\,||v||$, obtemos

$$\frac{|\langle u, v\rangle|}{||u||\,||v||} \leq 1$$

ou, equivalentemente,

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{||u||\,||v||} \leq 1. \tag{4}$$

Como $\cos\theta$ assume, uma única vez, cada valor no intervalo $[-1, 1]$ quando θ varia no intervalo $[0, \pi]$, segue de (4) que existe um único $\theta \in [0, \pi]$ tal que

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v\rangle}{||u||\,||v||}. \tag{5}$$

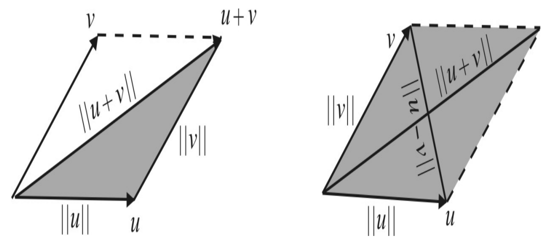
Definimos o *ângulo entre u e v* como o número real θ acima mencionado.

Parece estranho definir a norma de um vetor e o ângulo entre dois vetores em um espaço vetorial abstrato com produto interno, já que em geral não temos uma representação geométrica associada a estes espaços. Contudo, muitas definições e teoremas básicos da Geometria continuam valendo neste grau de generalidade.

Por exemplo, sabemos da Geometria de $\mathbb{R}^2$ que o comprimento de um lado de um triângulo não excede a soma dos comprimentos dos outros dois (Figura 16(a)). Veremos a seguir que este resultado vale em todos os espaços com produto interno (veja Proposição 7.2.2(iv)). Um outro resultado da Geometria afirma que a soma dos quadrados das diagonais de um paralelogramo coincide com a soma dos quadrados dos quatro lados (Figura 16(b)). Este resultado também vale em qualquer espaço com produto interno (veja Problema 2.2).

Figura 16(a)

Figura 16(b)



Assim, o produto interno é uma noção que enriquece a estrutura de um espaço vetorial, permitindo generalizar várias noções de caráter geométrico em $\mathbb{R}^2$ e em $\mathbb{R}^3$ para espaços vetoriais mais gerais.

Proposição 7.2.2. (Propriedades da norma) *Se u e v são vetores em um espaço V com produto interno e se $k \in \mathbb{R}$, então:*

(i) $||u|| \geq 0$;

(ii) $||u|| = 0$ *se, e somente se,* $u = 0$;

(iii) $||ku|| = |k|\,||u||$;

(iv) $||u+v|| \leq ||u|| + ||v||$ (*desigualdade triangular*).

Demonstração Provaremos o item (iv) e deixaremos os demais itens como exercícios (veja Problema 2.4). Temos

$$\begin{aligned} ||u+v||^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= ||u||^2 + 2\langle u,v\rangle + ||v||^2 \leq ||u||^2 + 2|\langle u,v\rangle| + ||v||^2, \end{aligned} \tag{6}$$

pois $x \leq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Por (2),

$$\begin{aligned} ||u||^2 + 2|\langle u,v\rangle| + ||v||^2 &\leq ||u||^2 + 2||u||\,||v|| + ||v||^2 \\ &= (||u|| + ||v||)^2. \end{aligned} \tag{7}$$

De (6) e (7), segue que

$$||u+v||^2 \leq (||u|| + ||v||)^2.$$

Extraindo as raízes quadradas em ambos os lados da desigualdade acima obtemos a desigualdade desejada. ■

No próximo resultado apresentamos algumas propriedades da noção de distância entre dois vetores de um espaço com produto interno. A verificação dessas propriedades é simples e usa a Proposição 7.2.2. Portanto, deixaremos a sua demonstração como exercício para o leitor (veja Problema 2.5).

Proposição 7.2.3. (Propriedades da distância) *Se u, v e w são vetores em um espaço com produto interno V, então:*

(i) $d(u, v) \geq 0$;

(ii) $d(u, v) = 0$ *se, e somente se,* $u = v$;

(iii) $d(u, v) = d(v, u)$;

(iv) $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (*desigualdade triangular*).

O próximo objetivo desta seção é definir a noção de *ortogonalidade* em um espaço com produto interno. Comecemos com a noção de *ortogonalidade entre dois vetores.*

Sejam u e v dois vetores *não nulos* de um espaço com produto interno V e seja θ o ângulo entre eles. Segue de (5) que $\cos\theta = 0$ se, e somente se, $\langle u, v \rangle = 0$. Equivalentemente, temos $\theta = \pi/2$ se, e somente se $\langle u, v \rangle = 0$. Convencionamos que se u ou v é o vetor nulo, o ângulo entre eles é $\pi/2$. Assim, dizemos que dois vetores quaisquer u e v em V são *ortogonais* quando $\langle u, v \rangle = 0$.

A seguir, introduziremos a noção de *ortogonalidade entre um vetor e um subespaço.*

Sejam v um vetor de V e W um subespaço de V. Dizemos que *v é ortogonal a W* se v é ortogonal a cada vetor de W. O conjunto de todos os vetores de V que são ortogonais a W é chamado *complemento ortogonal de W* e é denotado por $W^\perp$.

Exemplo 1. Seja $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual e seja W o plano de equação cartesiana $x + y + z = 0$. O vetor $v = (1, 1, 1)$ é ortogonal a W, pois v é um vetor normal a este plano. Para determinarmos $W^\perp$, devemos encontrar um vetor (a, b, c) em $\mathbb{R}^3$ que seja ortogonal a todo vetor de W. Como um vetor de W é da forma $(-y - z, y, z)$, para $y, z \in \mathbb{R}$, devemos encontrar (a, b, c) tal que

$$(-y - z, y, z) \cdot (a, b, c) = 0$$

Fazendo, na igualdade acima, $y = 0$ e $z = 1$, obtemos $a = c$; e, fazendo $y = 1$ e $z = 0$, obtemos $a = b$. Portanto,

$$W^\perp = \{(a, a, a);\ a \in \mathbb{R}\},$$

ou seja, $W^\perp$ é a reta que passa pela origem que tem v como um vetor diretor.

Terminamos esta seção apresentando algumas propriedades do complemento ortogonal.

Proposição 7.2.4. *Seja W um subespaço de um espaço com produto interno V. Então*:

(i) *$W^\perp$ é um subespaço de V*;

(ii) $W \cap W^\perp = \{0\}$;

(iii) $(W^\perp)^\perp = W$.

Demonstração Provaremos apenas (i), deixando as demonstrações das demais propriedades para o leitor (veja Problema 2.10).

Primeiramente, é claro que $0 \in W^\perp$. Tomemos u e v em $W^\perp$ e a em $\mathbb{R}$. Se $w \in W$, então

$$\langle u + av, w\rangle = \langle u, w\rangle + a\langle v, w\rangle = 0 + a0 = 0,$$

mostrando que $u + av$ é ortogonal a w. Como $w \in W$ foi tomado de modo arbitrário, temos que $u + av$ é ortogonal a cada vetor de W, ou seja $u + av$ está em $W^\perp$. Pelo Corolário 3.1.2, segue que $W^\perp$ é um subespaço de V. $\blacksquare$

No Capítulo 1 tivemos a oportunidade de mostrar que dois sistemas lineares homogêneos com matrizes associadas equivalentes possuem conjuntos de soluções iguais. Vamos, no exemplo a seguir, mostrar que vale uma recíproca dessa propriedade.

Exemplo 2. Seja dado um sistema linear homogêneo $AX = 0$, com m equações e n incógnitas cujo espaço solução é denotado por $S_h(A)$. Chamemos de T_A a transformação linear de $\mathbb{R}^n$ para $\mathbb{R}^m$ determinada por A e pelas bases canônicas dos dois espaços vetoriais (cf. Exemplo 4, Seção 1 do Capítulo 6). Como as soluções do sistema são os vetores de $\mathbb{R}^n$ que são ortogonais aos vetores linhas de A, temos, pelo Problema 2.11, que $S_h(A) = (\mathcal{L}(A))^{\perp}$.

Problemas

2.1 Suponha que $\mathbb{R}^3$ e $\mathbb{R}^4$ têm o produto interno usual. Em cada item abaixo, encontre o cosseno do ângulo entre u e v:

(a) $u = (-1, 5, 2)$ e $v = (2, 4, -9)$;

(b) $u = (1, 0, 1, 0)$ e $v = (1, 1, 1, 1)$;

(c) $u = (2, 1, 0, -1)$ e $v = (4, 0, 0, 0)$.

2.2* Mostre que a seguinte identidade vale para quaisquer vetores u e v de um espaço com produto interno:

$$||u + v||^2 + ||u - v||^2 = 2||u||^2 + 2||v||^2.$$

2.3 Mostre que vale a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.

2.4 Conclua a demonstração da Proposição 7.2.2.

2.5 Prove a Proposição 7.2.3.

2.6 Use a desigualdade de Cauchy-Schwarz para mostrar, para quaisquer valores reais de a, b e θ, que

$$(a \cos\theta + b \operatorname{sen}\theta)^2 \leq a^2 + b^2.$$

2.7 Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de um espaço com produto interno V. Mostre que o vetor nulo de V é o único vetor de V que é ortogonal a todos os vetores da base.

2.8 Seja V um espaço com produto interno. Mostre que se u e v são vetores ortogonais de V tais que $||u|| = ||v|| = 1$, então $||u - v|| = \sqrt{2}$.

2.9* (Uma generalização do Teorema de Pitágoras) Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto ortogonal de vetores de um espaço com produto interno. Então

$$||v_1 + v_2 + \cdots + v_n||^2 = ||v_1||^2 + ||v_2||^2 + \cdots + ||v_n||^2.$$

2.10 Conclua a demonstração da Proposição 7.2.4.

2.11 Seja β um conjunto de geradores de W, onde W é um subespaço de um espaço com produto interno V. Mostre que $W^\perp$ consiste de todos os vetores de V que são ortogonais a cada vetor do conjunto β.

2.12* Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vetores $u = (1, 2, 3, -1, 2)$ e $v = (2, 1, 3, 2, -1)$. Determine uma base de $W^\perp$.

2.13 Suponha que $\mathbb{R}^4$ tem o produto interno usual e seja $v = (1, -1, 0, -2)$. Determine se v é ortogonal ao subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (-1, 1, 3, 0)$ e $v_2 = (4, 0, 2, 2)$.

2.14 Seja W o plano de equação cartesiana $x - 2y - 3z - 1 = 0$. Obtenha as equações paramétricas para $W^\perp$.

3 Bases Ortonormais

Veremos nesta seção que um espaço vetorial, com produto interno, possui bases que se destacam das demais, chamadas de bases ortonormais. Trabalhar com este tipo de base torna V geometricamente muito parecido com o espaço $\mathbb{R}^n$, onde $n = \dim V$.

Ao longo desta seção, V será sempre um espaço com produto interno $\langle\ ,\ \rangle$, de dimensão finita $n > 0$.

3.1 Conjuntos Ortogonais

Um conjunto de vetores em V é chamado *conjunto ortogonal* se quaisquer dois vetores distintos do conjunto são ortogonais.

Por exemplo, o conjunto $\{(1,2,1),(2,1,-4),(3,-2,1)\}$ é um conjunto ortogonal em $\mathbb{R}^3$ com seu produto interno usual.

Um conjunto ortogonal no qual cada vetor tem norma 1 é chamado *conjunto ortonormal*. Se v é um vetor não nulo em um espaço com produto interno, segue da Proposição 7.2.2(iii) que o vetor $||v||^{-1}\,v$ tem norma 1. O processo de multiplicar um vetor não nulo pelo inverso de sua norma para obter um vetor de norma 1 é chamado de *normalização*. Assim, um conjunto ortogonal de vetores não nulos pode ser sempre transformado em um conjunto ortonormal, normalizando-se cada um de seus vetores.

O próximo resultado relaciona a noção de ortogonalidade com a noção de independência linear.

Proposição 7.3.1. *Todo conjunto ortogonal de vetores não nulos de V é linearmente independente.*

Demonstração Seja $\{v_1,\dots,v_r\}$ um conjunto de vetores ortogonais de V com produto interno. Consideremos a equação

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r = 0.$$

Vamos mostrar que $a_i = 0$, para todo $1 \le i \le r$. Fixe $1 \le i \le r$. Então,

$$\begin{aligned}\langle a_1v_1 + \cdots + a_rv_r, v_i\rangle &= a_1\langle v_1, v_i\rangle + \cdots + a_i\langle v_i, v_i\rangle \\ &\qquad + a_{i+1}\langle v_{i+1}, v_i\rangle + \cdots + a_r\langle v_r, v_i\rangle \\ &= a_i\langle v_i, v_i\rangle, \qquad (1)\end{aligned}$$

já que $\langle v_j, v_i\rangle = 0$ sempre que $j \neq i$. Por outro lado

$$\langle a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_rv_r, v_i\rangle = \langle 0, v_i\rangle = 0. \qquad (2)$$

De (1) e (2), segue que $a_i\langle v_i, v_i\rangle = 0$ e como v_i é um vetor não nulo, temos necessariamente que $a_i = 0$. Como i foi tomado de modo arbitrário em seu intervalo de variação, o resultado segue. ■

A recíproca do resultado acima é obviamente falsa, pois, por exemplo, o conjunto $\{(1,1),(1,0)\}$ de vetores em $\mathbb{R}^2$ com o produto interno usual é linearmente independente, mas não é um conjunto ortogonal.

Se α=$\{v_1, \ldots, v_n\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não nulos de V, segue da proposição anterior que α é uma base de V. Uma base consistindo de vetores ortogonais é chamada *base ortogonal* e uma base consistindo de vetores ortonormais é chamada *base ortonormal*.

Por exemplo, a base canônica de $\mathbb{R}^n$ com o produto interno usual é uma base ortonormal.

Vimos que se V é um espaço vetorial e α é uma base de V então, em geral, é necessário resolver um sistema linear a fim de escrever um vetor de V em termos da base α. O próximo resultado mostra que quando V é um espaço com produto interno e α é uma base ortonormal de V, então é bastante simples encontrar as coordenadas de um vetor de V em relação a base α.

Teorema 7.3.2. *Se* α=$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *é uma base ortonormal de* V*, então, para todo* $v \in V$*, podemos escrever*

$$v = \langle v, v_1\rangle v_1 + \langle v, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle v, v_n\rangle v_n\,.$$

Demonstração Seja $v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n$ a escrita de v na base α. Fixe i, com $1 \leq i \leq n$. Temos

$$\begin{aligned}\langle v, v_i\rangle &= \langle a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n, v_i\rangle \\ &= a_1\langle v_1, v_i\rangle + \cdots + a_i\langle v_i, v_i\rangle + \cdots + a_n\langle v_n, v_i\rangle = a_i,\end{aligned}$$

já que $\langle v_j, v_i\rangle = 0$ se $j \neq i$ e $\langle v_i, v_i\rangle = ||v_i||^2 = 1$. Como i foi tomado de modo arbitrário, a demonstração está completa. ■

Se $\beta = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortogonal de V, normalizando cada um dos vetores de β, obtemos a base ortonormal α de V, onde

$$\alpha = \left\{\frac{v_1}{||v_1||}, \frac{v_2}{||v_2||}, \ldots, \frac{v_n}{||v_n||}\right\}.$$

Pelo Teorema 7.3.2, para cada vetor v em V, temos que

$$\begin{aligned}v &= \langle v, \frac{v_1}{||v_1||}\rangle\,\frac{v_1}{||v_1||} + \cdots + \langle v, \frac{v_n}{||v_n||}\rangle\,\frac{v_n}{||v_n||} \\ &= \frac{\langle v, v_1\rangle}{||v_1||^2}\,v_1 + \cdots + \frac{\langle v, v_n\rangle}{||v_n||^2}\,v_n.\end{aligned}$$

O número real

$$a_i = \frac{\langle v, v_i \rangle}{||v_i||^2}$$

é chamado de *coeficiente de Fourier*[1] de v em relação ao vetor v_i. Este escalar admite uma interpretação geométrica relacionada com a noção de projeção. Para apresentarmos esta interpretação geométrica, vamos precisar do seguinte resultado.

Proposição 7.3.3. *Seja w um vetor não nulo de V. Se $v \in V$, então*

$$k = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle} = \frac{\langle v, w \rangle}{||w||^2} \tag{3}$$

é o único número real tal que $v' = v - kw$ é ortogonal a w.

Demonstração Para que v' seja ortogonal a w devemos ter $\langle v - kw, w \rangle = 0$, ou seja, $\langle v, w \rangle = k\langle w, w \rangle$, mostrando que $k = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}\cdot$ Reciprocamente, suponhamos que $k = \dfrac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}\cdot$ Então,

$$\langle v - kw, w \rangle = \langle v, w \rangle - k\langle w, w \rangle = \langle v, w \rangle - \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}\langle w, w \rangle = 0,$$

o que mostra que $v - kw$ é ortogonal a w. ■

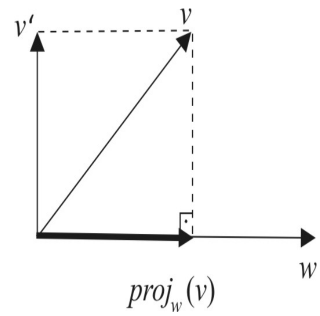
O escalar k em (3) é o coeficiente de Fourier de v em relação ao vetor w. *A projeção de v ao longo de w* (Figura 17) é denotada por $\mathrm{proj}_w(v)$ e é definida por

$$\mathrm{proj}_w(v) = kw = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle w, w \rangle}\, w.$$

Figura 17

O próximo resultado, cuja demonstração é deixada como exercício (veja Problema 3.2), generaliza a Proposição 7.3.3.

[1]Em homenagem a Jean-Baptiste Fourier (França, 1768 - 1830), conhecido na Matemática por iniciar a investigação sobre o desenvolvimento de funções periódicas em séries trigonométricas convergentes, chamadas séries de Fourier, e sua aplicação aos problemas de condução de calor.



Proposição 7.3.4. *Suponhamos que* $\{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ *seja um conjunto ortogonal de vetores não nulos de* V*. Se* $v \in V$*, então*

$$k_i = \frac{\langle v, w_i \rangle}{||w_i||^2}, \qquad 1 \leq i \leq r,$$

são os únicos números reais tais que o vetor

$$v' = v - k_1 w_1 - k_2 w_2 - \cdots - k_r w_r$$

é ortogonal aos vetores $w_1, w_2, \ldots, w_r$.

3.2 Ortogonalização de Gram-Schmidt

Vimos na seção anterior que trabalhar com bases ortonormais é bastante conveniente. Veremos a seguir que todo espaço com produto interno, não nulo, de dimensão finita tem uma base ortonormal.

A construção dada na prova do resultado abaixo é chamada de *processo de ortogonalização de Gram-Schmidt*, pois leva os nomes de Jorgen Pedersen Gram (Dinamarca, 1850 - 1916) e de Erhard Schmidt (Alemanha, 1876 - 1959). Cabe observar que a construção de Gram-Schmidt pode ser encontrada, de modo implícito, em trabalhos de Pierre Simon Laplace[2] e de Cauchy.

[2]Pierre Simon Laplace (França 1749 – 1827) foi um importante matemático, físico e astrônomo, conhecido por suas contribuições à mecânica celeste à teoria de probabilidades, bem como por suas aplicações da matemática à física.

Teorema 7.3.5. *O espaço V possui uma base ortogonal.*

Demonstração Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base de V. Tomemos (veja Figura 18)

$$
\begin{aligned}
w_1 &= v_1,\\
w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1\rangle}{||w_1||^2}\, w_1,\\
w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1\rangle}{||w_1||^2}\, w_1 - \frac{\langle v_3, w_2\rangle}{||w_2||^2}\, w_2,\\
&\vdots\\
w_n &= v_n - \frac{\langle v_n, w_1\rangle}{||w_1||^2}\, w_1 - \cdots - \frac{\langle v_n, w_{n-1}\rangle}{||w_{n-1}||^2}\, w_{n-1}.
\end{aligned}
$$

Pela Proposição 7.3.4, o conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é um conjunto ortogonal. Além disso, como o conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é linearmente independente, cada vetor w_i é não nulo. Assim, o conjunto $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é um conjunto ortogonal de vetores não nulos de V. Como, por definição, $n = \dim V$, segue pela Proposição 7.3.1 que $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base ortogonal de V. ■

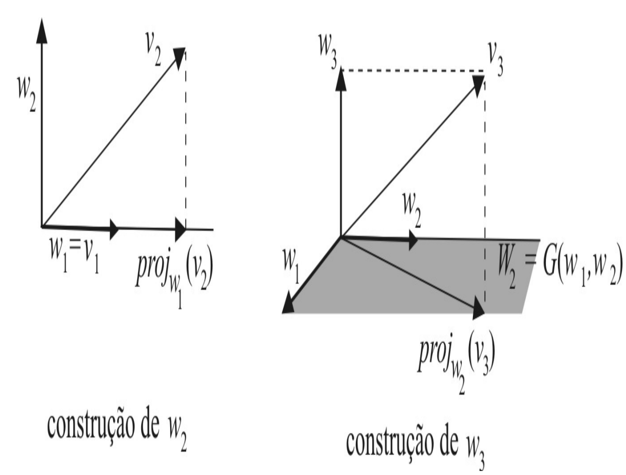


Figura 18

Decorre da proposição acima que se V tem uma base ortogonal, ele tem uma base ortonormal, pois os vetores de uma base ortogonal podem ser normalizados para produzir uma base ortonormal de V.

Exemplo 1. Considere $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Apliquemos o processo de Gram-Schmidt ao conjunto $\{(1,0,0),(1,1,1),(0,0,1)\}$ para obtermos uma base ortogonal $\{w_1, w_2, w_3\}$ de $\mathbb{R}^3$.

Façamos

$$
\begin{aligned}
w_1 &= (1,0,0),\\
w_2 &= (1,1,1) - \frac{\langle (1,1,1),(1,0,0)\rangle}{||(1,0,0)||^2}(1,0,0) = (0,1,1),\\
w_3 &= (0,0,1) - \frac{\langle (0,0,1),(1,0,0)\rangle}{||(0,1,1)||^2}(1,0,0)\\
&\quad - \frac{\langle (0,0,1),(0,1,1)\rangle}{||(0,1,1)||^2}(0,1,1) = \left(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right).
\end{aligned}
$$

Assim, $\{(1,0,0),(0,1,1),(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\}$ é uma base ortogonal de $\mathbb{R}^3$.

Uma consequência importante do Teorema 7.3.5, que demonstraremos a seguir, é o fato de que $V = W \oplus W^{\perp}$, onde W é um subespaço de V. Em outras palavras, cada vetor v de V pode ser escrito de modo único como

$$v = w_1 + w_2\,, \tag{4}$$

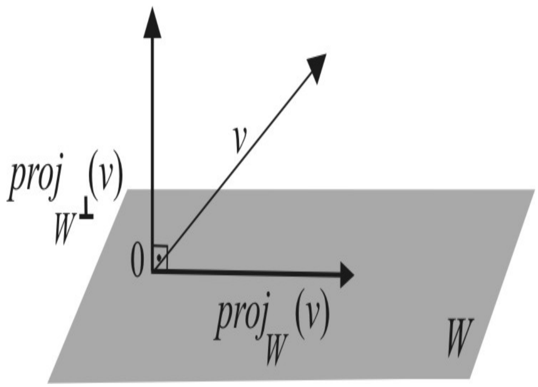
onde $w_1 \in W$ e $w_2 \in W^{\perp}$. O vetor w_1 é chamado *projeção ortogonal de v em W* e é denotado por $\text{proj}_W(v)$. O vetor w_2 é chamado *componente de v ortogonal a W* e é denotado por $\text{proj}_{W^{\perp}}(v)$ (Figura 19). Por (4), temos então que $v = \text{proj}_W(v) + \text{proj}_{W^{\perp}}(v)$.

Figura 19

Teorema 7.3.6. *Se W é um subespaço de V, então*

$$V = W \oplus W^{\perp}.$$

Demonstração Pela Proposição 7.2.4(ii), $W \cap W^{\perp} = \{0\}$. Vejamos que $V = W + W^{\perp}$. Pelo processo de ortogonalização de Gram-Schmidt, existe



uma base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de W. Tomemos $v \in V$. Defina

$$\begin{aligned} w_1 &= \langle v, v_1\rangle v_1 + \langle v, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle v, v_n\rangle v_n, \\ w_2 &= v - w_1\,. \end{aligned}$$

Note que $w_1 + w_2 = w_1 + (v - w_1) = v$. Além disso, $w_1 \in W$, pois w_1 é uma combinação linear dos vetores da base de W. Portanto, resta mostrar que $w_2 \in W^\perp$, ou seja, w_2 é ortogonal a W. Para isto, seja $w \in W$. Pelo Teorema 7.3.2,

$$w = \langle w, v_1\rangle v_1 + \langle w, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle w, v_n\rangle v_n\,.$$

Assim,

$$\begin{aligned} \langle w_2, w\rangle = \langle v - w_1, w\rangle &= \langle v, w\rangle - \langle w_1, w\rangle \\ &= \langle w, v_1\rangle\langle v, v_1\rangle + \cdots + \langle w, v_n\rangle\langle v, v_n\rangle \\ &- \big(\langle v, v_1\rangle\langle v_1, w\rangle + \cdots + \langle v, v_n\rangle\langle v_n, w\rangle\big) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Como $w \in W$ foi tomado de modo arbitrário, segue que w_2 é ortogonal a W.

■

Exemplo 2. Retomemos o Exemplo 1 da Seção 2, onde $V = \mathbb{R}^3$ e onde $W = \{(x, y, z);\ x + y + z = 0\}$ e $W^\perp = \{(x, y, z);\ x = y = z\}$. Note que $W \cap W^\perp = \{0\}$.

Como

$$\dim(W + W^{\perp}) = \dim W + \dim W^{\perp} - \dim(W \cap W^{\perp}),$$

segue que $\dim(W + W^{\perp}) = 3$, já que temos $\dim W = 2$, $\dim W^{\perp} = 1$ e $\dim(W \cap W^{\perp}) = 0$. Portanto, $W + W^{\perp} = \mathbb{R}^3$. Consequentemente, temos que $\mathbb{R}^3 = W \oplus W^{\perp}$, como aliás deveria ser pelo Teorema 7.3.6.

Para cada $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos que

$$\begin{aligned}(x,y,z) = \;& \left(\tfrac{2x-y-z}{3}, \tfrac{-x+2y-z}{3}, \tfrac{-x-y+2z}{3}\right)\\ &+ \;\left(\tfrac{x+y+z}{3}, \tfrac{x+y+z}{3}, \tfrac{x+y+z}{3}\right) \;\in\; W + W^{\perp}.\end{aligned}$$

Mais ainda, a escrita acima é única. Em outras palavras, todo vetor de $\mathbb{R}^3$ se expressa, de forma única, como a soma de um elemento e W com um elemento de $W^{\perp}$. A figura abaixo mostra a decomposição do vetor $(0, 3, 0)$.

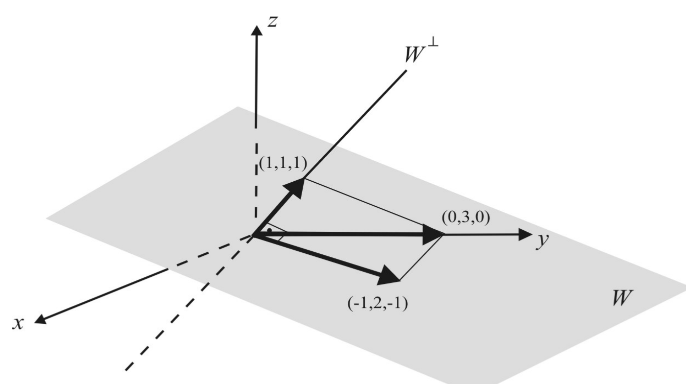


Figura 20

Exemplo 3. Seja $AX = 0$ um sistema $m \times n$ de equações lineares homogêneo, cujo conjunto solução denotamos por $S_h(A)$. Seja T_A a transformação linear associada à matriz A. Sabemos (cf. Exemplo 2, Seção 2) que

$$\operatorname{Ker} T_A = S_h(A) = (\mathcal{L}(A))^{\perp}.$$

Por outro lado, pelo Exemplo 4, Seção 1, Capítulo 6, temos que

$$\operatorname{Im} T_A = \mathcal{C}(A).$$

Pelo Teorema do Núcleo e da Imagem, temos que

$$n = \dim \operatorname{Ker} T_A + \dim \operatorname{Im} T_A = \dim(\mathcal{L}(A))^\perp + \dim \mathcal{C}(A).$$

Pelo Teorema 7.3.6, temos que

$$n = \dim \mathcal{L}(A) + \dim(\mathcal{L}(A))^\perp = p_A + \dim S_h(A).$$

Daí decorre que

$$\dim S_h(A) = n - p_A,$$

e que

$$\dim \mathcal{C}(A) = \dim \mathcal{L}(A).$$

Assim, o posto por linhas de uma matriz A, que por definição é igual à dimensão do espaço linha $\mathcal{L}(A)$ de A, coincide com o posto de A por colunas, ou seja com a dimensão do espaço coluna $\mathcal{C}(A)$ da matriz A.

Problemas

3.1* Seja V um espaço com produto interno de dimensão finita n. Se α é uma base ortonormal de V e se

$$[v]_\alpha = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad [w]_\alpha = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix},$$

então:

(a) $||v|| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$;

(b) $d(v, w) = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \cdots + (a_n - b_n)^2}$;

(c) $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$.

O exercício anterior mostra que trabalhando com bases ortonormais, o cálculo de normas e produtos internos arbitrários se reduz ao cálculo de normas e produtos internos das matrizes das coordenadas, como em $\mathbb{R}^n$ *com sua norma e produto interno usuais.*

3.2 Prove a Proposição 7.3.4.

3.3 Mostre que os vetores

$$v_1 = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0\right), \quad v_2 = \left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 0\right) \text{ e } v_3 = (0, 0, 1)$$

formam uma base ortonormal para $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual. Em seguida, expresse o vetor $v = (1, -1, 2)$ nesta base.

3.4* Seja W um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno V. Prove que:

(a) Se $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base ortonormal de W e v é um vetor qualquer de V, então $\operatorname{proj}_W(v) = \langle v, w_1\rangle w_1 + \langle v, w_2\rangle w_2 + \cdots + \langle v, w_n\rangle w_n$;

(b) Se $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ é uma base ortogonal de W e v é um vetor qualquer de V, então

$$\operatorname{proj}_W(v) = \frac{\langle v, w_1\rangle}{||w_1||^2}\, w_1 + \frac{\langle v, w_2\rangle}{||w_2||^2}\, w_2 + \cdots + \frac{\langle v, w_n\rangle}{||w_n||^2}\, w_n .$$

3.5 Considere $\mathbb{R}^4$ com o produto interno usual. Use o processo de Gram-Schmidt para transformar a base $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ em uma base ortogonal, onde

$$v_1 = (0, 2, 1, 0),\ v_2 = (1, -1, 0, 0),\ v_3 = (1, 2, 0, -1) \text{ e } v_4 = (1, 0, 0, 1).$$

3.6 Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores

$$v_1 = (1, 1, 1, 1),\ v_2 = (1, -1, 2, -2) \text{ e } v_3 = (-1, -5, 1, -7).$$

Ache a projeção ortogonal de $v = (1, 2, -3, 4)$ em W.

3.7 Construa, a partir do vetor $v = (2, 1, 0)$, uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ com o produto interno usual.

4 Operadores em Espaços com Produto Interno

Nesta seção, vamos definir importantes operadores em espaços com produto interno. Mais precisamente, mostraremos a existência do operador adjunto de um operador linear e, a partir deste, introduzir as noções de operadores simétricos e operadores ortogonais. Estes operadores estão relacionados com o Teorema Espectral, um dos teoremas mais importantes da Álgebra Linear, conforme veremos no Capítulo 9.

Nesta seção, continuaremos supondo que V é um espaço com produto interno de dimensão finita $n > 0$.

4.1 O Operador Adjunto

Dado um vetor $v \in V$, a ele associamos de modo natural um funcional linear em V, como segue:

$$\begin{array}{rccc} \phi_v\colon & V & \to & \mathbb{R} \\ & u & \mapsto & \langle u, v\rangle\,. \end{array}$$

De fato, ϕ_v é um funcional linear, pois, para todos $u_1, u_2 \in V$ e todo $a \in \mathbb{R}$, temos

$$\phi_v(u_1 + au_2) = \langle u_1 + au_2, v\rangle = \langle u_1, v\rangle + a\langle u_2, v\rangle = \phi_v(u_1) + a\phi_v(u_2).$$

Assim, cada v em V define um funcional linear ϕ_v em V, ou seja, um elemento de $(V, \mathbb{R})$. A recíproca deste fato é também verdadeira, como mostra o seguinte resultado.

Teorema 7.4.1. *Dado um funcional linear ϕ em V, existe um único vetor $v \in V$ tal que $\phi = \phi_v$.*

Demonstração Seja $\phi \in (V, \mathbb{R})$ e fixe uma base ortonormal $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ de V. Pelo Teorema 7.3.2, todo elemento $u \in V$ se escreve como

$$u = \langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n.$$

Existência: Tomemos $v = \phi(v_1)v_1 + \phi(v_2)v_2 + \cdots + \phi(v_n)v_n$.

Por um lado, temos

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \phi\big(\langle u, v_1\rangle v_1 + \langle u, v_2\rangle v_2 + \cdots + \langle u, v_n\rangle v_n\big) \\ &= \langle u, v_1\rangle\, \phi(v_1) + \langle u, v_2\rangle\, \phi(v_2) + \cdots + \langle u, v_n\rangle\, \phi(v_n). \end{aligned} \tag{1}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &= \langle u,\phi(v_1)v_1+\phi(v_2)v_2+\cdots+\phi(v_n)v_n\rangle\\ &= \phi(v_1)\langle u,v_1\rangle+\phi(v_2)\langle u,v_2\rangle+\cdots+\phi(v_n)\langle u,v_n\rangle.\end{aligned}\tag{2}$$

Juntando (1) e (2) obtemos que $\phi(u)=\langle u,v\rangle=\phi_v(u)$, para todo $u\in V$.

Unicidade: Suponhamos que v' tenha a propriedade $\langle u,v'\rangle=\langle u,v\rangle$, para todo $u\in V$. Logo $\langle u,v-v'\rangle=0$, para todo $u\in V$. Portanto, $v-v'$ é ortogonal a todos os vetores de V, o que, em virtude do Problema 2.7, acarreta que $v=v'$. ■

Observe que o Teorema 7.4.1 garante que a função $v\mapsto\phi_v$, onde $\phi_v(u)=\langle u,v\rangle$ $(u\in V)$, é um isomorfismo entre V e $(V,\mathbb{R})$ (cf. Problema 4.4).

Teorema 7.4.2. *Dado um operador linear T em V, existe um único operador linear T^* em V tal que*

$$\langle T(v),w\rangle=\langle v,T^*(w)\rangle,\quad \text{para quaisquer } v,w\in V.$$

Demonstração Tome $w\in V$. Como a função definida por $v\mapsto\langle T(v),w\rangle$ é um funcional linear em V (verifique), segue, do Teorema 7.4.1, que existe um único vetor $w'\in V$ tal que

$$\langle T(v),w\rangle=\langle v,w'\rangle,\quad \text{para todo } v\in V.$$

Basta definir $T^*(w)=w'$. A demonstração do Teorema 7.4.1 também nos mostra que se $\{v_1,\ldots,v_n\}$ é uma base ortonormal de V, então

$$T^*(w)=w'=\langle T(v_1),w\rangle v_1+\cdots+\langle T(v_n),w\rangle v_n.$$

Daí, vê-se claramente que T^* é linear. ■

O operador T^* é chamado de *operador adjunto* de T. Assim, o Teorema 7.4.2 afirma que todo operador linear T, em um espaço com produto interno de dimensão finita, possui um operador adjunto T^*.

O próximo resultado mostra como podemos obter T^* a partir de uma representação matricial de T.

Proposição 7.4.3. *Para toda base ortonormal α de V e para todo operador linear T em V, temos que*

$$[T^*]^\alpha_\alpha = ([T]^\alpha_\alpha)^t.$$

Para demonstrarmos a proposição acima, vamos precisar do seguinte resultado, cuja demonstração fica como exercício para o leitor (veja Problema 4.5).

Lema 7.4.4. *Seja $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de V. Se $A = [a_{ij}]_{n\times n}$ é a matriz que representa um oprerador T em V, com relação à base α (ou seja, $A = [T]^\alpha_\alpha$), então*

$$a_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle, \quad \text{para todos } i, j,\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Demonstração da Proposição 7.4.3. Considere as matrizes $[T]^\alpha_\alpha = [a_{ij}]_{n\times n}$ e $[T^*]^\alpha_\alpha = [b_{ij}]_{n\times n}$. Pelo Lema 7.4.4,

$$a_{ij} = \langle T(v_j), v_i\rangle \quad \text{e} \quad b_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i\rangle, \quad \text{para todos } i, j,\ 1 \leq i, j \leq n.$$

Logo,

$$b_{ij} = \langle T^*(v_j), v_i\rangle = \langle v_i, T^*(v_j)\rangle = \langle T(v_i), v_j\rangle = a_{ji},$$

para todos i, j, com $1 \leq i, j \leq n$, provando o resultado. ■

Um operador linear $T\colon V \to V$ é dito ser um *operador simétrico* quando $T^* = T$.

Pela Proposição 7.4.3, observamos que se T é um operador simétrico em V, então para toda base ortonormal α de V temos

$$[T]^\alpha_\alpha = ([T]^\alpha_\alpha)^t.$$

Assim, *$T\colon V \to V$ é simétrico se, e somente se, $[T]^\alpha_\alpha$ é uma matriz simétrica*. Observemos que o fato de um operador ser simétrico não depende da base ortonormal escolhida. Portanto, se $[T]^\alpha_\alpha$ for uma matriz simétrica em uma determinada base ortonormal α, então $[T]_{\beta}^{\beta}$ será também simétrica para qualquer outra base ortonormal β.

Exemplo 1. Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o operador linear definido por $T(x, y, z) = (2x - y + z, -x + y + 3z, x + 3y)$. Se α é a base canônica de $\mathbb{R}^3$, então

$$[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

é uma matriz simétrica e, portanto, T é um operador simétrico.

4.2 Operadores Ortogonais

Um operador linear $T\colon V \to V$ é dito ser um operador *ortogonal* quando

$$T^*T = TT^* = I_V.$$

Em outras palavras, T é um operador ortogonal quando T é invertível e $T^* = T^{-1}$.

Diremos que um operador T em V preserva norma, preserva distância, ou preserva produto interno, quando, para todos $u, v \in V$, se tenha $||T(v)|| = ||v||$, $d(T(u), T(v)) = d(u, v)$, ou $\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle$, respectivamente.

O resultado a seguir caracteriza os operadores ortogonais.

Teorema 7.4.5. *Seja $T\colon V \to V$ um operador linear. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *T é ortogonal;*

(ii) *T preserva a norma;*

(iii) *T preserva a distância;*

(iv) *T preserva o produto interno;*

(v) *T transforma toda base ortonormal de V numa base ortonormal de V;*

(vi) *T transforma alguma base ortonormal de V numa base ortonormal de V.*

Demonstração (i) $\Rightarrow$ (ii) Se $v \in V$, então pelo Teorema 7.4.2.

$$||T(v)||^2 = \langle T(v), T(v)\rangle = \langle v, T^*(T(v))\rangle = \langle v, I_V(v)\rangle = \langle v, v\rangle = ||v||^2.$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Se $v, u \in V$, então

$$d(T(v), T(u)) = ||T(v) - T(u)|| = ||T(v-u)|| = ||v-u|| = d(v, u).$$

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Se $v, u \in V$, então $d(T(v+u), 0) = d(v+u, 0)$. Ou seja,

$$||T(v+u)||^2 = ||v+u||^2. \tag{3}$$

Note que

$$||T(v+u)||^2 = \langle T(v), T(v)\rangle + 2\langle T(v), T(u)\rangle + \langle T(u), T(u)\rangle$$

e

$$||v+u||^2 = \langle v, v\rangle + 2\langle v, u\rangle + \langle u, u\rangle\,. \tag{4}$$

Como

$$\langle v, v\rangle = (d(v,0))^2 = (d(T(v),0))^2 = \langle T(v), T(v)\rangle,$$

o mesmo valendo para u, temos de (3) e (4) que $\langle T(v), T(u)\rangle = \langle v, u\rangle$, como desejado.

(iv) $\Rightarrow$ (i) Se $v, u \in V$, então pelo Teorema 7.4.2

$$\langle v, u\rangle = \langle T(v), T(u)\rangle = \langle v, T^*(T(u))\rangle,$$

mostrando que, para todos $u, v \in V$,

$$\langle v, (T^*T - I_V)(u)\rangle = 0.$$

Pelo Problema 2.8, temos que $(T^*T - I_V)(u) = 0$, para todo $u \in V$, o que acarreta que $T^*T = I_V$, logo T é ortogonal.

(i) $\Rightarrow$ (v) Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de V. Então

$$\langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j. \end{cases}$$

Logo, o conjunto $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é ortonormal e, consequentemente, linearmente independente (Proposição 7.3.1). Como $\dim V{=}n$, concluímos que esse conjunto é uma base de V.

(v) $\Rightarrow$ (vi) Esta implicação é óbvia.

(vi) $\Rightarrow$ (iv) Seja $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ uma base ortonormal de V tal que $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ também é uma base ortonormal de V. Sejam v e u em V. Se

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \quad \text{e} \quad u = b_1v_1 + b_2b_2 + \cdots + b_nv_n\,,$$

então

$$\langle v, u\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\langle v_i, v_j\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\,. \tag{5}$$

Por outro lado, temos

$$T(v) = a_1T(v_1) + a_2T(v_2) + \cdots + a_nT(v_n) \quad \text{e}$$

$$T(u) = b_1T(v_1) + b_2T(v_2) + \cdots + b_nT(v_n),$$

donde

$$\langle T(v), T(u)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j\langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_ib_j. \tag{6}$$

Assim, de (5) e (6), concluímos que $\langle T(v), T(u)\rangle = \langle v, u\rangle$, como desejado. ■

Exemplo 2. Consideremos o operador linear $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dado por $T(x, y) = (x\cos\theta - y\,\mathrm{sen}\,\theta, x\,\mathrm{sen}\,\theta + y\cos\theta)$. Lembremos da Seção 3, do Capítulo 6, que T é o operador rotação por um ângulo θ em $\mathbb{R}^2$. Note que se α é a base canônica de $\mathbb{R}^2$, o conjunto $\{T(1,0), T(0,1)\} = \{(\cos\theta, \mathrm{sen}\,\theta),\ (-\,\mathrm{sen}\,\theta, \cos\theta)\}$ é uma base ortonormal em $\mathbb{R}^2$. Assim, pelo Teorema 7.4.5, T é um operador ortogonal em $\mathbb{R}^2$.

Para relacionarmos a propriedade de um operador ser ortogonal com propriedades de suas matrizes associadas, estabelecemos a definição a seguir.

Uma matriz $A \in \mathcal{M}(n,n)$ é dita ser *ortogonal* quando

$$A\,A^t = A^t\,A = I_n.$$

Em outras palavras, A é uma matriz ortogonal se A é invertível e $A^t = A^{-1}$.

Segue imediatamente da definição que uma matriz A é ortogonal se, e somente se, a matriz A^t é ortogonal.

Por exemplo, a matriz de rotação em $\mathbb{R}^3$ dada por

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0 \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

é uma matriz ortogonal.

Com o resultado a seguir podemos verificar mais facilmente se uma matriz é ortogonal ou não.

Proposição 7.4.6. *Para uma matriz $A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *A é ortogonal;*

(ii) *As colunas de A formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^n$;*

(iii) *As linhas de A formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^n$.*

Demonstração (i) $\Leftrightarrow$ (ii) Chamemos $A^t\,A = \left[b_{ij}\right]_{n\times n}$. Pela definição de produto de matrizes, o elemento b_{ij} é dado por

$$\begin{aligned} b_{ij} &= a_{1i}\,a_{1j} + a_{2i}\,a_{2j} + \cdots + a_{ni}\,a_{nj} \\ &= \langle (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}), (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \rangle. \end{aligned}$$

Portanto, daí segue-se que

$A^t A = I_n$ se, e somente se,

$$\langle (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}), (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j, \end{cases}$$

provando o desejado.

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) Basta utilizar o fato que A é ortogonal se, e somente se, A^t é ortogonal, que as linhas de A^t são as colunas de A e aplicar o que foi provado acima. ■

Teorema 7.4.7. *Se α e β são bases ortonormais de V, então a matriz mudança de base $\left[I_V\right]_\beta^\alpha$ é uma matriz ortogonal.*

Demonstração Sejam $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $\beta = \{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$. Suponhamos $[I_V]_\beta^\alpha = [a_{ij}]$. Para cada i, com $1 \leq i \leq n$, temos que

$$v_i = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \cdots + a_{ni}w_n.$$

Ora, como v_i e v_j são ortogonais, quando $i \neq j$, então

$$\begin{aligned} 0 = \langle v_i, v_j \rangle &= a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} \\ &= \langle (a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni}), (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}) \rangle, \end{aligned} \tag{7}$$

pois β é ortonormal. De (7) concluímos que as colunas de $[I_V]_\beta^\alpha$ formam vetores ortogonais em $\mathbb{R}^n$. Vejamos agora que cada coluna de $[I_V]_\beta^\alpha$ forma um vetor unitário em $\mathbb{R}^n$. De fato, se $1 \leq i \leq n$, então

$$1 = \langle v_i, v_i \rangle = a_{1i}^2 + a_{2i}^2 + \cdots + a_{ni}^2\,,$$

já que β é ortonormal. Assim, as colunas de $[I_V]_\beta^\alpha$ formam vetores unitários em $\mathbb{R}^n$. Pela Proposição 7.4.6, $[I_V]_\beta^\alpha$ é uma matriz ortogonal. ■

Terminaremos a seção mostrando a relação entre os operadores ortogonais e as matrizes ortogonais.

Sejam dados um espaço vetorial, com uma base $\alpha = \{v_1, \ldots, v_n\}$, e uma matriz quadrada $A = [a_{ij}]$ de ordem n. Podemos, como feito na Seção 1 do Capítulo 6 para $\mathbb{R}^n$ e a base canônica, associar à matriz A um operador linear T_A, definido como segue:

$$T_A(v) = (a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n, \ldots, a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n),$$

onde $x_1, \ldots, x_n$ são as coordenadas de v relativamente à base α, ou seja

$$v = x_1v_1 + \cdots + x_nv_n.$$

Proposição 7.4.8. *Sejam α uma base ortonormal de V e T um operador linear em V. Seja $A \in \mathcal{M}(n,n)$.*

(i) *T é ortogonal se, e somente se, $[T]_\alpha^\alpha$ é ortogonal.*

(ii) *A é ortogonal se, e somente se, T_A é ortogonal.*

Demonstração Provaremos apenas o item (i), deixando a demonstração do item (ii) para o leitor (veja Problema 4.10).

De fato, se $\alpha = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ é uma base ortonormal de V e se T é um operador ortogonal em V então, pelo Teorema 7.4.5, $\beta = \{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é uma base ortonormal de V. Se $[T]_\alpha^\alpha = [a_{ij}]$, então, para todo i, com $1 \leq i \leq n$, temos

$$T(v_i) = a_{1i}\, v_1 + a_{2i}\, v_2 + \cdots + a_{ni}\, v_n.$$

Como β é ortonormal, segue que $\langle T(v_i), T(v_j)\rangle = 0$ se $i{\neq}j$ e $\langle T(v_i), T(v_i)\rangle{=}1$. Por outro lado, sendo α é ortogonal, temos que

$$\begin{aligned}
&a_{1i}a_{1j} + a_{2i}a_{2j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \\
&\langle a_{1i}\, v_1 + a_{2i}\, v_2 + \cdots + a_{ni}\, v_n,\ a_{1j}\, v_1 + a_{2j}\, v_2 + \cdots + a_{nj}\, v_n\rangle = \\
&\langle T(v_i), T(v_j)\rangle = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j, \end{cases}
\end{aligned} \tag{8}$$

mostrando assim que as colunas de $[T]_\alpha^\alpha$ formam um conjunto ortonormal em $\mathbb{R}^n$. Pela Proposição 7.4.6, $[T]_\alpha^\alpha$ é uma matriz ortogonal.

Suponhamos agora que $[T]_\alpha^\alpha = [a_{ij}]$ é uma matriz ortogonal. Para mostrarmos que T é ortogonal basta provarmos, pelo Teorema 7.4.5, que o conjunto $\{T(v_1), T(v_2), \ldots, T(v_n)\}$ é ortonormal em V. Mas isto pode ser facilmente verificado a partir de (8). ■

Problemas

4.1* Sejam S e T operadores lineares num espaço com produto interno de dimensão finita e seja $k \in \mathbb{R}$. Prove que:

(a) $(S+T)^* = S^* + T^*$; (b) $(kT)^* = kT^*$;

(c) $(ST)^* = T^*S^*$; (d) $(T^*)^* = T$.

4.2 Considere o funcional linear $\phi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por $\phi(x, y, z) = x + 4y - 5z$. Encontre o vetor v em $\mathbb{R}^3$ tal que $\phi = \phi_v$.

4.3 Seja $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por $T(x, y, z) = (2x + 2y, 3x - 4z, y)$. Encontre $T^*(x, y, z)$.

4.4 Mostre que a função

$$\begin{array}{ccc} V & \to & (V, \mathbb{R}) \\ v & \mapsto & \phi_v \end{array}$$

onde $\phi_v(u) = \langle u, v\rangle$, para todo $u \in V$, é um isomorfismo de espaços vetoriais. Mostre com isto que podemos transportar o produto interno de V para $(V, \mathbb{R})$, do seguinte modo:

$$\langle \phi_u, \phi_v\rangle = \langle u, v\rangle.$$

4.5 Demonstre o Lema 7.4.4.

4.6 Dentre os seguintes operadores lineares, verificar quais são ortogonais:

(a) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (-y, -x)$;

(b) $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$;

(c) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (z, x, -y)$;

(d) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x, y\cos\theta + z \operatorname{sen}\theta, -y\operatorname{sen}\theta + z\cos\theta)$.

4.7* Encontre uma matriz ortogonal $[a_{ij}]$ de ordem 3 cuja primeira linha é dada por

$$a_{11} = \frac{1}{3}\,, \quad a_{12} = \frac{2}{3}\,, \quad \text{e} \quad a_{13} = \frac{2}{3}\cdot$$

4.8 Mostre que o produto de matrizes ortogonais é uma matriz ortogonal.

4.9 Construa uma matriz ortogonal $A = [a_{ij}]$ cuja primeira coluna seja:

(a) $a_{11} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}\,, \quad a_{21} = \dfrac{-1}{\sqrt{5}};$

(b) $a_{11} = \dfrac{1}{3}\,, \quad a_{21} = \dfrac{-2}{3} \quad \text{e} \quad a_{31} = \dfrac{-2}{3}\cdot$

4.10 Conclua a demonstração da Proposição 7.4.8.

Bibliografia

[1] H. P. Bueno, *Álgebra Linear, um segundo curso*, Coleção Textos Universitários, SBM, 2006.

[2] P. Halmos, *Teoria Ingênua dos Conjuntos*, Editora Ciência Moderna, 2001.

[3] A. Hefez e M. L. T. Villela, *Códigos Corretores de Erros*, Coleção Matemática e Aplicações, IMPA, 2008.

[4] A. Hefez e M. L. T. Villela, *Números Complexos e Polinômios*, Coleção PROFMAT, SBM, 2012.

[5] V. J. Katz, *A History of Mathematics - an Introduction*, HarperCollins College Publishers, 1993.

[6] S. Lang, *Introduction to Linear Algebra*, 2nd edition, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1986.

[7] E.L. Lima, *Álgebra Linear*, 3ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 1998.

[8] E.L. Lima, *Geometria Analítica e Álgebra Linear*, 2ª edição, Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2010.