1) Mostre que: $\mathcal{L}(V) = \{T: V \to V \,/\, T \text{ é linear}\}$, $\mathcal{L}(V)$ é um espaço vetorial.

Para ser um espaço vetorial deve possuir as seguintes propriedades:

i) um conjunto não vazio V, cujos elementos são chamados vetores; com isso $\mathcal{L}(V)$ é um conjunto não vazio, de cada elemento temos um correspondente.

ii) um corpo K de escalares

iii) uma operação, adição vetorial, que associa dois vetores v_1, v_2 em V ao vetor $(v_1 + v_2)$ em V.

iv) uma operação, multiplicação por escalar, que associa um escalar $\alpha \in K$ e um vetor v ao vetor αv em V.

v) satisfazem as propriedades: $\forall v_1, v_2, v_3 \in V$ e $\forall \alpha, \beta \in K$:

1 - $v_1 + v_2 = v_2 + v_1$
2 - $v_1 + (v_2 + v_3) = v_1 + (v_2 + v_3)$
3. existe um (único) vetor 0 em V, nulo, tal que $v + 0 = v$
4 - existe um (único) vetor $-v$ em V tal que $v + (-v) = 0$
5 - $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

6 - $\alpha(v_1+v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2$
7 - $(\alpha+\beta)v = \alpha v + \beta v$
8 - $1 . v = v$

Tomamos $L(V)$ em $\mathbb{R}$, o mesmo vale para $\mathbb{R}^2$, etc.

Temos que $L(V)$ é um operador linear, porque faz uma transformação de V em V.

2) Calcule, se possível, a dimensão de $L(V)$.
Lembrando que: $\dim V < \infty$ e V esta definido sobre um corpo K ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Tomamos $L(V)$ em $\mathbb{R}$, então a $\dim V = 1$.
Se $L(V)$ esta em $\mathbb{R}^2$, então a $\dim V = 2$.
Repetimos o processo até $\mathbb{R}^N$, teremos que $\dim V = N$, e $N < \infty$
Pode-se trabalhar com $L(V)$ até $\mathbb{R}^{T<\infty}$ e teremos que $\dim V = T < \infty$, sendo $N < T < \infty$.
Pelo teorema 21: qualquer base de um espaço vetorial de dimensão finita possui um mesmo número de vetores!

3) Sobre (1) e (2) quando $V = \mathbb{Q}[x]$, exemplo de uma base:
V é $\{1, x, x^2, x^3, \ldots\}$

$L(V) = L(V, V)$ pega vetores de V e leva em V, por transformações lineares.

Temos que $V = \mathbb{Q}[x]$ é uma base geradora, mas a dim V não é necessariamente infinito.

Somente uma base finita possui dimensão finita.

4) V_λ é um sub-espaço vetorial do V, (Vale para dim $V = +\infty$).

Temos que V_λ é um auto-espaço gerado pelos auto-valores da transformação linear.
Então este auto-espaço possui o elemento nulo p/ $T(0) = 0$ e também dado dois elementos: u e v, temos que $(u + v)$ pertence ao auto-espaço.
Assim mesmo p/ dim $V = +\infty$, temos que as duas propriedades são satisfeitas.