Produto Interno

Motivação:

- introduzir noção de comprimento;
- introduzir noção de ângulo
  (em particular, ortogonalidade);
- complemento ortogonal;
- projeções;
- mínimos quadrados.

Produto Interno

Motivação:

- introduzir noção de comprimento;
- introduzir noção de ângulo
  (em particular, ortogonalidade);
- complemento ortogonal;
- projeções;
- mínimos quadrados.

Produto Interno

Motivação:

- introduzir noção de comprimento;
- introduzir noção de ângulo
  (em particular, ortogonalidade);
- complemento ortogonal;
- projeções;
- mínimos quadrados.

Produto Interno

Motivação:

- introduzir noção de comprimento;
- introduzir noção de ângulo
  (em particular, ortogonalidade);
- complemento ortogonal;
- projeções;
- mínimos quadrados.

Produto Interno

Motivação:

- introduzir noção de comprimento;
- introduzir noção de ângulo
  (em particular, ortogonalidade);
- complemento ortogonal;
- projeções;
- mínimos quadrados.

Produto Interno

Motivação:

- introduzir noção de comprimento;
- introduzir noção de ângulo
  (em particular, ortogonalidade);
- complemento ortogonal;
- projeções;
- mínimos quadrados.

Produto Interno

Motivação:

- introduzir noção de comprimento;
- introduzir noção de ângulo
  (em particular, ortogonalidade);
- complemento ortogonal;
- projeções;
- mínimos quadrados.

Norma em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Norma (comprimento) de $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Norma (comprimento) de $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Norma em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Norma (comprimento) de $\mathbf{v} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Norma (comprimento) de $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$:

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

(Cosseno de) Ângulo em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Lei dos Cossenos:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta + \|\mathbf{v}\|^2.$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n u_i^2 - 2\sum_{i=1}^n u_i v_i + \sum_{i=1}^n v_i^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\sum_{i=1}^n u_i v_i + \|\mathbf{v}\|^2
\end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

(Cosseno de) Ângulo em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Lei dos Cossenos:

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta + \|\mathbf{v}\|^2.$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= \textstyle\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2 \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n u_i^2 - 2\sum_{i=1}^n u_i v_i + \sum_{i=1}^n v_i^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\textstyle\sum_{i=1}^n u_i v_i + \|\mathbf{v}\|^2
\end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

(Cosseno de) Ângulo em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Lei dos Cossenos:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| \cos\theta + \|\mathbf{v}\|^2.$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2 &= \textstyle\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2 \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^n u_i^2 - 2\sum_{i=1}^n u_i v_i + \sum_{i=1}^n v_i^2 \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\textstyle\sum_{i=1}^n u_i v_i + \|\mathbf{v}\|^2 \end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

(Cosseno de) Ângulo em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Lei dos Cossenos:

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta + \|\mathbf{v}\|^2.$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= \sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n u_i^2 - 2\sum_{i=1}^n u_i v_i + \sum_{i=1}^n v_i^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\sum_{i=1}^n u_i v_i + \|\mathbf{v}\|^2
\end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

(Cosseno de) Ângulo em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Lei dos Cossenos:

$$\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 - 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|\cos\theta + \|\mathbf{v}\|^2.$$

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}-\mathbf{v}\|^2 &= \textstyle\sum_{i=1}^n (u_i - v_i)^2 \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n u_i^2 - 2\sum_{i=1}^n u_i v_i + \sum_{i=1}^n v_i^2 \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 - 2\textstyle\sum_{i=1}^n u_i v_i + \|\mathbf{v}\|^2
\end{aligned}$$

$$\cos\theta = \frac{\sum_{i=1}^n u_i v_i}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Produto Interno (Canônico) em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Definição (produto interno em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$)

Prod. interno (ou escalar) em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Produto Interno (Canônico) em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Definição (produto interno em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$)

Prod. interno (ou escalar) em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Produto Interno (Canônico) em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Definição (produto interno em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$)

Prod. interno (ou escalar) em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i.$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Produto Interno (Canônico) em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Definição (produto interno em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$)

Prod. interno (ou escalar) em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$.

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v}$$

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle}$$

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Propriedades do PI Canônico em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

- simetria

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

- bilinearidade

$$\langle \alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

$$\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

- positividade

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0 \ \ \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

Propriedades do PI Canônico em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

- simetria

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

- bilinearidade

$$\langle \alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

$$\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

- positividade

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0 \quad \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

Propriedades do PI Canônico em $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

- simetria

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

- bilinearidade

$$\langle \alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

$$\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$$
$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

- positividade

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0 \;\; \forall \mathbf{0} \neq \mathbf{u} \in \mathbb{R}^2 \text{ ou } \mathbb{R}^3$$

Definição de Produto Interno

Definição (produto interno)

Espaço com PI é um espaço vetorial V munido de uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz às propriedades:

- *simetria*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

- *bilinearidade*

$$\langle \alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$$

- *positividade*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$$

Definição de Produto Interno

Definição (produto interno)

Espaço com PI é um espaço vetorial V munido de uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz às propriedades:

- *simetria*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

- *bilinearidade*

$$\langle \alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$$

- *positividade*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$$

Definição de Produto Interno

Definição (produto interno)

Espaço com PI é um espaço vetorial V munido de uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz às propriedades:

- *simetria*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

- *bilinearidade*

$$\langle \alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$$

- *positividade*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$$

Definição de Produto Interno

Definição (produto interno)

Espaço com PI é um espaço vetorial V munido de uma função $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ que satisfaz às propriedades:

- *simetria*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$$

- *bilinearidade*

$$\langle \alpha \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v} \rangle$$

$$\langle \mathbf{u}, \alpha \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \rangle = \alpha \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle$$

- *positividade*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle > 0$$

Exemplos

- Produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Outro produto interno em $\mathbb{R}^2$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

Bilinear, simétrico.

$$\left.\begin{array}{l} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 7u_1^2 + 4u_1 u_2 + 7u_2^2 \\ 2ab \geq -a^2 - b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 5u_1^2 + 5u_2^2 > 0$$

Exemplos

- Produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Outro produto interno em $\mathbb{R}^2$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

Bilinear, simétrico.

$$\left.\begin{array}{l} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 7u_1^2 + 4u_1 u_2 + 7u_2^2 \\ 2ab \geq -a^2 - b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 5u_1^2 + 5u_2^2 > 0$$

Exemplos

- Produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Outro produto interno em $\mathbb{R}^2$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

Bilinear, simétrico.

$$\left.\begin{array}{l} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 7u_1^2 + 4u_1u_2 + 7u_2^2 \\ 2ab \geq -a^2 - b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 5u_1^2 + 5u_2^2 > 0$$

Exemplos

- Produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Outro produto interno em $\mathbb{R}^2$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

Bilinear, simétrico.

$$\left.\begin{array}{l} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 7u_1^2 + 4u_1 u_2 + 7u_2^2 \\ 2ab \geq -a^2 - b^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 5u_1^2 + 5u_2^2 > 0$$

Exemplos

- Produto interno canônico de $\mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

- Outro produto interno em $\mathbb{R}^2$

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{u}^T \begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

Bilinear, simétrico.

$$\left. \begin{array}{l} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 7u_1^2 + 4u_1 u_2 + 7u_2^2 \\ 2ab \geq -a^2 - b^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq 5u_1^2 + 5u_2^2 > 0$$

Mais Exemplos

- Produto interno em um espaço de funções

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{-1}^{1} \mathbf{u}(t)\mathbf{v}(t)dt$$

Norma de um Espaço com PI

Definição (norma)

Se $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *é espaço com produto interno, define-se, para* $\mathbf{v} \in V$*,*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Se $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *é espaço com produto interno e* $\| \cdot \|$ *é definida como acima, vale a desigualdade*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Norma de um Espaço com PI

Definição (norma)

Se $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *é espaço com produto interno, define-se, para* $\mathbf{v} \in V$*,*

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}.$$

Teorema (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Se $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *é espaço com produto interno e* $\| \cdot \|$ *é definida como acima, vale a desigualdade*

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\| \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V.$$

Prova de Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
0 \le \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Temos $at^2 + bt + c \ge 0 \ \ \forall t$. Minimizando, obtemos

$$
-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \ge 0.
$$

Como $a > 0$, temos $b^2 \le 4ac$, i.e., $(2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \le 4\|\mathbf{u}\|^2\|\mathbf{v}\|^2$.

Portanto, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \le \|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|$.

Prova de Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
0 \le \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Temos $at^2 + bt + c \ge 0 \ \forall t$. Minimizando, obtemos

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \ge 0.$$

Como $a > 0$, temos $b^2 \le 4ac$, i.e., $(2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \le 4\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$.

Portanto, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \le \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.

Prova de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} 0 \le \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Temos $at^2 + bt + c \ge 0 \ \forall t$. Minimizando, obtemos

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \ge 0.$$

Como $a > 0$, temos $b^2 \le 4ac$, i.e., $(2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \le 4\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$.

Portanto, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \le \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.

Prova de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} 0 \le \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Temos $at^2 + bt + c \ge 0 \;\; \forall t$. Minimizando, obtemos

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \ge 0.$$

Como $a > 0$, temos $b^2 \le 4ac$, i.e., $(2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \le 4\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$.

Portanto, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \le \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.

Prova de Cauchy-Schwarz

$$\begin{aligned} 0 \leq \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v} \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\ &= \|\mathbf{u}\|^2 + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Temos $at^2 + bt + c \geq 0 \ \ \forall t$. Minimizando, obtemos

$$-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq 0.$$

Como $a > 0$, temos $b^2 \leq 4ac$, i.e., $(2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \leq 4\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$.

Portanto, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.

Prova de Cauchy-Schwarz

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|\mathbf{u} + t\mathbf{v}\|^2 &= \langle \mathbf{u} + t\mathbf{v}, \mathbf{u} + t\mathbf{v} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|^2 + 2t \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + t^2 \|\mathbf{v}\|^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Temos $at^2 + bt + c \geq 0 \ \forall t$. Minimizando, obtemos

$$
-\frac{b^2 - 4ac}{4a} \geq 0.
$$

Como $a > 0$, temos $b^2 \leq 4ac$, i.e., $(2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle)^2 \leq 4\|\mathbf{u}\|^2 \|\mathbf{v}\|^2$.

Portanto, $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$.

Propriedades da Norma

Propriedades da norma:

- $\|\mathbf{0}\| = 0$
- $\|\mathbf{v}\| > 0 \quad \forall\, \mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$
- $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V$
- $\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
  (Desigualdade Triangular)

De fato,

$$\|\mathbf{u}+\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Propriedades da Norma

Propriedades da norma:

- $\|\mathbf{0}\| = 0$
- $\|\mathbf{v}\| > 0 \quad \forall\, \mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$
- $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V$
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
  (Desigualdade Triangular)

De fato,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Propriedades da Norma

Propriedades da norma:

- $\|\mathbf{0}\| = 0$
- $\|\mathbf{v}\| > 0 \quad \forall\, \mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$
- $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V$
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
  (Desigualdade Triangular)

De fato,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Propriedades da Norma

Propriedades da norma:

- $\|\mathbf{0}\| = 0$
- $\|\mathbf{v}\| > 0 \quad \forall\, \mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$
- $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V$
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
  (Desigualdade Triangular)

De fato,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Propriedades da Norma

Propriedades da norma:

- $\|\mathbf{0}\| = 0$
- $\|\mathbf{v}\| > 0 \quad \forall\, \mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$
- $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V$
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
  (Desigualdade Triangular)

De fato,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Propriedades da Norma

Propriedades da norma:

- $\|\mathbf{0}\| = 0$
- $\|\mathbf{v}\| > 0 \quad \forall\, \mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$
- $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall\, \mathbf{v} \in V$
- $\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\| \leq \|\mathbf{u}\| + \|\mathbf{v}\| \quad \forall\, \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$
  (Desigualdade Triangular)

De fato,

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 \leq \|\mathbf{u}\|^2 + 2\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{v}\|^2.$$

Ortogonalidade

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$ $$\left|\frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}\right| \leq 1$$

Definição (ângulo entre vetores)

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|}$$

Definição (vetores ortogonais)

Diz-se que $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são ortogonais se* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$.

Observação

$\mathbf{0}$ *é ortogonal a qualquer vetor.*

Ortogonalidade

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$ $\left|\dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}\right| \leq 1$

Definição (ângulo entre vetores)

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Definição (vetores ortogonais)

Diz-se que $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são ortogonais se* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Observação

$\mathbf{0}$ *é ortogonal a qualquer vetor.*

Ortogonalidade

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow$ $\left|\dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}\right| \leq 1$

Definição (ângulo entre vetores)

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|}$$

Definição (vetores ortogonais)

Diz-se que $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são ortogonais se* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$*.*

Observação

$\mathbf{0}$ *é ortogonal a qualquer vetor.*

Ortogonalidade

Cauchy-Schwarz $\Rightarrow \left| \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|} \right| \leq 1$

Definição (ângulo entre vetores)

$$\cos\theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

Definição (vetores ortogonais)

Diz-se que $\mathbf{u}$ *e* $\mathbf{v}$ *são ortogonais se* $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$.

Observação

$\mathbf{0}$ *é ortogonal a qualquer vetor.*

Conjunto Ortonormal

Definição (vetor unitário)

$\hat{\mathbf{v}}$ é dito unitário se $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$.

Observação (normalização)

Se $\mathbf{v}$ é não-nulo, $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ é unitário.

Definição (conjunto ortogonal)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ é ortogonal se $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \ \ \forall i \neq j$.

Definição (conjunto ortonormal)

Um conjunto ortonormal é um conjunto ortogonal de vetores unitários.

Conjunto Ortonormal

Definição (vetor unitário)

$\hat{\mathbf{v}}$ *é dito unitário se* $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$.

Observação (normalização)

Se $\mathbf{v}$ *é não-nulo,* $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ *é unitário.*

Definição (conjunto ortogonal)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é ortogonal se* $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \ \ \forall i \neq j$.

Definição (conjunto ortonormal)

Um conjunto ortonormal é um conjunto ortogonal de vetores unitários.

Conjunto Ortonormal

Definição (vetor unitário)

$\hat{\mathbf{v}}$ *é dito unitário se* $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$.

Observação (normalização)

Se $\mathbf{v}$ *é não-nulo,* $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ *é unitário.*

Definição (conjunto ortogonal)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é ortogonal se* $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \ \ \forall i \neq j$.

Definição (conjunto ortonormal)

Um conjunto ortonormal é um conjunto ortogonal de vetores unitários.

Conjunto Ortonormal

Definição (vetor unitário)

$\hat{\mathbf{v}}$ *é dito unitário se* $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$.

Observação (normalização)

Se $\mathbf{v}$ *é não-nulo,* $\hat{\mathbf{v}} = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$ *é unitário.*

Definição (conjunto ortogonal)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é ortogonal se* $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0 \ \ \forall i \neq j$.

Definição (conjunto ortonormal)

Um conjunto ortonormal é um conjunto ortogonal de vetores unitários.

Conjunto Ortonormal

Observação (conjunto ortonormal)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é ortonormal s.s.s.* $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \;\; \forall i, j$.

Teorema

Um conjunto ortogonal de vetores não nulos é sempre LI.

Corolário

Um conjunto ortonormal é sempre LI.

Conjunto Ortonormal

Observação (conjunto ortonormal)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é ortonormal s.s.s.* $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \ \ \forall i, j$.

Teorema

Um conjunto ortogonal de vetores não nulos é sempre LI.

Corolário

Um conjunto ortonormal é sempre LI.

Conjunto Ortonormal

Observação (conjunto ortonormal)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *é ortonormal s.s.s.* $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \delta_{ij} \;\; \forall i, j$.

Teorema

Um conjunto ortogonal de vetores não nulos é sempre LI.

Corolário

Um conjunto ortonormal é sempre LI.

Conjunto Ortonormal

Prova (do teorema)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *ortogonal.* Então

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_j \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2 = 0 \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j \quad (\textit{já que } \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}.)$$

Conjunto Ortonormal

Prova (do teorema)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *ortogonal. Então*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_j \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2 = 0 \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j \quad (\textit{já que } \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}.)$$

Conjunto Ortonormal

Prova (do teorema)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *ortogonal. Então*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_j \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2 = 0 \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j \quad (\text{já que } \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}.)$$

Conjunto Ortonormal

Prova (do teorema)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *ortogonal. Então*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_j \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2 = 0 \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j \quad (\textit{já que } \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}.)$$

Conjunto Ortonormal

Prova (do teorema)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *ortogonal. Então*

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_j \rangle$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2 = 0 \quad \forall j$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j \quad (\textit{já que } \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}.)$$

Conjunto Ortonormal

Prova (do teorema)

$\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ *ortogonal. Então*

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0} \quad &\Rightarrow \quad \left\langle \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_j \rangle \\
&\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2 = 0 \quad \forall j \\
&\Rightarrow \quad \alpha_j = 0 \quad \forall j \quad (\textit{já que } \mathbf{v}_j \neq \mathbf{0}.)
\end{aligned}
$$

Coordenadas em Base Ortogonal

$\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal, $\mathbf{u}$ qualquer.

$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$.

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2$.

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \quad \forall j.$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortogonal

$\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal, $\mathbf{u}$ qualquer.

$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$.

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2$.

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \quad \forall j.$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortogonal

$\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal, $\mathbf{u}$ qualquer.

$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$.

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2$.

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \quad \forall j.$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortogonal

$\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal, $\mathbf{u}$ qualquer.

$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$.

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2$.

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \quad \forall j.$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortogonal

$\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal, $\mathbf{u}$ qualquer.

$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$.

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2$.

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \quad \forall j.$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortogonal

$\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal, $\mathbf{u}$ qualquer.

$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$.

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2$.

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \quad \forall j.$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortogonal

$\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal, $\mathbf{u}$ qualquer.

$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$.

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2$.

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \quad \forall j.$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortogonal

$\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal, $\mathbf{u}$ qualquer.

$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$.

$\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2$.

$$\alpha_j = \frac{\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \right\rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \quad \forall j.$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \right\rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \dfrac{\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \right\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\left\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \right\rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortogonal

$\beta = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ base ortogonal, $\mathbf{u}$ qualquer.

$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i$.

$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = \alpha_j \|\mathbf{v}_j\|^2$.

$$\alpha_j = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_j \rangle}{\|\mathbf{v}_j\|^2} \quad \forall j.$$

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \\ \vdots \\ \dfrac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2} \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortonormal

$\beta = \{\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_n\}$ base ortonormal, $\mathbf{u}$ qualquer.

Como $\|\hat{\mathbf{v}}_i\|^2 = 1 \quad \forall i$,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_i \rangle \hat{\mathbf{v}}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortonormal

$\beta = \{\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_n\}$ base ortonormal, **u** qualquer.

Como $\|\hat{\mathbf{v}}_i\|^2 = 1 \quad \forall i$,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_i \rangle \, \hat{\mathbf{v}}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortonormal

$\beta = \{\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_n\}$ base ortonormal, **u** qualquer.

Como $\|\hat{\mathbf{v}}_i\|^2 = 1 \quad \forall i$,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_i \rangle \hat{\mathbf{v}}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortonormal

$\beta = \{\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_n\}$ base ortonormal, $\mathbf{u}$ qualquer.

Como $\|\hat{\mathbf{v}}_i\|^2 = 1 \quad \forall i$,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_i \rangle \hat{\mathbf{v}}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Coordenadas em Base Ortonormal

$\beta = \{\hat{\mathbf{v}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{v}}_n\}$ base ortonormal, $\mathbf{u}$ qualquer.

Como $\|\hat{\mathbf{v}}_i\|^2 = 1 \quad \forall i$,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^{n} \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_i \rangle \hat{\mathbf{v}}_i, \qquad [\mathbf{u}]_\beta = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{v}}_n \rangle \end{bmatrix}.$$

Processo de Gram-Schmidt

A partir de uma base qualquer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ de um subespaço H, queremos construir uma base **ortogonal** $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ para este subspaço.

Podemos exigir que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 + \alpha \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 + \beta \mathbf{v}_1 + \gamma \mathbf{v}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p + \ldots .
\end{aligned}$$

Desta forma, $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle \quad \forall k.$

Processo de Gram-Schmidt

A partir de uma base qualquer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ de um subespaço H, queremos construir uma base **ortogonal** $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ para este subspaço.

Podemos exigir que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 + \alpha \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 + \beta \mathbf{v}_1 + \gamma \mathbf{v}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p + \ldots \ .
\end{aligned}$$

Desta forma, $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle \quad \forall k$.

Processo de Gram-Schmidt

A partir de uma base qualquer $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_p\}$ de um subespaço H, queremos construir uma base **ortogonal** $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ para este subspaço.

Podemos exigir que:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 + \alpha \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 + \beta \mathbf{v}_1 + \gamma \mathbf{v}_2 \\ \vdots &= \vdots \\ \mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p + \ldots \, . \end{aligned}$$

Desta forma, $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle \quad \forall k.$

Processo de Gram-Schmidt

Como $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, podemos reescrever:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p + \ldots\ .
\end{aligned}$$

Como calcular $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, $\ldots$? Ortogonalidade!

Processo de Gram-Schmidt

Como $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, podemos reescrever:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p + \ldots \; .
\end{aligned}$$

Como calcular $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, ... ? Ortogonalidade!

Processo de Gram-Schmidt

Como $\langle \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, podemos reescrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \vdots &= \vdots \\ \mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p + \ldots \,. \end{aligned}$$

Como calcular $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\beta}$, $\tilde{\gamma}$, ... ? Ortogonalidade!

Processo de Gram-Schmidt

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\alpha} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\beta} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle + \tilde{\gamma} \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\gamma} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}$$

Processo de Gram-Schmidt

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\alpha} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\beta} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle + \tilde{\gamma} \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}$$

Processo de Gram-Schmidt

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\alpha} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\beta} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle + \tilde{\gamma} \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\gamma} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}$$

Processo de Gram-Schmidt

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\alpha} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\beta} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle + \tilde{\gamma} \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \tilde{\gamma} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}$$

Processo de Gram-Schmidt

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\alpha} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\beta} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle + \tilde{\gamma} \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\gamma} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}$$

Processo de Gram-Schmidt

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\alpha}\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\beta}\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0\end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle + \tilde{\gamma}\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\gamma} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}$$

Processo de Gram-Schmidt

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\alpha} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\beta} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle + \tilde{\gamma} \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\gamma} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}$$

Processo de Gram-Schmidt

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\alpha}\,\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\beta}\,\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c}\mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle + \tilde{\gamma}\,\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\gamma} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}$$

Processo de Gram-Schmidt

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2 + \tilde{\alpha}\mathbf{u}_1 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\alpha} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\alpha} = -\frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle + \tilde{\beta} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\beta} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}$$

$$\left.\begin{array}{c} \mathbf{u}_3 = \mathbf{v}_3 + \tilde{\beta}\mathbf{u}_1 + \tilde{\gamma}\mathbf{u}_2 \\ \langle \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \\ \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle + \tilde{\gamma} \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{\gamma} = -\frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}$$

Processo de Gram-Schmidt

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1 \\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 \\
\vdots &= \vdots \\
\mathbf{u}_p &= \mathbf{v}_p - \frac{\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_2 \rangle}{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_2 \rangle}\mathbf{u}_2 \ldots - \frac{\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_{p-1} \rangle}{\langle \mathbf{u}_{p-1}, \mathbf{u}_{p-1} \rangle}\mathbf{u}_{p-1}
\end{aligned}
$$

Complemento Ortogonal

Definição (complemento ortogonal)

$H \subset V$ subespaço vetorial. O complemento ortogonal de H, denotado $H^{\perp}$, é o conjunto dos vetores de V ortogonais a todos os vetores de H,

$$H^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{u} \in H\}.$$

Observação

- *$H^{\perp}$ é subespaço.*
- *Se $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ é base de H, então*

$$H^{\perp} = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = 0 \ i = 1, \ldots, p\}.$$

Complemento Ortogonal

Definição (complemento ortogonal)

$H \subset V$ subespaço vetorial. O complemento ortogonal de H, denotado $H^\perp$, é o conjunto dos vetores de V ortogonais a todos os vetores de H,

$$H^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{u} \in H\}.$$

Observação

- *$H^\perp$ é subespaço.*
- *Se $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ é base de H, então*

$$H^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = 0 \ i = 1, \ldots, p\}.$$

Complemento Ortogonal

Definição (complemento ortogonal)

$H \subset V$ subespaço vetorial. O complemento ortogonal de H, denotado $H^\perp$, é o conjunto dos vetores de V ortogonais a todos os vetores de H,

$$H^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle = 0 \ \forall \mathbf{u} \in H\}.$$

Observação

- *$H^\perp$ é subespaço.*
- *Se $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ é base de H, então*

$$H^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle = 0 \ i = 1, \ldots, p\}.$$

Complemento Ortogonal

Lema

Sejam $\beta_H = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ *base ortogonal de* H *e* $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *uma extensão de* β_H *a uma base ortogonal de* V. *Então* $\beta_{H^\perp} = \{\mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *é base de* $H^\perp$.

Corolário

Se $H \subset V$ *com* $\dim(V) = n$ *e* $\dim(H) = p$, *então* $\dim(H^\perp) = n - p$.

Corolário

$(H^\perp)^\perp = H$

Complemento Ortogonal

Lema

Sejam $\beta_H = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ base ortogonal de H e $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ uma extensão de β_H a uma base ortogonal de V. Então $\beta_{H^\perp} = \{\mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ é base de $H^\perp$.

Corolário

Se $H \subset V$ com $\dim(V) = n$ e $\dim(H) = p$, então $\dim(H^\perp) = n - p$.

Corolário

$(H^\perp)^\perp = H$

Complemento Ortogonal

Lema

Sejam $\beta_H = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ *base ortogonal de* H *e* $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *uma extensão de* β_H *a uma base ortogonal de* V*. Então* $\beta_{H^\perp} = \{\mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *é base de* $H^\perp$*.*

Corolário

Se $H \subset V$ *com* $\dim(V) = n$ *e* $\dim(H) = p$*, então* $\dim(H^\perp) = n - p$*.*

Corolário

$(H^\perp)^\perp = H$

Complemento Ortogonal

Lema

Sejam $\beta_H = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ *base ortogonal de* H *e* $\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *uma extensão de* β_H *a uma base ortogonal de* V*. Então* $\beta_{H^\perp} = \{\mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *é base de* $H^\perp$*.*

Corolário

Se $H \subset V$ *com* $\dim(V) = n$ *e* $\dim(H) = p$*, então* $\dim(H^\perp) = n - p$*.*

Corolário

$(H^\perp)^\perp = H$

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y}\rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x}\rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x}\rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Relação entre $\mathrm{Nuc}(A)$ e $\mathrm{Im}(A^T)$

Sejam $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$,
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{v} \in \mathrm{Nuc}(A)$ e
$\mathbb{R}^n \ni \mathbf{y} = A^T\mathbf{x} \in \mathrm{Im}(A^T)$.

Então

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{v}^T\mathbf{y} = \mathbf{v}^T A^T \mathbf{x} = (A\mathbf{v})^T\mathbf{x} = \langle A\mathbf{v}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{x} \rangle = 0.$$

Qualquer vetor de $\mathrm{Nuc}(A)$ é ortogonal a qualquer vetor de $\mathrm{Im}(A^T)$. Além disso, $\dim(\mathrm{Nuc}(A)) + \dim(\mathrm{Im}(A^T)) = n$.
Portanto, $\mathrm{Nuc}(A)^\perp = \mathrm{Im}(A^T)$ e $\mathrm{Nuc}(A) = \mathrm{Im}(A^T)^\perp$.
Analogamente, $\mathrm{Nuc}(A^T)^\perp = \mathrm{Im}(A)$ e $\mathrm{Nuc}(A^T) = \mathrm{Im}(A)^\perp$.

Base para $H^\perp$

Seja $H = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$. Queremos base para $H^\perp$.

$$\mathbf{v} \in H^\perp \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v} = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\iff \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff A^T \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$H^\perp = \mathrm{Nuc}(A^T), \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$$

Base para $H^\perp$

Seja $H = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$. Queremos base para $H^\perp$.

$$\begin{aligned}
\mathbf{v} \in H^\perp \quad &\iff \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v} = 0, \quad i = 1, \ldots, m \\
&\iff \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
&\iff \quad A^T \mathbf{v} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

$$H^\perp = \mathrm{Nuc}(A^T), \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$$

Base para $H^\perp$

Seja $H = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$. Queremos base para $H^\perp$.

$$\mathbf{v} \in H^\perp \iff \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v} = 0, \quad i = 1, \ldots, m$$

$$\iff \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff A^T \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

$$H^\perp = \mathrm{Nuc}(A^T), \quad \text{onde } A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$$

Base para $H^\perp$

Seja $H = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$. Queremos base para $H^\perp$.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in H^\perp \quad &\iff \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v} = 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ &\iff \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \quad A^T \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$H^\perp = \mathrm{Nuc}(A^T), \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$$

Base para $H^\perp$

Seja $H = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$. Queremos base para $H^\perp$.

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \in H^\perp \quad &\iff \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v} = 0, \quad i = 1, \ldots, m \\ &\iff \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\iff \quad A^T \mathbf{v} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$H^\perp = \mathrm{Nuc}(A^T), \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix}$$

Base para $H^\perp$

Seja $H = \langle \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \rangle$. Queremos base para $H^\perp$.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} \in H^\perp \quad & \iff \quad \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}_i \rangle = \mathbf{v}^T \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{v} = 0, \quad i = 1, \dots, m \\
& \iff \quad \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
& \iff \quad A^T \mathbf{v} = \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

$$
H^\perp = \mathrm{Nuc}(A^T), \quad \text{onde} \quad A = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \cdots & \mathbf{v}_m \end{bmatrix}
$$

Notação

V espaço vetorial, $\dim(V) = n$

$H \subset V$ subespaço vetorial, $\dim(H) = p$

$\gamma = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ base ortogonal de H

$\beta = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ base ortogonal de V

Observação

$\delta = \{\mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ *é base ortogonal de* $H^\perp$.

Notação

V espaço vetorial, $\dim(V) = n$

$H \subset V$ subespaço vetorial, $\dim(H) = p$

$\gamma = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ base ortogonal de H

$\beta = \left\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\right\}$ base ortogonal de V

Observação

$\delta = \left\{\mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\right\}$ *é base ortogonal de* $H^{\perp}$.

Notação

V espaço vetorial, $\dim(V) = n$

$H \subset V$ subespaço vetorial, $\dim(H) = p$

$\gamma = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ base ortogonal de H

$\beta = \left\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\right\}$ base ortogonal de V

Observação

$\delta = \left\{\mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\right\}$ *é base ortogonal de* $H^\perp$.

Notação

V espaço vetorial, $\dim(V) = n$

$H \subset V$ subespaço vetorial, $\dim(H) = p$

$\gamma = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ base ortogonal de H

$\beta = \left\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\right\}$ base ortogonal de V

Observação

$\delta = \left\{\mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\right\}$ *é base ortogonal de* $H^{\perp}$.

Notação

V espaço vetorial, $\dim(V) = n$

$H \subset V$ subespaço vetorial, $\dim(H) = p$

$\gamma = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ base ortogonal de H

$\beta = \left\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p, \mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\right\}$ base ortogonal de V

Observação

$\delta = \left\{\mathbf{u}_{p+1}, \ldots, \mathbf{u}_n\right\}$ *é base ortogonal de* $H^\perp$.

Teorema de Pitágoras

Teorema (de Pitágoras)

Sejam $\mathbf{v}_H \in H$ *e* $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$. *Então*

$$\|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2.$$

Prova

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 \\
= \; & \langle \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \; & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H \rangle}_{=0} + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \; & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \; & \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2
\end{aligned}$$

Teorema de Pitágoras

Teorema (de Pitágoras)

Sejam $\mathbf{v}_H \in H$ *e* $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$. *Então*

$$\|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2.$$

Prova

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H \rangle}_{=0} + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2
\end{aligned}$$

Teorema de Pitágoras

Teorema (de Pitágoras)

Sejam $\mathbf{v}_H \in H$ *e* $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$*. Então*

$$\|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2.$$

Prova

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H \rangle}_{=0} + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2
\end{aligned}$$

Teorema de Pitágoras

Teorema (de Pitágoras)

Sejam $\mathbf{v}_H \in H$ *e* $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$. *Então*

$$\|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2.$$

Prova

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H \rangle}_{=0} + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2
\end{aligned}$$

Teorema de Pitágoras

Teorema (de Pitágoras)

Sejam $\mathbf{v}_H \in H$ *e* $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$. *Então*

$$\|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2.$$

Prova

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H \rangle}_{=0} + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2
\end{aligned}$$

Teorema de Pitágoras

Teorema (de Pitágoras)

Sejam $\mathbf{v}_H \in H$ *e* $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$. *Então*

$$\|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2.$$

Prova

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H \rangle}_{=0} + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2
\end{aligned}$$

Teorema de Pitágoras

Teorema (de Pitágoras)

Sejam $\mathbf{v}_H \in H$ *e* $\mathbf{v}_{H^\perp} \in H^\perp$. *Então*

$$\|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2.$$

Prova

$$\begin{aligned}
& \|\mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}\|^2 \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \underbrace{\langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_H \rangle}_{=0} + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \langle \mathbf{v}_H, \mathbf{v}_H \rangle + \langle \mathbf{v}_{H^\perp}, \mathbf{v}_{H^\perp} \rangle \\
= \quad & \|\mathbf{v}_H\|^2 + \|\mathbf{v}_{H^\perp}\|^2
\end{aligned}$$

Decomposição Ortogonal

Teorema

Dado $\mathbf{v} \in V$*, existe uma única decomposição* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$.

Prova

Existência: $\mathbf{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H^\perp}$

Unicidade: Suponha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} = \mathbf{w}_H + \mathbf{w}_{H^\perp}$. *Então*

$$\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{w}_H}_{\in H} = \underbrace{\mathbf{w}_{H^\perp} - \mathbf{v}_{H^\perp}}_{\in H^\perp} \in H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}.$$

Decomposição Ortogonal

Teorema

Dado $\mathbf{v} \in V$*, existe uma única decomposição* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$.

Prova

Existência: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H^\perp}$

Unicidade: Suponha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} = \mathbf{w}_H + \mathbf{w}_{H^\perp}$. *Então*

$$\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{w}_H}_{\in H} = \underbrace{\mathbf{w}_{H^\perp} - \mathbf{v}_{H^\perp}}_{\in H^\perp} \in H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}.$$

Decomposição Ortogonal

Teorema

Dado $\mathbf{v} \in V$*, existe uma única decomposição* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$.

Prova

Existência: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H^\perp}$

Unicidade: Suponha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} = \mathbf{w}_H + \mathbf{w}_{H^\perp}$*. Então*

$$\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{w}_H}_{\in H} = \underbrace{\mathbf{w}_{H^\perp} - \mathbf{v}_{H^\perp}}_{\in H^\perp} \in H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}.$$

Decomposição Ortogonal

Teorema

Dado $\mathbf{v} \in V$*, existe uma única decomposição* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$.

Prova

Existência: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H^\perp}$

Unicidade: Suponha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} = \mathbf{w}_H + \mathbf{w}_{H^\perp}$. *Então*

$$\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{w}_H}_{\in H} = \underbrace{\mathbf{w}_{H^\perp} - \mathbf{v}_{H^\perp}}_{\in H^\perp} \in H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}.$$

Decomposição Ortogonal

Teorema

Dado $\mathbf{v} \in V$, *existe uma única decomposição* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$.

Prova

Existência: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H^\perp}$

Unicidade: Suponha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} = \mathbf{w}_H + \mathbf{w}_{H^\perp}$. *Então*

$$\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{w}_H}_{\in H} = \underbrace{\mathbf{w}_{H^\perp} - \mathbf{v}_{H^\perp}}_{\in H^\perp} \in H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}.$$

Decomposição Ortogonal

Teorema

Dado $\mathbf{v} \in V$, *existe uma única decomposição* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$.

Prova

Existência: $\mathbf{v} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H^\perp}$

Unicidade: Suponha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} = \mathbf{w}_H + \mathbf{w}_{H^\perp}$. *Então*

$$\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{w}_H}_{\in H} = \underbrace{\mathbf{w}_{H^\perp} - \mathbf{v}_{H^\perp}}_{\in H^\perp} \in H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}.$$

Decomposição Ortogonal

Teorema

Dado $\mathbf{v} \in V$, *existe uma única decomposição* $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp}$.

Prova

Existência: $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i = \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \alpha_i \mathbf{u}_i}_{\in H^\perp}$

Unicidade: Suponha $\mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} = \mathbf{w}_H + \mathbf{w}_{H^\perp}$. *Então*

$$\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{w}_H}_{\in H} = \underbrace{\mathbf{w}_{H^\perp} - \mathbf{v}_{H^\perp}}_{\in H^\perp} \in H \cap H^\perp = \{\mathbf{0}\}.$$

Projeção Ortogonal

Definição (projeção ortogonal)

Projeção ortogonal sobre H:

$$\begin{array}{rccl} P_H: & V & \rightarrow & H \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v}_H \text{ tal que } \mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \end{array}$$

Observação

Fica claro da definição que $\mathbf{v} = P_H\mathbf{v} + P_{H^\perp}\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$.
Portanto, $P_H + P_{H^\perp} = I$ *e*

$$P_{H^\perp} = I - P_H.$$

Projeção Ortogonal

Definição (projeção ortogonal)

Projeção ortogonal sobre H:

$$\begin{array}{cccl} P_H: & V & \longrightarrow & H \\ & \mathbf{v} & \longmapsto & \mathbf{v}_H \textit{ tal que } \mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \end{array}$$

Observação

Fica claro da definição que $\mathbf{v} = P_H\mathbf{v} + P_{H^\perp}\mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in V$. *Portanto,* $P_H + P_{H^\perp} = I$ *e*

$$P_{H^\perp} = I - P_H.$$

Projeção Ortogonal

Definição (projeção ortogonal)

Projeção ortogonal sobre H:

$$\begin{array}{rccl} P_H: & V & \rightarrow & H \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v}_H \textit{ tal que } \mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \end{array}$$

Observação

Fica claro da definição que $\mathbf{v} = P_H\mathbf{v} + P_{H^\perp}\mathbf{v} \ \ \forall \mathbf{v} \in V$.

Portanto, $P_H + P_{H^\perp} = I$ *e*

$$P_{H^\perp} = I - P_H.$$

Projeção Ortogonal

Definição (projeção ortogonal)

Projeção ortogonal sobre H:

$$\begin{array}{rccl} P_H : & V & \rightarrow & H \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v}_H \text{ tal que } \mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \end{array}$$

Observação

Fica claro da definição que $\mathbf{v} = P_H\mathbf{v} + P_{H^\perp}\mathbf{v} \ \ \forall \mathbf{v} \in V$*.*
Portanto, $P_H + P_{H^\perp} = I$ *e*

$$P_{H^\perp} = I - P_H.$$

Projeção Ortogonal

Definição (projeção ortogonal)

Projeção ortogonal sobre H:

$$\begin{array}{rccl} P_H: & V & \rightarrow & H \\ & \mathbf{v} & \mapsto & \mathbf{v}_H \text{ tal que } \mathbf{v} = \mathbf{v}_H + \mathbf{v}_{H^\perp} \end{array}$$

Observação

Fica claro da definição que $\mathbf{v} = P_H\mathbf{v} + P_{H^\perp}\mathbf{v} \ \ \forall \mathbf{v} \in V$.
Portanto, $P_H + P_{H^\perp} = I$ *e*

$$P_{H^\perp} = I - P_H.$$

Propriedades da Projeção Ortogonal

- P_H é linear
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H^\perp$, ou seja, $N(P_H) = H^\perp$
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H$
- A imagem de P_H é $\mathrm{Im}(P_H) = H$
- $P_H^2 = P_H$
- $P_H^T = P_H$

Propriedades da Projeção Ortogonal

- P_H é linear
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H^\perp$, ou seja, $N(P_H) = H^\perp$
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H$
- A imagem de P_H é $\mathrm{Im}(P_H) = H$
- $P_H^2 = P_H$
- $P_H^T = P_H$

Propriedades da Projeção Ortogonal

- P_H é linear
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H^\perp$, ou seja, $N(P_H) = H^\perp$
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H$
- A imagem de P_H é $\mathrm{Im}(P_H) = H$
- $P_H^2 = P_H$
- $P_H^T = P_H$

Propriedades da Projeção Ortogonal

- P_H é linear
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H^\perp$, ou seja, $N(P_H) = H^\perp$
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H$
- A imagem de P_H é $\mathrm{Im}(P_H) = H$
- $P_H^2 = P_H$
- $P_H^T = P_H$

Propriedades da Projeção Ortogonal

- P_H é linear
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H^\perp$, ou seja, $N(P_H) = H^\perp$
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H$
- A imagem de P_H é $\mathrm{Im}(P_H) = H$
- $P_H^2 = P_H$
- $P_H^T = P_H$

Propriedades da Projeção Ortogonal

- P_H é linear
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H^{\perp}$, ou seja, $N(P_H) = H^{\perp}$
- $P_H\mathbf{v} = \mathbf{v} \Leftrightarrow \mathbf{v} \in H$
- A imagem de P_H é $\mathrm{Im}(P_H) = H$
- $P_H^2 = P_H$
- $P_H^T = P_H$

Cálculo da Projeção Ortogonal

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i}_{\in H} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i}_{\in H^\perp}$$

$$P_H \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i$$

Cálculo da Projeção Ortogonal

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i}_{\in H} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i}_{\in H^\perp}$$

$$P_H \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i$$

Cálculo da Projeção Ortogonal

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i$$

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{p} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i}_{\in H} + \underbrace{\sum_{i=p+1}^{n} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i}_{\in H^{\perp}}$$

$$P_H \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} \mathbf{u}_i$$

Cálculo da Projeção Ortogonal

$$
\begin{aligned}
P_H\mathbf{v} &= \sum_{i=1}^{p} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_i \rangle \, \hat{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{v} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_p^T \mathbf{v} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_p^T \end{bmatrix} \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Cálculo da Projeção Ortogonal

$$P_H\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_i \rangle \, \hat{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{v} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_p^T \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_p^T \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

Cálculo da Projeção Ortogonal

$$P_H\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{p} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_i \rangle \, \hat{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{v} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_p^T \mathbf{v} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_p^T \end{bmatrix} \mathbf{v}$$

Cálculo da Projeção Ortogonal

$$
\begin{aligned}
P_H\mathbf{v} &= \sum_{i=1}^{p} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_i \rangle \, \hat{\mathbf{u}}_i = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_1 \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{v}, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T \mathbf{v} \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_p^T \mathbf{v} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1^T \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{u}}_p^T \end{bmatrix} \mathbf{v}
\end{aligned}
$$

Cálculo da Projeção Ortogonal

Lema

Seja $H = \langle \hat{\mathbf{u}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle$*, onde* $\{\hat{\mathbf{u}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_p\}$ *é ortonormal.*
Defina $Q = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix}$*. Então*

$$P_H = QQ^T.$$

Definição (matriz ortogonal)

*Uma matriz é ortogonal se suas colunas são orto**normais**.*

Observação

$Q_{m \times n}$ *é ortogonal s.s.s.* $Q^T Q = I_{n \times n}$.

Cálculo da Projeção Ortogonal

Lema

Seja $H = \langle \hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle$*, onde* $\{\hat{\mathbf{u}}_1, \dots, \hat{\mathbf{u}}_p\}$ *é ortonormal.*
Defina $Q = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix}$*. Então*

$$P_H = QQ^T.$$

Definição (matriz ortogonal)

Uma matriz é ***ortogonal*** *se suas colunas são orto****normais****.*

Observação

$Q_{m \times n}$ *é ortogonal s.s.s.* $Q^T Q = I_{n \times n}$.

Cálculo da Projeção Ortogonal

Lema

Seja $H = \langle \hat{\mathbf{u}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle$, *onde* $\{\hat{\mathbf{u}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_p\}$ *é ortonormal. Defina* $Q = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix}$. *Então*

$$P_H = QQ^T.$$

Definição (matriz ortogonal)

Uma matriz é ***ortogonal*** *se suas colunas são orto****normais****.*

Observação

$Q_{m \times n}$ *é ortogonal s.s.s.* $Q^T Q = I_{n \times n}$.

Cálculo da Projeção Ortogonal

Lema

Seja $H = \langle \hat{\mathbf{u}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle$*, onde* $\{\hat{\mathbf{u}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_p\}$ *é ortonormal.*
Defina $Q = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix}$*. Então*

$$P_H = QQ^T.$$

Definição (matriz ortogonal)

*Uma matriz é **ortogonal** se suas colunas são orto**normais**.*

Observação

$Q_{m \times n}$ *é ortogonal s.s.s.* $Q^T Q = I_{n \times n}$.

Cálculo da Projeção Ortogonal

Lema

Seja $H = \langle \hat{\mathbf{u}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_p \rangle$*, onde* $\{\hat{\mathbf{u}}_1, \ldots, \hat{\mathbf{u}}_p\}$ *é ortonormal.*
Defina $Q = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 & \cdots & \hat{\mathbf{u}}_p \end{bmatrix}$*. Então*

$$P_H = QQ^T.$$

Definição (matriz ortogonal)

*Uma matriz é ortogonal se suas colunas são orto**normais**.*

Observação

$Q_{m\times n}$ *é ortogonal s.s.s.* $Q^T Q = I_{n\times n}$.

Exemplo 1

$H = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcule $P_H\mathbf{v}$ e $P_{H^\perp}\mathbf{v}$.

$$P_H\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1

$$H = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ e } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Calcule } P_H\mathbf{v} \text{ e } P_{H^\perp}\mathbf{v}.$$

$$P_H\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1

$H = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcule $P_H\mathbf{v}$ e $P_{H^\perp}\mathbf{v}$.

$$P_H\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{2}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1

$$H = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle \text{ e } \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ Calcule } P_H\mathbf{v} \text{ e } P_{H^\perp}\mathbf{v}.$$

$$\begin{aligned} P_H\mathbf{v} &= \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle}\mathbf{u}_1 = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemplo 1

$H = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$ e $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Calcule $P_H \mathbf{v}$ e $P_{H^\perp} \mathbf{v}$.

$$
\begin{aligned}
P_H \mathbf{v} &= \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1 \rangle}{\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1 \rangle} \mathbf{u}_1 = \frac{\left\langle \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{2}{14} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Exemplo 1 - cont.

$$P_{H^\perp}\mathbf{v} = (I - P_H)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/7 \\ -2/7 \\ -3/7 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1 - cont.

$$P_{H^\perp}\mathbf{v} = (I - P_H)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/7 \\ -2/7 \\ -3/7 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 1 - cont.

$$P_{H^\perp}\mathbf{v} = (I - P_H)\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/7 \\ 2/7 \\ 3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/7 \\ -2/7 \\ -3/7 \end{bmatrix}.$$

Problema da Dieta

	Kcal/g	gord. (%)
arroz	2.5	3
carne	3.1	21

peso total: 150 g
cal. total: 450 Kcal
gordura total: 25 g

$$\left\{\begin{array}{rcrcr} \text{arroz} & + & \text{carne} & = & 150 \\ 2.50\,\text{arroz} & + & 3.10\,\text{carne} & = & 450 \\ 0.03\,\text{arroz} & + & 0.21\,\text{carne} & = & 25 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 150 \\ 2.50 & 3.10 & 450 \\ 0.03 & 0.21 & 25 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rr|r} 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0.60 & 75 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Não tem solução!

Problema da Dieta

	Kcal/g	gord. (%)
arroz	2.5	3
carne	3.1	21

peso total:	150	g
cal. total:	450	Kcal
gordura total:	25	g

$$\begin{cases} \quad\;\; \text{arroz} + \quad\;\; \text{carne} = 150 \\ 2.50\,\text{arroz} + 3.10\,\text{carne} = 450 \\ 0.03\,\text{arroz} + 0.21\,\text{carne} = 25 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 2.50 & 3.10 & 450 \\ 0.03 & 0.21 & 25 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0.60 & 75 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Não tem solução!

Problema da Dieta

	Kcal/g	gord. (%)
arroz	2.5	3
carne	3.1	21

peso total:	150	g
cal. total:	450	Kcal
gordura total:	25	g

$$\begin{cases} \text{arroz} + \text{carne} = 150 \\ 2.50\,\text{arroz} + 3.10\,\text{carne} = 450 \\ 0.03\,\text{arroz} + 0.21\,\text{carne} = 25 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 2.50 & 3.10 & 450 \\ 0.03 & 0.21 & 25 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0.60 & 75 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Não tem solução!

Problema da Dieta

	Kcal/g	gord. (%)
arroz	2.5	3
carne	3.1	21

peso total:	150	g
cal. total:	450	Kcal
gordura total:	25	g

$$\begin{cases} \text{arroz} + \text{carne} = 150 \\ 2.50\,\text{arroz} + 3.10\,\text{carne} = 450 \\ 0.03\,\text{arroz} + 0.21\,\text{carne} = 25 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 2.50 & 3.10 & 450 \\ 0.03 & 0.21 & 25 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0.60 & 75 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Não tem solução!

Problema da Dieta

	Kcal/g	gord. (%)
arroz	2.5	3
carne	3.1	21

peso total:	150	g
cal. total:	450	Kcal
gordura total:	25	g

$$\begin{cases} \quad\ \ \text{arroz} + \quad\ \ \text{carne} = 150 \\ 2.50\,\text{arroz} + 3.10\,\text{carne} = 450 \\ 0.03\,\text{arroz} + 0.21\,\text{carne} = 25 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 2.50 & 3.10 & 450 \\ 0.03 & 0.21 & 25 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0.60 & 75 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Não tem solução!

Problema da Dieta

	Kcal/g	gord. (%)
arroz	2.5	3
carne	3.1	21

peso total:	150	g
cal. total:	450	Kcal
gordura total:	25	g

$$\begin{cases} \,\text{arroz} + \,\text{carne} = 150 \\ 2.50\,\text{arroz} + 3.10\,\text{carne} = 450 \\ 0.03\,\text{arroz} + 0.21\,\text{carne} = 25 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 2.50 & 3.10 & 450 \\ 0.03 & 0.21 & 25 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0.60 & 75 \\ 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$$

Não tem solução!

Problema da Dieta

No entanto, tomando-se 38 g de arroz e 113 g de carne,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.50 & 3.10 \\ 0.03 & 0.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 113 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151 \\ 445.3 \\ 24.87 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 150 \\ 450 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Existe uma **boa solução** para um problema **sem solução**!

DESENHO

Problema da Dieta

No entanto, tomando-se 38 g de arroz e 113 g de carne,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.50 & 3.10 \\ 0.03 & 0.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 113 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151 \\ 445.3 \\ 24.87 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 150 \\ 450 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Existe uma **boa solução** para um problema **sem solução**!

DESENHO

Problema da Dieta

No entanto, tomando-se 38 g de arroz e 113 g de carne,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.50 & 3.10 \\ 0.03 & 0.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 113 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151 \\ 445.3 \\ 24.87 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 150 \\ 450 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Existe uma **boa solução** para um problema **sem solução**!

DESENHO

Problema da Dieta

No entanto, tomando-se 38 g de arroz e 113 g de carne,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2.50 & 3.10 \\ 0.03 & 0.21 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 38 \\ 113 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 151 \\ 445.3 \\ 24.87 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 150 \\ 450 \\ 25 \end{bmatrix}.$$

Existe uma **boa solução** para um problema **sem solução**!

DESENHO

Mínimos Quadrados

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (ou, equiv., $\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) pode não ter solução,

mas sempre é possível

$$\text{minimizar } \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \text{ (ou, equiv., } \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|^2\text{).}$$

Definição (mínimos quadrados)

A solução no sentido de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é aquela que minimiza (o quadrado d)o resíduo associado a $\mathbf{x}$, onde o resíduo é dado por $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$. Note que $\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_i r_i^2$, donde segue o nome mínimos quadrados.

Mínimos Quadrados

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (ou, equiv., $\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) pode não ter solução,

mas sempre é possível

$$\text{minimizar } \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \text{ (ou, equiv., } \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|^2\text{)}.$$

Definição (mínimos quadrados)

A solução no sentido de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é aquela que minimiza (o quadrado d)o resíduo associado a $\mathbf{x}$, onde o resíduo é dado por $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$.
Note que $\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_i r_i^2$, donde segue o nome mínimos quadrados.

Mínimos Quadrados

$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (ou, equiv., $\mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{0}$) pode não ter solução,

mas sempre é possível

$$\text{minimizar } \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| \text{ (ou, equiv., } \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\|^2\text{)}.$$

Definição (mínimos quadrados)

A solução no sentido de mínimos quadrados do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ é aquela que minimiza (o quadrado d)o resíduo associado a $\mathbf{x}$, onde o resíduo é dado por $\mathbf{r} = \mathbf{b} - A\mathbf{x}$. Note que $\|\mathbf{r}\|^2 = \sum_i r_i^2$, donde segue o nome mínimos quadrados.

Um Problema Correlato

Dado $\mathbf{b} \notin H$, encontrar $\mathbf{v}_H \in H$ mais próximo de $\mathbf{b}$.

Podemos decompor $\mathbf{b} = \mathbf{b}_H + \mathbf{b}_{H^\perp}$, de forma que

$$\|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}\|^2 = \|\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H}_{\in H} - \mathbf{b}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H\|^2 + \|\mathbf{b}_{H^\perp}\|^2.$$

O mínimo é atingido quando $\mathbf{v}_H = \mathbf{b}_H = P_H\mathbf{b}$.

Um Problema Correlato

Dado $\mathbf{b} \notin H$, encontrar $\mathbf{v}_H \in H$ mais próximo de $\mathbf{b}$.

Podemos decompor $\mathbf{b} = \mathbf{b}_H + \mathbf{b}_{H^\perp}$, de forma que

$$\|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}\|^2 = \|\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H}_{\in H} - \mathbf{b}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H\|^2 + \|\mathbf{b}_{H^\perp}\|^2.$$

O mínimo é atingido quando $\mathbf{v}_H = \mathbf{b}_H = P_H\mathbf{b}$.

Um Problema Correlato

Dado $\mathbf{b} \notin H$, encontrar $\mathbf{v}_H \in H$ mais próximo de $\mathbf{b}$.

Podemos decompor $\mathbf{b} = \mathbf{b}_H + \mathbf{b}_{H^\perp}$, de forma que

$$\|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}\|^2 = \|\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H}_{\in H} - \mathbf{b}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H\|^2 + \|\mathbf{b}_{H^\perp}\|^2.$$

O mínimo é atingido quando $\mathbf{v}_H = \mathbf{b}_H = P_H\mathbf{b}$.

Um Problema Correlato

Dado $\mathbf{b} \notin H$, encontrar $\mathbf{v}_H \in H$ mais próximo de $\mathbf{b}$.

Podemos decompor $\mathbf{b} = \mathbf{b}_H + \mathbf{b}_{H^\perp}$, de forma que

$$\|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}\|^2 = \|\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H}_{\in H} - \mathbf{b}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H\|^2 + \|\mathbf{b}_{H^\perp}\|^2.$$

O mínimo é atingido quando $\mathbf{v}_H = \mathbf{b}_H = P_H\mathbf{b}$.

Um Problema Correlato

Dado $\mathbf{b} \notin H$, encontrar $\mathbf{v}_H \in H$ mais próximo de **b.**

Podemos decompor $\mathbf{b} = \mathbf{b}_H + \mathbf{b}_{H^\perp}$, de forma que

$$\|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}\|^2 = \|\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H}_{\in H} - \mathbf{b}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H\|^2 + \|\mathbf{b}_{H^\perp}\|^2.$$

O mínimo é atingido quando $\mathbf{v}_H = \mathbf{b}_H = P_H\mathbf{b}$.

Um Problema Correlato

Dado $\mathbf{b} \notin H$, encontrar $\mathbf{v}_H \in H$ mais próximo de $\mathbf{b}$.

Podemos decompor $\mathbf{b} = \mathbf{b}_H + \mathbf{b}_{H^\perp}$, de forma que

$$\|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}\|^2 = \|\underbrace{\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H}_{\in H} - \mathbf{b}_{H^\perp}\|^2 = \|\mathbf{v}_H - \mathbf{b}_H\|^2 + \|\mathbf{b}_{H^\perp}\|^2.$$

O mínimo é atingido quando $\mathbf{v}_H = \mathbf{b}_H = P_H\mathbf{b}$.

De Volta aos Mínimos Quadrados

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| = \min_{\mathbf{y}\in\mathrm{Im}(A)} \|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$$

Mínimos Quadrados

$\mathbf{x}$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados s.s.s. $\mathbf{x}$ é solução (no sentido clássico) de $A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$.

De Volta aos Mínimos Quadrados

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| = \min_{\mathbf{y}\in\mathrm{Im}(A)} \|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$$

Mínimos Quadrados

$\mathbf{x}$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados s.s.s. $\mathbf{x}$ é solução (no sentido clássico) de $A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$.

De Volta aos Mínimos Quadrados

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| = \min_{\mathbf{y}\in\mathrm{Im}(A)} \|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$$

Mínimos Quadrados

$\mathbf{x}$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados s.s.s. $\mathbf{x}$ é solução (no sentido clássico) de $A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$.

De Volta aos Mínimos Quadrados

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| = \min_{\mathbf{y}\in\mathrm{Im}(A)} \|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$$

Mínimos Quadrados

$\mathbf{x}$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados s.s.s. $\mathbf{x}$ é solução (no sentido clássico) de $A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$.

De Volta aos Mínimos Quadrados

$$\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} \|\mathbf{b} - A\mathbf{x}\| = \min_{\mathbf{y}\in\mathrm{Im}(A)} \|\mathbf{b} - \mathbf{y}\|$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{y} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$$

Mínimos Quadrados

$\mathbf{x}$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados s.s.s. $\mathbf{x}$ é solução (no sentido clássico) de $A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}$.

Mínimos Quadrados

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\ &= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} = P_{(\mathrm{Im}(A))^\perp}\mathbf{b} \\ &= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).\end{aligned}$$

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^TA\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\ &= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} = P_{(\mathrm{Im}(A))^\perp}\mathbf{b} \\ &= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).\end{aligned}$$

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^TA\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\
&= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} = P_{(\mathrm{Im}(A))^\perp}\mathbf{b} \\
&= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^T A\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\
&= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} = P_{(\mathrm{Im}(A))^{\perp}}\mathbf{b} \\
&= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^T A\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\
&= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} = P_{(\mathrm{Im}(A))^\perp}\mathbf{b} \\
&= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^TA\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\
&= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} = P_{(\mathrm{Im}(A))^{\perp}}\mathbf{b} \\
&= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^T A\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\
&= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} = P_{(\mathrm{Im}(A))^\perp}\mathbf{b} \\
&= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^TA\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\
&= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} \;=\; P_{(\mathrm{Im}(A))^{\perp}}\mathbf{b} \\
&= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^T A\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

$$
\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\
&= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} \;=\; P_{(\mathrm{Im}(A))^{\perp}}\mathbf{b} \\
&= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).
\end{aligned}
$$

$$
\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^T A\mathbf{x}
$$

$$
A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}
$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} = \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b}\\ &= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} = P_{(\mathrm{Im}(A))^\perp}\mathbf{b}\\ &= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).\end{aligned}$$

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^TA\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\
&= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} \;=\; P_{(\mathrm{Im}(A))^{\perp}}\mathbf{b} \\
&= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).
\end{aligned}$$

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^T A\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} &= \mathbf{b} - A\mathbf{x} \;=\; \mathbf{b} - P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \\
&= (I - P_{\mathrm{Im}(A)})\mathbf{b} \;=\; P_{(\mathrm{Im}(A))^{\perp}}\mathbf{b} \\
&= P_{\mathrm{Nuc}(A^T)}\mathbf{b} \in \mathrm{Nuc}(A^T).
\end{aligned}$$

$$\mathbf{0} = A^T\mathbf{r} = A^T(\mathbf{b} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{b} - A^TA\mathbf{x}$$

$$A\mathbf{x} = P_{\mathrm{Im}(A)}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$$

Vale também a volta!

Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

$\mathbf{x}$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados s.s.s. $\mathbf{x}$ é solução (no sentido clássico) de $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

Observação

- $A\mathbf{x} = P_{Im(A)}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$
- *Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução no sentido clássico, a solução no sentido dos mínimos quadrados coincide com ela*
- *A solução no sentido dos mínimos quadrados é única s.s.s. $Nuc(A)$ é trivial. Neste caso, $P_{Im(A)} = A(A^T A)^{-1}A^T$.*

Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

$\mathbf{x}$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados s.s.s. $\mathbf{x}$ é solução (no sentido clássico) de $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

Observação

- $A\mathbf{x} = P_{Im(A)}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$
- *Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução no sentido clássico, a solução no sentido dos mínimos quadrados coincide com ela*
- *A solução no sentido dos mínimos quadrados é única s.s.s. $Nuc(A)$ é trivial. Neste caso, $P_{Im(A)} = A(A^T A)^{-1}A^T$.*

Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

$\mathbf{x}$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados s.s.s. $\mathbf{x}$ é solução (no sentido clássico) de $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

Observação

- $A\mathbf{x} = P_{Im(A)}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$
- *Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução no sentido clássico, a solução no sentido dos mínimos quadrados coincide com ela*
- *A solução no sentido dos mínimos quadrados é única s.s.s. $Nuc(A)$ é trivial. Neste caso, $P_{Im(A)} = A(A^T A)^{-1} A^T$.*

Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

$\mathbf{x}$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados s.s.s. $\mathbf{x}$ é solução (no sentido clássico) de $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

Observação

- $A\mathbf{x} = P_{Im(A)}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$
- *Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução no sentido clássico, a solução no sentido dos mínimos quadrados coincide com ela*
- *A solução no sentido dos mínimos quadrados é única s.s.s. $Nuc(A)$ é trivial. Neste caso, $P_{Im(A)} = A(A^T A)^{-1}A^T$.*

Mínimos Quadrados

Mínimos Quadrados

$\mathbf{x}$ é solução de $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ no sentido dos mínimos quadrados s.s.s. $\mathbf{x}$ é solução (no sentido clássico) de $A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$.

Observação

- $A\mathbf{x} = P_{Im(A)}\mathbf{b} \quad \Leftrightarrow \quad A^T A\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$
- *Se $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução no sentido clássico, a solução no sentido dos mínimos quadrados coincide com ela*
- *A solução no sentido dos mínimos quadrados é única s.s.s. $Nuc(A)$ é trivial. Neste caso,* $P_{Im(A)} = A(A^T A)^{-1} A^T$.