Notas de Aula de sma304 - Álgebra Linear
(baseada na Apostila do Prof. Zani)

Wagner Vieira Leite Nunes
Departamento de Matemática
ICMC -- USP

agosto de 2013

Sumário

Capítulo 1

Avisos Gerais sobre a Disciplina

1.1 Página do curso na web

A página da disciplina que será ministrada pelo professor Wagner tem o seguinte endereço:

www.icmc.usp.br/~wvlnunes/sma304/sma304.html

1.2 Endereço de email

O endereço de email do professor Wagner é o seguinte:

wvlnunes@icmc.usp.br

1.3 Sala no ICMC

A sala do professor Wagner no ICMC é a:

sala 3-128

1.4 Telefone / Ramal

O telefone/ramal da sala do professor Wagner no ICMC é:

(33) 73-9745

1.5 Horário das aulas

Os horários das aulas da disciplina SMA332 - Cálculo II ministrada pelo professor Wagner serão:

3.as e 5.as-feiras, das 10:10 às 11:50 na sala **(a ser definida)**

Outras informações podem ser obtidas no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/~wvlnunes/sma304/sma304.html

1.6 Ementa da disciplina

1. Espaços vetoriais reais e complexos..
2. Dependência linear.
3. Base.
4. Dimensão.
5. Subespaços.
6. Soma direta.
7. Transformções lineares.
8. Núcleo e imagem.
9. Isomorfismo.
10. Matriz de uma transformação linear.
11. Autovalores e autovetores.
12. Subsepaços invariantes.
13. Diadonalização de operadores.
14. Forma canônica de Jordan.
15. Espaços com produto interno.
16. Ortogonalidade.
17. Isometrias.
18. Operadores auto-adjuntos.

Outras informações podem ser obtidas no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/~wvlnunes/sma304/ementa304.html

1.7 Bilbiografia da disciplina

Os livros sugeridos para consulta serão os:

- Callioli, C.A. & Domingues, H.H & Costa, R.C.F. - Álgebra Linear e Aplicações, Sâo Paulo, Atual, 1983.
- Zani, S. - Álgebra Linear, Notas de Aula do ICMC, USP.

- Boldrini,J.L & Costa, S.I.R & Figueiredo, V.L & Wetzler, H.G.- ÁLgebra Linear, São Paulo, Harper-Row, 1980.

- Lay, D. - Linear Algebra and Its Applications, Reading, Mass, Addison-Wesley, 1997.

Outras informações podem ser obtidas no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/˜wvlnunes/sma304/bibliografia304.html

1.8 Notas de aula

No endereço

www.icmc.usp.br/˜wvlnunes/sma304/notas304.html

estarão disponíveis as notas de aula relativas ao conteúdo desenvolvido pelo professor em sala de aula.

As notas de aula serão atualizadas semanalmente.

1.9 Horários de monitoria da disciplina

O aluno **(a ser definido)** será o monitor da disciplina ministrada pelo professor Wagner.

Ele ministrará aula de exercícios semanalmente e dará plantão de dúvidas semanalmente.

Os horários e locais desta e das outras monitorias serão definidos posteriormente.

Outras informações podem ser obtidas no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/˜wvlnunes/sma304/monitores304.html

1.10 Horário de atendimento do docente da disciplina

O horário de atendimento da disciplina ministrada pelo professor Wagner será as

3.as-feiras das 16:00 às 18:00 na sala do professor.

Outras informações podem ser obtidas no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/˜wvlnunes/sma304/atendimento304.html

1.11 Listas de exercícios da disciplina

As oito listas de exercícios da disciplina ministrada pelo professor Wagner podem ser encontradas na seguinte página da web:

www.icmc.usp.br/˜wvlnunes/sma304/exercicios304.html

1.12 Freqüência na disciplina

Uma condição necesssária (mas não suficiente) para o aluno ser aprovado na disciplina ministrada pelo professor Wagner, é que sua frequência na disciplina, que denotaremos por F, seja maior ou igual a $\underline{70\%}$.

A lista de presença da disciplina ministrada pelo professor Wagner será controlada.

Só serão aceitas **ASSINATURAS** ou **NOME COMPLETO POR EXTENSO** na lista de presença.

Qualquer outro modo **NÃO** será aceito e será colocado falta na lista de presença.

1.13 Critério de avaliação e aprovação da disciplina

A avaliação da disciplina ministrada pelo professor Wagner, constará de duas provas, a primeira prova, que será denotada P_1, valendo $\frac{2}{5}$ da nota final, a segunda prova, que será denotada P_2, valendo $\frac{3}{5}$ da nota final, ou seja, a média final, que denotaremos por MF, será dada pela seguinte fórmula:

$$MF \doteq \frac{2 * P_1 + 3 * P_2}{5}.$$

Para ser considerado aprovado na disciplina ministrada pelo professor Wagner, a média do aluno na disciplina deverá ser maior ou igual a $5,0$ e sua frequência ser maior ou igual a 70%, ou seja:

$$5,0 \leq MF \quad \text{e} \quad 70\% \leq F.$$

Outras informações sobre os dois itens acima podem ser encontradas no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/˜wvlnunes/sma304/criterio304.html

1.14 Prova substitutiva da disciplina

O aluno que **perder uma, e somente uma,** das duas provas do item (1.13) poderá se submeter a assim denominada **prova substitutiva**, cujo valor denotaremos por PS.

A nota desta prova entrará na lugar da nota da prova que o aluno perdeu e a média será calculada como no item (1.13), substituindo-se a nota prova perdida pela nota da prova substitutiva, ou seja,

$$MF \doteq \frac{2 * PS + 3 * P_2}{5} \qquad \text{ou} \qquad MF \doteq \frac{2 * P_1 + 3 * PS}{5}$$

no caso, o valor à esquerda na primeira linha, será para o aluno que perdeu a primeira prova, valor à direita na primeira linha, será para o aluno que perdeu a segunda prova.

SOMENTE poderá fazer a prova substitutiva o aluno que perdeu uma das duas provas do item (1.13).

Para ser considerado aprovado na disciplina ministrada pelo professor Wagner, a média do aluno na disciplina, após a prova substitutiva, deverá ser maior ou igual a $5,0$ e sua frequência ser maior ou igual a 70%, ou seja:

$$5,0 \leq MF \quad \text{e} \quad 70\% \leq F.$$

Observação 1.1 *O conteúdo da prova substitutiva será todo o conteúdo desenvolvido durante a disciplina ministrada pelo professor Wagner.*

Outras informações sobre o item acima podem ser encontradas no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/˜wvlnunes/sma304/criterio304.html

1.15 Prova de recuperação da disciplina

Os alunos que obtiverem média maior ou igual a $3,0$ e menor que $5,0$ e frequência maior ou igual a 70%, ou seja,

$$3,0 \leq MF < 5,0 \quad \text{e} \quad 70\% \leq F,$$

poderão se submeter a uma última avaliação, denominada **prova de recuperação**, cujo valor será indicado por PR.

O aluno, na situação acima, que obtiver nota, na prova de recuperação, maior ou igual a $5,0$ será considerado aprovado na disciplina, ou seja, se

$$5,0 \leq PR.$$

Na situação acima, a média do aluno, após a prova de recuperação, que indicaremos por MR, será obtida da seguinte forma:

$$MR \doteq \begin{cases} 5,0\,, & \text{se} \quad \dfrac{MF + PR}{2} \leq 5,0 \\[2ex] \dfrac{MF + PR}{2}\,, & \text{se} \quad \dfrac{MF + PR}{2} > 5,0 \end{cases}.$$

Observação 1.2 *O conteúdo da prova de recuperação será todo o conteúdo desenvolvido durante a disciplina ministrada pelo professor Wagner.*

Outras informações sobre o item acima podem ser encontradas no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/˜wvlnunes/sma304/criterio304.html

1.16 Datas das avaliações, prova substitutiva e de recuperação da disciplina

As datas das provas da disciplina serão:

- **1.a Prova:**

  3 de outubro

- **2.a Prova:**

  28 de novembro

- **Prova Substitutiva:**

  5 de dezembro

- **Prova Recuperação:**

  Será marcada após a finalização das aulas da disciplina.

Outras informações sobre os itens acima podem ser encontradas no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/~wvlnunes/sma304/datas304.html

1.17 Gabaritos das provas da disciplina

Os gabaritos das provas da disciplina ministrada pelo professor Wagner, que serão aplicadas durante o desenvolvimento da mesma, estarão à disposição dos alunos logo após as mesmas terem sido aplicadas e se encontrarão no seguinte endereço da web:

www.icmc.usp.br/~wvlnunes/sma304/gabaritos304.html

1.18 Trancamento da disciplina

A data máxima para o trancamento da disciplina é **10 de setembro de 2013**.

Procure a seção de graduação da sua unidade para maiores esclarecimentos de como proceder o trancamento.

1.19 Números de aulas

O número total de aulas a serem ministradas pelo professor serão de **33** aulas, sendo que **3** destas serão destinadas às avaliações.

1.20 Calendário USP

O início do semestre será no dia 1 de agosto de 2013 e o término do mesmo será no dia 7 de dezembro de 2013.

Não haverá atividade nos seguintes dias/semana:

- 15 de agosto
- 2 a 7 de setembro
- 12 de outubro
- 2 de novembro
- 4 de novembro
- 15 de novembro

1.21 Observações finais

Capítulo 2

Espaços Vetoriais

2.1 Introdução e Exemplos

Neste capítulo introduziremos o conceito de espaço vetorial real que será utilizado em todo o decorrer do curso.

Porém, antes de apresentarmos a definição de espaço vetorial real, passaremos a analisar em paralelo dois objetos, a saber, o conjunto formado pelas funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, que será denotado por $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$, ou seja,

$$\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) \doteq \{f\,;\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ é uma função}\}$$

e o conjunto das matrizes quadradas de ordem n com coeficientes reais, que denotaremos por $M_n(\mathbb{R})$, ou simplesmente, por M_n.

A soma de duas funções f e g de $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ é definida como sendo a função $f+g \in \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ dada por

$$(f+g)(x) \doteq f(x) + g(x)\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Note também que se $\lambda \in \mathbb{R}$, que chamaremos de escalar, podemos multiplicar a função f pelo escalar λ, da seguinte forma

$$(\lambda \cdot f)(x) = \lambda[f(x)]\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}$$

resultando num elemento de $\mathscr{F}(\mathbb{R})$.

Com relação a $M_n(\mathbb{R})$ podemos definir a soma de duas matrizes quadradas de ordem n, $A = (a_{ij})_{n\times n}$ e $B = (b_{ij})_{n\times n}$, como

$$A + B \doteq (a_{ij} + b_{ij})_{n\times n}\,,$$

ou seja, somando-se as correspondentes entradas das matizes, e esta soma resiltará em um elemento de $M_n(\mathbb{R})$.

Com a relação à multiplicação de uma matriz quadrada de ordem n, $A = (a_{ij})_{n\times n}$, por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, definimos

$$\lambda \cdot A \doteq (\lambda a_{ij})_{n\times n}\,,$$

ou seja, multiplicando-se por λ cada entrada da matriz,o qual também resultará em um elemento de $M_n(\mathbb{R})$.

O que estes dois conjuntos acima, munidos dessas operações de adição de seus elementos dos correspondentes conjuntos e multiplicação de seus elementos por escalares, têm comum? Vejamos:

Verifica-se facilmente a partir das propriedades dos números reais que, para quaisquer funções $f, gh \in \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, são válidas as seguintes propriedades:

1. $f + g = g + f$;
2. $f + (g + h) = (f + g) + h$;
3. se $\mathscr{O}$ representa o função nula, isto é,
$$\mathscr{O}(x) \doteq 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$
então teremos
$$\mathscr{O} + f = f\,;$$
4. a função $-f$ definida por
$$(-f)(x) \doteq -[f(x)]\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$
satisfaz
$$f + (-f) = \mathscr{O}\,;$$
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot f) = (\lambda\mu) \cdot f$;
6. $(\lambda + \mu) \cdot f = \lambda \cdot f + \mu \cdot f$;
7. $\lambda \cdot (f + g) = \lambda \cdot f + \lambda \cdot g$;
8. $1 \cdot f = f$.

Por outro lado, para quaisquer matrizes A, B e C em $M_n(\mathbb{R})$ e para todo $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, também são válidas as seguintes propriedades:

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. se O representa a matriz nula, isto é,
$$O \doteq (0)_{n\times n}\,,$$
então teremos
$$O + A = A\,;$$
4. se $A = (a_{i,j})_{n\times n}$ então a matriz $-A$, definida por
$$-A \doteq (-a_{i,j})_{n\times n}\,,$$
satisfaz
$$A + (-A) = O\,;$$

5. $\lambda \cdot (\mu \cdot A) = (\lambda\mu) \cdot A$;

6. $(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$;

7. $\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$;

8. $1 \cdot A = A$.

Podemos ver que tanto o conjuntos das funções definidas na reta a valores reais, como o conjunto das matrizes quadradas de ordem n, quando munidos de somas e multiplicação por escalares correspondentes, apresentam *propriedades algébricas* comuns.

Na verdade muitos outros conjuntos munidos de operações apropriadas apresentam propriedades semelhantes às acima.

É por isso que, ao invés de estudarmos cada um desses modelos separadamente estudaremos um conjunto arbitrário e não vazio, V, sobre o qual supomos estar definidas uma operação de adição, isto é, para cada $u, v \in V$ existe um único elemento de V associado, chamado a *soma de u com v* e denotado por $u + v$, e uma multiplicação por escalar, isto é, para cada $u \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ existe um único elemento de V associado, chamado de *produto de u pelo escalar λ* e denotado por $\lambda \cdot u$.

Mais precsimante, temos a:

Definição 2.1 *Um conjunto V, não vazio, munido de uma operação de adição, isto é,*

$$+ : V \times V \to V$$

e de uma operação de multiplicação por escalar, ou seja,

$$\cdot \ : \mathbb{R} \times V \to V$$

será denominado espaço vetorial real (ou sobre $\mathbb{R}$) *se são válidas as seguintes propriedades:*

(EV1) *(Comutativa)*

$$u + v = v + u\,, \tag{2.1}$$

para cada $u, v \in V$;

(EV2) *(Associativa)*

$$u + (v + w) = (u + v) + w\,, \tag{2.2}$$

para cada $u, v, w \in V$;

(EV3) *(Existência do elemento neutro) existe um elemento $O \in V$ tal que*

$$O + u = u\,, \tag{2.3}$$

para cada $u \in V$;

(EV4) *(Existência do elemento oposto) para cada* $u \in V$, *podemos encontrar* $v \in V$, *de modo que*

$$u + v = O ; \tag{2.4}$$

(EV5) *(Associativa da multiplicação)*

$$\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda \mu) \cdot u , \tag{2.5}$$

para cada $u \in V$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*

(EV6) *(Distribuitiva da multiplicação)*

$$(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u , \tag{2.6}$$

para cada $u \in V$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$*;*

(EV7) *(Distribuitiva da multiplicação pela adição)*

$$\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v , \tag{2.7}$$

para cada $u, v \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

(EV8) *(Existência de elemento unitário)*

$$1 \cdot u = u , \tag{2.8}$$

para cada $u \in V$.

Observação 2.9 *No caso acima a terna* $(V, +, \cdot)$ *será dita espaço vetorial real (ou sobre* $\mathbb{R}$*), e quando as operações envolvidas forem as naturais de* V *diremos, apenas, que* V *é um espaço vetorial real (ou sobre* $\mathbb{R}$*).*

É comum chamarmos os elementos de um espaço vetorial de **vetores***, independentemente da natureza dos mesmos.*

Também chamamos de **escalares** *os números reais quando estes desempenham o seu papel na ação de multiplicar um vetor por esses número real.*

Observação 2.10 *O elemento* $O \in V$ *na propriedade* (EV3) *(isto é, (2.3)) é único.*

De fato, qualquer outro $O' \in V$ *satisfazendo a mesma propriedade* (EV3) *(isto é, (2.3)), pela Definição (2.1), itens* (EV3) *e* (EV1) *(isto é (2.3) e (2.1)), deveremos ter:*

$$O' \overset{(2.3)}{=} \underbrace{O}_{\text{elemento neutro de } +} + O' \overset{(2.1)}{=} \underbrace{O'}_{\text{elemento neutro de } +} + O \overset{(2.3)}{=} O, \quad \text{isto é,} \quad O = O'.$$

Devido a este fato, chamaremos o vetor O *de* **elemento neutro** *da adição do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Observação 2.11 *Em um espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$*, pela Definição* (2.1)*, item* (EV4) *(isto é,* (2.4)*), para cada* $u \in V$*, podemos encontrar* $v \in V$ *tal que*

$$u + v = O\,.$$

Na verdade, para cada $u \in V$*, existe somente um* **único** *elemento* $v \in V$ *com esta propriedade.*

De fato, dado $u \in V$*, suponhamos que existem* $v, v' \in V$ *são tais que*

$$u + v = O \quad e \quad u + v' = O\,. \tag{2.12}$$

Então, combinando estas equações com a Definição (2.1)*, itens* (EV1),(EV2) *e* (EV3) *(isto é,* (2.1), (2.2) *e* (2.3)*), deveremos ter:*

$$v \overset{(2.3)}{=} v + O \overset{(2.12)}{=} v + (u + v') \overset{(2.2)}{=} (v + u) + v' \overset{(2.1)}{=} (u + v) + v' \overset{(2.12)}{=} O + v' \overset{(2.3)}{=} v'\,,$$

ou seja,

$$v = v'\,.$$

Denotaremos o vetor v *por* $\underline{-u}$ *e chamaremo-lo de* **vetor oposto** *do vetor* u *em* $(V, +, \cdot)$.

Também denotaremos por $\underline{u - v}$ *o vetor* $u + (-v)$*, isto é,*

$$u - v \doteq u + (-v)\,.$$

Observação 2.13 *As quatro primeiras propriedades referem-se apenas à operação de adição e são (isto é,* (2.1), (2.2), (2.3) *e* (2.4)*) conhecidas, respectivamente, por propriedade comutativa, associativa, existência do elemento neutro (da adição) e existência do elemento ção).*

A quinta e a oitava propriedades (isto é, (2.5) *e* (2.8)*) são exclusivas da multiplicação por escalar e também podem ser chamadas de associativa (da multiplicação) e elemento unidade (da multiplicação), respectivamente.*

A sexta e a sétima propriedades (isto é, (2.6) *e* (2.7)*) relacionam as duas operações e são ambas conhecidas por distributivas.*

Observação 2.14 *A rigor, a definição de espaço vetorial real que demos acima se refere a multiplicação de vetores por número reais, visto que estamos permitindo que os escalares sejam apenas números reais.*

A noção de **espaço vetorial complexo (ou sobre** $\mathbb{C}$**)** *pode ser introduzida naturalmente a partir da definição acima com as devidas adaptações.*

Mais precisamente, pedimos que sejam satisfeitas as propriedades (EV1) *até* (EV4) *e* (EV8) *enquanto que as propriedades* (EV5) *até* (EV7) *devem valer para cada* $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.

No entanto, embora importante, não usaremos com freqüência, neste curso, o conceito de espaço vetorial complexo (ou sobre $\mathbb{C}$*).*

Um outro exemplo de espaço vetorial real, além dos dois apresentados no início do texto, é o conjunto dos vetores de $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$) como apresentados em Geometria Analítica munido da adição de vetores e da multiplicação por escalar por vetores, introduzidos no curso de Geometria Analítica.

Dessa forma, o adjetivo "vetorial" utilizado na definição acima deve ser entendido de uma forma mais ampla, sendo uma referência aos elementos de um espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$, independentemente de serem ou não vetores estudados no curso de Geometria Analítica.

O exemplo mais simples de espaço vetorial real é dado pelo:

Ex. 2.15 *O conjunto dos números reais, munido da adição* $+$ *e da multiplicação* $\cdot$ *de* $\mathbb{R}$*, ou seja,* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Temos também os seguintes exemplos são espaços vetoriais reais:

Exemplo 2.16 *Para* $n \in \mathbb{N}$*, consideremos o conjunto das* n*-uplas ordenadas de números reais, que indicaremos por* $\mathbb{R}^n$*, isto é,*

$$\mathbb{R}^n \doteq \{(x_1, \cdots, x_n)\,;\, x_i \in \mathbb{R}\,,\ \textit{para cada}\ in \in \{1, \cdots, n\}\}\,,$$

munido das operações de adição de duas n*-uplas ordenadas, a saber:*

$$\textit{para} \quad x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

definiremos

$$x + y \doteq (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n,$$

ou seja,

$$+ \ :\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

e o produto de uma n*-upla por um escalar, a saber:*

$$\textit{para} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \textit{e} \quad x = (x_1, \cdots, x_n)$$

definiremos

$$\lambda \cdot x \doteq (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n,$$
$$\cdot \ :\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n.$$

Pode-se mostrar, que $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *será um espaço vetorial real.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observação 2.17 *Observemos que, no exemplo acima, o vetor nulo de* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *será a* n*-upla nula, isto é,*

$$O \doteq (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n.$$

Além disso, se

$$x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n\,,$$

então o vetor oposto, associado ao vetor $\underline{x}$*, será* n*-upla*

$$-x \doteq (-x_1, \cdots, -x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

A verificação destes fato será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 2.18 *Para* $m, n \in \mathbb{N}$ *fixados, indiquemos por*

$$V \doteq M_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

o conjunto das matrizes de ordem $m \times n$ *com coeficientes reais, munido de operações análogas àquelas definidas em* $M_n(\mathbb{R})$*, introduzidas anteriormente.*

Com isto temos que $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *será um espaço vetorial real.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observação 2.19 *Observemos que o vetor nulo* O *de* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *será a matriz nula, isto é,*

$$O \doteq (a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \quad \textit{onde} \quad a_{ij} \doteq 0, \quad \textit{para cada} \quad i \in \{1, \cdots, m\} \textit{ e } j \in \{1, \cdots n\}.$$

Além disso, se

$$A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}),$$

então o vetor oposto, associado ao vetor A*, será a matriz*

$$-A \doteq (-a_{ij})_{m\times n} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 2.20 *Para* $n \in \mathbb{N}$ *fixado, consideremos*

$$V \doteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$$

o conjunto formado pelos polinômios de grau menor ou igual a n*, com coeficientes reais.*

Observemos que

$$p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \quad \textit{se, e somente se,} \quad p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

onde $a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$*.*

Definimos a adição de elementos de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *e a multiplicação de elementos de* $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *por escalar da seguinte maneira:*

- *Se* $p, q \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *temos que*

  $$p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n \quad \textit{e} \quad q(x) = b_o + b_1 x + \cdots + b_n x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

  onde $a_o, b_o, a_1, b_1 \cdots, a_n, b_n \in \mathbb{R}$ *então definiremos* $p + q$ *como sendo a função* $p + q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

  $$(p+q)(x) \doteq p(x)+q(x) = (a_o+b_o)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

  Observemos que $p + q \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$*, ou seja, adição de polinômios de grau menor ou igual a* n *é um polinômio de grau menor ou igual a* n*, ou ainda:*

  $$+ \; : \; \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R}).$$

- *Se* $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *então*

$$p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad \textit{onde} \quad a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$$

assim, para $\lambda \in \mathbb{R}$ *definimos* $\lambda \cdot p$ *como sendo a função* $\lambda \cdot p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$(\lambda \cdot p)(x) \doteq (\lambda a_o) + (\lambda a_1)x + \cdots + (\lambda a_n)x^n\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Observemos que $\lambda \cdot p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, *ou seja, a multiplicação de um polinômio de grau menor ou igual a* n *por um número real é um polinômio de grau menor ou igual a* n, *ou ainda:*

$$\cdot\ :\ \mathbb{R} \times \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,.$$

Deste modo $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *será um espaço vetorial real.*
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observação 2.21 *Observemos que o vetor nulo de* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *será o polinômio identicamente nulo, isto é,*

$$\mathscr{O} \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,, \quad \textit{onde} \quad \mathscr{O}(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Além disso, se $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *então o vetor oposto, associado ao vetor* p, *será o polinômio*

$$-p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,, \quad \textit{onde} \quad (-p)(x) \doteq -\,p(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 2.22 *Sejam* $I \subseteq \mathbb{R}$ *um intervalo de* $\mathbb{R}$ *e*

$$V \doteq \mathscr{F}(I; \mathbb{R})\,,$$

o conjunto de todas as funções $f : I \to \mathbb{R}$.

Para $f, g \in \mathscr{F}(I; \mathbb{R})$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *definamos as funções* $f + g\,, \lambda \cdot f : I \to \mathbb{R}$ *dadas por*

$$(f + g)(x) \doteq f(x) + g(x) \quad \textit{e} \quad (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in A\,.$$

Com isto temos definidas as operações

$$+\ :\ \mathscr{F}(I; \mathbb{R}) \times \mathscr{F}(I; \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(I; \mathbb{R}) \quad \textit{e} \quad \cdot\ :\ \mathbb{R} \times \mathscr{F}(I; \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(I; \mathbb{R})\,.$$

Então $(\mathscr{F}(I; \mathbb{R}), +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real.*
A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observação 2.23 *Observemos que o vetor nulo de* $(\mathscr{F}(I; \mathbb{R}), +, \cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é,*

$$\mathscr{O} \in \mathscr{F}(I; \mathbb{R})\,, \quad \textit{onde} \quad \mathscr{O}(x) \doteq 0\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Além disso, se $f \in \mathscr{F}(I; \mathbb{R})$ *então o vetor oposto, associado ao vetor* f, *será a função*

$$-f \in \mathscr{F}(I; \mathbb{R})\,, \quad \textit{onde} \quad (-f)(x) \doteq -\,f(x)\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 2.24 *Indiquemos por*

$$C(I;\mathbb{R}),$$

o conjunto das funções contínuas definidas num intervalo $I \subseteq \mathbb{R}$, *munido das operações de adição de funções e multiplicação de funções por número reais definidas em* $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ *no Exemplo acima.*

Assim temos que $(C(I;\mathbb{R}),+,\cdot)$ *será um espaço vetorial real.*

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Observação 2.25 *Observemos que o vetor nulo de* $(C(I;\mathbb{R}),+,\cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é, (é uma função contínua em* I*)*

$$\mathscr{O} \in C(I;\mathbb{R}), \quad \textit{onde} \quad \mathscr{O}(x) \doteq 0, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se $f \in C(I;\mathbb{R})$ *então o vetor oposto associado ao vetor* f *será a função (é uma função contínua em* I*)*

$$-f \in C(I;\mathbb{R}), \quad \textit{onde} \quad (-f)(x) \doteq -f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2.26 *Seja* $k \in \mathbb{N}$. *Denotemos por*

$$C^k(I;\mathbb{R}),$$

o conjunto das funções contínuas com derivadas contínuas até ordem $k \in \mathbb{N}$, *definidas num intervalo aberto* $I \subseteq \mathbb{R}$ *munido das operações de adição de funções e multiplicação de funções por número reais definidas em* $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ *no Exemplo (2.22) acima.*

Temos que $\left(C^k(I;\mathbb{R}),+,\cdot\right)$ *será um espaço vetorial real.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observação 2.27 *Observemos que o vetor nulo de* $(C^k(I;\mathbb{R}),+,\cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é, (é uma função contínua com derivada até a ordem* k *contínuas em* I*)*

$$\mathscr{O} \in C^k(I;\mathbb{R}), \quad \textit{onde} \quad \mathscr{O}(x) \doteq 0, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se $f \in C^k(I;\mathbb{R})$ *então o vetor oposto associado ao vetor* f *será a função (é uma função contínua com derivada até a ordem* k *contínuas em* I*)*

$$-f \in C^k(I;\mathbb{R}), \quad \textit{onde} \quad (-f)(x) \doteq -f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Exemplo 2.28 *Indiquemos por*

$$C^\infty(I;\mathbb{R}),$$

o conjunto das funções com todas as derivadas contínuas definidas num intervalo aberto $I \subseteq \mathbb{R}$ *munido das operações de adição de funções e multiplicação de funções por número reais definidas em* $\mathscr{F}(I;\mathbb{R})$ *no Exemplo (2.22) acima.*

Deste modo $(C^\infty(I;\mathbb{R}),+,\cdot)$ *será um espaço vetorial real.*

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Observação 2.29 *Observemos que o vetor nulo de* $(C^\infty(I\,;\mathbb{R}),+,\cdot)$ *será a função identicamente nulo, isto é, (é uma função contínua com derivada de qualquer ordem contínua em* I*)*

$$\mathcal{O} \in C^\infty(I\,;\mathbb{R}), \quad \textit{onde} \quad \mathcal{O}(x) \doteq 0, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, se $f \in C^\infty(I;\mathbb{R})$ *então o vetor oposto associado ao vetor* f *será a função (é uma função contínua com derivada de qualquer ordem contínua em* I*)*

$$-f \in C^\infty(I\,;\mathbb{R}), \quad \textit{onde} \quad (-f)(x) \doteq -f(x), \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

A verificação destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Os espaços vetoriais reais acima envolvem operações com as quais estamos familiarizados.

O próximo exemplo é um pouco mais sofisticado do que os anteriores e por isso verificaremos que as oito propriedades ocorrem.

Exemplo 2.30 *Como conjunto tomaremos*

$$V \doteq (0,\infty),$$

o semi-eixo positivo da reta real.

Este conjunto se munido das operações usuais de soma e multiplicação de números reais <u>não</u> será um espaço vetorial real, pois não satisfaz, entre outras, a propriedade da existência de um elemento neutro *para a adição (pois* $0 \notin V$*).*

No entanto, para $x, y \in V$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*, definirmos a <u>adição entre de* x *com* y</u>*, indicada por* $x \boxplus y$*, como sendo*

$$x \boxplus y \doteq xy,$$

(o produto usual entre os números reais x *e* y*) e o <u>produto de* x *pelo escalar* λ</u>*, denotada por* $\lambda \boxdot x$*, como*

$$\lambda \boxdot x \doteq x^\lambda,$$

(a potenciação usual de números reais) então $(V,\boxplus,\boxdot)$ *se torna um espaço vetorial real.*

Resolução:

De fato, observemos que

$$\boxplus \;:\; (0,\infty)\times(0,\infty) \to (0,\infty) \quad \text{e} \quad \boxdot \;:\; \mathbb{R}\times(0,\infty) \to (0,\infty)$$

e verifiquemos, uma a uma, as oito propriedades da definição de espaço vetorial real :

1. Se $x, y \in V$, temos que
$$x \boxplus y = xy = yx = y \boxplus x,$$
para cada $x, y \in V$.

   Logo vale a propriedade (EV1) (isto é, (2.1)).

2. Notemos também que

$$x \boxplus (y \boxplus z) = x \boxplus (yz) = x(yz) = (xy)z = (x \boxplus y)z = (x \boxplus y) \boxplus z\,,$$

   para cada $x, y, z \in V$.

   Logo vale a propriedade (EV2) (isto é, (2.2)).

3. Se $x \in V$ então, como $1 \in V$, temos

$$1 \boxplus x = 1x = x\,,$$

   ou seja, 1 é o elemento neutro da adição $\boxplus$, o qual denotaremos por O.

   Logo vale a propriedade (EV3) (isto é, (2.3)).

4. Se $x \in V$, isto é, $x > 0$, então $x^{-1} > 0$, ou seja, $x^{-1} \in V$ e

$$x \boxplus x^{-1} = xx^{-1} = 1 = O\,,$$

   ou seja, o elemento oposto de $x \in V$, relativamente a adição $\boxplus$, será $x^{-1} \in V$.

   Logo vale a propriedade (EV4) (isto é, (2.4)).

5. Notemos que

$$\lambda \boxdot (\mu \boxdot x) = \lambda \boxdot x^{\mu} = (x^{\mu})^{\lambda} = x^{\mu\lambda} = x^{\lambda\mu} = (\lambda\mu) \boxdot x\,,$$

   para cada $x \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   Logo vale a propriedade (EV5) (isto é, (2.5)).

6. Notemos também que

$$(\lambda + \mu) \boxdot x = x^{\lambda+\mu} = x^{\lambda}x^{\mu} = x^{\lambda} \boxplus x^{\mu} = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\mu \boxdot x)\,,$$

   para cada $x \in V$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

   Logo vale a propriedade (EV6) (isto é, (2.6)).

7. Notemos que

$$\lambda \boxdot (x \boxplus y) = \lambda \boxdot (xy) = (xy)^{\lambda} = x^{\lambda}y^{\lambda} = (\lambda \boxdot x) \boxplus (\lambda \boxdot y)$$

   para cada $x, y \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

   Logo vale a propriedade (EV7) (isto é, (2.7)).

8. Notemos também que

$$1 \boxdot x = x^{1} = x\,,$$

   para cada $x \in V$, logo vale a propriedade (EV8) (isto é, (2.8)).

Com isto podemos concluir que $(V, \boxplus, \boxdot)$ é um espaço vetorial real.

2.2 Propriedades

Das oito propriedades que definem um espaço vetorial real podemos concluir várias outras.

Listaremos algumas destas propriedades no seguinte resultado:

Proposição 2.31 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real .*

Então:

1. *para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$, *temos que*
$$\lambda \cdot O = O\,,$$
onde O *é o elemento neutro da adição de* $(V, +, \cdot)$.

2. *para cada* $u \in V$,
$$0 \cdot u = O\,,$$
onde $0 \in \mathbb{R}$ *e* O *é o elemento neutro da adição de* $(V, +, \cdot)$.

3. *se*
$$\lambda \cdot u = O\,, \quad \text{então deveremos ter} \quad \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad u = O\,,$$
onde $0 \in \mathbb{R}$ *e* O *é o elemento neutro da adição de* $(V, +, \cdot)$.

4. *para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$, *temos que*
$$(-\lambda) \cdot u = \lambda \cdot (-u) = -(\lambda \cdot u)\,.$$

5. *para cada* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *e* $u \in V$, *temos que*
$$(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - (\mu \cdot u)\,.$$

6. *para cada* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $u, v \in V$, *temos que*
$$\lambda \cdot (u - v) = \lambda \cdot u - (\lambda \cdot v)\,.$$

7. *para cada* $\lambda, \mu_1, \ldots, \mu_n \in \mathbb{R}$ *e* $u_1, \ldots, u_n \in V$, *temos que*
$$\lambda \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} \mu_j \cdot u_j \right) = \sum_{j=1}^{n} (\lambda \mu_j) \cdot u_j\,.$$

8. *para cada* $u \in V$, *temos que*
$$-(-u) = u\,.$$

9. *se*
$$u + w = v + w\,, \quad \text{então deveremos ter} \quad u = v\,.$$

10. *se* $u, v \in V$, *então existe um único* $w \in V$ *tal que*
$$u + w = v\,.$$

Demonstração:

1. Pelas propriedades (EV3) e (EV7) (isto é, (2.3) e (2.7)) temos que

$$\lambda \cdot O \overset{(2.3)}{=} \lambda \cdot (O + O) \overset{(2.7)}{=} \lambda \cdot O + \lambda \cdot O\,. \tag{2.32}$$

   Utilizando as propriedades (EV1) a (EV4) (isto é, (2.1) e (2.4)) e a notação da Observação (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} O &\overset{(2.4)}{=} \lambda \cdot O + [-(\lambda \cdot O)] \overset{(2.33)}{=} (\lambda \cdot O + \lambda \cdot O) + [-(\lambda \cdot O)] \\ &\overset{(2.7)}{=} \lambda \cdot O + \{\lambda \cdot O + [-(\lambda \cdot O)]\} \overset{(2.4)}{=} \lambda \cdot O + O \overset{(2.3)}{=} \lambda \cdot O\,, \end{aligned}$$

   isto é,

$$\lambda \cdot O = O\,,$$

   como queríamos demonstrar.

2. Pela propriedades (EV6) (isto é, (2.6)) temos que

$$0 \cdot u = (0 + 0) \cdot u \overset{(2.6)}{=} 0 \cdot u + 0 \cdot u\,. \tag{2.33}$$

   Utilizando a identidade acima, as propriedades (EV2) e (EV4) (isto é, (2.2) e (2.4)) e a notação da Observação (2.11), obtemos

$$\begin{aligned} O &\overset{(2.4)}{=} 0 \cdot u + [(-(0 \cdot u)] \overset{(2.33)}{=} (0 \cdot u + 0 \cdot u) + [-(0 \cdot u)] \\ &\overset{(2.2)}{=} 0 \cdot u + (0 \cdot u + [-(0 \cdot u)] \overset{(2.4)}{=} 0 \cdot u + O \overset{(2.3)}{=} 0 \cdot u, \end{aligned}$$

   isto é,

$$0 \cdot u = O\,,$$

   como queríamos demonstrar.

3. Se

$$\lambda \cdot u = O \quad \text{e} \quad \lambda \neq 0\,,$$

   pelas propriedades (EV8) e (EV5) (isto é, (2.8) e (2.5)) e pelo item 1. desta Proposição, segue que

$$u \overset{(2.8)}{=} 1 \cdot u = (\lambda^{-1}\lambda) \cdot u \overset{(2.5)}{=} \lambda^{-1}(\underbrace{\lambda \cdot u}_{=O}) = \lambda^{-1} \cdot O \overset{\text{item 1.}}{=} O\,,$$

   ou seja,

$$u = O\,,$$

   como queríamos demonstrar.

4. Utilizando a propriedade (EV6) (isto é, (2.6)) e o item 2. desta Proposição, obtemos

$$\lambda \cdot u + (-\lambda) \cdot u \overset{(2.6)}{=} [\lambda + (-\lambda)] \cdot u = 0 \cdot u \overset{\text{item } 2.}{=} O\,.$$

   Pela Observação (2.11), segue que

$$-(\lambda \cdot u) = (-\lambda) \cdot u\,.$$

   Analogamente, utilizando-se a propriedade (EV7) (isto é, (2.7)), mostra-se

$$-(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot (-u)\,.$$

   A prova deste fato será deixada como exercício para o leitor.

   As provas dos itens 5., 6., 7., 8. e 9. serão deixadas como exercício para o leitor.

∎

Para finalizar temos a

Proposição 2.34 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real . Mostre que se* $V \neq \{O\}$ *então o conjunto* V *tem infinitos elementos distintos.*

Demonstração:

Note que se encontrarmos uma função $f : \mathbb{R} \to V$ que seja injetora, então o conjunto V terá infinitos elementos.

De fato, pois para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ corresponderá um elemento distinto $f(\lambda)$ de V e como $\mathbb{R}$ tem infinitos elementos distintos, teremos que o conjunto V também terá infinitos elementos distintos.

Seja $v \in V$, de modo que $v \neq O$.

Defina a função $f : \mathbb{R} \to V$ por

$$f(\lambda) = \lambda \cdot v\,, \quad \text{para cada} \quad \lambda \in \mathbb{R}\,. \tag{2.35}$$

Para mostrar que a função f é injetora, tomemos $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$f(\lambda) = f(\mu)\,.$$

Devemos mostrar que

$$\lambda = \mu\,,$$

e assim a função será injetora.

Como

$$\lambda \cdot v \overset{(2.35)}{=} f(\lambda) = f(\mu) \overset{(2.35)}{=} \mu \cdot v\,, \quad \text{ou seja,} \quad \lambda \cdot v = \mu \cdot v\,,$$

ou, equivalentemente:

$$\lambda \cdot v - (\mu \cdot v) = O\,. \tag{2.36}$$

Pelo item 4. da Proposição (2.31) e (2.6), deveremos ter

$$O \stackrel{(2.36)}{=} \lambda \cdot v - (\mu \cdot v) \stackrel{\text{Prop. (2.31) item 4.}}{=} \lambda \cdot v + (-\mu) \cdot v \stackrel{(2.6)}{=} (\lambda - \mu) \cdot v.$$

Como $v \neq O$, pelo item 3. da mesma Proposição, segue que

$$\lambda - \mu = 0\,,$$

isto é,

$$\lambda = \mu\,,$$

mostrando que a função f é injetora e completando a demonstração.

∎

2.3 Exercícios

Capítulo 3

Subespaços Vetoriais

3.1 Introdução e Exemplos

Muitas vezes nos depararemos com certos subconjuntos de um espaço vetorial real que possuem a propriedade de que a soma de dois de seus elementos é um elemento do próprio subconjunto bem como quando multiplicamos um elemento do subconjunto por um escalar, o resultado continua pertencendo ao subconjunto. A estes subconjuntos daremos um nome, como veremos na:

Definição 3.1 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real.*

Dizemos que um subconjunto $W \subseteq V$, $W \neq \emptyset$, *é um* **subespaço vetorial** *do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *se forem satisfeitas as seguintes condições:*

(sv1) *Deveremos ter*

$$O \in W, \tag{3.1}$$

onde O *é o elemento neutro da adição de* $(V, +, \cdot)$;

(sv2) *Se* $u, v \in W$, *deveremos ter*

$$u + v \in W; \tag{3.2}$$

(sv3) *Se* $u \in W$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$, *deveremos ter*

$$\lambda \cdot u \in W. \tag{3.3}$$

Observação 3.4 *Notemos que todo subespaço vetorial* W *de um espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$, *é, ele próprio, um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *com as operações induzidas de* V, *ou seja,*

$$(W, +_V, \cdot_V)$$

é um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.

Na situação acima, estamos indicando a operação de adição de elementos de $(V, +, \cdot)$ *por* $+_V$ *e operação de multiplicação de escalar por elementos de* $(V, +, \cdot)$ *por* $\cdot_V$.

As propriedades comutativa (isto é, (2.1)*), associativa (isto é,* (2.2)*), distributivas (isto é,* (2.6) *e* (2.7)*) e* (EV8) *(isto é,* (2.8)*) são herdadas do próprio espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Pela propriedade (sv1) *acima (isto é,* (3.1)*), o elemento neutro da adição de* $(V, +, \cdot)$ *será um elemento de* W*, ou seja, vale a propriedade (ev3) da Definição* (2.1) *(isto é,* (2.3)*).*

Finalmente, pelo item 4. da Proposição (2.31) e por (sv3) *(isto é,* (3.3)*), se* $u \in W$ *deveremos ter*

$$-u = (-1) \cdot u \in W\,,$$

ou seja, vale a propriedade (ev4) da Definição (2.1) *(isto é,* (2.4)*), mostrando com isso que, realmente,* $(W, +_V, \cdot_V)$ *é um espaço vetorial real.*

Observação 3.5 *Observemos também que a propriedade (sv1) (isto é,* (3.1)*) pode ser obtida da propriedade (sv3) (isto é, de* (3.3)*) e da Proposição* (2.31) *item 2..*

De fato, pois se $w \in W$ *teremos que*

$$O \overset{\text{Prop. (2.31) item 2.}}{=} 0 \cdot w \in W\,.$$

Observação 3.6 *Obviamente*

$$W \doteq \{O\} \quad \text{ou} \quad W \doteq V$$

são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.

Definição 3.7 *Os subsepaços vetoriais da Observação acima serão denominados de* **<u>subespaços</u> <u>vetoriais triviais</u>** *do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$*.*

Observação 3.8 *Notemos que, na situação acima,* $W \subseteq V$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *se, e somente se, são válidas as seguintes condições:*

(sv1') *Deveremos ter*

$$O \in W\,, \tag{3.9}$$

onde O *é o elemento neutro da adição de* $(V, +, \cdot)$*;*

(sv2') *Para* $u, v \in W$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *deveremos ter*

$$u + \lambda \cdot v \in W\,. \tag{3.10}$$

Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Vejamos alguns exemplos de subespaços vetoriais de um espaço vetorial real:

Começaremos pelo:

Exemplo 3.11 *Verifiquemos que*

$$W \doteq \left\{(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3;\;\; x + y + z = 0\right\} \tag{3.12}$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais em* $\mathbb{R}^3$*).*

Resolução:

De fato:

1. Notemos que o vetor nulo de $\mathbb{R}^3$ pertence ao conjunto W, isto é,
$$O \doteq (0,0,0) \in \mathbb{R}^3\,,$$
pertence ao conjunto W.

   De fato, pois
$$0+0+0=0\,.$$
   Logo, de (3.12), teremos que
$$O=(0\,,0\,,0)\in W\,.$$

2. Se $(x,y,z),(u,v,w)\in W$ assim, de (3.12), deveremos ter
$$x+y+z=0 \quad \text{e} \quad u+v+w=0\,. \tag{3.13}$$
   Notemos que
$$(x\,,y\,,z)+(u\,,v\,,w) \overset{+\ \text{em}\ \mathbb{R}^3}{=} (x+u\,,y+v\,,z+w)\,.$$
   Mas
$$(x+u)+(y+v)+(z+w)=\underbrace{(x+y+z)}_{\overset{(3.13)}{=}0}+\underbrace{(u+v+w)}_{\overset{(3.13)}{=}0}=0\,.$$
   Portanto, de (3.12), segue que
$$(x\,,y\,,z)+(u\,,v\,,w) \overset{+\ \text{em}\ \mathbb{R}^3}{=} (x+u\,,y+v\,,z+w)\in W\,.$$

3. Se $(x\,,y\,,z)\in W$ e $\lambda\in\mathbb{R}$, de (3.12), deveremos ter
$$x+y+z=0\,. \tag{3.14}$$
   Notemos que
$$\lambda\cdot(x\,,y\,,z) \overset{\cdot\ \text{em}\ \mathbb{R}^3}{=} (\lambda x\,,\lambda y\,,\lambda z)\,.$$
   Mas
$$\lambda x+\lambda y+\lambda z=\lambda\underbrace{(x+y+z)}_{\overset{(3.14)}{=}0}=0\,.$$
   Portanto, de (3.12), segue que
$$\lambda\cdot(x\,,y\,,z)=(\lambda x\,,\lambda y\,,\lambda z)\in W\,.$$

Logo $W \subseteq \mathbb{R}^3$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Deixaremos para o leitor a resoluçãoo da seguinte extensão do Exemplo acima:

Exercício 3.15 *Sejam* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *fixados e*

$$W \doteq \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n ; \ a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0\} . \tag{3.16}$$

Mostre que W *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais em* $\mathbb{R}^n$*).*

Um outro exemplo importante é dado pelo:

Exemplo 3.17 *O conjunto* W_s *das* **matrizes simétricas** *quadradas de ordem* n*, com coeficientes reais, isto é,*

$$A \in W_s \quad \textit{se, e somente se,} \quad A^t = A , \tag{3.18}$$

(ver mais detalhes no Apêndice I) é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais em* $M_n(\mathbb{R})$*).*

Resolução:

De fato:

1. O elemento neutro de $M_n(\mathbb{R})$ é a matriz identicamente nula $O = (0)_n \in M_n(\mathbb{R})$ e esta satisfaz
$$O^t = O, \quad \text{ou seja,} \quad O \in W_s;$$

2. Se $A_1, A_2 \in W_s$ então, de (3.18), teremos
$$A_1^t = A_1 \quad \text{e} \quad A_2^t = A_2 ,$$
Com isto, teremos
$$(A_1 + A_2)^t \overset{\text{veja o Apêndice I}}{=} \underbrace{A_1^t}_{=A_1} + \underbrace{A_2^t}_{=A_2} = A_1 + A_2 ,$$
que de (3.18), implicará que
$$A_1 + A_2 \in W_s .$$

3. Se $A \in W_s$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então, , de (3.18), teremos
$$A^t = A .$$
Mas
$$(\lambda \cdot A)^t \overset{\text{veja o Apêndice I}}{=} \lambda \cdot \underbrace{A^t}_{=A} = \lambda \cdot A,$$
que de (3.18), implicará que
$$\lambda \cdot A \in W_s .$$

Portanto $W_s \subseteq M_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Deixaremos para o leitor o:

Exercício 3.19 *O conjunto W_a das* <u>matrizes anti-simétricas</u> *quadradas de ordem n com coeficientes reais, isto é,*

$$A \in W_a \quad \textit{se, e somente se,} \quad A^t = -A\,, \tag{3.20}$$

(veja o Apêndice I para mais detalhes) é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais em $M_n(\mathbb{R})$).

Observação 3.21 *Veremos, mais adiante, que toda matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ pode ser escrita como*

$$A = A_s + A_a\,, \tag{3.22}$$

onde $A_s \in W_s$ e $A_a \in W_a$.

Além disso, também mostraremos que

$$W_s \cap W_a = \{O\}. \tag{3.23}$$

As propriedades (3.22) e (3.23) serão de grande importância como veremos mais adiante.

Temos também o:

Exemplo 3.24 *Seja $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, dado por*

$$\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R}) \doteq \{p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})\,;\;\; p(0) = 0\}\,. \tag{3.25}$$

Verifiquemos que $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais em $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$).

Resolução:

De fato:

1. O polinômio nulo, $O \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, pertence a $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$, isto é, se anula em $x = 0$, isto é,

$$O(0) = 0\,.$$

Logo, de (3.25), segue que

$$O \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})\,.$$

2. Se $p, q \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$ então, de (3.25), teremos

$$p(0) = 0 \quad \text{e} \quad q(0) = 0\,. \tag{3.26}$$

Logo, de (3.26), segue que

$$(p+q)(0) = \underbrace{p(0)}_{=0} + \underbrace{q(0)}_{=0} = 0\,.$$

Portanto, de (3.25), teremos

$$p + q \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})\,.$$

3. Se $p \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então, de (3.25), teremos

$$\lambda\, p(0) = 0\,. \tag{3.27}$$

Logo, de (3.27), segue que

$$(\lambda \cdot p)(0) = \lambda \underbrace{p(0)}_{=0} = 0\,.$$

Portanto, de (3.25), teremos

$$\lambda \cdot p \in \mathscr{P}_n^*(\mathbb{R})\,.$$

Logo $\mathscr{P}_n^*(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Um outro exemplo importante é dado pelo:

Exemplo 3.28 *Considere o seguinte conjunto*

$$W \doteq \left\{ y \in C^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})\,;\, y''(x) - y(x) = 0\,,\ \textit{para}\ x \in \mathbb{R} \right\} \tag{3.29}$$

onde $y'' = y''(x)$ *representa a derivada de segunda ordem da função* $y = y(x)$ *no ponto* $x \in \mathbb{R}$.

Mostremos que W *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(C^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais em* $C^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$*).*

Resolução:

De fato:

1. O elemento neutro de $C^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ é a função identicamente nula $O \in C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ e esta satisfaz

$$O''(x) - O(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Logo, de (3.29), segue que

$$O \in W\,.$$

2. Se $y_1, y_2 \in W$ então, de (3.29), teremos que $y_1, y_2 \in C^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ e além disso satisfazem

$$y_1''(x) - y_1(x) = 0 \quad \text{e} \quad y_2''(x) - y_2(x) = 0 \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.30}$$

Logo $y_1 + y_2 \in C^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ e, de (3.30), segue que

$$(y_1 + y_2)''(x) - (y_1 + y_2)(x) = \underbrace{[y_1''(x) - y_1(x)]}_{=0} + \underbrace{[y_2''(x) - y_2(x)]}_{=0} = 0\,,$$

ou seja,

$$(y_1 + y_2) \in W\,.$$

3. Se $y \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então, de (3.29), teremos que $y \in C^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ e além disso satisfaz

$$y''(x) - y(x) = 0\,, \quad \text{para cada } x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.31}$$

Logo, de (3.29), segue que $\lambda \cdot y \in C^2(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R})$ e, de (3.31), segue que

$$(\lambda \cdot y)''(x) - \lambda \cdot y(x) = \lambda \cdot \underbrace{[y''(x) - y(x)]}_{=0} = 0,$$

mostrando que

$$\lambda \cdot y \in W\,.$$

Portanto $W \subseteq C^2(\mathbb{R};\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(C^2(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Deixaremos para a resolução peloo leitor os:

Exercício 3.32 *Sejam $m, n \in \mathbb{N}$ fixados, com $m \leq n$.*
Então

$$W \doteq \mathscr{P}_m(\mathbb{R})$$

é um subespaço do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais em $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$).

Exercício 3.33 *O conjunto W das funções contínuas da reta na reta, denotado por $C(\mathbb{R};\mathbb{R})$, é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais em $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$).*

Exercício 3.34 *O conjunto*

$$W \doteq \left\{ f \in C([a,b]\,;\,\mathbb{R})\,;\ \int_a^b f(x)\,dx = 0 \right\}$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(C([a,b];\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais em $C([a,b];\mathbb{R})$).

3.2 Interseção e Soma de Subespaços

Proposição 3.35 (Interseção de subespaços) *Sejam U e W subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.*
Então $U \cap W$ é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:
De fato:

1. Como U e W são subsepaços vetoriais do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ temos que

$$O \in U \quad \text{e} \quad O \in W\,.$$

Logo

$$O \in U \cap W\,;$$

2. Se $x, y \in U \cap W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, como U e W são subsepaços vetoriais do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$, teremos que
$$x + \lambda \cdot y \in U \quad \text{e} \quad x + \lambda \cdot y \in W.$$
Logo,
$$x + \lambda \cdot y \in U \cap W.$$

Portanto, dos itens 1.e 2. acima e da Observação (3.8), segue que $U \cap W$ é subespaço vetorial do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$,, completando a demonstração do resultado.

∎

Questão: Com a notação da Proposição acima, podemos afirmar que $U \cup W$ é subespaço vetorial de V?
Resposta : Não.

Para ver isto, basta considerar
$$V \doteq \mathbb{R}^2, \quad U \doteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0\right\} \quad \text{e} \quad W \doteq \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 0\right\}.$$

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^2$ - são os eixos Oy e Ox, respectivamente, do plano xOy).

Notemos que
$$u \doteq (0, 1) \in U \subseteq U \cup W \quad \text{e} \quad w \doteq (1, 0) \in W \subseteq U \cup W$$
mas
$$u + w = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U \cup W,$$
ou seja,
$$u, w \in U \cup W, \quad \text{mas} \quad u + w \notin U \cup W.$$

Portanto $U \cup W$ **<u>não</u>** é subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$

Observação 3.36 *Se U e W são subespaços vetoriais de um espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ e V' também é um subespaço de $(V, +, \cdot)$ que contém U e W (isto é, $U \cup W \subseteq V'$) então V' terá que conter todos os vetores da forma*
$$u + w, \quad \textit{para} \quad u \in U \quad \textit{e} \quad w \in W.$$

Isto motivamos a introduzir a:

Definição 3.37 *Sejam U e W subespaços vetoriais de um espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.*
Definimos a **<u>soma de U e W</u>**, *indicada por $U + W$, como o conjunto*
$$U + W \doteq \{u + w :\ u \in U, w \in W\}. \tag{3.38}$$

Com isto temos a:

Proposição 3.39 *[Soma de subespaços] Sejam* U, W *e* V *como na definição acima.*
Então $U + W$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.
Além disso,

$$U \cup W \subseteq U + W .$$

Demonstração:
Verifiquemos que $U + W$ é subespaço vetorial do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.

1. Como U e W são subsepaços vetoriais do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ temos que

$$O \in U \quad \text{e} \quad O \in W .$$

   Logo

$$O = O + O \in U + W ,$$

   mostrando que o elementro neutro da adição de $(V, +, \cdot)$ pertence $U + W$ (isto é, $O \in U + W$);

2. Sejam $x_1, x_2 \in U + W$ então

$$x_j = u_j + w_j, \quad \text{para} \quad u_j \in U \;\; \text{e} \;\; w_j \in W, \quad j \in \{1, 2\}. \tag{3.40}$$

   Se $\lambda \in \mathbb{R}$ então, das propriedades comutativa e associativa da operação $+$ e do fato que U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$, teremos:

$$x_1 + \lambda \cdot x_2 \overset{(3.40)}{=} [u_1 + w_1] + \lambda \cdot [u_2 + w_2] = \underbrace{(u_1 + \lambda \cdot u_2)}_{\in U} + \underbrace{(w_1 + \lambda \cdot w_2)}_{\in W} \in U + W.$$

Logo, dos itens 1. e 2. acima e da Observação (3.8) segue que $U + W$ é subespaço vetorial do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.

Mostremos que

$$U \cup W \subset U + W .$$

Para isto, seja

$$v \in U \cup W .$$

Se

$$v \in U , \quad \text{então} \quad v = v + O \in U + W .$$

Se

$$v \in W , \quad \text{então} \quad v = O + v \in U + W ,$$

ou seja, em qualquer um desses dois casos teremos

$$U \cup W \subset U + W ,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Observação 3.41 *Ainda usando a notação acima, suponha que* V' *seja um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *que contenha os subconjuntos, não vazios,* U *e* W.

Neste caso, para cada $u \in U \subseteq V'$ *e cada* $w \in W \subseteq V'$, *deveremos ter*

$$u + w \in V', \quad \text{ou seja,} \quad U + W \subseteq V'.$$

Esta observação nos fornece a demonstração da:

Proposição 3.42 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Então $U+W$ *é o menor subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *que contém* $U \cup W$.

Em outras palavras, se V' *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *que contém* $U \cup W$ *então*

$$U \cup W \subseteq U + W \subset V'.$$

Demonstração:

Veja a Observação acima.

∎

Podemos agora introduzir a importante noção dada pela:

Definição 3.43 *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Diremos que a soma $U + W$ *é a* **<u>soma direta de U e W</u>** *se*

$$U \cap W = \{O\}.$$

Neste caso usaremos a notação

$$U \oplus W$$

para representar a soma $U + W$.

Observação 3.44 *Note que sempre temos*

$$\{O\} \subseteq U \cap W,$$

pois U *e* W *são subespaços vetoriais do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Logo $U \oplus V$ *nos diz que* $U \cap W$ **<u>somente</u>** *poderá conter o vetor nulo* O.

A seguir daremos uma caraterização equivalente a fornecida pela Definição acima, a saber:

Proposição 3.45 (Soma direta de subespaços vetoriais) *Sejam* U *e* W *subespaços vetoriais do espaço vetorial* $(V, +, \cdot)$.

Temos que

$$V = U \oplus W$$

se, e somente se, para cada $v \in V$, *existir um único* $u \in U$ *e existir um único* $w \in W$ *tal que*

$$v = u + w,$$

ou seja, cada elemento de $U + W$ *se escrece,* **<u>de modo único</u>**, *como soma de um vetor de* U *com um vetor de* W.

Demonstração:

Suponhamos que

$$V = U \oplus W,$$

isto é,

$$V = U + W \quad \text{e} \quad U \cap W = \{O\}. \tag{3.46}$$

Então, dado $v \in V$, como

$$V = U + W,$$

existem $u \in U$ e $w \in W$, de modo que

$$v = u + w.$$

Queremos mostrar que tal decomposição é **<u>única</u>**.

Suponha que existam $u' \in U$ e $w' \in W$ tais que

$$v = u' + w'.$$

Então, das propriedades de espaços vetoriais, segue que

$$u + w = u' + w', \quad \text{o que implicará que} \quad \underbrace{u - u'}_{\in U} = \underbrace{w' - w}_{\in W}.$$

Mas

$$u - u' \in U \quad \text{e} \quad w' - w \in W$$

e assim

$$u - u' = w' - w \in U \cap W \overset{\text{hipótese}}{=} \{O\},$$

ou seja,

$$u - u' = w' - w = O$$

ou, equivalentemente,

$$u = u' \quad \text{e} \quad w = w',$$

mostrando que $u \in U$ e $w \in W$ são os únicos tal que

$$v = u + w.$$

Reciprocamente, suponhamos agora que, para cada $v \in V$ existam um único $u \in U$ e um único $w \in W$ satisfazendo

$$v = u + w. \tag{3.47}$$

Em particular teremos

$$V = U + W.$$

Resta mostrar que

$$U \cap W = \{O\}.$$

Como U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ segue que

$$O \in U \quad \text{e} \quad O \in W, \quad \text{logo} \quad O \in U \cap W.$$

Mostremos que O é o único elemento em $U \cap W$.

Para isto seja

$$v \in U \cap W, \quad \text{isto é,} \quad v \in U \quad \text{e} \quad v \in W.$$

Por hipótese, existem um único $u \in U$ e um único $w \in W$, de modo que

$$v = u + w. \tag{3.48}$$

Observe que das propriedades da existência do elemento neutro, comutativa, associativa do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$, segue que:

$$v \overset{(3.48)}{=} u + w \overset{(2.3)}{=} (u + w) + O \overset{(2.4)}{=} (u + w) + (v - v) \overset{v \in U \cap W}{=} \underbrace{(u + v)}_{\in U} + \underbrace{(w - v)}_{\in W}$$

com

$$u + v \in U \quad \text{e} \quad w - v \in W.$$

Da unicidade da decomposição (3.48), deveremos ter

$$u = u + v \quad \text{e} \quad w = w - v,$$

o que implicará que

$$v = O.$$

Portanto, $U \cap W = \{O\}$, ou seja,

$$V = U \oplus W,$$

como queríamos mostrar.

∎

Observação 3.49 *Uma prova alternativa para mostrar que*

$$U \cap W = \{O\}$$

seria supor a existência de $v \neq O$ em $U \cap W$.

Como

$$v \in U \cap W, \quad \text{teremos} \quad v \in U \quad \text{e} \quad v \in W.$$

Com isto obteríamos

$$v = \underbrace{2v}_{\in U} \underbrace{-v}_{\in W} = \underbrace{4v}_{\in U} \underbrace{-3v}_{\in W},$$

ou seja, duas decomposições distintas (pois $v \neq O$) para o vetor v já que

$$2v, 4v \in U, \quad 2v \neq 4v \quad \text{e} \quad -v, -3v \in W,$$

o que seria um absurdo.

Temos os seguinte exemplos:

Exemplo 3.50 *Verifique que o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais em* $\mathbb{R}^3$*) é a soma direta dos seguintes subespaços vetoriais*

$$U \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x = y = 0\} \quad e \quad W \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x + y + z = 0\} \tag{3.51}$$

do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Resolução:

Notemos que U é de fato um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, pois

$$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ x = 0\} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \ y = 0\}$$

que são dois subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Deixaremos a verificação destes fatos como exercício para o leitor.

Uma outra verificação alternativa para mostrar que U é de fato um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ seria:

1. Obviamente temos que
$$O \doteq (0, 0, 0) \in U ;$$

2. Se
$$u_1 = (x_1, y_1, z_1) , \ u_2 = (x_2, y_2, z_2) \in U$$
então, de (3.51), segue que
$$x_1 = y_1 = \text{ e } x_2 = y_2 = 0 .$$
Logo,
$$u_1 = (0, 0, z_1) \ \text{ e } \ u_2 = (0, 0, z_2),$$
assim teremos
$$u_1 + u_2 = (0, 0, z_1) + (0, 0, z_2) = (0, 0, z_1 + z_2)$$
que, claramente, é um elemento de U;

3. Se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $u = (x, y, z) \in U$ então, de (3.51), segue que
$$x = y = 0 ,$$
ou seja,
$$u = (0, 0, z) .$$
Portanto
$$\lambda \cdot u = \lambda \cdot (0, 0, z) \overset{\cdot \text{ em } \mathbb{R}^3}{=} (\lambda 0 , \lambda 0 , \lambda z) = (0 , 0 , \lambda z_1)$$
que, é um elemento de U.

Logo, dos itens 1., 2. e 3. acima, segue que U é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que W é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Observemos que, de (3.51), teremos

$$W \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = -x - y\}.$$

Logo, dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ podemos escrever

$$(x, y, z) = \underbrace{(0, 0, z + x + y)}_{\in U} + \underbrace{(x, y, -x - y)}_{\in W}$$

e como

$$(0, 0, z + x + y) \in U \quad \text{e} \quad (x, y, -x - y) \in W$$

obteremos que

$$\mathbb{R}^3 = U + W.$$

Resta agora mostrar que

$$U \cap W = \{O\}.$$

Para isto, seja

$$(x, y, z) \in U \cap W.$$

Se

$$(x, y, z) \in U, \quad \text{deveremos ter} \quad x = y = 0$$

e se

$$(x, y, z) \in W, \quad \text{deveremos ter} \quad x + y + z = 0.$$

Logo, temos que encontrar todas as soluções do sistem linear:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \text{ou seja,} \qquad (x, y, z) = (0, 0, 0) = O.$$

Portanto

$$U \cap W = \{O\},$$

mostrando que

$$\mathbb{R}^3 = U \oplus W.$$

Exemplo 3.52 *Considere* U *e* W *os seguintes subespaços do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*) dados por*

$$U \doteq \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \;\; x = 0\right\} \quad \text{e} \quad W \doteq \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; \;\; y = 0\right\}. \tag{3.53}$$

Mostre que

$$\mathbb{R}^3 = U + W,$$

mas a soma **<u>não</u>** *é direta.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que U e W, dados por (3.53), são subespaços do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Dado $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ podemos escrever

$$(x, y, z) = \underbrace{(0, y, z)}_{\in U} + \underbrace{(x, 0, 0)}_{\in W} \in U + W,$$

pois

$$(0, y, z) \in U \quad \text{e} \quad (x, 0, 0) \in W\,.$$

Portanto,

$$\mathbb{R}^3 = U + W\,.$$

No entanto, a soma **não** é direta, isto é,,

$$U \cap V \neq \{(0, 0, 0)\}\,.$$

De fato, pois, por exemplo,

$$(0, 0, 1) \in U \cap V\,.$$

Deixaremos a cargo do leitor os:

Exercício 3.54 *Vimos no Exemplo (3.17) e no Exercício (3.19) que*

$$W_s \doteq \left\{A \in M_n(\mathbb{R})\,;\, A^t = A\right\} \quad e \quad W_a \doteq \left\{B \in M_n(\mathbb{R})\,;\, B^t = -B\right\}$$

são subespações vetoriais de $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $M_n(\mathbb{R})$).

Mostre que (Exercício 12 (c) da 2.a lista de Exercícios)

$$M_n(\mathbb{R}) = W_s \oplus W_a.$$

Resolução:

Mostre que se $C \in M_n(\mathbb{R})$ então

$$C = \underbrace{\frac{C + C^t}{2}}_{\doteq A} + \underbrace{\frac{C - C^t}{2}}_{\doteq B},$$

e note que

$$A \in W_s \quad \text{e} \quad B \in W_a\,.$$

Observação 3.55 *Logo o Exercício acima nos diz que toda matriz $C \in M_n(\mathbb{R})$ pode ser escrita, **de modo único**, como soma de uma matriz simétrica com uma matriz anti-simétrica.*

Exercício 3.56 *Sejam*

$$P(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}) \doteq \{f : \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})\,;\, f(-x) = f(x),\ \ x \in \mathbb{R}\}$$

e

$$I(\mathbb{R}\,;\,\mathbb{R}) \doteq \{g : \mathscr{F}(\mathbb{R})\,;\, g(-x) = g(x),\ \ x \in \mathbb{R}\},$$

onde $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$ *é o espaço vetorial real do Exemplo* (2.22).

1. *Mostre que* $P(\mathbb{R} : \mathbb{R})$ *e* $I(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *são subespações vetoriais de* $(\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$*).*

2. *Mostre que (Exercício 5 da 2.a lista de Exercícios)*

$$\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R}) = P(\mathbb{R};\mathbb{R}) \oplus I(\mathbb{R};\mathbb{R})\,.$$

Resolução:

Mostre que se $h \in \mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ então

$$h(x) = \underbrace{\frac{h(x) + h(-x)}{2}}_{\doteq f(x)} + \underbrace{\frac{h(x) - h(-x)}{2}}_{\doteq g(x)}, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}$$

e note que

$$f \in P(\mathbb{R};\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad g \in I(\mathbb{R};\mathbb{R})\,.$$

Observação 3.57 $P(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *(*$I(\mathbb{R};\mathbb{R})$*, respectivamente) é o conjunto formado por todas as funções de* $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *que são funções pares (ímpares, respectivamente).*

Logo o Exercício acima nos diz que toda função de $\mathscr{F}(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *pode ser escrita,* **de modo único**, *como soma de uma função para com uma função ímpar.*

Podemos estender a noção de soma de subespaços de um espaço vetorial real para um número finito de subestaços vetoriais, a saber:

Definição 3.58 *Sejam* $U_1, \dots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Definimos **soma dos n subsepaços vetoriais $U_1, \cdots, U_n$**, *que será indicada por* $\sum_{j=1}^{n} U_j$, *por*

$$\sum_{j=1}^{n} U_j = U_1 + \cdots + U_n \doteq \{u_1 + \cdots + u_n\,;\, u_j \in U_j,\ j = 1, \dots, n\}\,. \tag{3.59}$$

Como isto podemos enunciar a:

Proposição 3.60 *Sejam* $U_1, \dots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Então

$$U_1 + \cdots + U_n \quad \textit{e} \quad U_1 \cap \cdots \cap U_n$$

são um subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

As demonstrações são semelhantes a da Proposição (3.39) e da Proposição (3.35), respectivamente.

As suas elaborações serão deixadas como exercício para o leitor.

∎

Com isto podemos estender a noção de soma direta para um número finito de subespaços vetoriais de um espaço vetorial real, a saber:

Definição 3.61 *Sejam* $U_1, \ldots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial* $(V, +, \cdot)$.

Dizemos que a **soma dos n subsepaços vetoriais U_1 a U_n** *é uma soma direta se, para cada* $j \in \{1, \cdots, n\}$, *temos que:*

$$U_j \cap (U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} \cdots + U_n) = \{O\}.$$

Neste caso usaremos a notação

$$U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \quad \text{ou} \quad \bigoplus_{j=1}^{n} U_j\,,$$

para denotar a soma dos $\underline{n}$ subsepaços vetoriais $U_1, \cdots, U_n$.

Observação 3.62

1. *A expressão*

$$(U_1 + \cdots + U_{j-1} + U_{j+1} \cdots + U_n)$$

   será denotada por

$$\left(U_1 + \cdots + \widehat{U_j} + \cdots + U_n\right),$$

   onde símbolo $\widehat{U_j}$ *significa que a parcela* U_j *deve ser omitida da soma considerada.*

2. *Notemos que, para cada* $j \in \{1, \cdots, n\}$, *temos que* U_j *é um subsepaço vetorial do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

   Logo $O \in U_j$, *assim sempre teremos que*

$$O \in U_j \cap \left(U_1 + \cdots + \widehat{U_j} + \cdots + U_n\right).$$

Com isto temos a:

Proposição 3.63 *Sejam* $U_1, \ldots, U_n$ *subespaços vetoriais de um espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Então

$$V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_n \tag{3.64}$$

se, e somente se, dado $v \in V$ *existe, para cada* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *um único* $u_j \in U_j$ *tal que*

$$v = u_1 + \cdots + u_n\,. \tag{3.65}$$

Demonstração:

A prova é feita por indução sobre $\underline{n}$ e é análoga à da proposição (3.45).

Devido a este fato deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

∎

Apliquemos isto ao:

Exemplo 3.66 *Mostre que o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*) é soma direta dos seguintes subespaços vetoriais*

$$U_o \doteq \{p_o\,;\ p_o(x) = a_o\,,\ \textit{para } x \in \mathbb{R}\,,\ \textit{para algum } a_o \in \mathbb{R}\}\,, \tag{3.67}$$

$$U_1 \doteq \{p_1\,;\ p_1(x) = a_1 x\,,\ \textit{para } x \in \mathbb{R}\,,\ \textit{para algum } a_1 \in \mathbb{R}\}, \tag{3.68}$$

$$U_2 \doteq \{p_2\,;\ ,\ p_2(x) = a_2 x^2\,,\ \textit{para } x \in \mathbb{R}\,,\ \textit{para algum } a_2 \in \mathbb{R}\}. \tag{3.69}$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que U_o, U_1 e U_2 são subespações vetoriais do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Afirmamos que

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_o \oplus U_1 \oplus U_2\,.$$

Mostremos, primeiramente, que

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_o + U_1 + U_2\,.$$

Para isto, seja $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

Logo existem $a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} p(x) &= a_o + a_1 x + a_2 x^2 \\ &= \underbrace{p_o(x)}_{\in U_o} + \underbrace{p_1(x)}_{\in U_1} + \underbrace{p_2(x)}_{\in U_2}\,, \quad \text{para} \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

mostrando que

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_o + U_1 + U_2\,.$$

Verifiquemos que a soma é direta.

1. Afirmamos que

$$U_o \cap (U_1 + U_2) = \{O\}\,.$$

Seja

$$p \in U_o \cap (U_1 + U_2)\,, \quad \text{isto é,} \quad p \in U_o \quad \text{e} \quad p \in (U_1 + U_2)\,.$$

Então existem $a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(x) = \underbrace{p_o(x)}_{\in U_o} \overset{(3.67)}{=} a_o \tag{3.70}$$

e

$$p(x) = \underbrace{p_1(x)}_{\in U_1} + \underbrace{p_2(x)}_{\in U_2} \overset{(3.68)\text{ e }(3.69)}{=} a_1 x + a_2 x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.71}$$

Se o polinômio $\underline{p}$ não fosse o polinômio nulo teríamos, por (3.70), que o polinômio p deveria ter grau 0, coincidindo com o polinômio $\underline{p}$, dado por (3.71), de grau no mínimo 1, o que seria um absurdo.

Logo, o polinômio $\underline{p}$ deve ser o polinômio nulo, ou seja,

$$p(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

mostrando que

$$U_o \cap (U_1 + U_2) = \{O\}\,.$$

2. Afirmamos que

$$U_1 \cap (U_o + U_2) = \{O\}\,.$$

Seja

$$p \in U_1 \cap (U_o + U_2)\,, \quad \text{isto é,} \quad p \in U_1 \quad \text{e} \quad p \in (U_o + U_2)\,.$$

Então existem $a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(x) = \underbrace{p_1(x)}_{\in U_1} \overset{(3.68)}{=} a_1 x \tag{3.72}$$

e

$$p(x) = \underbrace{p_o(x)}_{\in U_o} + \underbrace{p_2(x)}_{\in U_2} = a_o + a_2 x^2\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.73}$$

Se o polinômio $\underline{p}$ não fosse o polinômio nulo teríamos, por (3.72), que o polinômio $\underline{p}$ teria grau 1, coincidindo com o polinômio $\underline{p}$, dado por (3.73), que teria grau 0 (se $a_2 = 0$) ou 2 (se $a_2 \neq 0$), o que seria um absurdo.

Logo, o polinômio $\underline{p}$ deve ser o polinômio nulo, ou seja,

$$p(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

mostrando que

$$U_1 \cap (U_o + U_2) = \{O\}\,.$$

3. Afirmamos que

$$U_2 \cap (U_o + U_1) = \{O\}\,.$$

Seja

$$p \in U_2 \cap (U_o + U_1)\,, \quad \text{isto é,} \quad p \in U_2 \quad \text{e} \quad p \in (U_o + U_1)\,.$$

Então existem $a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(x) = \underbrace{p_2(x)}_{\in U_2} \overset{(3.69)}{=} a_2 x^2 \tag{3.74}$$

e

$$p(x) = \underbrace{p_o(x)}_{\in U_o} + \underbrace{p_1(x)}_{\in U_1} = a_o + a_1 x\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{3.75}$$

Se o polinômio $\underline{p}$ não fosse o polinômio nulo teríamos que o polinômio $\underline{p}$, dado por (3.74), deveria ter grau 2, coincidindo com o polinômio $\underline{p}$, dado por (3.75), que tem grau 0 (se $a_1 = 0$) ou 1 (se $a_1 \neq 0$), o que seria um absurdo.

Logo, o polinômio $\underline{p}$ deve ser o polinômio nulo, ou seja,

$$p(x) = 0\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

mostrando que

$$U_2 \cap (U_o + U_1) = \{O\}\,.$$

Com isto, podemos conlcuir que

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = U_1 \oplus U_2 \oplus U_3.$$

3.3 Exercícios

Capítulo 4

Combinações Lineares

4.1 Introdução e Exemplos

Vimos no capítulo anterior que um subespaço vetorial é um subconjunto de um espaço vetorial real que é fechado com relação à adição de vetores e também com relação à multiplicação de vetor por escalar. Em outras palavras, quando somamos dois vetores de um subespaço vetorial ou multiplicamos um vetor do subespaço por um escalar, o resultado é um elemento deste subespaço. Quando combinamos repetidas vezes estas ações temos o que chamamos de *combinação linear entre vetores.*

Mais precisamente,

Definição 4.1 *Sejam* $u_1, \ldots, u_n$ *elementos de um espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Diremos que o vetor $u \in V$ *é uma* **combinação linear** *dos vetores* $u_1, \ldots, u_n$ *se existirem escalares* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n. \tag{4.2}$$

Observação 4.3 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real e* $U \subseteq V$ *um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Se $u_1, \ldots, u_n \in U$ *e* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *então a combinação linear*

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n$$

pertence a U, *isto é,*

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \in U\,.$$

Exemplo 4.4 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*) e o polinômio* $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *dado por*

$$p(x) \doteq 2 + x^2\,, \quad \textit{para cada,} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.5}$$

Mostre que o polinômio $\underline{p}$ *é uma combinação dos polinômios* $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, *onde*

$$p_o(x) \doteq 1\,, \quad p_1(x) \doteq x\,, \quad p_2(x) \doteq x^2\,, \quad \textit{para cada,} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.6}$$

Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned} p(x) = 2 + x^2 &= 2 \cdot \underbrace{1}_{=p_o(x)} + 0 \cdot \underbrace{x}_{=p_1(x)} + 1 \cdot \underbrace{x^2}_{=p_2(x)} \\ &= \underbrace{2}_{\doteq \alpha_o} \cdot p_o(x) + \underbrace{0}_{\doteq \alpha_1} \cdot p_1(x) + \underbrace{1}_{\doteq \alpha_2} \cdot p_2(x)\,, \end{aligned}$$

para cada $x \in \mathbb{R}$, isto é,

$$p = 2 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2\,, \tag{4.7}$$

mostrando que realmente o polinômio $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por (4.5) é uma combinação dos polinômios $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, dados por (4.6).

Exemplo 4.8 *Mostre que no espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$), o polinômio $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por*

$$p(x) \doteq 1 + x^2\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \tag{4.9}$$

é uma combinação dos polinômios $q_o, q_1, q_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, onde

$$q_o(x) \doteq 1, \quad q_1(x) \doteq 1 + x \quad \textit{e} \quad q_2(x) \doteq 1 + x + x^2\,, \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{4.10}$$

Resolução:

Para mostrarmos o que é pedido precisamos encontrar números reais α, β e γ, de modo que

$$p = \alpha \cdot q_o + \beta \cdot q_1 + \gamma \cdot q_2\,. \tag{4.11}$$

Ou seja, para cada $x \in \mathbb{R}$, precisamos encontrar α, β e γ de tal modo que:

$$\begin{aligned} 1 + x^2 \overset{(4.9)}{=} p(x) &\overset{(4.11)}{=} \alpha\, q_o(x) + \beta\, q_1(x) + \beta\, q_2(x) \\ &\overset{(4.10)}{=} \alpha + \beta\,(1 + x) + \gamma\,(1 + x + x^2) \\ &= (\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + \gamma)\, x + \gamma\, x^2\,, \end{aligned}$$

que é equivalente ao sistema linear:

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 1 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 1 \end{cases}, \quad \text{cuja (única) solução será:} \quad \begin{cases} \alpha = 1\,, \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1\,, \end{cases}$$

ou seja,

$$p = 1 \cdot q_o + (-1) \cdot q_1 + 1 \cdot q_2\,, \tag{4.12}$$

mostrando que o polinômio $\underline{p}$ é combinação linear dos vetores q_o, q_1, q_2, em $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

4.2 Geradores

Tendo a defintção de combinação linear podemos introduzir a:

Definição 4.13 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real e* S *um subconjunto não vazio de* V.

Denotaremos por $[S]$ *o conjunto formado por todas as combinações lineares dos elementos de* S.

Em outras palavras, $u \in [S]$ *se, e somente se, existirem* $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *e* $u_1, \dots, u_n \in S$ *tais que*

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \,, \tag{4.14}$$

ou ainda,

$$[S] \doteq \{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \,;\, u_i \in S \;\; e \;\; \alpha_i \in \mathbb{R} \,, \;\; para \; i \in \{1, \cdots, n\}\} \,. \tag{4.15}$$

Com isto temos a:

Proposição 4.16 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real e* S *um subconjunto não vazio de* V.

Então $[S]$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

1. Como $S \neq \emptyset$, existe $u \in S$.

   Com isto teremos que

   $$O \overset{\text{Prop. (2.31) tem 2.}}{=} 0 \cdot u \overset{(4.15)}{\in} [S],$$

   ou seja, o vetor nulo é combinação linear (o escalar será o número real 0) do vetor $u \in S$, assim

   $$O \in [S] \,.$$

2. Se $u, v \in [S]$, de (4.15), deverão existir escalares

   $$\alpha_1, \dots, \alpha_n \,, \beta_1, \dots, \beta_m \in \mathbb{R}$$

   e vetores

   $$u_1, \dots, u_n \,, v_1 \,, \dots, v_m \in S \,,$$

   de modo que

   $$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_m \cdot v_m \,. \tag{4.17}$$

   Assim, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, segue, das propriedades básicas de espaços vetoriais reais, que

   $$\begin{aligned} u + \lambda \cdot v &\overset{(4.17)}{=} [\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] + \lambda \cdot [\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_m \cdot v_m] \\ &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n + (\lambda\beta_1) \cdot v_1 + \cdots + (\lambda\beta_m) \cdot v_m \overset{(4.15)}{\in} [S] \,, \end{aligned}$$

mostrando que

$$(u + \lambda) \cdot v \in [S] .$$

Portanto, dos itens 1.e 2. acima e da Observação (3.8), segue que $[S]$ será um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.

∎

Definição 4.18 *Sejam* S *e* V *como na Definição acima.*

Diremos que $[S]$ *é o* <u>**subespaço vetorial gerado por** S.</u>

Os elementos do conjunto S *serão denominados* <u>**geradores**</u> *do subespaço vetorial* $[S]$.

Se

$$S = \{u_1, \ldots, u_n\}$$

utilizaremos a seguinte notação

$$[u_1, \ldots, u_n] \doteq [S] .$$

Observação 4.19 *Com as definições acima, se* $u_1, \cdots, u_n \in V$*, temos que*

$$[u_1, \ldots, u_n] \doteq \{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \, ; \, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}\} . \tag{4.20}$$

Com isto temos a:

Proposição 4.21 *Sejam* S *e* T *subconjuntos, não-vazios, de um espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

1. *Temos que*
$$S \subseteq [S] . \tag{4.22}$$

2. *Se*
$$S \subseteq T , \qquad \textit{então} \quad [S] \subseteq [T] . \tag{4.23}$$

3. *Temos que*
$$[[S]] = [S] . \tag{4.24}$$

4. *Se* S *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *então*
$$S = [S]; \tag{4.25}$$

5. *Sempre vale*
$$[S \cup T] = [S] + [T] . \tag{4.26}$$

Demonstração:

1. Notemos que
$$\text{se} \quad u \in S, \qquad \text{então} \quad u = 1 \cdot u,$$
ou seja, o vetor $\underline{u}$ é combinação linear (com escalar igual a 1) do próprio vetor $\underline{u}$, que pertence a S.

   Logo
$$u = 1 \cdot u \in [S],$$
mostrando que
$$S \subseteq [S],$$
como queríamos demonstrar.

2. Notemos que, se $u \in [S]$, de (4.15), segue que existirão escalares
$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$
e vetores
$$u_1, \ldots, u_n \in S,$$
tais que
$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n .$$
Como
$$S \subseteq T \qquad \text{teremos que} \quad u_1, \ldots, u_n \in T .$$
Portanto, o vetor $\underline{u}$ é combinação linear de vetores de T, ou seja,
$$u \in [T],$$
ou seja,
$$[S] \subseteq [T],$$
como queríamos demonstrar.

3. Pelo item 1. desta Proposição, segue que $S \subseteq [S]$.

   Logo, do mesmo resultado, segue que
$$[S] \subseteq [[S]] .$$
Para mostrar a outra inclusão, consideremos
$$u \in [[S]] .$$
Segue da Definição (4.13), de subespaço gerado, que o vetor u é uma combinação linear de elementos de $[S]$.

Novamente pela Definição (4.13), como cada elemento de $[S]$ é uma combinação linear de elementos de S, resulta que o vetor $\underline{u}$ será uma combinação linear de elementos de S, ou seja, $u \in [S]$, mostrando que

$$[[S]] \subseteq [S]\,.$$

Portanto

$$[[S]] = [S]\,,$$

como queríamos demonstrar.

4. Pelo item 1. desta Proposição, segue que

$$S \subseteq [S]\,.$$

Mostremos a outra inclusão.

Para isto, seja $u \in [S]$.

Então o vetor u é uma combinação linear de elementos de S.

Como S é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$, esta combinação linear será um elemento de S, ou seja,

$$[S] \subseteq S\,.$$

Portanto

$$S = [S]\,,$$

como queríamos demonstrar.

5. Mostremos que

$$[S \cup T] \subseteq [S] + [T]\,.$$

Para isto, seja

$$u \in [S \cup T]\,.$$

Da Definição (4.13) de subespaço gerado segue que, existirão escalares

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n\,, \beta_1, \ldots, \beta_m \in \mathbb{R}$$

e vetores

$$u_1, \ldots, u_n \in S \quad \text{e} \quad v_1, \ldots, v_m \in T\,,$$

tais que

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n + \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_m \cdot v_m \\ &= (\underbrace{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n}_{\in [S]}) + (\underbrace{\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_m \cdot v_m}_{\in [T]}) \in [S] + [T]\,, \end{aligned}$$

ou seja, vale

$$[S \cup T] \subseteq [S] + [T]\,.$$

Mostremos agora que

$$[S] + [T] \subseteq [S \cup T] .$$

Para isto, seja

$$u \in [S] + [T] .$$

Então

$$u = v + w , \quad \text{onde} \quad v \in [S] \quad \text{e} \quad w \in [T] .$$

Da Definição (4.13) de subespaço gerado, deverão existir escalares

$$\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q \in \mathbb{R}$$

e vetores

$$v_1, \dots, v_p \in S \quad \text{e} \quad w_1, \dots, w_q \in T ,$$

tais que

$$\begin{aligned} u = v + w &= (\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_p \cdot v_p) + (\beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q) \\ &= \alpha_1 \cdot \underbrace{v_1}_{\in S \subseteq S \cup T} + \cdots + \alpha_p \cdot \underbrace{v_p}_{\in S \subseteq S \cup T} + \beta_1 \cdot \underbrace{w_1}_{\in T \subseteq S \cup T} + \cdots + \beta_q \cdot \underbrace{w_q}_{\in T \subseteq S \cup T} \in [S \cup T] , \end{aligned}$$

ou seja, vale

$$[S] + [T] \subseteq [S \cup T] ,$$

completando a demonstração do resultado.

∎

Com as definições acima podemos introduzir a:

Definição 4.27 *Dizemos que um espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *é* **finitamente gerado** *se existir um subconjunto finito* $S \subseteq V$ *tal que*

$$V = [S] . \tag{4.28}$$

A seguir temos os seguintes exemplos de espaços vetoriais reais finitamente gerados e não finitamente gerado.

Exemplo 4.29 *O espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^n$*) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos os seguintes vetores de $\mathbb{R}^4$:

$$e_1 \doteq (1, 0, 0, 0), \ e_2 \doteq (0, 1, 0, 0), \ e_3 \doteq (0, 0, 1, 0), \ e_4 \doteq (0, 0, 0, 1) .$$

Então se

$$u \in \mathbb{R}^4 ,$$

temos que existem escalares $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = (a_1, a_2, a_3, a_4)\,.$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
u &= (a_1, a_2, a_3, a_4) \\
&= (a_1, 0, 0, 0) + (0, a_2, 0, 0, 0) + (0, 0, a_3, 0) + (0, 0, 0, a_4) \\
&= a_1 \cdot (1, 0, 0, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 0, 0, 0) + a_3 \cdot (0, 0, 1, 0) + a_4 \cdot (0, 0, 0, 1) \\
&= a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + a_3 \cdot e_3 + a_4 \cdot e_4\,,
\end{aligned}$$

mostrando que qualquer vetor $u \in \mathbb{R}^4$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores $e_1, e_2, e_3, e_4 \in \mathbb{R}^4$, ou seja,

$$\mathbb{R}^4 = [e_1, e_2, e_3, e_4]\,.$$

Portanto o espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot\right)$ é finitamente gerado.

Notemos que o conjunto

$$S \doteq \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

é um conjunto finito formado por geradores do espaço vetorial real $\left(\mathbb{R}^4, +, \cdot\right)$.

Podemos estender o exemplo acima a seguinte situação:

Exercício 4.30 *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. O espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^n$) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos os seguintes vetores de $\mathbb{R}^n$:

$$e_1 \doteq (1, 0, \ldots, 0)\,, \; e_2 \doteq (0, 1, 0, \ldots, 0)\,, \; \ldots\,, \; e_n \doteq (0, \ldots, 0, 1)\,.$$

Então se

$$u \in \mathbb{R}^n\,,$$

temos que existem escalares $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = (a_1, a_2, \cdots, a_n)\,.$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
u &= (a_1, a_2, \cdots, a_n) \\
&= (a_1, 0, \cdots, 0) + (0, a_2, 0, \cdots, 0) + \cdots + (0, \cdots, 0, a_n) \\
&= a_1 \cdot (1, 0, \cdot, 0) + a_2 \cdot (0, 1, 0, \cdots, 0) + \cdots + a_n \cdot (0, \cdots, 0, 1) \\
&= a_1 \cdot e_1 + a_2 \cdot e_2 + \cdots + a_n \cdot e_n\,,
\end{aligned}$$

mostrando que o vetor $u \in \mathbb{R}^n$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores $e_1 \cdots, e_n \in \mathbb{R}^n$, ou seja,

$$\mathbb{R}^n = [e_1, \cdots, e_n]\,.$$

Portanto o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ é finitamente gerado.

Notemos que o conjunto

$$S \doteq \{e_1, \cdots, e_n\}$$

é um conjunto finito formado por geradores do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Exemplo 4.31 *O espaço vetorial* $(M_{2\times3}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_{2\times3}(\mathbb{R})$*) é gerado pelas seguintes 6 matrizes de tipo* 2×3*:*

$$E_{11} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{13} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$E_{21} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{22} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{23} \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Em particular, $(M_{2\times3}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, se

$$A \in M_{2\times3}(\mathbb{R}),$$

segue que existirão escalares $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23} \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \end{pmatrix} \\
&= a_{11} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&+ a_{21} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{22} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{23} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= a_{11} \cdot E_{11} + a_{12} \cdot E_{12} + a_{13} \cdot E_{13} + a_{21} \cdot E_{21} + a_{22} \cdot E_{22} + a_{23} \cdot E_{23},
\end{aligned}$$

mostrando que a matriz $A \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$, pode ser escrita como combinação linear das matrizes $E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23} \in M_{2\times3}(\mathbb{R})$, ou seja,

$$M_{2\times3}(\mathbb{R}) = [E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}].$$

Portanto o espaço vetorial real $(M_{2\times3}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado.

Notemos que o conjunto

$$S \doteq \{E_{11}, E_{12}, E_{13}, E_{21}, E_{22}, E_{23}\}$$

é um conjunto finito formado por geradores do espaço vetorial real $(M_{2\times3}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Podemos estender o Exemplo acima acima ao seguinte Exercício, cuja resolução será deixada para o leitor:

Exercício 4.32 *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *fixados. O espaço vetorial* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$*) é gerado pelas* $m \cdot n$ *matrizes:*

$$E_{kl} \doteq \left(\delta_{i,j}^{(k,l)}\right), \quad \textit{para cada} \quad k \in \{1, \dots, m\} \quad \textit{e} \quad l \in \{1, \dots n\},$$

onde, para cada $k \in \{1, \dots, m\}$ *e* $l \in \{1, \dots n\}$ *fixados, temos que:*

$$\delta_{i,j}^{(k,l)} \doteq \begin{cases} 1, & \textit{para } (i,j) = (k,l) \\ 0, & (i,j) \neq (k,l) \end{cases}.$$

Exemplo 4.33 *O espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ os seguintes polinômios:

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Então se

$$p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}),$$

temos que existirão escalares

$$a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R},$$

tais que

$$p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_o . \underbrace{1}_{=p_o(x)} + a_1 \cdot \underbrace{x}_{=p_1(x)} + \cdots + a_2 \cdot \underbrace{x^2}_{=p_2(x)} \\ &= (a_o . p_o + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2)(x), \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

mostrando que o polinômio $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear dos polinômios $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\mathscr{P}_2(\mathbb{R}) = [p_o, p_1, p_2].$$

Portanto o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado.

Notemos que o conjunto

$$S \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$$

é um conjunto finito formado por geradores do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Podemos estender o Exemplo acima a seguinte situação:

Exercício 4.34 *Seja $n \in \mathbb{N}$ fixado. O espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$) é finitamente gerado.*

Resolução:

De fato, consideremos $p_o, \cdots, p_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ os seguintes polinômios:

$$p_o(x) \doteq 1\,, \quad p_1(x) \doteq x\,, \quad p_2(x) \doteq x^2\,, \quad \cdots\,, \quad p_n(x) \doteq x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Então se

$$p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$$

temos que existirão escalares

$$a_o, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\,,$$

tais que

$$p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} p(x) &= a_o.\underbrace{1}_{=p_o(x)} + a_1 \cdot \underbrace{x}_{=p_1(x)} + \cdots + a_n \cdot \underbrace{x^n}_{=p_n(x)} \\ &= (a_o.p_o + a_1 \cdot p_1 + \cdots + a_n \cdot p_n)(x)\,, \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R}\,, \end{aligned}$$

mostrando que o polinômio $p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ pode ser escrito como combinação linear dos polinômios $p_o, \cdots, p_n \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$, ou seja,

$$\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) = [p_o, \cdots, p_n]\,.$$

Portanto o espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado.

Notemos que conjunto

$$S \doteq \{p_o, \cdots, p_n\}$$

é um conjunto finito formado por geradores do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Um outro exemplo importante é dado pelo:

Exemplo 4.35 *Consideremos o espaço vetorial real $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$ onde formado $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ denota o conjunto formado por todos os polinômios com coeficientes reais.*

*Afirmamos que $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ **não** é finitamente gerado.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é um espaço vetorial (onde $+$ e $\cdot$ são as operações de $\mathscr{F}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$)

Note que

$$\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})\,,$$

para cada $n \in \mathbb{N}$ fixado.

Suponhamos, por absurdo, que o espaço vetorial real $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ é finitamente gerado, ou seja, existe um número finito de polinômios $p_1, \ldots, p_n \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ tais que

$$\mathscr{P}(\mathbb{R}) = [p_1, \ldots, p_n] .$$

Seja $N \in \mathbb{N}$, o grau mais alto dentre os polinômios

$$p_1, \ldots, p_n ,$$

que existe pois, temos somente um número finito de polinômios da coleção acima.

Com isto temos que o polinômio $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ dado por

$$p(x) \doteq x^{N+1} , \quad \text{para cada} \quad x \in \mathbb{R} ,$$

não poderá ser escrito como combinação linear dos polinômios

$$p_1, \ldots, p_n ,$$

pois o maior grau dentre esse os polinômios é $\underline{N}$, que é menor que o grau do polinômio $\underline{p}$, que é $N + 1$.

Assim,

$$p \notin [p_1, \ldots, p_n] = \mathscr{P}(\mathbb{R}) ,$$

o que seria um absurdo, pois $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Portanto $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ **não** é um espaço vetorial finitamente gerado.

Observação 4.36 *Observemos que*

$$[p_o, p_1, \cdots, p_n, \cdots] = \mathscr{P}(\mathbb{R}),$$

onde, os polinômios $p_j \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$*, para* $j \in \{0, 1, 2, 3, \cdots\}$*, são dados por:*

$$p_o(x) \doteq 1 , \quad p_1(x) \doteq x , \quad p_2(x) \doteq x^2 , \quad \cdots , \quad p_n(x) \doteq x^n , \quad \cdots , \quad \textit{para cada} \quad x \in \mathbb{R} .$$

A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Temos também a:

Proposição 4.37 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real gerado pelos vetores* $u_1, \ldots, u_n$*, isto é,*

$$V = [u_1, \cdots, u_n] .$$

Suponhamos que o vetor u_1 *é uma combinação linear dos vetores* $u_2, \ldots, u_n$*, ou seja,*

$$u_1 \in [u_2, \cdots, u_n] .$$

Então o espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ *será gerado por* $u_2, \ldots, u_n$*, isto é,*

$$[u_2, \cdots, u_n] = [u_1, \cdots, u_n] = V .$$

Demonstração:

Devemos mostrar que qualquer vetor $u \in V$ pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores $u_2, \ldots, u_n$, ou seja,

$$V = [u_2, \cdots, u_n] .$$

Notemos que se

$$u \in V = [u_1, u_2, \cdots, u_n] ,$$

temos que existirão escalares

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} ,$$

tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n . \tag{4.38}$$

Mas, por hipótese, o vetor u_1 é uma combinação linear dos vetores $u_2, \ldots, u_n$, ou seja,

$$u_1 \in [u_2, \cdots, u_n] .$$

Logo, deverão existir escalares

$$\beta_1, \ldots, \beta_{n-1}$$

de modo que

$$u_1 = \beta_1 \cdot u_2 + \cdots + \beta_{n-1} \cdot u_n . \tag{4.39}$$

Logo, de (4.38) e (4.39), e das propriedades básicas de espaços vetoriais, podemos obter:

$$\begin{aligned} u &\overset{(4.38)}{=} \alpha_1 \cdot \underbrace{u_1}_{\overset{(4.39)}{=} \beta_1 \cdot u_2 + \cdots + \beta_{n-1} \cdot u_n} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &= \alpha_1 \cdot (\beta_1 \cdot u_2 + \cdots + \beta_{n-1} u_n) + \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &= (\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2) \cdot u_2 + \cdots + (\alpha_1 \beta_{n-1} + \alpha_n) \cdot u_n, \end{aligned}$$

ou seja, o vetor $\underline{u}$ pode ser escrito como como uma combinação linear dos vetores

$$u_2, \ldots, u_n ,$$

isto é,

$$u \in [u_2, \cdots, u_n] , \quad \text{ou seja,} \quad V = [u_2, \cdots, u_n] ,$$

como queriamos mostrar.

∎

Observação 4.40 *O resultado acima nos diz que se um espaço vetorial real é gerado por um número finito de vetores e um desses vetores pode ser obtido como combinação linear dos restantes, então o espaço vetorial real, dado incialmente, poderá ser gerado pelos vetores restantes, retirando-se o vetor que pode ser obtido como combinação linear dos outros da lista inicial.*

Apliquemos isto ao

Exemplo 4.41 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^4$*) e os seguintes seus subespaços vetoriais*

$$U \doteq \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x - y + t + z = 0\right\}, \; W \doteq \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x + y - t + z = 0\right\}. \quad (4.42)$$

Encontre um conjunto finito de geradores para os seguintes subespaços vetoriais do espaço vetorial $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$*:*

$$U, \quad W, \quad U \cap W \quad e \quad U + W.$$

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

Encontremos geradores para cada um dos subespaços vetoriais acima:

1. Para o subespaço vetorial U:

   Notemos que se
   $$u \doteq (x, y, z, t) \in U,$$
   então, de (4.42), deveremos ter
   $$x - y + t + z = 0 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad y = x + z + t.$$

   Portanto,
   $$(x, \underbrace{y}_{=x+z+t}, z, t) = (x, x + z + t, z, t) = (x, x, 0, 0) + (0, z, z, 0) + (0, t, 0, t)$$
   $$= x \cdot \underbrace{(1, 1, 0, 0)}_{\doteq u_1} + z \cdot \underbrace{(0, 1, 1, 0)}_{\doteq u_2} + t \cdot \underbrace{(0, 1, 0, 1)}_{\doteq u_3},$$
   ou seja, o vetor $u \in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores u_1, u_2, u_3 (os escalares serão x, z e t, respectivamente), isto é,
   $$U = [u_1, u_2, u_3] = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)], \quad (4.43)$$
   mostrando que o subsepaço vetorial U é finitamente gerado.

2. Para o subespaço vetorial W:

   Notemos que se
   $$u \doteq (x, y, z, t) \in W,$$
   então, de (4.43), deveremos ter
   $$x + y - t + z = 0 \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad t = x + y + z.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}(x\,,y\,,z\,,\underbrace{t}_{=x+y+z}) &= (x\,,y\,,z\,,x+y+z) = (x\,,0\,,0\,,x)+(0\,,y\,,0\,,y)+(0\,,0\,,z\,,z)\\ &= x\cdot\underbrace{(1,0,0,1)}_{\doteq w_1}+y\cdot\underbrace{(0,1,0,1)}_{\doteq w_2}+z\cdot\underbrace{(0,0,1,1)}_{\doteq w_3},\end{aligned}$$

ou seja, o vetor $u \in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores w_1, w_2, w_3 (os escalares serão x, y e z, respectivamente), isto é,

$$W = [w_1, w_2, w_3] = [(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)]\,, \tag{4.44}$$

mostrando que o subespaço vetorial W é finitamente gerado.

3. Para o subespaço vetorial $U \cap W$:

   Notemos que se

   $$(x\,,y\,,z\,,t) \in U \cap W\,,$$

   então

   $$(x\,,y\,,z\,,t) \in U \quad \text{e} \quad (x\,,y\,,z\,,t) \in W\,,$$

   ou seja, de (4.42) e (4.43), deveremos ter que resolver o seguinte sistema linear

   $$\begin{cases} x-y+t+z=0\\ x+y-t+z=0, \end{cases}, \quad \text{cujas soluções são} \quad \begin{cases} z=-x\\ t=y \end{cases},$$

   para cada $x, y \in \mathbb{R}$.

   Deste modo, teremos:

   $$\begin{aligned}(x\,,y\,,\underbrace{z}_{=-x}\,,\underbrace{t}_{=y}) &= (x\,,y\,,-x\,,y) = (x\,,0\,,-x\,,0)+(0\,,y\,,0\,,y)\\ &= x\cdot\underbrace{(1,0,-1,0)}_{\doteq v_1}+y\cdot\underbrace{(0,1,0,1)}_{\doteq v_2}\end{aligned}$$

   u seja, o vetor $u \in U$, pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1, v_2 (os escalares serão x e y, respectivamente), isto é,

   $$U \cap W = [v_1, v_2] = [(1,0,-1,0),(0,1,0,1)]\,, \tag{4.45}$$

   mostrando que o subsepaço vetorial $U \cap W$ é finitamente gerado.

4. Para o subespaço vetorial $U \cup W$:

   Da Proposição (4.21) item 4. segue que

   $$U = [U] \quad \text{e} \quad W = [W]\,,$$

assim

$$U + W \overset{\text{Prop. (4.21) item 4.]}}{=} [U] + [W] \overset{U \overset{(4.43)}{=} [u_1,u_2,u_3] \text{ e } W \overset{(4.44)}{=} [w_1,w_2,w_3]}{=} [u_1, u_2, u_3] \cup [w_1, w_2, w_3]$$
$$\overset{\text{Prop. (4.21) item 5.}}{=} [u_1, u_2, u_3, w_1, w_2, w_3] .$$

Com isto teremos que:

$$U + W = [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), \underbrace{(0, 1, 0, 1)}, (1, 0, 0, 1), \underbrace{(0, 1, 0, 1)}, (0, 0, 1, 1)]$$
$$\overset{w_2 = u_3}{=} [(1, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1)] , \tag{4.46}$$

mostrando que o subsepaço vetorial $U \cup W$ é finitamente gerado.

Observação 4.47 *Observemos que no Exemplo acima temos que:*

$$(1, 1, 0, 0) = (1, 0, 0, 1) + (0, 1, 1, 0) - (0, 0, 1, 1) .$$

Portanto, pela Proposição (4.37), segue que podemos excluir o vetor $(1, 1, 0, 0)$ *da lista dos geradores do subespaço vetorial real* $U+W$*, que os vetores restantes continuarão gerando o subespaço vetorial* $U + W$*, isto é:*

$$U + V = [(0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 1, 1)] . \tag{4.48}$$

Veremos mais adiante que este será o número mínimo de geradores para o subespaço vetorial $U + V$*, ou seja,* **não** *podemos retirar mais nenhum vetor da lista formada pelos quatro vetores em* (4.48) *e ainda continuar gerando o subsepaço vetorial* $U + V$*.*

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação desta afirmação.

4.3 Exercícios

Capítulo 5

Dependência Linear

5.1 Introdução e Exemplos

No capítulo anterior ao estudarmos os geradores de um espaço vetorial real procuramos encontrar um determinado conjunto de vetores do mesmo, de modo que qualquer vetor do espaço em questão pudesse ser escrito como combinação linear dos vetores deste conjunto.

Por exemplo, se v e w geram um espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ então para qualquer $u \in V$ será possível encontrar escalares $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha \cdot v + \beta \cdot w, \quad (*)$$

ou, equivalentemente,

$$\alpha \cdot v + \beta \cdot w - 1 \cdot u = O.$$

Note que a combinação linear acima é o vetor nulo, embora nem todos os escalares que aparecem na sua formação sejão nulos.

Vejamos agora a seguinte situação: será sempre possível encontrar escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não todos nulos, de modo que, em $\mathbb{R}^3$, tenhamos

$$\alpha \cdot (1, 0, 0) + \beta \cdot (0, 1, 0) + \gamma \cdot (0, 0, 1) = (0, 0, 0)? \quad (**)$$

É fácil verficar que a resposta, neste caso, é **não**.

Isto, como mostra o 2. exemplo acima (ver (**)), significa que **não** será possível escrever nenhum dos vetores do 2.o exemplo como combinação linear dos outros dois.

Isto contrasta com o que ocorre com os vetores u, v e w do 1.o exemplo acima (ver (*)).

Em um certo sentido, os vetores do primeiro exemplo guardam uma certa dependência entre um e outro enquanto que, no segundo, os três vetores são independentes.

Vejamos, com as definições que se seguem, como podemos tornar estes conceitos mais precisos.

Definição 5.1 *Sejam $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real e $u_1, \ldots, u_n \in V$.*

Diremos que os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes, (ou, abreviadamente l.i.) se a combinação linear

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O$$

ocorrerá **somente** *quando os escalares* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *forem todos nulos, isto é, se*

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Observação 5.2

1. *Na situação acima, se os vetores vetores* $u_1, \ldots, u_n$ *são l.i. diremos que o conjunto* $S \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ *é l.i.* .

2. *Notemos que se*
$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$$
então, das propriedades básicas de espaço vetorial real, necessariamente, deveremos ter:
$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha . u_n = O.$$
Porém, a recíproca nem sempre é válida, isto é, podemos ter uma coleção finita de vetores, $v_1, \cdots, v_n$ *de um espaço vetorial real e escalares* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in R$, **não todos nulos**, *de tal modo que*
$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O. \quad (*)$$
Como exemplo desta situação consideremos no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) os vetores*
$$v_1 \doteq (1, 1) \quad e \quad v_2 \doteq (-1, -1).$$
Neste caso temos que:
$$O = (0, 0) = 1 \cdot (1, 1) + 1 \cdot (-1, -1) = \underbrace{1}_{\doteq \alpha 1} \cdot v_1 + \underbrace{1}_{\doteq \alpha_2} \cdot v_2,$$
mostrando que existem escalares $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, *não todos nulos (no caso ambos são iguais a* 1*) de tal modo que (*) se verifica.*

3. *A noção de independência linear para a sequência* $u_1, \ldots,\ u_n$ *introduzida na definição acima é equivalente a dizer que: se existe* $\beta_i \neq 0$, *para algum* $i \in \{1, \ldots, n\}$, *então deveremos ter*
$$\beta_1 \cdot u_1 + \beta_2 \cdot u_2 + \cdots + \beta_n \cdot u_n \neq O,$$
independente dos escalares $\beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$ *escolhidos, ou seja, podemos escrever o vetor nulo* $0 \in V$ *de uma,* **única**, *maneira como combinação linear dos vetores* $u_1, \cdots u_n$, *a saber:*
$$O = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_n.$$

Podemos também introduzir a:

Definição 5.3 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real e* $u_1, \dots, u_n \in V$.

Dizemos que os vetores $u_1, \dots, u_n$ *serão ditos* <u>linearmente dependentes</u> *(ou, abreviadamente, l.d.) se os vetores* **<u>não</u>** *forem linearmente independentes.*

Observação 5.4

1. *Na situação acima, se os vetores vetores* $u_1, \dots, u_n$ *são l.d. diremos que o conjunto* $S \doteq \{u_1, \dots, u_n\}$ *é l.d.* .

2. *A definição de dependência linear acima para os vetores* $u_1, \dots, u_n$ *é equivalente a dizer que é possível encontrar números reais* $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, **<u>não todos nulos</u>**, *tais que*
$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O,$$
ou seja, podemos escrever o vetor nulo $O \in V$ *de , pelo menos, dois modos diferentes, a saber:*
$$0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_n = O \quad e \quad \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O,$$

Com isto temos o:

Proposição 5.5 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real e* $u_1 \dots, u_n \in V$.

Os vetores $O, u_1, \dots, u_n$ *são vetores l.d., onde* O *é vetor nulo do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

De fato, basta verificar que
$$\underbrace{1}_{\doteq\alpha} \cdot O + \underbrace{0}_{\doteq\alpha_1} \cdot u_1 + \cdots + \underbrace{0}_{\doteq\alpha_n} \cdot u_n = O,$$
ou seja, existem escalares $\alpha, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos (pois $\alpha = 1$) de modo que
$$\alpha \cdot O + \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O,$$
mostrando que os vetores $O, u_1, \dots, u_n$ são de vetores l.d. .

∎

Exemplo 5.6 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*).*

Mostre que os vetores $(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ *são linearmente independentes em* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Resolução:

Para tanto precisamos encontrar todas as possíveis soluções da equação vetorial
$$\alpha \cdot (1, 1, 1) + \beta \cdot (1, 1, 0) + \gamma \cdot (1, 0, 0) = (0, 0, 0),$$

que é equivalente a:

$$(0,0,0) = (\alpha,\alpha,\alpha) + (\beta,\beta,0) + (\gamma,0,0) = (\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\beta, \alpha).$$

Isto equivale a resolver o sistema linear

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \alpha+\beta = 0 \\ \gamma = 0, \end{cases}$$

que possui uma única solução, a saber:

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Logo, os vetores $(1,1,1), (1,1,0), (1,0,0) \in \mathbb{R}^3$ são linearmente independentes no espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Exemplo 5.7 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*).*

Tomemos os vetores em $\mathbb{R}^3$ *dados por*

$$u_1 \doteq (x_1, y_1, z_1), \quad u_2 \doteq (x_2, y_2, z_2) \quad e \quad u_3 \doteq (x_3, y_3, z_3). \qquad (*)$$

Encontre uma <u>**condição necessária e suficiente**</u> *para que os vetores* u_1, u_2, u_3 *sejam linearmente independentes no espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *.*

Resolução:

Observemos que, os vetores u_1, u_2, u_3 serão l.i. em $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ se, e somente se, a equação vetorial

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = O \quad (**)$$

apresentar como única solução os escalares

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0. \quad (***)$$

Observemos que

$$\begin{aligned} \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 &= \alpha_1 (x_1, y_1, z_1) + \alpha_2 \cdot (x_2, y_2, z_2) + \alpha_3 \cdot (x_3, y_3, z_3) \\ &= (\alpha_1 x_1, \alpha_1 y_1, \alpha_1 z_1) + (\alpha_2 x_2, \alpha_2 y_2, \alpha_2 z_2) + (\alpha_3 x_3, \alpha_3 y_3, \alpha_3 z_3) \\ &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3, \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3), \end{aligned}$$

que é equivalente a que o sistema linear de três equações a três incógnitas (que são os escalares $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$):

$$\begin{cases} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0 \\ \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0 \\ \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \alpha_3 z_3 = 0 \end{cases} . \quad (****)$$

Logo para que (**) possua somente a solução (***) é necessário e suficiente que o sistema linear (****) só admita a solução (***).

Mas isto, como se sabe, isto é equivalente que a dizer que a matriz dos coeficientes do sistema linear (****),

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix}$$

possue determinante diferente de zero (ver Apêndice II).

Note que as colunas desta matriz são formadas pelas entradas que compõem os vetores u_1, u_2 e u_3 em (*).

Observação 5.8 *O mesmo resultado vale se colocarmos os coeficientes dos vetores* u_1, u_2 *e* u_3 *como as linhas de uma matriz. Por quê?*

Podemos estender o exemplo acima a seguinte situação:

Exercício 5.9 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^n$*.*

Enuncie e demonstre um resultado análogo ao exemplo acima para uma sequência $u_1, \cdots, u_k$ *vetores do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*, onde* $k \in \{1, \cdots, n\}$*.*

Temos também o:

Exemplo 5.10 *Consideremos o espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_2(\mathbb{R})$*).*

Verifique se as matrizes de $M_2(\mathbb{R})$*:*

$$u_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ u_2 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ u_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$*.*

Resolução:

Para isto precisamos estudar todas as possíveis soluções $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ da equação vetorial:

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 = O, \quad (*)$$

onde O denota a matriz nula de $M_2(\mathbb{R})$, ou, equivalentemente, encontrar todas as possíveis soluções da equação matricial

$$\underbrace{\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_2 + \alpha_3 \\ 0 & \alpha_1 + \alpha_2 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que é equivalente a equação matricial

$$\begin{pmatrix} \alpha_1+\alpha_2 & \alpha_2+\alpha_3 \\ 0 & \alpha_1+\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (**)$$

ou ainda, equivalente ao sistema linear de quatro equações a três incógnitas (a saber, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = 0 \\ \alpha_2+\alpha_3 = 0 \\ 0 = 0 \\ \alpha_1+\alpha_2 = 0 \end{cases} \qquad (***)$$

que possui soluções do tipo

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (\alpha_1, -\alpha_1, \alpha_1)$$

para qualquer $\alpha_1 \in \mathbb{R}$.

Logo escolhendo-se $\alpha_1 \doteq 1$, teremos que $\alpha_2 = -1$ e $\alpha_3 = 1$ serão soluções (não identicamente nulas) do sistema (***) ou, equivalentemente, da equação vetorial (*).

Dessa forma, a sequência de vetores u_1, u_2, u_3 será linearmente dependente em $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Observação 5.11 *Um outro modo de resolver o exemplo acima é observar que (verifique!)*

$$u_2 = u_1 + u_3,$$

que é equivalente a escrever

$$1.u_1 + (-1).u_2 + 1.u_3 = 0,$$

ou seja, os vetores u_1, u_2, u_3 *são l.d. em* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Temos também o:

Exemplo 5.12 *Consideremos o espaço vetorial real* $(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$*).*

Verifique se as funções f *e* g *são l.d. em* $(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$ *onde*

$$f(x) \doteq \cos(x) \quad e \quad g(x) \doteq \operatorname{sen}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

Como as funções f e g são funções definidas em $\mathbb{R}$, a equação vetorial

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot f = O, \quad (*)$$

onde O denota a função identicamente nula em $\mathbb{R}$, será equivalente a equação

$$\alpha f(x) + \beta g(x) = 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Em particular, a identidade acima deverá ser válida para:

1. $x = 0$, ou seja:

$$0 = \alpha f(0) + \beta g(0) = \alpha \underbrace{\cos(0)}_{=1} + \beta \underbrace{\operatorname{sen}(0)}_{=0} = \alpha \quad \Longrightarrow \quad \alpha = 0.$$

2. $x = \dfrac{\pi}{2}$, ou seja:

$$0 = \alpha f(\frac{\pi}{2}) + \beta g(0) = \alpha \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0} + \beta \underbrace{\operatorname{sen}(\frac{\pi}{2})}_{=1} = \beta \quad \Longrightarrow \quad \beta = 0.$$

Conclusão: a única solução da equação vetorial (*) será $\alpha = \beta = 0$, portanto, as funções f e g são l.i. em $(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exemplo 5.13 *Consideremos o espaço vetorial real* $(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$*).*

Verifique se as funções f*,* g *e* h *são linearmente dependentes em* $(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$*, onde*

$$f(x) \doteq \cos^2(x), \quad g(x) \doteq \operatorname{sen}^2(x) \quad e \quad h(x) \doteq 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

Observemos que

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) - 1 = 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R},$$

que é equivalente a

$$1 \cdot f + 1 \cdot g + (-1) \cdot h = O,$$

onde O denota a função identicamente mula.

Logo a equação vetorial

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot g + \gamma \cdot h = O,$$

tem uma solução não trivial, a saber $\alpha \doteq 1$, $\beta \doteq 1$ e $\gamma \doteq -1$.

Portanto as funções f, g e h são l.d. em $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$.

Deixaremos como exercício para o leitor o

Exercício 5.14 *Consideremos o espaço vetorial real* $(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $C^1(\mathbb{R};\mathbb{R})$*).*

Sejam

$$f(x) \doteq \cos(2x), \quad g(x) = \cos^2(x) \quad e \quad h(x) = \operatorname{sen}^2(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Mostre que as funções f, g, h *são linearmente dependentes em* $(C^1(\mathbb{R};\mathbb{R}), +, \cdot)$.

5.2 Propriedades da dependência linear

Começaremos pela seguinte caraterização equivalente de dependência linear:

Proposição 5.15 *Consideremos o espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *e* $u_1, \ldots, u_n \in V$.

Os $u_1, \ldots, u_n$ *são l.d. se, e somente se, pelo menos um destes vetores se escreve como combinação linear dos outros.*

Demonstração:

Observemos que se um dos vetores da sequência de vetores $u_1, \ldots, u_n$, digamos u_{i_o} para algum $i_o \in \{1, \cdots, n\}$, se escreve como combinação linear dos restantes, ou seja, dos vetores $u_1, \cdots, u_{i_o-1}, u_{i_o+1}, \cdot, u_n$ então deverão existir escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_{i_o-1}, \alpha_{i_o+1}, \cdot, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u_{i_o} = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n. \quad (*)$$

Mas (*) é equivalente a

$$\begin{aligned} O &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} - u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \\ &= \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + (-1) \cdot u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n, \end{aligned}$$

s onde O é o vetor nulo do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$, ou seja, a equação vetorial

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O$$

possui uma solução não trivial (a saber, $\alpha_{i_o} \doteq -1$), o que mostra que a sequência $u_1, \ldots, u_n$ é l.d. em $(V, +, \cdot)$.

Por outro lado, se $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente dependentes então existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, digamos que $\alpha_{i_o} \neq 0$, tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O,$$

ou, equivalentemente,

$$-\alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o-1} \cdot u_{i_o-1} + \alpha_{i_o+1} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n,$$

e como $\alpha_{i_o} \neq 0$ teremos

$$u_{i_o} = \frac{\alpha_1}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\alpha_{i_o-1}}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_{i_o-1} + \frac{\alpha_{i_o+1}}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_{i_o+1} + \cdots + \frac{\alpha_n}{-\alpha_{i_o}} \cdot u_n,$$

ou seja, o vetor u_{i_o}, da lisla $u_1, \cdots, u_n$, pode ser obtido como combinação linear dos vetores restantes (a saber, dos vetores $u_1, \cdots, u_{i_o-1}, u_{i_o+1}, \cdots, u_n$), terminando a demonstração.

■

Com isto temos a:

Proposição 5.16 *Consideremos o espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *e* $u_1, \ldots, u_n \in V$.

Se o conjunto de vetores $S \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ *é l.d. em* $(V, +, \cdot)$ *e* $T \subseteq V$ *tal que* $S \subseteq T$.

Então T *será l.d.* $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

Vamos mostrar que se $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m \in V$ são tais que $S \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ é um conjunto formado por vetores que são l.d. então $T \doteq \{u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m\}$ também é um conjunto formado por vetores que são l. d. .

Como S é l.d. em $(V, +, \cdot)$ existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, não todos nulos, ou seja, $\alpha_{i_o} \neq 0$ para algum $i_o = 1, \cdots, n$, tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \cdot + \alpha_n \cdot u_n = O. \quad (*)$$

Como $S \subseteq T$ segue que $u_{i_o} \in T$, e de (*) temos que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{i_o} \cdot u_{i_o} + \cdot + \alpha_n \cdot u_n + 0 \cdot u_{n+1} + \cdots + 0.u_m = O. \quad (**)$$

possui uma solução não identicamente nula, pois $\alpha_{i_o} \neq 0$, mostrando que o conjunto T é formado por vetores que são l.d. em $(V, +, \cdot)$.

∎

Observação 5.17 *O resultado acima nos diz que qualquer subconjunto de um espaço vetorial real que contenha como subconjunto um conjunto que é l.d. deverá, necessariamente, ser l.d. .*

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 5.18 *Consideremos o espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *e* $u_1, \ldots, u_m \in V$.

Se $u_1, \ldots, u_m$ *são linearmente independentes em* $(V, +, \cdot)$ *então qualquer subsequência destes vetores também será linearmente independente em* $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

Basta mostrar que se $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m$ são linearmente independentes em $(V, +, \cdot)$ então $u_1, \ldots, u_n$ também são l.i. em $(V, +, \cdot)$.

Para isto suponhamos que

$$\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = O. \quad (*)$$

Mas a equação vetorial (*) pode ser reescrita como:

$$\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n + 0 \cdot u_{n+1} + \cdots + 0 \cdot u_m = O \quad (*)$$

e os vetores $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}, \ldots, u_m$ são l.i. em $(V, +, \cdot)$ logo segue que a única solução para a equação vetorial (*) será

$$\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0,$$

mostrando que os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são l.i. em $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

∎

Observação 5.19 *O resultado acima nos diz que qualquer subconjunto de um conjunto de vetores de um espaço vetorial real que é l.i. deverá, necessariamente, ser l.i. .*

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 5.20 *Consideremos o espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *e* $u, u_1, \ldots, u_n \in V$.

Se os vetores $u_1, \ldots, u_n$ *são l.i. em* $(V, +, \cdot)$ *e os vetores* $u, u_1, \ldots, u_n$, *são l.d. em* $(V, +, \cdot)$ *então o vetor* u *deverá ser combinação linear dos vetores* $u_1, \ldots, u_n$.

Demonstração:

Como $u, u_1, \ldots, u_n$, são l.d. em $(V, +, \cdot)$, deverão existir $\beta_1, \ldots, \beta_{n+1}$, não todos nulos, tais que

$$\beta \cdot u + \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = O. \quad (*)$$

Afirmamos que $\beta \neq 0$.

Suponhamos, por absurdo, que $\beta = 0$.

A expressão (*) tornar-se-á:

$$\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = 0.$$

Mas , os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são l.i. em $(V, +, \cdot)$, assim, deveríamos, necessariamente, ter $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$, o que é um absurdo por (*).

Portanto $\beta \neq 0$ e assim (*) será equivalente a

$$-\beta \cdot u = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n \quad \overset{\beta \neq 0}{\Rightarrow} \quad u = \frac{\beta_1}{-\beta} \cdot u_1 + \cdots + \frac{\beta_n}{-\beta} \cdot u_n,$$

ou seja, o vetor u pode ser obtido como combinação linear dos vetores $u_1, \ldots, u_n$, como queríamos demonstrar.

∎

Pra finalizar temos a:

Proposição 5.21 *Consideremos o espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *e* $u_1, \ldots, u_n$ *vetores l.i. em* $(V, +, \cdot)$.

Então cada vetor $v \in [u_1, \ldots, u_n]$ *se escreve de maneira* ***única*** *como combinação linear dos vetores* $u_1, \ldots, u_n$*, isto é, existem* ***únicos*** $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$v = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n.$$

Prova:

Suponhamos que existam $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = v = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n. \quad (*)$$

Precisamos mostrar que

$$\alpha_j = \beta_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Observemos que (*) é equivalente a:

$$[\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] - [\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n] = O,$$

que por sua vezm pode ser escrita como

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot u_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot u_n = 0.$$

Mas os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são l.i. logo, necessariamente, deveremos ter

$$\alpha_j - \beta_j = 0, \quad j = 1, \cdots, n,$$

isto é,

$$\alpha_j = \beta_j, \quad \text{para todo} \quad j = 1, \ldots, n,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação 5.22 *Vale uma certa recíproca do resultado acima, a saber: se cada vetor* $v \in [u_1, \ldots, u_n]$ *se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores* $u_1, \ldots, u_n$ *então os vetores* $u_1, \cdots, u_n$ *serão l.i. em* $(V, +, \cdot)$.

De fato, pois, em particular, o vetor nulo $O \in V$ *se escreve de modo único como combinação linear dos vetores* $u_1, \ldots, u_n$*, isto é, se*

$$O = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

mostrando que os vetores $u_1, \cdots, u_n$ *serão l.i. em* $(V, +, \cdot)$*, com afirmamos.*

5.3 Exercícios

Capítulo 6

Base, Dimensão e Coordenadas

6.1 Base

A noção de base de um espaço vetorial real é semelhante a que foi introduzida no curso de Geometria Analítica.

Ela consiste em escolher um conjunto de geradores do espaço vetorial real em questão que contenha o menor número de vetores possível, isto é, um conjunto que gere o espaço vetorial real, mas que se deste conjunto for retirado qualquer elemento, o conjunto que restará **não** gerará mais o espaço vetorial real em questão.

Mais precisamente, temos a:

Definição 6.1 *Seja* $V \neq \{O\}$, $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real finitamente gerado.*

Definimos uma base do espaço vetorial real V *como sendo um conjunto, que indicaremos por* $\mathcal{B}$, *formado por vetores linearmente independentes de* V *e que gera* V.

Consideremos os seguintes exemplos:

Exemplo 6.2 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais).*

Mostre que $\mathcal{B} \doteq \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *é uma base de* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$

Resolução:

Sabemos que o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ é finitamente gerado (verifique!).

É fácil ver que os vetores de $\mathcal{B}$ são l.i. (verifique!).

Além disso se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ temos que

$$(x, y, z) = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z) = x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1),$$

mostrando que os vetores de $\mathcal{B}$ geram $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ (isto é, $[\mathcal{B}] = \mathbb{R}^3$), logo $\mathcal{B}$ será uma base para $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Podemos estender o exemplo acima, como afirma o seguinte exercício abaixo, cuja resolução será deixada a cargo do leitor.

Exercício 6.3 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais).*

Mostre que o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ *onde*

$$e_1 \doteq (1, 0, \ldots, 0), \ \ldots, e_j \doteq (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j-\text{ésima posição}}, \cdots, 0), \ \ldots \ e_n \doteq (0, \ldots, 0, 1)$$

é uma base de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Temos também o:

Exemplo 6.4 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais).*

Mostre que $\mathcal{B} \doteq \{(1, 1), (1, -1)\}$ *é uma base de* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Resolução:

É preciso mostrar que estes vetores de $\mathcal{B}$ são l.i. e que todo vetor de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se escreve como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$.

Da observação (5.22) basta mostrarmos que todo vetor de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ se escreve, de maneira única, como combinação linear dos vetores $u_1 \doteq (1, 1)$ e $u_2 \doteq (1, -1)$.

Seja $u \doteq (x, y) \in \mathbb{R}^2$.

O nosso problema se resume a mostrar que existem únicos $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} u = (x, y) &= \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 = \alpha_1 \cdot (1, 1) + \alpha_2 \cdot (1, -1) = (\alpha_1, \alpha_1) + (\alpha_2, -\alpha_2) \\ &= (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned}$$

Esta identidade é equivalente ao seguinte sistema linear

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = x \\ \alpha_1 - \alpha_2 = y. \end{cases} .$$

Resolvendo o sistema linear (será deixado como exercício para o leitor) obteremos uma **única** solução dada por

$$\alpha_1 = \frac{x + y}{2} \quad \text{e} \quad \alpha_2 = \frac{x - y}{2},$$

mostrando que $\mathcal{B}$ é uma base para $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Deixaremos, para o leitor, a resolução dos seguintes exercícios :

Exercício 6.5 *Consideremos o espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_2(\mathbb{R})$*).*

Mostre que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

é uma base de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Exercício 6.6 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de funções).*

Verifique que o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{p, q, r\}$ *é uma base de* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$*, onde*

$$p(x) \doteq 1 + x, \quad q(x) \doteq 1 - x, \quad r(x) \doteq 1 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Temos o seguinte resultado:

Proposição 6.7 *Consideremos o espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *e* $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ *uma base de* $(V, +, \cdot)$*.*

Então $\mathcal{B}' \doteq \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ *não é uma base de* $(V, +, \cdot)$*.*

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que $\mathcal{B}' = \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ fosse uma base de $(V, +, \cdot)$.

Como $u_n \in V$, existiriam $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n-1$ tais que

$$u_n = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot u_{n-1},$$

isto é,

$$O = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot u_{n-1} - u_n = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{n-1} \cdot u_{n-1} + (-1) \cdot u_n,$$

ou seja, $u_1, \ldots, u_n$ são l.d. em $(V, +, \cdot)$ o que seria um absurdo, pois, por hipótese, $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes em $(V, +, \cdot)$

Portanto $\mathcal{B}' \doteq \{u_1, \ldots, u_{n-1}\}$ não pode ser uma base de $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

∎

Temos também o seguinte importante resultado:

Teorema 6.8 *Seja* $V \neq \{O\}$ *tal que* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real finitamente gerado.*

Então $(V, +, \cdot)$ *admite uma base.*

Em outras palavras, existe um conjunto $\mathcal{B}$*, formado por vetores de* V *que são l.i. em* $(V, +, \cdot)$ *e que gera* $(V, +, \cdot)$*.*

Prova:

Como $V \neq \{O\}$ e $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real finitamente gerado, existem vetores $u_1, \ldots, u_n \in V$ tais que $V = [u_1, \ldots, u_n]$.

Se o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ for formado por vetores que são l.i. em $(V, +, \cdot)$ então $\mathcal{B}$ será uma base de $(V, +, \cdot)$, terminando a demonstração.

Por outro lado, se os vetores $u_1, \ldots, u_n$ sejam l.d. em $(V, +, \cdot)$, como $V \neq \{O\}$, existe, pelo menos, um $j_o \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $u_{j_o} \neq O$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que $u_1 \neq 0$ (isto é, $j_o = 1$).

Se todo vetor u_j, para $j = 2, \ldots, n$, puder se escrever como combinação linear de u_1 então $V = [u_1]$ e $\mathcal{B} \doteq \{u_1\}$ será uma base de $(V, +, \cdot)$, terminando a demonstração.

Caso isto não ocorra, é porque existe algum vetor u_{j_1}, com $2 \leq j_1 \leq n$, tal que u_1, u_{j_1} são l.i. em $(V, +, \cdot)$.

Sem perda de generalidade, podemos supor que o vetor u_2 seja tal vetor (ou ainda, $j_1 = 2$), isto é, u_1, u_2 são l.i. em $(V, +, \cdot)$.

Se todos os vetores $u_3, \dots, u_n$ puderem ser escritos como combinações lineares dos vetores u_1, u_2 então $V = [u_1, u_2]$ e $\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2\}$ será uma base de $(V, +, \cdot)$.

Caso, contrário, podemos repetir este processo e como o número de elementos de $\{u_1, \dots, u_n\}$ é finito, o processo irá findar após um número finito de passos.

Desse modo, existe uma sequência de vetores l.i. dentre os vetores do conjunto $\{u_1, \dots, u_n\}$ que geram $(V, +, \cdot)$, isto é, uma base de $(V, +, \cdot)$, finalizando a demonstração.

∎

Observação 6.9 *Resumindo, o resultado acima nos diz que todo espaço vetorial real, não identicamente nulo, finitamente gerado admite uma base.*

6.2 Dimensão

Para iniciar esta seção temos o seguinte resultado fundamental para o que segue:

Teorema 6.10 *Seja $V \neq \{O\}$ tal que $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real finitamente gerado.*

Então toda base de $(V, +, \cdot)$ possui o mesmo número de vetores.

Prova:

Do teorema (6.8) segue que $(V, +, \cdot)$ admite uma base.

Sejam $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \dots, u_n\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \dots, v_m\}$ duas bases do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.

Nosso objetivo é mostrar que $m = n$ (ou seja, qualquer base de $(V, +, \cdot)$ de n elementos).

Suponhamos, por absurdo, que $n > m$.

Como os vetores $v_1, \dots, v_m$ geram $(V, +, \cdot)$, para cada $1 \leq j \leq n$, podemos escrever o vetor u_j como combinação linear dos vetores $v_1, \dots, v_m$, isto é, existem $\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{mj} \in \mathbb{R}$ tais que

$$u_j = \alpha_{1j} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mj} \cdot v_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} v_i. \quad (*)$$

Assim, de (*) temos que se

$$\begin{aligned}
O &= \beta_1 \cdot \underbrace{u_1}_{\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} \cdot v_i} + \cdots + \beta_n \cdot \underbrace{u_n}_{\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} \cdot v_i} \qquad (**) \\
&= \beta_1 \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{i1} \cdot v_i \right) + \cdots + \beta_n \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{in} \cdot v_i \right) \\
&= \sum_{i=j}^{n} \beta_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot v_i \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_{1i} \right) \cdot v_i,
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_{1j}\right) \cdot v_1 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \alpha_{mj}\right) \cdot v_m = 0.$$

Como os vetores $v_1, \ldots, v_m$ são l.i. em $(V, +, \cdot)$ devremos ter

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_j = 0 \quad \text{para todo} \quad 1 \leq i \leq m.$$

As identidades acima correspondem a um sistema linear homogêneo de m equações com n incógnitas (β_i, $1 \leq i \leq n$).

Como $n > m$, existe uma solução não trivial deste sistema linear, isto é, uma solução $\beta_1, \ldots, \beta_n$ onde pelo menos um β_{j_o}, para algum $j_o \in \{1, \cdots, n\}$, é diferente de zero (pois a solução trivial, $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$ é sempre solução de um sistema linear homogêneo).

De (**) segue que os vetores $u_1, \ldots, u_n$ são l.d. em $(V, +, \cdot)$, uma contradição, logo deveremos ter $n = m$, completando a demonstração.

∎

Observação 6.11 *Resumindo, o resultado acima nos diz que qualquer base de um espaço vetorial real, não identicamente nulo, finitamente gerado tem o mesmo número de vetores.*

Com o resultado acima podemos introduzir a:

Definição 6.12 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real finitamente gerado.*

Se $V = \{O\}$ *definimos a* <u>dimensão de V</u> *como sendo* 0.

Se $V \neq \{O\}$ *definimos a* <u>dimensão de V</u> *como sendo o número de elementos de uma base qualquer de* $(V, +, \cdot)$.

Neste caso, usaremos o símbolo $\dim(V)$ *para denotar a dimensão do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Definição 6.13 *Se um espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ <u>**não**</u> *é finitamente gerado diremos que ele tem* <u>dimensão infinita</u>.

Com isto temos a:

Proposição 6.14 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real de dimensão infinita.*

Então $(V, +, \cdot)$ *possui um subconjunto de vetores que tem um número infinito de vetores linearmente independentes em* $(V, +, \cdot)$.

Prova:

Temos que $V \neq \{O\}$ pois, caso contrário, $\dim(V) = 0$ o que contraria o fato que sua dimensão ser infinita.

Selecione $u_1 \in V$, $u_1 \neq O$.

Como $(V, +, \cdot)$ não é finitamente gerado temos que $V \neq [u_1]$.

Logo, existe $u_2 \in V$ tal que $u_2 \notin [u_1]$.

Desta forma, os vetores u_1, u_2 são linearmente independentes em $(V, +, \cdot)$ (verifique!) e $V \neq [u_1, u_2]$, caso contrário, $(V, +, \cdot)$ teria dimensão finita (no caso, 2).

Prosseguindo as idéias acima, suponhamos que tenhamos encontrado vetores $u_1, \ldots, u_n \in V$ linearmente independentes.

Como $(V, +, \cdot)$ não é finitamente gerado, $V \neq [u_1, \ldots, u_n]$.

Logo , existe $u_{n+1} \in V$ tal que $u_{n+1} \notin [u_1, \ldots, u_n]$, isto é, os vetores $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1} \in V$ são linearmente independentes em $(V, +, \cdot)$ (verifique!).

Portanto, para qualquer conjunto finito de vetores l.i. em $(V, +, \cdot)$ podemos sempre encontrar um vetor, que não está no subespaço gerado por esse conjunto finito, e que, além disso, reunindo este vetor ao conjunto finito que tínhamos, obtemos um conjunto l.i. em $(V, +, \cdot)$, ou seja, existe em $(V, +, \cdot)$ um conjunto formado por infinitos de vetores linearmente independentes em $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

∎

Como consequência da demonstração do teorema (6.10) temos a:

Proposição 6.15 *Seja um espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ de dimensão $m \in \mathbb{N}$ fixada.*

Então qualquer conjunto de vetores de $(V, +, \cdot)$ com mais de m elementos é, necessariamente, linearmente dependente em $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

Supohamos, por absurdo que, $u_1, \cdots, u_n$ é uma sequência de vetores de V que são l.i. em $(V, +, \cdot)$ com $n > m$.

Então seguindo a demonstração do teorema (6.10) a partir de (1) (verifique!) obteremos um absurdo, logo mais que m vetores em $(V, +, \cdot)$ deverão ser l.d. em $(V, +, \cdot)$, como queríamos demonstrar.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 6.16 *Todo subespaço vetorial de um espaço vetorial real de dimensão finita também tem dimensão finita.*

Prova:

Sejam $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real de dimensão finita e W um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$.

Suponhamos, por absurdo, que W tivesse dimensão infinita.

Pela proposição (6.14), existiria um subconjunto l.i. de vetores de W com infinitos elementos .

Como estes vetores também são linearmente independentes em $(V, +, \cdot)$, pela proposição (6.15), o número deles deveria ser menor do que a dimensão de V que é finita, um absurdo, logo a dimensão de W deverá ser finita, como queríamos demonstrar.

∎

Observação 6.17

1. *Na verdade podemos ser um pouco mais precisos na conclusão do corolário acima, a saber: se W um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(V,+,\cdot)$ *que tem dimensão finita* n *então* $\dim(W) \leq n$*, ou seja,*

$$\dim(W) \leq \dim(V).$$

Para ver isto basta supor, por absurdo, que $\dim(W) > m$*.*

Logo existe uma base de W com mais que m *vetores, em particular, existem mais que* m *vetores l.i. em* $(W, +_V, \cdot_V)$ *(onde* $+_V$ *e* $\cdot_V$ *indicam as operações V).*

Assim os elementos desta base de W também serão l.i. em $(V,+,\cdot)$*, ou seja, existe um subconjunto formado por vetores l.i. em* $(V,+,\cdot)$ *que têm mais que* m *elementos.*

Como $m > \dim(V)$*, que pela proposição (6.15), teremos um absurdo.*

Portanto $\dim(W) \leq \dim(V)$*.*

2. *Se o espaço vetorial real* $(V,+,\cdot)$ *tem dimensão* n *diremos que ele é um espaço vetorial real* <u>n-*dimensional*</u>*.*

Temos também o:

Corolário 6.18 *Se* $(V,+,\cdot)$ *é um espaço vetorial* n*-dimensional e* $u_1, \ldots, u_n$ *são vetores de* $(V,+,\cdot)$ *linearmente independentes em* $(V,+,\cdot)$ *então estes vetores formam uma base de* $(V,+,\cdot)$*.*

Demonstração:

Seja $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\}$ formado por n vetores l.i em $(V,+,\cdot)$.

Mostremos que $\mathcal{B}$ é uma base de $(V,+,\cdot)$, ou seja, que geram $(V,+,\cdot)$.

Suponhamos, por aburdo, que exista $u \in V$ tal que $u \notin [u_1, \cdots, u_n]$.

Isto implicará que $u, u_1, \cdots, u_n$ são l.i. em $(V,+,\cdot)$ (verifique!), o que contraria a proposição (6.15) (pois temos um conjunto l.i. em $(V,+,\cdot)$ com mais que $n = \dim(V)$ vetores).

Logo $\mathcal{B}$ é l.i. em $(V,+,\cdot)$ e portanto $\mathcal{B}$ será uma base de $(V,+,\cdot)$, como queríamos demonstrar.

∎

Exemplo 6.19 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais).*

Então $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Resolução:

Do exemplo (6.3) temos que o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$ onde

$$e_1 \doteq (1, 0, \ldots, 0), \; \ldots, e_j \doteq (0, \ldots, 0, \underbrace{1}_{j\text{-ésima posição}}, \cdots, 0), \; \ldots \; e_n \doteq (0, \ldots, 0, 1)$$

é uma base de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, logo $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.

Exemplo 6.20 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$*.*

Então $\dim[\mathscr{P}(\mathbb{R})] = \infty$.

Resolução:

Do exemplo (4.35) temos que $(\mathscr{P}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ não é finitamente gerado, logo sua dimensão não pode ser finita, assim $\dim(\mathscr{P}(\mathbb{R}) = \infty$.

Exemplo 6.21 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}))$*.*

Então $\dim[\mathscr{P}_n(\mathbb{R})] = n + 1$.

Resolução:

De fato, do exemplo (4.34) temos que o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{p_o, \cdots, p_n\} \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ formado pelos seguintes polinômios:

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \quad \cdots \quad p_n(x) \doteq x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

geram $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $\mathcal{B}$ é um conjunto l.i. em $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$, logo uma base para $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ e portanto $\dim[\mathscr{P}_n(\mathbb{R})] = n + 1$.

Exemplo 6.22 *Sejam* $m, n \in \mathbb{N}$ *e o espaço vetorial real* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$*)*

Então $\dim[M_{m\times n}] = mn$.

Resolução:

Do exemplo (4.32) temos que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{E_{k,l} : \; k = 1, \dots, m, \; l = 1, \dots, n\}$$

formado pelas matrizes de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ dadas por:

$$E_{k,l} \doteq (\delta_{i,j}^{k,l})_{\substack{1\leq i\leq m, \\ 1\leq j\leq n}}$$

$k = 1, \dots, m$, $l = 1, \dots, n$, onde

$$\delta_{i,j}^{k,l} \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) = (k,l) \\ 0 & \text{se } (i,j) \neq (k,l) \end{cases}$$

formam uma base de $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Portanto $\dim(M_{m\times n}) = mn$.

Deixaremos como exercício para o leitor o:

Exercício 6.23

1. *A dimensão do espaço vetorial das matrizes reais quadradas e simétricas de ordem* n *é* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. *Qual a dimensão do espaço vetorial das matrizes reais quadradas e anti-simétricas de ordem* n*?*

Temos o seguinte importante resultado:

Teorema 6.24 (Completamento) *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real de dimensão* n.

Suponhamos que os vetores $u_1, \ldots, u_m$ *são l.i. em* $(V, +, \cdot)$ *com* $m < n$.

Então existem vetores $u_{m+1}, \ldots, u_n$ *tais que* $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_n\}$ *é uma base de* $(V, +, \cdot)$.

Demonstração:

Como $m < n$, $[u_1, \cdots, u_m] \neq V$, ou seja, existe

$$u_{m+1} \in V \setminus [u_1, \cdots, u_m]. \quad (*)$$

Afirmamos que os vetores $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}$ são l.i. em $(V, +, \cdot)$.

De fato, pois se $u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}$ forem vetores l.d. em $(V, +, \cdot)$, como $u_1, \ldots, u_m$ são l.i. em $(V, +, \cdot)$, pela proposição (5.20), teríamos que $u_{m+1} \in [u_1, \ldots, u_m]$, um absurdo, por (*).

Se $m + 1 = n$ então $\{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}\}$ será uma base de $(V, +, \cdot)$ e este conjunto contém os vetores $u_1, \ldots, u_m$ e assim terminaríamos a demonstração.

Se $m + 1 < n$ então $[u_1, \cdots, u_{m+1}] \neq V$, ou seja, existe

$$u_{m+2} \in V \setminus [u_1, \cdots, u_{m+1}]. \quad (**)$$

Afirmamos que os vetores $u_1, \ldots, u_{m+1}, u_{m+2}$ são l.i. em $(V, +, \cdot)$.

De fato, pois se $u_1, \ldots, u_{m+1}, u_{m+2}$ forem vetores l.d. em $(V, +, \cdot)$, como $u_1, \ldots, u_{m+1}$ são l.i. em $(V, +, \cdot)$, pela proposição (5.20), teríamos que $u_{m+2} \in [u_1, \ldots, u_m]$, um absurdo, por (**).

Como $\dim(V) = n < \infty$, repetindo os argumentos acima um número finito de vezes, encontraremos vetores $u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_{m+k}$, onde $m + k = n$, de forma que o conjunto

$$\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, \ldots, u_{m+k}\}$$

seja l.i. em $(V, +, \cdot)$ e como $\dim(V) = n = m+k$, segue que $\mathcal{B}$ será uma base do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ es este conjunto contém os vetores $u_1, \ldots, u_m$, completando a demonstração.

$\blacksquare$

Exemplo 6.25 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais).*

Encontre uma base do $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *contendo o vetor* $(1, 1, -1)$.

Resolução:

Como a dimensão de $\mathbb{R}^3$ é três, do teorema do completamento, precisamos encontrar dois vetores, $u_1 \doteq (x_1, y_1, z_1)$, $u_2 \doteq (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$, que juntamente com o vetor $u \doteq (1, 1, -1)$ sejam l.i. em $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Porém, pelo exemplo (5.7), sabemos que isto é equivalente ao determinante da matriz

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & y_1 & y_2 \\ -1 & z_1 & z_2 \end{pmatrix} = x_2(y_1 + z_1) - y_2(x_1 + z_1) + z_2(y_1 - x_1)$$

ser diferente de zero.

Há uma infinidade de possibilidades para que isto aconteça, por exemplo, tomando $(x_1, y_1, z_1) \doteq (0, 1, 1)$ e $(x_2, y_2, z_2) \doteq (0, 0, 1)$ (neste caso $\det(A) = 1 \neq 0$).

Portanto uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ que contenha o vetor $u = (1, 1, -1)$ é, por exemplo, $\mathcal{B} \doteq \{(1, 1, -1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$.

6.3 Dimensão da Soma de Subespaços Vetoriais

Começaremos esta seção com o seguinte importante resultado:

Proposição 6.26 *Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real de dimensão finita.*

Se U e W são subespaços vetoriais de $(V, +, \cdot)$ então

$$\dim(U \cap W) + \dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) \tag{6.27}$$

Demonstração:

Do corolário (6.16) segue que todo subespaço de um espaço vetorial real de dimensão finita terá também dimensão finita, em particular, temos que

$$\dim(U),\ \dim(W),\ \dim(U \cap W),\ \dim(U + W) \leq \dim(V) < \infty.$$

Como $m \doteq \dim(U \cap W) < \infty$ existe um conjunto $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \dots, v_m\}$, formado por vetores de $(V, +, \cdot)$, que é uma base de $U \cap W$.

Como estes vetores são l.i., e pertencem a U, pelo teorema (6.24), existem $u_1, \dots, u_p \in U$ tais que $\mathcal{A} \doteq \{v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_p\}$ é uma base de U (estamos supondo que $\dim(U) = m+p$).

Por outro lado, os vetores $v_1, \dots, v_m$ são l.i. e também pertencem a W e pelo mesmo teorema (6.24), é possível encontrar $w_1, \dots, w_q \in W$ de modo que $\mathcal{B} \doteq \{v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_q\}$ seja uma base de W (estamos supondo que $\dim(W) = m + q$).

Com a notação acima, teremos

$$\dim(U \cap W) = m, \quad \dim(U) = m + p \quad \text{e} \quad \dim(W) = m + q.$$

Sendo assim, a fim de mostrarmos a identidade (6.27), é necessário (e, na verdade, suficiente) mostrar que

$$\dim(U + W) = m + p + q.$$

Para tanto, basta mostrarmos que o conjunto

$$\mathcal{D} \doteq \{u_1, \dots, u_p, w_1, \dots, w_q, v_1, \dots, v_m\} \tag{6.28}$$

é uma base de $U + W$.

Mostremos primeiramente que os vetores de $\mathcal{D}$ geram $U + W$.

Para isto, dado $v \in U + W$ segue que existem $u \in U$ e $w \in W$ tais que $v = u + w$.

Como $u \in U$, e $\mathcal{A}$ base de U, segue que o vetor u uma combinação linear dos vetores $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_m$.

De modo semelhante, como $w \in W$, e $\mathcal{B}$ base de W, segue que o vetor w é uma combinação linear dos vetores $w_1, \dots, w_q, v_1, \dots, v_m$.

Logo o vetor

$$v = u + w$$

será uma combinação linear dos vetores $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_q$, ou seja, $v \in [u_1, \dots, u_p, v_1, \dots,$
mostrando que

$$U + W = [u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_{m,1}, \dots, w_q].$$

Mostremos que o conjunto $\mathcal{D}$ é l.i. em $(V, +, \cdot)$.

Suponha que os escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \cdots, \beta_q, \delta_1, \cdots, \delta_m \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q + \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_m \cdot v_m = O, \tag{6.29}$$

que pode ser reescrita como:

$$U \ni \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_m \cdot v_m = -\beta_1 \cdot w_1 - \cdots - \beta_q \cdot w_q \in W.$$

Em particular temos que:

$$-\beta_1 \cdot w_1 - \cdots - \beta_q \cdot w_q \in U \cap W = [v_1, \dots, v_m].$$

Consequentemente, existem escalares $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in \mathbb{R}$ tais que

$$-\beta_1 \cdot w_1 - \cdots - \beta_q \cdot w_q = \gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_m \cdot v_m,$$

ou, equivalentemente,

$$\beta_1 \cdot w_1 + \cdots + \beta_q \cdot w_q + \gamma_1 \cdot v_1 + \cdots + \gamma_m \cdot v_m = 0.$$

Como os vetores $w_1, \dots, w_q, v_1, \dots, v_m$ são l.i. (pois formam uma base de W) segue-se que

$$\gamma_1 = \cdots = \gamma_m = \beta_1 = \cdots = \beta_q = 0. \qquad (*)$$

Assim, a equação (6.29) se reduz a

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \delta_1 \cdot v_1 + \cdots + \delta_m \cdot v_m = 0.$$

Mas $u_1, \dots, u_p, v_1, \dots, v_m$ são l.i. (pois formam uma base de U) logo segue-se que

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_p = \delta_1 = \cdots = \delta_m = 0. \qquad (**)$$

De (*) e (**) segue que os vetores de (6.28) são linearmente independentes, e portanto vale a identidade (6.27), completando a demonstração.

∎

Corolário 6.30 *Seja U um subespaço vetorial de um espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ de dimensão finita.*

Se $\dim(U) = \dim(V)$ *então deveremos ter* $U = V$.

Demonstração:

Suponhamos, por absurdo, que $U \neq V$ (temos que $U \subseteq V$), isto é, existe um vetor $u_1 \in V$ tal que $u_1 \notin U$, em particular, $u_1 \neq O$ (pois se fosse O estaria em U).

Definamos $W \doteq [u_1]$.

Logo $\dim(W) = 1$.

Como $u_1 \notin U$ temos que $U \cap W = \{O\}$ e como $\dim(W) = 1$, segue da proposição (6.26) que

$$\begin{aligned}\dim(U + W) &= \dim(U) + \underbrace{\dim(W)}_{=1} + \underbrace{\dim(U \cap W)}_{=0} \\ &= \dim(U) + 1 \overset{[\dim(U)=\dim(V)]}{=} \dim(V) + 1 > \dim(V),\end{aligned}$$

o que é um absurdo, pois $U + W$ é um subsepaço vetorial de $(V, +, \cdot)$ logo, da observação (6.17) item 1., segue que $\dim(U + W) \leq \dim(V)$.

Portanto podemos concluir que $U = V$, como queríamos demonstrar.

∎

Observação 6.31 *Notemos que se $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real de dimensão finita, U e W são subespaços vetoriais de $(V, +, \cdot)$ (como na proposição (6.26)) e se além do mais tivermos*

$$V = U + W \quad e \quad \dim(U) + \dim(W) > \dim(V)$$

então

$$U \cap W \neq \{O\}$$

*ou seja, a soma $U + W$ **não** é uma soma direta.*

De fato, se soma $U + W$ fosse uma soma direta deveríamos ter $U \cap W = \{0\}$.

Logo, pela proposição (6.26), teríamos

$$\begin{aligned}0 = \dim(U \cap W) &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(U + W) \\ &= \dim(U) + \dim(W) - \dim(V) > 0,\end{aligned}$$

*o que é um absurdo, logo a soma $U + W$ **não** pode ser uma soma direta.*

Temos os seguinte exemplos:

Exemplo 6.32 *Consideremos U, W como no exemplo (4.41).*

Encontrar bases e as dimensões dos subespaços vetoriais U, W, $U \cap W$ e $U + W$ do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$.

Resolução:

Vimos no exemplo (4.41) que

$$\begin{aligned} U &= [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)] \\ W &= [(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)] \\ U \cap W &= [(1,0,-1,0),(0,1,0,1)] \\ U + W &= [(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1),(1,0,0,1),(0,0,1,1)] \end{aligned}$$

Verifiquemos a dependência ou independência linear de cada um dos conjuntos de vetores acima:

<u>Para U:</u>

Estudemos a dependência linear dos vetores que geram U.

Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha \cdot (1,1,0,0) + \beta \cdot (0,1,1,0) + \gamma \cdot (0,1,0,1) = (0,0,0,0)$$

isto será equivalente à:

$$(\alpha, \alpha+\beta+\gamma, \beta, \gamma) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Logo podemos conclui que os vetores $(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)$ são l.i. e portanto $\mathcal{B} \doteq \{(1,1,0,0),(0,1,1,0),(0,1,0,1)\}$ será uma base para U.

Portanto segue que $\dim(U) = 3$.

<u>Para W:</u>

Estudemos a dependência linear dos vetores que geram W.

Se $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha \cdot (1,0,0,1) + \beta \cdot (0,1,0,1) + \gamma \cdot (0,0,1,1) = (0,0,0,0)$$

isto será equivalente à:

$$(\alpha, \beta, \gamma, \alpha+\beta+\gamma) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \\ \alpha+\beta+\gamma = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Logo podemos conclui que os vetores $(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)$ são l.i. e portanto $\mathcal{C} \doteq \{(1,0,0,1),(0,1,0,1),(0,0,1,1)\}$ será uma base para W.

Portanto temos que $\dim(W) = 3$.

<u>Para $U \cap W$:</u>

Estudemos a dependência linear dos vetores que geram $U \cap W$.

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são tais que

$$\alpha \cdot (1,0,-1,0) + \beta \cdot (0,1,0,1) = (0,0,0,0)$$

isto será equiavelente à

$$(\alpha, \beta, -\alpha, \beta) = (0,0,0,0) \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0.$$

Logo podemos conclui que os vetores $(1,0,-1,0), (0,1,0,1)$ são l.i. e portanto $\mathcal{D} \doteq \{((1,0,-1,0), (0,1,0,1)\}$ será uma base para $U \cap W$.

Portanto temos que $\dim(U \cap W) = 2$.

<u>Para $U + W$:</u>

Pela proposição (6.26) temos

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 3 + 3 - 2 = 4 = \dim(\mathbb{R}^4).$$

Logo, pela proposição (6.30) segue que $U + W = \mathbb{R}^4$, logo podemos tomar a base canônica de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ com uma base para $U + W$.

Observação 6.33 *Como* $\dim(U \cap W) = 2 \neq 0$ *(logo* $U \cap W \neq \{0\}$*) segue* $\mathbb{R}^4 = U + W$ *mas esta soma* **<u>não</u>** *é uma soma direta.*

Exemplo 6.34 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de* $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$*).*

Sejam

$$U \doteq \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) : \; p(0) = p(1) = 0\} \quad e \quad W \doteq \{q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) : \; q(-1) = 0\}.$$

Encontrar bases e as dimensões para os subsepaços vetoriais U, W, $U \cap W$ *e* $U + W$ *do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que U e W são subespaços vetoriais do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

<u>Para U :</u>

Se $p \in U \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, devem existir $a_o, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

assim

$$p(0) = a_o \quad \text{e} \quad p(1) = a_o + a_1 + a_2 + a_3. \quad (*)$$

Logo

$$p \in U \iff p(0) = p(1) = 0 \overset{(*)}{\iff} \begin{cases} a_o = 0 \\ a_o + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_o = 0 \\ a_1 = -a_2 - a_3 \end{cases}$$
$$\iff p(x) = -(a_2 + a_3)x + a_2x^2 + a_3x^3 = a_2(x^2 - x) + a_3(x^3 - x), \ x \in \mathbb{R}. \quad (**)$$

Definindo-se $p_1, p_2 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ por

$$p_1(x) \doteq x^2 - x, \quad \text{e} \quad p_2(x) \doteq x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R},$$

temos que $p_1, p_2 \in U$ (pois $p_1(0) = p_1(1) = 0$ e $p_2(0) = p_2(1) = 0$).

Logo de (**) temos que

$$U = [p_1, p_2].$$

Além disso os vetores p_1, p_2 são l.i. (pois teêm graus diferentes, verifique!), logo $\mathcal{B} \doteq \{p_1, p_2\}$ é uma base de U, em particular, $\dim(U) = 2$.

Para W:

Se $q \in W \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, devem existir $a_o, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$q(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

assim

$$q(-1) = a_o + a_1 \cdot (-1) + a_2 \cdot (-1)^2 + a_3 \cdot (-1)^3 = a_o - a_1 + a_2 - a_3. \quad (*)$$

Logo

$$q \in W \iff q(-1) = 0 \overset{(*)}{\iff} a_o - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \iff a_3 = -a_o + a_1 - a_2$$
$$\iff q(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + (-a_o + a_1 - a_2)x^3$$
$$= a_o(1 - x^3) + a_1(x + x^3) + a_2(x^2 - x^3), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (**)$$

Definindo-se $q_1, q_2, q_3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ por

$$q_1(x) \doteq 1 - x^3, \quad \text{e} \quad q_2(x) \doteq x + x^3, \quad q_3(x) \doteq x^2 - x^3 \quad x \in \mathbb{R},$$

temos que $q_1, q_2, q_3 \in W$ (pois $q_1(-1) = q_2(-1) = q_3(-1) = 0$).

Logo de (**) temos que

$$W = [q_1, q_2, q_3].$$

Além disso os vetores q_1, q_2, q_3 são l.i. (verifique!), logo $\mathcal{C} \doteq \{q_1, q_2, q_3\}$ é uma base de W, em particular, $\dim(W) = 3$.

Para $U \cap W$:

Se $p \in U \cap W \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, devem existir $a_o, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(x) = a_o + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

assim, como vimos anteriormente:

$$p(0) = a_o, \quad p(1) = a_o + a_1 + a_2 + a_3 \quad \text{e} \quad p(-1) = a_o - a_1 + a_2 - a_3. \quad (*)$$

Logo

$$
\begin{aligned}
p \in U \cap W &\iff \begin{cases} a_o = 0 \\ a_o + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \\ a_o - a_1 + a_2 - a_3 = 0 \end{cases} \overset{[\text{Exercício}]}{\iff} \begin{cases} a_o = a_2 = 0 \\ a_3 = -a_1 \end{cases} \\
&\iff p(x) = a_1(x - x^3), \quad x \in \mathbb{R}. \quad (**)
\end{aligned}
$$

Definindo-se $r \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ por

$$r(x) \doteq x - x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

temos que $r \in W$ (pois $r(0) = r(1) = r(-1) = 0$).

Logo de (**) temos que

$$U \cap W = [r].$$

Além disso os vetores $r \neq O \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ logo é l.i., assim $\mathcal{D} \doteq \{r\}$ é uma base de $U \cap W$, em particular, $\dim(U \cap W) = 1$.

Para $U + W$:

Da proposição (6.26) temos

$$\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W) = 2 + 3 - 1 = 4 = \dim(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})).$$

Logo da proposição (6.30) segue que $U + W = \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ e assim podemos tomar como base os polinômios $s_o, s_1, s_2, s_3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, dados por

$$s_o(x) \doteq 1, \quad s_1(x) \doteq x, \quad s_2(x) \doteq x^2, \quad s_3(x) \doteq x^3, \quad x \in \mathbb{R},$$

como base para $U + W$.

Observação 6.35 *Como* $\dim(U \cap W) = 1 \neq 0$ *(logo* $U \cap W \neq \{0\}$*) segue* $\mathscr{P}_3(\mathbb{R}) = U + W$ *mas esta soma* **não** *é uma soma direta.*

6.4 Coordenadas

Sejam $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial finitamente gerado e $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base de $(V, +, \cdot)$.

Como $\mathcal{B}$ é uma base de $(V, +, \cdot)$, todo vetor de $u \in V$ se escreve como combinação linear dos elementos de $\mathcal{B}$, isto é, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n.$$

Fixada a base $\mathcal{B}$, pela proposição (5.21), os escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ são **unicamente** determinados pelo vetor u.

Definição 6.36 *Os coeficientes* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *obtidos (de modo único) acima, serão denominados* coordenadas do vetor u *em relação à base* $\mathcal{B}$ *do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Denotaremos por $[u]_{\mathcal{B}}$ *(ou por* $u_{\mathcal{B}}$*) a matriz de* $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *definida por*

$$[u]_{\mathcal{B}} \doteq \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

que será denominada matriz das coordenadas do vetor u *em relação à base* $\mathcal{B}$ *do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$.

Com isto temos o:

Exemplo 6.37 *Mostre que* $\mathcal{B} \doteq \{(1,1,1), (0,1,1), (0,0,1)\}$ *é uma base do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*).*

Encontre as coordenadas do vetor $u \doteq (1,2,0) \in \mathbb{R}^3$ *em relação à base* $\mathcal{B}$ *e a matriz das coordenadas do vetor* u *(isto é,* $[u]_{\mathcal{B}}$*) em relação à base* $\mathcal{B}$.

Resolução:

Sabemos que $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Logo, para verificar $\mathcal{B}$ é uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, basta verificar se eles são l.i. em $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Utilizando o exemplo (5.7) vemos que estes vetores são de fato l.i. pois

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overset{\text{[Exercício]}}{=} 1 \neq 0,$$

logo $\mathcal{B}$ será uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Para encontrarmos as coordenadas do vetor u em relação à base $\mathcal{B}$, vale observar que precisaremos encontrar escalares $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$(1,2,0) = \alpha \cdot (1,1,1) + \beta \cdot (0,1,1) + \gamma \cdot (0,0,1) = (\alpha, \alpha+\beta, \alpha+\beta+\gamma)$$

que é equivalente ao sistema

$$\begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

cuja (única) solução será (verifique!)

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \gamma = -2,$$

ou seja, estas serão as coordenadas do vetor u em relação à base $\mathcal{B}$.

Desse modo, a matriz das coordenadas do vetor $u = (1,2,0)$ em relação à base $\mathcal{B}$ será dada por:

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Temos também o:

Exemplo 6.38 *Mostre que os polinômios* $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *dados por*

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2 - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

formam uma base, que denotaremos por $\mathcal{B}$, *do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(ondo* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*).*

Encontre as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, onde*

$$p(x) \doteq 1 + x + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

com relação à base $\mathcal{B}$*.*

Encontre também as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor p *acima em relação à base* $\mathcal{C} \doteq \{q_o, q_1, q_2\}$*, onde*

$$q_o(x) \doteq 1, \quad q_1(x) \doteq x, \quad q_2(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

Para verificar que $\mathcal{B}$ é uma base de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ basta mostrar que todo vetor $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ se escreve de maneira única como combinação linear dos vetores de $\mathcal{B}$.

Como $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ existem $a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$q(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Logo basta mostrar que existem únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} q = \alpha \cdot p_o + \beta \cdot p_1 + \gamma \cdot p_2 \;&\Leftrightarrow\; q(x) = \alpha p_o(x) + \beta p_1(x) + \gamma p_2(x), \quad x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow\; a_o + a_1 x + a_2 x_2 = \alpha + \beta x + \gamma(x^2 - x), \quad x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow\; a_o + a_1 x + a_2 x_2 = \alpha + (\beta - \gamma)x + \gamma x^2, \quad x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

A identidade acima é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} \alpha = a_o \\ \beta - \gamma = a_1 \\ \gamma = a_2, \end{cases}$$

que possui uma única solução dada por

$$\alpha = a_o, \; \beta = a_1 + a_2, \; \gamma = a_2 \quad (**)$$

(verifique!), mostrando que $\mathcal{B}$ é uma base de $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Os escalares obtidos em (**) serão as coordenadas do vetor $q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ em relação à base $\mathcal{B}$.

Logo a matriz das coordenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$p(x) \doteq 1 + x + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

com relação à base $\mathcal{B}$ será dada por (fazer $a_o = 1, a_1 = 1$ e $a_2 = 1$ em (**))

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Note que com relação à base $\mathcal{C}$ temos que

$$p(x) = 1 + x + x^2 = 1.\underbrace{1}_{=q_o(x)} + 1.\underbrace{x}_{=q_1(x)} + 1.\underbrace{x^2}_{=q_2(x)}$$
$$= \underbrace{1}_{=\alpha}.q_o(x) + \underbrace{1}_{=\beta}.q_1(x) + \underbrace{1}_{=\gamma}.q_2(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

assim

$$\alpha = \beta = \gamma = 1$$

serão as coordenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ em relação à base $\mathcal{C}$.

Logo a matriz das coorrdenadas do vetor $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por

$$p(x) \doteq 1 + x + x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

com relação à base $\mathcal{C}$ será dada por

$$[u]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Observação 6.39 *Observemos que no exemplo acima as base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são distintas e as matrizes das coordenadas do vetor p em relação a cada uma das bases também são diferentes.*

Conclusão: existe, pelo menos, duas maneiras diferentes de se obter o vetor p em termos de combinações lineares de elementos de base distintas do espaço vetorial em questão.

Para finalizar temos os seguintes resultados:

Proposição 6.40 *Sejam $(U, +, \cdot)$ espaço vetorial real finitamente gerado, $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\}$ base de U e $u, v \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Então

$$[u + v]_{\mathcal{B}} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}$$

e

$$[\lambda \cdot u]_{\mathcal{B}} = \lambda [u]_{\mathcal{B}}.$$

Prova:

Como $\mathcal{B}$ é base de U e $u, v \in U$,segue que existem únicos escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n$$

e

$$v = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n.$$

Com isto temos que

$$\begin{aligned} u + v &= [\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] + [\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n] \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \cdot u_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot u_n \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \lambda \cdot u &= \lambda[\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] \\ &= (\lambda\alpha_1) \cdot u_1 + \cdots + (\lambda\alpha_n) \cdot u_n \end{aligned}$$

Com isto temos que

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{e } [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \quad [u+v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} \text{ e } [\lambda \cdot u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix}.$$

Portanto

$$[u+v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = [u]_{\mathcal{B}} + [v]_{\mathcal{B}}$$

e

$$[\lambda \cdot u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_1 \\ \vdots \\ \lambda\alpha_n \end{pmatrix} = \lambda[\lambda \cdot u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \lambda[u]_{\mathcal{B}},$$

completando a demonstração.

∎

Proposição 6.41 *Sejam* $(U, +, \cdot)$, $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde em* $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) com* $\dim(U) = n$, $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\}$ *base de* U *e* $v_1, \cdots, v_m \in U$.

O conjunto $\{v_1, \cdots, v_m\}$ *é l.i. em* U *se, e somente se,* $\{[v_1]_{\mathcal{B}}, \cdots, [v_m]_{\mathcal{B}}\}$ *é l.i. em* $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

Prova:

Como $\mathcal{B}$ é base de U e $v_j \in U$, $j = 1, \cdots, m$, segue que existem únicos escalares $\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{nj}, \in \mathbb{R}$ tais que

$$v_j = \alpha_{1j} \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{nj} \cdot u_n,$$

isto é,

$$[v_j]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{nj} \end{pmatrix}.$$

Logo $\{v_1, \cdots, v_m\}$ é l.i. em U se, e somente se,

$$\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_m \cdot v_m = O \quad \text{implicar} \quad \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0,$$

que é equivalente a

$$\underbrace{[\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_m \cdot v_m]_{\mathcal{B}}}_{\overset{[\text{prop. acima}]}{=} \beta_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \beta_m [v_m]_{\mathcal{B}}} = \underbrace{[O]_{\mathcal{B}}}_{= O \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})} \quad \text{implicar} \quad \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0,$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\beta_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \beta_m [v_m]_{\mathcal{B}} = O \quad \text{implicar} \quad \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0,$$

que é o mesmo que dizer que o conjunto $\{[v_1]_{\mathcal{B}}, \cdots, [v_m]_{\mathcal{B}}\}$ é l.i. em $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, completando a demonstração.

∎

Como consequêncai temos o

Corolário 6.42 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial realfinitamente gerado,* $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\}$ *base de* U *e* $v_1, \cdots, v_n \in U$.

O conjunto $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_n\}$ *é base de* U *se, e somente se,*

$$\det\left[[v_1]_{\mathcal{B}} \cdots [v_n]_{\mathcal{B}}\right] \neq 0$$

Prova:

Da proposição acima temos que O conjunto $\{v_1, \cdots, v_n\}$ é l.i. em U se, e somente se, $\{[v_1]_{\mathcal{B}}, \cdots, [v_n]_{\mathcal{B}}\}$ é l.i. em $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, ou equivalentemente,

$$\beta_1 [v_1]_{\mathcal{B}} + \cdots + \beta_m [v_m]_{\mathcal{B}} = O \quad \text{implicar} \quad \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0.$$

Utilizando a notação da demonstração da proposição acima segue que o lado esquerdo da identidade acima torna-ser-á

$$\underbrace{\beta_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \vdots \\ \alpha_{n2} \end{pmatrix} + \cdots + \beta_n \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{implicar} \quad \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0,$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{implicar} \quad \beta_1 = \cdots = \beta_m = 0,$$

que pelo Apêndice I e II, é equiavelente a matriz $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$ ser uma matriz inversível, ou seja,

$$\det\,[[v_1]_{\mathcal{B}} \cdots [v_n]_{\mathcal{B}}] = \det \left[\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \right] \neq 0,$$

completando a demonstração.

∎

6.5 Exercícios

Capítulo 7

Mudança de Base

7.1 Introdução, Exemplos e Propriedades

Como vimos no exemplo (6.38) a matriz das coordenadas de um vetor de um espaço vetorial real podem variar quando se consideram bases distintas do espaço vetorial real em questão.

O que passaremos a estudar agora é como esta mudança ocorre, ou seja, como é possível encontrar a matriz das coordenadas de um vetor em relação a uma base conhendo-se sua a matriz das coordenadas em relação a uma outra base do mesmo espaço vetorial real.

Para isto seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real finitamente gerado.

Consideremos $\mathcal{B} \doteq \{b_1, \ldots, b_n\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{c_1, \ldots, c_n\}$ bases de $(V, +, \cdot)$.

Como $\mathcal{B}$ é uma base de $(V, +, \cdot)$, podemos escrever cada um dos vetores da base $\mathcal{C}$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$, isto é, existem escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq n$ tais que

$$\begin{aligned} c_1 &= \alpha_{11} \cdot b_1 + \cdots + \alpha_{n1} \cdot b_n \\ &\vdots \\ c_n &= \alpha_{1n} \cdot b_1 + \cdots + \alpha_{nn} \cdot b_n. \end{aligned}$$

Desta forma, a matriz das coordenadas dos vetores da base $\mathcal{C}$ (isto é, dos vetores $c_1, \ldots, c_n$) em relação à base $\mathcal{B}$ serão, respectivamente,

$$[c_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{n1} \end{pmatrix}, \cdots, [c_n]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1n} \\ \vdots \\ \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Com estas informações sobre as coordenadas dos vetores da base $\mathcal{C}$ em relação à base $\mathcal{B}$ podemos construir a seguinte matriz quadrada de ordem n:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix},$$

cujas colunas são formadas pelas coordenas dos vetores $c_1, \ldots, c_n$ com relação à base $\mathcal{B}$.

Com isto temos a:

Definição 7.1 *A matriz acima será denominada de* matriz mudança de base, da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$ *e denotada por* $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ *(ou por* $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$*) , ou seja,*

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}.$$

Observação 7.2 *Para obter a matriz de mudança de base, da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$, precisamos escrever os vetores da base $\mathcal{C}$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$ e com os respectivos coeficientes construimos as colunas da matriz de mudança de base procurada.*

Antes de encontrarmos uma relação que existe entre a matriz $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ e as coordenadas de um dado vetor com relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, vejamos como podemos encontrar a matriz de mudança de base no seguinte exemplo:

Exemplo 7.3 *Seja* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*).*

Consideremos as bases

$$\mathcal{B} \doteq \{(1,0,1),(1,1,1)(1,1,2)\} \quad e \quad \mathcal{C} \doteq \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Encontre a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$ (isto é, $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$*).*

Resolução:

Sabemos que $\mathcal{C}$ é uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ (é a base canônica de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$).

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $\mathcal{B}$ também é uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Para encontrar a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$ precisamos escrever os vetores da base $\mathcal{C}$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$, isto é, precisamos encontrar escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq 3$ tais que:

Precisamos resolver

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &= \alpha_{11} \cdot (1,0,1) + \alpha_{21} \cdot (1,1,1) + \alpha_{31} \cdot (1,1,2) \\
&= (\alpha_{11}, 0, \alpha_{11}) + (\alpha_{21}, \alpha_{21}, \alpha_{21})) + (\alpha_{31}, \alpha_{31}, 2\alpha_{31}) \\
(0,1,0) &= \alpha_{12} \cdot (1,0,1) + \alpha_{22} \cdot (1,1,1) + \alpha_{32} \cdot (1,1,2) \\
&= (\alpha_{12}, 0, \alpha_{12}) + (\alpha_{22}, \alpha_{22}, \alpha_{22}) + (\alpha_{32}, \alpha_{32}, 2\alpha_{32}) \\
(0,0,1) &= \alpha_{13} \cdot (1,0,1) + \alpha_{23} \cdot (1,1,1) + \alpha_{33} \cdot (1,1,2) \\
&= (\alpha_{13}, 0, \alpha_{13}) + (\alpha_{23}, \alpha_{23}, \alpha_{23}) + (\alpha_{33}, \alpha_{33}, 2\alpha_{33})
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente:

$$\begin{aligned}
(1,0,0) &= (\alpha_{11} + \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{21} + \alpha_{31}, \alpha_{11} + \alpha_{21} + 2\alpha_{31}) \quad (1) \\
(0,1,0) &= (\alpha_{12} + \alpha_{22} + \alpha_{32}, \alpha_{22} + \alpha_{32}, \alpha_{12} + \alpha_{22} + 2\alpha_{32}) \quad (2) \\
(0,0,1) &= (\alpha_{13} + \alpha_{23} + \alpha_{33}, \alpha_{23} + \alpha_{33}, \alpha_{13} + \alpha_{23} + 2\alpha_{33}). \quad (3)
\end{aligned}$$

Um momento de reflexão nos poupará um pouco de trabalho neste ponto.

Notemos que (1), (2) ou (3) representa um sistema de três equações com três incógnitas e que a matriz associada a cada um destas é a mesma, a saber, a matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

O que muda em cada um dos sistemas lineares associados a (1), (2) ou (3) são os nomes das variáveis, além do segundo membro em questão.

Utilizando-se como variáveis $x, , y, z \in \mathbb{R}$ basta resolvermos o seguinte a equação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ serão escolhidos de acordo com o segundos membros de (1), (2) ou (3) acima.

Utilizando-se escalonamento de matrizes (ver os Apêndices I e II) podemos verificar que a equação matricial acima é equivalente a seguinte equação matricial (cuja matriz está na forma escalonada reduzida por linhas, ver os Apêndices I e II):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c - a \end{pmatrix}$$

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que a única solução desta equação matricial é dada por

$$x = a - b, \quad y = a + b - c \quad \text{e} \quad z = c - a. \qquad (*)$$

Assim para encontrar uma (única) solução do sistema (1) basta tomarmos $(a, b, c) = (1, 0, 0)$ e, por (*), obter

$$\alpha_{11} = a - b = 1 - 0 = 1, \quad \alpha_{21} = a + b - c = 1 + 0 - 0 = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{31} = c - a = 0 - 1 = -1,$$

ou seja,

$$(\alpha_{11}, \alpha_{21}, \alpha_{31}) = (1, 1, -1). \qquad (4)$$

Para encontrar uma (única) solução do sistema (2) basta tomarmos $(a, b, c) \doteq (0, 1, 0)$ e, por (*), obter

$$\alpha_{12} = a - b = 0 - 1 = -1, \quad \alpha_{22} = a + b - c = 0 + 1 - 0 = 1 \quad \text{e} \quad \alpha_{32} = c - a = 0 - 0 = 0,$$

ou seja,

$$(\alpha_{12}, \alpha_{22}, \alpha_{32}) = (-1, 1, 0). \qquad (5)$$

Finalmente, para encontrar uma (única) solução do sistema (3) basta tomarmos $(a, b, c) = (0, 0, 1)$ e, por (*), obter

$$\alpha_{13} = a - b = 0 - 0 = 0, \quad \alpha_{23} = a + b - c = 0 + 0 - 1 = -1 \quad \text{e} \quad \alpha_{33} = c - a = 1 - 0 = 1,$$

ou seja,

$$(\alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{33}) = (0, -1, 1). \qquad (6)$$

Desta forma, de (4), (5) e (6), obtemos que a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$ será dada por:

$$M_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos também o

Exemplo 7.4 *Com as notações do exemplo acima, encontre a matriz de mudança da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$ (isto é, $M_{\mathcal{CB}}$).*

Resolução:

Para encontrar a matriz de mudança da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$ precisamos escrever os vetores da base $\mathcal{B}$ como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{C}$, isto é, precisamos encontrar escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i, j \leq 3$ tais que:

$$\begin{aligned}
(1,0,1) &= \alpha_{11} \cdot (1,0,0) + \alpha_{21} \cdot (0,1,0) + \alpha_{31} \cdot (0,0,1) \\
(1,1,1) &= \alpha_{12} \cdot (1,0,0) + \alpha_{22} \cdot (0,1,0) + \alpha_{32} \cdot (0,0,1) \\
(1,1,2) &= \alpha_{13} \cdot (1,0,0) + \alpha_{23} \cdot (0,1,0) + \alpha_{33} \cdot (0,0,0)
\end{aligned}$$

que é uma tarefa simples já que:

$$\begin{aligned}
(1,0,1) &= 1 \cdot (1,0,0) + 0 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1) \\
(1,1,1) &= 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 1 \cdot (0,0,1) \\
(1,1,2) &= 1 \cdot (1,0,0) + 1 \cdot (0,1,0) + 2 \cdot (0,0,0).
\end{aligned}$$

Portanto a matriz de mudança da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$ será dada por:

$$M_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observação 7.5 *Nos dois exemplos acima vale observarmos que*

$$M_{\mathcal{CB}} = M_{\mathcal{BC}}^{-1}.$$

Deixaremos a verificação deste fato como exerício para o leitor.

Vejamos agora como as matrizes das coordenadas de um vetor se relacionam com respeito a duas bases de um mesmos espaço vetorial real de dimensão finita.

Sejam $\mathcal{B} \doteq \{b_1, \ldots, b_n\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{c_1, \ldots, c_n\}$ bases de um espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ de dimensão finita .

Dado um vetor $v \in V$ sejam

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (1) \quad \text{e} \quad [v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad (2)$$

as matrizes das coordenadas do vetor v em relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente.

Se $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (\alpha_{ij})$ denota a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para base $\mathcal{C}$, então como

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i, \quad j = 1, \ldots, n, \quad (*)$$

de (1) e (2), obtemos

$$\sum_{i=1}^{n} x_i b_i \stackrel{(1)}{=} v \stackrel{(2)}{=} \sum_{j=1}^{n} y_j c_j \stackrel{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j \right) b_i \qquad (**)$$

onde na última igualdade trocamos a ordem dos somatórios.

Como os vetores $b_1, \ldots, b_n$ são l.i., segue-se que o vetor v pode ser representado, de modo único, como combinação linear destes vetores.

Portanto (**) implicará que

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} y_j, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Porém, estas n equações podem ser escritas na seguinte fórmula matricial (veja os Apêndices I e II):

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

ou ainda como:

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \, [v]_{\mathcal{C}} = [v]_{\mathcal{B}}.$$

Com isto acabamos de demonstrar a:

Proposição 7.6 *Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de um espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ de dimensão finita.*

Se $[v]_{\mathcal{B}}$ e $[v]_{\mathcal{C}}$ representam as matrizes das coordenadas de um dado vetor $v \in V$ emrelação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente e se $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ é a matriz de mudança de base da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$ então teremos a seguinte identidade

$$[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \, [v]_{\mathcal{C}}.$$

Apliquemos o resultado acima a alguns exemplos.

Exemplo 7.7 *Seja* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*).*

Fixado $\theta \in \mathbb{R}$, *considere os vetores*

$$u_1 \doteq (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) \qquad e \qquad u_2 \doteq (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))$$

de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Mostre que $\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2\}$ *é uma base de* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Encontre a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ *para a base* $\mathcal{C} \doteq \{e_1, e_2\}$*, onde*

$$e_1 \doteq (1, 0) \quad e \quad e_2 \doteq (0, 1).$$

Encontre a matriz das coordenadas do vetor

$$u \doteq a \cdot e_1 + b \cdot e_2$$

em relação às bases $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$.

Resolução:

Como a dimensão de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ é dois, basta mostrarmos que os vetores de $\mathcal{B}$ são l.i. em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

Para isto, sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ escalares tais que

$$\begin{aligned}
(0, 0) &= \alpha \cdot (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) + \beta \cdot (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta)) \\
&= (\alpha \cos(\theta), \alpha \operatorname{sen}(\theta)) + (-\beta \operatorname{sen}(\theta), \beta \cos(\theta)) \\
&= (\alpha \cos(\theta) - \beta \operatorname{sen}(\theta), \alpha \operatorname{sen}(\theta) + \beta \cos(\theta)),
\end{aligned}$$

ou, equivalentemente, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ são as soluções do sistema linear

$$\begin{cases} \alpha \cos(\theta) - \beta \operatorname{sen}(\theta) = 0 \\ \alpha \operatorname{sen}(\theta) + \beta \cos(\theta) = 0 \end{cases}.$$

Observemos que matriz dos coeficiente deste sistema, dada pela matriz:

$$A \doteq \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

tem determinante igual a $1 \neq 0$.

Logo (ver Apêndice I e II) o sistema acima só admite a solução trivial, isto é,

$$\alpha = \beta = 0$$

é a única solução do sistema linear acima e assim os vetores u_1, u_2 são l.i. em $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ e portanto $\mathcal{B}$ é uma base de $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$.

A matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$ (isto é, $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$) será dada pela matriz real (α_{ij}), onde

$$\begin{aligned}
(1, 0) =& \alpha_{11} \cdot (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) + \alpha_{21} \cdot (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta)) \\
(0, 1) =& \alpha_{12} \cdot (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) + \alpha_{22} \cdot (-\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta)),
\end{aligned}$$

que é equivalente a

$$\begin{aligned} (1,0) = & \quad (\alpha_{11}\cos(\theta) - \alpha_{21}\,\mathrm{sen}(\theta), \alpha_{11}\,\mathrm{sen}(\theta) + \alpha_{21}\cos(\theta)) \\ (0,1) = & \quad (\alpha_{12}\cos(\theta) - \alpha_{22}\,\mathrm{sen}(\theta), \alpha_{12}\,\mathrm{sen}(\theta) + \alpha_{22}\cos(\theta)), \end{aligned}$$

que por sua vez pode ser colocada na forma da seguinte equação matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{\doteq A} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

onde $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ será igual a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Como a matriz A é inversível (pois $\det(A) = 1 \neq 0$) segue que a (única) solução da equação matricial acima será dada por

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \overset{\text{[Exercício]}}{=} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\,\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x\cos(\theta) + y\,\mathrm{sen}(\theta) \\ y\cos(\theta) - x\,\mathrm{sen}(\theta) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{7.8}$$

Fazendo $(x, y) = (1, 0)$ obteremos

$$(\alpha_{11}, \alpha_{21}) = (\cos(\theta), -\,\mathrm{sen}(\theta)).$$

Tomando-se $(x, y) = (0, 1)$, teremos

$$(\alpha_{12}, \alpha_{22}) = (\,\mathrm{sen}(\theta), \cos(\theta)).$$

Assim,

$$M_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\,\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}. \quad (*)$$

Agora, se $[u]_{\mathcal{B}}$ representa a matriz das coordenadas do $u = a \cdot e_1 + b \cdot e_2$ com relação à base $\mathcal{B}$ e $[u]_{\mathcal{C}}$ a matriz das coordenadas do mesmo vetor com relação à base $\mathcal{C}$, pela proposição (7.6) temos

$$[u]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{BC}}\,[u]_{\mathcal{C}} \overset{(*)}{=} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \mathrm{sen}(\theta) \\ -\,\mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos(\theta) + b\,\mathrm{sen}(\theta) \\ b\cos(\theta) - a\,\mathrm{sen}(\theta) \end{pmatrix}.$$

O resultado a seguir é extremamente útil:

Proposição 7.9 *Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases de um espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ de dimensião finita. Temos que*

$$M_{\mathcal{BD}} = M_{\mathcal{BC}}.M_{\mathcal{CD}}.$$

Demonstração:

Suponhamos que $\dim(V) = n$ e que $\mathcal{B} \doteq \{b_1, \dots, b_n\}$, $\mathcal{C} \doteq \{c_1, \dots, c_n\}$ e $\mathcal{D} \doteq \{d_1, \dots, d_n\}$.

Se

$$M_{\mathcal{BC}} \doteq (\alpha_{ij}), \quad M_{\mathcal{CD}} \doteq (\beta_{ij}) \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{BD}} \doteq (\gamma_{ij})$$

segue que

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i, \quad (1) \qquad d_k = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} c_j, \quad (2) \qquad d_k = \sum_{i=1}^{n} \gamma_{ik} b_i. \quad (3)$$

Assim, de (1) e (2), teremos

$$d_k \overset{(2)}{=} \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \underbrace{c_j}_{\overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{jk} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} b_i \right)$$

$$\overset{\text{[Troque a ordem dos somatórios]}}{=} \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_{jk} \right) b_i,$$

como $b_1, \dots, b_n$ são l.i., comparando com a expressão (3), obteremos

$$\gamma_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \beta_{jk}, \qquad 1 \leq i, k \leq n.$$

Observemos que o lado direito da expressão acima representa o elemento da i-ésima linha e da k-ésima coluna da matriz $M_{\mathcal{BC}}.M_{\mathcal{CD}}$ (ver Apêndice I e II).

Portanto, $M_{\mathcal{BD}} = M_{\mathcal{BC}}.M_{\mathcal{CD}}$, como queríamos demonstrar.

∎

Como consequência da proposição acima podemos estender o que ocorreu na observação (7.5), mais precisamente:

Proposição 7.10 *Sejam $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ bases de um espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ de dimensião finita.*

Então a matriz de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$ (isto é, $M_{\mathcal{BC}}$) é uma matriz inversível e a sua matriz inversa é dada pela matriz de mudança da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$ (isto é, $M_{\mathcal{CB}}$), ou seja,

$$M_{\mathcal{CB}}^{-1} = M_{\mathcal{BC}}.$$

Demonstração:

Pela proposição anterior temos

$$M_{\mathcal{BB}} = M_{\mathcal{BC}}.M_{\mathcal{CB}} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{CC}} = M_{\mathcal{CB}}.M_{\mathcal{BC}}.$$

Logo, basta mostrarmos que

$$M_{\mathcal{BB}} = M_{\mathcal{CC}} = I_n = (\delta_{ij}),$$

onde

$$\delta_{ij} \doteq \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad ,$$

(ou seja, I_n é a matriz identidade de ordem n).

Mostremos que $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I$.

Se $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \dots, u_n\}$ e $M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = (\alpha_{ij})$ então deveremos ter:

$$u_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} u_i, \quad j = 1, \dots, n.$$

Como os vetores $u_1, \dots, u_n$ são l.i., para cada $j = 1, \dots, n$, a única solução de cada uma destas equações será dada por

$$\alpha_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

ou seja,

$$\alpha_{ij} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n,$$

completando a demonstração.

∎

Aplique as idéias acima para resolver o:

Exercício 7.11 *Utilize a proposição acima para refazer o exercício (7.4).*

7.2 Exercícios

Capítulo 8

Exercícios Resolvidos

Neste capítulo apresentamos alguns de exercícios resolvidos relacionados com os conceitos apresentados nos capítulos anteriores.

Exemplo 8.1 *Seja* $V \doteq \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 : \ y = x, \ z = w^2\}$.

Verifique se $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real onde (*$+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^4$*).*

Resolução:

Observemos que

$$(0, 0, 1, 1) \in V \quad \text{mas} \quad -1 \cdot (0, 0, 1, 1) = (0, 0, -1, -1) \notin V.$$

Assim, $(V, +, \cdot)$ <u>**não**</u> é um espaço vetorial real.

Exemplo 8.2 *Sejam* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *uma matriz quadrada de ordem* n *fixada e* $W \doteq \{X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}) : \ A.X = O\}$*, onde* $O \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ *denota a matriz coluna identicamente nula.*

Verifique se $(W, +, \cdot)$ *é um subespaço vetorial real do espaço vetorial* $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$*).*

Resolução:

Observemos que $W \subseteq M_{n\times 1}(\mathbb{R})$.

1. Seja $O \doteq (0)$ a matriz coluna $n \times 1$ nula.

   Como $A.O = O$, temos que $O \in W$.

2. Se $X, Y \in W$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, então, pelas propriedades de soma e de multiplicação por escalar usuais entre as matrizes e, também, pelas propriedades do produto entre matrizes, temos

$$A.(X + \lambda \cdot Y) = A.X + A.(\lambda \cdot Y) = A.X + \lambda A.Y = O + \lambda.O = O.$$

   Portanto $X + \lambda \cdot Y \in W$.

Com isto podemos afimar que W é um subespaço vetorial do espaço vetorial real $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exemplo 8.3 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de* $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$*).*

Encontre o subespaço vetorial do espaço vetorial real $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *gerado pelo conjunto* $S \doteq \{p, q, r, s\} \subseteq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ *onde*

$$p(t) \doteq 1, \quad q(t) \doteq t, \quad r(t) \doteq t^2, \quad s(s) \doteq 1 + t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

Observemos que

$$t^3 = (t^3 + 1) - 1 = s(t) - p(t) \quad t \in \mathbb{R}. \quad (*)$$

Logo, dado $u \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ existem escalares $a_o, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$u(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Mas

$$\begin{aligned} u(t) &= a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \overset{(*)}{=} a_o + a_1 t + a_2 t^2 + a_3[(t^3 + 1) - 1] \\ &= (a_o - a_3) + a_1 t + a_2 t^2 + a_3(t^3 + 1) \\ &= (a_o - a_3)\, p(t) + a_1\, q(t) + a_2\, r(t) + a_3\, s(t), \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

ou, equivalentemente:

$$u = (a_o - a_3) \cdot p + a_1 \cdot q + a_2 \cdot r + a_3 \cdot s,$$

ou seja, $u \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ pode ser obtido como combinação linear dos vetores de S, isto é, $u \in [S]$.

Portanto $\mathscr{P}_3(\mathbb{R}) = [S]$.

Exemplo 8.4 *Encontre o subespaço vetorial do espaço vetorial* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de* $M_2(\mathbb{R})$*) gerado por*

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Resolução:

Temos que $A \in [S]$ se, e somente se, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$A = \alpha \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\beta & 0 \end{pmatrix},$$

ou seja, $A \in [S]$ se, e somente se, os elementos da diagonal principal de A são nulos, ou seja, $[S]$ é o subespaço vetorial de $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ formado por todas as matrizes que tem zero na diagonal principal.

□

Exemplo 8.5 *Encontre um conjunto finito de geradores para o subespaço vetorial*

$$W = \{u \in M_{3\times 1}(\mathbb{R}) : A.u = 0\},$$

do espaço vetorial real $(M_{3\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$*) onde*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned}
u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \in W &\iff \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0.
\end{aligned}$$

Portanto

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

□

Exemplo 8.6 *Encontre um conjunto finito de geradores para o susbepaço vetorial*

$$W = \{u \in M_{4\times 1}(\mathbb{R}) : Au = 0\}$$

do espaço vetorial real $(M_{4\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$, $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_{4\times 1}(\mathbb{R})$*), onde*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

Observemos que

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \in W \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha = -\gamma/2 - \delta/2 \\ \beta = 3\gamma/2 + \delta/2 \end{cases},$$

isto é,

$$u = \begin{pmatrix} -\gamma/2 - \delta/2 \\ 3\gamma/2 + \delta/2 \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \delta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

Portanto:

$$W = \left[\begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

□

Exemplo 8.7 *Encontre uma base do subespaço vetorial*

$$U \doteq [(1, 0, 1), (1, 2, 0), (0, 2, -1)]$$

do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *(onde + e · são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*).*

Resolução:

Primeiro Modo:

Observemos que $(x, y, z) \in U$ se, e somente se, existem $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha \cdot (1, 0, 1) + \beta \cdot (1, 2, 0) + \gamma \cdot (0, 2, -1) = (x, y, z),$$

ou seja, $(x, y, z) \in U$ se, e somente se, a equação matricial abaixo admite solução

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-x \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y/2 \\ z-x \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y/2 \\ z-x+y/2 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-y/2 \\ y/2 \\ z-x+y/2 \end{pmatrix}$$

e esta equação matricial possui solução, que será dada por

$$\alpha = \gamma + x - y/2, \ \ \beta = -\gamma + y/2, \ \ \gamma \in \mathbb{R}, \quad z = x - y/2.$$

Dessa forma,

$$(x, y, z) = (\gamma + x - y/2) \cdot (1, 0, 1) + (-\gamma + y/2) \cdot (1, 2, 0) + \gamma \cdot (0, 2, -1) =$$

$$= (x, y, x - y/2) = x \cdot (1, 0, 1) + y \cdot (0, 1, -1/2)$$

e como

$$(1, 0, 1), (0, 1, -1/2) \tag{8.8}$$

são l.i., segue-se que formam uma base de U.

Segundo Modo:

Notemos que os vetores $(1, 0, 1)$ e $(1, 2, 0)$ são l.i. e pertencem a U.

Vejamos se estes vetores juntamente com $(0, 2, -1)$ são l.d. ou l.i. .

Para isto consideremos:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot (1, 0, 1) + \beta \cdot (1, 2, 0) + \gamma \cdot (0, 2, -1) = (0, 0, 0) & \\ \iff (\alpha + \beta, 2\beta + 2\gamma, \alpha - \gamma) &= (0, 0, 0) \\ \iff \begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases} & \iff \alpha = -\beta = \gamma, \end{aligned}$$

ou seja, os vetores

$$(1,0,1),(1,2,0),(0,2,-1)$$

são l.d..

Portanto, da proposição (5.20), segue que

$$(1,0,1),(1,2,0) \tag{8.9}$$

formam uma base de U.

Embora as bases (8.8) e (8.9) não coincidam, ambas estão corretas.

Basta observar que

$$(1,2,0)=(1,0,1)+2(0,1,-1/2).$$

$\square$

Exemplo 8.10 *Dados os subespaços vetoriais*

$$U=\{A\in M_2(\mathbb{R}):A^t=A\} \quad e \quad W=\left[\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\right]$$

do espaço vetorial real $(M_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_2(\mathbb{R})$*), encontre uma base dos subespaços vetoriais* U, W, $U\cap W$ *e* $U+W$, *no caso em que não se reduzam a* $\{0\}$.

Resolução:

<u>De U :</u>

Observemos que

$$A\in W \iff A=A^t \overset{A\doteq\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}}{\iff} \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix} \iff c=b.$$

Portanto, $A\in U$ se, e somente se,

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\b&d\end{pmatrix}=a\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}+d\cdot\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}, \quad a,b,d\in\mathbb{R}. \tag{8.11}$$

Observemos também que as

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

são l.i. (veifique!).

Portanto, as três matrizes acima são l.i. e geram U, ou seja, formam uma base do subespaço vetorial U, em particular, temos $\dim(U)=3$.

<u>De W :</u>

Como a matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gera W e é não nula, ela serve como base de W, em particular, temos $\dim(W) = 1$.

<u>De $U \cap W$:</u>

$$A \in U \cap W \iff A = A^t \text{ e existe } \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } A = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Logo

$$\begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & \lambda \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \lambda & \lambda \end{pmatrix},$$

mostranod que $\lambda = 0$, ou seja, $A = O$. Desse modo, $U \cap W = \{O\}$, em particular, $\dim(U \cap W) = 0$.

<u>De $U + W$:</u>

Temos

$$\dim(U + W) = \underbrace{\dim(U)}_{=3} + \underbrace{\dim(W)}_{=1} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{=0} = 4 = \dim(M_2(\mathbb{R})).$$

Portanto, $U + W = M_2(\mathbb{R})$ (na verdade a soma é direta, pois $\dim(U \cap W) = 0$) e assim uma base pode ser a base canônica de $M_2(\mathbb{R})$, isto é, dada por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Exemplo 8.12 *Sejam* $U \doteq \{p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) : p'(t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}\}$, $W \doteq \{p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) : p(0) = p(1) = 0\}$ *subespaços vetoriais do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*).*

Encontre bases para os subespaços vetoriais U, W, $U \cap W$ *e* $U + W$, *no caso em que não se reduzam a* $\{0\}$.

Resolução:

<u>Para U :</u>

Observemos que $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ então existem $a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2, \quad t \in \mathbb{R},$$

assim

$$p'(t) = a_1 + 2a_2 t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo

$$p \in U \ \Leftrightarrow \ p'(t) = 0, \ t \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ a_1 + 2a_2 t = 0, \ t \in \mathbb{R} \ \Leftrightarrow \ a_1 = a_2 = 0,$$

Logo, $p \in U$ se, e somente se, $p(t) = a_o,\ t \in \mathbb{R}$, para $a_o \in \mathbb{R}$.

Se considerarmos $p_o(t) \doteq 1,\ t \in \mathbb{R}$ então, $p_o \in U$ e além disso, $p \in U$ se, e somente se, $p = \alpha \cdot p_o$, para $\alpha \in \mathbb{R}$, ou seja, $U = [p_o]$, e como $p_o \neq O$, segue que $\{p_o\}$ será uma base de U, em particular, $\dim(U) = 1$.

<u>Para W :</u>

Observemos que se

$$p \in W \overset{[p(t)=a_o+a_1t+a_2t^2,\ t\in\mathbb{R}]}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a_o = p(0) = 0 \\ a_o + a_1 + a_2 = p(1) = 0 \end{cases}$$

$$\overset{[a_o=0,\ a_2=-a_1]}{\Leftrightarrow} p(t) = a_1 t - a_1 t^2 = a_1(t - t^2),\ t \in \mathbb{R}.$$

Logo se considerarmos $p_1(t) \doteq t - t^2$, $t \in \mathbb{R}$ então $p_1 \in W$ e $p \in W$ se, e somente se,

$$p(t) = a_1(t - t^2) = a_1 p_1(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

ou seja, $W = [p_1]$ e como $p_1 \neq 0$ segue que $\{p_1\}$ 'e uma base de W, em particular, $\dim(W) = 1$.

<u>Para $U \cap W$:</u>

Dos itens acima temos que $p \in U \cap W = [p_o] \cap [p_1]$ se, e somente se, existem $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tais que

$$\lambda \cdot p_o = p = \mu \cdot p_1 \ \Leftrightarrow\ \lambda = \mu(t - t^2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Logo $\lambda = \mu = 0$, ou seja, deveremos ter $p = 0 \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$.

Assim, $U \cap W = \{0\}$, em particular, $\dim(U \cap W) = 0$.

<u>Para $U + W$:</u>

Como

$$\dim(U + W) = \underbrace{\dim(U)}_{=1} + \underbrace{\dim(W)}_{=1} - \underbrace{\dim(U \cap W)}_{=0} = 1 + 1 - 0 = 2$$

e como a soma $U + W$ é uma soma direta (pois $\dim(U \cap W) = 0$), podemos tomar $\{p_o, p_1\}$ como base de $U + W$.

□

Exemplo 8.13 *Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real .*

Sejam $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$, formadas pelos vetores e_1, e_2, e_3 e g_1, g_2, g_3, respectivamente, relacionados da seguinte forma:

$$\begin{cases} g_1 = e_1 + e_2 - e_3 \\ g_2 = 2e_2 + 3e_3 \\ g_3 = 3e_1 + e_3 \end{cases} \qquad (*)$$

1. *Determine as matrizes de mudança da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$, isto é, $M_{\mathcal{BC}}$, e da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$, isto é, $M_{\mathcal{CB}}$.*

2. *Se as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base $\mathcal{B}$, isto é, $[v]_{\mathcal{B}}$, são dadas por $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ encontre as coordenadas e a matriz das coordeanadas do vetor v em relação a base $\mathcal{C}$, isto é, $[v]_{\mathcal{C}}$.*

3. *Se a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base $\mathcal{C}$, isto é, $[v]_{\mathcal{C}}$, é dada por* $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ *encontre a matriz das coordenadas do vetor v em relação a base $\mathcal{B}$, isto é, $[v]_{\mathcal{B}}$.*

Resolução:

1. De (*) temos

$$M_{\mathcal{BC}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $M_{\mathcal{CB}} = (M_{\mathcal{BC}})^{-1}$, passemos a encontrar a inversa da matriz $M_{\mathcal{BC}}$ (ver Apêndice I e II):

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{17}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{array}\right)$$

Portanto,

$$M_{\mathcal{CB}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix}$$

2. Como $[v]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{CB}}.[v]_{\mathcal{B}}$, temos:

$$[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{2}{17} & \frac{9}{17} & -\frac{6}{17} \\ -\frac{1}{17} & \frac{4}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{5}{17} & -\frac{3}{17} & \frac{2}{17} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Como $[v]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{BC}}[v]_{\mathcal{C}}$,

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

□

Exemplo 8.14 *Considere o seguinte subespaço do espaço vetorial real* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_2(\mathbb{R})$*):*

$$W \doteq \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}); x - y - z = 0 \right\}.$$

1. *Mostre que o conjunto* $\mathcal{B}$ *formando pelas matrizes*

$$B_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   e o conjunto $\mathcal{C}$ *formado pelas matrizes*

$$C_1 \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_2 \doteq \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C_3 \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   são bases do subespaço vetorial W*.*

2. *Encontre as matrizes de mudança de base da base* $\mathcal{B}$ *para a base* $\mathcal{C}$ *(isto é,* $M_{\mathcal{BC}}$*) e da base* $\mathcal{C}$ *para a base* $\mathcal{B}$ *(isto é,* $M_{\mathcal{CB}}$*).*

3. *Encontre uma base* $\mathcal{D}$ *do subespaço vetorial* W*, tal que a matriz*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

   seja a matriz de mudança da base $\mathcal{D}$ *para a base* $\mathcal{B}$ *(isto é,* $P = M_{\mathcal{DB}}$*).*

Resolução:

1. Observemos que

$$A \in W \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in W \Leftrightarrow x = y + z.$$

   Assim, $A \in W$ se, e somente se,

$$A = \begin{pmatrix} y+z & y \\ z & t \end{pmatrix} = y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y, z, t \in \mathbb{R}.$$

   Logo $W = [\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]$.

   Como as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ são l.i. (verifique!) temos que elas formarão uma base de W, em particualr $\dim(W) = 3$.

Como $\mathcal{C}$ é formado por três vetores de W e a dimensão de W é três, basta verificar que tais vetores são l.i. para que $\mathcal{C}$ seja uma base de W.

Para isto observemos que,

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \alpha+\beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \alpha = \beta = \gamma = 0,$$

mostrando que $\mathcal{C}$ é l.i. .

2. Observemos que

$$\begin{cases} C_1 = B_2 \\ C_2 = -B_1 + B_2 \\ C_3 = B_3 \end{cases},$$

assim

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Temos também: M_C^B, vemos que

$$\begin{cases} B_1 = C_1 - C_2 \\ B_2 = C_1 \\ B_3 = C_3 \end{cases},$$

assim

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Procuremos D_1, D_2 e D_3 em W de modo que formem uma base W e além disso $M_{\mathcal{D}\mathcal{B}} = P$.

Como $M_{\mathcal{D}\mathcal{B}} = P$ deveremos ter:

$$\begin{cases} B_1 = 1.D_1 + 0.D_2 + 0.D_3 = D_1 \\ B_2 = 1.D_1 + 0.D_2 + 3.D_3 = D_1 + 3.D_3 \\ B_3 = 0.D_1 + 2.D_2 + 1.D_3 = 2.D_2 + D_3 \end{cases},$$

e, resolvendo o sistema linear, obteremos:

$$D_1 = B_1, \quad D_3 = \frac{B_2 - B_1}{3}, \quad D_2 = \frac{B_3 - \frac{B_2 - B_1}{3}}{2} = \frac{3B_3 + B_1 - B_2}{6}.$$

Assim, a base $\mathcal{D}$ será formada pelas matrizes D_1, D_2 e D_3 que são dadas por (verifique!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1/6 \\ -1/6 & 1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1/3 \\ 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Capítulo 9

Transformações Lineares

9.1 Introdução e Exemplos

Até agora estudamos os espaços vetoriais reais e seus subespaços, introduzimos os conceitos como dependência e independência linear e, a partir disto, pudemos descrevê-los de maneira mais simples usando para isto geradores e, mais especificamente, bases.

De certa forma já temos em mãos tudo o que precisamos para trabalhar com espaços vetoriais reais.

No capítulo 13 voltaremos a estudar os espaços reais vetoriais que possuem uma estrutura mais rica.

O leitor já deve estar familiarizado com o conceito de funções, principalmente com aquelas que estão definidas em um subconjunto dos números reais e cujo contradomínio seja, eventualmente, um outro subconjunto dos números reais.

Nosso próximo passo é estudar funções que têm como domínio um espaço vetorial real e cujo contradomínio seja, eventualmente um outro espaço vetorial real.

Note que os valores tomados são, na verdade, vetores.

No entanto, vamos restringir a apenas alguns tipos especiais dentre estas funções.

Estaremos interessados em funções que *preservam* as operações existentes no espaço vetorial real que atua como o seu domínio e aquelas do espaço vetorial real que age como contra-domínio.

Por exemplo, preservar a adição de vetores entendemos que ao tomar dois vetores no domínio da função o valor que esta deve ter para a soma destes dois vetores é a soma dos valores que ela possui para cada um dos vetores no contradomínio.

De maneira semelhante a função deverá preservar o produto por escalar.

Funções com estas propriedades são chamadas de transformações lineares, mais precisamente, temos a:

Definição 9.1 *Sejam $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais.*

Diremos que uma função $T : U \to V$ é uma <u>transformação linear de U em V</u> *se forem verificadas as seguintes condições:*

1. $T(u + v) = T(u) + T(v), \qquad u, v \in U;$

2. $T(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot T(u), \qquad u \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

Observação 9.2

1. *Se indicarmos as operações de* V *por* $+_V$ *e* $\cdot_V$ *e as operações de* U *por* $+_U$ *e* $\cdot_U$ *então as propriedades acima podem ser escritas, de modo rigoroso, como:*

   1'. $T(u +_U v) = T(u) +_V T(v), \qquad u, v \in U;$

   2'. $T(\lambda \cdot_U u) = \lambda \cdot_V T(u), \qquad u \in U, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$

   Por uma questão de facilidade evitaremos escrever as sentenças acima e consideraremos entendidas as identidas 1. e 2. .

2. *Note que* $T : U \to V$ *é uma transformação linear se, e somente se,*

$$T(u + \lambda \cdot v) = T(u) + \lambda \cdot T(v),$$

   para todo $u, v \in U$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. *Note que pela propriedade 1 da definição acima temos*

$$T(O_U) = T(0 \cdot O_U) = 0 \cdot T(O_U) = O_V,$$

   onde O_U *denota o vetor nulo de* U *e* O_V *denota o vetor nulo de* V*, ou seja, toda transformação linear de* U *em* V *leva o vetor nulo de* U *no vetor nulo de* V.

4. *Além disso, na situação acima, temos que*

$$T(-u) = -T(u), \quad u \in U,$$

   ou seja, uma transformação linear de U *em* V *leva um vetor oposto de* U *num vetor oposto de* V.

   De fato

$$T(-u) + T(u) = T(-u + u) = T(O) = O,$$

   logo $T(-u) = -T(u)$.

5. *Finalmente, na situaçao acima, se* $u_1, \cdots, u_n \in U$ *e* $\lambda_1, \cdots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *então*

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot T(u_i).$$

6. *Na situação acima, se* $V = U$ *diremos que* T *é um* <u>operador linear em U</u>.

7. *Na situação acima, se* $V = \mathbb{R}$ *diremos que* T *é um* <u>funcional linear em U</u>.

A seguir listamos alguns exemplos de transformações lineares definidas em vários espaços vetoriais reais que já tratamos no decorrer do curso.

Exemplo 9.3 *Sejam* $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais e* $T : U \to V$ *dada por* $T(u) = O$, *para todo* $u \in U$.

Então T *é uma transformaçao linear de* U *em* U.

A transformação linear T *será chamada de* <u>*em transformação nula.*</u>

Resolução:

Utilizaremos a observação (9.2) item 2. .

Se $u, v \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ teremos que

$$T(u + \lambda \cdot v) = O = \underbrace{T(u)}_{=O} + \lambda \cdot \underbrace{T(v)}_{=O},$$

ou seja, T é uma transformaçao linear de U em U.

Exemplo 9.4 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real e* $T : U \to U$ *dada por* $T(u) = u$, *para todo* $u \in U$.

Então T *é um operador linear de* U *em* U.

O operador linear T *é chamado de* <u>*em operador identidade.*</u>

Resolução:

Utilizaremos a observação (9.2) item 2. .

Se $u, v \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ teremos que

$$T(u + \lambda \cdot v) = \underbrace{u}_{=T(u)} + \lambda \cdot \underbrace{v}_{=T(v)} = T(u) + \lambda \cdot T(v),$$

ou seja, T é uma transformaçao linear de U em U.

Exemplo 9.5 *Sejam* $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^{n+1}, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operaçoes usuais de* $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ *e de* $\mathbb{R}^{n+1}$, *respectivamente) e* $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n+1}$ *dada por*

$$T(p) \doteq (a_o, \ldots, a_n),$$

onde $p(t) = a_o + a_1 t + \cdots + a_n t^n$, $t \in \mathbb{R}$.

Resolução:

Utilizaremos a observação (9.2) item 2. .

Se $p, q \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então

$$p(t) = a_o + a_1 t + \cdots + a_n t^n, \quad q(t) = b_o + b_1 t + \cdots + b_n t^n, \quad t \in \mathbb{R},$$

para $a_o, \cdots, a_n, b_o, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$.

Logo

$$\begin{aligned}(p + \lambda \cdot q)(t) &= [a_o + a_1 t + \cdots + a_n t^n] + \lambda[b_o + b_1 t + \cdots + b_n t^n] \\ &= (a_o + \lambda b_o) + (a_1 \lambda b_1)t + \cdots + (a_n + \lambda b_n)t^n, \quad t \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} T(p+\lambda\cdot q) &= (a_o+\lambda b_o,\cdots,a_n+\lambda b_n) = (a_o,\cdots,a_n)+(\lambda b_o,\cdots,\lambda b_n) \\ &= \underbrace{(a_o,\cdots,a_n)}_{T(p)}+\lambda\cdot\underbrace{(b_o,\cdots,b_n)}_{=T(q)} = T(p)+\lambda\cdot T(q), \end{aligned}$$

ou seja, T é uma transformação linear de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^{n+1}$.

Exemplo 9.6 *Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz dada e $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}),+,\cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operaçoes usuais de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$).*

Definamos

$$T : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{m\times 1}(\mathbb{R})$$

por

$$T(u) \doteq Au, \quad u \in M_{m\times 1}(\mathbb{R}).$$

Então T é um operador linear de $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ em $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

Resolução:

Utilizaremos a observação (9.2) item 2. .

Se $u, v \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ teremos

$$T(u+\lambda\cdot v) = A(u+\lambda\cdot v) = Au + A(\lambda\cdot v) = \underbrace{Au}_{=T(u)}+\lambda\underbrace{(Av)}_{=T(v)} = T(u)+\lambda\cdot T(v),$$

ou seja, T é um operador linear de $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ em $M_{m\times 1}(\mathbb{R})$.

Exemplo 9.7 *Sejam $(C^1([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$ e $(\mathbb{R},+,\cdot)$ espaços vetoriais reais (onde $+$ e $\cdot$ são as operaçoes usuais de $C^1([0,1];\mathbb{R})$ e de $\mathbb{R}$, respectivamente) e $T : C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$T(f) \doteq \int_0^1 f(x)\,dx, \quad f \in C([0,1];\mathbb{R}).$$

Então T é um funcional linear de $C^1([0,1];\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}$.

Resolução:

Utilizaremos a observação (9.2) item 2. .

Se $f, g \in C^1([0,1];\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ teremos

$$T(f+\lambda\cdot g) = \int_0^1 (f+\lambda g)(x)\,dx = \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{=T(f)}+\lambda\underbrace{\int_0^1 g(x)\,dx}_{=F(g)} = T(f)+\lambda\cdot T(g),$$

ou seja, T é um funcional linear de $C^1([0,1];\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}$.

Exemplo 9.8 *Sejam $(C^1([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$ e $(C([0,1];\mathbb{R}),+,\cdot)$ espaços vetoriais reais (onde $+$ e $\cdot$ são as operaçoes usuais de $\mathcal{F}([0,1];\mathbb{R})$) e $T : C^1([0,1];\mathbb{R}) \to C([0,1];\mathbb{R})$ dada por*

$$T(f) \doteq f', \quad f \in C^1([0,1];\mathbb{R}).$$

Então T é uma transformação linear de $C^1([0,1];\mathbb{R})$ em $C([0,1];\mathbb{R})$.

Resolução:

Utilizaremos a observação (9.2) item 2. .

Se $f, g \in C^1([0,1];\mathbb{R})$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ teremos

$$T(f + \lambda \cdot g) = (f + \lambda g)' = \underbrace{f'}_{=T(f)} + \lambda \underbrace{g'}_{=F(g)} = T(f) + \lambda \cdot T(g),$$

ou seja, T é uma transformaçao linear de $C^1([0,1];\mathbb{R})$ em $C([0,1];\mathbb{R})$.

Os exemplos abaixo são de funções entre espaços vetoriais reais que **não** são transformações lineares.

Exemplo 9.9 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as respectivas operaçoes usuais) e* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$T(x, y, z) = x + y + z + 1, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Notemos que

$$T(0, 0, 0) = 1 \neq 0,$$

logo, da observação (9.2) item 3., segue que T **não** *é uma transformação linear de* $\mathbb{R}^3$ *em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 9.10 *Sejam* $(C([0,1];\mathbb{R}), +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as respectivas operaçoes usuais) e* $T : C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$T(f) = \int_0^1 |f(x)|\, dx, \quad f \in C([0,1];\mathbb{R}).$$

Se T *fosse uma transformação linear, pela observaçao (9.2) item 4., deveríamos ter*

$$T(-f) = -T(f)$$

para toda função $f \in C([0,1];\mathbb{R})$.

Para ver que isto não ocorre, basta tomar a função f *como sendo a função constante igual a* 1 *(isto é,* $f(x) \doteq 1, \ x \in [0,1]$*).*

Neste caso que

$$T(-f) \overset{[f(x)=1, x\in[0,1]]}{=} \int_0^1 |-1|\, dx = 1 \neq -1 = -T(f),$$

ou seja, **não** *é uma transformação linear de* $C([0,1];\mathbb{R})$ *em* $\mathbb{R}$.

Exemplo 9.11 *Sejam* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) e* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$T(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que

$$T(-1) = 1 = T(1) \neq -1 = -T(1),$$

assim, da observaçao (9.2) item 4., segue que T **não** *é um operador linear em* $\mathbb{R}$.

Podemos estender o resultado acima para

Exemplo 9.12 *Sejam* $n \in \{2, 3, \cdots\}$ *e* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais) e* $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$T(x) = x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Observemos que se n *é par temos que*

$$T(-1) = 1 = T(1) \neq -1 = -T(1),$$

assim, da observaçao (9.2) item 4., segue que T ***não*** *é um operador linear em* $\mathbb{R}$.

Se n *é ímpar temos que*

$$T(1+1) = T(2) = 2^n \overset{[n \geq 2]}{\neq} 2 = 1 + 1 = T(1) + T(1),$$

mostrando que T *não poderá ser um operador linear em* $\mathbb{R}$.

Um resultado importante é dado pela:

Proposição 9.13 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais, onde* U *é tem como base* $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ *e* $v_1, \cdots, v_n \in V$.

Então existe uma única $T : U \to V$ *transformação linear de* U *em* V *tal que*

$$T(u_i) \doteq v_i, \quad i = 1, \cdots, n. \tag{9.14}$$

Prova:

Dado $u \in U$, como $\mathcal{B}$ é base de U, existem únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n.$$

Definamos $T : U \to V$ por

$$T(u) \doteq \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n. \quad (*)$$

Afirmamos que T é uma transformação linear de U em V e

$$T(u_i) \doteq v_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Comecemos pela última afirmação.

Como $\mathcal{B}$ é base de U e $u_i \in U$ segue que

$$u_i = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{i-1} + 1.u_i + 0 \cdot u_{i+1} + \cdots + 0.u_n,$$

de modo único.

Logo, de (*) teremos:

$$T(u_i) \doteq \underbrace{0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{i-1}}_{=O} + \underbrace{1.v_i}_{=v_i} + \underbrace{0 \cdot v_{i+1} + \cdots + 0 \cdot v_n}_{=O} = v_i,$$

para $i = 1, \cdots, n$, mostrando que (9.14) ocorre.

Mostremos que T é uma transformação linear de U em V.

Para isto utilizaremos a observação (9.2) item 2. .

Se $u, w \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ então, como $\mathcal{B}$ é base de U, segue que existem únicos escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \quad \text{e} \quad w = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n.$$

Logo

$$\begin{aligned} u + \lambda \cdot w = u &= [\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] + \lambda[\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n] \\ &= (\alpha_1 + \beta_1) \cdot u_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) \cdot u_n. \end{aligned}$$

Logo da definição de T teremos

$$\begin{aligned} T(u + \lambda \cdot w) &= (\alpha_1 + \lambda\beta_1) \cdot v_1 + \cdots + (\alpha_n + \lambda\beta_n) \cdot v_n \\ &= \underbrace{[\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n]}_{=T(u)} + \lambda \cdot \underbrace{[\beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_n \cdot v_n]}_{=T(w)} \\ &= T(u) + \lambda \cdot T(w), \end{aligned}$$

mostrando que T é uma transformação linear de U em V.

Finalmente, mostremos que se S e T são transformações lineares de U em V tais que

$$T(u_i) = S(u_i), \quad i = 1, \cdots, n \qquad (**)$$

então $S = T$.

Para isto basta ver que se $u \in U$, existem únicos escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n.$$

Logo

$$\begin{aligned} S(u) &\overset{[u=\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n]}{=} S(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \\ &\overset{[S \text{ é trans. lin.}]}{=} \alpha_1 \cdot S(u_1) + \cdots + \alpha_n \cdot S(u_n) \\ &\overset{(**)}{=} \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \overset{(*)}{=} T(u), \quad u \in U, \end{aligned}$$

completando a demonstração.

∎

Observação 9.15 *A proposição acima nos diz que uma transformação linear definida em um espaço de dimensão finita fica completa e unicamente determinada conhecendo-se os seus valores em uma base do espaço vetorial real do domínio.*

Apliquemos isto ao

Exemplo 9.16 *Seja* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*).*

Encontre um operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *tal que*

$$T((1,2)) = (3,-1) \quad e \quad T((0,1)) = (1,2). \qquad (*)$$

Resolução:

Note que $\mathcal{B} \doteq \{(1,2),(0,1)\}$ é uma base de $\mathbb{R}^2$ (deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor).

Se $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ então podemos escrevê-lo como combinação linear dos vetores da base $\mathcal{B}$, isto é, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = (x,y) = \alpha_1 \cdot \underbrace{(1,2)}_{\doteq u_1} + \alpha_2 \cdot \underbrace{(0,1)}_{\doteq u_2} = (\alpha_1, 2\alpha_1 + \alpha_2)$$

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = 2\alpha_1 + \alpha_2 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha_1 = x \\ \alpha_2 = y - 2x \end{cases},$$

ou seja,

$$u = (x,y) = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 = x \cdot (1,2) + (y-2x) \cdot (0,1), \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

Deste modo, o operador linear T deverá satisfazer

$$T((x,y)) = \underbrace{T[x \cdot (1,2) + (y-2x) \cdot (0,1)]}_{T(\alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2)]} = \overbrace{x \cdot \underbrace{T((1,2))}_{=(3,-1)} + (y-2x) \cdot \underbrace{T((0,1))}_{=(1,2)}}^{=\alpha_1 \cdot \overbrace{T(u_1)}^{=v_1} + \alpha_2 \cdot \overbrace{T(u_2)}^{=v_2}}$$

$$\overset{(*)}{=} x \cdot (3,-1) + (y-2x) \cdot (1,2) = (x+y, 2y-5x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

ou seja,

$$T((x,y)) = (x+y, 2y-5x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que transformação T definida acima é um operador linear em $\mathbb{R}^2$ e satisfaz (*).

9.2 O Espaço Vetorial $\mathscr{L}(U, V)$

Definição 9.17 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais.*

O conjunto formado por todas as transformações lineares $T : U \to V$ *será denotado por* $\mathscr{L}(U, V)$.

Quando $U = V$ *usaremos a notação* $\mathscr{L}(U) \doteq \mathscr{L}(U, U)$.

Observação 9.18

1. *Dadas* $T, S \in \mathscr{L}(U, V)$ *definimos* $T + S : U \to V$ *por*

$$(T + S)(u) \doteq T(u) + S(u), \quad u \in U. \qquad (*)$$

Afirmamos que $T + S \in \mathscr{L}(U, V)$.

De fato, se $u, v \in U$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *temos*

$$\begin{aligned}(T + S)(u + \lambda \cdot v) &\overset{(*)}{=} T(u + \lambda \cdot v) + S(u + \lambda \cdot v) \\ &\overset{[T,S \in \mathscr{L}(U,V)]}{=} [T(u) + \lambda \cdot T(v)] + [S(u) + \lambda \cdot S(v)] \\ &= [T(u) + S(u)] + \lambda[T(v) + S(v)] \overset{(*)}{=} (T + S)(u) + \lambda(T + S)(v),\end{aligned}$$

logo pela obervação (9.2) item 2., segue que $T + S$ *é uma transformação linear de* U *em* V*, ou seja,* $T + S \in \mathscr{L}(U, V)$.

2. *Se* $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *definimos* $\lambda \cdot T : U \to V$ *como*

$$(\lambda \cdot T)(u) \doteq \lambda \cdot T(u), \quad u \in U. \qquad (**)$$

Afirmamos que $\lambda \cdot T \in \mathscr{L}(U, V)$.

De fato, se $u, v \in U$ *e* $\beta \in \mathbb{R}$ *temos*

$$\begin{aligned}(\lambda \cdot T)(u + \lambda \cdot v) &\overset{(**)}{=} \lambda \cdot T(u + \beta \cdot v) \overset{[T \in \mathscr{L}(U,V)]}{=} \lambda \cdot [T(u) + \beta \cdot T(v)] \\ &\overset{(*)}{=} (\lambda \cdot T)(u) + \beta \cdot (\lambda \cdot T)(v),\end{aligned} \tag{9.19}$$

logo pela obervação (9.2) item 2., segue que $\lambda \cdot T$ *é uma transformação linear de* U *em* V*, ou seja,* $\lambda \cdot T \in \mathscr{L}(U, V)$.

3. *Dos itens acima segue que* $(\mathscr{L}(U, V), +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

4. *Notemos que o vetor nulo de* $\mathscr{L}(U, V)$ *será a transformação linear nula, isto é,* $O : U \to V$ *dada por*

$$O(u) \doteq O, \quad u \in U.$$

Além disso se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *o vetor oposto de* T *será a transformação linear* $-T : U \to V$ *dada por*

$$(-T)(u) \doteq -T(u), \quad u \in \mathscr{L}(U, V).$$

Registraremos isto na seguinte

Proposição 9.20 *$(\mathscr{L}(U, V), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações introduzidas acima) é um espaço vetorial real.*

Definição 9.21 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real.*

Definimos o espaço dual (algébrico) de U, *denotado por* U', *como sendo*

$$U' \doteq \mathscr{L}(U, \mathbb{R}),$$

isto é, U' *é o conjunto formado por todos os funcionais lineares definidos em* U.

Temos a:

Teorema 9.22 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real de dimensão* n *e* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial de dimensão* m.

Então o espaço vetorial $(\mathscr{L}(U, V), +, \cdot)$ *tem dimensão* mn.

Prova:

Sejam $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ base do espaço vetorial real $(U, +, \cdot)$ e $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \ldots, v_m\}$ base do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.

Para cada $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$ definamos $T_{ij} : U \to V$ da seguinte maneira: se $u \in U$ então existem únicos escalares $x_1, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n.$$

Logo definiremos

$$T_{ij}(u) \doteq x_i \cdot v_j,$$

ou seja,

$$T_{ij}(x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_i \cdot u_i + \cdots + x_n \cdot u_n) \doteq x_i \cdot v_j, \quad \text{para} \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Notemos que para cada $k \in \{1, \cdots, n\}$ teremos:

$$\begin{aligned} T_{ij}(u_k) &= T_{ij}(0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{k-1} + 1.u_k + 0 \cdot u_{k+1} + \cdots + 0 \cdot u_n) \\ &= \begin{cases} v_j & \text{se } i = k \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases} . \end{aligned} \tag{9.23}$$

Afirmamos que $T_{ij} \in \mathscr{L}(U, V)$, para $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq m$.

De fato, se $u, v \in U$ então existem únicos escalares $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n \quad \text{e} \quad v = y_1 \cdot u_1 + \cdots + y_n \cdot u_n, \qquad (**)$$

logo

$$\begin{aligned} u + \lambda \cdot v &= [x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n] + \lambda \cdot [y_1 \cdot u_1 + \cdots + y_n \cdot u_n] \\ &= (x_1 + \lambda y_1) \cdot u_1 + \cdots + (x_n + \lambda y_n) \cdot u_n. \qquad (***) \end{aligned}$$

Assim, de (*), teremos:

$$\begin{aligned}
T(u+\lambda\cdot v) &\overset{(***)}{=} T_{ij}[(x_1+\lambda y_1)\cdot u_1+\cdots+(x_i+\lambda y_i)\cdot u_i+\cdots+(x_n+\lambda y_n)\cdot u_n]\\
&\overset{(*)}{=} (x_i+\lambda y_i)\cdot v_j = x_i\cdot v_j+\lambda\cdot(y_i\cdot v_j)\\
&\overset{(*)}{=} T_{ij}(x_1\cdot u_1+\cdots+x_i\cdot u_i+\cdots+x_n\cdot u_n)\\
&\qquad +\lambda\cdot T_{ij}(y_1\cdot u_1+\cdots+y_i\cdot u_i+\cdots+y_n\cdot u_n)\\
&\overset{(**)}{=} T_{ij}(u)+\lambda\cdot T_{ij}(v).
\end{aligned}$$

Logo da observação (9.2) item 2., segue que $T_{ij}\in\mathscr{L}(U,V)$, para $1\le i\le n$ e $1\le j\le m$.

Mostremos que

$$\mathcal{D}\doteq\{T_{ij}:1\le i\le n, 1\le j\le m\}$$

é uma base do espaço vetorial real $(\mathscr{L}(U,V),+,\cdot)$.

Afirmamos que $\mathcal{D}$ é l.i. em $(\mathscr{L}(U,V),+,\cdot)$.

De fato, se

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\cdot T_{ij}=O\in\mathscr{L}(U,V)$$

então, para cada $1\le k\le n$, segue que

$$O=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\cdot T_{ij}(u_k)=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\cdot\underbrace{T_{ij}(u_k)}_{\overset{[9.23]}{=}0\text{ se }i\neq k}=\sum_{j=1}^{m}a_{kj}\cdot\underbrace{T_{kj}(u_k)}_{\overset{[9.23]}{=}v_j}=\sum_{j=1}^{m}a_{kj}\cdot v_j.$$

Como $v_1,\ldots,v_m$ são linearmente independentes, segue-se que

$$a_{k1}=\cdots=a_{km}=0,$$

para cada $k\in\{1,\cdots,n\}$, ou seja,

$$a_{ij}=0,\quad\text{para}\quad 1\le i\le n,\ 1\le j\le m,$$

mostrando que $\mathcal{D}$ é um conjunto linearmente independente.

Afirmamos que $[\mathcal{D}]=\mathscr{L}(U,V)$.

De fato, se $T\in\mathscr{L}(U,V)$, par cada $u\in U$ temos que existem únicos escalares $x_1,\cdots x_n\in\mathbb{R}$ tais que

$$u=x_1\cdot u_1+\cdots+x_n\cdot u_n.$$

Como T é uma transformação linear segue que

$$T(u)=T(x_1\cdot u_1+\cdots+x_n\cdot u_n)=x_1\cdot T(u_1)+\cdots+x_n\cdot T(u_n). \tag{9.24}$$

Como $T(u_i)\in V$ e $\mathcal{C}$ é base do espaço vetorial $(V,+,\cdot)$, para cada $1\le i\le n$, existem únicos escalares $\alpha_{ji}\in\mathbb{R}$, $1\le j\le m$ tais que

$$T(u_i) = \alpha_{1i} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mi} \cdot v_m. \tag{9.25}$$

Para cada $1 \leq j \leq m$, $1 \leq i \leq n$, temos que

$$T_{ij}(u) = x_i \cdot v_j.$$

Logo de (9.24), (9.25) e (9.23)obteremos

$$\begin{aligned}
T(u) &\overset{(9.24)}{=} x_1 \cdot T(u_1) + \cdots + x_n \cdot T(u_n) \\
&\overset{(9.25)}{=} x_1 \cdot (\alpha_{11} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{m1} \cdot v_m) + \cdots + x_n \cdot (\alpha_{1n} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot v_m) \\
&= \alpha_{11} \cdot (x_1 \cdot v_1) + \cdots + \alpha_{m1} \cdot (x_1 \cdot v_m) + \cdots + \alpha_{1n} \cdot (x_n \cdot v_1) + \cdots + \alpha_{mn} \cdot (x_n \cdot v_m) \\
&\overset{(9.23)}{=} \alpha_{11} \cdot T_{11}(u) + \cdots + \alpha_{m1} \cdot T_{1m}(u) + \cdots + \alpha_{1n} \cdot T_{n1}(u) + \cdots + \alpha_{mn} \cdot T_{nm}(u),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$T = \alpha_{11} \cdot T_{11} + \cdots + \alpha_{m1} \cdot T_{1m} + \cdots + \alpha_{1n} \cdot T_{1n} + \cdots + \alpha_{mn} \cdot T_{nm},$$

mostrando que T é combicação linear dos elementos de $\mathcal{D}$, isto é, $\mathcal{D}$ gera $\mathscr{L}(U, V)$.

Portanto $\mathcal{D}$ é uma base do espaço vetorial real $(\mathscr{L}(U, V), +, \cdot)$ e como o número de elementos da base $\mathcal{D}$ é mn segue que $\dim(V) = mn$, finalizando a demonstração.

∎

Como consequência temos o

Corolário 9.26 *Seja $(U, +, \cdot)$ um espaço vetorial real de dimensão n.*

Então o espaço dual de U tem dimensão n, isto é,

$$\dim(U') = n.$$

Prova:

Como $U' = \mathscr{L}(U, \mathbb{R})$ e $\dim(\mathbb{R}) = 1$, segue do teorema acima que $\dim(U') = n.1 = n$, como queríamos demonstrar.

∎

Observação 9.27

1. *A base $\mathcal{D}$ obtida na demonstração do teorema acima será denominada* <u>base de $\mathscr{L}(U, V)$ associada</u>

2. *Pelo corolário (9.26), se o espaço vetorial real $(U, +, \cdot)$ tem dimensão n então o seu espaço dual, U', tem a mesma dimensão.*

   Seguindo os passos da demonstração do teorema (9.22), se $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ é uma base de $(U, +, \cdot)$ e $\mathcal{C} \doteq \{1\}$ é base de $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, então os funcionais lineares $T_1, \ldots, T_n : U \to \mathbb{R}$ dados por

   $$T_j(u) = T_j(x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n) = x_j, \quad u = x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n \in U$$

   para $j = 1, \cdots, n$, formarão uma base de U'.

   Esta base é chamada de <u>base dual</u> *associada às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$.*

Exemplo 9.28 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *espaços vetoriais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}$*, respectivamente).*

Considere a base $\mathcal{B}$ *do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *formada pelos vetores*

$$u_1 \doteq (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 1, 0), \quad u_3 = (1, 0, 0)$$

e $\mathcal{C} = \{v_1\} \doteq \{1\}$ *base do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$*.*

Encontre uma base para o espaço dual do espaço vetorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *associada às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $\mathcal{B}$ é base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Utilizaremos as idéias da observação acima item 2..

Observemos que se $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, como $\mathcal{B}$ é uma base de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, existem escalares únicos $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} u = (x, y, z) &= x_1 \cdot \underbrace{(1, 1, 1)}_{\doteq u_1} + x_2 \cdot \underbrace{(1, 1, 0)}_{\doteq u_2} + x_3 \cdot \underbrace{(1, 0, 0)}_{\doteq u_3} \\ &= x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3 \cdot u_3. \end{aligned}$$

Neste caso teremos os funcionais lineares que formarão a base dual associada às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, $T_j : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $j = 1, 2, 3$, serão dadas por

$$T_j(u) \doteq x_j, \quad \text{onde} \quad u = x_1 \cdot u_1 + x_2 \cdot u_2 + x_3 \cdot u_3.$$

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que neste caso teremos

$$x_1 = z, \quad x_2 = (y - z), \quad x_3 = (x - y),$$

ou seja,

$$(x, y, z) = z \cdot (1, 1, 1) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + (x - y) \cdot (1, 0, 0).$$

Deste modo, vimos (veja demonstração do teorema (9.22)) que uma base, que indicaremos por $\mathcal{D}$, para o espaço dual de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ associada às base $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, será formada pelos funcionais lineares $T_1, T_2, T_3 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dados por

$$\begin{aligned} T_1((x, y, z)) &= T_1(\underbrace{z \cdot (1, 1, 1)}_{= x_1 \cdot u_1} + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + (x - y) \cdot (1, 0, 0)) \\ &\doteq x_1 \cdot v_1 = z \cdot 1 = z, \\ T_2((x, y, z)) &= T_2(z \cdot (1, 1, 1) + \underbrace{(y - z) \cdot (1, 1, 0)}_{= x_2 \cdot u_2} + (x - y) \cdot (1, 0, 0) \\ &\doteq x_2 \cdot v_1 = (y - z).1 = y - z \\ T_3((x, y, z)) &= T_3(z \cdot (1, 1, 1) + (y - z) \cdot (1, 1, 0) + \underbrace{(x - y) \cdot (1, 0, 0)}_{= (x - y) \cdot u_3} \\ &\doteq x_3 \cdot v_1 \doteq (x - y).1 = x - y, \end{aligned}$$

para $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Conclusão: todo funcional linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ pode ser escrito, de modo único, como combinação linear dos funcionais lineares $T_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, para $i = 1, 2, 3$.

Temos também a:

Proposição 9.29 *Sejam* $(U, +, \cdot), (V, +, \cdot)$ *e* $(W, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais.*

Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *e* $S \in \mathscr{L}(V, W)$ *então* $S \circ T \in \mathscr{L}(U, W)$.

Prova:

Dados $u, v \in U$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ temos

$$\begin{aligned}(S \circ T)(u + \lambda \cdot v) &= S[T(u + \lambda \cdot v)] \overset{[\text{T é linear}]}{=} S[T(u) + \lambda \cdot T(v)] \\ &\overset{[\text{S é linear}]}{=} S[T(u)] + \lambda \cdot S[T(v)] \\ &= (S \circ T)(u) + \lambda \cdot (S \circ T)(v),\end{aligned}$$

Logo da observação (9.2) item 2., segue que $S \circ T \in \mathscr{L}(U, W)$, como queríamos demonstrar.

∎

Observação 9.30 *Em resumo, o resultado acima nos diz que a composta de transformações lineares será uma transformação linear.*

O resultado a seguir é um fato básico de funções em geral, que nos diz qua a operação de composição é associativa, masi precisamente:

Proposição 9.31 *Sejam* U, V, W *e* X *são conjuntos não vazios e* $T : U \to V$, $S : V \to W$ *e* $R : W \to X$ *funções.*

Então

$$(R \circ S) \circ T = R \circ (S \circ T). \qquad (*)$$

Prova:

Para todo $u \in U$, temos

$$[(R \circ S) \circ T](u) = (R \circ S)[T(u)] = R\{S[T(u)]\} \quad (**)$$

e por outro lado

$$[R \circ (S \circ T)](u) = R\{[S \circ T](u)\} = R\{S[T(u)]\}. \quad (***)$$

Logo de (**) e (***) segue a identidade (*), completando a demonstração.

∎

Temos também a:

Proposição 9.32 *Sejam* U *conjunto não vazio,* $(V, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais e* $S, T : U \to V$ *funções e e* $R \in \mathscr{L}(V, W)$.

Então

$$R \circ (S + T) = R \circ S + R \circ T.$$

Prova:

Se $u \in U$, temos

$$\begin{aligned}[R \circ (S + T)](u) = R[(S + T)(u)] = R[S(u) + T(u)] &\overset{[\text{R é linear}]}{=} R[S(u)] + R[T(u)] \\ = [R \circ S](u) + [R \circ T](u) &= [R \circ S + R \circ T](u),\end{aligned}$$

completando a demonstração.

∎

Voltando às transformações lineares temos a:

Proposição 9.33 *Sejam* $(U, +, \cdot), (V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais.*

Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *e* $I_V \in \mathscr{L}(V)$ *é o operador linear identidade em* V *(isto é,* $I_V e(v) \doteq v$, *para* $v \in V$*) e* $I_U \in \mathscr{L}(U)$ *é o operador linear identidade em* U *(isto é,* $I_U(u) \doteq u$, *para* $u \in U$*), então*

$$I_V \circ T = T \quad e \quad T \circ I_U = T.$$

Prova:

Se $u \in U$, temos

$$(I_V \circ T)(u) = I_V[T(u)] = T(u)$$

e

$$[T \circ I_U](u) = T[I_U(u)] = T(u),$$

completando a demonstração.

∎

Como aplicação destes resultados temos o

Exemplo 9.34 *Seja* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*).*

Consideremos $T, S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ *dadas por*

$$T(x, y) \doteq (x + y, 0) \quad e \quad S(x, y) \doteq (x, 2y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Encontre $T \circ S$ *e* $S \circ T$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T, S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

Para $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$(T \circ S)(x, y) = T(S(x, y)) = T(x, 2y) = (x + 2y, 0),$$

$$(S \circ T)(x, y) = S(T(x, y)) = S(x + y, 0) = (x + y, 0).$$

Notemos que, neste exemplo, $T \circ S \neq S \circ T$.

Podemos agora introduzir as:

Definição 9.35 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real.*
Se $T \in \mathscr{L}(U)$, *definiremos*

$$T^0 \doteq I_U, \quad T^1 \doteq T \quad e \quad T^n \doteq T \circ T^{n-1},$$

para $n \geq 2$, *onde* $I_U : U \to U$ *é o operador linear identidade em* U *(isto é,* $I_U(u) \doteq u$*, para* $u \in U$*).*

Com isto podemos introduzir a

Definição 9.36 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real.*
Um operador linear $T \in \mathscr{L}(U)$ *será dito* <u>nilpotente</u> *se existir* $n \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$T^n = O \in \mathscr{L}(U),$$

isto é, o operador linear T^n *será o operador linear nulo definido em* U.

Observação 9.37 *Um exemplo simples de operador nilpotente definido em um espaço vetorial real é o operador linear nulo.*

Exemplo 9.38 *Seja* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*).*
Mostre que $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) \doteq (0, x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

é um operador nilpotente.

Resolução:
Observemos que se $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ então

$$T^2(x, y) = T[T(x, y)] = T(0, x) = (0, 0),$$

assim, $T^2 = 0$, mostrando que o operador linear T é nilpotente (no caso, $n = 2$).

Definição 9.39 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais.*
Diremos que $T \in \mathscr{L}(U, V)$ <u>possui transformação inversa</u> *se existir uma função* $S : V \to U$ *tal que*

$$(S \circ T)(u) = u, \quad \textit{para todo} \quad u \in U$$

e

$$(T \circ S)(v) = v \quad \textit{para todo} \quad v \in V.$$

Em outras palavras,

$$T \circ S = I_V \quad e \quad S \circ T = I_U,$$

onde $I_U : U \to U$ *é o operador linear identidade em* U *e* $I_V : V \to V$ *é o operador linear identidade em* V.

Com isto temos a:

Proposição 9.40 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais.*

Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *possui uma transformação inversa então esta transformação inversa será única.*

Prova:

Suponhamos que $T \in \mathscr{L}(U, V)$ possua as trasnformações inversas $R, S : V \to U$.

Como

$$I_V = T \circ R \quad (1) \qquad \text{e} \qquad I_U = S \circ T \quad (2)$$

teremos

$$S = S \circ I_V \overset{(1)}{=} S \circ (T \circ R) = (S \circ T) \circ R \overset{(2)}{=} I_U \circ R = R,$$

mostrando que $S = R$ e completando a demonstração.

∎

Definição 9.41 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais e* $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *possui uma transformação inversa.*

Então a transformação inversa $S : V \to U$ *associada a transformação linear* T *será denotada por* T^{-1} *(isto é,* $T^{-1} \doteq S$ *obtida da proposição acima).*

Definição 9.42 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais.*

Uma transformação linear $T : U \to V$ *será dita*

1. <u>injetora</u> *se* $T(u) = T(v)$ *implicar em* $u = v$;

2. <u>sobrejetora</u> *se para todo* $v \in V$ *existir* $u \in U$ *tal que* $T(u) = v$;

3. <u>bijetora</u> *se for injetora e sobrejetora.*

Temos um resultado geral e básico de funções que diz:

Proposição 9.43 *Sejam* U, V *conjuntos não vazios.*

A função $T : U \to V$ *possui uma função inversa se, e somente se, a função* T *é bijetora.*

Prova:

Suponha que T possua uma função inversa.

Logo se $T(u) = T(v)$ então

$$u = T^{-1}(T(u)) = T^{-1}(T(v)) = v,$$

portanto, T é injetora.

Dado $v \in V$ vemos que $T(T^{-1}(v)) = v$, portanto, T também é sobrejetora, logo T é bijetora.

Reciprocamente, suponhamos que T seja bijetora.

Dado $v \in V$, como T é bijetora, existe um único $u_v \in U$ tal que

$$v = T(u_v). \quad (*)$$

Defina $S : V \to U$ por

$$S(v) \doteq u_v, \quad v \in U. \quad (**)$$

Mostremos que S é a função inversa de T.

Se $v \in V$ então

$$T(S(v)) \overset{(**)}{=} T(u_v) \overset{(*)}{=} v.$$

Se $u \in U$ então $S(T(u))$, pela definição de S, é o único elemento u' em U tal que $T(u') = T(u)$.

Como T é injetora, temos $u' = u$ e, assim, $S(T(u)) = u$, mostrando que S é a transformação inversa de T, completando a demonstração.

∎

Voltando as transformações lineares temos a:

Proposição 9.44 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais.*

Uma transformação linear $T : U \to V$ *é injetora se, e somente se, a* *<u>única</u>* *solução de* $T(u) = O$ *é o vetor nulo, isto é,* $u = O$.

Prova:

Suponha que $T \in \mathscr{L}(U, V)$ seja injetora.

Se $T(u) = O$, como $O = T(O)$, segue que $T(u) = T(O)$.

Como T é injetora deveremos ter $u = O$.

Reciprocamente suponha que a única solução de $T(u) = O$ seja o vetor nulo de U, isto é, $u = O$.

Logo se

$$T(u) = T(v) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{T(u) - T(v)}_{[T \text{ é linear}] \atop = T(u-v)} = O \quad \Rightarrow \quad T(u - v) = O.$$

Assim, por hipótese, deveremos ter $u - v = O$, isto é, $u = v$, mostrando que a transformação linear T é injetora, completando a demonstração.

∎

Temos também a

Proposição 9.45 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais.*

Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *possui transformação inversa* $T^{-1} : V \to U$ *então* $T^{-1} \in \mathscr{L}(V, U)$.

Prova:

Devemos mostrar que $T^{-1} : V \to U$ é uma transformação linear.

Para isto sejam $v_1, v_2 \in V$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como T é sobrejetora existem $u_1, u_2 \in U$ tais que

$$T(u_1) = v_1 \quad \text{e} \quad T(u_2) = v_2, \qquad (*)$$

ou, equivalentemente,

$$T^{-1}(v_1) = u_1 \quad \text{e} \quad T^{-1}(v_2) = u_2. \qquad (**)$$

Assim,

$$T^{-1}(v_1 + \lambda \cdot v_2) \overset{(*)}{=} T^{-1}[T(u_1) + \lambda \cdot T(u_2)] \overset{[T\text{é linear}]}{=} T^{-1}[T(u_1 + \lambda \cdot u_2)]$$
$$\overset{[T^{-1} \circ T = I_U]}{=} u_1 + \lambda \cdot u_2 \overset{(**)}{=} T^{-1}(v_1) + \lambda \cdot T^{-1}(v_2),$$

mostrando que $T^{-1} \in \mathscr{L}(V, U)$, completando a demonstração.

∎

9.3 Imagem e Núcleo de uma Transformação Linear

Começaremos com a

Definição 9.46 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

1. *Se* $X \subseteq U$, *definimos a* imagem do conjunto X pela transformação T, *indicada por* $T(X)$, *como sendo o conjunto*

$$T(X) \doteq \{T(x) : x \in X\} \subseteq V.$$

2. *Se* $Y \subseteq V$, *definimos a* imagem inversa do conjunto Y pela transformação T, *indicada por* $T^{-1}(Y)$, *como sendo o conjunto*

$$T^{-1}(Y) \doteq \{u \in U : T(u) \in Y\} \subseteq U.$$

Observação 9.47 *Notemos que na definiçao acima,* $T^{-1}(Y)$ **não** *tem nada a ver com a transforamção inversa da transformação* T *que pode, eventualemente, nem existir.*

Proposição 9.48 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais com* $\dim(V) = 1$.

Se $T : U \to V$ *é um transformação linear, não identicamente nula, então a transformação linear* T *será sobrejetora.*

Prova:

Como a transformação linear T é não nula existe $u_o \in U$ tal que

$$T(u_o) \neq O.$$

Como o espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ tem dimensão 1 então qualquer base sua é constituída por um vetor não nulo.

Logo $\mathcal{B} \doteq \{T(u_o)\}$ será uma base do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ (pois $T(u_o) \in V$ é não nulo de V).

Assim, dado $v \in V$ existe único escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$v = \alpha \cdot T(u_o) \overset{[T \text{ é linear}]}{=} T(\alpha \cdot u_o),$$

ou seja, a transformação linear T é sobrejetora, como queríamos demonstrar.

□

Como consequência temos o

Corolário 9.49 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais em* $\mathbb{R}$*).*

Se T *é um funcional linear definido em* U*, não identicamente nulo, então o funcional linear* T *será sobrejetor.*

Prova:

Como $\dim(\mathbb{R}) = 1$ a conclusão segue da proposição acima.

∎

Temos também a:

Proposição 9.50 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

1. *Se* W *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(U, +, \cdot)$ *então* $T(W)$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$*.*
2. *Se* Y *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$ *então* $T^{-1}(Y)$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial real* $(U, +, \cdot)$*.*

Prova:

De 1.:

Seja W um subespaço vetorial de $(U, +, \cdot)$.
Como $O \in W$ e $O = T(O)$ segue que $O \in T(W)$.
Sejam $x, y \in T(W)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
Como $x, y \in T(W)$ então existem $u, w \in W$ tais que

$$x = T(u) \quad \text{e} \quad y = T(w). \quad (*)$$

Como W é um subespaço vetorial de $(U, +, \cdot)$ segue que $u + \lambda \cdot w \in W$.
Logo

$$x + \lambda \cdot y \overset{(*)}{=} T(u) + \lambda \cdot T(w) \overset{[\text{T é linear}]}{=} T(\underbrace{u + \lambda \cdot w}_{\in W}) \in T(W).$$

De 2.:

Seja Y um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$.
Como $T(O) = O$ e $O \in Y$ (pois Y é subespaço vetorial) segue-se que $O \in T^{-1}(Y)$.
Sejam $x, y \in T^{-1}(Y)$ e $\lambda \in \mathbb{R}$.
Como $x, y \in T^{-1}(Y)$ segue que $T(x), T(y) \in Y$.
Como Y é um subespaço vetorial de $(V, +, \cdot)$ temos que

$$T(x) + \lambda \cdot T(y) \in Y. \quad (*)$$

Mas

$$T(x + \lambda \cdot y) \overset{[\text{T é linear}]}{=} T(x) + \lambda \cdot T(y) \overset{(*)}{\in} Y,$$

portanto, $x + \lambda \cdot y \in T^{-1}(Y)$, completando a demonstração.

∎

Podemos agora introduzir a:

Definição 9.51 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

Definimos o núcleo da transformação linear T, *indicado por* $\mathcal{N}(T)$, *como sendo o subespaço vetorial de* U *dado por* $T^{-1}(\{O\})$, *ou seja, é o conjunto*

$$\{u \in U : T(u) = O\}.$$

Com isto temos a:

Proposição 9.52 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

A transformação linear T *é injetora se, e somente se,* $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

Prova:

Pela proposição (9.44) T é injetora se, e somente se, a equação

$$T(u) = O, \quad u \in U$$

possui uma única solução, a saber, $u = O$.

Isto é o mesmo que dizer que o conjunto $\mathcal{N}(T)$ é formado somente pelo vetor O, como queríamos demonstrar.

∎

Temos também o

Proposição 9.53 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real e* $T \in \mathcal{L}(U)$.

Mostre que $T^2 = O$ *se, e somente se,* $T(U) \subseteq \mathcal{N}(T)$.

Prova:

Suponha que $T^2 = O$.

Logo se $v \in T(U)$ então existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$.

Portanto,

$$T(v) = T[T(u)] = T^2(u) = O,$$

isto é, $v \in \mathcal{N}(T)$, isto é, $T(U) \subseteq \mathcal{N}(T)$.

Reciprocamente, suponhamos que $T(U) \subseteq \mathcal{N}(T)$.

Dado $u \in U$, como $T(u) \in T(U) \subseteq \mathcal{N}(T)$, temos

$$T^2(u) = T[\underbrace{T(u)}_{\in \mathcal{N}(T)}] = O,$$

ou seja, $T^2 = O$, como queríamos mostrar.

∎

Exemplo 9.54 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*) e* $\theta \in \mathbb{R}$.

Encontre o núcleo do operador linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) \doteq (x\cos(\theta) - y\,\text{sen}(\theta), x\,\text{sen}(\theta) + y\cos(\theta)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Resolução:

Vimos anteriormente que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

Por definição, $(x, y) \in \mathscr{N}(T)$ se, e somente se, $T(x, y) = (0, 0)$ ou, equivalentemente:

$$
\begin{aligned}
&(x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta), x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta)) = (0, 0) \\
&\iff \begin{cases} x\cos(\theta) - y\,\mathrm{sen}(\theta) = 0 \\ x\,\mathrm{sen}(\theta) + y\cos(\theta) = 0 \end{cases} \\
&\iff \underbrace{\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}}_{\det=1\neq 0 \text{ portanto admite matriz inversa}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x, y) = (0, 0).
\end{aligned}
$$

Portanto, $\mathscr{N}(T) = \{(0, 0)\}$.

Em particular, da proposição (9.52), segue que o operador linear T é injetor.

Observação 9.55 *Geometricamente, o operador linear* T *dado pelo exemplo acima leva um vetor numa rotação do mesmo de ângulo* θ *no sentido anti-horário (verifique!).*

Podemos agora enunciar e provar o:

Teorema 9.56 (Teorema do Núcleo e da Imagem) *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

Se $\dim(U) = n < \infty$ *então*

$$\dim(U) = \dim[\mathscr{N}(T)] + \dim[T(U)].$$

Prova:

Como $\mathscr{N}(T)$ é subespaço do espaço vetorial real $(U, +, \cdot)$ e $\dim(U) = n < \infty$ segue que $p \doteq \dim[\mathscr{N}(T)] \leq n < \infty$.

Se $p = 0$ (isto é, $\mathcal{N}(T) = \{O\}$) consideramos os vetores $v_1, \ldots, v_n$ de modo a formarem uma base de U.

Afirmamos que os vetores $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ formam uma base de $T(U)$.

De fato, se $w \in T(U)$ segue que existe $u \in U$ tal que $T(u) = w$.

Como $v_1, \ldots, v_n$ é base de U, existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n.$$

Logo

$$T(u) = T(\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n) \overset{[T \text{ é linear}]}{=} \alpha_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(v_n),$$

ou seja, $w \in [T(v_1), \ldots, T(v_q)]$, logo podemos concluir que

$$T(U) = [T(v_1), \ldots, T(v_q)].$$

Por outro lado, se $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ são tais que

$$O = \alpha_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(v_n) \overset{[\text{T é linear}]}{=} T(\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n),$$

ou seja,

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n \in \mathscr{N}(T) = \{O\},$$

assim

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n = O,$$

mas $v_1, \ldots, v_q$ são l.i. em U (pois formam uma base de U),logo

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

mostrando que os vetores $T(v_1), \ldots, T(v_n)$ são l.i. em V, e portanto formam uma base de $T(U)$.

Logo podemos concluir que

$$\dim(U) = \underbrace{0}_{=\dim[\mathscr{N}(T)]} + \underbrace{n}_{=\dim[T(U)]} = \dim[\mathscr{N}(T)] + \dim[T(U)].$$

Tratemos agora do caso $p \geq 1$.

Seja $\mathcal{B}_1$ uma base de $\mathscr{N}(T)$ formada pelos vetores $u_1, \ldots, u_p$.

Pelo teorema do completamento, existem vetores $v_1, \ldots, v_q \in U$ tais que $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ formam uma base de U.

Desta forma temos que

$$\dim(U) = p + q.$$

Como $\dim[\mathscr{N}(T)] = p$, resta mostrar que

$$\dim[T(U)] = q.$$

Para isto, mostraremos que $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ formam uma base de $T(U)$.

Afirmamos que $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ são l.i. em V.

De fato, se

$$\alpha_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \alpha_q \cdot T(v_q) = O$$

então, como T é uma transformação linear, segue que a identidade acima é equivalente a

$$T(\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_q \cdot v_q) = O,$$

isto é, teremos

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_q \cdot v_q \in \mathscr{N}(T).$$

Como os vetores $u_1, \cdots, u_p$ formam uma base de $\mathscr{N}(T)$ segue que existem escalares $\beta_1, \cdots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \cdots + \alpha_q \cdot v_q = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_p \cdot u_p,$$

isto é,

$$\beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_p \cdot u_p - \alpha_1 \cdot v_1 - \cdots - \alpha_q \cdot v_q = O.$$

Como $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ formam uma base de U, eles são l.i. em U assim deveremos ter

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_q = \beta_1 = \cdots = \beta_p = 0,$$

o que mostra que os vetores $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ são linearmente independentes em V.

Mostremos que os vetores $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ geram $T(U)$.

Seja $v \in T(U)$.

Logo, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$.

Como os vetores $u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_q$ formam uma base de U, existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_q, \beta_1, \ldots, \beta_p \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_q \cdot v_q,$$

com isto teremos:

$$\begin{aligned} v = T(u) &= T(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p + \beta_1 \cdot v_1 + \cdots + \beta_q \cdot v_q) \\ &= \alpha_1 \cdot \underbrace{T(u_1)}_{=0} + \cdots + \alpha_p \cdot \underbrace{T(u_p)}_{=O} + \beta_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \beta_q \cdot T(v_q) \\ &= \beta_1 \cdot T(v_1) + \cdots + \beta_q \cdot T(v_q), \end{aligned}$$

pois $u_1, \ldots, u_p \in \mathscr{N}(T)$.

Logo $v \in [T(v_1), \ldots, T(v_q)]$, ou seja, $T(U) = [T(v_1), \ldots, T(v_q)]$.

Portanto os vetores $T(v_1), \ldots, T(v_q)$ formam uma base de $T(U)$, logo teremos

$$\dim(U) = n = \underbrace{p}_{=\dim[\mathscr{N}(T)]} + \underbrace{q}_{=\dim[T(U)]} = \dim[\mathscr{N}(T)] + \dim[T(U)],$$

como queríamos demonstrar.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 9.57 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais de dimensões finita tais que* $\dim(U) = \dim(V)$ *e* $T : U \to V$ *uma transformação linear.*

As seguintes condições são equivalentes:

1. *A transformação linear* T *é sobrejetora;*

2. *A transformação linear* T *é injetora;*

3. *A transformação linear* T *é bijetora;*

4. *A transformação linear* T *leva uma base de* U *em uma base de* V *(isto é, se* $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ *é uma base de* U *então* $\mathcal{C} \doteq \{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ *será uma base de* V*).*

Prova:

1. $\Longrightarrow$ 2.:

Se a transformação linear T é sobrejetora então $T(U) = V$.

Logo, pelo teorema anterior,

$$\dim(U) = \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim[\underbrace{T(U)}_{=V}] = \dim[\mathcal{N}(T)] + \dim(V).$$

Como $\dim(U) = \dim(V)$ segue que, da identidade acima, que $\dim[\mathcal{N}(T)] = 0$, isto é, $\mathcal{N}(T) = \{O\}$.

Logo, da proposição (9.52), segue que a transformação linear T será injetora, mostrando que 2. ocorre.

2. $\Longrightarrow$ 3.:

Se transformação linear T é injetora então, da proposição (9.52) , segue que $\mathcal{N}(T) = \{O\}$, assim $\dim[\mathcal{N}(T)] = 0$.

Pelo teorema anterior segue-se que

$$\dim(U) = \underbrace{\dim[\mathcal{N}(T)]}_{=0} + \dim[T(U)] = \dim[T(U)],$$

ou seja, $\dim(U) = \dim[T(U)]$.

Como $\dim(U) = \dim(V)$ segue, da identidade acima, que $\dim[T(U)] = \dim(V)$.

Logo $T(U)$ é um subespaço do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ que tem a mesma dimensão de V, logo, do corolário (6.30), segue que $T(U) = V$, isto é, a transformação linear T é sobrejetora.

Dessa forma, T é bijetora, mostrando que 3. ocorre.

3. $\Longrightarrow$ 4.:

Suponhamos que a transformação linear T seja bijetora.

Consideremos uma base de U formada pelos vetores $u_1, \ldots, u_n$.

Precisamos mostrar que os vetores $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ formam uma base de V.

Afirmamos que os vetores $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ são l.i. em V.

De fato, se

$$\alpha_1 \cdot T(u_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n) = O$$

então, do fato que T é uma transformação linear, a identidade acima será equivalente a

$$T(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) = O,$$

isto é, o vetor

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \in \mathcal{N}(T).$$

Como a transformação linear T é injetora, da proposição (9.52), segue que $\mathcal{N}(T) = \{O\}$ e, consequentemente,

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O.$$

Como $u_1, \ldots, u_n$ formam uma base de U eles deverão ser l.i., assim

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0,$$

portanto os vetores $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ são linearmente independentes em V.

Afirmamos que os vetores $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ geram em V.

Seja $v \in V$.

Como a transformação linear T é sobrejetora, existe $u \in U$ tal que $v = T(u)$.

Como os vetores $u_1, \cdots, u_n$ formam uma base de U segue que existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n.$$

Com isto temos

$$v = T(u) = T(\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) \overset{[T \text{ é linear }]}{=} \alpha_1 \cdot T(u_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n),$$

isto é, os vetores $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ geram V, mostrando que esses vetores formam uma base de V, mostrando qeu 4. ocorre.

Observe que já havíamos provado isto na proposição (9.13) (verifique!).

<u>4. $\Longrightarrow$ 1.:</u>

Seja $u_1, \ldots, u_n$ uma base de U.

Por hipótese, $T(u_1), \ldots, T(u_n)$ formam uma base de V.

Assim, dado $v \in V$ existem escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$v = \alpha_1 \cdot T(u_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n).$$

Deste modo,

$$v = \alpha_1 \cdot T(u_1) + \cdots + \alpha_n \cdot T(u_n) \overset{[T \text{ é linear}]}{=} T(\underbrace{\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n}_{\doteq u}),$$

ou seja, existe $u \in U$ tal que $T(u) = v$, isto é, a transformação linear T é sobrejetora, completando a demonstração.

∎

Exemplo 9.58 *Seja $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^2$).*

Mostre que toda transformação linear bijetora $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ leva retas de $\mathbb{R}^2$ em retas de $\mathbb{R}^2$ (isto é, a imagem de uma reta de $\mathbb{R}^2$ pela transformação linear bijetora T é uma reta de $\mathbb{R}^2$).

Resolução:

Dada uma reta r no plano $\mathbb{R}^2$, usaremos a equação vetorial para representar seus pontos, isto é, um ponto $P \in r$ se, e somente se,

$$P = P_o + \lambda \cdot \vec{v},$$

onde P_o é um ponto sobre a reta, $\vec{v} \neq O$ é um vetor direção da reta e $\lambda \in \mathbb{R}$.

A imagem da reta r pela transformação linear bijetora T será dada por

$$T(r) = \{T(P); P \in r\}.$$

Assim, um ponto $S \in T(r)$ se, e somente se, $S = T(P)$ para algum $P \in r$, ou seja,

$$S = T(P) = T(P_o + \lambda \cdot \vec{v}) \overset{[T \text{ é linear }]}{=} T(P_o) + \lambda \cdot T(\vec{v}), \qquad (*)$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R}$.

Como transformação linear T é injetora e $\vec{v} \neq \vec{0}$ temos que $T(\vec{v}) \neq \vec{0}$, ou seja, (*) nos fornece a equação vetorial de uma reta no plano $\mathbb{R}^2$ que passa pelo ponto $T(P_o)$ e tem a direção do vetor (não nulo) $T(\vec{v})$.

Assim $T(r)$ é uma reta em $\mathbb{R}^2$, como afirmamos.

Exemplo 9.59 *Sejam* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^n$*) e* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *não todos nulos.*

Mostre que o subespaço

$$H \doteq \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$$

tem dimensão $n-1$.

Resolução:

Observemos que H pode ser obtido como o núcleo do funcional linear (verifique!) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por

$$T(x_1, \ldots, x_n) \doteq a_1x_1 + \cdots + a_nx_n, \quad (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Em particular H é um subespaço vetorial do espaço vetorial $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Como nem todos os a_j são nulos, segue-se que o funcional linear T não é identicamente nulo.

Logo, do corolário(9.49), segue que o funcional linear T será sobrejetor, em particular, $\dim[T(\mathbb{R}^n)] = \dim(\mathbb{R}) = 1$.

Deste modo, pelo teorema (9.56), teremos

$$n = \dim(\mathbb{R}^n) = \dim[\underbrace{\mathcal{N}(T)}_{=H}] + \underbrace{\dim(T(\mathbb{R}^n))}_{=1}] = \dim(H) + 1,$$

ou seja, $\dim(H) = n - 1$, como afirmamos.

Exemplo 9.60 *Sejam* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_2(\mathbb{R})$*),*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *dada por*

$$T(X) \doteq AX - XA, \quad X \in M_2(\mathbb{R}).$$

Mostre que T *é um operador linear em* $M_2(\mathbb{R})$ *e encontre o núcleo e a imagem do operador linear* T *e suas respectivas dimensões.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que T é um operador linear em $M_2(\mathbb{R})$.

<u>Núcleo de T:</u>

Observemos que $X \in \mathcal{N}(T)$ se, e somente se, $T(X) = O$ ou, equivalentemente,

$$AX - XA = O \quad \iff \quad AX = XA.$$

Se

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

vemos que $X \in \mathcal{N}(T)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} a + 2c & b + 2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a + b \\ c & 2c + d \end{pmatrix}$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} a + 2c = a \\ b + 2d = 2a + b \\ c = c \\ d = 2c + d \end{cases} \quad \overset{\text{[exercício]}}{\iff} c = 0 \text{ e } a = d.$$

Portanto, $X \in \mathcal{N}(T)$ se, e somente se,

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = a \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\doteq A_1} + b \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\doteq A_2}.$$

Dessa forma, o núcleo do operador linear T é o subespaço vetorial gerado pelos vetores A_1 e A_2.

Notemos que os vetores A_1, A_2 são l.i. (verifique!), logo $\mathcal{B} \doteq \{A_1, A_2\}$ é uma base para o subespaço $\mathcal{N}(T)$, em particular, $\dim[\mathcal{N}(T)] = 2$.

<u>Imagem de T:</u>

Observemos que

$$Y = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \in T(M_2)$$

se, e somente, se existir uma matriz em $M_2(\mathbb{R})$, que denotaremos por

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tal que

$$Y = T(X) = AX - XA,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c & 2d-2a \\ 0 & -2c \end{pmatrix} \\
&= 2c \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\doteq B_1} + 2(d-a) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\doteq B_2},
\end{aligned}$$

ou seja, a imagem de T é gerada pelos vetores B_1, B_2.

Notemos que os vetores B_1, B_2 são l.i. (verifique!), assim logo $\mathcal{C} \doteq \{B_1, B_2\}$ é uma base para o subespaço $T(M_2(\mathbb{R}))$, em particular, $\dim[T(M_2(\mathbb{R}))] = 2$.

Observação 9.61 *Uma outra maneira para encontrar uma base da imagem do operador linear T do exemplo acima seria fazer uso da* **prova** *do teorema (9.56).*

Mais precisamente, sabemos que

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

formam uma base do núcleo do operador linear T.

Do teorema (9.56), podemos completá-la a uma base de $M_2(\mathbb{R})$ introduzindo, por exemplo, os vetores:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

isto é,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é uma base de $M_2(\mathbb{R})$ (verifique!).

Mas

$$T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}}_{\doteq C_1} \quad e \quad T\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\doteq C_2}.$$

Logo, pelo mesmo teorema, segue que $\mathcal{C} \doteq \{C_1, C_2\}$ é uma base da imagem do operador linear T.

Definição 9.62 *Seja $(U, +, \cdot)$ espaço vetorial real.*

Diremos que $T \in \mathscr{L}(U)$ é um idempotente em U *se $T^2 = T$.*

Exemplo 9.63 *Seja $(U, +, \cdot)$ espaço vetorial real.*

Então o operador identidade em U, $I_U : U \to U$ dado por

$$I_U(u) \doteq u, \quad u \in U,$$

é um operador linear idempotente em U.

Resolução:

Sabemos que o I_U é um operador linear em U.

Além disso, temos

$$I_U^2(u) = I_U[\underbrace{I_U(u)}_{=u}] = I_U(u), \quad u \in U,$$

mostrando que o operador linear T é idempotente em U.

Exemplo 9.64 *Sejam $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^2$) e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$T(x, y) = (x, 0), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Então o operador linear T é idempotente.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que T é um operador linear em $\mathbb{R}^2$.

Notemos que

$$T^2(x, y) = T[\underbrace{T(x, y)}_{=(x,0)}] = T(x, 0) = (x, 0) = T(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

mostrando que o operador linear T é idempotente em $\mathbb{R}^2$.

Observação 9.65 *O operador do exemplo acima é a projeção no eixo Ox.*

Proposição 9.66 *Seja $(U, +, \cdot)$ espaço vetorial real.*

Mostre que se $T \in \mathscr{L}(U)$ é idempotente então

$$U = T(U) \oplus \mathscr{N}(T).$$

Prova:

Como $T \in \mathscr{L}(U)$ é idempotente segue que $T^2 = T$.

Observemos que, dado $u \in U$ podemos escrever

$$u = T(u) + [u - T(u)].$$

Temos que $T(u) \in T(U)$ e

$$T[u - T(u)] = T(u) - \underbrace{T^2(u)}_{=T(u)} = T(u) - T(u) = O,$$

assim $u - T(u) \in \mathcal{N}(T)$, ou seja,

$$u = \underbrace{T(u)}_{\in T(U)} + \underbrace{[u - T(u)]}_{\in \mathcal{N}(T)} \in T(U) + \mathcal{N}(T),$$

mostrando que $U = T(U) + \mathcal{N}(T)$.

Resta mostrarmos que a soma é uma soma direta.

Para isto consideremos $u \in T(U) \cap \mathcal{N}(T)$.

Como $u \in T(U)$, existirá $v \in U$ tal que $u = T(v)$ e teremos também que $T(u) = O$.

Logo

$$u = T(v) \overset{[T^2=T]}{=} T^2(v) = T[\underbrace{T(v)}_{=u}] = T(u) = O,$$

ou seja, $T(U) \cap \mathcal{N}(T) = \{O\}$, completando a demonstração.

∎

9.4 Isomorfismo e Automorfismo

Começaremos introduzindo a

Definição 9.67 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais.*

Diremos que uma transformação linear $T : U \to V$ *é* <u>isomorfismo de U em V</u> *se ela for bijetora.*

Quando $U = V$ *diremos, no caso acima, que* T *é um* <u>automorfismo em U</u>.

Com isto temos a

Definição 9.68 *Dizemos que os espaços vetoriais* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *são* <u>isomorfos</u> *se existir um isomorfismo de* U *em* V.

As seguintes transformações são exemplos de isomorfismos e, portanto, os respectivos espaços vetoriais são isomorfos.

Exemplo 9.69 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real e* $I_U : U \to U$ *o operador identidade em* U.

Então I_U *é um automorfismo em* U.

Resolução:

Sabemos que I_U é um operador linear, injetor e sobrejetor, logo um automorfismo em U.

Exemplo 9.70 *Sejam* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *e* $(\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaços vetoriais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^n$ *e de* $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$*, respectivamente) e* $T : \mathbb{R}^n \to \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ *dada por*

$$T((x_1, \ldots, x_n)) \doteq p, \quad (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

onde

$$p(t) \doteq x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então T *é um isomorfismo de* $\mathbb{R}^n$ *em* $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que T é uma transformação linear de $\mathbb{R}^n$ em $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$.

Observemos que T é injetor, pois se $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathscr{N}(T)$ segue que

$$\underbrace{O}_{\text{polinômio nulo}} = T(x) \iff x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} = 0, \text{ para todo } t \in \mathbb{R},$$

o que implicará, necessariamente, que $x_1 = \cdots = x_n = 0$, ou seja, $x = (0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Portanto $\mathscr{N}(T) = \{O\}$, isto é, a transformação linear T é injetora.

Observemos também que T é sobrejetor, pois se $p \in \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$ segue que

$$p(t) = a_o + a_1 t + \cdots + a_{n-1} t^{n-1}, \quad t \in \mathbb{R},$$

para $a_o, \cdots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Logo se considerarmos

$$x \doteq (a_o, \cdots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n,$$

teremos

$$T(x) = p,$$

ou seja T é sobrejetora, isto é, a transformação linear T é bijetora, logo um isomorfismo de $\mathbb{R}^n$ em $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R})$, como afirmamos.

Exemplo 9.71 *Sejam* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *e* $(\mathbb{R}^{m.n}, +, \cdot)$ *espaços vetoriais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *e de* $\mathbb{R}^{m.n}$*, respectivamente) e* $T : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{mn}$ *dada por*

$$T[(a_{ij})] \doteq (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}), \quad A = (a_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R}).$$

Então T *é um isomorfismo de* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ *em* $\mathbb{R}^{m.n}$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que T é uma transformação linear de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^{m.n}$.

Observemos que T é injetor, pois se $(a_{ij}) \in \mathscr{N}(T)$ segue que

$$\underbrace{O}_{m.n\text{-upla}} = T[(a_{ij})] \iff (a_{11}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{m1}, \ldots, a_{mn}) = \underbrace{(0, \cdots, 0)}_{\in \mathbb{R}^{m.n}}.$$

o que implicará, necessariamente, que $a_{ij} = 0$ para $1 \le i \le m$ e $1 \le j \le n$, ou seja, $\mathscr{N}(T) = \{O\}$, , isto é, a transformação linear T é injetora.

Observemos também que T é sobrejetor, pois se $x \doteq (x_1, \cdots, x_{m.n}) \in \mathbb{R}^{m.n}$, considerando-se

$$\begin{aligned} a_{1j} &\doteq x_j, \quad 1 \le j \le n, \\ a_{2j} &\doteq x_j, \quad n+1 \le j \le 2n, \\ &\cdots \\ a_{mj} &\doteq x_j, \quad mn - n + 1 \le j \le m.n, \end{aligned}$$

teremos

$$T[(a_{ij})] = (x_1, \cdots, x_{mn}) = x,$$

ou seja, a transformação linear T é sobrejetora, isto é, a transformação linear T é bijetora, logo um isomorfismo de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^{m.n}$, como afirmamos.

Exemplo 9.72 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*) e* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dada por*

$$T(x, y, z) \doteq (x - y, x - z, z - y), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Verifique se T *é um automorfismo de* $\mathbb{R}^3$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que T é um operador linear em $\mathbb{R}^3$.

Verifiquemos se o operador linear T é injetor, isto é, se $\mathcal{N}(T) = \{O\}$.

Para isto seja $(x, y, z) \in \mathcal{N}(T)$, isto é,

$$T(x, y, z) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} x - y = 0 \\ x - z = 0 \\ z - y = 0 \end{cases} \overset{[\text{exercício}]}{\iff} x = y = z.$$

Logo, o operador linear T <u>**não**</u> é injetor, pois $T(1, 1, 1) = (0, 0, 0)$, assim, o operador linear T <u>**não**</u> será um automorfismo em $\mathbb{R}^3$.

Proposição 9.73 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais, tal que* $\dim(U) < \infty$*, e* $T : U \to V$ *é um isomorfismo de* U *em* V*.*

Então o espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ *tem dimensão finita e além disso*

$$\dim(V) = \dim(U).$$

Prova:

Como a transformação linear T é injetora segue $\mathcal{N}(T) = \{0\}$.

Portanto, $\dim[\mathcal{N}(T)] = 0$.

Como a transformação linear T é sobrejetora segue que $T(U) = V$.

Segue, do teorema do núcleo e da imagem (isto é, teorema (9.56)), que

$$\dim(U) = \underbrace{\dim[\mathcal{N}(T)]}_{=0} + \dim[\underbrace{T(U)}_{=V}] = \dim(V),$$

como queríamos demonstrar.

∎

Temos um resultado semelhante quando a dimensão do contra-domínio é finita, a saber:

Corolário 9.74 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais, tal que* $\dim(V) < \infty$*, e* $T : U \to V$ *é um isomorfismo de* U *em* V*.*

Então $\dim(U) = \dim(V)$.

Prova:

Como a transformação linear T é bijetora segue que existe a transformação linear inversa $T^{-1} : V \to U$ e esta também será um isomorfismo de V em U (pois é bijetora).

Como $\dim(V) < \infty$, pela proposição (9.73), segue que

$$\dim(U) = \dim(V),$$

completando a demonstração.

∎

Temos também a

Proposição 9.75 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais de dimensão* n.

Se $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\}$ *e* $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_n\}$ *são bases de* $(U, +, \cdot)$ *e de* $(V, +, \cdot)$*, respectivamente, então* $T : U \to V$ *dada por*

$$T(u) \doteq x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_n \cdot v_n, \quad u \in U, \qquad (*)$$

onde

$$u = x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n, \quad \textit{para} \quad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},$$

é um isomorfismo de U *em* V.

Além disso, temos que

$$T(u_j) = v_j, \quad j = 1, \cdots, n,$$

isto é, o isomorfismo T *leva a base* $\mathcal{B}$ *do espaço vetorial* $(U, +, \cdot)$ *na base* $\mathcal{C}$ *do espaço vetorial* $(V, +, \cdot)$.

Prova:

Primeiramente, notemos que a função T está bem definida, pois as coordenadas de um vetor com relação a uma base são unicamente determinadas por ele e pela respectiva base fixada.

Verifiquemos que T é uma transformação linear de U em V.

Dados $w_1, w_2 \in U$, como $\mathcal{B}$ é base de U, podemos escrever

$$w_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i \quad \text{e} \quad w_2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i,$$

com $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, teremos

$$w_1 + \lambda \cdot w_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot u_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) \cdot u_i.$$

Logo

$$\begin{aligned} T(w_1 + \lambda \cdot w_2) &= T\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) \cdot u_i\right) \overset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{n} (x_i + \lambda y_i) \cdot v_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot v_i + \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot v_i \overset{(*)}{=} T(w_1) + \lambda \cdot T(w_2), \end{aligned}$$

mostrando que T é uma transformação linear de U em V.

Afirmamos que T é injetora, isto é, $\mathcal{N}(T) = \{O\}$.

De fato, seja $w \doteq \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot u_i$ tal que $T(w) = O$.

Logo

$$O = T(w) = x_1 \cdot v_1 + \cdots + x_n \cdot v_n.$$

Como $v_1, \cdots, v_n$ são l.i. em V segue que $x_1 = \cdots = x_n = 0$, ou seja, $w = O$, portanto, T é injetora.

Como $\dim(U) = \dim(V) < \infty$, pelo corolário (9.57) segue-se que T será bijetora, logo um isomorfismo de U em V, completando a demonstração.

∎

As últimas proposições resultam no

Corolário 9.76 *Dois espaços vetoriais reais de dimensão finita são isomorfos se, e somente se, têm a mesma dimensão.*

Prova:

$(\Longrightarrow)$:

Segue do corolário (9.74).

$(\Longleftarrow)$:

Segue da proposição (9.75).

∎

Terminaremos a seção com o:

Corolário 9.77 *Sejam $(U, +, \cdot)$ um espaço vetorial de dimensão n e $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial de dimensão m.*

Então $\mathscr{L}(U, V)$ é isomorfo ao espaço vetorial real $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Prova:

Do teorema (9.22) temos que $\dim[\mathscr{L}(U, V)] = m \cdot n$ e do exemplo (6.22) temos que $\dim[M_{m\times n}(\mathbb{R})] = m \cdot n$.

Logo do corolário acima segue que eles serão isomorfos, completando a demonstração.

∎

9.5 Matriz de uma Transformação Linear

Nesta seção veremos que a toda transformação linear entre dois espaços vetoriais de dimensões finitas poderemos associar uma matriz e reciprocamente.

9.5.1 Definição e Exemplos

Definição 9.78 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais de dimensões finitas,* m *e* n*, respectivamente, e* $T \in \mathscr{L}(U, V)$.

Fixemos uma base $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \dots, u_n\}$ *de* $(U, +, \cdot)$ *e uma base* $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \dots, v_m\}$ *de* $(V, +, \cdot)$.

Como $\mathcal{C}$ *é base de* $(V, +, \cdot)$*, podemos escrever*

$$T(u_j) = a_{1j} \cdot v_1 + \dots + a_{mj} \cdot v_m, \quad \textit{para cada} \quad j = 1, \dots, n.$$

Deste modo podemos construir a seguinte matriz

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$$

que será chamada de matriz da transformação T com relação às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ *e será denotada por* $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$.

Quando $U = V$ *e* $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ *usaremos a notação* $[T]_{\mathcal{B}}$ *para denotar a matriz da transformação* T *com relação às bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{B}$ *do espaço vetorial* $(U, +, \cdot)$.

Consideremos os exemplos:

Exemplo 9.79 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$*, respectivamente) e a transformação linear (verifique!)* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y, z) \doteq (x + y, x - z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \qquad (*)$$

Encontre a matriz de T *com relação às bases canônicas de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$*, respectivamente.*

Resolução:

As bases canônicas de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$ são

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1,0,0)}_{\doteq u_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{\doteq u_2}, \underbrace{(0,0,1)}_{\doteq u_3}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{\underbrace{(1,0)}_{\doteq v_1}, \underbrace{(0,1)}_{\doteq v_2}\},$$

respectivamente.

Como

$$T(u_1) = T((1,0,0)) \overset{(*)}{=} (1,1) = 1 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1) = \underbrace{1}_{=a_{11}} \cdot v_1 + \underbrace{1}_{=a_{21}} \cdot v_2,$$

$$T(u_2) = T((0,1,0)) \overset{(*)}{=} (1,0) = 1 \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1) = \underbrace{1}_{=a_{12}} \cdot v_1 + \underbrace{0}_{=a_{22}} \cdot v_2,$$

$$T(u_3) = T((0,0,1)) \overset{(*)}{=} (0,-1) = 0 \cdot (1,0) + (-1) \cdot (0,1) = \underbrace{0}_{=a_{13}} \cdot v_1 + \underbrace{(-1)}_{=a_{23}} \cdot v_2,$$

teremos

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbb{R}).$$

Exemplo 9.80 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathbb{R}^2$*, respectivamente) e a transformação linear (verifique!)* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y, z) \doteq (x + y, x - z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \qquad (*)$$

Encontre a matriz de T *com relação às bases* $\mathcal{B} \doteq \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ *de* $\mathbb{R}^3$ *e* $\mathcal{D} \doteq \{(1, 1), (0, 1)\}$ *de* $\mathbb{R}^2$.

Resolução:

As bases de $\mathbb{R}^3$ e de $\mathbb{R}^2$ são

$$\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1, 0, 0)}_{\doteq u_1}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{\doteq u_2}, \underbrace{(0, 0, 1)}_{\doteq u_3}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{C} \doteq \{\underbrace{(1, 1)}_{\doteq v_1}, \underbrace{(0, 1)}_{\doteq v_2}\},$$

respectivamente.

Como

$$T(u_1) = T((1, 0, 0)) \overset{(*)}{=} (1, 1) = 1 \cdot (1, 1) + 0 \cdot (0, 1) = \underbrace{1}_{=a_{11}} \cdot v_1 + \underbrace{0}_{=a_{21}} \cdot v_2,$$

$$T(u_2) = T((0, 1, 0)) \overset{(*)}{=} (1, 0) = 1 \cdot (1, 1) + (-1) \cdot (0, 1) = \underbrace{1}_{=a_{11}} \cdot v_1 + \underbrace{(-1)}_{=a_{21}} \cdot v_2,$$

$$T(u_1) = T((0, 0, 1)) \overset{(*)}{=} (0, -1) = 0 \cdot (1, 1) + (-1) \cdot (0, 1) = \underbrace{0}_{=a_{11}} \cdot v_1 + \underbrace{(-1)}_{=a_{21}} \cdot v_2$$

teremos

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{2\times 3}(\mathbb{R}).$$

□

Observação 9.81 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais de dimensões finitas com bases* $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ *e* $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \ldots, v_m\}$*, respectivamente.*

Fixemos $i \in \{1, \ldots, n\}$ *e* $j \in \{1, \ldots, m\}$ *e definamos* $T_{ij} \in \mathscr{L}(U, V)$ *como na prova do teorema (9.22), isto é,* $T_{ij} : U \to V$ *dada por*

$$T_{ij}(x_1 \cdot u_1 + \cdots + x_n \cdot u_n) \doteq x_i \cdot v_j, \qquad x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}.$$

Notemos que

$$T_{ij}(u_k) = \begin{cases} v_j \ \textit{se} \ i = k \\ 0 \ \textit{se} \ i \neq k \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{j-1} + 1 \cdot v_j + 0 \cdot v_{j+1} + \cdots + 0 \cdot v_n \ \textit{se} \ i = k \\ 0 \ \textit{se} \ i \neq k \end{cases}.$$

Assim

$$[T_{ij}]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = E_{ji} = (\delta_{k,l}^{(j,i)}),$$

onde

$$\delta_{k,l}^{(j,i)} = \begin{cases} 1 & \textit{se } (j,i) = (k,l) \\ 0 & \textit{caso contrário} \end{cases},$$

ou seja, para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ *e cada* $j \in \{1, \ldots, m\}$, *a matriz* E_{ji} *possui todos as entradas nulas, com exceção daquela que ocupa a* j*-ésima linha, da* i*-ésima coluna, cujo valor é* 1.

9.5.2 Propriedades da Matriz de uma Transformação Linear

Proposição 9.82 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais de dimensão finita com bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$, *respectivamente.*

Se $T, S \in \mathscr{L}(U, V)$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *então*

$$[T + \lambda \cdot S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} + \lambda\, [S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

Prova:

Consideremos $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$, respectivamente, $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (a_{ij})$ e $[S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (b_{ij})$.

Com isto teremos

$$\begin{aligned}(T + \lambda \cdot S)(u_j) &= T(u_j) + \lambda \cdot S(u_j) \\ &= (a_{1j} \cdot v_1 + \cdots + a_{mj} \cdot v_m) + \lambda \cdot (b_{1j} \cdot v_1 + \cdots + b_{mj} \cdot v_m) \\ &= (a_{1j} + \lambda b_{1j}) \cdot v_1 + \cdots + (a_{mj} + \lambda b_{mj}) \cdot v_m\end{aligned}$$

e, desse modo,

$$\begin{aligned}[T + \lambda \cdot S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} &= \begin{pmatrix} a_{11} + \lambda b_{11} & \cdots & a_{1n} + \lambda b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + \lambda b_{m1} & \cdots & a_{mn} + \lambda b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+ & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} \\ &= [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} + \lambda\, [S]_{\mathcal{B},\mathcal{C}},\end{aligned}$$

completando a demonstração.

∎

A seguir temos dois resultados que nos fornecem exemplos básicos associados a matrizes de uma transformção linear:

Proposição 9.83 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *e* $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais de dimensão finita com bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$, *respectivamente.*

Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *é a transformação linear nula então*

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = 0.$$

Prova:

Sejam $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$, respectivamente.

Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ então $T(u) = O$ para todo $u \in U$, logo

$$T(u_j) = O = \underbrace{0}_{=a_{1j}} \cdot v_1 + \cdots + \underbrace{0}_{=a_{mj}} \cdot v_m, \quad \text{para cada} \quad j = 1, \ldots, n,$$

ou seja, $a_{ij} = 0$ para todo $1 \leq i \leq m$ e todo $1 \leq j \leq n$, isto é, $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = O$, completando a demonstração.

∎

Proposição 9.84 *Sejam $(U, +, \cdot)$ espaço vetorial de dimensão finita e $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ duas bases de U.*

Se $I_U \in \mathscr{L}(U)$ é o operador identidade em U então

$$[I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}.$$

Prova:

Consideremos $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \ldots, v_n\}$ bases de $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$, respectivamente.

Para cada $1 \leq j \leq n$, como $u_j \in U$ e $\mathcal{B}$ é base de $(U, +, \cdot)$ segue que existem escalares $\alpha_{1j}, \cdots, \alpha_{nj} \in \mathbb{R}$ tais que

$$u_j = \alpha_{1j} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{nj} \cdot v_n. \quad (*)$$

Logo

$$M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = (\alpha_{ij}). \quad (**)$$

Mas

$$I_U(u_j) = u_j \overset{(*)}{=} \alpha_{1j} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{nj} \cdot v_n.$$

Logo

$$[I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (\alpha_{ij}),$$

ou seja, de (**) e da igualdade acima, teremos $[I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$, como queríamos demonstrar.

∎

Proposição 9.85 *Sejam $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ e $(W, +, \cdot)$ espaços vetoriais de dimensão finita com bases $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$, e $\mathcal{D}$, respectivamente.*

Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ e $S \in \mathscr{L}(V, W)$. então

$$[S \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = [S]_{\mathcal{C},\mathcal{D}} [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "T"] & V \arrow[r, "S"] & W \\
\mathcal{B} \arrow[rr, bend right, "S \circ T"'] & \mathcal{C} & \mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

Prova:

Consideremos $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \ldots, v_m\}$ e $\mathcal{D} \doteq \{w_1, \ldots, w_p\}$ bases de $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ e $(W, +, \cdot)$, respectivamente

Sejam $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = (\alpha_{ij})$ e $[S]_{\mathcal{C},\mathcal{D}} = (\beta_{kl})$.

Com isto temos que

$$T(u_j) = \alpha_{1j} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mj} \cdot v_m, \quad \text{para cada} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9.86}$$

$$S(v_k) = \beta_{1k} \cdot w_1 + \cdots + \beta_{pk} \cdot w_p, \quad \text{para cada} \quad k = 1, \ldots, m. \tag{9.87}$$

Logo, para cada $1 \leq j \leq n$ teremos

$$[S \circ T](u_j) = S[T(u_j)] \overset{(9.86)}{=} S\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot v_i\right) \overset{[S \text{ é linear}]}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot S(v_i)$$
$$\overset{(9.87)}{=} \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \cdot \left(\sum_{k=1}^{p} \beta_{ki} \cdot w_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) \cdot w_k.$$

Portanto,

$$[S \circ T]_{\mathcal{B},\mathcal{D}} = \left(\sum_{i=1}^{m} \beta_{ki}\alpha_{ij}\right) \overset{[\text{Apêndice I}]}{=} [S]_{\mathcal{C},\mathcal{D}}[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}},$$

como queríamos demonstrar.

∎

Como consequência temos a

Proposição 9.88 *Sejam $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ espaços vetoriais de dimensão finita com bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente.*

Se $T \in \mathscr{L}(U, V)$ possui transformação inversa $T^{-1} \in \mathscr{L}(V, U)$ (isto é, T é um isomorfismo de U e V) então

$$[T^{-1}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = [T]^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.$$

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "T"] & V \\ \mathcal{B} & \mathcal{C} \arrow[l, bend left, "T^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Prova:

Como T é uma transformação linear bijetora (isto é, é um isomorfismo de U em V) segue, do corolário(9.76), $\dim(U) = \dim(V) = n$.

Logo, da proposição acima temos

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[T^{-1}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \overset{[\text{prop. } (9.85)]}{=} [\underbrace{T \circ T^{-1}}_{=I_V}]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = [I_V]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \overset{[\text{prop. } (9.84)]}{=} M_{\mathcal{C}\mathcal{C}} = I_n$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Analogamente,

$$[T^{-1}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = [\underbrace{T^{-1} \circ T}_{=I_U}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [I_U]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n.$$

Portanto, $[T^{-1}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = [T]^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$, completando a demonstração.

∎

Proposição 9.89 *Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço de dimensão finita.*
Se $T \in \mathscr{L}(V)$ e $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são bases de $(V, +, \cdot)$ então

$$[T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}.$$

Prova:
Da proposição (9.84) temos que

$$[I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} \quad \text{e} \quad [I_V]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}. \quad (*)$$

Logo

$$\begin{aligned} M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} &\overset{(*)}{=} [I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}[I_V]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \overset{[\text{prop. } (9.85)]}{=} [I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[\underbrace{T \circ I_V}_{=T}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \\ &= [I_V]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C},\mathcal{B}} \overset{[\text{prop. } (9.85)]}{=} [\underbrace{I_V \circ T}_{=T}]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \\ &= [T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} \end{aligned}$$

completando a demonstração.

∎

Exemplo 9.90 *Sejam $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^2$) e $\mathcal{B} \doteq \{(1,1), (1,-1)\}$ uma base de $\mathbb{R}^2$ (verifique!).*
Consideremos $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ tal que

$$T_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Encontre $[T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}}$, onde $\mathcal{C}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^2$.

Resolução:
Da proposição acima, temos que

$$[T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$$

logo para completarmos o exemplo basta encontrarmos as matrizes de mudança de bases $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ e $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$.

Para isto, se $\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1,1)}_{\doteq u_1}, \underbrace{(1,-1)}_{\doteq u_2}\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{\underbrace{(1,0)}_{\doteq e_1}, \underbrace{(0,1)}_{\doteq e_2}\}$ teremos

$$\begin{aligned} e_1 = (1,0) &\overset{[\text{exercício}]}{=} \frac{1}{2}\cdot(1,1) + \frac{1}{2}\cdot(1,-1) = \frac{1}{2}\cdot u_1 + \frac{1}{2}\cdot u_2 \\ e_2 = (0,1) &\overset{[\text{exercício}]}{=} \frac{1}{2}\cdot(1,1) - \frac{1}{2}\cdot(1,-1) = \frac{1}{2}\cdot u_1 + \frac{-1}{2}\cdot u_2, \end{aligned}$$

além disso

$$\begin{aligned} u_1 &= (1,1) = 1\cdot(1,0) + 1\cdot(0,1) = 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 \\ u_2 &= (1,-1) = 1\cdot(1,0) + (-1)\cdot(0,1) = 1\cdot e_1 + (-1)\cdot e_2, \end{aligned}$$

assim

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Poderíamos ter obtido a matriz $M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ calculando a matriz inversa $M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}^{-1}$ (ou vice-versa).
Logo, da proposição acima, segue que

$$\begin{aligned} [T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} &= M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \overset{[\text{exercício}]}{=} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Observação 9.91 *Podemos obter a expressão do operador linear* T *do exemplo acima.*
Para isto observamos que

$$\begin{aligned} T((x,y)) &= T[x\cdot(1,0) + y\cdot(0,1)] \overset{[T\ \text{é linear}]}{=} x\cdot T((1,0)) + y\cdot T((0,1)) \\ &\overset{\left[[T]_{\mathcal{C},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}\right]}{=} x\cdot[3\cdot(1,0) - 2\cdot(0,1)] + y\cdot[-2\cdot(1,0) + 3\cdot(0,1)] \\ &= x\cdot(3,-2) + y\cdot(-2,3) = (3x-2y, 3y-2x), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

ou seja,

$$T((x,y)) = (3x-2y, 3y-2x), \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Com isto temos a:

Proposição 9.92 *Sejam* $(U,+,\cdot)$ *espaço vetorial de dimensão finita com bases* $\mathcal{B}$ *e* $\mathcal{C}$*, respectivamente.*
Se $T \in \mathscr{L}(U,V)$ *e* $u \in U$ *então*

$$[T(u)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}.$$

Prova:

Sejam $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$, $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \ldots, v_m\}$ bases de $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$, respectivamente, $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}$ e

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Logo teremos:

$$u = a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_n \cdot u_n \tag{9.93}$$

$$T(u_j) = \alpha_{1j} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mj} \cdot v_m, \quad \text{para cada} \quad j = 1, \ldots, n. \tag{9.94}$$

Assim

$$\begin{aligned} T(u) &\overset{(9.93)}{=} T(a_1 \cdot u_1 + \cdots + a_n \cdot u_n) \overset{[\text{T é linear}]}{=} a_1 \cdot T(u_1) + \cdots + a_n \cdot T(u_n) \\ &\overset{(9.94)}{=} a_1(\alpha_{11} v_1 + \cdots + \alpha_{m1} v_m) + \cdots + a_n(\alpha_{1n} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{mn} \cdot v_m) \\ &= (a_1 \alpha_{11} + \cdots + a_n \alpha_{1n}) \cdot v_1 + \cdots + (a_1 \alpha_{m1} + \cdots + a_n \alpha_{mn}) \cdot v_m, \end{aligned}$$

ou seja,

$$[T(u)]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} a_1\alpha_{11} + \cdots + a_n\alpha_{1n} \\ \vdots \\ a_1\alpha_{m1} + \cdots + a_n\alpha_{mn} \end{pmatrix} \overset{[\text{exercício}]}{=} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix},$$

isto é, $[T(u)]_{\mathcal{C}} = [T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}[u]_{\mathcal{B}}$, como queríamos demonstrar.

∎

Proposição 9.95 *Sejam $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$ espaços vetoriais de dimensão finita com bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$, respectivamente e $T \in \mathscr{L}(U, V)$.*

Então T é um isomorfismo de U em V se, e somente se, a matriz $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ admite matriz inversa.

Prova:

Sejam $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{v_1, \cdots, v_m\}$ bases de $(U, +, \cdot)$ e $(V, +, \cdot)$, respectivamente.

Com isto temos que $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Se T é um isomorfismo de U em V então $\dim(U) = \dim(V) = n$ e, pela proposição (9.88), seque que a matriz quadrada $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ possui matriz inversa dada por $[T^{-1}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

Reciprocamente, suponhamos que a matriz (quadrada) $[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}}$ admita matriz inversa.

Em particular, como a matriz acima é quadrada deveremos ter $n = m$, isto é, $\dim(U) = \dim(V) = n$.

Para completar a prova, pelo corolário (9.57), basta mostrar que o operador linear T é injetor.

Para isto seja $u \in \mathcal{N}(T)$, isto é,

$$T(u) = O = 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_n \quad \Longrightarrow \quad [T(u)]_{\mathcal{C}} = (0).$$

Então, da proposição (9.92) segue que

$$[u]_{\mathcal{B}} = [I_U(u)]_{\mathcal{B}} = [(T^{-1} \circ T)(u)]_{\mathcal{B}} = [T^{-1}(T(u))]_{\mathcal{B}} \overset{[\text{prop. } (9.92)]}{=} [T^{-1}]_{\mathcal{C},\mathcal{B}}[T(u)]_{\mathcal{C}}$$
$$\overset{[\text{prop. } (9.88)]}{=} [T]^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{C}} \underbrace{[T(u)]_{\mathcal{C}}}_{=(0)} = [T]^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}.(0) = (0),$$

onde (0) denota a matriz coluna de tamanho $n \times 1$ identicamente nula.

Logo

$$u = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_n = O,$$

portanto $\mathcal{N}(T) = \{O\}$, assim o operador linear T é injetor, mostrando que $T \in \mathcal{L}(U, V)$ é um isomrfismo de U em V, completando a demonstração.

∎

Para finalizar temos o

Exemplo 9.96 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*).*

Verifique se a transformação linear (verifique!) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_1(\mathbb{R})$ *dada por*

$$T(a, b) \doteq p, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2,$$

onde

$$p(t) \doteq a + (a + b)t, \quad t \in \mathbb{R},$$

é um isomorfismo de $\mathbb{R}^2$ *em* $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$*.*

Resolução:

Consideremos $\mathcal{B} \doteq \{(1, 0), (0, 1)\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{p_o, p_1\}$ (onde $p_o(t) \doteq 1$, $p_1(t) \doteq t$, $t \in \mathbb{R}$) as bases canônicas de $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{P}_1(\mathbb{R})$, respectivamente.

Como

$$[T((1, 0))](t) = 1 = p_o(t) \quad \text{e} \quad [T((0, 1))](t) = t = p_1(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

segue que matriz da transformação linear T com relação a estas bases será dada por

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como $\det\{[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}\} = 1 \neq 0$ segue (ver Apêndice I e II) que a matriz $[T]_{\mathcal{B}\mathcal{C}}$ admite matriz inversa.

Logo da proposição acima temos a transformação linear T é um isomorfismo.

9.6 Exercícios

Capítulo 10

Exercícios Resolvidos

Neste capítulo resolveremos alguns exercícios relacionados com tópicos desenvolvidos nos capítulos anteriores

Exemplo 10.1 *Sejam* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*) e* $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *dada por*

$$T(p) \doteq p' + p'', \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$

Mostre que T *é um operador linear em* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$*, encontre uma base e a dimensão do núcleo de* T *e uma base e a dimensão da imagem de* T*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $T \in \mathscr{L}(\mathscr{P}(\mathbb{R}))$.

Núcleo de T:

Lembremos que $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ se, e somente se, existem $a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (*)$$

Logo

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x \quad \text{e} \quad p''(x) = 2a_2, \quad x \in \mathbb{R}. \qquad (**)$$

Logo $p \in \mathscr{N}(T)$ se, e somente se, $p' + p'' = 0$ ou, equivalentemente,

$$p'(x) + p''(x) = 0, \ x \in \mathbb{R} \overset{(**)}{\iff} \underbrace{(a_1 + 2a_2 x) + 2a_2}_{=(a_1+2a_2)+2a_2 x} = 0, \ x \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2a_2 = 0 \end{cases}$$

cuja única solução será $a_1 = a_2 = 0$.

Desta forma, de (*), temos que $p \in \mathscr{N}(T)$ se, e somente se, $p(x) = a_o, \ x \in \mathbb{R}$, isto é, $p = a_o p_o$, onde $p_o(x) = 1, \ x \in \mathbb{R}$ (veja que $p_o \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$).

Logo $\{p_o\}$ será uma base de $\mathscr{N}(T)$, em particular, $\dim[\mathscr{N}(T)] = 1$.

Imagem de T:

Como $\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$, onde

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R},$$

é uma base de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ que completa a base de $\mathcal{N}(T)$ vemos que, pela demonstração do teorema (9.56), $\mathcal{C} \doteq \{T(p_1), T(p_2)\}$ será uma base da imagem de T, assim $\dim[T(\mathscr{P}_2(\mathbb{R})] = 2$.

Observemos que

$$[T(p_1)](x) = p_1'(x) + p_1''(x) \overset{[p_1(x)=x]}{=} 1,$$
$$[T(p_2)](x) = p_2'(x) + p_2''(x) \overset{[p_2(x)=x^2]}{=} 2x + 2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 10.2 *Sejam* $(M_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_2(\mathbb{R})$*) e* $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ *dada por*

$$T(X) \doteq AX + X, \quad X \in M_2(\mathbb{R}),$$

onde $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Mostre que T *é um operador linear em* $M_2(\mathbb{R})$*, encontre uma base e a dimensão do núcleo de* T *e uma base e a dimensão da imagem de* T.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor mostrar que $T \in \mathscr{L}(M_2(\mathbb{R}))$.

Núcleo de T:

Observe que

$$T(X) = (A + I_2)X, \quad X \in M_2(\mathbb{R}),$$

onde I_2 é a matriz identidade de ordem dois.

Logo se

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

vemos que $X \in \mathcal{N}(T)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\iff \begin{cases} a + 2c = 0 \\ b + 2d = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2c \\ b = -2d \end{cases},$$

ou, equivalentemente

$$X = \begin{pmatrix} -2c & -2d \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c & -0 \\ c & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2d \\ 0 & d \end{pmatrix} = c \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\doteq A_1} + d \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\doteq A_2}.$$

Notemos que o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{A_1, A_2\}$ é l.i. (verifique!) logo será uma base de $\mathcal{N}(T)$, em particular, $\dim[\mathcal{N}(T)] = 2$.

Imagem de T:

Utilizando o teorema do completamenteo, iremos encontrar matrizes $A_3, A_4 \in M_2(\mathbb{R})$ tais que $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ é uma base de $M_2(\mathbb{R})$.

Isto é equivalente a encontrar A_3 e A_4 tais que a única solução da equação matricial

$$\alpha \cdot A_1 + \beta \cdot A_2 + \gamma \cdot A_3 + \delta \cdot A_4 = \underbrace{O}_{\in M_2(\mathbb{R})} \qquad (*)$$

seja a solução trivial, isto é, a matriz nula de ordem 2 (pois neste caso as quatro matrizes serão l.i. e assim formarão uma base de $M_2(\mathbb{R})$)).

Consideremos

$$A_3 \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 \doteq \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}.$$

Substituindo em (*)

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \delta \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

que equivale à equação matricial (verifique!)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & a & x \\ 1 & 0 & c & z \\ 0 & -2 & b & y \\ 0 & 1 & d & t \end{pmatrix}}_{\doteq B} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

que admite uma única solução se, e somente se, o determinante da matriz de ordem quatro B for diferente de zero.

Mas

$$\det(B) = -(2c + a)(2t + y) + (2z + x)(2d + b),$$

assim $\det(B) \neq 0$ se, e somente se,

$$(2z + x)(2d + b) \neq (2c + a)(2t + y). \qquad (**)$$

Dessa forma, por exemplo:

$$A_3 \doteq \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad A_4 \doteq \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix},$$

satisfazem a condição (**) (verifique!).

Segue da demonstração do teorema (9.56) que $\{T(A_1), T(A_2)\}$ é um base de $T(M_2(\mathbb{R})$, assim $\dim[T(M_2(\mathbb{R})] = 2$.

Notemos que

$$T(A_1) = T\left(\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } T(A_2) = T\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 10.3 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*).*

Determinar um operador linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *cuja imagem seja gerada pelos vetores* $(1, 2, 0)$ *e* $(1, 1, 1)$.

Resolução:

Como $v_1 \doteq (1, 2, 0)$ e $v_2 \doteq (1, 1, 1)$ são linearmente independentes (verifique!), o subespaço gerado por estes vetores tem dimensão dois.

Como

$$\underbrace{\dim(\mathbb{R}^3)}_{=3} = \dim[\mathscr{N}(T)] + \underbrace{\dim[T(\mathbb{R}^3)]}_{=2} \Longrightarrow \dim[\mathscr{N}(T)] = 1.$$

Logo, a transformação procurada deverá ter, necessariamente, núcleo unidimensional, por exemplo, gerado pelo vetor $u_1 \doteq (0, 0, 1)$, isto é, $\mathcal{B} \doteq \{u_1\}$ é uma base de $\mathscr{N}(T)$.

Logo a base canônica de $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} \doteq \{(1, 0, 0), \underbrace{(0, 1, 0)}_{\doteq u_2}, \underbrace{(0, 0, 1)}_{\doteq u_3}\}$, é uma base de $\mathbb{R}^3$ que contém o vetor u_1.

Segue da demonstração do teorema (9.56) que $\{T(u_2), T(u_3)\}$ será uma base de $T(\mathbb{R}^3)$.

Como $\{v_1, v_2\}$ também é base de $T(\mathbb{R}^3)$ basta definirmos, por exemplo,

$$T(1, 0, 0) \doteq (0, 0, 0), \quad T(0, 1, 0) \doteq (1, 2, 0) \quad \text{e} \quad T(0, 0, 1) \doteq (1, 1, 1). \qquad (*)$$

Como conhecemos o operador linear T em uma base de $\mathbb{R}^3$ (no caso a base canônica) segue que podemos encontrar a expressão para $T((x, y, z))$, para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

Para isto basta observarmos que

$$\begin{aligned} T((x, y, z)) &= T[x \cdot (1, 0, 0) + y \cdot (0, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1)] \\ &\overset{[T \text{ é linear}]}{=} x \cdot \underbrace{T((1, 0, 0))}_{\overset{(*)}{=}(0,0,0)} + y \cdot \underbrace{T((0, 1, 0))}_{\overset{(*)}{=}(1,2,0)} + z \cdot \underbrace{T((0, 0, 1))}_{\overset{(*)}{=}(1,1,1)} \\ &= x \cdot (0, 0, 0) + y \cdot (1, 2, 0) + z \cdot (1, 1, 1) = (y + z, 2y + z, 1), \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \end{aligned}$$

ou seja, $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por

$$T((x, y, z)) = (y + z, 2y + z, 1), \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

tem as propriedades pedidas (verifique!).

Exemplo 10.4 *Sejam* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *e* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ *e* $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$*, respectivamente).*

Determinar $T \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), \mathscr{P}_2(\mathbb{R}))$ *cujo núcleo seja gerado pelos polinômios* $p, q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$*, onde*

$$p(x) = 1 + x^3 \quad \textit{e} \quad q(x) \doteq 1 - x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

Como p, q são l.i. em $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ (verifique!), teremos que $\dim[\mathscr{N}(T)] = \dim([p, q]) = 2$, assim

$$\underbrace{\dim[\mathscr{P}_3(\mathbb{R})]}_{=4} = \underbrace{\dim[\mathscr{N}(T)]}_{=2} + \dim[T(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}))] \Longrightarrow \dim[T(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}))] = 2,$$

ou seja, a imagem da transformação T procurada deverá ter, necessariamente, dimensão dois.

O primeiro passo é utilizar o teorema do completamento, para completar o conjunto formado pelos vetores p, q a uma base de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

Para isto, basta acrescentarmos, por exemplo, os polinômios $p_o, p_1 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, onde

$$p_o(x) \doteq 1 \quad \text{e} \quad p_1(x) \doteq x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

De fato, o conjunto $\{p, q, p_o, p_1\}$ é uma base de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, pois

$$\begin{aligned}
&\alpha \cdot p + \beta \cdot q + \gamma \cdot p_o + \delta \cdot p_1 = O \quad \Longleftrightarrow \\
&\alpha.p(x) + \beta.q(x) + \gamma.p_o(x) + \delta.p_1(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \\
&\alpha.(1 + x^3) + \beta.(1 - x^2) + \gamma.1 + \delta.x = 0 \quad \Longleftrightarrow \\
&(\alpha + \gamma + \delta) + \delta.x - \beta x^2 + \alpha x^3 = 0, \quad x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

e isto ocorrerá se, e somente se, $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, logo $\{p, q, p_o, p_1\}$ é um conjunto l.i. em $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ e como $\dim[\mathscr{P}_3(\mathbb{R})] = 4$ segue que $\{p, q, p_o, p_1\}$ será uma base de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$.

Assim, as imagens dos polinômios p e q, pela transformação T procurada precisam, necessariamente, ser linearmente independentes.

Para isto, consideremos $T \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), \mathscr{P}_2(\mathbb{R}))$ tal que

$$T(p_o) \doteq p_o, \quad T(p_1) \doteq p_1, \quad T(p) = O \quad \text{e} \quad T(q) \doteq O.$$

Deste modo $T(\mathscr{P}_3(\mathbb{R})) = [p_o, p_1]$, logo terá dimensão 2 e $\mathscr{N}(T) = [p, q]$, como queriámos.

Se $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ sabemos que existem $a_o, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$ tais que

$$p(x) = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Podemos reescrever o polinômio p da seguinte forma

$$\begin{aligned}
p(x) &= (a_o + a_2 - a_3).\underbrace{1}_{=p_o(x)} + a_1 \underbrace{x}_{=p_1(x)} + a_3 \underbrace{(1 + x^3)}_{=p(x)} - a_2 \underbrace{(1 - x^2)}_{=q(x)} \\
&= (a_o + a_2 - a_3).p_o(x) + a_1.p_1(x) + a_3.p(x) - a_2.q(x) \\
&= [(a_o + a_2 - a_3) \cdot p_o + a_1 \cdot p_1 + a_3 \cdot p - a_2 \cdot q](x), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned}
T(p) &= T[(a_o + a_2 - a_3) \cdot p_o + a_1 \cdot p_1 + a_3 \cdot p - a_2 \cdot q]) \\
&\overset{[T\text{ é linear}]}{=} (a_o + a_2 - a_3) \cdot \underbrace{T(p_o)}_{=p_o} + a_1 \cdot \underbrace{T(p_1)}_{=p_1} + a_3 \cdot \underbrace{T(p)}_{=O} - a_2 \cdot \underbrace{T(q)}_{=O} \\
&= (a_o + a_2 - a_3) \cdot p_o + a_1 \cdot p_1,
\end{aligned}$$

onde

$$p = a_o \cdot p_o + a_1 \cdot p_1 + a_2 \cdot p_2 + a_3 \cdot p_3 \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}).$$

Com isto temos que T definido desta forma satisfaz as propriedades requeridas.

Exemplo 10.5 *Sejam $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ e $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$, respectivamente).*

Considere $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dado por

$$T(p) \doteq \int_0^1 p(x)dx, \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$

Vimos anteriormente que $T \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Encontre a matriz da transformação linear T com relação às bases canônicas de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$, respecticamente.

Resolução:

Sejam $\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{\underbrace{1}_{\doteq u}\}$ as bases de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e de $\mathbb{R}$, respectivamente, onde

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
T(p_o) &= \int_0^1 p_o(x)\,dx = \int_0^1 dx = 1 = 1 \cdot \underbrace{1}_{=u} = 1 \cdot u, \\
T(p_1) &= \int_0^1 p_1(x)\,dx = \int_0^1 x\,dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{1}_{=u} = \frac{1}{2} \cdot u \\
T(p_2) &= \int_0^1 p_2(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \cdot \underbrace{1}_{=u} = \frac{1}{3} \cdot u.
\end{aligned}$$

Assim, a matriz de T com relação às bases canônicas de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathbb{R}$, respecticamente será dada por

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in M_{1\times 3}(\mathbb{R}).$$

Exemplo 10.6 *Sejam $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ e $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ espaços vetoriais reais (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ e $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, respectivamente) e $T : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por*

$$T(p) = p', \quad p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}).$$

Vimos anteriormente que $T \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), \mathscr{P}_2(\mathbb{R}))$.

Encontre a matriz da transformação linear T com relação às bases canônicas de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ e $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$.

Resolução:

Sejam $\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$ e $\mathcal{C} \doteq \{p_o, p_1\}$ a bases de $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ e de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$, respectivamente, onde

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
[T(p_o)](x) &= p_o'(x) = 0 = 0.p_o(x) + 0.p_1(x) + 0.p_2(x) \\
&= [0 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2](x), \\
[T(p_1)](x) &= p_1'(x) = 1 = 1.p_o(x) + 0.p_1(x)x + 0.p_2(x) \\
&= [1 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2](x), \\
[T(p_2)](x) &= p_2'(x) = 2x = 0.p_o(x) + 2.p_1(x)x + 0.p_2(x) \\
&= [0 \cdot p_o + 2 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2](x), \\
[T(p_3)](x) &= p_3'(x) = 3x^2 = 0.p_o(x) + 0.p_1(x)x + 3.p_2(x) \\
&= [0 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 3 \cdot p_2](x), \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Logo a matriz da transformação linear T com relação às bases canônicas será dada por

$$[T]_{\mathcal{B},\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Observação 10.7 *A matriz acima é uma matriz triangular superior.*

Exemplo 10.8 *Sejam $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^3$) e $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por*

$$T(x, y, z) \doteq (x + z, y + z, x + y + 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Mostre que T é um operador linear em $\mathbb{R}^3$ e encontre as matrizes da transformação linear T com relação à base canônica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$, isto é, $[T]_{\mathcal{B}}$ e com relação à base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ formada pelos vetores

$$u \doteq (1, 1, 2), \ v \doteq (-1, 1, 0), \ w \doteq (-1, -1, 1),$$

isto é, $[T]_{\mathcal{C}}$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R})$.

Com relação à base canônica $\mathcal{B} \doteq \{\underbrace{(1, 0, 0)}_{\doteq e_2}, \underbrace{(0, 1, 0)}_{\doteq e_2}, \underbrace{(0, 0, 1)}_{\doteq e_3}\}$ temos:

$$\begin{aligned}
T(e_1) &= T(1, 0, 0) = (1, 0, 1) = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\
T(e_2) &= T(0, 1, 0) = (0, 1, 1) = 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 \\
T(e_3) &= T(0, 0, 1) = (1, 1, 2) = 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Com relação à base $\mathcal{C}$, temos

$$\begin{aligned} T(u) &= T(1,1,2) = (3,3,6) = 3u = 3\cdot u + 0\cdot v + 0\cdot w \\ T(v) &= T(-1,1,0) = (-1,1,0) = v = 0\cdot u + 1\cdot v + 0\cdot w \\ T(w) &= T(-1,-1,1) = (0,0,0) = 0\cdot u + 0\cdot v + 0\cdot w. \end{aligned}$$

Portanto,

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exemplo 10.9 *Sejam* $(U,+,\cdot)$ *um espaço vetorial de dimensão finita e* T *um operador linear idempotente definida em* U *(ver definição (9.62)).*

Pela proposição (9.66), segue que

$$U = \mathcal{N}(T) \oplus T(U).$$

Seja $\mathcal{B}$ *uma base de* U *formada pelos vetores* $u_1, \dots, u_p$, *que formam uma base de* $\mathcal{N}(T)$, *juntamente com* $v_1, \dots, v_q$, *que formam uma base de* $T(U)$.

Encontre a matriz do operador linear $[T]_B$.

Resolução:

Como $u_j \in \mathcal{N}(T)$, para $j = 1, \cdots, p$, segue que

$$T(u_j) = O = 0\cdot u_1 + \cdots + 0\cdot u_p + 0\cdot v_1 + \cdots + 0\cdot v_q. \qquad (*)$$

Para cada $j = 1, \cdots, q$ temos que $T(v_j) \in T(U)$ e $v_1, \cdots, v_q$ é uma base de $T(U)$, logo existem escalares $\alpha_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1, \cdots, q$ tais que

$$\begin{aligned} T(v_j) &= \alpha_{1j}\cdot v_1 + \cdots + \alpha_{qj}\cdot v_q \\ &= 0\cdot u_1 + \cdots + 0\cdot u_p + \alpha_{1j}\cdot v_1 + \cdots + \alpha_{qj}\cdot v_q. \qquad (**) \end{aligned}$$

Logo de (*) e (**) segue que a matriz do operador linear idempotente T será da forma:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \alpha_{q1} & \cdots & \alpha_{qq} \end{pmatrix}.$$

Observação 10.10 *Uma matriz quadrada do tipo acima será denominada* matriz de bloco *e, como veremos, terá um papel importante no capítulo 11.*

Capítulo 11

Autovalores e Autovetores

11.1 Definição, Exemplos e Propriedades

Definição 11.1 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (ou complexo) e considere um operador linear* $T \in \mathscr{L}(V)$ *e um subespaço vetorial* U *do espaço vetorial* $(V, +, \cdot)$.

Se a imagem de U *por* T *for um subconjunto de* U *dizemos que* U *(isto é, se* $T(U) \subseteq U$*) diremos que o subespaço* U *é um* subespaço invariante pelo operador linear T.

Observação 11.2

1. *Na situação da definição acima podemos definir a* restrição do operador *linear* T *ao subespaç* *que será denotada por* $T_{|_U}$, *da seguinte forma:* $T_{|_U} : U \to U$ *dada por*

$$T_{|_U}(u) \doteq T(u), \quad u \in U.$$

2. *Com isto temos que* $T_{|_U} \in \mathscr{L}(U)$.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

3. *Como veremos no próximo capítulo, isto facilitará muitas vezes a compreensão de alguns tipos de operadores lineares, estudando os mesmos em subespaços de dimensões menores.*

4. *Notemos que os subespaços* $\{0\}$ *e* V *são invariantes por qualquer* $T \in \mathscr{L}(V)$.

   A verificação deste fato será deixada como exercício para o leitor.

5. *Vejamos o que é preciso acontecer para que exista um subespaço invariante de dimensão, por exemplo, um.*

   Primeiramente precisamos que $V \neq \{O\}$.

   Como todo subespaço de dimensão um é gerado por um vetor não nulo $u \in V$, *temos que*

$$U \doteq [u] \subseteq V, \quad u \neq O$$

será invariante pelo operador linear T *se, e somente, se para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*, no caso de espaço vetorial complexo) tivermos*

$$T(\alpha \cdot u) \in [u],$$

ou seja, se existir um escalar $\beta \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*, no caso de espaço vetorial complexo) tal que*

$$\underbrace{T(\alpha \cdot u)}_{\alpha \cdot T(u)} = \beta \cdot u,$$

que para $\alpha \neq 0$*, é equivalente a existir um escalar* $\beta \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*, no caso de espaço vetorial complexo) tal que*

$$T(u) = (\frac{\beta}{\alpha})u,$$

para algum $u \neq O$*. Isto sugere a seguinte definição:*

Definição 11.3 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) e* $T \in \mathscr{L}(U)$*.*

Diremos que um vetor, <u>não nulo</u>, $u \in U$ *é um* <u>autovetor do operador linear T</u> *se existir um escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*, no caso de espaço vetorial complexo) tal que*

$$T(u) = \lambda \cdot u.$$

Observação 11.4 *Se* $u \neq O$ *e* $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*, no caso de espaço vetorial complexo) são tais que*

$$T(u) = \lambda \cdot u \quad e \quad T(u) = \mu \cdot u$$

então deveremos ter

$$\lambda = \mu.$$

De fato, pois

$$(\lambda - \mu) \cdot u = \lambda \cdot u - \mu \cdot u = T(u) - T(u) = O \quad \overset{[u \neq O]}{\Longrightarrow} \quad \lambda - \mu = 0,$$

ou seja, $\lambda = \mu$*.*

Definição 11.5 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial,* $T \in \mathscr{L}(U)$ *e* u *um autovetor do operador linear* T*.*

Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*, no caso de espaço vetorial complexo) tal que* $T(u) = \lambda \cdot u$ *será denominado* <u>autovalor do operador linear T associado ao</u> <u>autovetor u.</u>

Observação 11.6 *Na situação da definição acima temos que* $u \in U$ *satisfaz*

$$T(u) = \lambda \cdot u \iff O = T(u) - \lambda \cdot u = T(u) - \lambda \cdot I_U(u) = (T - \lambda \cdot I_U)(u),$$

onde $I_U : U \to U$ *é o operador linear identidade em* U*.*

Logo $u \in U$ *satisfaz*

$$T(u) = \lambda \cdot u \iff u \in \mathscr{N}(T - \lambda \cdot I_U).$$

Portanto, para cada $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*, caso de espaço vetorial complexo)*

$$V(\lambda) = \{u \in U : T(u) = \lambda \cdot u\} = \mathscr{N}(T - \lambda \cdot I_U)$$

será um subespaço vetorial do espaço vetorial $(U, +, \cdot)$.

Com isto temos a:

Definição 11.7 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo),* $T \in \mathscr{L}(U)$ *e* λ *um autovalor do operador linear* T.

O subespaço vetorial

$$V(\lambda) \doteq \{u \in U : T(u) = \lambda \cdot u\} = \mathscr{N}(T - \lambda I_U)$$

será denominado subespaço próprio (ou auto-espaço generalizado) associado ao autovalor λ.

Se $\dim(U) < \infty$*, a dimensão de* $V(\lambda)$ *será finita e denominada* multiplicidade *em geométrica do*

Observação 11.8

1. *Na situação acima se* $u \in V(\lambda)$, $u \neq O$, *da definição de* $V(\lambda)$, *segue que o vetor* u *será um autovetor do operador linear* T *associado associado ao autovalor* λ *(pois* $T(u) = \lambda \cdot u$*).*
2. $V(\lambda)$ *é um subespaço invariante pelo operador linear* T*, isto é,*

$$T[V(\lambda)] \subseteq V(\lambda).$$

De fato, $u \in V(\lambda)$ *então*

$$T(u) = \lambda \cdot u \in V(\lambda),$$

pois $V(\lambda)$ *é subespaço vetorial de* $(U, +, \cdot)$.

Consideremos alguns exemplos.

Exemplo 11.9 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*) e* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) \doteq (y, 4x), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mostre que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ *e encontre todos os autovalores de* T*, os respectivos subespaços próprios e a multiplicidade geométrica de cada autovalor.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

Observemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se, e somente se, existir $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$\underbrace{T(x, y)}_{(y, 4x)} = \lambda \cdot (x, y),$$

ou seja, se, e somente, se existir $(x, y) \neq (0, 0)$ tal que

$$(y, 4x) = (\lambda x, \lambda y).$$

Isto é equivalente a dizer que o sistema linear

$$\begin{cases} -\lambda x + y = 0 \\ 4x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

possui, pelo menos, uma solução não trivial.

Por sua vez, isto acontecerá se, e somente se, o determinante da matriz dos coeficientes desse sitema linear

$$A \doteq \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 4 & -\lambda \end{pmatrix}$$

for igual a zero (ver Apêndice II).

Como

$$\det(A) = \lambda^2 - 4,$$

vemos que os únicos autovalores (ambos reais) de T são

$$\lambda_1 = -2 \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 2.$$

Logo

$$\begin{aligned} V(-2) &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T[(x, y)] = -2 \cdot (x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y, 4x) = -2 \cdot (x, y)\} \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -2x\} = \{(x, -2x) : x \in \mathbb{R}\} \\ &\overset{[(x,-2x)=x\cdot(1,-2)]}{=} [(1, -2)]. \end{aligned}$$

Assim, a multiplicidade geométrica do autovalor -2, que é a dimensão de $V(-2)$, será igual a 1.

De modo análogo, temos:

$$\begin{aligned} V(2) &\doteq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : T[(x, y)] = 2 \cdot (x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (y, 4x) \\ &= 2 \cdot (x, y)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\} = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\} \\ &\overset{[(x,2x)=x\cdot(1,2)]}{=} [(1, 2)]. \end{aligned}$$

Logo, a multiplicidade geométrica do autovalor 2, que é a dimensão de $V(2)$, será igual a 1.

Note que $u_1 \doteq (1, -2)$ é um autovetor associado ao autovalor -2 e que $u_2 \doteq (1, 2)$ é um autovetor associado ao autovalor 2 e, além disso, eles são l.i. (verifique!), ou seja, o espaço vetorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ possui uma base formada por autovetores u_1 e u_2 do operador linear T, a saber, $\mathcal{B} \doteq \{u_1, u_2\}$.

Exemplo 11.10 *Ainda com relação ao exercício anterior, encontre a matriz do operador linear T com relação à base $\mathcal{B}$, formada pelos autovetores de T.*

Resolução:

Observemos que

$$T((1,-2)) = (-2,4) \overset{[\text{exercício}]}{=} -2 \cdot (1,-2) + 0 \cdot (1,2)$$
$$T((1,2)) = (2,4) \overset{[\text{exercício}]}{=} 0 \cdot (1,-2) + 2 \cdot (1,2).$$

Logo, a matriz de T com relação a esta base será a matriz diagonal

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Observação 11.11 *No exemplo acima, existe uma base do espaço vetorial $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ formada por autovetores do operador linear T e a matriz do operador linear T em relação a essa base é uma matriz diagonal, cuja diagonal principal é formada pelos autovalores do operador linear T.*

Exemplo 11.12 *Sejam $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^2$) e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$T(x,y) \doteq (-y,x), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mostre que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ e encontre os autovalores de T.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

Observemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se, e somente se, existir $(x,y) \neq (0,0)$ tal que

$$\underbrace{T(x,y)}_{(-y,x)} = \lambda \cdot (x,y),$$

ou seja, se, e somente se, existir $(x,y) \neq (0,0)$ tal que

$$(-y,x) = (\lambda x, \lambda y).$$

Isto equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} \lambda x + y = 0 \\ x - \lambda y = 0 \end{cases}$$

possuir uma solução não trivial.

Isto acontecerá se, e somente se, o determinante da matriz

$$A \doteq \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

for igual a zero.

Como

$$\det(A) = -\lambda^2 - 1 = -(\lambda^2 - 1) < 0,$$

vemos que <u>não</u> existem autovalores (<u>**reais**</u>) associados ao operador linear T.

Exemplo 11.13 *Sejam $(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$) e $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ dada por*

$$T(p) \doteq p', \quad p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R}).$$

Mostre que $T \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}))$ e verifique que $\lambda = 0$ é o único autovalor associado a este operador linear.

Encontre $V(0)$.

Resolução:

Vimos anteriormente que $T \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_n(\mathbb{R}))$.

Observemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se, e somente se, existir $p \neq O$ tal que

$$T(p) = \lambda \cdot p \;\Leftrightarrow\; p' = \lambda \cdot p \;\Leftrightarrow\; p'(x) = \lambda.p(x), \; x \in \mathbb{R}.$$

Se

$$p(x) = a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n, \quad x \in \mathbb{R},$$

como

$$p'(x) = a_1 + 2a_2 x \cdots + n a_n x^{n-1}, \quad x \in \mathbb{R},$$

segue que

$$p'(x) = \lambda.p(x), \; x \in \mathbb{R} \;\Leftrightarrow\; a_1 + 2a_2 x \cdots + n a_n x^{n-1} = \lambda(a_o + a_1 x + \cdots + a_n x^n), \quad x \in \mathbb{R},$$

ou, equiavlentemente,

$$(\lambda a_o - a_1) + (\lambda a_1 - 2a_2)x \cdots + (\lambda a_{n-1} - n a_n)x^{n-1} + \lambda a_n x_n = 0, \quad x \in \mathbb{R},$$

o que implicará, se $\lambda \neq 0$,

$$a_o = \cdots = a_n,$$

ou seja, $p = O \in \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$.

Desta forma, se $\lambda \neq 0$ segue que λ não será autovalor do operador linear T.

Por outro lado, se $\lambda = 0$, então

$$T(p) = 0.p \;\Leftrightarrow\; p' = O$$

que apresentará como solução todos os polinômios que são constantes.

Logo, $\lambda = 0$ é o único autovalor do operador T associado ao, por exemplo, ao autovetor $p \equiv 1$. (o polinômio constante igual a 1).

Com isto temos que

$$V(0) = \mathscr{N}[T - 0 \cdot I] = \mathscr{N}(T) = [1],$$

isto é, será o subespaço gerado pelo polinômio $p \equiv 1$, em particular a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda = 0$ (isto é, $\dim[V(0)]$) será 1.

Exemplo 11.14 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*) e* $\mathsf{T} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por dada por*

$$\mathsf{T}(x, y, z) \doteq (x, y, x), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Mostre que $\mathsf{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ *e encontre os autovalores de* T*, os respectivos subespaços próprios e a multiplicidade geométrica de cada autovalor.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $\mathsf{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

Observemos que $\lambda \in \mathbb{R}$ é um autovalor de T se, e somente se, existir $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tal que

$$\underbrace{\mathsf{T}(x, y, z)}_{(x,y,x)} = \lambda \cdot (x, y, z),$$

isto é, se, e somente se, existir $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tal que

$$(x, y, x) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z).$$

Isto é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x = 0 \\ (1 - \lambda)y = 0 \\ -x + \lambda z = 0 \end{cases}$$

possuir uma solução não trivial.

Isto acontece se, e somente se, o determinante da matriz

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ -1 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

for igual a zero.

Como $\det(A) = \lambda(1 - \lambda)^2$, vemos que os únicos autovalores de T são $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$ (sendo que este último tem multiplicidade algébrica igual a 2).

Com isto temos que

$$\begin{aligned} V(0) &\doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\mathsf{T}(x, y, z)}_{=(x,y,x)} = 0 \cdot (x, y, z)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \underbrace{(x, y, x) = (0, 0, 0)}_{x=y=0}\} \\ &= \{(0, 0, z) : z \in \mathbb{R})\} \overset{[(0,0,z)=z\cdot(0,0,1)]}{=} [(0, 0, 1)]. \end{aligned}$$

Assim, a multiplicidade geométrica do autovalor 0 (isto é, $\dim[V(0)]$) será igual a 1.

$$\begin{aligned} V(1) &\doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{\mathsf{T}(x, y, z)}_{=(x,y,x)} = 1 \cdot (x, y, z)\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 ; \underbrace{(x, y, x) = (x, y, z)}_{x=z}\} \\ &= \{(z, 0, z) : z \in \mathbb{R})\} \overset{[(z,y,z)=y\cdot(0,1,0)+z\cdot(1,0,1)]}{=} [(0, 1, 0), (1, 0, 1)]. \end{aligned}$$

Assim, a multiplicidade geométrica do autovalor (isto é, $\dim[V(1)]$) será igual a 2.

Observação 11.15 *No exemplo acima notemos que so autovetotes* $(0,0,1)$, $(0,1,0)$, $(1,0,1)$ *são l.i., logo* $\mathcal{B} \doteq \{0,0,1),(0,1,0),(1,0,1)\}$ *será uma base de* $\mathbb{R}^3$.

Encontremos $[T]_{\mathcal{B}}$.

Para isto observemos que

$$\begin{aligned}
T[(0,0,1)] &= (0,0,0) = 0\cdot(0,0,1) + 0\cdot(0,1,0) + 0\cdot(1,0,1),\\
T[(0,1,0)] &= (0,1,0) = 0\cdot(0,0,1) + 1\cdot(0,1,0) + 0\cdot(1,0,1),\\
T[(1,0,1)] &= (1,0,1) = 0\cdot(0,0,1) + 0\cdot(0,1,0) + 1\cdot(1,0,1),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

<u>Conclusão:</u> no exemplo acima, existe uma base do espaço vetorial $(\mathbb{R}^3,+,\cdot)$ *formada por autovetores do operador linear* T *e a matriz do operador linear* T *em relação a essa base é uma matriz diagonal, cuja diagonal principal é formada pelos autovalores do operador linear* T.

Temos a:

Proposição 11.16 *Sejam* $(U,+,\cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) e* $T \in \mathscr{L}(U)$ *tal que* $u_1,\ldots,u_n$ *são autovetores do operador linear* T *associados aos autovalores* λ_1, $\ldots$, λ_n, *respectivamente.*

Se $\lambda_i \neq \lambda_j$, *para todo* $i \neq j$ *então os vetores* $u_1,\ldots,u_n$ *são linearmente independentes em* $(U,+,\cdot)$.

Prova:

A prova será por indução sobre o número de autovalores, isto é, sobre n.

Para $n = 2$ temos que, se

$$\beta_1\cdot u_1 + \beta_2\cdot u_2 = O, \quad (*)$$

aplicando T a ambos os membros, obteremos:

$$\begin{aligned}
\underbrace{T(O)}_{=O} &= T(\beta_1\cdot u_1 + \beta_2\cdot u_2) \overset{[T \text{ é linear}]}{=} \beta_1\cdot\underbrace{T(u_1)}_{=\lambda_1\cdot u_1} + \beta_2\cdot\underbrace{T(u_2)}_{=\lambda_2\cdot u_2}\\
&= \underbrace{\beta_1\cdot(\lambda_1\cdot u_1)}_{=\lambda_1\cdot(\beta_1\cdot u_1)} + \beta_2\cdot(\lambda_2\cdot u_2)\\
&\overset{[(*)\Rightarrow\beta_1\cdot u_1 = -\beta_2 u_2]}{=} \lambda_1\cdot(-\beta_2\cdot u_2) + \beta_2\cdot(\lambda_2\cdot u_2).\\
&= \beta_2\cdot(\lambda_2-\lambda_1)\cdot u_2
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\beta_2\cdot(\lambda_2-\lambda_1)\cdot u_2 = O.$$

Como $u_2 \neq O$ e, por hipótese, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta que $\beta_2 = 0$.

Logo, de (*), teremos

$$\beta_1 \cdot u_1 = 0$$

e como $u_1 \neq O$ segue $\beta_1 = 0$.

Portanto, os vetores u_1 e u_2 são linearmente independentes.

Suponhamos, como hipótese de indução, que $n-1$ autovetores associados a um operador linear T associados a $n-1$ autovalores, dois a dois distintos, sejam linearmente independentes.

Devemos mostrar que o mesmo resultado vale para n autovetores associados a n autovalores, dois a dois distintos.

Sejam então $u_1, \ldots, u_n$ autovetores do operador linear T, associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots,$ λ_n, que são, dois a dois, distintos.

Suponhamos, por absurdo, que os vetores $u_1, \ldots, u_n$ sejam linearmente dependentes.

Logo pelo menos um dos vetores $u_1, \cdots, u_n$ poderá ser escrito como combinação linear dos restantes.

Para simplificar a notação, suponhamos que o vetor u_1 possa ser escrito como combinação linear dos vetores $u_2, \cdots, u_n$, ou seja, existem escalares $\alpha_2, \cdots \alpha_n \in R$ tais que

$$u_1 = \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n. \tag{11.17}$$

Aplicando T em ambos os membros da identidade acima obteremos então

$$\underbrace{T(u_1)}_{=\lambda_1 \cdot u_1} = T[\alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n] \overset{[T \text{ é linear}]}{=} \alpha_2 \cdot \underbrace{T(u_2)}_{=\lambda_2 \cdot u_2} + \cdots + \alpha_n \cdot \underbrace{T(u_n)}_{=\lambda_n \cdot u_n},$$

ou seja,

$$\lambda_1 \cdot \underbrace{u_1}_{\overset{(11.17)}{=} \alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n} = (\alpha_2 \lambda_2) \cdot u_2 + \cdots + (\alpha_n \lambda_n) \cdot u_n. \tag{11.18}$$

Com isto obteremos

$$\lambda_1 \cdot (\alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n) = (\alpha_2 \lambda_2) \cdot u_2 + \cdots + (\alpha_n \lambda_n) \cdot u_n,$$

ou seja,

$$O = \alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1) \cdot u_n$$

e pela hipótese de indução (na soma acima temos $n-1$ autovetores associados a $n-1$ autovalores que são dois a dois distintos logo os autovetores $u_2, \cdots, u_n$ deverão ser l.i.) segue que

$$\alpha_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_n(\lambda_n - \lambda_1) = 0.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_j$ para $j = 2, \ldots, n$, deveremos ter

$$\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Assim, pela equação (11.17), segue que $u_1 = O$, o que é impossível pois u_1 é um autovetor do operador linear T (logo $u_1 \neq O$), que nos fornece um absurdo, de onde podemos concluir que $u_1, \ldots, u_n$ são linearmente independentes, completando a demonstração.

∎

Proposição 11.19 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathscr{L}(U)$ *tal que seus autovalores* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, *são todos, dois a dois, distintos.*

Então a soma dos subespaços próprios do operador T *é uma soma direta, isto é, para cada* $j = 1, \ldots, n$, *temos*

$$V(\lambda_j) \cap [V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)] = \{O\}.$$

Prova:

A prova será por indução sobre o número de autovalores distintos do operador linear T, isto é, sobre n.

Para $n = 2$ temos que mostrar que $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{O\}$.

Fixemos $\mathcal{B}_1 \doteq \{v_1^{(1)}, \ldots, v_{m_1}^{(1)}\}$ uma base de $V(\lambda_1)$ e $\mathcal{B}_2 \doteq \{v_1^{(2)}, \ldots, v_{m_2}^{(2)}\}$ uma base de $V(\lambda_2)$ (estamos supondo que $\dim[V(\lambda_i)] = m_i$, $i = 1, 2$).

Se $u \in V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2)$ então $u \in V(\lambda_1)$ e $u \in V(\lambda_2)$, logo existem escalares $\alpha_1^{(1)}, \cdots, \alpha_{m_1}^{(1)}, \alpha_1^{(2)}, \cdots, \alpha_{m_2}^{(2)} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1^{(1)} \cdot v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} \cdot v_{m_1}^{(1)} \\ &= \alpha_1^{(2)} \cdot v_1^{(2)} + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} \cdot v_{m_2}^{(2)}. \end{aligned} \tag{11.20}$$

Aplicando o operador T na identidade acima obteremos:

$$T(\alpha_1^{(1)} \cdot v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} \cdot v_{m_1}^{(1)}) = T(\alpha_1^{(2)} \cdot v_1^{(2)} + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} \cdot v_{m_2}^{(2)}).$$

Como T é um operador linear, esta identidade será equivalente a

$$\alpha_1^{(1)} \cdot T(v_1^{(1)}) + \cdots + \alpha_{m_1}^{(1)} \cdot T(v_{m_1}^{(1)}) = \alpha_1^{(2)} \cdot T(v_1^{(2)}) + \cdots + \alpha_{m_2}^{(2)} \cdot T(v_{m_2}^{(2)}). \tag{11.21}$$

Mas

$$T(v_j^{(i)}) = \lambda_i \cdot v_j^{(i)}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \cdots, m_i,$$

subsituindo isto em (11.21) obteremos

$$(\alpha_1^{(1)}\lambda_1) \cdot v_1^{(1)} + \cdots + (\alpha_{m_1}^{(1)}\lambda_1) \cdot v_{m_1}^{(1)} = (\alpha_1^{(2)}\lambda_2) \cdot v_1^{(2)} + \cdots + (\alpha_{m_2}^{(2)}\lambda_2) \cdot v_{m_2}^{(2)}. \tag{11.22}$$

Multiplicando a equação (11.20) por λ_1 e subtraindo-a da equação (11.22), obteremos

$$[\alpha_1^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_1)] \cdot v_1^{(2)} + \cdots + [\alpha_{m_2}^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_1)] \cdot v_{m_2}^{(2)} = 0.$$

Como os vetores $v_1^{(2)}, \ldots, v_{m_2}^{(2)}$ foram uma base de $V(\lambda_2)$, segue que eles serão l.i., logo deveremos ter

$$\alpha_1^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_1) = \cdots = \alpha_{m_2}^{(2)}(\lambda_2 - \lambda_1) = 0.$$

Como $\lambda_1 \neq \lambda_2$, resulta que

$$\alpha_1^{(2)} = \cdots = \alpha_{m_2}^{(2)} = 0.$$

Logo, de (11.20), segue que $u = O$, ou seja, $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{O\}$.

Suponhamos agora, por indução, que a soma de $n - 1$ subespaços próprios do operador linear T associados a $n - 1$ autovalores, dois a dois distintos, seja uma soma direta.

Precisamos mostrar que este resultado é válido quando o operador linear T tem n autovalores, dois a dois distintos.

Para isto, cada $j = 1, \ldots, n$ consideremos uma base

$$\mathcal{B}_j \doteq \{v_i^{(j)} : i = 1, \cdots, m_j\}$$

de $V(\lambda_j)$.

Note que para cada $j = 1, n$ e cada $i = 1, \cdots, m_j$, o vetor $v_i^{(j)}$ é um autovetor associado ao autovalor λ_j, isto é,

$$T(v_i^{(j)}) = \lambda_j \cdot v_i^{(j)}, \quad (*)$$

e que m_j é a multiplicidade geométrica deste autovalor (pois $\dim[(V(\lambda_j)] = m_j)$.

Seja

$$u \in V(\lambda_j) \cap [V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)].$$

Como $u \in V(\lambda_j)$ e $u \in [V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)]$ segue que existem escalares $\alpha_1^{(j)}, \cdots, \alpha_{m_j}^{(j)}, \alpha_1^{(1)}, + \cdots, \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)}, \alpha_1^{(j+1)}, \cdots, \alpha_{m_n}^{(n)} \in \mathbb{R}$ tais que

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1^{(j)} \cdot v_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)} \cdot v_{m_j}^{(j)} \\ &= \alpha_1^{(1)} \cdot v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)} \cdot v_{m_{j-1}}^{(j-1)} + \alpha_1^{(j+1)} \cdot v_1^{(j+1)} + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)} \cdot v_{m_n}^{(n)}. \end{aligned} \tag{11.23}$$

Aplicando T na identidade acima obteremos

$$\begin{aligned} &T(\alpha_1^{(j)} \cdot v_1^{(j)} + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)} \cdot v_{m_j}^{(j)}) \\ &\qquad = T(\alpha_1^{(1)} \cdot v_1^{(1)} + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)} \cdot v_{m_{j-1}}^{(j-1)} + \alpha_1^{(j+1)} \cdot v_1^{(j+1)} + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)} \cdot v_{m_n}^{(n)}) \end{aligned}$$

Como T é um operador linear, esta identidade será equivalente a

$$\begin{aligned} \alpha_1^{(j)} \cdot T(v_1^{(j)}) + \cdots + \alpha_{m_j}^{(j)} \cdot T(v_{m_j}^{(j)}) &= \alpha_1^{(1)} \cdot T(v_1^{(1)}) + \cdots + \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)} \cdot T(v_{m_{j-1}}^{(j-1)}) \\ &+ \alpha_1^{(j+1)} \cdot T(v_1^{(j+1)}) + \cdots + \alpha_{m_n}^{(n)} \cdot T(v_{m_n}^{(n)}). \end{aligned}$$

Subsituindo (*) na equação acima obteremos

$$\begin{aligned} &(\alpha_1^{(j)}\lambda_j) \cdot v_1^{(j)} + \cdots + (\alpha_{m_j}^{(j)}\lambda_j) \cdot v_{m_j}^{(j)} = (\alpha_1^{(1)}\lambda_1) \cdot v_1^{(1)} + \cdots \\ &+ (\alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)}\lambda_{j-1}) \cdot v_{m_{j-1}}^{(j-1)} + (\alpha_1^{(j+1)}\lambda_{j+1}) \cdot v_1^{(j+1)} + \cdots + (\alpha_{m_n}^{(n)}\lambda_n) \cdot v_{m_n}^{(n)}. \end{aligned} \tag{11.24}$$

Multiplicando a equação (11.23) por λ_j e subtraindo-a da equação (11.24), obteremos

$$\begin{aligned} &[\alpha_1^{(1)}(\lambda_1 - \lambda_j)] \cdot v_1^{(1)} + \cdots + [\alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)}(\lambda_{j-1} - \lambda_j)] \cdot v_{m_{j-1}}^{(j-1)} \\ &\qquad + [\alpha_1^{(j+1)}(\lambda_{j+1} - \lambda_j)] \cdot v_1^{(j+1)} + \cdots + [\alpha_{m_n}^{(n)}(\lambda_n - \lambda_j)] \cdot v_{m_n}^{(n)} = O. \end{aligned}$$

Usando a nossa hipótese de indução, isto é, que $n-1$ autovetores associados a $n-1$ autovalores, dois a dois distintos, são l.i. segue que

$$\alpha_1^{(1)}(\lambda_1 - \lambda_j)] = \cdots = \alpha_{m_{j-1}}^{(j-1)}(\lambda_{j-1} - \lambda_j) = \alpha_1^{(j+1)}(\lambda_{j+1} - \lambda_j) = \cdots = \alpha_{m_n}^{(n)}(\lambda_n - \lambda_j) = 0.$$

Como $\lambda_j \neq \lambda_i$, para todo $i \neq j$, obteremos

$$\alpha_1^{(i)} = \cdots = \alpha_{m_i}^{(i)} = 0,$$

para todo $i = 1, \ldots, j-1, j+1, \ldots, n$.

Assim, da equação (11.23), resultará que $u = O$, ou seja,

$$V(\lambda_j) \cap [V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_{j-1}) + V(\lambda_{j+1}) + \cdots + V(\lambda_n)] = \{O\},$$

para todo $j = 1, \cdots, n$, completando a demonstração.

∎

11.2 Polinômio Característico

Nosso objetivo é fazer um estudo mais profundo dos autovalores associados a um operador linear definido em um espaço vetorial real (ou complexo).

Para isto precisaremos introduzir alguns conceitos e propriedades relacionadas como os mesmos.

Começaremos pela:

Definição 11.25 *Dada uma matriz quadrada $A \in M_n(\mathbb{R})$ definimos o* polinômio característico associado *denotado por p_A, como sendo o polinômio obtido do determinante da matriz* $\det(A - \lambda I_n)$, *isto é,*

$$p_A(\lambda) \doteq \det(A - \lambda I_n),$$

onde I_n é a matriz identidade de ordem n.

Um outro conceito importante é introduzido pela:

Definição 11.26 *Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.*

Diremos que a matriz A é semelhante *a matriz B se existir uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$ inversível tal que*

$$A = M^{-1}BM.$$

Proposição 11.27 *Sejam $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.*

Mostre que se a matriz A é semelhante a matriz B então a matriz B será semelhante a matriz A.

Prova:

De fato, se a matriz A é semelhante a matriz B então existe uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$ inversível tal que

$$A = M^{-1}BM,$$

que implicará em

$$MAM^{-1} = M[M^{-1}BM]M^{-1} = [\underbrace{MM^{-1}}_{I_n}]B[\underbrace{MM^{-1}}_{=I_n}] = I_nBI_n = B.$$

Tomando-se $N \doteq M^{-1}$, da identidade acima obteremos

$$B = N^{-1}AN,$$

isto é, a matriz B é semelhante a matriz A.

∎

Observação 11.28 *No caso acima diremos que as matrizes A e B são semelhantes.*

Proposição 11.29 *Se $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ são matrizes semelhantes então seus polinômios característicos são iguais, isto é,*

$$p_A = p_B.$$

Prova:

Como as matrizes A e B são semelhantes, existe uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$ inversível, tal que

$$A = M^{-1}NM.$$

Logo

$$\begin{aligned} p_A(\lambda) &= \det(A - \lambda I_n) = \det(M^{-1}BM - \lambda M^{-1}I_nM) \\ &= \det(M^{-1}(BM - \lambda I_nM)) = \det[M^{-1}(B - \lambda I_n)M] \\ &\overset{[\text{Apêndice I}]}{=} \det(M^{-1})\det(B - \lambda I_n)\det(M) \overset{[\text{Apêndice I}]}{=} \frac{1}{\det(M)}\det(B - \lambda I_n)\det(M) \\ &= p_B(\lambda), \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação 11.30 *Sejam $(U, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita, $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ bases de U.*

Lembremos que se $T \in \mathscr{L}(U)$ então

$$[T]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = [M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}]^{-1}[T]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{C}},$$

isto é, as matrizes $[T]_{\mathcal{C}}$ e $[T]_{\mathcal{B}}$ serão semelhantes.

Logo, da proposição acima, segue que os polinômios característicos associados as mesmas serão iguais, isto é,

$$p_{[T]_{\mathcal{B}}}(\lambda) = p_{[T]_{\mathcal{C}}}(\lambda).$$

Logo o polinômio característico da matriz de um operador linear <u>independe</u> da base que escolhemos para o espaço vetorial real de dimensão finita em questão.

Com isto temos a:

Definição 11.31 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathscr{L}(U)$*).*

Definimos o polinômio característico do associado ao operador linear T, *indicado por* p_T*, como sendo*

$$p_T(\lambda) \doteq p_{[T]_{\mathcal{B}}}(\lambda),$$

onde $\mathcal{B}$ *é uma base qualquer do espaço vetorial* $(U, +, \cdot)$.

Temos o

Exemplo 11.32 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*) e* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) = (ax + by, cx + dy), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ *estão fixados.*

Mostre que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ *e encontre* $p_T(\lambda)$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

Usaremos a base canônica $\mathcal{B} \doteq \{(1, 0), (0, 1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ para obter o polinômio caraterístico $p_T(\lambda)$ associado ao operador T.

Como

$$\begin{aligned} T(1, 0) &= (a, c) = a \cdot (1, 0) + c \cdot (0, 1) \\ T(0, 1) &= (b, d) = b \cdot (1, 0) + d \cdot (0, 1), \end{aligned}$$

segue que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= \det([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_2) = \det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \\ &= \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

será o polinômio característico associado ao operador linear T.

Temos a

Proposição 11.33 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo, respectivamente) de dimensão finita e* T *em* $\mathscr{L}(U)$.

Então, $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*, respectivamente) é um autovalor do operador linear* T *se, e somente se,* $p_T(\lambda) = 0$.

Em outras, palavras, os autovalores do operador linear T *são as raízes reais (ou complexas, respectivamente) do seu polinômio característico.*

Prova:

Fixe $\mathcal{B}$ uma base de U.

Suponha que o escalar λ seja um autovalor de T.

Então existe um vetor $u \neq O$ tal que

$$T(u) = \lambda \cdot u \quad \text{ou, equivalentemente,} \quad (T - \lambda \cdot I_U)(u) = O.$$

Desta forma, vemos que o operador linear $T - \lambda \cdot I_U : U \to U$ não será injetor, consequentemente, não poderá ser um isomorfismo em U.

Logo a matriz $[T - \lambda \cdot I_U]_{\mathcal{B}}$ não poderá ser invertível, ou equivalentemente,

$$p_T(\lambda) = \det[T - \lambda I]_{\mathcal{B}} = 0,$$

s isto é, o escalar λ deverá ser uma raiz do polinômio caraterístico associado ao operador linear T.

Reciprocamente, se o escalar λ é tal que $p_T(\lambda) = 0$ então a matriz $[T - \lambda \cdot I_U]_{\mathcal{B}}$ deverá ter determinante nulo.

Isto implica que o operador linear $T - \lambda \cdot I_U : U \to U$ não poderá ser um isomorfismo em U, em particular, não poderá ser injetora.

Portanto, $\mathcal{N}(T - \lambda \cdot I_U) \neq \{O\}$, ou seja, existe $u \neq O$ tal que $(T - \lambda \cdot I_U)(u) = O$, isto é, $T(u) = \lambda \cdot u$, com $u \neq 0$, mostrando que o escalar λ é um autovalor do operador linear T, completando a demonstração.

∎

Exercício 11.34 *Refaça os exercícios resolvidos (11.9), (11.13) e (11.14) tendo em vista a proposição acima (ou seja, escolha uma base para os espaços vetoriais reais de dimensões finitas envolvidos, encontre o polinômio caraterístico associado a cada um dos operadores lineares envolvidos e finalmente encontre os autovalores associados ao operador encontrando as raízes do polinômio característico obtidos).*

Observação 11.35 *No exemplo (11.12) se considerarmos a base canôncia* $\mathcal{B} \doteq \{(1,0),(0,1)\}$ *de* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *teremos*

$$T[(1,0)] = (0,1) = 0 \cdot (1,0) + 1 \cdot (0,1),$$
$$T[(0,1)] = (-1,0) = (-1) \cdot (1,0) + 0 \cdot (0,1),$$

assim

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Logo

$$p_T(\lambda) = \det([T]_{\mathcal{B}} - \lambda \cdot I_2) = \begin{vmatrix} 0 - \lambda & -1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1,$$

que **<u>não</u>** *possui raízes reais, logo o operador* T *não possui autovalores (reais).*

Definição 11.36 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathscr{L}(U)$.

Se o escalar λ *é um autovalor do operador linear* T*, definimos a* <u>multiplicidade algébrica de λ</u> *como sendo a multiplicidade do número* λ *como raiz do polinômio característico de* T.

Com isto temos a:

Proposição 11.37 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo)de dimensão finita e* $T \in \mathscr{L}(U)$.

Se o escalar λ_o *é um autovalor do operador linear* T *então a sua multiplicidade geométrica é menor ou igual a sua multiplicidade algébrica.*

Prova:

Seja $\dim(U) = n$.

Denotemos por m e k as multiplicidades algébrica e geométrica do autovalor λ_o do operador linear T, respectivamente.

Logo, como $\dim[V(\lambda_o)] = k$, existirão vetores $u_1, \ldots, u_k \in V(\lambda_o)$ que tais que $\mathcal{C} \doteq \{u_1, \ldots, u_k\}$ seja base de $V(\lambda_o)$, em particular, os vetores $u_1, \ldots, u_k \in V(\lambda_o)$ são linearmente independentes.

Utilizando o teorema do completamento, existirão vetores $v_1, \ldots, v_{n-k} \in U$ tais que $\mathcal{B} = \{u_1, \ldots, u_k, v_1, \cdots, v_{n-k}\}$ é uma base de U.

Deste modo teremos:

$$
\begin{aligned}
T(u_1) &= \lambda_o \cdot u_1 = \lambda_o \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + \cdots + 0 \cdot u_k + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{n-k} \\
T(u_2) &= \lambda_o \cdot u_2 = 0 \cdot u_1 + \lambda_o \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 \cdots + 0 \cdot u_k + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{n-k} \\
&\vdots \\
T(u_k) &= \lambda_o \cdot u_k = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{k-1} + \lambda_o \cdot u_k + 0 \cdot v_1 + \cdots + 0 \cdot v_{n-k} \\
T(v_1) &= \alpha_{1(k+1)} \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{k(k+1)} \cdot u_k + \alpha_{(k+1)(k+1)} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{n(n-k)} \cdot v_{n-k} \\
&\vdots \\
T(v_{n-k}) &= \alpha_{1(n-k)} \cdot u_1 + \cdots + \alpha_{k(n-k)} \cdot u_k + \alpha_{(k+1)(n-k))} \cdot v_1 + \cdots + \alpha_{n(n-k)} \cdot v_{n-k},
\end{aligned}
$$

ou seja, a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ será da forma:

$$
[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_o & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_o \end{bmatrix}_{k \times k} & A_{k \times (n-k)} \\ O_{(n-k) \times r} & B_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}_{n \times n} .
$$

Logo o fator $(\lambda - \lambda_o)^k$ aparece na fatoração do polinômio

$$p_T(\lambda) = \det\{[T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_n\}$$
$$\left|\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} \lambda_o - \lambda & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_o - \lambda \end{bmatrix}_{k\times k} & A_{k\times(n-k)} \\ O_{(n-k)\times r} & B_{(n-k)\times(n-k)} - \lambda I_{(n-k)\times(n-k)} \end{array}\right|.,$$

mostrando que o escalar λ_o é raiz do polinômio, no mínimo, com multiplicidade k, ou seja, λ_o aparecerá, em geral, mais vezes como raiz do polinômio p_T do que k, isto é, $k \leq m$, completando a demonstração.

∎

Exemplo 11.38 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*) e* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *dada por*

$$T(x, y) \doteq (ax + by, cx + dy), \quad (x, y, x) \in \mathbb{R}^3.$$

Mostre que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ *e analise se o operador linear possui autovalores reais e quantos serão.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

Sabemos do exercício resolvido (11.32) que

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Pela proposição (11.33) temos que um escalar λ será um autovalor do operador linear T se, e somente se, $p_T(\lambda) = 0$, isto é, se, e somente se,

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0,$$

Esta equação possui solução real se, e somente se,

$$(a + d)^2 - 4(ad - bc) = \Delta \geq 0.$$

Con isto teremos as seguintes três possibilidades:

1. quando
$$(a + d)^2 = 4(ad - bc)$$
vemos que o operador linear T apresentará um único autovalor real, dado por:
$$\lambda \doteq \frac{a + d}{2};$$

2. quando
$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) = \Delta > 0,$$
o operador linear T apresentará, exatamente, dois autovalores reais distintos dados por:
$$\lambda_1 \doteq \frac{a+d+\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 \doteq \frac{a+d-\sqrt{(a+d)^2-4(ad-bc)}}{2};$$
3. quando
$$(a+d)^2 - 4(ad-bc) = \Delta < 0,$$
o operador linear T <u>**não**</u> apresentará autovalores reais.

Temos a

Proposição 11.39 *Sejam*
$$p(t) = a_o + \cdots + a_m t^m, \quad t \in \mathbb{R}$$
um polinômio com coeficientes reais e $A, B \in M_n(\mathbb{R})$.

Definamos a matriz quadrada de ordem n
$$p(A) \doteq a_o I_n + a_1 A + \cdots + a_m A^m,$$
onde I_n *é a matriz identidade de ordem* n.

Se a matriz A *é semelhante a matriz* B *então a matriz* $p(A)$ *é semelhante a matriz* $p(B)$.

Prova:

Se a matriz A é semelhante a matriz B então existe um matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$ inversível tal que
$$A = M^{-1}BM\,.$$
Desta forma,
$$A^2 = A.A = [M^{-1}BM].[M^{-1}BM] = [M^{-1}B][\underbrace{MM^{-1}}_{=I_n}][BM] = M^{-1}B^2M$$
e, por indução mostra-se (verifique!) que
$$A^j = M^{-1}B^jM, \quad j \in \mathbb{N}.$$
Assim,
$$\begin{aligned} p(A) &= a_o I_n + \cdots + a_m A^m = a_o[M^{-1}I_nM] + \cdots + a_m[M^{-1}B^mM] = \\ &= M^{-1}(a_o I_n + \cdots + a_m B^m)M \\ &= M^{-1}.p(B).M, \end{aligned}$$
mostrando que a matriz $p(A)$ é semelhante a matriz $p(B)$, completando a demonstração.

∎

Como consequência temos o

Corolário 11.40 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (ou complexo),* $T \in \mathscr{L}(U)$ *e* $p(t) = a_o + \cdots + a_m t^m$*,* $t \in \mathbb{R}$*, um polinômio com coeficientes reais.*

Definamos $p(T) : U \to U$ *por*

$$p(T) \doteq a_o \cdot I_U + \cdots + a_m \cdot T^m,$$

onde I_U *é o operador linear identidade de* U*.*

Então $p(T) \in \mathscr{L}(U)$*. Além disso, se* $\mathcal{B}$ *é uma base de* U *teremos que*

$$[p(T)]_{\mathcal{B}} = p([T]_{\mathcal{B}}).$$

Prova:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $p(T) \in \mathscr{L}(U)$.

Pelas proposições (9.82) e (9.85) temos que

$$\begin{aligned}[p(T)]_{\mathcal{B}} &= [a_o \cdot I_U + \cdots + a_m \cdot T^m]_{\mathcal{B}} = a_o [I]_{\mathcal{B}} + \cdots + a_m [T]_{\mathcal{B}}^m \\ &= p([T]_{\mathcal{B}}),\end{aligned}$$

completando a demonstração.

∎

Capítulo 12

Diagonalização de Operadores Lineares

12.1 Definição e Caracterização

Começaremos com a

Definição 12.1 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathscr{L}(U)$.

Diremos que o operador linear T *é* diagonalizável *se existir uma base de* U *formada por autovetores associados ao operador linear* T.

Observação 12.2 *Na situação acima, se* $T \in \mathscr{L}(U)$ *é diagonalizável e* $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \dots, u_n\}$ *é uma base de* U *formada por autovetores associados ao operador linear* T *associados aos autovalores* $\lambda_1, \dots, \lambda_n$*, respectivamente, então para cada* $i = 1, \cdots, n$ *teremos*

$$T(u_i) = \lambda_i \cdot u_i = 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{i-1} + \lambda_i \cdot u_i + 0 \cdot u_{i+1} + \cdots + 0. \cdot u_n,$$

ou seja, a matriz do operador linear T *com relação a base* $\mathcal{B}$ *será dada por:*

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

isto é, a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ *será uma matriz diagonal, mais especificamente, uma matriz quadrada* $A = (a_{ij})$*, onde* $a_{ij} \doteq \begin{cases} 0 \text{ se } i \neq j \\ \lambda_j \text{ se } i \neq j \end{cases}$.

Reciprocamente, se existir uma base $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \dots, u_n\}$ *de* U *com relação a qual a matriz de* $T \in \mathscr{L}(U)$ *é uma matriz diagonal, isto é, todos os seus coeficientes fora da diagonal principal são nulos, então* T *é um operador diagonalizável.*

De fato, se

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

então, pela própria definição de matriz de operador linear, deveremos ter, para cada $i = 1, \cdots, n$,

$$\begin{aligned} T(u_i) &= 0 \cdot u_1 + \cdots + 0 \cdot u_{i-1} + \lambda_i \cdot u_i + 0 \cdot u_{i+1} + \cdots + 0 \cdot u_n \\ &= \lambda_i \cdot u_i, \end{aligned}$$

ou seja, a base $\mathcal{B}$ *do espaço vetorial* $(U, +, \cdot)$ *é formada por autovetores associados ao operador linear* T.

Com isto acabamos de demonstrar o:

Teorema 12.3 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita e* $T \in \mathscr{L}(U)$.

O operador linear T *é diagonalizável se, e somente se, existir uma base de* U *com relação a qual a matriz do operador linear* T *é um matriz diagonal.*

Observação 12.4

1. *Na situação acima, se* $T \in \mathscr{L}(U)$ *é diagonalizável então existe uma base* $\mathcal{B}$, *formada por autovetores associados ao operador linear* T, *em relação a qual a matriz de* T *é uma matriz diagonal, onde na diagonal principal aparecerão os autovalores do operador linear* T.

2. *Se* $\mathcal{C}$ *é uma outra base de* U *sabemos que*

$$[T]_{\mathcal{C}} = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = (M_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1}[T]_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}\mathcal{C}},$$

isto é, a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ *é semelhante a uma matriz diagonal, a saber,* $[T]_{\mathcal{B}}$.

Esta última igualdade nos sugere introduzir a:

Definição 12.5 *Dizemos que uma matriz* $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ *é* <u>diagonalizável</u> *se existir uma matriz* $M \in M_n(\mathbb{R})$, *invertível, tal que a matriz* $M^{-1}AM$ *seja uma matriz diagonal.*

Observação 12.6 *Logo, uma matriz* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *é diagonalizável se, e somente se, ela é semelhante a uma matriz diagonal.*

Com isto temos a:

Proposição 12.7 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial de dimensão finita,* $T \in \mathscr{L}(U)$ *e* $\mathcal{C}$ *uma base de* U.

Então o operador linear T *é diagonalizável se, e somente se, a matriz* $[T]_{\mathcal{C}}$ *for diagonalizável.*

Prova:

Já vimos que se o operador linear T for diagonalizável então a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ será uma matriz diagonalizável.

Reciprocamente, suponha que a matriz $[T]_{\mathcal{C}}$ seja uma matriz diagonalizável.

Assim, existe uma matriz $M = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$, inversível, tal que $M^{-1}[T]_{\mathcal{C}}M$ é uma matriz diagonal.

Sejam $u_1, \dots, u_n$ os vetores da base $\mathcal{C}$.

Então, para cada $j = 1, \cdots, n$, definido-se

$$v_j \doteq a_{1j} \cdot u_1 + \cdots + a_{nj} \cdot u_n, \quad (*)$$

como a matriz M é uma matriz inversível segue que $\mathcal{B} \doteq \{v_1, \dots, v_n\}$ será uma base de U.

Além do mais, por (*), teremos $M = M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$.

Deste modo,

$$[T]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1}[T]_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = M^{-1}[T]_{\mathcal{C}}M$$

é uma matriz diagonal, isto é, o operador linear T é diagonalizável, completando a demonstração.

∎

Observação 12.8

1. *Pelo teorema acima, para verificar se um operador linear T é diagonalizável, basta verificar se a matriz do operador linear T com relação a uma base* qualquer *de U é uma matriz diagonalizável.*

2. *Suponhamos que $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$ seja uma matriz diagonalizável.*

   Vejamos como podemos tentar encontrar uma matriz $M \in M_n(\mathbb{R})$, inversível, de modo que $M^{-1}AM$ seja uma matriz diagonal.

   Considere $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$T(x_1, \dots, x_n) \doteq (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j), \quad (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

   Se $\mathcal{C}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$ então $[T]_{\mathcal{C}} = A$.

   De fato, pois

$$T((1, 0, \dots, 0)) \overset{[x_j=1, j=1 \text{ e } x_j=0, j\neq 1]}{=} (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}),$$
$$\vdots$$
$$T((0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i-\text{ésima posição}}, 0, \cdots, 0)) \overset{[x_j=1, j=i \text{ e } x_j=0, j\neq i]}{=} (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni}),$$
$$\vdots$$
$$T((0, \dots, 0, 1)) \overset{[x_j=1, j=n \text{ e } x_j=0, j\neq n]}{=} (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn}).$$

   Logo, da proposição (12.7), segue que o operador linear T é diagonalizável.

Seja $\mathcal{B}$ uma base de $\mathbb{R}^n$ formada por autovetores do operador linear T.

Como $\mathcal{C}$ é a base canônica, vemos que $M \doteq M_{\mathcal{C}\mathcal{B}}$ é a matriz cuja j-ésima coluna é formada pelas coordenadas do j-ésimo autovetor da base $\mathcal{B}$.

Como $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal e

$$[T]_{\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}[T]_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = (M_{\mathcal{C}\mathcal{B}})^{-1}[T]_{\mathcal{C}}M_{\mathcal{C}\mathcal{B}} = M^{-1}AM$$

vemos que a matriz M resolverá o nosso problema.

3. *Seja $(U, +, \cdot)$ espaço vetorial real (ou complexo).*

   Se o operador linear $T \in \mathscr{L}(U)$ for diagonalizável, o seu polinômio característico será da forma

   $$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda),$$

   onde os números reais $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *são todos os autovalores reais de* T.

   De fato, pois se o operador linear T for diagonalizável, existirá um base $\mathcal{B}$ de U tal que a matriz $[T]_{\mathcal{B}}$ é uma matriz diagonal, onde na diagonal principal aparecerão os autovalores, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ do operador linear T.

   Logo

$$p_T(\lambda) = p_{[T]_{\mathcal{B}}}(\lambda) = |[T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_U| = \left| \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \right|$$

$$= \left| \begin{pmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n - \lambda \end{pmatrix} \right| = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda).$$

Com isto temos o:

Teorema 12.9 *Sejam $(U, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(U)$.*

Então, o operador linear T é diagonalizável se, e somente se, os autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ do operador linear T forem tais que

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n).$$

Prova:

Se

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n)$$

então podemos formar uma base $\mathcal{B}$ do espaço vetorial U formada pela reunião das bases $\mathcal{B}_j$ dos subespaços próprios $V(\lambda_j)$, $j = 1, \ldots, n$.

Para cada $j = 1, \cdots, n$, temos que cada elemento de $\mathcal{B}_j$ é um autovetor do operador linear T.

Logo, por definição, segue que o operador linear T é diagonalizável.

Reciprocamente, se o operador linear T for diagonalizável existe uma base $\mathcal{B}$ de U formada por autovetores do operador linear T.

Como cada autovetor está associado a algum autovalor λ_j do operador linear T, vemos que cada elemento de $\mathcal{B}$ está contido em $V(\lambda_j)$, para algum $j = 1, \cdots, n$.

Desta forma, a soma de todos os subespaços próprios do operador linear T contém $\mathcal{B}$ e, portanto, deverá ser o próprio U, isto é,

$$U = V(\lambda_1) + \cdots + V(\lambda_n).$$

Pelo teorema (11.19) esta soma deverá ser uma soma direta, ou seja,

$$U = V(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus V(\lambda_n),$$

completando a demonstração.

∎

Utilizando o teorema acima vemos que:

Exemplo 12.10 *O operador linear do exemplo (11.9) é diagonalizável.*

Resolução:

De fato, pois $\mathbb{R}^2 = V(-2) \oplus V(2)$.

Exemplo 12.11 *O operador linear do exemplo (11.14) não é diagonalizável.*

Resolução:

De fato, possui temos apenas dois subespaços próprios cuja soma não é $\mathbb{R}^3$, *mais precisamente,*

$$V(0) \oplus V(1) = [(0, 0, 1), (1, 0, 1)] \neq \mathbb{R}^3.$$

Exemplo 12.12 *O operador linear do exemplo (11.12) não é diagonalizável.*

Resolução:

De fato, pois o operador linear em questão não possui autovetores.

Exemplo 12.13 *O operador linear (11.13) não é diagonalizável se* $n \geq 1$.

Resolução:

De fato, pois todo autovetor do operador linear pertence a $V(0)$, *que é unidimensional, e* $\dim[\mathscr{P}_n(\mathbb{R})] = n + 1 > 1$.

Observação 12.14

1. *Vejamos como é possível decidir se operador linear é diagonalizável ou não, definido em um espaço vetorial de dimensão finita, a partir das multiplicidades algébrica e geométrica de seus autovalores.*

   Sejam $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial de dimensão* m *e* $T \in \mathscr{L}(U)$.

   Sejam $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *os autovalores do operador linear* T*, dois a dois distintos.*

   Logo, o polinômio característico associado ao operador linear T *será dado por*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n} q(\lambda), \qquad (12.15)$$

   onde, para cada $j = 1, \cdots, n$, m_j *é a multiplicidade algébrica de* λ_j *e* $q = q(\lambda)$ *é um polinômio que* **não** *possui raízes reais.*

   Se, para cada $j = 1, \cdots, n$, *denotarmos por* r_j *a multiplicidade geométrica do autovalor* λ_j *(isto é,* $r_j = \dim[V(\lambda_j)]$*) então, do teorema (12.9), segue que o operador linear* T *é diagonalizável se, e somente se,*

$$m = r_1 + \cdots + r_n.$$

2. *Por este mesmo teorema, o operador linear* T *é diagonalizável se, e somente se, o espaço vetorial* U *possuir uma base formada pela reunião das bases dos subespaços próprios associados ao operador linear* T *(pois isto é equivalente a dizer que a soma destes subespaços é uma soma direta).*

   A existência de uma tal base é equivalente ao operador linear T *apresentar uma matriz em relação a essa base na forma*

$$\begin{pmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_1 \end{bmatrix}_{r_1 \times r_1} & & O \\ O & \ddots & \\ & & \begin{bmatrix} \lambda_n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}_{r_n \times r_n} \end{pmatrix}_{m \times m}.$$

   Desta forma, se o operador T *é diagonalizável segue que o seu polinômio característico será dado por*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{r_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{r_n}, \qquad (12.16)$$

   onde r_j *é a multiplicidade geométrica do autovalor* λ_j*, para* $j = 1, \ldots, n$.

   Comparando com (12.15) vemos que

$$m_j = r_j, \; j = 1, \ldots, n, \quad q(\lambda) \equiv 1 \quad e \quad r_1 + \cdots + r_n = m.$$

   Reciprocamente, suponha que

$$m_j = r_j, \; j = 1, \ldots, n \quad e \quad r_1 + \cdots + r_n = m.$$

Como a multiplicidade algébrica de cada autovalor igual a sua multiplicidade geométrica, cada subespaço próprio $V(\lambda_j)$ possui uma base $\mathcal{B}_j$ formada por m_j elementos, para $j = 1, \cdots, n$.

Como

$$m_1 + \cdots + m_n = r_1 + \cdots + r_n = m$$

segue de (12.15) que o grau do polinômio q será zero e que a reunião das bases $\mathcal{B}_j$ formará uma base de U (lembre que a soma de subespaços próprios é uma soma direta) constituída por autovetores do operador linear T.

Assim, o operador linear T é diagonalizável.

Provamos assim, o seguinte:

Teorema 12.17 *Sejam $(U, +, \cdot)$ um espaço vetorial real (ou complexo) de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(U)$.*

O operador linear T é diagonalizável se, e somente se, ambas condições forem verificadas:

1. *para cada autovalor do operador linear T as suas multiplicidades algébrica e geométrica, associadas ao mesmo, são iguais;*

2. *a soma das multiplicidades geométricas de todos os autovalores do operador linear T coincide com a dimensão do espaço vetorial U.*

Como consequência temos o

Corolário 12.18 *Sejam $(U, +, \cdot)$ um espaço vetorial real de dimensão n e $T \in \mathscr{L}(U)$.*

Se

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda) \cdots (\lambda_n - \lambda),$$

onde $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ são distintos entre si então o operador linear T será diagonalizável.

Prova:

Os autovalores do operador linear T serão $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, ou seja, as n raízes distintas do polinômio caraterísitico p_T.

Como os autovalores do operador linear T são dois a dois distintos, vê-se que as raízes do polinômio p_T são todas simples, isto é, teêm multiplicidade um.

Desta forma, se λ é um autovalor do operador linear T então a sua multiplicidade algébrica será um.

Pela proposição (11.37), a multiplicidade geométrica do autovalor λ é menor ou igual a um.

Como $\dim[V(\lambda)] \geq 1$, segue-se que a multiplicidade geométrica do autovalor λ deverá ser um, ou seja, igual à sua multiplicidade algébrica.

Logo do teorema acima segue que o operador linear T é diagonalizável, completando a demonstração.

∎

Exemplo 12.19 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*) e* $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *dado por*

$$T(x, y, z) \doteq (x + z, y + z, x + y + 2z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

Mostre que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ *e que o operador linear* T *é diagonalizável.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$.

Encontremos a matriz do operador linear T em relação à base canônica, que idicaremos por $\mathcal{C}$, do espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Para isto temos que

$$\begin{aligned}
T(\underbrace{(1,0,0)}_{\doteq e_1}) &= (1,0,1) = 1 \cdot \underbrace{(1,0,0)}_{e_1} + 0 \cdot \underbrace{(0,1,0)}_{=e_2} + 1 \cdot \underbrace{(0,0,1)}_{=e_3} \\
&= 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \\
T(\underbrace{(0,1,0)}_{\doteq e_2}) &= (0,1,1) = 0 \cdot \underbrace{(1,0,0)}_{e_1} + 1 \cdot \underbrace{(0,1,0)}_{=e_2} + 1 \cdot \underbrace{(0,0,1)}_{=e_3} \\
&= 0 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3, \\
T(\underbrace{(0,0,1)}_{=e_3}) &= (1,1,2) = 1 \cdot \underbrace{(1,0,0)}_{e_1} + 1 \cdot \underbrace{(0,1,0)}_{=e_2} + 2 \cdot \underbrace{(0,0,1)}_{=e_3} \\
&= 1 \cdot e_1 + 1 \cdot e_2 + 2 \cdot e_3.
\end{aligned}$$

logo a matriz do operador linear T em relação à abse $\mathcal{C}$ será dada por

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Logo, o polinômio caraterístico associado ao operador linear T será dado por:

$$\begin{aligned}
p_T(\lambda) = \det([T]_{\mathcal{C}} - \lambda I_3) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda) - 1) + 1(-(1-\lambda)) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda) = \lambda(1-\lambda)(\lambda - 3).
\end{aligned}$$

Desta forma, vemos que o polinômio p_T apresenta 3 $(= \dim(\mathbb{R}^3))$ raízes reais, simples e distintas.

Portanto, pelo corolário (12.18), segue-se que o operador linear T é diagonalizável.

Exemplo 12.20 *Encontre uma base de* $\mathbb{R}^3$ *formada por autovetores para o operador linear do exercício anterior.*

Encontre também a matriz do operador linear T *com relação a esta base.*

Resolução:

Para autovalor $\lambda_1 \doteq 0$:

Precisamos encontrar um vetor $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tal que

$$T((x, y, z)) = \lambda_1 \cdot (x, y, z) \overset{[\lambda_1=0]}{=} (0, 0, 0) \iff (x + z, y + z, x + y + 2z) = (0, 0, 0),$$

que é equivalente ao sistema linear (homogêneo)

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y = -z \\ x + y + 2z = 0 \end{cases} \iff x = y = -z,$$

ou seja, o vetor

$$u_1 \doteq (-z, -z, z), \quad \text{com} \quad z \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

será autovetor do operador linear T associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$.

Em particular, podemos tomar como um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$, o vetor $u_1 \doteq (1, 1, -1)$ (basta tomar $z = -1$ acima).

Para autovalor $\lambda_2 \doteq 1$:

Neste casos precisamos encontrar um vetor $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ tal que

$$T((x, y, z)) = \lambda_2 \cdot (x, y, z) \overset{[\lambda_2=1]}{=} (x, y, z) \iff (x + z, y + z, x + y + 2z) = (x, y, z),$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} x + z = x \\ y + z = y \\ x + y + 2z = z \end{cases} \iff \begin{cases} z = 0 \\ x = -y \end{cases},$$

ou seja, o vetor

$$u_2 \doteq (-y, y, 0), \quad \text{com} \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

será autovetor do operador linear T associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$.

Em particular, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 1$, o vetor $u_2 \doteq (1, -1, 0)$ (basta tomar $y = -1$ acima).

Para autovalor $\lambda_3 \doteq 3$:

Precisamos encontrar um vetor $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ satisfazendo

$$T(x, y, z) = \lambda_3 \cdot (x, y, z) \overset{[\lambda_3=3]}{=} (3x, 3y, 3z) \iff (x + z, y + z, x + y + 2z) = (3x, 3y, 3z),$$

que é equivalente ao sistema linear

$$\begin{cases} x + z = 3x \\ y + z = 3y \\ x + y + 2z = 3z \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 2y \end{cases}$$

ou seja, o vetor

$$u_3 \doteq (y, y, 2y), \quad \text{com} \quad y \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

será autovetor do operador linear T associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$.

Em particular, podemos tomar como autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 3$, o vetor $u_3 \doteq (1, 1, 2)$ (basta tomar $y = 1$ acima).

Logo $\mathcal{C} \doteq \{u_1, u_2, u_3\}$ será uma base de $\mathbb{R}^3$ formada por autovetores do operador linear T (pois os autovalores são dois a dois distintos, logo os autovetores associados deverão ser l.i.).

A matriz do operador linear T com relação à $\mathcal{C}$ será dada por (verifique!)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

ou seja, uma matriz diagonal, cuja diagonal principal é formada pelos autovalores associados ao operador linear T.

Exemplo 12.21 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^2$*),* $\mathcal{B}$ *uma base de* $\mathbb{R}^2$ *e* $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um operador linear em* $\mathbb{R}^2$ *cuja matriz com relação à base* $\mathcal{B}$ *é dada por*

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

Mostre que o operador linear T *diagonalizável.*

Resolução:

Notemos que a matriz A é uma matriz simétrica (isto é, $A^t = A$).

O polinômio característico associado ao operador linear T será dado por

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) = p_A(\lambda) = \det[A - \lambda I_2] &= \det \begin{pmatrix} a - \lambda & b \\ b & c - \lambda \end{pmatrix} \\ &= \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2. \end{aligned}$$

Vemos que o polinômio p_T, que tem grau dois, apresenta duas raízes reais simples (isto é, com multiplicidade um) se, e somente se, o discriminante

$$\Delta \doteq (a + c)^2 - 4(ac - b^2) > 0.$$

Mas,

$$(a + c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 = (a - c)^2 + 4b^2.$$

Em particular, $\Delta \geq 0$, para todo $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Logo $\Delta > 0$ se, e somente, se

$$a \neq c \quad \text{ou} \quad b \neq 0.$$

Com isto temos as seguintes possibilidades:

(i) Se $a \neq c$ ou $b \neq 0$ as multiplicidades algébrica e geométrica de cada um dos autovalores associados ao operador linear T (as raízes do polinômio p_T) coincidem (pois serão iguais a 1), portanto, pelo corolário (12.18), o operador linear T será diagonalizável.

(ii) Se $a = c$ e $b = 0$ então vê-se claramente que o operador linear T é diagonalizável pois, neste caso, a matriz A será uma matriz diagonal (será da forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

Portanto, em qualquer caso, o operador linear T será diagonalável.

Observação 12.22

1. *Concluão: o exemplo acima nos diz que se uma matriz quadrada de ordem 2, com entradas reais, é simétrica então ela será diagonalizável.*

2. *Pergunta-se: será que isto também será verdade para matriz simétricas de ordem maior? mais precisamente, se uma matriz quadrada de ordem n, com entradas reais, é simétrica então ela será diagonalizável?*

   A resposta a esta questão é positiva. No próximo capítulo daremos a demonstração deste fato,

Exemplo 12.23 *Sejam $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$) e $T : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ dado por*

$$T(p) \doteq p'' - 2p' + p, \quad p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$

Pergunta-se o operador linear T é um operador linear diagonalizável?

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathscr{L}(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}))$.

Se $\mathcal{B} \doteq \{p_o, p_1, p_2\}$ a base canônica de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ (isto é, $p_j(t) \doteq t^j$, $t \in \mathbb{R}$, $j = 0, 1, 2$) então

$$\begin{aligned}
[T(p_o)](t) &= p_o''(t) - 2p_o'(t) + p_o(t) \overset{[p_o(t)=1, t\in\mathbb{R}]}{=} 1 \\
&= p_o(t) = 1 \cdot p_o(t) + 0 \cdot p_1(t) + 0 \cdot p_2(t) = [1 \cdot p_o + 0 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2](t), \ t \in \mathbb{R}; \\
[T(p_1)](t) &= p_1''(t) - 2p_1'(t) + p_1(t) \overset{[p_1(t)=t, t\in\mathbb{R} \Rightarrow p_1'(t)=1, p_1''(t)=0, t\in\mathbb{R}]}{=} -2 + t \\
&= -2p_o(t) + 1p_1(t) = [-2 \cdot p_o + 1 \cdot p_1 + 0 \cdot p_2](t), \quad t \in \mathbb{R}; \\
[T(p_2)](t) &= p_2''(t) - 2p_2'(t) + p_2(t) \overset{[p_2(t)=t^2, t\in\mathbb{R} \Rightarrow p_2'(t)=2t, p_2''(t)=2, t\in\mathbb{R}]}{=} 2 - 2(2t) + t^2 \\
&= 2p_o(t) - 4p_1(t) + p_2(t) = [2 \cdot p_o - 4 \cdot p_1 + 1 \cdot p_2](t), \ t \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

logo a matriz do operador linear T com relação à $\mathcal{B}$ será dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, o polinômio característico associado ao operador linear T será:

$$\begin{aligned} p_T(\lambda) &= p_{[T]_{\mathcal{B}}}(\lambda) = \det[[T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_3] \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & -4 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \end{pmatrix} \overset{[\text{exercício}]}{=} (1-\lambda)^3, \end{aligned}$$

desta forma, $\lambda \doteq 1$ é o único autovalor do operador linear T com multiplicidade algébrica igual a 3.

Do teorema (12.17) o operador linear T será diagonalizável se, e somente se, $\dim[V(1)] = 3$.

Vejamos qual é a dimensão deste subespaço próprio.

Para isto lembremos que $p \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ se, e somente se,

$$p(t) = a_o + a_1 t + a_2 t^2, \quad t \in \mathbb{R}$$

para $a_o, a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ ou, equivalentemente, $[p]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

Logo

$$\begin{aligned} p \in V(1) &\iff T(p) = \lambda \cdot p \iff [T(p)]_{\mathcal{B}} = [\lambda \cdot p]_{\mathcal{B}} \iff [T]_{\mathcal{B}}[p]_{\mathcal{B}} = \lambda[p]_{\mathcal{B}} \\ &\iff ([T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_3)[p]_{\mathcal{B}} = O \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_o \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\overset{[\text{exercício}]}{\iff} a_1 = a_2 = 0. \end{aligned}$$

Logo $p(t) = a_o = p_o(t)$, $t \in \mathbb{R}$, assim $V(1) = [p_o]$ e, do teorema (12.17), segue que o operador linear T não será diagonalizável.

Temos também o seguinte exercício resolvido:

Exercício 12.24 *Sejam* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^4$*) e* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *dada por*

$$T((x, y, z, t)) \doteq (x + y, y, 2z + t, 2z + t), \quad (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

Mostre que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ *e verifique se o operador linear* T *é diagonalizável.*

Encontre também os subespaços próprios associados ao operador linear T.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$.

Se $\mathcal{C}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$ temos que

$$
\begin{aligned}
T(\underbrace{(1,0,0,0)}_{\doteq e_1}) &= (1,0,0,0) = 1\cdot(1,0,0,0) + 0\cdot(0,1,0,0) + 0\cdot(0,0,1,0) + 0\cdot(0,0,0,1)\\
&= 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 0\cdot e_3 + 0\cdot e_4;\\
T(\underbrace{(0,1,0,0)}_{\doteq e_2}) &= (1,1,0,0) = 1\cdot(1,0,0,0) + 1\cdot(0,1,0,0) + 0\cdot(0,0,1,0) + 0\cdot(0,0,0,1)\\
&= 1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 0\cdot e_3 + 0\cdot e_4;\\
T(\underbrace{(0,0,1,0)}_{\doteq e_3}) &= (0,0,2,2) = 0\cdot(1,0,0,0) + 0\cdot(0,1,0,0) + 2\cdot(0,0,1,0) + 2\cdot(0,0,0,1)\\
&= 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 2\cdot e_3 + 2\cdot e_4;\\
T(\underbrace{(0,0,0,1)}_{\doteq e_4}) &= (0,0,1,1) = 0\cdot(1,0,0,0) + 0\cdot(0,1,0,0) + 1\cdot(0,0,1,0) + 1\cdot(0,0,0,1)\\
&= 0\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3 + 1\cdot e_4,
\end{aligned}
\tag{12.25}
$$

logo a matriz do operador linear T com relação à $\mathcal{B}$ será dada por

$$
[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}
$$

cujo polinômio característico associado será

$$
\begin{aligned}
p_T(\lambda) = \det\{[T]_{\mathcal{B}} - \lambda I_4\} = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix}\\
= (1-\lambda)^2((2-\lambda)(1-\lambda)-2) = (1-\lambda)^2(\lambda^2-3\lambda)\\
= \lambda(\lambda-3)(1-\lambda)^2,
\end{aligned}
$$

Logo os autovalores associados ao operador linear T serão:

$$
\lambda_1 \doteq 0, \quad \lambda_2 \doteq 3, \quad \lambda_3 \doteq 1 \text{ (com multiplicidade algébrica igual a 2).}
$$

Encontremos os subespaços próprios associados a cada um dos autovalores obtidos acima.

Para o autovalor $\lambda_1 = 0$:

Observemos que

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in V(0) &\iff T((x,y,z,t)) = \lambda_1 \cdot (x,y,z,t) \\
&\overset{[\lambda_1=0]}{\iff} (x+y, y, 2z+t, 2z+t) = (0,0,0,0) \\
&\iff \begin{cases} x+y=0 \\ y=0 \\ 2z+t=0 \\ 2z+t=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x=y=0 \\ t=-2z \end{cases} \iff (x,y,z,t) = (0,0,z,-2z) = z \cdot (0,0,1,-2).
\end{aligned}
$$

Logo, tomandos-e $z = 1$ temos que $u_1 \doteq (0,0,1,-2)$ será um autovetor associado ao autovalor $\lambda_1 = 0$ e além disso

$$V(0) = [u_1] = [(0,0,1,-2)],$$

ou seja, a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda_1 = 0$ é igual a sua multiplicidade geométrica.

Para o autovalor $\lambda_2 = 3$:

Observemos que

$$
\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in V(3) &\iff T((x,y,z,t)) = \lambda_2 \cdot (x,y,z,t) \\
&\overset{[\lambda_2=3]}{\iff} (x+y, y, 2z+t, 2z+t) = (3x,3y,3z,3t) \\
&\iff \begin{cases} x+y=3x \\ y=3y \\ 2z+t=3z \\ 2z+t=3t \end{cases} \iff \begin{cases} x=y=0 \\ t=z \end{cases} \\
&\iff (x,y,z,t) = (0,0,z,z) = z \cdot (0,0,1,1).
\end{aligned}
$$

Logo, tomandos-e $z = 1$ temos que$u_2 \doteq (0,0,1,1)$ será um autovetor associado ao autovalor $\lambda_2 = 3$ e além disso

$$V(3) = [u_2] = [(0,0,1,1)],$$

ou seja, a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda_2 = 3$ é igual a sua multiplicidade geométrica.

Para o autovalor $\lambda_3 = 1$:

Observemos que

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in V(1) &\iff T((x,y,z,t)) = \lambda_3 \cdot (x,y,z,t) \\
&\overset{[\lambda_3=1]}{\iff} (x+y, y, 2z+t, 2z+t) = (x,y,z,t) \\
&\iff \begin{cases} x+y = x \\ y = y \\ 2z+t = z \\ 2z+t = t \end{cases} \\
&\iff y = z = t = 0 \iff (x,y,z,t) = (x,0,0,0) = x \cdot (1,0,0,0).
\end{aligned}$$

Logo, tomandos-e $x = 1$ temos que $u_3 \doteq (1,0,0,0)$ será um autovetor associado ao autovalor $\lambda_3 = 1$ e além disso

$$V(1) = [u_1] = [(1,0,0,0)].$$

Como a multiplicidade algébrica do autovalor $\lambda_3 = 1$ é dois e a sua multiplicidade geométrica é um, logo, pelo teorema (12.17), segue que que o operador linear T não será diagonalizável.

Exercício 12.26 *Ainda com relação ao operador linear do exercício acima, encontre a matriz do operador linear T com relação à base $\mathcal{B}$ formada pelos vetores*

$$u_1 \doteq (0,0,1,-2), \quad u_2 \doteq (0,0,1,1), \quad u_3 \doteq (1,0,0,0) \quad e \quad u_4 \doteq (0,1,0,0).$$

Resolução:

Observemos que $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ é uma base de $\mathbb{R}^4$ (verifique!).

Além disso, do exemplo anterior temos:

$$\begin{aligned}
T(u_1) &= (0,0,0,0) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4, \\
T(u_2) &= (0,0,3,3) = 3 \cdot u_2 = 0 \cdot u_1 + 3 \cdot u_2 + 0 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4, \\
T(u_3) &= (1,0,0,0) = 1 \cdot u_3 = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 0 \cdot u_4, \\
T(u_4) &= (1,1,0,0) = 0 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 + 1 \cdot u_3 + 1 \cdot u_4,
\end{aligned}$$

ou seja, a matriz do operador linear T em relação à base $\mathcal{B}$ será dada por

$$[T]_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Observação 12.27 *Vale observar que a matriz acima* **não** *é diagonalizável e que os vetores u_1, u_2, u_3 são autovetores l.i. associados ao operador linear T e o vetor u_4* **não** *é um autovetor associado ao operador linear T.*

Proposição 12.28 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real finitamente gerado e* $T \in \mathscr{L}(U)$ *um operador diagonalizável com autovetores* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$*, onde* $\dim(U) = n$.

Dados $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$*, denote por* $\mathrm{diag}(x_1, \dots, x_n) = (a_{ij})$ *a matriz diagonal tal que*

$$a_{ii} \doteq x_i, \quad i = 1, \cdots, n.$$

Consideremos p *um polinômio de grau* m *com coeficientes reais dado por*

$$p(t) = a_o + a_1 t \cdots + a_m t^m, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sejam $\mathcal{B}$ *uma base de autovalores de* U *(ou seja,* $[T]_B = \mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$*) e* $\mathcal{C}$ *uma outra base de* U.

Então a matriz $[p(T)]_\mathcal{C}$ *é semelhante a matriz* $\mathrm{diag}\,(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n))$.

Prova:

Como

$$[T]_\mathcal{C} = (M_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1}[T]_\mathcal{B} M_{\mathcal{B}\mathcal{C}},$$

e o operador linear T é diagonalizável segue que a matriz $[T]_\mathcal{C}$ será semelhante a matriz diagonal $[T]_\mathcal{B}$.

Pelas proposições (11.39) e (11.40), segue que

$$[p(T)]_\mathcal{C} = (M_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1}[p(T)]_\mathcal{B} M_{\mathcal{B}\mathcal{C}}. \quad (*)$$

Mas

$$\begin{aligned}
[p(T)]_\mathcal{B} &= [a_o.I_U + a_1 T + \cdots + a_m.T^m]_\mathcal{B} = a_o.I_n + a_1.[T]_\mathcal{B} + \cdots + a_m.[T]_\mathcal{B}^m \\
&= a_o.\,\mathrm{diag}\,(1, \dots, 1) + a_1.\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \cdots + a_m.[\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)]^m \\
&\overset{[\text{exercício}]}{=} a_o.\,\mathrm{diag}\,(1, \dots, 1) + a_1.\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n) + \cdots + a_m.\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1^m, \dots, \lambda_n^m) \\
&= \mathrm{diag}\,(a_o, \dots, a_o) + \mathrm{diag}\,(a_1\lambda_1, \dots, a_1\lambda_n) + \cdots + \mathrm{diag}\,(a_m\lambda_1^m, \dots, a_m\lambda_n^m) \\
&= \mathrm{diag}\,(a_o + a_1\lambda_1 + \cdots + a_m\lambda_1^m, \dots, a_o + a_1\lambda_n + \cdots + a_m\lambda_n^m) \\
&= \mathrm{diag}\,(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)), \qquad (12.29)
\end{aligned}$$

logo, de (*), segue que

$$[p(T)]_\mathcal{C} = (M_{\mathcal{B}\mathcal{C}})^{-1}.\,\mathrm{diag}\,(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)).M_{\mathcal{B}\mathcal{C}},$$

ou seja, a matriz $[p(T)]_\mathcal{C}$ é semelhante a matriz $\mathrm{diag}\,(p(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n))$, completando a demonstração.

∎

Como consequência temos o

Corolário 12.30 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real finitamente gerado e* $T \in \mathscr{L}(U)$ *um operador diagonalizável.*

Mostre que $p_T(T) = O$ *(o operador linear nulo), onde* p_T *é o polinômio característico associado ao operador linear* T.

Prova:

Seja $\mathcal{B}$ uma base de U tal que

$$[T]_{\mathcal{B}} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n),$$

onde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ são os autovalores associados ao operador linear T.

Segue de (12.29) da demonstração da proposição acima que

$$[p_T(T)]_B = \operatorname{diag}(p_T(\lambda_1), \dots, p(\lambda_n)) \overset{[\lambda_j \text{ é autovalor de } T]}{=} \operatorname{diag}(0, \dots, 0) = O,$$

pois $p_T(\lambda_j) = 0$, $j = 1, \dots, n$.

Assim o operador linear $p_T(T)$ deverá ser o operador linear nulo, isto é, $p_T(T) = O$, completando a demonstração.

∎

Observação 12.31 *Pode-se exibir um exemplo de $T \in \mathscr{L}(U)$ que **não** seja diagonalizável mas que $p_T(T) = O$.*

Deixaremos como exercício para o leitor a construção de tal operador linear T.

12.2 Exercícios

Capítulo 13

Espaços Euclidianos

13.1 Produto Interno

Nos primeiros capítulos estudaremos as propriedades mais básicas de um espaço vetorial reais.

A introdução de conceitos como geradores e base foram feitas a partir de combinações lineares que, por sua vez, envolvem apenas a adição de vetores e a multiplicação dos mesmos por escalares, dois objetos que estão presentes na própria definição do espaço vetorial.

Neste capítulo veremos tipos especiais de espaços vetoriais que possuem uma estrutura mais refinada que nos proporcionará desenvolver alguns aspectos geométricos, como por exemplo, calcular o ângulo ou a distância entre dois vetores.

Veremos também que é possível elaborar mais detalhes sobre operadores lineares definidos em tais espaços vetoriais.

Começaremos pela

Definição 13.1 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real.*

Um produto interno em V *é uma aplicação que a cada par* $(u, v) \in V \times V$ *associa um número real, que será denotado por* $\langle u, v \rangle$*, satisfazendo as seguintes propriedades:*

(P1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$;

(P2) $\langle \alpha \cdot u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$ *para todo* $u, v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{R}$;

(P3) $\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle$ *para todo* $u, v \in V$;

(P4) $\langle u, u \rangle \geq 0$ *e se* $\langle u, u \rangle = 0$ *então* $u = O$.

O espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ *munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *será chamado de* espaço euclidiano.

Observação 13.2

1. *O produto interno também é chamado de* produto escalar.

2. *Temos que*

$$\langle O, u \rangle = 0 \quad \textit{para todo} \quad u \in V.$$

De fato, pois

$$\langle O, u\rangle = \langle O + O, u\rangle = \langle O, u\rangle + \langle O, u\rangle,$$

e o resultado segue por cancelamento.

3. *Outra propriedade é que*

$$\langle u, v + \alpha \cdot w\rangle = \langle u, v\rangle + \alpha\langle u, w\rangle, \quad \textit{para todo} \quad u, v, w \in V, \alpha \in \mathbb{R}.$$

De fato, basta combinar as propriedades (P1), (P2) e (P3) acima.

4. *Desta maneira, vemos que o produto interno é um funcional linear em cada entrada, mais precisamente, para cada* $u \in V$ *temos que*

$$\langle \cdot, u\rangle : V \to \mathbb{R} \quad e \quad \langle u, \cdot\rangle : V \to \mathbb{R}$$

são funcionais lineares em V*.*

5. *Se o espaco vetorial* $(V, +, \cdot)$ *é complexo então* $\langle \cdot, \cdot\rangle : V \times V \to \mathbb{C}$ *será um produto interno se, e somente se, valem:*

(PC1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ *para todo* $u, v, w \in V$;

(PC2) $\langle \alpha \cdot u, v\rangle = \alpha\langle u, v\rangle$ *para todo* $u, v \in V$ *e* $\alpha \in \mathbb{C}$;

(PC3) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$ *para todo* $u, v \in V$, *onde* $\bar{z}$ *denota o conjugado do número complexo* z;

(PC4) $\langle u, u\rangle \geq 0$ *e se* $\langle u, u\rangle = 0$ *então* $u = O$.

Notemos que (P1)=(PC1), (P2)=(PC2), (P4)=(PC4) mas (P3) e (PC3) são diferentes.

A seguir apresentamos alguns exemplos de produto interno em vários espaços vetoriais reais.

Começaremos introduzindo um produto interno no $\mathbb{R}^n$, a saber:

Exemplo 13.3 *Sejam* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde + e · são as operações usuais de* $\mathbb{R}^n$*) e consideremos* $\langle \cdot, \cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle x, y\rangle \doteq x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n, \tag{13.4}$$

onde $x \doteq (x_1, \ldots, x_n), y \doteq (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Resolução:

De fato, sejam $x \doteq (x_1, \ldots, x_n), y \doteq (y_1, \ldots, y_n), z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.

Logo

$$x + z = (x_1 + z_1, \ldots, x_n + z_n), \tag{13.5}$$

$$\alpha \cdot x = (\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n) \tag{13.6}$$

Então

1. Vale (P1) pois:
$$\begin{aligned}\langle x+z, y\rangle &\overset{(13.5),(13.4)}{=} (x_1+z_1)y_1+\cdots+(x_n+z_n)y_n\\ &= x_1y_1+\cdots+x_ny_n+z_1y_1+\cdots+z_ny_n = \langle x,y\rangle+\langle z,y\rangle,\end{aligned}$$
logo vale (P1).

2. Vale (P2) pois:
$$\begin{aligned}\langle \alpha\cdot x, y\rangle &\overset{(13.6),(13.4)}{=} (\alpha x_1)y_1+\cdots+(\alpha x_n)y_n = \alpha(x_1y_1+\cdots+x_ny_n)\\ &= \alpha\langle x,y\rangle,\end{aligned}$$
logo vale (P2).

3. Vale (P3) pois:
$$\langle x,y\rangle \overset{((13.4)}{=} x_1y_1+\cdots+x_ny_n = y_1x_1+\cdots+y_nx_n = \langle y,x\rangle,$$
logo vale (P3).

4. Vale (P4) pois:
$$\langle x,y\rangle \overset{((13.4)}{=} x_1x_1+\cdots+x_nx_n = x_1^2+\cdots+x_n^2 \geq 0.$$
Logo $\langle x,y\rangle \geq 0$ e $\langle x,y\rangle = 0$ se, e somente se, $x_1 = \cdots, x_n = 0$, isto é, se $x = O$, logo vale (P4).

Portanto $\langle\cdot,\cdot\rangle$ é um produto interno em $(\mathbb{R}^n,+,\cdot)$.

Exemplo 13.7 *Com relação ao exemplo anterior, tomando-se* $n = 3$, *calcule o produto interno entre os vetores* $(1,-1,1),(0,2,4)\in\mathbb{R}^3$.

Resolução:

Temos que
$$\langle(1,-1,1),(0,2,4)\rangle \overset{(13.4)}{=} 1\cdot 0+(-1)\cdot 2+1\cdot 4 = 2.$$

Exemplo 13.8 *Com relação ao produto interno dado por (13.4), tomando-se* $n = 2$, *calcule* $\langle u,v\rangle$ *onde*
$$u \doteq (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) \quad e \quad v \doteq (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha)),$$
onde $\theta,\alpha\in\mathbb{R}$ *estão fixos.*

Resolução:

Temos que
$$\begin{aligned}\langle u,v\rangle &\overset{(13.4)}{=} \langle(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)),(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))\rangle\\ &= \cos(\theta)\cos(\alpha)+\operatorname{sen}(\theta)\operatorname{sen}(\alpha) \overset{[\text{exercício}]}{=} \cos(\theta-\alpha).\end{aligned}$$

Observação 13.9 *Observemos que no exemplo acima*

$$\langle u, v\rangle = 0 \iff \cos(\theta - \alpha) = 0 \iff \theta - \alpha = \frac{\pi}{2} + K\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

ou seja, $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2} + K\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ *se, e somente se,* $\langle u, v\rangle = 0$.

Há vários outros tipos de produto interno no $\mathbb{R}^n$ além do apresentado em (13.4).
A seguir exibiremos um outro exemplo de produto interno em $\mathbb{R}^3$:

Exemplo 13.10 *Sejam* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^3$*) e consideremos* $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle \doteq \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{3}y_1y_2 + \frac{1}{4}z_1z_2, \tag{13.11}$$

para $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

A expressão acima define um produto interno em $\mathbb{R}^3$.

Resolução:

De fato, sejam $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) \in \mathbb{R}^3$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
Logo

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \tag{13.12}$$
$$\alpha \cdot (x_1, y_1, z_1) = (\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha z_1) \tag{13.13}$$

Então

1. Vale (P1) pois:

$$\begin{aligned}
&\langle (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)\rangle \\
&\overset{(13.12),(13.11)}{=} \frac{1}{2}(x_1 + x_2)x_3 + \frac{1}{3}(y_1 + y_2)y_3 + \frac{1}{4}(z_1 + z_2)z_3 \\
&= [\frac{1}{2}x_1x_3 + \frac{1}{3}y_1y_3 + \frac{1}{4}z_1z_3] + [\frac{1}{2}x_2x_3 + \frac{1}{3}y_2y_3 + \frac{1}{4}z_2z_3] \\
&\overset{(13.11)}{=} \langle (x_1, y_1, z_1), (x_3, y_3, z_3)\rangle + \langle (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)\rangle
\end{aligned}$$

logo vale (P1).

2. Vale (P2) pois:

$$\begin{aligned}
\langle \alpha(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle &\overset{(13.13),(13.11)}{=} \frac{1}{2}(\alpha x_1)x_2 + \frac{1}{3}(\alpha y_1)y_2 + \frac{1}{4}(\alpha z_1)z_2 \\
&= \alpha[\frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{3}y_1y_2 + \frac{1}{4}z_1z_2 \overset{(13.11)}{=} \alpha\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)\rangle
\end{aligned}$$

logo vale (P2).

3. Vale (P3) pois:

$$\begin{aligned}\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle &\overset{((13.4)}{=} \frac{1}{2}x_1x_2 + \frac{1}{3}y_1y_2 + \frac{1}{4}z_1z_2 \\ &= \frac{1}{2}x_2x_1 + \frac{1}{3}y_2y_1 + \frac{1}{4}z_2z_1 = \langle (x_2, y_2, z_2), (x_1, y_1, z_1) \rangle,\end{aligned}$$

logo vale (P3).

4. Vale (P4) pois:

$$\begin{aligned}\langle (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1) \rangle &\overset{((13.4)}{=} \frac{1}{2}x_1x_1 + \frac{1}{3}y_1y_1 + \frac{1}{4}z_1z_1 \\ &= \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{3}y_1^2 + \frac{1}{4}z_1^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Logo $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1) \rangle \geq 0$ e $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_1, y_1, z_1) \rangle = 0$ se, e somente se, $x_1 = y_1 = z_1 = 0$, isto é, se $(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0)$, logo vale (P4).

Portanto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Exemplo 13.14 *Com relação ao produto interno apresentado no exemplo anterior, calcule* $\langle (1, -1, 1), (0, 2, 4) \rangle$.

Resolução:

Temos que

$$\langle (1, -1, 1), (0, 2, 4) \rangle \overset{(13.11)}{=} \frac{1}{2}(1.0) + \frac{1}{3}(-1.2) + \frac{1}{4}(1.4) = \frac{1}{3}.$$

□

Para o espaço das funções contínuas em um intervalo fechado e limitado temos o:

Exemplo 13.15 *Sejam* $(C([a, b]; \mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $C([a, b]; \mathbb{R})$*) e consideremos* $\langle \cdot, \cdot \rangle : C([a, b]; \mathbb{R}) \times C([a, b]; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle f, g \rangle \doteq \int_a^b f(x)g(x)\, dx, \tag{13.16}$$

para $f, g \in C([a, b]; \mathbb{R})$.

Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *é um produto interno em* $C([a, b]; \mathbb{R})$.

Resolução:

De fato, se $f, g, h \in C([a, b]; \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ temos:

Então

1. Vale (P1) pois:

$$\begin{aligned}\langle f + g, h \rangle &\overset{(13.16)}{=} \int_a^b (f + g)(x)h(x)\, dx \int_a^b f(x).h(x)\, dx + \int_a^b g(x)h(x)\, dx \\ &= \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle,\end{aligned}$$

logo vale (P1).

2. Vale (P2) pois:

$$\langle \alpha \cdot f, g\rangle \overset{(13.16)}{=} \int_a^b (\alpha f)(x)g(x)\,dx\alpha \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \alpha\langle f, g\rangle,$$

   logo vale (P2).

3. Vale (P3) pois:

$$\langle f, g\rangle \overset{(13.16)}{=} \int_a^b f(x)g(x)\,dx \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g, f\rangle,$$

   logo vale (P3).

4. Vale (P4) pois:

$$\langle f, f\rangle \overset{(13.16)}{=} \int_a^b f(x)f(x)\,dx \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0.$$

   Lembremos do Cálculo 1 que se $f \in C([a, b]; \mathbb{R})$ e $f(x_o) \neq 0$ para algum $x_o \in [a, b]$ então $\int_a^b f^2(x)\,dx > 0$.
   Logo $\langle f, f\rangle \geq 0$ e se $\langle f, f\rangle = 0$ deveremos ter $f = O$, logo vale (P4).

Portanto $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é um produto interno em $(C([a, b]; \mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exemplo 13.17 *Com relação ao produto interno apresentado no exemplo anterior, calcule o produto interno entre as funções seno e co-seno definidas no intervalo* $[0, 2\pi]$.

Resolução:

Sejam $f, g : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ dadas por

$$f(x) \doteq \text{sen}(x) \quad \text{e} \quad g(x) \doteq \cos(x), \qquad x \in [0, pi].$$

Logo $f, g \in C([0, 2\pi]; \mathbb{R})$ e

$$\langle f, g\rangle \overset{(13.16)}{=} \int_0^{2\pi} \text{sen}(x)\cos(x)\,dx \overset{[\text{exercício}]}{=} \left.\frac{\text{sen}^2 x}{2}\right|_0^{2\pi} = 0.$$

Para o espaço das matrizes de ordem $m \times n$ temos o

Exercício 13.18 *Sejam* $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$*) e consideremos* $\langle \cdot, \cdot\rangle : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_{m\times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$\langle A, B\rangle \doteq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}, \tag{13.19}$$

onde $A \doteq (a_{ij}), B \doteq (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.
Mostre que $\langle \cdot, \cdot\rangle$ *é um produto interno em* $M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Resolução:

De fato, sejam $A \doteq (a_{ij}), B \doteq (b_{ij}), C \doteq (c_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$.
Logo

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \tag{13.20}$$
$$\alpha \cdot A = (\alpha a_{ij}) \tag{13.21}$$

Então

1. Vale (P1) pois:

$$\begin{aligned}\langle A+B, C\rangle &\overset{(13.20),(13.19)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})c_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{ij} = \langle A, C\rangle + \langle B, C\rangle,\end{aligned}$$

   logo vale (P1).

2. Vale (P2) pois:

$$\begin{aligned}\langle \alpha \cdot A, B\rangle &\overset{(13.21),(13.19)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(\alpha a_{ij})b_{ij} \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \alpha\langle A, B\rangle,\end{aligned}$$

   logo vale (P2).

3. Vale (P3) pois:

$$\langle A, B\rangle \overset{((13.19)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ij}a_{ij} = \langle B, A\rangle,$$

   logo vale (P3).

4. Vale (P4) pois:

$$\langle A, A\rangle \overset{((13.19)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}a_{ij} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 \geq 0.$$

   Logo $\langle A, A\rangle \geq 0$ e $\langle A, A\rangle = 0$ se, e somente se, $a_{ij} = 0$, para todo $i = 1, \cdots, m$ e todo $j = 1, \cdots n$, isto é, deveremos ter $A = O$, logo vale (P4).

Portanto $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Exemplo 13.22 *Com relação ao produto interno apresentado no exemplo anterior, tomando-se $m = n = 2$, calcule o produto interno entre*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Resolução:

Temos que

$$\langle A, B \rangle = \langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \rangle \overset{(13.19)}{=} 1 \cdot (-2) + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0.$$

□

Observação 13.23 *Lembremos que o traço de uma matriz quadrada A é a soma dos elementos da diagonal da matriz e é denotado por $\operatorname{tr}(A)$.*

Um outro modo de introduzir o produto interno acima é dado pelo:

Exemplo 13.24 *Sejam $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ espaço vetorial real (onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $M_{m\times n}(\mathbb{R})$) e consideremos $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_{m\times n}(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por*

$$\langle A, B \rangle \doteq \operatorname{tr}(B^t A), \tag{13.25}$$

onde $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

Mostre que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $M_n(\mathbb{R})$.

Resolução:

Notemos que se $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ então $B^t \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$, logo podemos fazer o produto $B^t \cdot A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ (ou seja, será uma matriz quadrada de ordem n), logo podemos calcular o seu traço.

Notemos também que do Apêndice I segue que se $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ então $\operatorname{tr}(B^t A) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} b_{ij}$.

Logo se $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ teremos:

1. Vale (P1) pois:

$$\langle A + B, C \rangle \overset{(13.25)}{=} \operatorname{tr}[C^t(A + B)] = \operatorname{tr}[C^t A + C^t B] \overset{[\text{Apêndice I}]}{=} \operatorname{tr}(C^t A) + \operatorname{tr}(C^t B) = \langle A, C \rangle + \langle B, C \rangle,$$

logo vale (P1).

2. Vale (P2) pois:

$$\langle \alpha \cdot A, B \rangle \overset{(13.25)}{=} \operatorname{tr}[C^t(\alpha A)] \overset{[\text{Apêndice I}]}{=} \alpha \operatorname{tr}(B^t A) = \alpha \langle A, B \rangle,$$

logo vale (P2).

3. Vale (P3) pois:

$$\begin{aligned}\langle A, B\rangle &\overset{((13.25)}{=} \operatorname{tr}(B^t A) \overset{[\text{Apêndice I}]}{=} \operatorname{tr}[(B^t A)^t] \\ &\overset{[\text{Apêndice I}]}{=} \operatorname{tr}[A^t \underbrace{(B^t)^t}_{=B}] \operatorname{tr}(A^t B) = \langle B, A\rangle,\end{aligned}$$

logo vale (P3).

4. Vale (P4) pois:

$$\langle A, A\rangle \overset{((13.25)}{=} \operatorname{tr}(A^t A) \overset{[\text{Apêndice I}]}{\geq} 0.$$

Logo $\langle A, A\rangle \geq 0$ e $\langle A, A\rangle = 0$ se, e somente se, $a_{ij} = 0$, para todo $i = 1, \cdots, m$ e todo $j = 1, \cdots n$, isto é, deveremos ter $A = O$, logo vale (P4).

Portanto $\langle \cdot, \cdot\rangle$ é um produto interno em $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Observação 13.26 *Em vista do Apêndice I temos que, se* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *então*

$$\operatorname{tr}(B^t A) = \operatorname{tr}[(B^t A)^t] = \operatorname{tr}[A^t (B^t)^t] = \operatorname{tr}(A^t B),$$

ou seja, poderíamos ter definido o produto interno do exemplo acima por

$$\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(A^t B)$$

que teríamos o mesmo resultado.

13.2 Norma

Definição 13.27 *Seja* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real munido de um produto interno. Dado* $u \in V$ *definimos a* <u>norma do vetor u</u>*, denotada por* $\|u\|$*, como sendo*

$$\|u\| \doteq \sqrt{\langle u, u\rangle}.$$

Observação 13.28 *Note que é possível extrair a raiz quadrada de* $\langle u, u\rangle$ *pois, pela propriedade (P4), temos que* $\langle u, u\rangle \geq 0$.

Consideremos alguns exemplos:

Exemplo 13.29 *No espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *munido o produto interno dado por (13.4) temos que a norma do vetor* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ *será dada por*

$$\|x\| \doteq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Observação 13.30 *No curso de Geometria Analítica vimos que a norma do vetor* $x \in \mathbb{R}^3$ *(ou em* $\mathbb{R}^2$*) nos fornece o comprimento do vetor* x.

Logo é natural pensarmos que a norma de um vetor em um espaço vetorial real munido de um produto interno nos forneça o comprimento do vetor em questão.

Exemplo 13.31 *No espaço vetorial* $(C([a,b];\mathbb{R}),+,\cdot)$ *munido do produto interno definido por (13.16) temos que a norma de* $f \in C([a,b];\mathbb{R})$ *será dada por*

$$\|f\| \doteq \sqrt{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}.$$

Exemplo 13.32 *No espaço vetorial* $(M_n(\mathbb{R}),+,\cdot)$ *munido do produto interno definido por (13.25) temos que a norma de* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *será dada por*

$$\|A\| \doteq \operatorname{tr}(A^t A).$$

Temos as seguintes propriedades para a norma associada a um produto interno em um espaço vetorial real:

Proposição 13.33 *Seja* $(V,+,\cdot)$ *um espaço vetorial com um produto interno.*

Então:

1. *para todo* $u \in V$ *e todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *temos*
$$\|\alpha \cdot u\| = |\alpha|\,\|u\|;$$
2. *para todo* $u \in V$ *temos*
$$\|u\| \geq 0;$$
3. *para todo* $u \in V$ *temos*
$$\|u\| = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad u = O;$$
4. *vale a* **desigualdade de Cauchy-Schwarz**, *isto é, para* $u, v \in V$ *temos*
$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|;$$
5. *vale a* **desigualdade triangular**, *isto é, se* $u, v \in V$ *temos*
$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Prova:

De 1.:

Observemos que

$$\|\alpha \cdot u\| = \sqrt{\langle \alpha \cdot u, \alpha \cdot u \rangle} = \sqrt{\alpha^2 \langle u, u \rangle} = \sqrt{\alpha^2}\sqrt{\langle u, u \rangle} = |\alpha|\sqrt{\langle u, u \rangle} = |\alpha|\,\|u\||,$$

completando a verificação.

De 2.:

Segue do fato que raiz quadrada é não negativa.

De 3.:

Se $u = O$ então $\|u\| = \sqrt{\underbrace{\langle O, O \rangle}_{=0}} = 0$.

Reciprocamente, se $u \neq O$ então $\langle u, u \rangle > 0$ e assim $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle} > 0$, completando a verificação.

De 4.:

Se $v = O$ então $|\langle u, O \rangle| = 0$ e por outro lado $\|u\|\,\|O\| = 0$, em particular, teremos $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$.

Suponhamos que $v \neq O$.

Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, temos que $\|u + \alpha \cdot v\|^2 \geq 0$.

Logo,

$$\begin{aligned} 0 \leq \|u + \alpha \cdot v\|^2 &= \langle u + \alpha \cdot v, u + \alpha \cdot v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\langle u, v \rangle \alpha + \langle v, v \rangle \alpha^2 \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v \rangle\, \alpha + \|v\|^2 \alpha^2, \end{aligned}$$

cujo lado direito é um polinômio do 2.o grau na variável $\alpha \in \mathbb{R}$ (pois $\|v\|^2 \neq 0$).

Como ele deve ser maior ou igual a zero deverá possuir, no máximo, uma raiz real, ou seja, seu discriminante deverá ser menor ou igual a zero.

Mas o discriminante associado ao lado direito da desigualdade acima será dado por

$$\Delta \doteq 4\langle u, v \rangle^2 - 4\|u\|^2 \|v\|^2 \leq 0.$$

ou seja,

$$\langle u, v \rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2.$$

Extraindo a raiz quadrada, obtemos $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$, completando a verificação.

De 5.:

Observemos que

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v \rangle \\ &\overset{\text{[des. Cauchy-Schwarz]}}{\leq} \|u\|^2 + \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| = [\|u\| + \|v\|]^2. \end{aligned}$$

Extraindo a raiz quadrada, completamos a demonstração.

∎

Observação 13.34

1. *Um vetor que tem norma igual a* 1 *será dito* vetor unitário.

2. *Observe que a desigualdade de Cauchy-Schwarz aplicada ao produto interno do espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *dado por (13.4) nos diz que*

$$\underbrace{(x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n)^2}_{=\langle (x_1,\cdots,x_n),(y_1,\cdots,y_n)\rangle^2} \leq \underbrace{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}_{=\|(x_1,\cdots,x_n)\|^2} \underbrace{(y_1^2 + \cdots + y_n^2)}_{=\|(y_1,\cdots,y_n)\|^2}.$$

3. *A mesma desigualdade aplicada ao produto interno (13.16) no espaço vetorial real* $(C([a,b,];\mathbb{R}), +, \cdot)$ *fornecerá*

$$\underbrace{\left(\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right)^2}_{=\langle f,g\rangle^2} \leq \underbrace{\int_a^b [f(x)]^2\,dx}_{=\|f\|^2} \underbrace{\int_a^b [g(x)]^2\,dx}_{=\|g\|^2}.$$

4. *A mesma desigualdade aplicada ao produto interno (13.25) no espaço vetorial real* $(M_n(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *fornecerá*

$$\underbrace{\left(\operatorname{tr}(B^t A)\right)^2}_{=\langle A,B\rangle^2} \leq \underbrace{\operatorname{tr}(A^t A)}_{=\|A\|^2} \underbrace{\operatorname{tr}(B^t B)}_{=\|B\|^2}.$$

Proposição 13.35 (Identidade do Paralelogramo) *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *e* $u, v \in V$.

Então

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Prova:

Observemos que

$$\begin{aligned}
\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle + \langle u-v, u-v\rangle \\
&= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle + \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle - 2\langle u,v\rangle \\
&= 2\langle u,u\rangle + 2\langle v,v\rangle = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2),
\end{aligned}$$

completando a demonstração.

∎

O próximo resultado nos mostra como podemos obter o produto interno entre dois vetores a partir das normas da soma e diferença dos respectivos vetores, mais precisamente:

Proposição 13.36 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *e* $u, v \in V$.

Então

$$\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v\rangle,$$

ou, equivalentemente,

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2].$$

Prova:

Observemos que:

$$\begin{aligned}\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle - \langle u-v, u-v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle - \langle u,u\rangle - \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle \\ &= 4\langle u,v\rangle,\end{aligned}$$

completando a demonstração.

∎

Apliquemos isto ao:

Exercício 13.37 *Sejam* $(V,+,\cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $<\cdot,\cdot>$ *e* $u,v \in V$ *tais que*

$$\|u+v\| = 1 \quad e \quad \|u-v\| = 1.$$

Calcule $\langle u,v\rangle$.

Resolução:

Da proposição acima temos que

$$\langle u,v\rangle = \frac{1}{4}[\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2] = 0.$$

Observação 13.38 *Podemos ver geometricamente o que ocorre no exemplo acima se* $V = \mathbb{R}^3$ *(ou* $V = \mathbb{R}^2$*).*

Neste caso a conclusão do exemplo acima nos diz que os vetores u *e* v *são, do ponto de vista de Geometria Analítica, dois vetores ortogonais.*

13.3 Distância

Definição 13.39 *Seja* $(V,+,\cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $<\cdot,\cdot>$*.*

Definimos a função $d : V \times V \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$d(u,v) \doteq \|u-v\|, \quad u,v \in V,$$

denominada por <u>*em distância do vetor* u *ao vetor* v</u>*.*

A função distância satisfaz as seguintes propriedades.

Proposição 13.40 *Seja* $(V,+,\cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $<\cdot,\cdot>$*.*

Temos que

1. *para todo* $u,v \in V$ *segue que*
$$d(u,v) \geq 0;$$

2. *para todo* $u, v \in V$ *temos*

$$d(u,v) = 0 \quad \textit{se, e somente se,} \quad u = v;$$

3. *para todo* $u, v \in V$ *temos*

$$d(u,v) = d(v,u);$$

4. *para todo* $u, v, w \in V$ *temos*

$$d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v).$$

Prova:

De 1.:

Para todo $u, v \in V$ temos que

$$d(u,v) = \|u - v\| \overset{\text{[prop. (13.33) item 2.]}}{\geq} 0,$$

mostrando a afirmação.

De 2.:

Para todo $u, v \in V$ temos que

$$d(u,v) = 0 \iff \|u - v\| = 0 \overset{\text{[prop. (13.33) item 3.]}}{\iff} u - v = O \iff u = v,$$

mostrando a afirmação.

De 3.:

Para todo $u, v \in V$ temos que

$$d(u,v) = \|u - v\| = \|(-1) \cdot (v - u)\| \overset{\text{[prop. (13.33) item 1.]}}{=} \underbrace{|-1|}_{=1} \|v - u\| = d(v,u),$$

mostrando a afirmação.

De 4.:

Para todo $u, v, w \in V$ temos que

$$\begin{aligned} d(u,v) &= \|u - v\| = \|u - v - w + w)\| = \|(u - w) + (v - w)\| \\ &\overset{\text{[prop. (13.33) item 5.]}}{\leq} \|u - w\| + \|v - w\| = d(u,w) + d(w,v), \end{aligned}$$

completando a demonstração.

∎

Exemplo 13.41 *Com relação ao produto interno (13.4), no caso* $n = 4$*, calcule a distância entre os vetores* $u \doteq (1, 1, 3, 2)$ *e* $v \doteq (2, 2, 1, 0)$ *do* $\mathbb{R}^4$.

Resolução:

Temos

$$\begin{aligned} d(u,v) &= \|u - v\| = \|(1 - 2, 1 - 2, 3 - 1, 2 - 0)\| \\ &= \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{10}. \end{aligned}$$

Exemplo 13.42 *Com relação ao produto interno (13.16) calcule a distância entre as funções* f *e* g*, onde*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x) \quad e \quad g(x) \doteq \cos(x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

do espaço vetorial real $(C([0,2\pi];\mathbb{R}), +, \cdot)$.

Resolução:

Temos

$$\begin{aligned}
[d(f,g)]^2 = \|f-g\|^2 &= \int_0^{2\pi} [f(x)-g(x)]^2\,dx = \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}(x)-\cos(x)]^2\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} [\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)]\,dx = \int_0^{2\pi} [1-2\operatorname{sen}(x)\cos(x)]\,dx \\
&\overset{[\text{exercício}]}{=} x - \operatorname{sen}^2(x)\Big|_0^{2\pi} = 2\pi.
\end{aligned}$$

Portanto, $d(f,g) = \sqrt{2\pi}$.

13.4 Ângulo

Observação 13.43 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $<\cdot,\cdot>$ *e* $u, v \in V$ *vetores não nulos.*

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (veja proposição (13.33) item 4.) temos

$$-\|u\|\,\|v\| \leq \langle u, v\rangle \leq \|u\|\,\|v\|.$$

Como $u, v \neq O$*, da proposição (13.33) itens 2. e 3., segue que* $\|u\|, \|v\| > 0$*, logo dividindo-se ambos os membros da desigualdade acima por* $\|u\|\,\|v\|$*, obteremos:*

$$-1 \leq \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} \leq 1.$$

Desta forma, existe um único número real $\theta \in [0, \pi]$ *tal que*

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}. \tag{13.44}$$

Definição 13.45 *O número real* $\theta \in [0, \pi]$ *obtido acima será chamado de* <u>ângulo entre os vetores u e v</u>.

Observação 13.46 *Na situação acima teremos*

$$< u, v >= \|u\|\,\|v\|\cos(\theta).$$

Exemplo 13.47 *Calcule o ângulo entre as funções* f *e* g*, onde*

$$f(x) \doteq \operatorname{sen}(x) \quad e \quad g(x) \doteq \cos(x), \quad x \in [0, 2\pi]$$

definidas em $[0, 2\pi]$ *com o produto interno dado por (13.16).*

Resolução:

Observemos que

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(x)\cos(x)\,dx = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 x\Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Desta forma, o ângulo entre as funções f e g será $\frac{\pi}{2}$.

Temos também o

Exercício 13.48 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *e* $u, v \in V$ *tais que*

$$\|u\| = \|v\| = 1 \quad e \quad \|u - v\| = 2.$$

Calcule o ângulo entre os vetores u *e* v*.*

Resolução:

Como $\|u\| = \|v\| = 1$ temos que $u, v \neq O$.

Logo

$$\begin{aligned} 4 &\overset{[\|u-v\|=2]}{=} \|u - v\|^2 = \langle u - v, u - v\rangle \\ &= \|u\| + \|v\| - 2\langle u, v\rangle \overset{[\|u\|=\|v\|=1]}{=} 2 - 2\langle u, v\rangle, \end{aligned}$$

que implicará em $\langle u, v\rangle = -1$.

Portanto

$$\cos(\theta) = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = \frac{-1}{1.1} = -1,$$

implicando que $\theta = \pi$, ou seja, o ângulo entre os vetores (não nulos) u e v será π.

13.5 Ortogonalidade

Definição 13.49 *Sejas* $(V, +, \cdot)$ *espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$.

Diremos que os vetores u *e* v *são ortogonais em* V *se* $\langle u, v\rangle = 0$.

Neste caso, escreveremos $u \perp v$.

Diremos que um conjunto finito $S \doteq \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$ *é um conjunto ortogonal em* V *se* $u_i \perp u_j$ *para* $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq n$.

Diremos que um conjunto ortogonal $S \doteq \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ *é um conjunto ortonomal em* V *se* $\|u_j\| = 1$, $j = 1, \ldots, n$, *ou seja,*

$$< u_i, u_j >= \begin{cases} 1, & se \quad i = j \\ 0, & se \quad i \neq j \end{cases}.$$

Sejam $u \in V$ *e* $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. *Diremos que o vetor* u *é ortogonal ao conjunto* S *se o vetor* u *for ortogonal a todos os vetores de* S *(isto é,* $< u, v >= 0$ *para todo* $v \in S$*).*

Neste caso escreveremos $u \perp S$.

Exemplo 13.50 *Seja* $\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real munido do produto interno (13.4) (com* $n = 3$*).*

Mostre que a base canônica de $\mathbb{R}^3$*, isto é,* $\mathcal{B} \doteq \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ *é um conjunto ortonormal, relativamente ao produto interno (13.4).*

Resolução:

Sejam
$$e_1 \doteq (1,0,0), \; e_2 \doteq (0,1,0), \; e_3 \doteq (0,0,1).$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\langle e_1, e_1 \rangle &= \langle (1,0,0),(1,0,0) \rangle = 1.1 + 0.0 + 0.0 = 1,\\
\langle e_1, e_2 \rangle &= \langle (1,0,0),(0,1,0) \rangle = 1.0 + 0.1 + 0.0 = 0,\\
\langle e_1, e_3 \rangle &= \langle (1,0,0),(0,0,1) \rangle = 1.0 + 0.0 + 0.1 = 0,\\
\langle e_2, e_2 \rangle &= \langle (0,1,0),(0,1,0) \rangle = 0.0 + 1.1 + 0.0 = 1,\\
\langle e_2, e_3 \rangle &= \langle (0,1,0),(0,0,1) \rangle = 0.0 + 1.0 + 0.1 = 0,\\
\langle e_3, e_3 \rangle &= \langle (0,0,1),(0,0,1) \rangle = 0.0 + 0.0 + 1.1 = 1,
\end{aligned}$$

mostrando que $\mathcal{B}$ é um conjunto ortonormal, relativamente ao produto interno (13.4).

Observação 13.51

1. *Se* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *e* $u = O$ *ou* $v = O$ *então* $u \perp v$*.*

   De fato, pois se, por exemplo, $u = O$ *teremos*
   $$\langle u, v \rangle = \langle O, v \rangle = 0,$$
   mostrando que $u \perp v$*.*

2. *Se* $u, v \neq O$ *então* $u \perp v$ *se, e somente se, o ângulo entre os vetores* u *e* v *é* $\theta = \frac{\pi}{2}$*.*

   De fato, pois se $\theta \in [0, \pi]$ *é o ângulo entre os vetores* u *e* v *então, de (13.44), segue que*
   $$\langle u, v \rangle = \|u\| \, \|v\| \cos(\theta).$$
   Logo $u \perp v$ *se, e somente se,* $\cos(\theta) = 0$ *ou, equivalentemente,* $\theta = \frac{\pi}{2}$*, isto é, o ângulo entre os vetores* u *e* v *é* $\theta = \frac{\pi}{2}$*.*

3. *Se* $S = \{u_1, \ldots, u_n\} \subset V$ *é um conjunto ortogonal com* $u_j \neq O$*,* $j = 1, \ldots, n$ *então*
   $$\left\{ \frac{u_1}{\|u_1\|}, \ldots, \frac{u_n}{\|u_n\|} \right\}$$
   é um conjunto ortonormal.

De fato, pois para $i, j = 1, \cdots, n$ *temos, como* $u_i \neq O$ *segue que* $\|u_i\| \neq 0$*, logo*

$$\begin{aligned}\langle \frac{u_i}{\|u_i\|}, \frac{u_j}{\|u_j\|} \rangle &= \frac{1}{\|u_i\|\,\|u_j\|} \langle u_i, u_j \rangle \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\|u_i\|\,\|u_i\|} \langle u_i, u_i \rangle = \frac{1}{\|u_i\|\,\|u_i\|} \|u_i\|^2 = 1, & \textit{se} \quad j = i \\ 0, & \textit{se} \quad i \neq j \end{cases},\end{aligned}$$

mostrando que o conjunto S *é ortonormal.*

Proposição 13.52 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *e* $S = \{u_1, \dots, u_n\} \subseteq V$ *um conjunto ortonormal.*

Então $u_1, \dots, u_n$ *são linearmente independentes.*

Prova:

Sejam $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = O. \tag{13.53}$$

Logo fazendo o produto interno do vetor acima com u_1 e lembrando que

$$\langle u_1, u_1 \rangle = \|u_1\|^2 = 1 \quad \text{e} \quad \langle u_j, u_1 \rangle = 0,$$

para $j = 2, \dots, n$, obteremos

$$\begin{aligned} 0 = \langle O, u_1 \rangle &\overset{(13.53)}{=} \langle \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n, u_1 \rangle \\ &= \alpha_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{\langle u_1, u_2 \rangle}_{=0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\langle u_n, u_1 \rangle}_{=0} = \alpha_1, \end{aligned} \tag{13.54}$$

isto é, $\alpha_1 = 0$.

Logo (13.53) tornar-se-á

$$\alpha_2 \cdot u_2 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = 0. \tag{13.55}$$

Tomando o produto interno do vetor acima com u_2, obtemos,

$$\begin{aligned} 0 = \langle O, u_2 \rangle &\overset{(13.55)}{=} \langle \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3 \cdots + \alpha_n \cdot u_n, u_2 \rangle \\ &= \alpha_2 \underbrace{\langle u_2, u_2 \rangle}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{\langle u_3, u_2 \rangle}_{=0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\langle u_n, u_2 \rangle}_{=0} = \alpha_2, \end{aligned} \tag{13.56}$$

isto é, $\alpha_2 = 0$.

Repetindo o processo chegaremos à conclusão que a única possibilidade para (13.53) será $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, ou seja, os vetores $u_1, \cdots, u_n$ são l.i., completando a demonstração.

∎

Observação 13.57

1. *A proposição acima continua válida se S for apenas um conjunto ortogonal formado por vetores não nulos.*

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

2. *Se o espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$ munido de um produto interno tem dimensão n então, pela proposiçao acima, um conjunto ortonormal S de V que tem n elementos será uma base de V (pois o conjunto S será l.i.).*

   Por isto temos a:

Definição 13.58 *Seja $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real munido de um produto interno de dimensão n.*

Diremos que $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base ortonormal de V *se o conjunto $\mathcal{B}$ for um conjunto ortonormal.*

Com isto temos a

Proposição 13.59 *Sejam $(V, +, \cdot)$ é um espaço vetorial real munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ de dimensão n e $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \dots, u_n\}$ uma base ortonormal de V e $u \in V$.*

Então

$$u = \langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n.$$

Prova:

Como $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \dots, u_n\}$ é uma base de V, existem $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n.$$

Tomando o produto interno do vetor u com o vetor u_1 obteremos

$$\begin{aligned}\langle u, u_1 \rangle &= \langle \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \cdots + \alpha_n \cdot u_n, u_1 \rangle \\ &= \alpha_1 \underbrace{\langle u_1, u_1 \rangle}_{=1} + \alpha_2 \underbrace{\langle u_2, u_1 \rangle}_{=0} + \cdots + \alpha_n \underbrace{\langle u_n, u_1 \rangle}_{=0} = \alpha_1,\end{aligned}$$

pois a base $\mathcal{B}$ é ortonormal, isto é,

$$\alpha_1 = \langle u, u_1 \rangle.$$

Para $j = 2, \cdots, n$ temos, de modo análogo, que

$$\begin{aligned}\langle u, u_j \rangle &= \langle \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots \alpha_{j-1} \cdot u_{j-1} + \alpha_j \cdot u_j + \alpha_{j+1} \cdot u_{j+1} + \cdots + \alpha_n \cdot u_n, u_j \rangle \\ &= \alpha_1 \underbrace{\langle u_1, u_j \rangle}_{=0} + \cdots + \alpha_{j-1} \underbrace{\langle u_{j-1}, u_j \rangle}_{=0} + \alpha_j \underbrace{\langle u_j, u_j \rangle}_{=1} + \alpha_{j+1} \underbrace{\langle u_{j+1}, u_j \rangle}_{=0} \\ &\quad + \cdots + \alpha_n \underbrace{\langle u_n, u_j \rangle}_{=0} = \alpha_j,\end{aligned}$$

pois a base $\mathcal{B}$ é ortonormal, mostrando que

$$\alpha_j = \langle u, u_j \rangle,$$

completando a demonstração.

∎

Observação 13.60 *Na situação acima, para cada* $j = 1, \cdots, n$, *o vetor*

$$\langle u, u_j \rangle \cdot u_j$$

será denominado projeção ortogonal do vetor u na direção do vetor u_j.

Exemplo 13.61 *Seja* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real munido do produto interno (13.4) (com* $n = 2$*).*

Encontre as coordenadas e a matriz das coordenadas do vetor $u \doteq (1, 1) \in \mathbb{R}^2$ *em relação à base* $\mathcal{B} \doteq \{(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\}$.

Resolução:

Sejam

$$u_1 \doteq (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \quad \text{e} \quad u_2 \doteq (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$$

Observemos que $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ pois:

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_1 \rangle &= \langle (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,\\
\langle u_1, u_2 \rangle &= \langle (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,\\
\langle u_2, u_2 \rangle &= \langle (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \rangle = \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} + (-\frac{\sqrt{2}}{2}).(-\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.
\end{aligned}$$

Como a base $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal, pela proposição anterior, temos que

$$\begin{aligned}
u &= \langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \langle u, u_2 \rangle \cdot u_2\\
&= \langle (1, 1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \rangle \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + \langle (1, 1), (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}) \rangle \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})\\
&= \sqrt{2} \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) + 0 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}).
\end{aligned}$$

Desta forma a matriz coordenadas do vetor $u = (1, 1)$, em relação à base $\mathcal{B}$, será dada por

$$[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

□

Temos também a

Proposição 13.62 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *e* $U = [u_1, \ldots, u_n]$ *o subespaço gerado por um conjunto ortonormal* $S \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$.

Então, se $u \in V$ *temos que o vetor* $v \in V$ *dado por*

$$v \doteq u - \langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 - \cdots - \langle u, u_n \rangle \cdot u_n \quad (*)$$

é ortogonal a todo vetor $w \in U$, *isto é,* $v \perp U$.

Em particular, $v = O$ *se, e somente se,*

$$u = \langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n,$$

ou seja, se, e somente se, $u \in [u_1, \ldots, u_n]$.

Prova:

Seja $w \in U$.

Como S é um conjunto ortonormal de V que gera U, pela proposição (13.52), segue que S será uma base para o subespaço vetorial U.

Logo, existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$w = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot u_j.$$

Para mostrar que $v \perp U$ precisaremos mostrar que $\langle v, w \rangle = 0$.

Observemos que

$$\langle v, w \rangle = \langle v, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot u_j \rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle v, u_j \rangle.$$

Portanto, basta mostrar que $\langle v, u_j \rangle = 0$ para cada $j = 1, \ldots, n$.

Como $u_1, \ldots, u_n$ formam um conjunto ortonormal, para cada $j = 1, \cdots, n$, temos

$$\begin{aligned}
\langle v, u_j \rangle &\overset{(*)}{=} \langle u - \langle u, u_1 \rangle \cdots - \langle u, u_j \rangle \cdot u_j - \cdots - \langle u, u_n \rangle \cdot u_n, u_j \rangle \\
&= \langle u, u_j \rangle - \langle u, u_1 \rangle \langle u_1, u_j \rangle - \cdots - \langle u, u_j \rangle \langle u_j, u_j \rangle - \cdots - \langle u, u_n \rangle \langle u_n, u_j \rangle \\
&\overset{[\langle u_j, u_i \rangle = 0, \text{ se } i \neq j]}{=} \langle u, u_j \rangle - \langle u, u_j \rangle \underbrace{\langle u_j, u_j \rangle}_{=1} = \langle u_j, u \rangle - \langle u, u_j \rangle = 0,
\end{aligned}$$

completando a demonstração.

∎

Temos a

Proposição 13.63 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *e* U *um subespaço vetorial de* V.

Se $u \in U$ *e* $u \perp U$ *então* $u = O$.

Prova:

Como $u \in U$ e, por hipótese, o vetor u é ortogonal a todo vetor de U, teremos $u \perp u$ (pois $u \in U$) implicando que

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle = 0,$$

ou seja, $\|u\| = 0$, mostrando que $u = O$, como queríamos demonstrar.

∎

Como consequência temos a

Proposição 13.64 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$, $S \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ *e* $R \doteq \{v_1, \ldots, v_n\}$ *conjuntos ortonormais tais que* $[S] = [R]$.

Então, para $u \in V$, *temos*

$$\langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n = \langle u, v_1 \rangle \cdot v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle \cdot v_n.$$

Prova:

Seja $u \in V$.

Definamos $U \doteq [R] = [S]$,

$$w_1 \doteq u - (\langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n)$$

e

$$w_2 \doteq u - (\langle u, v_1 \rangle \cdot v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle \cdot v_n).$$

Pela proposição (13.62) temos $w_1, w_2 \perp U$. (*)

Logo, se $w \in U$, temos

$$\langle w_1 - w_2, w \rangle = \underbrace{\langle w_1, w \rangle}_{\stackrel{(*)}{=} 0} - \underbrace{\langle w_2, w \rangle}_{\stackrel{(*)}{=} 0} = 0,$$

isto é, $(w_1 - w_2) \perp U$.

Notemos também que

$$w_1 - w_2 = \langle u, v_1 \rangle \cdot v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle \cdot v_n - (\langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n) \in U.$$

Portanto, da proposição (13.63), segue que $w_1 - w_2 = O$, isto é,

$$\langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n = \langle u, v_1 \rangle \cdot v_1 + \cdots + \langle u, v_n \rangle \cdot v_n,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Podemos agora introduzir a

Definição 13.65 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$, $S \doteq \{u_1, \ldots, u_n\} \subseteq V$ *um conjunto ortonormal,* $U \doteq [u_1, \ldots, u_n]$ *e* $u \in V$.

O vetor $w \in V$ *dado por*

$$w \doteq \langle u, u_1 \rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle u, u_n \rangle \cdot u_n$$

será chamado de projeção ortogonal do vetor u sobre o subespaço U.

Observação 13.66 *Se* $(V, +, \cdot)$ *é um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *e* $v \in V$ *é um vetor não nulo.*

Então

$$S \doteq \{\frac{v}{\|v\|}\}$$

é um conjunto ortonormal.

Assim, se $u \in V$, a projeção ortogonal do vetor u sobre o subespaço vetorial $[S]$ nada mais será do que o vetor

$$w \doteq \langle u, \frac{v}{\|v\|}\rangle \cdot \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2} \cdot v.$$

Neste caso, por abuso de, diremos que o vetor w é chamado de projeção ortogonal do vetor u na direção do vetor v.

Notemos que o vetor não nulo v não é, necessariamente, unitário mas o vetor $\frac{v}{\|v\|}$ é unitário (ver da observação (13.60).

Apliquemos estas idéias ao

Exercício 13.67 *Considere o espaço vetorial real $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ munido do produto interno (13.4).*

Verifique que os vetores

$$u_1 \doteq (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \quad e \quad u_2 \doteq (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$$

formam um conjunto ortonormal.

Encontre a projeção ortogonal do vetor $u \doteq (2, 3, 1)$ sobre o subespaço gerado pelos vetores u_1 e u_2.

Resolução:

Temos que

$$\begin{aligned}
\langle u_1, u_1\rangle &= \langle(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}} + (-\frac{1}{\sqrt{3}}).(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1, \\
\langle u_1, u_2\rangle &= \langle(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}.\frac{1}{\sqrt{2}} + (-\frac{1}{\sqrt{3}}).\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}.0 = \frac{1}{\sqrt{6}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + 0 = 0, \\
\langle u_2, u_2\rangle &= \langle(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}.\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}).\frac{1}{\sqrt{2}}) + 0.0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1,
\end{aligned}$$

ou seja, $S \doteq \{u_1, u_2\}$ é um conjunto ortonormal.

Assim, a projeção ortogonal do vetor $u \doteq (2, 3, 1)$ sobre o subsepaço vetorial $[u_1, u_2]$ será dada pelo vetor

$$\begin{aligned}
w &\doteq \langle u, u_1\rangle \cdot u_1 + \langle u, u_2\rangle \cdot u_2 \\
&= \langle(2, 3, 1), (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})\rangle \cdot (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) + \langle(2, 3, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)\rangle \cdot (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0) \\
&= (\frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0).
\end{aligned}$$

Podemos aplicar as idéias acima ao

Exemplo 13.68 *Considere o espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_3(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *com o produto interno dado por*

$$\langle p, q\rangle \doteq \int_0^1 p(x)q(x)\,dx, \quad p, q \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}).$$

Encontre a projeção do vetor $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ *dado por*

$$p(x) = 1 + x + x^2 + x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

sobre o subespaço vetorial gerado pelo vetor q*, onde*

$$q(x) \doteq x^3 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Resolução:

Observemos que

$$\begin{aligned}\|q\|^2 &= \int_0^1 q^2(x)\,dx = \int_0^1 (x^3 - x)^2\,dx = \int_0^1 (x^6 + x^2 - 2x^4)\,dx = \left.\frac{x^7}{7} + \frac{x^3}{3} - \frac{2x^5}{5}\right|_0^1 \\ &= \frac{1}{7} + \frac{1}{3} - \frac{2}{5} = \frac{8}{105},\end{aligned}$$

logo $q \neq O$ e além disso

$$\begin{aligned}\langle p, q\rangle &= \int_0^1 p(x)q(x)\,dx = \int_0^1 (1 + x + x^2 + x^3)(x^3 - x)\,dx \\ &= \int_0^1 (-x - x^2 + x^5 + x^6)\,dx \overset{\text{[exercício]}}{=} -\frac{11}{21}.\end{aligned}$$

Assim a projeção ortogonal do vetor p sobre o subespaço vetorial gerado pelo vetor q, será dada pelo vetor $r \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$, onde

$$r(x) \doteq \frac{\langle p, q\rangle}{\|q\|^2} \cdot q(x) = -\frac{\frac{11}{21}}{\frac{8}{105}}(x^3 - x) \overset{\text{[exercício]}}{=} -\frac{55}{8}(x^3 - x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

13.6 Processo de Gram-Schmidt

A demonstração do próximo teorema fornece um método para se conseguir uma base ortonormal de um espaço euclideano finitamente gerado a partir de uma base dada.

Para isto temos o

Teorema 13.69 *Todo espaço vetorial real finitamente gerado, munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$*, possui uma base ortonormal.*

Prova:

A prova é por indução sobre a dimensão do espaço.

Seja $(V, +, \cdot)$ um espaço vetorial real munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ de dimensão finita.

Se $\dim(V) = 1$ então existe $v_1 \in V$, $v_1 \neq O$, tal que $V = [v_1]$.

Como $v_1 \neq O$, definindo-se

$$u_1 \doteq \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

segue que $\mathcal{B} \doteq \{u_1\}$ é um conjunto ortonormal e $V = [u_1]$, ou seja, $\mathcal{B}$ é uma base ortonormal do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.

Se $\dim V = 2$ então existem vetores $v_1, v_2 \in V$ l.i. tais que $V = [v_1, v_2]$, ou seja, $\mathcal{C} \doteq \{v_1, v_2\}$ é uma base do espaço vetorial real $(V, +, \cdot)$.

Definamos

$$u_1 \doteq \frac{v_1}{\|v_1\|}.$$

Nosso trabalho se resume em encontrar um vetor ortogonal ao vetor u_1 e que tenha norma 1.

Primeiramente vamos encontrar um vetor ortogonal ao vetor u_1.

Pela proposição (13.62), basta definirmos

$$u_2' \doteq v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1.$$

Temos que $u_2' \neq O$, pois os vetores v_1 e v_2 são linearmente independentes.

Resta agora <u>*normalizar*</u> o vetor u_2', isto é, definirmos

$$u_2 \doteq \frac{u_2'}{\|u_2'\|}.$$

Então

$$u_1 \doteq \frac{v_1}{\|v_1\|} \quad \text{e} \quad u_2 \doteq \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1\|}$$

formam uma base ortonormal de V.

Dado $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que tenhamos provado o teorema para todos os espaços vetorial real munido de um produto interno $< \cdot, \cdot >$ de dimensão $n - 1$.

Queremos provar que o mesmo é verdade para todo espaço vetorial real munido de um produto interno de dimensão n.

Se $\dim(V) = n \geq 2$ então existem $v_1, \ldots, v_n \in V$ que formam uma base de V.

Notemos que

$$U \doteq [v_1, \ldots, v_{n-1}]$$

é um subespaço vetorial do espaço vetorial $(V, +, \cdot)$ e tem dimensão $n - 1$.

Desse modo, usando a nossa hipótese de indução, é possível encontrar uma base ortonormal de U.

Denotaremos estes vetores da base ortonormal de U por $u_1, \ldots, u_{n-1}$.

Como $v_n \notin U$ (caso contrário $v_1, \cdots, v_n$ seriam l.d.) então, pela proposição (13.62), o vetor

$$u_n' \doteq v_n - \langle v_n, u_1 \rangle \cdot u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1} \rangle \cdot u_{n-1}$$

é um vetor não nulo e ortogonal a todos os elementos de U (portanto, ortogonal aos vetores $u_1, \ldots, u_{n-1}$).

Para finalizar, tomamos como base de V os vetores

$$u_1, \ldots, u_{n-1}, u_n$$

onde

$$u_n \doteq \frac{u_n'}{\|u_n'\|} = \frac{v_n - \langle v_n, u_1 \rangle \cdot u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1} \rangle \cdot u_{n-1}}{\|v_n - \langle v_n, u_1 \rangle \cdot u_1 - \cdots - \langle v_n, u_{n-1} \rangle \cdot u_{n-1}\|},$$

completando a demonstração.

∎

Observação 13.70

1. *Notemos que na demonstração do teorema acima partimos da existência de uma base do espaço vetorial e* **ortonormalizamos** *a mesma.*

2. *O procedimento de, partindo de uma base de um espaço vetorial, obter uma base ortonormal do mesmo (que foi o que fizemos na demonstração do terema acima) é conhecido como* processo de Gram-Schmidt.

3. *No caso de um espaço vetorial real munido de um produto interno tridimensional, se $\mathcal{B} \doteq \{v_1, v_2, v_3\}$ é uma base, então uma base ortonormal deste espaço pode ser dada pelos vetores*

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|},$$
$$u_2 = \frac{v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1}{\|v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle \cdot u_1\|}$$
$$u_3 = \frac{v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle \cdot u_2}{\|v_3 - \langle v_3, u_1 \rangle \cdot u_1 - \langle v_3, u_2 \rangle \cdot u_2\|}.$$

Apliquemos este processo aos seguintes exemplos:

Exemplo 13.71 *Encontre uma base ortonormal do espaço vetorial real $(W, +, \cdot)$ onde $+$ e $\cdot$ são as operações usuais de $\mathbb{R}^3$, munido do produto interno (13.4), como $n = 3$, onde*

$$W \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y = 0\}.$$

Resolução:

Observemos que W é um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ (verifique!).

Notemos também que $(x, y, z) \in W$ se, e somente se, $x = 2y$ ou, equivalentemente,

$$(x, y, z) = (2y, y, z) = y \cdot (2, 1, 0) + z \cdot (0, 0, 1),$$

ou seja,

$$W = [(2, 1, 0), (0, 0, 1)].$$

Desta forma $\mathcal{B} \doteq \{(2, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ será uma base de W (pois geram e são l.i.).

Definamos
$$u_1 \doteq (0,0,1),$$
pois este vetor é unitário (tem norma 1).

Pelo processo de Gram-Schmidt, o vetor u_2 será a projeção ortogonal, unitária, do vetor $v_2 \doteq (2,1,0)$ na direção do vetor u_1, isto é
$$u_2 \doteq \frac{v_2 - < v_2, u_1 > \cdot u_1}{\|v_2 - < v_2, u_1 > \cdot u_1\|}$$
$$= \frac{(2,1,0) - \langle (2,1,0),(0,0,1)\rangle \cdot (0,0,1)}{\|(2,1,0) - \langle (2,1,0),(0,0,1)\rangle \cdot (0,0,1)\|} = \frac{(2,1,0)}{\|(2,1,0)\|} \overset{[\text{exercício}]}{=} (\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, 0),$$
assim obtemos a base ortonormal $\{u_1, u_2\}$ para o espaço vetorial $(W, +, \cdot)$.

Podemos aplicar o mesmo processo para o

Exercício 13.72 *Encontre uma base ortonormal do espaço vetorial real* $(W, +, \cdot)$ *onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^4$, *munido do produto interno (13.4), como* $n = 4$, *onde*
$$W = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4; x + y + z + t = 0\}.$$

Resolução:

Observemos que W é um subespaço vetorial de $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ (verifique!).

Notemos também que

$(x,y,z,t) \in W$ se, e somente se, $x = -y - z - t$ ou, equivalentemente,
$$(x,y,z,t) = (-y-z-t, y, z, t) = y \cdot (-1,1,0,0) + z \cdot (-1,0,1,0) + t \cdot (-1,0,0,1),$$
ou seja,
$$W = [\underbrace{(-1,1,0,0)}_{\doteq v_1}, \underbrace{(-1,0,1,0)}_{\doteq v_2}, \underbrace{(1,0,0,-1)}_{\doteq v_3}].$$

Como os vetores $(-1,1,0,0), (-1,0,1,0), (-1,0,0,1)$ são linearmente independentes, segue-se que formam uma base do espaço vetorial real W (pois geram W).

Definamos
$$u_1 \doteq \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(-1,1,0,0)}{\|(-1,1,0,0)\|} = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0).$$

Pelo processo de Gram-Schmidt teremos
$$u_2 \doteq \frac{v_2 - < v_2, u_1 > \cdot u_1}{\|v_2 - < v_2, u_1 > \cdot u_1\|}$$
$$\frac{(-1,0,1,0) - \langle (-1,0,1,0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\rangle \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)}{\|(-1,0,1,0) - \langle (-1,0,1,0), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\rangle \cdot (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\|}$$
$$= \frac{(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)}{\|(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1, 0)\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0).$$

De modo análogo,

$$u_3 \doteq \frac{v_3 - < v_3, u_1 > \cdot u_1 - < v_3, u_2 > \cdot u_2}{\|v_3 - < v_3, u_1 > \cdot u_1 - < v_3, u_2 > \cdot u_2\|}$$
$$\frac{(-1,0,0,1) - \langle(-1,0,0,1), u_1\rangle \cdot u_1 - \langle(-1,0,0,1), u_2\rangle \cdot u_2}{\|(-1,0,0,1) - \langle(-1,0,0,1), u_1\rangle \cdot u_1 - \langle(-1,0,0,1), u_2\rangle \cdot u_2\|}.$$

Como

$$\langle(-1,0,0,1), u_1\rangle = \langle(-1,0,0,1), (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\langle(-1,0,0,1), u_2\rangle = \langle(-1,0,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

segue que

$$(-1,0,0,1) - \langle(-1,0,0,1), u_1\rangle u_1 - \langle(-1,0,0,1), u_2\rangle u_2$$
$$(-1,0,0,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0) - \frac{1}{\sqrt{6}}\frac{1}{\sqrt{6}}(-1,-1,2,0)$$
$$= (-1,0,0,1) + (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0) + (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3}, 0) = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1).$$

Desta forma,

$$u_3 \doteq \frac{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)}{\|(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)\|} = \frac{1}{2}\sqrt{3}(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, 1)$$

assim obtemos a base ortonormal $\{u_1, u_2, u_3\}$ para o espaço vetorial $(W, +, \cdot)$.

Exemplo 13.73 *Encontre uma base ortonormal do espaço vetorial real* $(\mathscr{P}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ *munido do produto interno*

$$\langle p, q\rangle \doteq \int_0^1 p(x)q(x)\,dx, \quad p, q \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R}).$$

Resolução:

Usaremos o processo de Gram-Schmidt para construir uma base ortonormal a partir da base formada pelos polinômios $p_o, p_1, p_2 \in \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ onde,

$$p_o(x) \doteq 1, \quad p_1(x) \doteq x, \quad p_2(x) \doteq x^2, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Temos que

$$\|p_o\|^2 = \int_0^1 p_o^2(x)\,dx = \int_0^1 1^2\,dx = 1$$

assim definimos

$$q_o(x) \doteq p_o(x) = 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Seguindo o processo de Gram-Schmidt, definimos

$$q_1(x) \doteq \frac{p_1 - \langle p_1, q_o\rangle q_o}{\|p_1 - \langle p_1, q_o\rangle q_o\|}.$$

Como

$$\langle p_1, p_o\rangle = \int_0^1 p_1(x) q_o(x)\, dx = \int_0^1 x\, dx = \frac{1}{2}$$

e

$$\|p_1 - \langle p_1, q_o\rangle q_o\|^2 = \int_0^1 [p_1(x) - \frac{1}{2} q_o(x)]^2\, dx = \int_0^1 (x - \frac{1}{2})^2\, dx \stackrel{[\text{exercício}]}{=} \frac{1}{12},$$

segue que

$$q_1(x) \doteq \frac{x - \frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}} = \underbrace{\sqrt{12}}_{=2\sqrt{3}}(x - \frac{1}{2}) = \sqrt{3}\,(2x - 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Por fim, definamos

$$q_2(x) \doteq \frac{p_2 - \langle p_2, q_o\rangle q_o - \langle p_2, q_1\rangle q_1}{\|p_2 - \langle p_2, q_o\rangle q_o - \langle p_2, q_1\rangle q_1\|}.$$

Como

$$\begin{aligned}
\langle p_2, q_o\rangle &= \int_0^1 p_2(x) q_o(x)\, dx = \int_0^1 x^2\, dx = \frac{1}{3}, \\
\langle p_2, q_1\rangle &= \int_0^1 p_2(x) q_1(x)\, dx = \sqrt{3}\int_0^1 x^2(2x-1)\, dx \stackrel{[\text{exercício }]}{=} \frac{\sqrt{3}}{6} \\
\|p_2 - \langle p_2, q_o\rangle q_o - \langle p_2, q_1\rangle q_1\|^2 &= \int_0^1 [p_2(x) - \langle p_2, q_o\rangle q_o(x) - \langle p_2, q_1\rangle q_1(x)]^2\, dx \\
&= \int_0^1 (x^2 - x + \frac{1}{6})^2\, dx \stackrel{[\text{exercício }]}{=} \frac{1}{180},
\end{aligned}$$

segue que

$$q_2(x) \doteq \underbrace{\sqrt{180}}_{=6\sqrt{5}}(x^2 - x + \frac{1}{6}) = \sqrt{5}\,(6x^2 - 6x + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Desta forma, uma base ortonormal de $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ é dada por $\{q_o, q_1, q_2\}$ onde

$$q_o(x) \doteq 1, \quad q_1(x) \doteq \sqrt{3}\,(2x-1) \quad \text{e} \quad q_2(x) \doteq \sqrt{5}\,(6x^2 - 6x + 1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

13.7 Complemento Ortogonal

Começaremos introduzindo a

Definição 13.74 *Sejam* $(V, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *e* U *um subespaço vetorial de* V.

Definimos o <u>complemento ortogonal de U</u>, *indicado por* $U^\perp$, *como sendo o conjunto*

$$U^\perp \doteq \{v \in V; \langle v, u\rangle = 0, \ \forall u \in U\}.$$

Com isto temos a

Proposição 13.75 *Na situação acima temos que* $U^\perp$ *é um subespaço vetorial de* V.

Prova:

Notemos que $O \in U^\perp$ pois $\langle O, u \rangle = 0$ para todo $u \in U$.

Se $v, w \in U^\perp$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então para todo $u \in U$, temos

$$\langle v + \alpha \cdot w, u \rangle = \underbrace{\langle v, u \rangle}_{[v \in U^\perp] \atop = 0} + \alpha \underbrace{\langle w, u \rangle}_{[w \in U^\perp] \atop = 0} = 0.$$

Portanto, $(v + \alpha \cdot w) \in U^\perp$, mostrando que $U^\perp$ é um subespaço vetorial de V.

∎

Observação 13.76 *Se o espaço vetorial real* $(V, +, \cdot)$, *munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$, *tem dimensão finita então* $v \in U^\perp$ *se, e somente se, o vetor* v *é ortogonal a todos os vetores de uma base qualquer de* U.

De fato, se $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \cdots, u_n\}$ *é uma base de* U *então se* $u \in U$ *existem escalares* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n.$$

Portanto $v \in U^\perp$ *se, e somente se,*

$$\begin{aligned} \langle v, u \rangle = 0 \ \textit{para todo}\ u \in U \ &\Leftrightarrow \ \langle v, \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \rangle = 0 \ \textit{para todo}\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \ \alpha_1 \langle v, u_1 \rangle + \cdots + \alpha_n \langle v, u_n \rangle = 0 \ \textit{para todo}\ \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R} \\ &\Longleftrightarrow \ \langle v, u_1 \rangle = \cdots = \langle v, u_n \rangle = 0, \end{aligned}$$

ou seja, o vetor v *é ortogonal a todos os vetores da base* $\mathcal{B}$ *de* U.

Apliquemos estas idéias ao

Exemplo 13.77 *Consideremos o espaço vetorial real* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ *munido do produto interno (13.4) e*

$$U \doteq \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - y - z = 0\}.$$

Encontre o subespaço vetorial $U^\perp$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que U é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3, +, \cdot)$.

Temos $(x, y, z) \in U$ se, e somente se, $x = y + z$ ou, equivalentemente,

$$(x, y, z) = (y + z, y, z) = y \cdot (1, 1, 0) + z \cdot (1, 0, 1),$$

ou seja,

$$U = [(1, 1, 0), (1, 0, 1)].$$

Logo os vetores $(1,1,0)$ e $(1,0,1)$ formam uma base de U (pois geram e são l.i., verifique!).

Assim, da observação acima, $(x,y,z) \in U^{\perp}$ se, e somente se,

$$\langle (x,y,z),(1,1,0)\rangle = 0 \qquad \text{e} \qquad \langle (x,y,z),(1,0,1)\rangle = 0,$$

ou seja,

$$\begin{cases} x+y=0 \\ x+z=0 \end{cases} \iff (x,y,z) = x\cdot(1,-1,-1), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Assim,

$$U^{\perp} = [(1,-1,-1)].$$

Teorema 13.78 *Sejam* $(V,+,\cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot,\cdot >$*, de dimensão finita e* U *um subespaço vetorial de* V.

Então $V = U \oplus U^{\perp}$.

Prova:

Dado $v \in V$, consideremos o vetor w que é a projeção ortogonal do vetor v sobre U, isto é,

$$w \doteq \langle v,u_1\rangle \cdot u_1 + \cdots + \langle v,u_n\rangle \cdot u_n,$$

onde $\mathcal{B} = \{u_1,\cdots,u_n\}$ é uma base ortonormal de U.

Observemos que

$$v = w + (v-w).$$

Logo, pela proposição (13.62), como $w \in U$ teremos que $(v-w)\perp U$, ou seja, para todo $u \in U$, $\langle v-w,u\rangle = 0$, logo , $v = \underbrace{w}_{\in U} + \underbrace{(v-w)}_{U^{\perp}} \in U + U^{\perp}$, mostrando que $V = U + U^{\perp}$.

Agora, se $u \in U \cap U^{\perp}$ então $\langle u,u\rangle = 0$ e, portanto, $u = O$, ou seja, $V = U \oplus U^{\perp}$, completando a demonstração.

∎

13.8 Isometria

Definição 13.79 *Sejam* $(U,+,\cdot)$ *e* $(V,+,\cdot)$ *espaços vetoriais reais munidos de produtos internos.*

Diremos que $T \in \mathscr{L}(U,V)$ *é uma* <u>isometria de U em V</u> *se*

$$\langle T(u_1),T(u_2)\rangle = \langle u_1,u_2\rangle, \qquad \textit{para todo} \quad u_1,u_2 \in U.$$

Observação 13.80 *Note que os produtos internos acima, embora representados pelo mesmo símbolo, são produtos internos de* V *e de* U*, respectivamente, isto é, de modo rigoroso, deríamos escrever*

$$\langle T(u_1),T(u_2)\rangle_U = \langle u_1,u_2\rangle_V, \qquad \textit{para todo} \quad u_1,u_2 \in U.$$

Para simplificar a notação omitiremos os índices U *e* V *nos respectivos produtos internos envolvidos na igualdade.*

Com isto temos o

Exercício 13.81 (Rotação em $\mathbb{R}^2$) *Sejam $\theta \in \mathbb{R}$ fixado, $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ espaço vetorial real munido do produto interno (13.4) e $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ dada por*

$$T(x, y) \doteq (x\cos(\theta) - y\,\text{sen}(\theta), x\,\text{sen}(\theta) + y\cos(\theta)), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Mostre T é uma isometria de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

Se $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ temos que

$$\begin{aligned}
\langle T(x_1, y_1), T(x_2, y_2)\rangle &= \langle (x_1\cos(\theta) - y_1\,\text{sen}(\theta), x_1\,\text{sen}(\theta) + y_1\cos(\theta)),\\
&\qquad (x_2\cos(\theta) - y_2\,\text{sen}(\theta), x_2\,\text{sen}(\theta) + y_2\cos(\theta))\rangle\\
&\overset{[\text{exercício}]}{=} x_1x_2(\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta))\\
&\qquad - y_1x_2(-\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta) + \cos(\theta)\,\text{sen}(\theta))\\
&\qquad - x_1y_2(\cos(\theta)\,\text{sen}(\theta) - \cos(\theta)\,\text{sen}(\theta))\\
&\qquad + y_1y_2(\cos^2(\theta) + \text{sen}^2(\theta))\\
&= x_1x_2 + y_1y_2 = \langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle,
\end{aligned}$$

mostrando que T é uma isometria de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$.

Temos o

Teorema 13.82 *Sejam $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ espaços vetoriais reais munidos de produtos internos e $T \in \mathscr{L}(U, V)$.*

São equivalentes:

1. *T é uma isometria de U em V;*
2. *$\|T(u)\| = \|u\|$ para todo $u \in U$;*
3. *$\|T(u) - T(v)\| = \|u - v\|$ para todo $u, v \in U$;*
4. *Se $\{u_1, \dots, u_n\} \subseteq U$ é um conjunto ortonormal então $\{T(u_1), \dots, T(u_n)\}$ será um conjunto ortonormal em V.*

Prova:

$(1. \Longrightarrow 2.)$:

Como $T \in \mathscr{L}(U, V)$ é uma isometria temos que

$$\langle T(u), T(v)\rangle = \langle u, v\rangle \quad \text{para todo} \quad u, v \in U. \quad (*)$$

Em particular, tomando $u = v$, obteremos

$$\|T(u)\|^2 = \langle T(u), T(u)\rangle \overset{(*)}{=} \langle u, u\rangle = \|u\|^2, \quad \text{para todo} \quad u \in U,$$

ou seja, $\|T(u)\| = \|u\|$, para todo $u \in U$, mostrando que 2. ocorrerá.

$\underline{(2. \Longrightarrow 3.)}$:

Para todo $u, v \in U$, temos

$$\|T(u) - T(v)\| \overset{[T \text{ é linear}]}{=} \|T(u - v)\| \overset{[2.]}{=} \|u - v\|,$$

mostrando que 3. ocorrerá.

$\underline{(3 \Longrightarrow 1)}$:

Note que

$$\|T(u) + T(v)\| \overset{[v = -(-v) \text{ e } T \text{ é linear}]}{=} \|T(u) - T(-v)\| \overset{[3.]}{=} \|u - (-v)\| = \|u + v\|. \quad (**)$$

Pela proposição (13.36), para todo $u, v \in U$ temos

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \frac{1}{4}(\|T(u) + T(v)\|^2 - \|T(u) - T(v)\|^2)$$
$$\overset{(**)}{=} \frac{1}{4}(\|u + v\|^2 - \|u - v\|^2) = \langle u, v \rangle,$$

mostrando que 1. ocorrerá.

$\underline{(1 \Longrightarrow 4)}$:

Se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ é um conjunto ortonormal de U então, como T é uma isometria, temos

$$\langle T(u_i), T(u_j) \rangle = \langle u_i, u_j \rangle = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

ou seja, $\{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é um conjunto ortonormal, mostrando que 4. ocorrerá.

$\underline{(4 \Longrightarrow 1)}$:

Seja $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal de U.

Por hipótese temos que $\mathcal{C} \doteq \{T(u_1), \ldots, T(u_n)\}$ é uma conjunto ortonormal.

Logo se $u, v \in U$, existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n \quad \text{e} \quad v = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n.$$

Como isto obteremos

$$\langle T(u), T(v) \rangle = \langle T[\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i], T[\sum_{j=1}^n \beta_j \cdot u_j] \rangle$$
$$\overset{[T \text{ é linear}]}{=} \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot T(u_i), \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot T(u_j) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \underbrace{\langle T(u_i), T(u_j) \rangle}_{=\delta_{ij}}$$
$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i. \tag{13.83}$$

Por outro lado,

$$\langle u, v \rangle = \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot u_i, \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot u_j \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \beta_j \underbrace{\langle u_i, u_j \rangle}_{=\delta_{ij}}$$
$$= \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i. \tag{13.84}$$

Comparando as expressões (13.83) e (13.84), concluímos que T é uma isometria de U em V, completando a demonstração.

∎

Como consequência temos o

Corolário 13.85 *Sejam* $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais munidos de produtos internos e* $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *uma isometria de* U *em* V.

Então a transformação linear T *é injetora.*

Prova:

Basta ver que se $T(u) = O$, como T é isometria, temos então

$$\|u\| \overset{\text{[teor. (13.82) item 2.]}}{=} \|T(u)\| = \|O\| = 0,$$

portanto, $u = O$, mostrando que a transformação linear T é injetora.

∎

Também como consequência temos o

Corolário 13.86 *Sejam* $(U, +, \cdot)$, $(V, +, \cdot)$ *espaços vetoriais reais munidos de produtos internos com e* $\dim(U) = \dim(V)$ *e* $T \in \mathscr{L}(U, V)$ *uma isometria de* U *em* V.

Então T *é um isomorfismo de* U *em* V.

Prova:

Como os espaços vetoriais reais $(U, +, \cdot)$ e $(, +, \cdot)V$ têm a mesma dimensão e, pelo corolário acima, a transformação linear T é injetora, segue-se, do corolário (9.57), que a transformação linear T é uma bijeção, isto é, um isomorfismo de U em V.

∎

Apliquemos isto ao

Exercício 13.87 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real munido do produto interno (13.4) e* $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ *tal que a matriz do operador linear* T *com relação a uma base ortonormal de* $\mathbb{R}^2$ *é dada por*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pergunta-se: T *é uma isometria em* $\mathbb{R}^2$ *?*

Resolução:

Vejamos, se $\mathcal{B} \doteq \{u, v\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^2$ e

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

é a matriz de uma isometria $S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ com relação a esta base então

$$S(u) = a \cdot u + c \cdot v, \tag{13.88}$$

$$S(v) = b \cdot u + d \cdot v. \tag{13.89}$$

Pelo teorema anterior deveremos ter

$$\underbrace{\|S(u)\|}_{\overset{(13.88)}{=}\sqrt{a^2+c^2}} = \|u\| = 1 \quad \text{e} \quad \|S(v)\|_{\overset{(13.89)}{=}\sqrt{b^2+d^2}}\|v\| = 1.$$

Além do mais,

$$\underbrace{\langle S(u), S(v)\rangle}_{\overset{(13.88),(13.89)}{=} ab+bd} = \langle u, v\rangle = 0.$$

Logo deveremos ter

$$\begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases}.$$

Deste modo, o operador linear T **<u>não</u>** pode se uma isometria pois, por exemplo, $a^2 + c^2 = 1^2 + (-2)^2 = 5 \neq 1$.

Observação 13.90 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *espaço vetorial real finitamente gerado, munido de um produto interno,* $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ *uma base ortonormal de* U *e* $T \in \mathscr{L}(U)$ *uma isometria.*

1. *Encotremos a matriz do operador linear* T *em relação à base* $\mathcal{B}$.

   Consideremos $M \doteq [T]_B = (a_{ij})$.

   Para cada $j = 1, \cdots, n$ *temos que*

$$T(u_j) = a_{1j} \cdot u_1 + \cdots + a_{nj} \cdot u_n,$$

   assim

$$\begin{aligned} \langle T(u_i), T(u_j)\rangle &= \langle a_{1i} \cdot u_1 + \cdots + a_{ni} \cdot u_n, a_{1j} \cdot u_1 + \cdots + a_{nj} \cdot u_n\rangle \\ &= \langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \cdot u_k, \sum_{m=1}^{n} a_{mj} \cdot u_m\rangle = \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_{ki}a_{mj} \underbrace{\langle u_k, u_m\rangle}_{=\delta_{km}} \\ &= \sum_{k=1}^{n} a_{ki}a_{kj} = a_{1i}a_{1j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} \end{aligned}$$

   por outro lado temos

$$\langle T(u_i), T(u_j)\rangle = \langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \textit{se } i = j \\ 0, & \textit{se } i \neq j \end{cases},$$

   ou seja, para cada $j = 1, \cdots, n$ *deveremos ter*

$$a_{1i}a_{1j} + \cdots + a_{ni}a_{nj} = \delta_{ij}.$$

   Portanto, as colunas da matriz M*, quando vistas como vetores do* $(\mathbb{R}^n$*, são vetores ortonormais no espaço vetorial* $\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*, munido do produto interno (13.4).*

2. *Vale observar também que*

$$M^t M \overset{[exercício]}{=} (a_{1i}a_{1j} + \cdots + a_{ni}a_{nj}) = I_n.$$

Uma matriz quadrada com a propriedade acima será chamada de matriz ortogonal.

Deixaremos para o leitor o

Exercício 13.91 *Sejam* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ *tais que* $AB = I_n$.
Mostre que $BA = I_n$ *e, portanto,* $B = A^{-1}$.

Observação 13.92

1. *Em particular, o exercício acima nos diz que se uma matriz* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *é uma matriz ortogonal então ela será uma matriz inversível e além disso, sua matriz inversa será sua matriz transposta, isto é,*

$$M^{-1} = M^t.$$

2. *Observemos que a equação*

$$MM^t = I_n$$

nos diz que as linhas da matriz M *quando vistas como vetores do* $\mathbb{R}^n$ *são vetores ortonormais no espaço vetorial* $\mathbb{R}^n, +, \cdot)$*, munido do produto interno (13.4).*

3. *Se a matriz* $M \in M_n(\mathbb{R})$ *é ortogonal então*

$$\begin{aligned} \det^2(M) &= \det(M).\det(M) \overset{[\det(M)=\det(M^t)]}{=} \det(M^t).\det(M) \\ &= \det(M^t M) = \det(I_n) = 1, \end{aligned}$$

isto é, $\det(M) = \pm 1$.

Conclusão: o determinante de uma matriz ortogonal será igual a ± 1.

4. *A recíproca deste fato* **não** *é verdadeira, isto é existem matriz quadradas* $A \in M_n(\mathbb{R})$ *de tal modo que* $\det(A) = \pm 1$ *mas a matriz* A **não** *é uma matriz ortogonal.*

Deixaremos como exercício para o leitor encontrar uma tal matriz.

13.9 Operador Autoadjunto

Definição 13.93 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *e* $T \in \mathscr{L}(U)$.

Diremos que o operador linear T *é um* operador autoadjunto em U *se*

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle,$$

para todo $u, v \in U$.

Com isto temos o

Exemplo 13.94 *Sejam* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *espaço vetorial real munido do produto interno (13.4) e* $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ *dado por*

$$T((x,y)) \doteq (ax + by, bx + cy), \quad (X, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Verifique que o operador linear T *é um operador autoadjunto em* $\mathbb{R}^2$*.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

Se $(x, y), (z, t) \in \mathbb{R}^2$ temos

$$\langle T(x,y), (z,t)\rangle = \langle (ax + by, bx + cy), (z,t)\rangle = axz + byz + bxt + cyt.$$

Por outro lado,

$$\langle (x,y), T(z,t)\rangle = \langle (x,y), (az + bt, bz + ct)\rangle = axz + bxt + byz + cyt.$$

Comparando as expressões vemos que

$$\langle T(x,y), (z,t)\rangle = \langle (x,y), T(z,t)\rangle,$$

mostrando que o operador linear T é um operador autoadjunto em $\mathbb{R}^2$.

Observação 13.95 *Encotremos a matriz do operador do exemplo anterior com relação à base ortonormal* $\mathcal{B} \doteq \{(1,0), (0,1)\}$*.*

Para isto temos que

$$T((1,0)) = (a.1 + b.0, b.1 + c.0) = (a, b) = a \cdot (1,0) + b \cdot (0,1),$$
$$T((0,1)) = (a.0 + b.1, b.0 + c.1) = (b, c) = b \cdot (1,0) + c \cdot (0,1),$$

assim

$$[T]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ou seja, é uma <u>*matriz simétrica*</u> *(pois* $[T]_{\mathcal{B}}^t = [T]_{\mathcal{B}}$*).*

Isto, como vermos no próximo teorema, não é uma simples coincidência.

Teorema 13.96 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *de dimensão finita e* $T \in \mathscr{L}(U)$*.*

O operador linear T *será um operador autoadjunto em* U *se, e somente se, a matriz do operador linear* T *em relação a uma base ortonormal de* U *for um matriz simétrica.*

Prova:

Sejam $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ uma base ortonormal e $A = (a_{ij})$ a matriz do operador linear T em relação à base $\mathcal{B}$.

Com isto temos que

$$T(u_k) = a_{1k} \cdot u_1 + \cdots + a_{nk} \cdot u_n = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot u_m, \tag{13.97}$$

para todo $k = 1, \ldots, n$.

Logo

$$\begin{aligned} \langle T(u_i), u_j \rangle &\overset{[(13.97) \text{ com } k=i]}{=} \langle \sum_{m=1}^{n} a_{mi} \cdot u_m, u_j \rangle = \sum_{m=1}^{n} a_{mi} \underbrace{\langle u_m, u_j \rangle}_{=\delta_{mj}} \\ &= a_{ji}. \end{aligned} \tag{13.98}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle u_i, T(u_j) \rangle &\overset{[(13.97) \text{ com } k=j]}{=} \langle u_i, \sum_{m=1}^{n} a_{mj} \cdot u_m \rangle = \sum_{m=1}^{n} a_{mj} \underbrace{\langle u_i, u_m \rangle}_{=\delta_{im}} \\ &= a_{ij}. \end{aligned} \tag{13.99}$$

Suponha que o operador linear T seja um operador autoadjunto em U.

Logo de (13.98) e (13.99) segue que $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, \cdots, n$, ou seja, a matriz de T em relação à base ortonormal $\mathcal{B}$ é uma matriz simétrica.

Reciprocamente, suponha que a matriz (a_{ij}) do operador linear T em relação à base ortonormal $\mathcal{B} \doteq \{u_1, \ldots, u_n\}$ seja uma matriz simétrica.

Devemos mostrar que

$$\langle T(u), v \rangle = \langle u, T(v) \rangle, \quad u, v \in U.$$

Como $u, v \in U$, existem escalares $\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta_1, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$ tais que

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_n \cdot u_n = \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot u_m \quad \text{e} \quad v = \beta_1 \cdot u_1 + \cdots + \beta_n \cdot u_n = \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot u_k.$$

Então, como o produto interno é linear em cada uma de suas entradas e a base $\mathcal{B}$ é um base ortonormal de U, teremos

$$\begin{aligned} \langle T(u), v \rangle &= \langle T(\sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot u_m), v \rangle \overset{[T \text{ é linear}]}{=} \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_m \cdot T(u_m), v \rangle \\ &= \langle \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot T(u_m), \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot u_k \rangle = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_m \beta_k \langle T(u_m), u_k \rangle \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} \langle u, T(v) \rangle &= \langle u, T(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot u_k) \rangle \overset{[T \text{ é linear}]}{=} \langle u, \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot T(u_k) \rangle \\ &= \langle \sum_{m=1}^{n} \alpha_m \cdot u_m, \sum_{k=1}^{n} \beta_k \cdot T(u_k) \rangle = \sum_{m=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \alpha_m \beta_k \langle u_m, T(u_k) \rangle. \end{aligned}$$

Logo, basta mostrar que

$$\langle T(u_m), u_k\rangle = \langle u_m, T(u_k)\rangle, \quad m, k = 1, \cdots, n.$$

Como a matriz (a_{ij}) é a matriz do operdaor linear T em relação a esta base, e ela é uma matriz simétrica temos, por (13.98) e (13.99), que

$$\langle T(u_i), u_j\rangle = a_{ij} = a_{ji} = \langle u_i, T(u_j)\rangle,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Com isto temos o

Teorema 13.100 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *e* $T \in \mathscr{L}(U)$.

Se o operador linear T *é autoadjunto e* λ, μ *são autovalores distintos de* T *então os autovetores do operador* T *correspondentes a esses autovalores serão ortogonais.*

Prova:

Sejam u e v autovetores correspondentes a λ e μ respectivamente, isto é,

$$T(u) = \lambda \cdot u \quad \text{e} \quad T(v) = \mu \cdot v.$$

Com isto temos

$$\begin{aligned}(\lambda - \mu)\langle u, v\rangle &= \langle \lambda \cdot u, v\rangle - \langle u, \mu \cdot v\rangle = \langle T(u), v\rangle - \langle u, T(v)\rangle \\ &\overset{[T \text{ é autoadjunto}]}{=} \langle T(u), v\rangle - \langle T(u), v\rangle = 0.\end{aligned}$$

Como $\lambda \neq \mu$, segue-se que $\langle u, v\rangle = 0$. ∎

Finalizaremos este capítulo com o seguinte resultado que provaremos apenas no caso bidimensional. O caso unidimensional é trivial.

Para a prova no caso geral, indicamos a leitura do livro *Álgebra Linear,* de Elon L. Lima, Coleção Matemática Universitária [L].

Teorema 13.101 *Sejam* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial real munido de um produto interno* $< \cdot, \cdot >$ *de dimensão finita e* $T \in \mathscr{L}(U)$ *um operador autoadjunto em* U.

Então existe uma base ortonormal de U *formada por autovetores de* T.

Em particular, o operador linear T *será diagonalizável.*

Prova:

Faremos a demonstração do caso bidimensional.

Como comentamos acima, a demonstração do caso geral poderá ser encontrada em ([L]).

Seja $\mathcal{B} \doteq \{u, v\}$ uma base ortonormal de U.

Pelo teorema (13.96) segue que a matriz do operador linear T será uma matriz simétrica, ou seja, da forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

para algum $a, b \in \mathbb{R}$.

Desta forma, o polinômio característico associado ao operador linear T será da forma

$$p_T(\lambda) = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Como

$$\Delta = (a+c)^2 - 4(ac - b^2) = a^2 + c^2 - 2ac + 4b^2 = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$$

vemos que o polinômio p_T só apresenta raízes reais.

Se $a = c$ e $b = 0$ segue que a matriz A será da forma $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} = a.I_2$ e a própria base $\mathcal{B}$ serve para completar a prova do teorema.

Agora, se $a \neq c$ ou $b \neq 0$ então o polinômio p_T possui duas raízes reais distintas, isto é, o operador linear T apresenta dois autovalores reais e distintos.

Logo, pelo teorema (13.100), os autovetores u_1, u_2 correspondentes serão ortogonais e como são não nulos, pois são autovetores, serão l.i. .

Basta tomar como base para U o conjunto $\mathcal{B} \doteq \{\frac{u_1}{\|u_1\|}, \frac{u_2}{\|u_2\|}\}$ que está será uma base ortonormal de U (formada por autovetores de T), completando a demonstração.

∎

Como consequência temos o

Corolário 13.102 *Se a matriz $A \in M_n(\mathbb{R})$ é simétrica então ela é uma matriz diagonalizável.*

Prova:

Consideremos o espaço vetorial real $(M_{n\times 1}(\mathbb{R}), +, \cdot)$ munido do produto interno usual.

Observemos que se definirmos $T : M_{n\times 1}(\mathbb{R}) \to M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ por

$$T(X) \doteq AX, \quad X \in M_{n\times 1}(\mathbb{R}),$$

então T será um operador linear em $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ cuja matriz em relação a base canônica de $M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ (que é uma base ortonormal) será a matriz A, que é simétrica.

Logo do teorema (13.96) segue que o operador T será autoadjunto que, pelo teorema acima, deverá ser diagonalizável.

Portanto a matriz A será diagonalizável, completando a demonstração.

∎

13.10 Exercícios

Capítulo 14

Forma Canônica de Jordan

14.1 Introdução e Exemplos

Como vimos no capítulo anerior, nem todo operador linear é diagonalizável.

No entanto, se $(U, +, \cdot)$ é um espaço vetorial finitamente gerado e $T \in \mathscr{L}(U)$, existirá uma base com relação a qual, a matriz do operador linear T em relação a essa base ficará ”parecida” a uma matriz diagonal.

A seguir daremos uma pequena descrição de como é a forma desta tal matriz ”parecida” com uma matriz diagonal, mas antes precisamos de algumas notações.

Observação 14.1

1. *Seja* $p_T(\lambda)$ *o polinômio característico de* T.

   Observemos que, pelo Teorema Fundamental da Álgebra, o polinômio p_T *fatora-se como*

   $$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n} [(\lambda - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{p_1} \cdots [(\lambda - \alpha_k)^2 + \beta_k^2]^{p_k},$$

   onde $\lambda_i \neq \lambda_j$, *para* $i \neq j$, *com* $i, j = 1, \cdots, n$ *e* $(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s)$ *para* $r \neq s$, *como* $r, s = 1, \cdots k$.

   De modo geral, o Teorema Fundamental da Álgebra garante que podemos escrever o polinômio p_T *como produto de um número finito de fatores que serão potências naturais de polinômios irredutíveis do 1.o e do 2.o graus.*

2. *Notemos que cada escalar* $\alpha_r + i\beta_r$ *será uma raiz complexa (não real) do polinômio* p_T.

   Além disso temos

   $$m_1 + \cdots + m_n + 2p_1 + \cdots 2p_k = \dim(U).$$

3. *Se* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(que será uma rais real do polinômio* p_T*) e* $r \in \mathbb{N}$, *denotaremos por* $J(\lambda; r)$ *a matriz quadrada de ordem* r *cujos elementos da diagonal principal são iguais a*

λ e todos os elementos logo acima da mesma, iguais a 1, ou seja,

$$
\begin{aligned}
J(\lambda;k) &\doteq \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda \end{pmatrix}_{r\times r} \\
&= \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{r\times r} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{r\times r} \\
&= \lambda.I_r + N,
\end{aligned}
$$

onde I_r é a matriz identidade de ordem r e

$$
N \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}_{r\times r} .
$$

4. *Notemos que N^r é a matriz nula, isto é, a matriz N é uma matriz nilpotente (verifique!).*

5. *Se $\alpha+i\beta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ (que será uma raiz complexa, não real, do polinômio p_T) e $r \in \mathbb{N}$ é um número par, denotaremos por $R(\alpha,\beta;r)$ a matriz quadrada de ordem r definida por:*

$$
R(\alpha,\beta;r) \doteq \begin{pmatrix} \alpha & \beta & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\beta & \alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\beta & \alpha \end{pmatrix}_{r\times r} .
$$

6. *Se $B_1,\ldots,B_k$ são matrizes quadradas, não necessariamente de ordens iguais, denotaremos por $\operatorname{diag}(B_1,\ldots,B_k)$ a matriz quadrada de ordem igual à soma das ordens de $B_1,\ldots,B_k$ dada por: por*

$$
\operatorname{diag}(B_1,\ldots,B_k) \doteq \begin{pmatrix} B_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & B_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & B_k \end{pmatrix} .
$$

7. *Para ilustar se, por exemplo,*

$$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad e \quad B_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 0 \\ -4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}$$

então

$$\operatorname{diag}(B_1, B_2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 3 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Com isto temos o seguinte resultado cuja demonstração será omitida (para maiores detalhes ver [L]):

Teorema 14.2 (Forma Canônica de Jordan) *Sejam $(U, +, \cdot)$ um espaço vetorial de dimensão finita e $T \in \mathscr{L}(U)$ cujo polinômio característico é dado por*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n} [(\lambda - \alpha_1)^2 + \beta_1^2]^{p_1} \cdots [(\lambda - \alpha_k)^2 + \beta_k^2]^{p_k}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

onde $\lambda_i \neq \lambda_j$, para $i \neq j$, com $i, j = 1, \cdots, n$ e $(\alpha_r, \beta_r) \neq (\alpha_s, \beta_s)$ para $r \neq s$, como $r, s = 1, \cdots k$ e $\beta_r > 0$, para $r = 1, \cdots, k$.

Então existe uma base de U em relação a qual a matriz do operador linear T é da forma

$$J = \operatorname{diag}(J_1, \ldots, J_p, R_1, \ldots, R_q), \tag{14.3}$$

onde $J_1, \ldots,$ J_p são da forma $J(\lambda; r)$ para algum $r \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ e $R_1, \ldots, R_q$ são da forma $R(\alpha, \beta; s)$ para algum $s \in \mathbb{N}$ e $(\alpha, \beta) \in \{(\alpha_1, \beta_1), \ldots,$ $(\alpha_k, \beta_k)\}$.

Observação 14.4

1. *Pode-se mostrar que a matriz J em (14.3) é única, a menos de permutações dos seus* blocos *que compõem a sua diagonal.*

2. *Se λ é um autovalor real do operador linear T então a soma das ordens dos blocos do tipo $J(\lambda; s)$ será igual à multiplicidade algébrica do autovalor λ.*

3. *Se $\alpha + i\beta$ é uma raiz complexa, não real, do polinômio p_T (ou seja, um autovalor complçexo não real) então a soma das ordens dos blocos do tipo $R(\alpha, \beta; s)$ é igual ao dobro da multiplicidade algébrica da raiz $\alpha + i\beta$.*

4. *Se* λ *é um autovalor real do operador linear* T *com multiplicidade geométrica* r *então existem* r *blocos do tipo* $J(\lambda; s)$ *associados ao autovalor* λ.

5. *Suponha que*

$$p_T(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^{m_1} \cdots (\lambda_n - \lambda)^{m_n}$$

onde $\lambda_i \neq \lambda_j$, *se* $i \neq j$, *como* $i, j = 1, \cdots n$.

Se m_j *também é multiplicidade geométrica de* λ_j *então o teorema de Jordan nos diz que o operador linear* T *é diagonalizável (pois neste caso os blocos do tipo.* $R(\alpha, \beta; s)$ *não ocorrerão).*

6. *O Teorema de Jordan nos diz que a matriz de um operador linear* T *com relação a uma base arbitrária é semelhante a uma matriz da forma (14.3), que será denominada,* matriz de blocos.

Apliquemos estas idéias aos seguinte exemplos:

Exemplo 14.5 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *um espaço vetorial finitamente gerado e* $T \in \mathscr{L}(U)$.

Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan do operador linear T *cujo polinômio característico é dado por*

$$p_T(\lambda) = (2 - \lambda)^3 (1 - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Resolução:

Note que o operador linear T possui dois autovalores, a saber, $\lambda_1 \doteq 2$ e $\lambda_2 \doteq 1$ (pois são as únicas raizes do polinômio p_T).

Como as multiplicidades algébricas e geométrica do autovalor $\lambda_2 = 1$ são iguais a 1 (pois é uma raíz simples do polinômio p_T), temos que o único bloco correspondente a este autovalor será

$$J(\lambda_2; 1) = (1).$$

Com relação ao autovalor $\lambda_1 = 2$, a sua multiplicidade algébrica é três (é uma raíz tripla do polinômio p_T).

Se sua multiplicidade geométrica for 3 então existirão três blocos associados a este autovalor e todos eles são iguais a (2).

Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador será forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

isto é, o operador linear T será diagonalizável.

Se a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_1 = 2$ for 2, então existem dois blocos correspondentes a este autovalor que são da forma

$$J(2; 1) = (2) \qquad J(2; 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador linear será da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_1 = 2$ for 1, então existirá um bloco correspondente a este autovalor que é

$$J(2;3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Assim, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador linear será da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercício 14.6 *Para o exemplo acima encontre qual das possíveis formas da matriz de Jordan associada ao operador linear* T *é a que ocorrerá.*

Sugestão: encontre $V(\lambda_1)$.

Exemplo 14.7 *Seja* $(U, +, \cdot)$ *um esapço vetorial finitamente gerado e* $T \in \mathscr{L}(U)$.

Encontre as possíveis matrizes na forma canônica de Jordan de um operador linear T *cujo polinômio característico é dado por*

$$p_T(\lambda) = (1-\lambda)^2(4+\lambda^2), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Resolução:

Utilizando a notação do teorema (14.2) temos que

$$\lambda_1 = 1, \quad \alpha = 0 \quad \text{e} \quad \beta = 2.$$

Como $\alpha + i\beta = 0 + i2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ tem multiplicidade 1 (como raiz do polinômio p_T), associado ao mesmo só existe um bloco do tipo

$$R(0,2;2) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_1 = 1$ for 2 então existem apenas dois blocos associados a este autovalor e são iguais a (1).

Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador linear T será da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se a multiplicidade geométrica do autovalor $\lambda_1 = 1$ for 1 então existe apenas um bloco, de ordem dois, associado a este autovalor que será do tipo

$$J(1;2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Neste caso, a matriz da forma canônica de Jordan para este operador linear T será da forma:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Deixaremos a cargo do leitor o

Exercício 14.8 *Para o exemplo acima encontre qual das possíveis formas da matriz de Jordan associada ao operador linear* T *é a que ocorrerá.*

Exemplo 14.9 *Sejam* $(\mathbb{R}^4, +, \cdot)$ *espaço vetorial real (onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* $\mathbb{R}^4$*) e* $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ *dada por*

$$T(x, y, z, t) = (2x + y + z + t, 2y - z - t, 3z - t, 4t), \quad (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4.$$

Mostre que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$ *e encontre uma base de* $\mathbb{R}^4$ *com relação a qual a matriz do operador linear* T *está na forma canônica de Jordan.*

Resolução:

Deixaremos como exercício para o leitor verificar que $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^4)$.

Se $\mathcal{C}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^4$ temos que

$$\begin{aligned}
T((1,0,0,0)) &= (2,0,0,0) = 2 \cdot (1,0,0,0) + 0 \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 0 \cdot (0,0,0,1) \\
T((0,1,0,0)) &= (1,2,0,0) = 1 \cdot (1,0,0,0) + 2 \cdot (0,1,0,0) + 0 \cdot (0,0,1,0) + 0 \cdot (0,0,0,1) \\
T((0,0,1,0)) &= (1,-1,3,0) \\
&= 1 \cdot (1,0,0,0) + (-1) \cdot (0,1,0,0) + 3 \cdot (0,0,1,0) + 0 \cdot (0,0,0,1) \\
T((0,0,0,1)) &= (1,-1,-1,4) \\
&= 1 \cdot (1,0,0,0) + (-1) \cdot (0,1,0,0) + (-1) \cdot (0,0,1,0) + 4 \cdot (0,0,0,1)
\end{aligned}$$

logo a matriz do operador linear T com relação à $\mathcal{B}$ será dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

O polinômio característico associado ao operador liear T será dado por

$$p_T(\lambda) = (3-\lambda)(4-\lambda)(2-\lambda)^2, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Com isto podemos mostra que (verifique!)

$$V(3) = [(0,1,-1,0)] \quad \text{e} \quad V(4) = [(0,0,1,-1)].$$

Desta forma vemos que $\dim[V(3)] = \dim[V(4)] = 1$.

Vejamos qual a dimensão de $V(2)$.

Temos que $(x,y,z,t) \in V(2)$ se, e somente se,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{\text{[exercício]}}{\Longleftrightarrow} (x,y,z,t) = (x,0,0,0) = x \cdot (1,0,0,0), \ x \neq 0$$

Assim, $\dim[V(2)] = 1$ e o operador linear T não será diagonalizável.

Sendo assim, a matriz do operador linear T na forma canônica de Jordan será da seguinte forma:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Notemos que se pusermos

$$u_1 = (1,0,0,0), \quad u_3 = (0,1,-1,0) \quad \text{e} \quad u_4 = (0,0,1,-1)$$

(são autovetores do operdaor linear T) então para que u_1, u_2, u_3, u_4 seja a base procurada, o vetor u_2 deve satisfazer

$$T(u_2) = u_1 + 2 \cdot u_2, \ \text{ ou seja, } \ (T - 2.I)(u_2) = u_1 \ \text{ ou ainda , } \ \{[T]_{\mathcal{B}} - 2.I_4\}.[u_2]_{\mathcal{B}} = [u_1]_{\mathcal{B}}.$$

Desta forma, colocando-se $u = (a,b,c,d)$, temos que $[u]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$ e portanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

cuja solução geral é da forma $(a,1,0,0)$, para $a \in \mathbb{R}$ (verifque!).

Podemos tomar, por exemplo, $u_2 \doteq (0,1,0,0)$ e isto nos fornecerá a base procurada.

14.2 Exercícios

Capítulo 15

Apêndice I - Matrizes

15.1 Introdução

Neste capítulo trataremos de um elemento que é de grande importância, em particular, no estudo da ÁLgebra Linear, a saber: Matrizes.

Lembraremos a definição, as operações, propriedades das mesmas e algumas aplicações que são particularmente importantes para o nosso contexto.

Introduziremos o escalonamento de matrizes e apresentaremos algumas aplicações desse processo para resolução des sistemas lineares (homogêneos e não homoêneos) e para inversão de matrizes.

No segundo Apêndice apresentamos o método de Crammer para resolução de sistemas lineares.

15.2 Definições Básicas

Definição 15.1 *Uma matriz é uma tabela retangular de números reais ou complexos.*

Tais números são denominados entradas da matriz.

Uma matriz será sempre indicada por uma letra maiúscula: $A, B, C \ldots$.

Uma matriz horizontal será denominada matriz linha.

Uma matriz vertical será dita em matriz coluna.

O tamanho de uma matriz é o seu número de linhas pelo seu número de colunas.

Observação 15.2

1. *Em geral uma matriz, de tamanho* $n \times m$, *com entradas*

$$a_{ij}, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq j \leq m$$

tem a seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{n \times m}$$

onde $n, m \in \mathbb{N}$ *são fixos.*

2. *No caso acima diremos que a matriz* A *tem* $\underline{n}$ **linhas** *e* $\underline{m}$ **colunas**.

3. *Quando* $n = m$ *a matriz* A *será dita* quadrada de ordem n.

4. *No caso acima, as entradas* a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$ *formarão o que denominaremos de* diagonal principal.

Exemplo 15.3 *A matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ -3 \end{pmatrix}$$

é uma matriz (complexa) coluna de tamanho 3×1.

Exemplo 15.4 *A matriz*

$$B = \begin{pmatrix} 10 & 50 & \pi & e \end{pmatrix}$$

é uma matriz (real) linha de tamanho 1×4.

Exemplo 15.5 *A matriz (real)*

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

é uma matriz de tamanho 3×3, *logo quadrada de ordem* 3.

Motação 15.6 *Denotaremos por*

$$M_{nm}(\mathbb{R}) \doteq \{\textit{matrizes de tamanho } n \times m \textit{ que tem entradas números reais}\}$$

e de modo semelhante definimos

$$M_{nm}(\mathbb{C}) \doteq \{\textit{matrizes de tamanho } n \times m \textit{ que tem entradas números complexos}\}.$$

Quando $n = m$ *dentotaremso* $M_{nn}(\mathbb{R})$ *(ou* $M_{nn}(\mathbb{C})$*) simplesmante por* $M_n(\mathbb{R})$ *(ou* $M_n(\mathbb{C})$*), isto é,*

$$M_n(\mathbb{R}) \doteq \{\textit{matrizes de quadradas de oredm } n \textit{ que tem entradas números reais}\}$$

e de modo análogo definimos $M_n(\mathbb{C})$.

Para simplificar a notação acima, denotaremos o conjunto acima por M_{nm}, *quando não for importante o tipo de entradas da matriz (se reais ou complexas).*

Nos exemplos acima teremos que

$$A \in M_{31}(\mathbb{C}), \quad B \in M_{14}(\mathbb{R}) \quad \text{e} \quad C \in M_3(\mathbb{R}).$$

Definição 15.7 *Para* $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ *sejam* $A \in M_{nm}$ *e* $B \in M_{pq}$.

Diremos que as matrizes A *e* B *são* iguais, *escrevendo* $A = B$, *se e somente se*

$$n = p, \quad m = q \quad \textit{e} \quad a_{ij} = b_{ij}, \quad \textit{para } i = 1, \ldots, n \quad \textit{e} \quad j = 1, \ldots, m,$$

onde $A = (a_{ij})$ *e* $B = (b_{ij})$, *ou seja, duas matrizes são iguais serão iguais se, e somente se, têm o mesmo tamanho e as correspondentes entradas são iguais.*

15.3 Operações com Matrizes

Definição 15.8 *Para* $n, m, p, q \in \mathbb{N}$ *sejam* $A \in M_{nm}$, $B \in M_{pq}$.

Definiremos a adição das matrizes A e B, *indicada por* $A+B$, *se, e somente se,* $n = p$ *e* $m = q$ *e neste este caso, a matriz* $C \doteq A + B \in M_{nm}$ *terá como entradas*

$$c_{ij} \doteq a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, m,$$

onde $A = (a_{ij})$ *e* $B = (b_{ij})$.

Observação 15.9 *Logo se* $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ *e* $C = A + B$ *então*

$$(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij}).$$

Exemplo 15.10 *Se* $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & i \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ *então*

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1+i \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Com isso temos as seguintes propriedades:

Proposição 15.11

1. M_{nm} *é fechado como a operação de adição definida acima, isto é, a soma de duas matrizes* $n \times m$ *é uma matriz* $n \times m$;

2. *A adição em* M_{nm} *é comutativa, isto é,*

$$A + B = B + A, \quad \textit{para todo } A, B \in M_{nm};$$

3. *A adição em* M_{nm} *é associativa, isto é,*

$$(A + B) + C = A + B + C, \quad \textit{para todo } A, B, C \in M_{nm};$$

4. *A adição em* M_{nm} *tem elemento neutro, isto é, existe uma (única) matriz* $n \times m$, *denominada* matriz nula, *indicada por* O *tal que*

$$A + O = A, \quad \textit{para todo} \quad A \in M_{nm};$$

A matriz O *é a matriz de ordem* $n \times m$ *cujas entradas são todas zero, isto é,*

$$O \doteq (0_{ij}), \quad \textit{onde} \quad 0_{ij} \doteq 0, \quad 1 \leq i \leq n, \ 1 \leq j \leq m.$$

5. *A adição em M_{nm} adminte elemento oposto, isto é, se $A \in M_{nm}$, existe uma (única) matriz $n \times m$, denominada* oposta *da matriz A, denotada por $-A$ tal que*
$$A + (-A) = 0.$$
A matriz $-A$ é a matriz de ordem $n \times m$ cujas entradas são os opostos das correspondentes entradas da matriz A, isto é, se
$$A = (a_{ij}) \quad \text{então} \quad -A \doteq (-a_{ij}).$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Definição 15.12 *Se $A \in M_{nm}$ e $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) então a matriz $B \in M_{nm}$ cujas entradas são:*
$$b_{ij} = \alpha a_{ij}, \quad i = 1, \ldots, n, \, j = 1, \ldots, m,$$
será denominada produto do número real (ou complexo) α pela matriz A *e indicada por $\alpha \cdot A$.*

Observação 15.13 *Da definição acima temos que se $\alpha \in \mathbb{R}$ (ou $\alpha \in \mathbb{C}$) e $(a_{ij}) \in M_{nm}$ então*
$$\alpha \cdot (a_{ij}) = (\alpha a_{ij}).$$

Exemplo 15.14 *Se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $\alpha = -2$ então*
$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & -2 \\ -6 & -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Com isto temos as seguintes propriedades:

Proposição 15.15 *Para $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) e $A, B \in M_{nm}$ temos:*

1. *Vale a distributiva do produto de número real (ou complexo) pela soma de matrizes, isto é:*
$$\alpha \cdot (A + B) = \alpha \cdot A + \alpha \cdot B;$$
2. *Vale a distributiva da soma de números reais (ou complexos) pelo produto de matriz, isto é:*
$$(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha \cdot A + \beta \cdot B;$$
3. *Vale a associativa do produto de números reais (ou complexos) pelo produto de matrizes, isto é:*
$$(\alpha\beta) \cdot A = \alpha \cdot (\beta \cdot A);$$

4. *Vale*
$$1.A = A;$$

5. *Vale*
$$0.A = O.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Definição 15.16 *Sejam* $A = (a_{ik}) \in M_{nm}$, $B = (b_{kj}) \in M_{mp}$.

Definimos o produto da matriz A pela matriz B *como sendo a matriz* $C = (c_{ik}) \in M_{np}$, *indicada por* AB, *cujas entradas são dadas por*

$$c_{ij} \doteq \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj} \quad i = 1, \ldots, n, \quad j = 1, \ldots, p$$

Observação 15.17

1. *Para podermos realizar o produto de duas matrizes, isto é,* AB, *é necessário que o número de colunas da matriz* A *seja igual ao número de linhas da matriz* B.

2. *O produto* **não** *é comutativo, isto é, em geral* $AB \neq BA$, *como mostra o seguinte exemplo:*

   Se $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *então*
$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
   ou seja, neste caso,
$$AB \neq BA.$$

3. *Este modo de definir produto de matrizes é útil em diversas situações.*

   Entre outras, para transformarmos sistemas lineares de equações algébricas do 1.o grau em equações matriciais, como mostra o exemplo:
$$\begin{cases} z_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ z_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \\ z_3 = a_{31}y_1 + a_{32}y_2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad z = A \cdot y$$
   onde $z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, $A = (a_{ij})$ e $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

   Deixaremos como exercício para o leitor a verificação da igualdade acima.

Temos as seguintes propriedades para o produto de matrizes:

Proposição 15.18

1. *O produto de matrizes é associativo, isto é:*

$$A(BC) = (AB)C, \quad \textit{para todo} \quad A \in M_{nm},\, B \in M_{mp},\, C \in M_{pq};$$

2. *Vale a distributiva do protudo de matrizes pela soma de matrizes, isto é:*

$$A(B + C) = AB + AC, \quad \textit{para todo} \quad A \in M_{nm},\, B, C \in M_{mp};$$

3. *Vale a distributiva da soma de matrizes pelo produto de matrizes, isto é:*

$$(A + B)C = AC + BC, \quad \textit{para todo} \quad A, B \in M_{nm},\, C \in M_{mp};$$

4. *Vale a associativa do produto de números reais (ou complexos) por matrizes, isto é:*

$$\alpha(AB) = (\alpha A)(B) = A(\alpha B), \quad \textit{para todo} \quad \alpha \in \mathbb{R}(\textit{ ou } \mathbb{C}),\, A \in M_{nm},\, B \in M_{mp}.$$

Demonstração:
Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Com isto temos o seguinte exercício, cuja resolução deixaremos a cargo do leitor:

Ex. 15.19 *Mostre que* $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ *é solução da equação*

$$z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = 0,$$

onde $A^n \doteq \underbrace{A.A \dots A}_{n-vezes}$.

Definição 15.20 *A matriz* $I \in M_{nn}$ *cujas entradas são:*

$$a_{ij} \doteq \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & se \quad i \neq j \\ 1 & se \quad i = j \end{cases}$$

será denominada <u>matriz identidade</u> *de ordem* <u>n</u> *indicada por* I_n.

Proposição 15.21 *Se* $A \in M_{nm}$ *então*

$$I_n A = A I_m = A.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Observação 15.22 *Para números reais (ou complexos) temos a seguinte propriedade: se* $\alpha \neq 0$ *então existe* α^{-1} *tal que*

$$\alpha.\alpha^{-1} = 1.$$

*Para matrizes isto pode, em geral, **não** ocorrer como mostra o seguinte exemplo:*

Se $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *então **não** existe uma matriz* B *tal que*

$$AB = I_2. \quad (*)$$

De fato, se existisse a matriz $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$ *tal que que vale (*), então deveríamos ter*

$$AB = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$

para qualquer $b_{11}, b_{12} \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) mostrando que isto é impossível.*

Em vista disso temos a seguinte definição:

Definição 15.23 *Seja* $A \in M_{nn}$.

Se existir uma matriz $X \in M_{nn}$ *tal que*

$$AX = XA = I_n$$

então diremos que A *é uma matriz* <u>*inversível*</u>.

A matriz X *será dita uma matriz* <u>*inversa*</u> *da matriz* A.

Com isto temos o exercício:

Exercício 15.24 $X = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ *é uma matriz inversade da matriz* $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *pois (verifique!)*

$$AX = XA = I_1.$$

Temos a:

Proposição 15.25 *(Unicidade da inversa de uma matriz quadrada) Se* X *e* $\tilde{X} \in M_{nn}$ *são matrizes inversas da matriz* $A \in M_{nn}$ *então*

$$\tilde{X} = X.$$

Demonstração:

Observemos que se X e $\tilde{X}$ são inversas de A então teremos, em particular, que

$$XA = I_n \quad (1) \quad \text{e} \quad I_n = A\tilde{X}, \quad (2)$$

assim

$$X = XI_n \overset{(2)}{=\!=} X(A\tilde{X}) = (XA)\tilde{X} \overset{(1)}{=} I_n\tilde{X} = \tilde{X},$$

ou seja,

$$X = \tilde{X},$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação 15.26 *Logo se uma matriz quadrada admite uma matriz inversa esta será única, com isto podemos introduzir a seguinte definição.*

Definição 15.27 *Uma matriz $A \in M_{nn}$ que adminte uma matriz inversa será dita* <u>não singular</u>.

Neste caso a matriz inversa da matriz A será denotada por A^{-1}.

Uma matriz $A \in M_{nn}$ que **<u>não</u>** *admite matriz inversa será denominada* <u>singular</u>.

Com isto temos a:

Proposição 15.28 *Sejam $A, B \in M_{nn}$ matrizes não singulares.*

Então a matriz $AB \in M_{nn}$ é uma matriz não singular e

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Demonstração:

Como A é uma matriz não singular segue que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Mas B também é uma matriz não singular assim

$$BB^{-1} = B^{-1}B = I_n.$$

Portanto,

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I_n)B = B^{-1}B = I_n$$

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = (AI_n)A^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

Portanto a matriz AB é não singular e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, como queríamos demonstrar.

∎

Como conseqüência temos o:

Corolário 15.29 *Sejam* $A_1, \ldots, A_k \in M_{nn}$ *matrizes não singulares.*
Então a matriz $A_1 A_2 \ldots A_k \in M_{nn}$ *é uma matriz não singular e*

$$(A_1 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_1^{-1}.$$

Demonstração:
Basta usar a Proposição anterior e indução matemática.
Deixaremos os detalhes como exercício para o leitor.

∎

Observação 15.30

1. *Mostramos na proposição acima que o subconjunto das matrizes não singulares em* M_{nn} *é fechado em relação ao produto de matrizes, ou seja, se* A *e* $B \in M_{nn}$ *são não singulares então* AB *também será não singular.*

2. *Vimos num exemplo anterior que se* $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq O$ *e* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq O$ *mas* $AB = O$.

   Observemos que tanto A *quanto* B *são matrizes singulares (verifique!).*

   Se uma das duas fosse não singular isso **não** *poderia ocorrer, como mostra o resultado a seguir.*

Proposição 15.31 *Se* $A \in M_{nn}$ *é uma matriz não singular e a matriz* $B \in M_{np}$ *é tal que*

$$AB = O \in M_{np}$$

então

$$B = O.$$

Demonstração:
Como a matriz A é uma matriz não singular então

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n.$$

Mas,

$$B = I_n B = (A^{-1}A)B = A^{-1}(AB) = A^{-1}0 = 0 \quad \Rightarrow \quad B = 0,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação 15.32 *Uma aplicação para as propriedades desenvolvidas acima seria considerar a equação matricial:*

$$Ax\cdot = b \quad (*)$$

onde $A \in M_{nn}$, $B \in M_{n1}$ *são dados e* $x \in M_{n1}$ *a ser encontrada (se possível).*

Se A *é uma matriz não singular então*

$$x \doteq A^{-1} \cdot b$$

será a única solução da equação matricial (*).

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação deste fato.

Observemos que a equação matricial acima corresponde a um sistema linear de $\underline{n}$ *equações algébricas lineares a* $\underline{n}$ *incógnitas, logo as correspontes entradas da matriz coluna* $\underline{x}$ *serão as (únicas) soluções do sistema linear associado.*

15.4 Algumas matrizes importantes

Definição 15.33 *Uma matriz quadrada* $A \in M_n$ *será dita ser* <u>matriz diagonal</u> *se*

$$a_{ij} = 0 \quad \textit{para} \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \ldots, n.$$

Uma matriz quadrada $A \in M_n$ *será dita* <u>triangular superior</u> *se*

$$a_{ij} = 0, \quad \textit{para} \quad i > j, \quad , j = 1, \ldots, n.$$

Analogamente diremos que a matriz quadrada $A \in M_n$ *é* <u>triangular inferior</u> *se*

$$a_{ij} = 0, \quad \textit{para} \quad i < j, \quad , j = 1, \ldots, n.$$

Observação 15.34

1. *Uma matriz diagonal* $A \in M_n$*, deverá ser do seguinte tipo:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

2. *Uma matriz triangular superior* $A \in M_n$*, deverá ser do seguinte tipo:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

3. *Uma matriz triangular inferior* $A \in M_n$*, deverá ser do seguinte tipo:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Com isto temos as seguintes propriedades:

Proposição 15.35

1. *Se as matrizes* $A, B \in M_n$ *são matrizes diagonais então as matrizes* $A + B, AB$ *e* $\alpha \cdot A$ *serão matrizes diagonais, onde* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

2. *Se a matriz* $A = (a_{ij})$ *é uma matriz diagonal cuja diagonal principal não contém* 0 *(isto é,* $a_{ii} \neq 0$*,* $i = 1, \cdots, n$*), então a matriz* A *é uma matriz não singular (isto é, existe a matriz inversa da matriz* A*) e além disso*

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{a_{11}} & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{1}{a_{nn}} \end{pmatrix}.$$

3. *Se as matrizes* $A, B \in M_n$ *são matrizes tringulares superiores (inferiores, respectivamente) então as matrizes* $A + B, AB$ *e* αA *serão matrizes triangulares superior (inferior, respectivamente), onde* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

4. *Se a matriz* $A \in M_n$ *é triangular superior (inferior, repectivamente) cuja diagonal principal tem entradas não nulas então a matriz* A *é uma a matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa da matriz* A *e além disso a matriz* A^{-1} *também será uma matriz triangular superior (inferior, repectivamente).*

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

15.5 Determinante

Definição 15.36 *Seja* $A \in M_n$ *uma matriz quadrada.*

Se $n = 1$*, definimos o* <u>determinante da matriz A</u>*, denotado por* $\det(A)$*, como sendo*

$$\det(A) \doteq a_{11}.$$

Se $n > 1$*, para cada* $i, j \in \{1, \cdots, n\}$*, definamos a matriz* A_{ij}*, a matriz quadrada de ordem* $n - 1$*, obtida da matriz* A*, retirando-se a i-ésima linha e j-ésima coluna da matriz* A*, isto é,*

$$A_{ij} \doteq \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1(j-1)} & a_{1(j+1)} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{(i-1)1} & \dots & a_{(i-1)(j-1)} & a_{(i-1)(j+1)} & \dots & a_{(i-1)n} \\ a_{(i+1)1} & \dots & a_{(i+1)(j-1)} & a_{(i+1)(j+1)} & \dots & a_{(i+1)n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{n1} & \dots & a_{n(j-1)} & a_{n(j+1)} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Assumindo que o determinante de uma matriz de ordem $(n-1)\times(n-1)$ *já foi encontrado, definimos:*

$$\det(A) \doteq \sum_{j=1}^{n} a_{1j}|A_{1j}|$$

onde

$$|A_{1j}| \doteq (-1)^{1+j}\det(A_{ij}) \quad j=1,\ldots,n.$$

O número $|A_{ij}|$ *definido acima será denominado* <u>cofator do elemento a_{ij}</u> *da matriz* A *e a matriz* $B=(|A_{ij}|)$ *será denominada* <u>matriz cofatora da matriz A</u> *e denotada por* $\mathrm{cof}(A)$.

Com isto temos a:

Proposição 15.37

1. *Se* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ *então*

$$\det(A)=a_{11}a22-a_{21}a_{22};$$

2. *Se* $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ *então*

$$\det(A)=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

3. $\det(O)=0$, *onde* O *é a matriz nula, quadrada de ordem* $\underline{n}$*;*

4. $\det(I_n)=1$, , *onde* I_n *é a matriz identidade de ordem* $\underline{n}$*;*

5. *Se* $A\in M_n$ *é diagonal então*

$$\det(A)=a_{11}\ldots a_{nn},$$

onde $A=(a_{ij})$;

6. *Se* $A\in M_n$ *é triangular superior (inferior, respectivamente) então*

$$\det(A)=a_{11}\ldots a_{nn},$$

onde $A=a_{ij}$.

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Observação 15.38 *Poderíamos definir o determinantepor meio dos cofatores de qualquer coluna ou linha da matriz* A *que obteríamos o mesmo valor, isto é, para* $i_o \in \{1, \cdots, n\}$ *fixado temos que*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_o j} |A_{i_o j}|,$$

onde

$$|A_{i_o j}| \doteq (-1)^{i_o + j} \det(A_{i_o j}), \quad j = 1, \ldots, n,$$

ou, para $j_o \in \{1, \cdots, n\}$ *fixado temos que*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i j_o} |A_{i j_o}|,$$

onde

$$|A_{i j_o}| = (-1)^{i + j_o} \det(A_{i j_o}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Conclusão: para cada $i_o, j_o \in \{1, \cdots, n\}$ *fixados temos que*

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{i_o j} |A_{i_o j}| = \sum_{i=1}^{n} a_{i j_o} |A_{i j_o}|.$$

A seguir dexibiremos algumas propriedades importantes do determinante de uma matriz quadrada.

Para isto precisaremos da:

Definição 15.39 *Dada uma matriz* $A \in M_n$ *podemos realizar as seguintes operações com suas colunas (ou linhas, respectivamente):*

i) trocar duas colunas (ou linhas, respectivamente);

ii) multiplicar uma coluna (ou linha, respectivamente) por um $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) não nulo;*

iii) adicionar uma coluna (ou linha, respectivamente) multiplicada por α *a outra coluna (linha, respectivamente).*

Tais operações serão denominadas operações elementares *sobre as colunas (ou linhas, respectivamente) da matriz* A.

Com isto temos a:

Proposição 15.40 *Seja* $A \in M_n$.

Consideremos

$$B \doteq (a_{*1}, \ldots, a_{*(k-1)}, b_{*k}, a_{*(k+1)}, \ldots, a_{*n})$$

e

$$C \doteq (a_{*1}, \ldots, a_{*(k-1)}, c_{*k}, a_{*(k+1)}, \ldots, a_{*n})$$

onde a_{*k} *denota a* j*-ésima coluna da matriz* A *para* $j = 1, \cdots, n$ *(analogamente para as matrizes* B *e* C*) e seja* $k_o \in \{1, \cdots n\}$*.*

Para $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), se*

$$a_{*k_o} = \beta b_{*k_o} + \gamma c_{*k_o},$$

então

$$\det(A) = \beta \det(B) + \gamma \det(C).$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Observação 15.41 *Vale um resultado análogo ao da proposição acima para as correspondentes operações sobre as linhas da matriz, isto é, se*

$$B \doteq \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ b_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix}$$

e

$$C \doteq \begin{pmatrix} a_{1*} \\ \cdots \\ a_{(k-1)*} \\ c_{k*} \\ a_{(k+1)*} \\ \cdots \\ a_{n*}) \end{pmatrix}$$

onde a_{k*} *denota a* j*-ésima linha da matriz* A *para* $j = 1, \cdots, n$ *(analogamente para as matrizes* B *e* C*) e seja* $k_o \in \{1, \cdots n\}$*.*

Para $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*), se*

$$a_{k_o*} = \beta b_{k_o*} + \gamma c_{k_o*},$$

então

$$\det(A) = \beta \det(B) + \gamma \det(C).$$

Como conseqüência da Proposição temos o:

Corolário 15.42

1. *Se* $A \in M_n$ *então*

$$\det[a_{*1}, \ldots, a_{*(k-1)}, \beta a_{*k}, a_{*(k+1)}, \ldots, a_{*n}] = \beta \ \det[a_{*1}, \ldots, a_{*n}].$$

2. *Se* $A \in M_n$ *então*

$$\det[a_{*1}, \ldots, a_{*(k-1)}, b_{*k} + c_{*k}, a_{*(k+1)}, \ldots, a_{*n}]$$
$$= \det[a_{*1}, \ldots, a_{*(k-1)}, b_{*k}, a_{*(k+1)}, \ldots, a_{*n}]$$
$$+ \det[a_{*k}, \ldots, a_{*(k-1)}, c_{*k}, a_{*(k+1)}, \ldots, a_{*n}].$$

Demonstração:

De 1. :

Basta tomar $\gamma = 0$ na Proposição acima.

De 2. :

Basta tomar $\beta = \gamma = 1$ na Proposição acima.

∎

Observação 15.43

1. *O item 1. do corolário acima nos diz que o determinante de uma matriz que tem uma coluna (ou linha) multiplicada por uma constante pode ser obtido multiplicando-se o determinante da matriz pela constante.*

2. *O item 2. do corolário acima nos diz que o determinante de uma matriz que tem uma coluna (ou linha) obtida da soma de duas colunas pode ser obtido somando-se os determinante das matrizes que teêm cada uma das colunas adicionadas.*

3. *Vale um resultado análogo ao do corolário acima para as correspondentes operações sobre as linhas da matriz* A.

Conseqüência do Corolário acima temos o:

Corolário 15.44 *Se* $A \in M_n$ *e* $a_{*k_o} = 0$ *para algum* $1 \leq k_o \leq n$ *então*

$$\det(A) = 0.$$

Demonstração:

Basta tomar $\beta = 0$ no item 1. do Corolário acima.

∎

Observação 15.45

1. *O resultado acima nos diz que se uma coluna de uma matriz quadrada é nula então o determinante da matriz será zero.*

2. *Vale um resultado análogo ao do corolário acima para as correspondentes operações sobre as linhas da matriz* A.

Um outro resultado importante é dado pela:

Proposição 15.46 *Se* $A \in M_n$ *então*

$$\det(a_{*1}, \dots, a_{*k}, \dots, a_{*j}, \dots, a_{*n}) = -\det(a_{*1}, \dots, a_{*j}, \dots, a_{*k}, \dots, a_{*n}).$$

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

∎

Observação 15.47

1. *O resultado acima nos diz que se trocarmos duas colunas de uma matriz quadrada seu determinate muda de sinal.*
2. *Vale um resultado análogo trocando-se "coluna" por "linha", isto é, se trocarmos duas linhas de uma matriz quadrada seu determinate muda de sinal.*

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Como conseqüência da Proposição acima temos o:

Corolário 15.48 *Se* $A \in M_n$ *e*

$$a_{*k_o} = a_{*j_o}, \quad 1 \leq k_o, j_o \leq n$$

(isto é, se a matriz A *tem duas colunas iguais) então*

$$\det(A) = 0.$$

Demonstração:

Da Proposição acima segue que se trocarmos a k_o-ésima coluna com a j_o-ésima coluna o determinante da matriz obtida será menos o determinante da matriz A.

Mas a matriz obtida da troca da k_o-ésima coluna com a j_o-ésima coluna é a própria matriz A.

Com isto teremos:

$$\det(A) = -\det(A) \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 0,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação 15.49 *Vale um resultado análogo trocando-se "coluna" por "linha", isto é, ou seja, se a matriz* A *tem duas linhas iguais então seu determinate é nulo.*

A demonstração deste fato será deixada como exercício para o leitor.

Corolário 15.50 *Se* $A \in M_n$, $\gamma \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) e* $j \neq k$ *então*

$$\det(a_{*1}, \dots, a_{*j}, \dots, a_{*(k-1)}, a_{*k} + \gamma a_{*j}, a_{*(k+1)}, \dots, a_{*n}) = \det(A),$$

ou seja, se trocarmos uma coluna de uma matriz pela mesma somada com um múltiplo de uma outra coluna, o determinante da matriz obtida será igual ao da matriz inicial.

Demonstração:

Da Proposição (15.40) segue que

$$
\begin{aligned}
&\det(a_{*1}, \ldots, a_{*j}, \ldots, a_{*(k-1)}, a_{*k} + \gamma a_{*j}, a_{*(k+1)}, \ldots, a_{*n}) \\
&\qquad = \det(a_{*1}, \ldots, a_{*j}, \ldots, a_{*(k-1)}, a_{*k}, a_{*(k+1)}, \ldots, a_{*n}) \\
&\qquad\qquad + \beta \underbrace{\det(a_{*1}, \ldots, a_{*j}, \ldots, a_{*(k-1)}, a_{*j}, a_{*(k+1)}, \ldots, a_{*n})}_{\overset{[\text{Corolário } (15.48)]}{=} 0} \\
&\qquad = \det(a_{*1}, \ldots, a_{*j}, \ldots, a_{*(k-1)}, a_{*k}, a_{*(k+1)}, \ldots, a_{*n}),
\end{aligned}
$$

como queríamos demonstrar.

∎

Observação 15.51

1. *Valem um resultado análogo ao acima para a correspondente operaçao sobre as linhas das matrizes.*
2. *Resumindo: se* $A \in M_n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*) então:*
   - *(i) trocar duas colunas (ou linhas) da matriz* A *faz como que o determinante da matriz obtida seja menos determinante da matriz* A*;*
   - *(ii) adicionar* λ *vezes uma coluna (ou linha) da matriz* A *numa outra coluna (ou linha) faz com que o determinante da matriz obtida seja igual ao determinante da matriz* A*;*
   - *(iii) multiplicar uma coluna (ou linha) da matriz* A *por* λ *faz com que o determinante da matriz obtida seja igual ao determinante da matriz* A *multiplicado por* λ*.*

Além disso temos o seguinte resultado importante

Proposição 15.52 *Se* $A, B \in M_n$ *então*

$$\det(AB) = \det(A)\det(B).$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração da identidade acima.

∎

Uma outra operação que podemos fazer com uma matriz é:

Definição 15.53 *Se* $A \in M_{nm}$ *definimos a* <u>matriz transposta da matriz $A = (a_{ij})$</u>*, denotada por* A^t*, como sendo a matriz* $A^t = (b_{ij}) \in M_{mn}$ *dada por*

$$b_{ij} \doteq a_{ji}, \quad 1 \leq j \leq n \quad e \quad 1 \leq i \leq m.$$

Observação 15.54

1. *A relação que existem entre uma matriz e sua matriz transposta é que as colunas da 1.a serão as linhas da 2.a e vice-versa.*

2. *É fácil verificar que se* $m = n$ *então* A *e* $A^t \in M_n$.

Temos os seguintes exemplos:

Exemplo 15.55

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *então*

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ *então*

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix},$$

em particular, $A^t = A$.

Temos as seguintes propriedades para a transposição de uma matriz:

Proposição 15.56 *Sejam* $A, B \in M_n$.
Então temos:

1. $(A^t)^t = A$;

2. *se* $m = n$,
$$\det(A^t) = \det(A);$$

3. $(A + B)^t = A^t + B^t$;

4. $(AB)^t = B^t A^t$;

5. $(\alpha \cdot A)^t = \alpha \cdot A^t$;

6. *se* A *é uma matriz diagonal então*
$$A^t = A,$$
em particular,
$$I_n^t = I_n.$$

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a verificação das propriedades acima.

∎

Com isto podemos introduzir a seguinte definição:

Definição 15.57 *Seja $A \in M_n$ uma matriz quadrada de ordem n.*
Diremos que a matriz A é uma <u>matriz simétrica</u> *se*

$$A^t = A.$$

Diremos que a matriz A é uma <u>matriz anti-simétrica</u> *se*

$$A^t = -A.$$

Temos os seguintes exemplos:

Exemplo 15.58

1. *A matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ *é uma matriz simétrica, pois $A^t = A$ (verifique!);*

2. *A matriz* $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ *é uma matriz anti-simétrica, pois $B^t = -B$ (verifique!).*

Temos as seguintes propriedades para matrizes simétricas ou anti-simétricas:

Proposição 15.59 *Sejam $A, B \in M_{nn}$.*

1. *Se as matrizes A e B são matrizes simétricas então a matriz $A + B$ tamb ´me será uma matriz simétrica;*

2. *Se as matrizes A e B são matrizes anti-simétricas então a matriz $A + B$ também será uma matriz anti-simétrica;*

3. *Se a matriz A é matriz simétrica e $\alpha \in \mathbb{R}$ então a matriz $\alpha \cdot A$ também será uma matriz simétrica;*

4. *Se a matriz A é um matriz anti-simétrica e $\alpha \in \mathbb{R}$ então a matriz $\alpha \cdot A$ também será uma matriz anti-simétrica;*

5. *Se as matrizes A e B são matrizes simétricas então a matriz AB também será uma matriz simétrica se, e somente se, $AB = BA$.*

6. *Se as matrizes A e B são matrizes anti-simétricas então a matriz AB será uma matriz simétrica se, e somente se, $AB = BA$.*

6. *Se a matriz* A *é uma matriz simétrica e a matriz* B *é uma matriz anti-simétrica então a matriz* AB *será uma matriz anti-simétrica se, e somente se,* $AB = BA$.

Demonstração:

Do item 1.:

Se as matrizes A e B são matrizes simétricas então

$$A^t = A \quad \text{e} \quad B^t = B. \quad (*)$$

Como

$$(A+B)^t \overset{[\text{Prop. } (15.56) \text{ item 3.}]}{=} A^t + B^t \overset{(*)}{=} A + B,$$

segue que a matriz $A + B$ será uma matriz simétrica.

Os outros itens serão deixados como exercícios para o leitor.

∎

Como uma aplicação de determinantes e de transposição de matrizes temos o seguinte resultado:

Proposição 15.60 *Seja* $A \in M_n$ *uma matriz.*

A matriz A *é uma matriz não singular se, e somente se,* $\det(A) \neq 0$.

Neste caso

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[\operatorname{cof}(A)]^t$$

onde $\operatorname{cof}(A) = (|A_{ij}|)$.

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

∎

Com isto podemos resolver o:

Exemplo 15.61 *Verifique se a matriz quadrada de ordem* 3, $A \doteq \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, *é um matriz não-singular.*

Caso afirmativo encontre sua matriz inversa.

Resolução:

Observemos que:

$$|A_{11}| = (-1)^2(6-3) = 3, \quad |A_{12}| = (-1)^3(-3+9) = -6, \quad |A_{13}| = (-1)^4(-1+6) = 5.$$

Logo

$$\det(A) = 3.3 + 2(-6) + (-1)5 = 9 - 12 - 5 = -8 \neq 0.$$

Logo, pela Proposição acima segue que a matriz A *é um matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa* A^{-1}.

Para encontrar a matriz A^{-1} *calculemos:*

$$|A_{21}| = (-1)^3(6+1) = -7, \quad |A_{22}| = (-1)^4(9-3) = 6, \quad |A_{23}| = (-1)^5(3+6) = -9,$$

$$|A_{31}| = (-1)^4(6+2) = 8, \quad |A_{32}| = (-1)^5(9-1) = -8, \quad |A_{33}| = (-1)^6(6+2) = 8.$$

Portanto

$$\operatorname{cof}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 5 \\ -7 & 6 & -9 \\ 8 & -8 & 8 \end{pmatrix}$$

e assim

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}[\operatorname{cof}(A)]^t = \frac{-1}{8}\begin{pmatrix} 3 & -7 & 8 \\ -6 & 6 & -8 \\ 5 & -9 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{8} & \frac{7}{8} & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{-3}{4} & 1 \\ \frac{5}{8} & \frac{9}{8} & -1 \end{pmatrix}.$$

Uma outra aplicação de determinantes é para resolução de sistemas lineares de equações algébricas do 1.o grau, como veremos no Apêndice II.

Capítulo 16

Apêndice II - Escalonamento de Matrizes e Sistemas Lineares

16.1 Definições Básicas

Consideraremos a seguir questões relacionadas com o sistema linear de $\underline{m}$ equações a $\underline{n}$ incógnitas não-homogêneo, a saber,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (*)$$

que na forma matricial pode ser escrito na seguinte forma:

$$A \cdot x = B \quad (**)$$

onde

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m \times n},$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Definição 16.1 *A matriz* $(a_{*1} \ldots a_{*n} \; b_*)$ *será denominada* matriz aumentada *associada ao sistema não homogêno acima.*

Uma solução *da equação matricial (**) (se existir) será uma matriz* $u \doteq \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in M_{n1}$ *tal que* $A \cdot u = B$.

O conjunto de todas as soluções da equação matricial (*) será denominado conjunto solução *da equação matricial (**).*

Observação 16.2 *Da identificação (*) com (**) segue que encontrar solução para o sistema linear (*) é equivalente a encontrar solução da equação matricial (**).*

Verifiquemos isto no:

Exemplo 16.3 *O sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & +x_2 & +x_3 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & & = & 1 \end{cases}$$

é equivalente a equação matricial

$$A \cdot x = b,$$

onde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad e \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que a equação matricial acima tem como uma solução a matriz $u \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ *(verifique!).*

Logo uma solução do sistema linear dado inicialmente será

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 0 \quad e \quad x_3 = -1.$$

Observação 16.4 *A matriz aumentada associada ao sistema do Exemplo acima será a matriz*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definição 16.5 *Diremos que as equações matriciais*

$$A \cdot x = b \quad e \quad C \cdot x = d$$

são ditos equivalentes *se, e somente se:*

1. $A, C \in M_{mn}$;
2. $b, d \in M_{m1}$;
3. *as duas equações matriciais teêm o mesmo conjunto solução.*

Observação 16.6 *Observemos que as equações matriciais*

$$A \cdot x = b \quad e \quad C \cdot x = d$$

são equivalentes se, e somente se, os sistemas lineares associados às correspondentes equações matriciais são equivalentes (isto é, os sistemas associados teêm o mesmo conjunto solução).

Daremos a seguir alguns procedimentos para encontrar solução de sistemas lineares não homogêneos (e homogêneos).

O que faremos é resolver um sistema linear fazendo operações básicas no mesmo (ou seja, multiplicando-se as equações do mesmo por constantes não nulas, somando-se equações do mesmo, etc.)

Observe que a cada equação do sistema linear corresponde uma linha da matriz aumentada associada ao sistema linear dado.

Logo operações com as equações do sistema linear corresponderão as correspondentes operações sobre as linhas da matriz aumentado associada ao mesmo e reciprocamente.

Para ilustrar consideraremos o sistema linear de equações do 1.o grau:

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & = & 15 \\ 2x_1 & & +4x_3 & = & 8 \end{cases} \longleftrightarrow A \cdot x = b, \text{ onde } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 7 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \text{ e } b = \begin{pmatrix} 11 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & = & 15 \\ 2x_1 & & +4x_3 & = & 8 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq S_o \text{ (matriz aumentada)}$$

$$\Updownarrow (2^a - 2 \times 1^a)$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +5_x3 & = & 11 \\ & -x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & & +4x_3 & = & 8 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq S_1$$

$$\Updownarrow (3^a - 2 \times 1^a)$$

$$\begin{cases} x_1 & +x_2 & +5x_3 & = & 11 \\ & -x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ & -2x_2 & -6x_3 & = & -14 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \end{pmatrix} \doteq S_2$$

$$\Updownarrow (1^a + 2^a)$$

$$\begin{cases} x_1 & & +2x_3 & = & 4 \\ & -x_2 & -3x_3 & = & -7 \\ & -2x_2 & -6x3 & = & -14 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & -6 & -14 \end{pmatrix} \doteq S_3$$

$$\Updownarrow (3^a - 2 \times 2^a)$$

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad +2x_3 = 4 \\ \quad -x_2 \; -3x_3 = -7 \\ \quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq S_4$$

$$\Updownarrow (2^a \times (-1))$$

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad +2x_3 = 4 \\ \quad x_2 \; +3x_3 = 7 \\ \quad\quad\quad 0 = 0 \end{cases} \longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \doteq S_5.$$

O sistema linear obtido acima é o mais simples (que pode ser obtido por meio da operações usuais sobre o sistema linear dado inicialmente) que é equivalente ao sistema original.

Para resolver o sistema linear acima bastará tomar, por exemplo:

$$x_3 \doteq \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})$$

assim

$$x_1 \doteq 4 - 2\alpha \quad \text{e} \quad x_2 \doteq 7 - 3\alpha.$$

Assim o conjunto solução do sistema linear dado incialmente será

$$\{(x_1, x_2, x_3) = (4 - 2\alpha, 7 - 3\alpha, \alpha),\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C})\}.$$

Observe que as operações que fizemos na matriz S_i para obter a matriz S_{i+1} são operações elementares sobre as linhas (ver Definição (15.39)).

Para facilitar o entendimento do que virá mais adiante introduziremos a:

Definição 16.7

1. *A operação de trocar duas linhas de uma matriz daremos o nome de operação do* tipo I.

2. *A operação de multiplicar uma linha por um número não nulo daremos o nome de operação do* tipo II.

3. *A operação de adicionar o múltiplo de uma linha a outra linha daremos o nome de operação do* tipo III.

Tais operações são, como já dissemos, operações elementares sobre as linhas da matriz (ver Definição (15.39)).

No exemplo acima as operações elementares que realizamos são:

$$S_o \xrightarrow{(\text{tipo III})} S_1 \xrightarrow{(\text{tipo III})} S_2 \xrightarrow{(\text{tipo III})} S_3 \xrightarrow{(\text{tipo III})} S_4 \xrightarrow{(\text{tipo II})} S_5.$$

Seja I_m a identidade de ordem $\underline{m}$.

Introduziremos também a:

Definição 16.8

1. *Fazendo uma operação do tipo I na matriz* I_m *obtemos uma matriz quadrada de ordem* m*, que chamaremos de* matirz elementar do tipo I *e será denotada por* E_I.
2. *Uma* matriz elementar do tipo II *é uma matriz quadrada de ordem* m *obtida da matriz* I_m *por uma operação do tipo II:*
3. *Uma* matriz elementar do tipo III *é uma matriz quadrada de ordem* m *obtida da matriz* I_m *por uma operação do tipo III.*

Observação 16.9 *Dada uma matriz* $A \in M_{mn}$*, fazer uma operação do tipo I (ou do tipo II ou do tipo III, respectivamente) é equivalente a multiplicar a matriz* A *por uma matriz do tipo I (ou do tipo II ou do tipo III, respectivamente), isto é,*

$$A \overset{\text{(operação elementar do tipo I)}}{\longmapsto} E_I A.$$

A demonstração destes fatos será deixada como exercício para o leitor.

Ilustraremos a propriedade acima com o seguinte exemplo:

Ex. 16.10 *Seja* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

Então trocando-se a 2.a linha da matriz A *pela 2.a linha menos duas vezes a 1.a obteremos:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \overset{2^a - 2\times 1^a}{\longrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \doteq B$$

A operação acima na matriz identidade de ordem 3 I_3 *nos fornece a seguinte matriz elementar do tipo III:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{2^a - 2\times 1^a}{\longrightarrow} \mathbf{E}_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Com isto temos que

$$E_{III} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} = B,$$

ou seja, as operações produzem a mesma matriz, como foi dito na observação acima.

Um resultado importante é dado pela:

Proposição 16.11 *Uma matriz elementar de qualquer tipo é uma matriz não singular (isto é, é uma matriz inversível) e sua matriz inversa é do mesmo tipo que ela.*

Demonstração:

Será deixado como exercício para o leitor.

∎

Para ilustrar temos o:

Exemplo 16.12

$$E_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

é uma matriz elementar do tipo III (ver Exemplo (16.10)).

Observemos que

$$\det(E_{III}) = 1,$$

portanto a matriz E_{III} é uma matriz não singular, isto é, existe a matriz inversa E_{III}^{-1}.

Além disso temos:

$$E_{III}^{-1} = \frac{1}{\det(E_{III})} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{2^a+2\times 1^a}{\longleftarrow} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

portanto a matriz inversa da matriz E_{III} também é uma matriz elementar do tipo III.

Definição 16.13 *Sejam $A, B \in M_{mn}$.*

Diremos que a matriz A é l-equivalente *(ou equivalente por linhas) à matriz B se a matriz A pode ser obtida da matriz B por meio de uma sequência finita de operações elementares sobre as linhas da matriz B.*

Neste caso escreveremos $A \sim B$.

Observação 16.14

1. *Da observação (16.9) segue que $A \sim B$ se, e somente se,*

   $$A = E_s E_{s-1} \dots E_1 B$$

   onde $E_1, \dots, E_s$ são matrizes do tipoI, II, ou III;

2. *Sejam $A, B, C \in M_{mn}$.*

   Deixaremos como exercício para o leitor verificar que:

   i) Reflexiva:

   $$A \sim B, \quad \textit{para todo} \quad A \in M_{mn};$$

   ii) Simétrica:

   $$\textit{se} \quad A \sim B \quad \textit{então} \quad B \sim A;$$

   iii) Transitiva:

   $$\textit{Se} \quad A \sim B \quad \textit{e} \quad B \sim C \quad \textit{então} \quad A \sim C.$$

isto é, $\sim$ *é uma* relação de equivalência *em* M_{mn}.

Um resultado importante sobre l-equivalênica é dado pela:

Proposição 16.15 *Sejam* $A, B \in M_{mn}$.
Se $A \sim B$ *então existe um matriz* $P \in M_{mn}$ *não singular tal que*

$$B = PA \quad \textit{ou, equivalentemente} \quad A = P^{-1}B.$$

Demonstração:
Segue da da proposição (16.11) e da observação acima item 1. que basta definir $P \doteq E_s \dots E_1$.
∎

A relação entre matrizes l-equivalentes e a equações matriciais equivalentes é dado pela:

Proposição 16.16 *Sejam* $A, C \in M_{mn}$ *e* $b, d \in M_{m1}$.
A matriz $[A\, b]$ *é l-equivalente a matriz* $[C\, d]$ *em* $M_{m,n+1}$ *se, e somente se, a equação matricial* $A \cdot x = B$ *é equivalente a equação matricial* $C \cdot x = d$.

Demonstração:
Da proposição acima existe $P \in M_{mn}$ não singular tal que

$$[C\, d] = P[A\, b] \quad \text{e} \quad [A\, b] = P^{-1}[C\, d].$$

Da definição de produto de matrizes temos que

$$C = PA, \quad d = Pb, \quad A = P^{-1}C \quad e \quad b = P^{-1} \cdot d.$$

Logo, se $u \in M_{n1}$ é solução da equação matricial

$$A \cdot x = b \quad \Rightarrow A \cdot u = b,$$

assim

$$C \cdot u = (PA) \cdot u = PB = d,$$

portanto a matriz u será solução da equação matricial $C \cdot x = d$.
Além disso, vale a recíproca (verifique!), completando a demonstração.
∎

Observação 16.17 *Vale observar que o resultado acima pode ser aplicado para as matrizes aumentadas associadas a sistemas lineares, ou seja, as matrizes aumentadas são l-equivalentes se, e somente se, os sistemas lineares são equivalentes.*

Como conseqüênica temos o:

Corolário 16.18 *Se* $A \sim B$ *em* M_{mn} *e* $x \in M_{n1}$ *então os sistemas*

$$A \cdot x = O \quad e \quad C \cdot x = O$$

são equivalentes, onde O *denota a matriz coluna de* M_{m1}.

Demonstração:

Basta tomar $b = d = 0$ na proposição acima (verifique!).

∎

Observação 16.19 *No exemplo (16.10) obtivemos, após as operações de l-equivalência sobre a matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 11 \\ 2 & 1 & 7 & 15 \\ 2 & 0 & 4 & 8 \end{pmatrix}$, *a matriz* $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *cuja* **forma** *nos facilitou a resolver o sistema linear inicial associado.*

Observemos que o sistema linear asscoiado a esta última matriz é o mais simples de ser resolvido e que é equivalente ao sistema linear dado inicialmente.

A seguir daremos um nome as matrizes que tem essa **forma especial**.

Antes, porém temos a:

Definição 16.20 *Dada uma matriz $A = (a_{ij}) \in M_{nm}$, definimos o coeficiente líder da i-ésima linha, não-nula, a_{i*} da matriz A como sendo o primeiro elemento não nulo dessa linha (contado da esquerda para a direita, isto é, é $a_{i,j_0} \neq 0$ para $1 \leq j_0 \leq m$ é o menor índice).*

Agora estamos em condições de caracterizar a forma da matriz aumentada associada ao sistema linear mais simples obtido no exemplo (16.10) (isto é, a matriz B):

Definição 16.21 *Uma matriz $A \in M_{mn}$ é dita estar na forma escalonada reduzida em por linhas, denotada por FERL, se ela tem as seguintes propriedades:*

i) Todas as linhas nulas da matriz A ocorrem nas linhas inferiores da mesma;

ii) O coeficiente líder de uma linha não nula de A é 1;

iii) Em qualquer duas linhas não nulas da matriz A o coeficiente líder pertencente a linha de baixo ocorrerá à direita do coeficiente líder da linha de cima;

iv) Uma coluna que contém um coeficiente líder deverá ter zeros nas outras entradas.

Temos os seguintes exemplos:

Exemplo 16.22 *As matrizes:*

1. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *estão na FERL.*

2. $\begin{pmatrix} 1 & \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & \boxed{1} & 0 \end{pmatrix}$ **não** *estão na FERL (os elementos destacados não cumprem as propriedades requeridas).*

Com isto temos a:

Proposição 16.23 *Toda matriz* $A \in M_{mn}$ *é l-equivalente a uma (única) matriz* A_R *que está na FERL, isto é, existe* $P \in M_{mn}$ *não singular tal que* $A_R = PA$.

Demonstração:

Deixada como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

∎

Em vez de exibirmos a demonstração da proposição acima (que foi deixada como exercício para o leitor) daremos o método que é utilizado na demonstração aplicado a um exemplo.

O método é denominado **Eliminação de Gauss-Jordan**:

Exemplo 16.24 *Encontre o conjunto solução do sistema*

$$\begin{cases} & & -2x_3 & & +7x_5 & = & 12 \\ 2x_1 & +4x_2 & -10x_3 & +6x_4 & +12x_5 & = & 28 \\ 2x_1 & +4x_2 & -5x_3 & +6x_4 & -5x_5 & = & -1 \end{cases}$$

cuja matriz aumentada é dada por

$$(A\,b) \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

O que faremos é realizar operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada acima para obter a sua FERL.

Primeiro passo:

Trocar as linhas nulas da matriz $(A\,b)$ *com outras linhas, não nulas, de modo que as linhas nulas ocorram nas linhas inferiores da nova matriz.*

No nosso caso não há linhas nulas logo não faremos nenhuma mudança na matriz aumentada $(A\,b)$.

Localize a coluna mais á esquerda que não seja totalmente nula .

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$
$$\uparrow$$

Segundo passo:

Trocar a primeira linha com uma outra, caso necessário, para que o primeiro elemento da coluna localizada no primeiro passo seja não nulo.

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 & 6 & 12 & 28 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad (\textit{trocamos a 1.}^{a} \textit{ linha com a 2.}^{a} \textit{ linha})$$

Terceiro passo:

Se o primeiro elemento da coluna do segundo passo for $\underline{a}$, *multiplicar a primeira linha por* $\frac{1}{a}$ *(para que o coeficiente líder da primeira linha da matriz obtida seja* 1*).*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 2 & 4 & -5 & 6 & -5 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.^{a}\ linha\ \times \frac{1}{2})$$

Quarto passo:

Somar a primeira linha multiplicada por constante, se for necessário, com as linhas de baixo para obter zeros em todas as entradas abaixo do coeficiente líder da primeira linha.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \quad (3.^{a}\ linha\ - 2 \times 1.^{a})$$

Quinto passo:

Separar a 1.ª linha da matriz acima e voltar ao Primeiro passo.
Aplicar o processo repetidas vezes para até a última linha não nula.
No nosso exemplo:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & \boxed{2} & \boxed{-5} & \boxed{3} & \boxed{6} & \boxed{14} \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 7 & 12 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & -17 & -29 \end{pmatrix} \quad (1.^{a} linha\ \times (\frac{-1}{2}))$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{-7}{2} & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.^{a}\ linha\ - 5 \times 1.^{a})$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{-7}{2}} & \mathbf{-6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2 \times 1.^{a} linha)$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-5} & \mathbf{3} & \mathbf{6} & \mathbf{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{\frac{-7}{2}} & \mathbf{-6} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Sexto passo:

Para finalizar, começando por uma linha não nula, somar cada linha multiplicada por constante com as outras linhas para zerar as outras entradas acima do coeficiente líder.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 6 & 14 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (2.^{a}\ linha\ + \frac{7}{2} \times 3.^{a}\ linha\ )$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.^a \textit{ linha } - 6 \times 3.^a \textit{ linha })$$

$$(C\, d) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} (1.^a \textit{ linha } + 5 \times 2.^a \textit{ linha }).$$

Observemos que a matriz $(C\, d)$ está na FERL (verifique!).

O sistema linear asssociado à matriz $(C\, d)$ será:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 7 \\ x_3 = 1 \\ x_5 = 2 \end{cases}$$

Portanto se, por exemplo, considerarmos para cada $t, s \in \mathbb{R}$,

$$x_1 \doteq t, \quad x_2 \doteq s, \quad x_3 = 1, \quad x_5 \doteq 2 \quad \Longrightarrow \quad x_4 = \frac{7 - t - 2s}{3},$$

teremos que $(t, s, 1, \frac{7-t-2s}{3}, 2)$ será solução do sistema linear dado incialmente, para cada $t, s \in \mathbb{R}$, ou seja:

$$\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (t, s, 1, \frac{7-t-2s}{3}, 2) : s, t \in \mathbb{R}\}$$

será o conjunto solução do sistema linear inicial.

Ou ainda, o conjunto solução da equação matricial $A \cdot x = b$, será

$$S = \left\{ u \in M_{51} : u = \begin{pmatrix} t \\ s \\ 1 \\ \frac{7-t-2s}{3} \\ 2 \end{pmatrix} \quad \textit{onde } \; t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

Temos também a seguinte definição:

Definição 16.25 *Dada uma matriz $A \in M_{mn}$, definimos o posto da matriz A, denotado por $p(A)$, como sendo o número de linhas não nulas de sua FERL associada.*

Proposição 16.26 *Se $A \in M_{mn}$ então $p(A) \leq \min\{m, n\}$.*

Demonstração:

Deixada como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

∎

Nas seções a seguir faremos algumas considerações sobre o sistema linear não homogênio

$$(NH) \quad A \cdot x = b \quad \text{onde} \quad A \in M_{mn},\ B \in M_{m1} \ \text{ e } \ x \in M_{n1}.$$

Na próxima seção começaremos estudando o sistema linear homogênio associado:

$$(H) \quad A \cdot x = 0 \quad (\text{ isto é, } \ b = 0).$$

16.2 O Sistema Linear Homogênio

Observação 16.27

1. *O sistema (H) tem sempre solução, a saber, a matriz identicamente nula,* $u = 0 \in M_{n1}$, *que será denominada* solução trivial;

2. *Pode-se mostrar que se* A_R *é a matriz na FERL associada a matriz* A *então a equação matricial*
$$A \cdot x = 0$$
será equivalente a equação matricial
$$A_R \cdot x = 0,$$
ou seja, resolver o sistema homogêneo é equivalente a resolver o sistema associado a matriz que está FERL;

3. *Observemos que se* $u, v \in M_{n1}$ *são soluções de (H) então* $\alpha \cdot u + \beta \cdot v$ *também será, para todo* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*) pois:*
$$A \cdot (\alpha \cdot u + \beta \cdot v) = A \cdot (\alpha \cdot u) + A \cdot (\beta \cdot v) = \alpha \cdot (A \cdot u) + \beta \cdot (A \cdot v) = 0.$$

4. *Mais geralmente, se* $u_1, \ldots, u_p \in M_{n1}$ *são soluções de (H) então*
$$\alpha_1 \cdot u_1 + \cdots + \alpha_p \cdot u_p \in M_{n1}$$
também será solução (isto é, combinação linear de soluções também é solução).

   Deixaremos a verificação deste fato como exercício para o leitor.

Apliquemos essas idéias ao:

Exemplo 16.28 *Resolva o sistema* $A \cdot x = 0$ *onde*
$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_{35}.$$

Resolução:

Como a matriz A *está na FERL (verifique!) então temos o sistema linear homogêneo associado à matriz* A *será dado por:*

$$\begin{cases} x_1 & -2x_2 & & +3x_4 & & = & 0 \\ & & +x_3 & -x_4 & & = & 0 \\ & & & & +x_5 & = & 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 3x_4 \\ x_3 = x_4 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

ou seja, $x_2 = \alpha_1$ *e* $x_4 = \alpha_2$*, para* $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$*, teremos:*

$$\mathbf{u} \doteq \begin{pmatrix} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Portanto qualquer solução $u \in M_{n1}$ *da equação matricial (H) será dada por:*

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2$$

onde

$$u_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad u_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Observemos que u_1 *e* u_2 *são l.i., logo formam uma base para o espaço vetorial real* W *formado pelas soluções da da equação matricial (H).*

Observação 16.29 *Observemos que oposto da matriz* A *é* 3 *e a equação matricial (H) possui duas soluções que tem a propriedade acima, isto é, qualquer solução da equação matricial (H) pode ser obtida como combinação linear de* u_1 *e* u_2*.*

Além disso, temos

$$\dim(W) = 2 = \underbrace{5}_{\text{número de variáveis}} - \underbrace{3}_{\text{posto de } A},$$

isto é , o número de soluções da a equação matricial (H) é igual ao número de variáveis do sistema linear menos o posto da matriz A*.*

Baseado nisto temos o:

Teorema 16.30 *Seja* $A \in M_{mn}$ *de posto igual a* k*.*

Então o conjunto das soluções da equação matricial $A \cdot x = 0$ *consiste dos*

$$u = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_{n-k} u_{n-k} \in M_{n1},$$

onde $\alpha_i \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*),* $i = 1, \ldots, n-k$ *sendo os elementos*

$$u_i \in M_{n1} \setminus \{0\}, \quad i = 1, \cdots, n-k$$

podem ser obtidos resolvendo-se o sistema linear associado a matriz na FERL associada a matriz A *(são as* $n-k$ *soluções l.i.).*

Em particular, se W *é o subsepaço vetorial do espaço* $(M_{n1}, +, \cdot)$ *(onde* $+$ *e* $\cdot$ *são as operações usuais de* M_{n1}*) segue que*

$$\dim(W) = n - p(a),$$

onde $p(A)$ *denota o posto da matriz* A*.*

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor a demonstração deste resultado.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 16.31 *Seja* $A \in M_{mn}$.

Se o posto de $A = n$ *(isto é,* $k = n$ *no teorema acima) então a única solução da equação matricial (H) será a matriz nula* $u = O \in M_{n1}$.

Reciprocamente, se a única solução da equação matricial (H) é a matriz nula $u =) \in M_{n1}$ *então posto de* A *será igual a* n.

Demonstração:

Do teorema acima temos que

$$\dim(W) = n - \underbrace{p(a)}_{=n} = 0,$$

logo $W = \{O\}$, ou seja, a única solução da equação matricial (H) é a matriz nula $u =) \in M_{n1}$.

Reciprocamente, se a única solução da equação matricial (H) é a matriz nula $u = O \in M_{n1}$ então teremos que $W = \{O\}$, isto é, $\dim(W) = 0$.

Logo, do teorema acima temos que

$$\underbrace{\dim(W)}_{=0} = n - p(a) \quad \Longrightarrow \quad p(a) = n,$$

como queríamos demonstrar.

∎

Com isto temos o:

Corolário 16.32 *Seja* $A \in M_{mn}$.

Se $m < n$ *então o sistema (H) tem, pelo menos, uma solução não trivial.*

Demonstração:

Se $k = p(A)$, da proposição (16.26) segue que

$$k \leq \min\{m, n\} \overset{(m<n)}{=} m < n,$$

logo $k < n$.

Do corolário acima segue que existe solução, não identicamente nula, da equação matricial (H), como queríamos demonstrar.

∎

Analisemos os exemplos a seguir:

Exemplo 16.33 *Seja* $A \doteq \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in M_{32}$.

Encotre o conjunto solução da equação matricial $A \cdot u = O$.

Resolução:

Neste caso temos que $m \doteq 2$ *e* $n \doteq 3$.

Temos que $A \sim A_R$, *onde* $A_R \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ *(verifique!)*

Portanto posto da matriz A *é igual a* 2.

Logo, pelo teorema acima, existe uma ($= n - p(A) = 3 - 2$) *solução da equação matricial* $A \cdot u = O$, *que indicaremos por* $u_1 \in M_{31}$, *não identicamente nula, de (H) e qualquer outra solução* u *da equação matricial* $A \cdot u = O$ *será da forma* $u = \alpha \cdot u_1$ *para algum* $\alpha \in \mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{C}$*).*

Para encontrá-la basta resolver o sistema associado a matriz A_R *que deixaremos como exercício para o leitor.*

Exemplo 16.34 *Seja* $A \doteq \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & 7 & 6 \end{pmatrix} \in M_{34}$

Resolução:

Neste caso temos $m \doteq= 3 < n \doteq 4$.

Logo, do corolário acima podemos concluir que existe pelo menos uma solução não trivial da equação matricial $A \cdot u = O$.

Na verdade temos que $A \sim A_R$ onde $A_R \doteq \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{-25}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (verifique).

Portanto posto A é igual a 2.

Logo, pelo teorema acima , existem duas ($= n - p(A) = 4 - 2$) soluções $u_1, u_2 \in M_{41}$ l.i. da equação matricial $A \cdot u = O$, tal que toda solução u da equação matricial $A \cdot u = O$ será dada por

$$u = \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2,$$

para algum $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

Para encontrá-las basta resolver o sistema associado a matriz A_R que deixaremos como exercício para o leitor.

16.3 O Sistema Linear Não Homogênio

Trateremos nesta seção do sistema linear não homogêneo (NH).

Começaremos introduzindo a:

Definição 16.35 *A equação matricial* $A \cdot x = b$ *será dita* <u>consistente</u> *se tem pelo menos uma solução.*

Se não tiver solução será dita <u>inconsistente</u>.

De modo semelhante temos um sistema linear será <u>consistente</u> *se ele adminte pelo menos uma solução, caso contrário, será dita* <u>inconsistente</u>.

A seguir exibiremos dois sistemas lineares, um consistente e o outro incosistente.

Exemplo 16.36 *O sitema linear* $\begin{cases} x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 0 \\ & x_2 & +x_3 & = & -1 \\ x_1 & +x_2 & & = & 1 \end{cases}$ *é consistente, pois* $x_1 \doteq 1$, $x_2 \doteq 0$ *e* $x_3 \doteq -1$ *é uma solução (verifique!).*

Exemplo 16.37 *O sitema linear* $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ *é inconsistente (verifique!).*

Lembremos que resolver a equação matricial (NH)

$$A \cdot x = b$$

é equivalente a resolver a equação matricial

$$A_R \cdot x = b_R,$$

onde

$$A \sim A_R \quad \text{e} \quad b \sim b_R,$$

isto é, existe uma matriz $P \in M_{mn}$, não singular, tal que $A_R = PA$ e $b_R = P\,b$, ou ainda, $(A\,b) \sim (A_R\,b_R)$.

Logo podemos assumir, sem perda de generalidade, que a matriz A está na FERL, isto é, $A = A_R$ e $b = b_R$ pois os as equações matriciais associadas são equivalentes (isto é, teêm o mesmo conjunto solução).

Suponhamos que o a equação matricial (NH) seja consistente com solução $u \in M_{m1}$.

Seja $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ o posto da matriz A.

Como a matriz A está na FERL e $p(A) = k$, segue que a matriz A tem as últimas $(m-k)$ linhas são nulas e portanto $(m-k)$ equações do sistema linear associado a equação matricial (NH) tem a segunte forma:

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = b_i \quad i = k+1, \cdots, m.$$

Logo

$$b_i = 0, \quad i = k+1, \cdots, m,$$

ou seja:

Teorema 16.38 *Se a matriz* $A \in M_{mn}$ *está na FERL e tem posto* k *então a equação matricial (NH) (ou o sistema linear associado a matriz aumentada* $(A\,b)$*) é consistente se, e somente se,* $b_{k+1} = \cdots = b_m = 0$.

Em particular, se o posto da matriz A *for igual a* m *então a equação matricial (e portanto o sistema linear associado a matriz aumentada* $(A\,b)$*) será consistente.*

Demonstração:

Uma das implicações (a saber, $\Rightarrow$) é fruto da observação acima.

A recíproca será deixada como exercício para o leitor.

∎

Se a matriz $A \in M_{mn}$ não está na FERL então temos o:

Teorema 16.39 *Seja $A \in M_{mn}$.*

A equação matricial (NH) (portanto o sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$) é consistente se, e somente se, o posto da matriz aumentada $(A\,b)$ for igual ao posto da matriz A, isto é.

$$p(A\,b) = p(A).$$

Demonstração:

Será deixada como exercício para o leitor.

∎

Façamos uma aplicação desse resultado ao seguinte exemplo:

Exemplo 16.40 *O sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & = & 0 \\ -x_1 & & = & 1 \\ & x_2 & = & -1 \end{cases}$$

é consistente ou inconsistente?

Resolução:

Observemos que

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & = & 0 \\ -x_1 & & = & 1 \\ & x_2 & = & -1 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (Ab)$$

Logo os sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$ será consistente pois ele admite como solução $x_1 \doteq -1$ e $x_2 \doteq -1$ (verifique!).

Portanto é consistente.

Notemos também que (verifique!)

$$(A\,b) \sim (A_R\,b_R) \quad \textit{onde} \quad (A_R\,b_R) \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\mathbf{A_R} \sim \mathbf{A}).$$

Assim temos que $p(A) = 2 = p(A\,b)$ e como afirma o teorema o sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$ será consistente.

Um outro resultado interessante é o:

Teorema 16.41 *Seja* $A \in M_{mn}$.

Suponhamos que a equação matricial (ou o sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$*)* $A \cdot x = b$ *seja consistente e que* $u_o \in M_{n1}$ *seja uma solução particular do mesmo.*

Então toda solução da equação matricial $A \cdot x = b$ *será dada por*

$$w = u_o + v \in M_{n1}$$

onde $v \in M_{n1}$ *é uma solução da equação matricial homogênia associada, isto é, da equação matricial* $A \cdot y = 0$.

Conclusão: uma solução geral do sistema linear associado a matriz aumentada $(A\,b)$ *pode ser obtida de uma solução particular do mesmo mais a solução geral do sistema linear homogêneo.*

Demonstração:

De fato, se $w \in M_{n1}$ uma solução da equação matricial $A \cdot x = b$ e $u_o \in M_{n1}$ é solução particualr de $A \cdot x = b$ segue que

$$v \doteq w - u_o$$

será solução de $A \cdot y = 0$, pois

$$A \cdot v = A \cdot (w - u_o) = A \cdot w - A \cdot u_o = b - b = 0.$$

Logo $w = u_0 + v$ (= solução particular de $A \cdot x = b$ + solução qq de $A \cdot y = 0$).

Reciprocamente, se $v \in M_{n1}$ é solução da equação matricial $A \cdot y = O$ então $w \doteq u_o + v$ é solução da equação matricial $A \cdot x = b$, pois

$$A \cdot w = A \cdot (u_o + v) = A \cdot u_o + A \cdot v = b + O = b,$$

mostrando que $w \in M_{n1}$ será solução da equação matricial $A \cdot x = b$, completando a demonstração.

∎

Apliquemos isto ao:

Exemplo 16.42 *Encontre o conjunto solução de* $Ax = b$ *onde*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 6 & -2 \end{pmatrix} \quad e \quad b \doteq \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Podemos mostrar que $(A\,b) \sim (A_R\,b_R)$ *(verifique!) onde*

$$\mathbf{A_R} \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad e \qquad b_R \doteq \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Portanto, pelo teorema (16.39), a equação matricial é consistente, pois de (*), temos que

$$p(A_R\, b_R) = 3 = p(A_R), \qquad \textit{logo} \quad p(A\, b) = p(A).$$

Também pode-se mostrar (verifique!) que $u \doteq \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ *é solução da equação matricial* $A_R \cdot x = b_R$*, portanto da equação matricial* $Ax = b$*.*

Além disso

$$v \doteq \begin{pmatrix} -10\alpha \\ -3\alpha \\ 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \ (\textit{ou } \mathbb{C}).$$

é solução geral da equação matricial $A_R \cdot x = 0$*.*

Logo do teorema acima segue que qualquer solução da equação matricial (NH) será da forma

$$w = u + \alpha v = \begin{pmatrix} -13 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -10 \\ -3 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \alpha \in \mathbb{R} \ (\textit{ou } \mathbb{C}), \ \textit{isto é} \ ,$$

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} -13 - 10\alpha \\ 3 - 3\alpha \\ 1 + 4\alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \ (\textit{ou } \mathbb{C}) \right\}$$

é o conjunto solução da equação matricial (NH).

Para completar nosso estudo sobre da equação matricial (NH) (logo dos sistema linear associado a matriz aumentada $(A\, b)$) temos os seguintes resultados:

Teorema 16.43 *Sejam* $A \in M_{mn}$*,* $b \in M_{m1}$*.*

Suponhamos que a equação matricial (NH) $A \cdot x = b$*, é consistente.*

A equação matricial (NH), $A \cdot x = b$*, tem solução única se, e somente se, posto da matriz* A *é igual a* n*.*

Demonstração:

Suponhamos que a equação matricial (NH) $A \cdot x = b$ tem solução única.

Então a equação matricial (H), $A \cdot y = O$ tem solução única, a saber, a solução trivial $u = O \in M_{n1}$.

Logo posto da matriz A deverá ser igual a n.

Reciprocamente, se posto da matriz A é igual a n, então a solução trivial $u = O \in M_{n1}$ deverá ser a única solução da equação matricial (H), $A \cdot y = O$.

Portanto a equação matricial (NH), $A \cdot x = b$, tem uma única solução, finalizando a demonstração.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 16.44 *Nas condições do teorema acima se $m \leq n$, existe uma única solução da quação matricial (NH), $A \cdot x = b$, se, e somente se, posto da matriz A for igual a n (isto é, $m = n$).*

Demonstração:

Suponhamos que exista única solução da equação matricial (NH), $A \cdot x = b$.

Então, do teorema acima, segue que n será igual ao posto da matriz A.

Mas $n = p(A) \leq \min(m, n) \leq m \leq n$.

Portanto $p(A) = n$ e $m = n$.

Reciprocamente, se $p(A) = n$ segue do teorema que existe única solução da equação matricial (NH), $A \cdot x = b$, completando a demonstração.

∎

16.4 A Inversa de Matrizes Não Singulares

Para finalizar, exibiremos um método para encontrar a matriz inversa associada a uma matriz não singular utilizando o matrizes elementares desenvolvidas na seção anterior.

Para ilustrar consideremos o seguinte exemplo:

Exemplo 16.45 *Observemos que a matriz quadrada de ordem 4*

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{[exercício]}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que está na FERL, portanto, o posto da matriz A será igual a 4.

Além disso,

$$\det(A) = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 + 0 - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -2 - (1 + 1) = -4 \neq 0$$

portanto a matriz A é não singular, ou seja $A \in M_4$, $p(A) = 4$ e A é uma matriz inversível.

Logo, neste exemplo, ocorreu uma relação entre o posto da matriz e a sua inversibilidade.

Isto ocorre em geral, como veremos no resultado a seguir:

Teorema 16.46 *Seja $A \in M_n$ são equivalentes:*

1. *A é uma matriz não singular;*
2. *posto da matriz A é igual a n;*
3. *$A \sim I_n$, isto é, $A_R = I_n$, onde a matriz A_R é a FERL da matriz A.*

Demonstração:

Mostremos que:

1. $\Rightarrow$ **2.** :

Se a matriz A é uma matriz não singular e $A \cdot u = O$ então $u \doteq A^{-1}O = O$, isto é, a única solução da equação $A \cdot y = O$ será a solução trivial $u = O$.

Logo, do corolário (16.31), segue que o posto da matriz A dever ser igual a n.

2. $\Rightarrow$ **3.** :

Se o posto da matriz A é igual a n então não existe linhas nulas na matriz A_R (a FERL da matriz A) e cada linha de $A_R \in M_{nn}$ tem coeficiente líder 1 e zero nas outras posições da coluna, isto é, $A_R = I_n$.

3. $\Rightarrow$ **1.** :

Se $A_R = I_n$ então, como $A \sim A_R$, existe $P \in M_{nn}$, matriz quadrada não singular, tal que

$$I_n = A_R = PA.$$

Portanto a matriz A é uma matriz não singular e $A^{-1} = P$, completando a demonstração.

∎

Como consequência temos o:

Corolário 16.47 *Seja $A \in M_{nn}$.*

A matriz A é uma matriz não singular se, e somente se, ela é produto de matrizes elementares.

Demonstração:

Do teorema acima temos que $A = P^{-1}$.

Mas, da proposição (16.15), a matriz P é o produto de matrizes elementares, completando a demonstração.

∎

Observação 16.48 *Este teorema nos dá um modo de encontrar a inversa de uma matriz quadrada que é uma matriz não singular.*

Ilustraremos o método com o seguinte exemplo:

Ex. 16.49 *Encontrar a inversa da matriz*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Resolução:

Para isto consideremos a matriz

$$A : I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & : & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

O que faremos é fazer operações sobre as linhas da matriz A *para trasnformá-la (se possível) na matriz identidade* I_4 *à direita.*

Todas as operações que fizermos na matriz A *faremos na matriz* I_4.

$$A : I_4 \overset{(1.^a+4.^a)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & : & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(3.^a-2.^a)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & : & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{((\frac{-1}{2})\times 3.^a)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & : & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{(2.^a-3.^a)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & : & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\overset{((\frac{1}{2})\times 3^a)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\overset{(1^a-4^a)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & : & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & : & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (I_4 : B).$$

Afirmação: $B = A^{-1}$, *isto é,* $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{-1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

De fato, como $A \sim I_n$ *(se não for singular) então* $I_n = PA$, *logo*

$$P(A : I_n) = ((PA) : P) = (I_n P) \Rightarrow (A : I_n) \sim (I_n : P)$$

mas, do corolário acima, $P = A^{-1}$ *portanto* $(AI_n) \sim (I_n A^{-1})$.

Observação 16.50 *Podemos utilizar o escalonamento de matrizes para obter bases para subespaços de espaços vetorias de* $\mathbb{R}^n$.

Esse processo é desenvolvido nos primeiros capítulos destas notas.

16.5 Regra de Crammer

Para finalizar temos o:

Teorema 16.51 ***(Regra de Cramer)***

Seja $A \in M_n$, $b \in M_{n1}$.

Se $\det(A) \neq 0$ *então* $A \cdot x = b$ *tem uma única solução* $u = (u_i)(= A^{-1} \cdot b)$ *cujas componentes são dadas por*

$$u_i \doteq \frac{\det(A_i)}{\det(A)}\, i = 1, \ldots, n$$

onde A_i *é o determinante obtido da matriz* A *trocando-se a i-ésima coluna* a_{*i} *da matriz* A *pela coluna da matriz* b.

Demonstração:

Deixaremos como exercício para o leitor.

∎

Apliquemos este resultado ao:

Exemplo 16.52 *Resolva o sistema linear*

$$\begin{cases} x_1 & +3x_2 & -x_3 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 0 \\ x_1 & & -x_3 & = & -1 \end{cases}.$$

Resolução:

Observemos que o sistema linear dado pode ser escrito como a seguinte equação matricial $A \cdot x = b$, onde

$$A \doteq \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \text{e} \quad b \doteq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Observemos que

$$\det(A) = -1 + 6 + 1 = 8 \neq 0,$$

portanto amatriz A é não singular, logo da regra de Cramer, teremos:

$$A_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{0} & 3 & -1 \\ \mathbf{0} & 1 & 1 \\ \mathbf{-1} & 0 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 1 = 4; \quad A_2 = \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{0} & -1 \\ 1 & \mathbf{0} & 1 \\ 1 & \mathbf{-1} & -1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 0 & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = -1 + 3 = 2.$$

Portanto

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_1}{A} \\ \\ \frac{A_2}{A} \\ \\ \frac{A_3}{A} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{8} \\ \\ \frac{2}{8} \\ \\ \frac{2}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \\ \frac{1}{4} \\ \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

será a solução da equação matricial $A \cdot x = b$, ou seja, $x_1 \doteq \dfrac{1}{2}$, $x_2 \doteq \dfrac{1}{4}$ e $x_3 \doteq \dfrac{1}{4}$ será a solução do sistema dado inicialmente.

As muitas das demonstrações deixadas como exercício ou omitidas podem ser encontradas na bibliografia abaixo.

Referências Bibliográficas

[CDC] Callioli, C. A., Domingues, H. H., Costa, R. C. F., *Álgebra Linear e Aplicações,* 2^a edição, Atual Editora Ltda, 1978.

[L] Lima, E. L., *Álgebra Linear,* Coleção Matemática Universitária, IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1995.