Definição: Seja V um espaço vetorial sobre K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), um produto interno em V é uma aplicação:

$$\langle \cdot , \cdot \rangle : V \times V \longrightarrow K$$

Satisfazendo:

i) $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$, no caso real o conjugado é o próprio $\langle v, u \rangle$.

ii) $\langle u + \lambda v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \lambda \langle v, w \rangle$ possui certa distributividade

iii) $\langle v, v \rangle \geq 0 \ \forall v \in V$ e $\langle v, v \rangle = 0 \longleftrightarrow v = 0$

Exemplo: $\langle u, v \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

Se $V = \mathbb{C}^n$, $u = (a_1, \dots, a_n)$ e $v = (b_1, \dots, b_n)$

$\langle u, v \rangle = a_1 \overline{b_1} + \dots + a_n \overline{b_n}$

Lembrando: Se $x \in \mathbb{R}$, $x = \bar{x}$
Se $x \in \mathbb{C}$, $\bar{x}$ é o conjugado de $\mathbb{C}$

Nomenclatura: 1) Se V esta definido sobre $\mathbb{R}$ e admite um produto interno, chamamos V de espaço Euclidiano.

2) Se V esta definido sobre $\mathbb{C}$ e é munido de um produto interno chamamos V de espaço Hermitiano.

① **Definição**: Dado V um espaço vetorial com produto interno, e $u, v \in V$. Dizemos que u e v são perpendiculares se $\langle u, v \rangle = 0$ e neste caso denotamos $u \perp v$.

Exemplo: em $\mathbb{R}^2$ considere a aplicação $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$u = (x_1, y_1), \; v = (x_2, y_2)$$

$$\langle u, v \rangle = 2x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$$

Vale que $\langle , \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^2$.

$$u = \langle x, y \rangle, \quad \langle u, u \rangle = 2x^2 - xy - yx + 2y^2$$
$$= 2x^2 - 2xy + 2y^2$$
$$= 2(x^2 - xy + y^2)$$

Norma: Seja V um espaço vetorial sobre K ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), temos que uma Norma em V é uma aplicação:

$$\| \cdot \| : V \to \mathbb{R} \; (\mathbb{R})$$

Satisfazendo:

i) $\forall v \in V$, $\|v\| \geq 0$ e $\|v\| = 0$, se e somente se, $v = 0$ (vetor nulo).

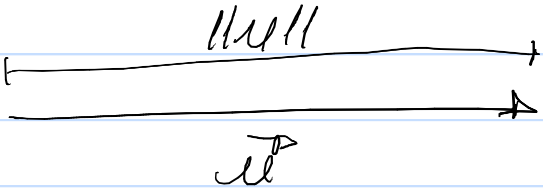
ii) $\forall v \in V$, $\|\lambda v\| = |\lambda| . \|v\|$ $\forall \lambda \in K$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$)

$\lambda \in \mathbb{R}$ tomamos o modulo, se $\lambda \in \mathbb{C}$ tomamos o modulo de $\mathbb{C}$: $(\lambda\bar{\lambda})^{1/2} = |\lambda|$

iii) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$, desigualdade triangular

<u>Ideia</u>: a norma mede o <u>comprimento</u> de um vetor no espaço vetorial.

$\|v\|$: a medida do tamanho de v



<u>Teorema</u>: Se V é um espaço vetorial com um produto interno $\langle , \rangle$, então a aplicação $\|\cdot\|: V \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\|u\| = \langle u,u \rangle^{1/2}$$, é uma norma em V.

Dizemos que a norma é induzida pelo produto interno.

<u>Teorema</u>: Desigualdade de Cauchy-Schwarz

Seja V um espaço com produto interno $\langle , \rangle$ e tome $\|u\| = \langle u,v \rangle^{1/2}$

Vale que para quaisquer $u, v \in V$:

$$|\langle u,v \rangle| \le \|u\| . \|v\|$$

Teorema de Pitágoras: se u e v são tais que $\langle u,v\rangle = 0$, então:

$$\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Sempre que $\|u\|^2 = \langle u,v\rangle$ (norma é induzida pelo produto interno.