V é T-cíclico se existe v:

$\{v, Tv, T^2v, \ldots, T^{n-1}v\}$

V é T-cíclico $\Rightarrow m_T(x) = p_T(x)$

$\not\Leftarrow$

fiquei de postar

Suponha que $m_T(x) = (x - \lambda)$

$\Rightarrow T$ é diagonalizável

$S = T - \lambda I \equiv 0$

$m_T(T)$

—·—

$m_T(x) = p_T(x) = (x-\lambda)^n$

$\Rightarrow \exists\, v$ tq $\{v, \underbrace{Tv}_{w}, \underbrace{\ldots}_{Tw}, T^{n-1}v\}$ é base de V

$T^{n-1}v$ é autovetor:

$m_T(T) \equiv 0$ $\qquad$ $(\underbrace{T - \lambda I})^n v = 0$

$$S^n v = 0$$

$$S(\underbrace{S^{n-1} v}) = 0$$

↳ Nuc $S \Rightarrow$ autovetor.

$T^{n-1} v$ é autovetor?

$$S(T^{n-1} v) = (T - \lambda I)(T^{n-1} v)$$

$$T^n v - \lambda T^{n-1} v$$

Sup $T^{n-1} v$ é autovetor e $B = \{v, \dots, T^{n-1} v\}$

$$\Rightarrow T_B = \begin{bmatrix} \lambda & & & & 0 \\ 1 & \lambda & & & 0 \\ & 1 & \lambda & & 0 \\ & & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & & & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$B = \{v, Tv, \dots, T^{n-1} v\}$

$w_n, w_{n-1}, \dots, w_1$ $\qquad$ $Tw_1 = \lambda w_1$

$w_2 : Tw_2 = \lambda w_2 + w_1 \to$ coluna $n-1$: $\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\to n-2 : \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \cdots$$

$$m_T(x) = (x-\lambda)^k \quad , \quad 1 < k < n$$

Então, se $S = T - \lambda I$, temos

$S^k = 0$, mas $S^{k-1} \neq 0$ em $L(V,V)$

k-nilpotentes

Mostraremos: (1) $T \in L(V,V)$ $\Rightarrow$ é soma direta de um op nilp com um op inversível

(2) $S \in L(V,V)$ é k-nilp, então $V = U \oplus W$ soma direta S-inv com $U = [v, \ldots, S^{k-1}v]$, para algum v

5.5 OP NILP

<u>Def</u>: $T \in L(V,V)$ é <u>m-nilp</u>

se $T^m = 0$ mas $T^{m-1} \neq 0$ em $L(V,V)$

<u>Obs</u> T é m-nilp e $\dim V \geq 1$,

então $\mathrm{Nuc}\, T \neq \{0\}$, pois $\exists v \neq 0$

tq $T^{m-1} v \neq 0$, logo, como

$$0 = T^m v = T(\underbrace{T^{m-1} v}_{\neq 0}) \qquad \in \mathrm{Nuc}\, T$$

Em particular: T é invertível

$$\Downarrow$$

T ñ nilpotente.

<u>Ex 1</u>(a) $D: P_m(\mathbb{R}) \to P_m(\mathbb{R})$ é $(m+1)$-nilp

(b) $T \in L(M_2(\mathbb{K}), \_\_)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} d & & c \\ & & \\ 0 & & a \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} d & c \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

$T = T_1 \oplus T_2$, nilp + inv

$$T_1 : \quad : \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 & \gamma \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T_1^2 = 0 \qquad T_1 : \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ \gamma & 0 \end{pmatrix} \right\}}_{W_1} \circlearrowleft$$

$$T_2 = \quad : \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \delta & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

$$T_2^2 = I \qquad T_2 : \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \right\}}_{W_2} \circlearrowleft$$

$$\Rightarrow \quad M_2 = W_1 \oplus W_2, \quad T_{\substack{1\\2}} = T\big|_{W_{\substack{1\\2}}}$$

Teorema $\dim V = n < \infty$, $T \in L(V,V)$

Então $T = T_1 \oplus T_2$, com T_1 nilp e T_2 inv, isto é, $\exists$ subespaços T-inv W_1 e W_2 tais que

$T_1 = T|_{W_1} : W_1 \to W_1$ é nilp

$T_2 = T|_{W_2} : W_2 \to W_2$ é invertível

(e $V = W_1 \oplus W_2$)

Além disso, se $T = T_1' \oplus T_2'$ com

$V = U_1 \oplus U_2$, então $U_1 = W_1$ e $U_2 = W_2$

Dem: obs: $v \in \text{Nuc}\, T$, então

$$T^2 v = T(Tv) = T(0) = 0$$

$$\Rightarrow v \in \text{Nuc}\, T^2$$

$$\Rightarrow \text{Nuc}\, T \subset \text{Nuc}\, T^2$$

Daí,

$$\text{Nuc}\, T \subset \text{Nuc}\, T^2 \subset \text{Nuc}\, T^3 \subset \cdots \subset V$$

$\dim V = n \Rightarrow \exists\, m : \text{Nuc}\, T^m = \text{Nuc}\, T^{m+i}, \forall i$

Suponha que m seja minimal c/ respeito a essa propriedade, i.e.

$\text{Nuc}\, T^{m-1} \subset \text{Nuc}\, T^m$ propriamente

Defina $W_1 = \operatorname{Nuc} T^m$, $W_2 = \operatorname{Im} T^m$ $\Big\}$ T-invariantes

Vejamos que $V = W_1 \oplus W_2$,

$T_1 = T|_{W_1}$ é nilp, $T_2 = T|_{W_2}$ é invert.

- $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

$v \in W_1 \cap W_2$. $v \in W_1$, $T^m v = 0$.

$v \in W_2$, $\exists\, v' \in V$: $v = T^m v'$.

Daí, $T^m(T^m v') = 0 \Rightarrow v' \in \operatorname{Nuc} T^{2m} =$

$= \operatorname{Nuc} T^m \Rightarrow \underbrace{T^m v'}_{v} = 0 \Rightarrow v = 0$

- $V = W_1 + W_2$ (o que implica $V = W_1 \oplus W_2$)

$\dim V = \dim W_1 + \dim W_2$ (núcleo e Imagem)

$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \underbrace{\dim(W_1 \cap W_2)}_{0}$

$\dim V = \dim(W_1 + W_2)$, logo FIM

pois "$\supset$" $\Rightarrow$ "$=$"

- T_1 é nilpotente, pois se $w \in W_1$

$\Rightarrow T_1^m(w) = T^m(w) = 0$

- T_2 é invertível.

Como $\dim W_2 < \infty$, basta mostrar que T_2 é injetora

Seja $w : T_2 w = 0$, $w \in W_2$

Como $w \in W_2$, $w = T^m w'$, $\exists\, w' \in V$

Assim $T_2 w = 0 \Rightarrow T_2 T^m w' = 0$

$\Rightarrow T^{m+1} w' = 0$

$\Rightarrow w' \in \operatorname{Nuc} T^{m+1} = \operatorname{Nuc} T^m \Rightarrow T^m w' = 0$

$\Rightarrow 0 = T^m w' = w \Rightarrow T_2$ é injetora

- Unicidade:

suponha $T = T_1' \oplus T_2'$ com

$$V = U_1 \oplus U_2$$

com $T_1' = T|_{U_1}$ m'-nilp

$T^{2'} = T|_{U_2}$ invertível

Veja que $W_1 \subset U_1$: seja $w_1 \in W_1$

e escreva $w_1 = u_1 + u_2 \in U_1 \oplus U_2$

se $\bar{m} = \text{máx}\{m, m'\}$, então $T^{\bar{m}} w_1 = 0$

Agora $T^{\bar{m}} w_1 = T^{\bar{m}}(u_1 + u_2) = \underbrace{T^{\bar{m}} u_1}_{0} + T^{\bar{m}} u_2$

$\Rightarrow T^{\bar{m}} u_2 = 0$

$\Rightarrow u_2 = 0$ pois $T|_{U_2}$ é invertível

$\Rightarrow W_1 \subset U_1$

A inclusão $U_1 \subset W_1$ se faz escrevendo

$$u_1 = w_1 + w_2 \in W_1 \oplus W_2$$

Daí, $U_1 = W_1$

Agora seja $w_2 \in W_2 = \operatorname{Im} T^m$.

Então $\exists\, v$ tq $w_2 = T^m v$.

Escreva $v = u_1 + u_2 \in U_1 \oplus U_2$

$$\Rightarrow w_2 = T^m(v) = T^m(u_1 + u_2) = T^m u_1 + T^m u_2$$

$= T^m u_2$ pois $u_1 \in U_1 = W_1 = \operatorname{Nuc} T^m$

U_2 é T-invariante, logo $w_2 = T^m u_2 \in U_2$

ou seja $W_2 \subset U_2$.

Para a inclusão contrária, tome

$u_2 \in U_2$, escreva

$$u_2 = w_1 + w_2 \in W_1 \oplus W_2$$

e note que $w_1 = u_2 - w_2 \in U_2$

Como $w_1 \in U_1$ (pois $U_1 = W_1$), temos

$w_1 \in U_2 \cap U_1 \Rightarrow w_1 = 0$ pois $V = U_1 \oplus U_2$

$\Rightarrow U_2 \subset W_2$ ($\therefore U_2 = W_2$) ▨

O que acontece com a parte nilpotente?

((λ é autovalor de T, então $S = T - \lambda I$ é nilpotente))

<u>Proposição</u>: $T \in L(V,V)$ m-nilpotente

Se $v \in V$ é tal que $T^{m-1}(v) \neq 0$, então

(a) $\{v, Tv, \dots, T^{m-1}v\}$ é LI

(b) $\exists$ subespaço T-invariante $W \subset V$ tq

$$V = [v, Tv, \dots, T^{m-1}v] \oplus W$$

$$= U \oplus W$$

Dem (a) exemplo $m=2$.

$\{v, Tv\}$ é LI:

se LD, ié, $\lambda_0 v + \lambda_1 T v = 0$, λ_0 e λ_1 ñ ambos nulos

$\Rightarrow \lambda_0 \neq 0$ (caso contrário, como $Tv \neq 0$, seria $\lambda_1 = 0$)

$\Rightarrow v = -\dfrac{\lambda_1}{\lambda_0} T v$ e, com isso,

$$Tv = -\frac{\lambda_1}{\lambda_0} T^2 v = 0,$$ contradição

pois assumimos $Tv \neq 0$.

(b) $U = [v, Tv, \ldots, T^{m-1} v]$

é T-invariante.

Indução em m = índice de nilp de T

$m=1 \Rightarrow T=0 \Rightarrow U=[v]$ e, qualquer que seja o complemento $\{v_2, \dots, v_n\}$ para uma base $\{\underline{u}, v_2, \dots, v_n\}$ de V,

$W = [v_2, \dots, v_n]$ é T-inv.

A hipótese de indução é: suponha válido para cada índice de nilpotência de 1 a $m-1$. Vamos considerar m.

Nesse caso, $\operatorname{Im} T$ é T-invariante e

$T|_{\operatorname{Im} T}$ é $(m-1)$-nilpotente, já que, se $v \in \operatorname{Im} T$, então $v = Tw$, $\exists w \in V$ e $T^{m-1} v = T^m w = 0$.

Seja $U' = U \cap \operatorname{Im} T$

Se $U = [v, Tv, \dots, T^{m-1} v]$, então $v \notin \operatorname{Im} T$. Caso contrário, teríamos

$v = Tw$ e $T^m w = T^{m-1} Tw = T^{m-1} v = 0$

e isto ñ pode acontecer

$\Rightarrow U' = [Tv, \ldots, T^{m-1} v]$

A hipótese de indução aplicada a $T|_{\mathrm{Im}\, T}$

nos diz $\mathrm{Im}\, T = U' \oplus W'$, onde

W' é um subesp T-inv de $\mathrm{Im}\, T$ (e portanto, de V).

Queremos W T-inv tq

$$V = U \oplus W$$

Defina, a partir de W',

$$W'' = \{ w \in V \mid T(w) \in W' \}$$

$\boxed{\text{Lema 1}}$ U e W'' geram V, ié,

$$V = U + W''$$

De fato, sj $u \in V$. Tem-se

$T(u) \in \mathrm{Im}\, T \Rightarrow T(u) = u' + w'$

$\in U' \oplus W'$

Escrevendo u' como CL dos elementos da base de U',

$$u' = \sum_{1}^{m-1} \lambda_i T^i v$$

$$= T\Big(\underbrace{\sum_{1}^{m-1} \lambda_i T^{i-1} v}_{u''}\Big) = T(u'')$$

$\Rightarrow \quad \underline{T(u)} = u' + w' = \underline{T(u'') + w'}$

$\Rightarrow \quad T(u) - T(u'') = w'$

$\Rightarrow T(\underbrace{u - u''}) = w' \in W'$

$\Rightarrow u - u'' \in W''$

$\Rightarrow u - u'' = w''$

ou $\quad u = u'' + w''$, $\quad u'' \in U$

$w'' \in W''$ $\quad \boxed{\text{LEMA 1}}$

Lema 2 $U \cap W' = \{0\}$

Tome $u \in U \cap W'$

Como $U = [v, Tv, \ldots, T^{m-1}v]$, então

$$Tu \in [Tv, \ldots, T^{m-1}v] = U'$$

Como W' é T-invariante, segue

$$T(u) \in W'$$

$$\Rightarrow T(u) \in U' \cap W'$$

Mas $\operatorname{Im} T = U' \oplus W'$, logo $T(u) = 0$.

Daí,

$$0 = T(u) = T\left(\sum_{0}^{m-1} \lambda_i T^i v\right)$$

$$= \sum_{0}^{m-1} \lambda_i T^{i+1} v$$

$$= \sum_{0}^{m-2} \lambda_i T^{i+1} v \quad (\text{pois } T^m v = 0).$$

Portanto, uma vez que $\{T^i v\}$,

$i = 0, \dots, m-2$ é LI, segue

$$\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_{m-2} = 0,$$

donde $u = \lambda_{m-1} T^{m-1} v \in U'$.

Assim, $u \in W' \cap U' \Rightarrow u = 0$, pois

$\operatorname{Im} T = U' \oplus W'$. $\boxed{\text{LEMA 2}}$

Olhe agora para o subespaço $U \cap W'' =$

$= [v, Tv, \dots, T^{m-1}v] \cap \{w \in V \mid T(w) \in W'\}$.

Do Lema 2, segue que

$$(U \cap W'') \cap W' = \{0\}.$$

Como W' é T-inv, pela def de W''

temos $W' \subset W''$.

Assim, W' e $(U \cap W'')$ são dois

subespaços de W'' com interseção

trivial.

Existe, portanto, $\overline{W} \underset{se}{\subset} V$ tq

$$W'' = \overline{W} \oplus W' \oplus (U \cap W'')$$

Seja $W = \overline{W} \oplus W'$

Então $W \subset W''$ e $W \cap (U \cap W'') = \{0\}$

Isto implica $W \cap U = \{0\}$:

$\Big[v \in W \cap U \Rightarrow v \in W \subset W'' \Rightarrow v \in U \cap W''$
$\Rightarrow v \in W \cap (U \cap W'') \Rightarrow v = 0 \Big]$

Queríamos: $V = U \oplus W$.

Temos: $U \cap W = \{0\}$.

Basta: $\dim V = \dim (U + W)$.

Da relação $W'' = W \oplus (U \cap W'')$,

temos $\dim W'' = \dim W + \dim (U \cap W'')$

De $V = U + W''$, tem-se

$\dim V = \dim U + \dim W'' - \dim(U \cap W'')$

Da 1ª relação, $\dim W'' - \dim(U \cap W'') =$
$= \dim W$.

Logo $\dim V = \dim U + \dim W = \dim(U+W)$.

Portanto $V = U \oplus W$.

Falta apenas mostrar que W é T-inv

Mas $W \subset W''$, logo $T(W) \subset W'$

Como $W' \subset W$, pela def de W,

logo $T(W) \subset W$. $\blacksquare$