11) Seja $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ uma série de potências cujos coeficientes são determinados pelas igualdades $a_0 = a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Mostre que o raio de convergência desta série é igual a $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$.

Resposta: Temos que $a_0 = a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$

ou: $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} = a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

Assim, reorganizamos e temos uma sequência de fibonacci. Ao trocarmos $a_n = f(n+1)$ e portanto temos:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \lim \sqrt[n]{a_n}$$

Então o raio de convergência é o inverso desse valor, que é $-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, pois:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = 1$$

$$\frac{(1+\sqrt{5})(-1+\sqrt{5})}{2} = 4$$

$$-1 + \cancel{\sqrt{5}} - \cancel{\sqrt{5}} + (\sqrt{5})^2 = 4$$

$$-1 + 5 = 4$$

$$4 = 4$$

Obs: $\forall n \geq 3$, $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ e $\frac{f_n}{f_{n-1}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, que é a chamada razão áurea, ou seja o limite da razão.