17) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se existirem $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$, prove que f é uniformemente contínua.

<u>Resposta</u>: Tomando $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, e dado que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$, devemos provar que f é uniformemente contínua.

Assim tomando a definição, temos que:

i) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists A > 0$ tal que $x > A \to |f(x) - L| < \varepsilon/4$

ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists B > 0$ tal que $x < -B \to |f(x) - l| < \varepsilon/4$

Assim se $x > A$, $y > A$ vale que $|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{4}$ e $|f(y) - L| < \varepsilon/4$, com isso:

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(x) - L| + |f(y) - L| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

O mesmo ocorre se $x < -B$, $y < -B$ vale que $|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{4}$ e $|f(y) - l| < \varepsilon/4$, com isso:

$$|f(y) - f(x)| \leq |f(x) - l| + |f(y) - l| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Concluímos que f é uniformemente contínua em qualquer um dos casos:

- $x, y > A$
- $x \in [-B, A]$, $y > A$
- $x, y \in [-B, A]$
- $x, y < -B$

Portanto f é uniformemte contínua em $\mathbb{R}$.