21) Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ convexa, demonstre que:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

<u>Definição de função convexa</u>: A função $f: I \to \mathbb{R}$ é convexa quando:

$$x \in (a,b) \subseteq I \to f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) =$$

$$f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

- Se f é convexa, então dados $a_1, a_2, \dots, a_N \in I$ e $t_1, t_2, \dots, t_N \in [0,1]$ com $\sum t_i = 1$ tem-se:

$$f(t_1a_1 + t_2a_2 + \dots + t_Na_N) \leq t_1 f(a_1) + t_2 f(a_2) + \dots + t_N f(a_N)$$

<u>Resposta</u>: Temos que a f é convexa, portanto

$$f\left(\sum_{K=1}^{N} t_K a_K\right) \leq \sum_{K=1}^{N} t_K f(a_K)$$

Com cada $t_K \in [0,1]$ e $\sum_{K=1}^{N} t_K = 1$, aplicamos a propriedade da soma, então:

$$\sum_{K=1}^{N} \frac{1}{N} f(a+hK)$$

Com $t_K = \frac{1}{N}$, temos $\sum_{K=1}^{N} \frac{1}{N} = 1$, então:

$$f\left(\sum_{K=1}^{N} \frac{1}{N}[a+hK]\right) \leq \sum_{K=1}^{N} \frac{1}{N} f(a+hK)$$

Como $h = \frac{b-a}{N}$, temos:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N}[a+hk] = a + \frac{(b-a)\cancel{N}.(N-1)}{2N^{\cancel{2}}} = a + \frac{(b-a)}{2}.\frac{(N-1)}{N} =$$

$a + \frac{(b-a)}{2}.\frac{(N-1)}{N}$, como $\frac{N-1}{N} \to 1$, então

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N}[a+hk] = a + \frac{b-a}{2}.1 = \frac{2a+b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$$

Como f é convexa em I e dado um $c \in I$, então existem as derivadas laterais $f'_+(c)$ e $f'_-(c)$, e f é contínua em int I. Temos que o int I é o interior do intervalo.

Assim pode-se trocar a ordem do limite com a função, pois:

$$a < \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N}[a+hk] < b$$

E por ser uma média: $\frac{a+b}{2}$ e $b \neq a$, então é um ponto interior e por propriedades de limite temos:

$$\lim_{N\to\infty} f\left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N}[a+hk]\right) = f\left(\lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N}[a+hk]\right) =$$

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} f(a+hk) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Assim:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$