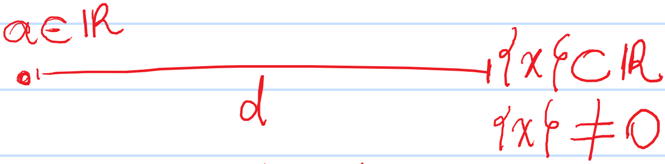
7) Defina a distância de um ponto $a \in \mathbb{R}$ a um conjunto não-vazio $X \subset \mathbb{R}$ como $d(a, X) = \inf\{|x-a|; x \in X\}$. Prove:

1) $d(a, X) = 0 \leftrightarrow a \in \bar{X}$

2) Se $F \subset \mathbb{R}$ é fechado, então para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $b \in F$ tal que $d(a, F) = |b-a|$.




$d(a, X) = \inf\{|x-a| : x \in X\}$

1) $d(a, X) = 0 \leftrightarrow a \in \bar{X}$

- $\bar{X}$ é o fecho do conjunto $X$, ou seja é o conjunto de todos os pontos de aderência de $X$.
- Um ponto $\underline{a}$ é aderente a $X$ quando há sequência $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.
- Se $X = \bar{X}$, temos que $X$ é fechado.

· O ponto $\underline{a}$ é aderente a $X$ se, e somente se, toda vizinhança de $\underline{a}$ intersecta $X$.

· O conjunto $\overline{X}$ é fechado.

1) Para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Assim, $(x_n)$ é uma sequência em $^{N}X$ que tende à $\underline{a}$.
Portanto, $a \in \overline{X}$.

$a \in \mathbb{R}$

$X \subset \mathbb{R}$

$d(a, X) =$ $\inf\{|x-a|; x \in X\}$

$X$ conjunto ñ vazio

Como $\frac{1}{n}$ é a menor distância possível,

temos; $|x_n - a| < \frac{1}{n}$, $(x_n) \to a$

E como o $\overline{X}$ (fecho) é o conjunto de todos os pontos de aderência ($\lim x_n = a$), temos que $a \in \overline{X}$.

Agora, seja $(x_N)$ uma sequência em $X$ que tende à $\underline{a}$. Então, para todo $\varepsilon > 0$, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_{N_0} - a| < \varepsilon$. Assim,

$$0 = \inf \{ |x_N - a| : x_N \in (x_N) \}, \text{ e}$$
$$\geq \inf \{ |x - a| : x \in X \} \geq 0$$

Então igualamos a zero o infímo da sequência $(x_N)$, e em seguida comparamos com zero dos pontos de um conjunto $X$. Como o fecho é o conjunto dos pontos de aderência para $X$, então a menor distância zero é o limite de $X_N$ e pontos de aderência no fecho de $X$, que é $\overline{X}$. Logo:

$$d(a, X) = 0.$$

2) Se $F \subset \mathbb{R}$ é fechado, então para todo $a \in \mathbb{R}$ existe $b \in F$ tal que
$$d(a, F) = |b - a|$$

• Dado um conjunto F é fechado, se $F = \overline{F}$.

• Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto quando for limitado e fechado.

Consideremos o conjunto compacto $C = F \cap B[a, 2(d(a,F)]$. Temos, pela definição de $d(a,F)$, que $C \neq \emptyset$.

Como C é limitado e fechado, tomamos $C \neq 0$. Seja $d = (a,F)$ e $x_N \in C$ tal que:

$$|x_N - a| < d + 1/N$$

Como C é compactado, existe uma subsequência $(x_{N_k})$ de $(x_N)$ tal que $x_{N_k} \to b \in C$.

"X é compacto, se e somente se, toda sequência $(x_N)$ com $x_N \in X$ possui uma subsequência $(y_N)$ com $\lim y_N \in X$."

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $N + k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|x_{N_k} - a| < d + \frac{\varepsilon}{2}, \text{ e}$$

$$|b - x_{N_k}| > \frac{\varepsilon}{2}$$

Portanto:

se anulam

$$|b-a| \leq |b - x_{N_k}| + |x_{N_k} - a| < d + \varepsilon$$

Assim, $|b-a| \leq d$. Mas, como $b \in C \subset F$ e pela definição de $d = d(a, F)$, temos que $|b-a| \geq d$ e, consequentemente:

$$|b-a| = d$$