Já sabemos que é uma condição dada: $a = \sup A = \inf B = b$, então $\sup(A) \leq \inf B$, pois $\forall x \in A$ e $y \in B$ vale a condição $x < y$ implica $\sup(A) < y$ e $\sup(A)$ ser cota inferior implica $\sup(A) \leq \inf(B)$, suponha por absurdo que fosse $\sup A < \inf B$, então o intervalo $(\sup(A), \inf(B))$ não possui valores $x \in A$, pois se não $x > \sup(A)$, nem $y \in B$ pois daí $y < \inf(B)$, mas como existem racionais em tal intervalo, pois $\mathbb{Q}$ é denso e $A \cup B = \mathbb{Q}$, chega-se em um absurdo.

Dado o conjunto dos cortes como D, temos uma bijeção $f: D \to \mathbb{R}$

Definimos $f: D \to \mathbb{R}$ como $f(A, B) = \sup(A) = \inf(B)$.

1) f é injetora, suponha $f(A, B) = f'(A', B')$ então $\sup(A) = \inf(B) = \sup(A') = \inf(B')$.

① Dado $x \in A$ vamos mostrar que $x \in A'$.

$x < \sup(A') = \inf(B') \leq y, \forall y' \in B'$

com isso $x \in A'$

A inclusão $A' \subset A$ é análoga, então vale $A = A'$.

① Dado $y \in B$, vamos mostrar que $y \in B'$.

$x' < \sup(A) < \inf(B') \leq y$

Com isso $y \in B'$, de modo similar, $B' \subset B$ portanto $B = B'$. Como vale $B = B'$ e $A = A'$ então a função é injetiva.

2) A f é sobrejetiva, para qualquer $y \in \mathbb{R}$, tomamos os conjuntos $(-\infty, y) \cap \mathbb{Q} = A$ e $B = [y, \infty) \cap \mathbb{Q}$, A não possui máximo, para todo $x \in A$ e $y \in B$ tem-se $y > x$ e

$$\mathbb{Q} = [(-\infty, y) \cap \mathbb{Q}] \cup [[y, \infty) \cap \mathbb{Q}],$$

além disso vale $\sup(A) = y = \inf(B)$,

portanto $f(A, B) = y$ e a função é sobrejetora, logo sendo também injetora temos que f é bijetora.