/ /

Lista 7

Ex. 4 Devemos mostrar que $\forall \varepsilon > 0\ \forall y \in \overline{V}$, $|f(y) - g(y)| < \varepsilon$.

Como f e g são contínuas em X, segue-se que $\exists \delta > 0$ t.q. $x \in V_\delta(y) := \{u \in X \mid ~~o<~~ |u - y| < \delta\}$

$\rightarrow |f(y) - f(x)|, |g(y) - g(x)| < \varepsilon/2$

(basta tomar $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, com $\delta_1 > 0$ t.q. $x \in V_{\delta_1}(y) \rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon/2$, $\delta_2 > 0$ t.q. $x \in V_{\delta_2}(y) \rightarrow |g(y) - g(x)| < \varepsilon/2$)

Agora, $\exists\, x \in V$ t.q. $|x - y| < \delta$ (já que V é denso em $\overline{V}$);

logo, $\exists\, \tilde{x} \in V$ t.q. $|f(\tilde{x}) - f(y)|, |g(y) - g(\tilde{x})| < \varepsilon/2$. Como $\forall x \in V$ $f(x) = g(x)$, segue-se que

$$|f(y) - g(y)| \leq |f(y) - f(\tilde{x})| + |f(\tilde{x}) - g(y)| = |f(y) - f(\tilde{x})| + |g(\tilde{x}) - g(y)| < \varepsilon,$$

em que usamos o fato que $|f(y) - f(\tilde{x})| < \varepsilon/2$, $|g(\tilde{x}) - g(y)| < \varepsilon/2$.

Ex. 8 (a) $\rightarrow$ (b) direto.

(b) $\rightarrow$ (c)

Suponha que exista K compacto t.q. $f^{-1}(K)$ não o seja.

Como K é fechado e f é contínua, então necessariamente $f^{-1}(K)$ é fechado. Com efeito, se $x \in \overline{f^{-1}(K)}$, então existe $x_n \in f^{-1}(K)$ t.q. $x_n \rightarrow x$. Agora, $\forall n$, $f(x_n) \in K$, donde se segue da continuidade de f e da compacidade de K que $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(x) \in K$ (K é fechado). Como $f(x) \in K$, $x \in f^{-1}(K)$.

Assim, $f^{-1}(K)$ é ilimitado: $\exists (y_n)$, $y_n \in f^{-1}(K)$, $|y_n| \rightarrow \infty$.

☐Reunião ☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos

Então, $\exists (x_n)$, $x_n \in K$, t.q. $f(y_n) = x_n$

Como, por hipótese, $|f(y_n)| \to \infty$, segue-se que $|x_n| \to \infty$, i.e., que K não é limitado, um absurdo.

Logo, K compacto $\to f^{-1}(K)$ compacto.

$(c) \to (a)$

Suponha que $\lim\limits_{x \to +\infty} |f(x)| \neq +\infty$, i.e, que

$\exists M > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists \; x > \delta$ t.q. $|f(x)| < M$.

Em particular, $\exists (x_n)$, $x_n \to +\infty$, t.q. $|f(x_n)| < M$

Seja $y_n = f(x_n)$, e note que $\forall n$, $|y_n| < M$. Logo, o compacto $[-M, M]$ tem pré-imagem por f ilimitada, i.e., $f^{-1}([-M, M])$ não é compacto. Tal contradição nos permite concluir que $\lim\limits_{x \to \infty} |f(x)| = +\infty$.

Digitalizado com CamScanner