10) Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$, prove que se as séries de potências:

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n} \qquad \sum_{n \geq 0} a_n x^{2n+1},$$ têm ambas raio de convergência igual a $1/\sqrt{L}$

• Seja $r>0$ o raio de convergência da série $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$, então $r = \frac{1}{L}$, onde $L = \lim\sup \sqrt[n]{|a_n|}$.

Resposta: Se tomarmos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, onde $b_{2n+1} = 0$ e $b_{2n} = a_n$, e temos que:

$$\sqrt[n+1]{|b_{2n+1}|} = 0 \text{ e } \lim \sqrt[2n]{|b_{2n}|} = \lim \sqrt[2n]{|a_n|} = \sqrt{L}$$

Portanto $\left(\sqrt[n+1]{|b_n|}\right)$ possui uma subsequência que converge para $\sqrt{L}$, sendo esse o maior valor de aderência e portanto é o $\lim\sup \sqrt[n+1]{|b_n|}$. Com isso $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ possui raio de convergência $\frac{1}{\sqrt{L}}$.

Então $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{2n+1}$, possuem o mesmo raio de convergência, pois ambas convergem para os mesmos valores.