5) Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas, com $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Defina $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = f(x)$ se x for racional e $\varphi(x) = g(x)$ para $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

Prove que:

$$\underline{\int_a^b} \varphi(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \quad e \quad \overline{\int_a^b} \varphi(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$$

Conclua que φ é integrável se, e somente se, $f = g$.

Temos que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínuas, logo f, g são integráveis e $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$. Temos que:

$$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R} \begin{cases} f(x), & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ g(x), & \text{se } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \end{cases}$$

Temos que φ é uma função descontínua num conjunto infinito. Também no conjunto dos números racionais do intervalo $[a,b]$.

Temos que φ é limitada no intervalo $[a,b]$ e precisamos mostrar que φ é integrável no intervalo $[a,b]$.

Como $f(x) \leq g(x)$, temos que φ está limitada de modo que $f(x) \leq \varphi \leq g(x)$.

Se dividirmos o intervalo $[a,b]$ em várias partições, teremos então:

$$[a,b] = [a=t_0, t_1, \ldots\ldots, t_{N-1}, t_N=b].$$

Se tomarmos a partição $[t_0,t_1]$ e como $f(x) \leq \varphi(x) \leq g(x)$, temos:

$$\underline{\int_{t_0}^{t_1}} \varphi(x) = \underline{\int_{t_0}^{t_1}} f(x) \quad e \quad \overline{\int_{t_0}^{t_1}} \varphi(x)\,dx = \overline{\int_{t_0}^{t_1}} g(x)\,dx$$

Repete-se este processo até o intervalo $[t_{N-1}, t_N]$:

$$\underline{\int_{t_{N-1}}^{t_N}} \varphi(x)\,dx = \underline{\int_{t_{N-1}}^{t_N}} f(x)\,dx \quad e \quad \overline{\int_{t_{N-1}}^{t_N}} \varphi(x)\,dx = \overline{\int_{t_{N-1}}^{t_N}} g(x)\,dx$$

Temos que as integrais inferiores podem ser somadas:

$$\underline{\int_{t_0}^{t_N}} \varphi(x)\,dx = \underline{\int_{t_0}^{t_1}} f(x)\,dx + \ldots\ldots + \underline{\int_{t_{N-1}}^{t_N}} f(x)\,dx = \underline{\int_{t_0}^{t_N}} f(x)\,dx$$

O mesmo vale para as integrais superiores:

$$\overline{\int_{t_0}^{t_N}} \varphi(x)\,dx = \overline{\int_{t_0}^{t_1}} g(x)\,dx + \ldots\ldots + \overline{\int_{t_{N-1}}^{t_N}} g(x)\,dx = \overline{\int_{t_0}^{t_N}} g(x)\,dx$$

Pelo Teorema 4, temos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, então f é integrável se para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$

do intervalo $[a,b]$ tal que $\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$.

Então temos as partições w_i, com $i=1,\dots,N$

E pelo lema 4: Sejam σ, Σ conjuntos limitados não-vazios de números reais. Suponhamos que, para quaisquer $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$, seja $s \leq S$. Então $\sup \sigma = \inf \Sigma$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existem $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$ tais que $S - s < \varepsilon$.

Então tomando um $\varepsilon > 0$ temos que $S - s < \varepsilon$

E por definição uma função somente é integrável se:

$$\int_{-a}^{b} \varphi(x)\,dx = \int_{a}^{-b} \varphi(x)\,dx$$

Então: $\int_{-a}^{b} \varphi(x)\,dx = \int_{-a}^{b} f(x)\,dx$ e $\int_{a}^{-b} \varphi(x)\,dx = \int_{a}^{-b} g(x)\,dx$

Então para $\varphi(x)$ ser integrável então:

$$\int_{-a}^{b} \varphi(x)\,dx = \int_{-a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{-b} g(x)\,dx = \int_{a}^{-b} \varphi(x)\,dx$$

Temos que $f = g$.