16) Sejam $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta : I \to [a,b]$ deriváveis. Defina $\varphi : I \to \mathbb{R}$ pondo:

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,dt, \text{ para todo } x \in I$$

Demonstre que φ é derivável e $\varphi'(x) = f(\beta(x)).\beta'(x) - f(\alpha(x)).\alpha'(x)$.

- Se f é contínua então f é derivável, e também integrável.
- Seja $a<c<b$. A função limitada $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se suas restrições a $[a,c]$ e $[b,c]$ o forem integráveis. Neste caso:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Resposta: Temos que a f é contínua, logo ela é integrável. Então tomando um $c \in [a,b]$, temos:

$$\varphi(x) = \int_a^b f(x)dx$$, então trocando as variáveis:

$$\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt = \int_{\alpha(x)}^{c} f(t)dt + \int_c^{\beta(x)} f(t)dt$$

Como: $\int_{\alpha(x)}^{c} f(t)dt = -\int_c^{\alpha(x)} f(t)dt$, então:

$$\varphi(x) = \int_c^{\beta(x)} f(t)dt - \int_c^{\alpha(x)} f(t)\,dt$$

Pelo Teorema 10: (Mudança de Variável).

Sejam $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, com g' integrável e $g([c,d]) \subset [a,b]$. Então:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

Como f é contínua então f possui uma primitiva dada por:

$$F:[a,b] \to \mathbb{R} = \begin{cases} \varphi = F \circ \beta,\ F \circ \alpha \\ \text{onde } F: I \to \mathbb{R} \text{ é dada} \\ \text{por: } F(x) = \int_c^x f(t)\,dt \end{cases}$$

Assim pelo T.F.C F é derivável com $F'(x) = f(x)$, e portanto φ é derivável pois se trata de uma ~~soma~~ composta de funções deriváveis.

Agora aplicando a regra da cadeia, temos que:

- $(F \circ \beta)'(t) = F'(\beta(t))$, e

$$\beta'(t) = f(\beta(t)) \cdot \beta'(t) \quad \forall t \in [a,b].$$

- $(F \circ \alpha)'(t) = F'(\alpha(t))$, e

$$\alpha'(t) = f(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

Com isso voltando em $\varphi(x)$, temos:

$$\varphi(x) = \int_c^{\beta(x)} f(t)\,dt - \int_c^{\alpha(x)} f(t)\,dt$$

$$\varphi'(x) = F'(\beta(x))\beta'(x) - F'(\alpha(x))\alpha'(x)$$

$$\varphi'(x) = f(\beta(x)).\beta'(x) - f(\alpha(x)).\alpha'(x)$$

$$\blacksquare$$