Lista 7, Ex 19.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua t.q. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = a$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Seja $\varepsilon > 0$ dado.

Pelas def de limites em $\pm\infty$ ~~Então, $\forall \varepsilon > 0$~~, $\exists\, M_1^{(\varepsilon)}, M_2^{(\varepsilon)} > 0$ t.q. $\forall x \leq -M_1$, $|f(x) - a| < \varepsilon/2$ e $\forall x \geq M_2$, $|f(x) - b| < \varepsilon/2$

Seja $I = [-M_1, M_2]$. Como I é compacto e $f|_I$ é contínua, $f|_I$ é uniformemente contínua:

$\exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (que podemos tomar, sem perda de generalidade, menor do que $M_2 + M_1$) t.q.

se $x, y \in I$ forem t.q. $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/2$.

Afirmamos que se $x, y \in \mathbb{R}$ forem tais que $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Com efeito, o resultado é imediato se $x, y \leq -M_1$, $x, y \geq M_2$ ou $x, y \in I$.

Suponha que $x \leq -M_1$, $y \geq -M_1$ sejam t.q. $|x - y| < \delta$.

Então, $|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(-M_1)| + |f(-M_1) - f(y)|$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Analogamente, se $x > M_2$ e $y < M_2$ forem t.q. $|x - y| < \delta$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Assim, $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.q. $|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

☐Reunião ☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos

Lista 8

4. Suponha ξ contínua em $x=a$. Então,

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a} \xi(x) = \xi(a) = L$$

Como $\lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe, segue-se da unicidade dos limites que $f'(a) = L$.

Rec., se $f'(a)=L$, então $\lim_{x\to a} \xi(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$= L = \xi(a)$, e portanto, ξ é contínua em $x=a$.

Se $x \neq a$, então $\lim_{y\to x} \frac{f(y)-f(a)}{y-a} = \frac{\lim_{y\to x}(f(y)-f(a))}{\lim_{y\to x}(y-a)} = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

$= \xi(x)$, e portanto, ξ é contínua em $x \in X\setminus\{a\}$, independentemente da existência de $f'(a)$.