7) Prove que se $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ são contínuas, então:

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2\,dx \cdot \int_a^b g(x)^2\,dx$$

Temos que f, g são contínuas e temos que toda função contínua é integrável.

Pelo teorema 5 temos que: sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis e pelos itens:

5) $|f(x)|$ é integrável e se tem:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$, segue-se que se $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$ então $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq K.(b-a)$

6) O produto $f.g$ é integrável.

Teorema 8: Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Se f é contínua no ponto $c \in [a,b]$, então a função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por:

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, é derivável no ponto c e se tem $F'(c) = f(c)$.

Temos que: $\int_a^b f(x)\,dx$, é integrável e contínua em um dado ponto $c \in [a,b]$. Assim temos:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{, e } F'(c) = f(c)$$

E pelo <u>Corolário</u>: Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, existe $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, tal que:

$$F' = f \quad e \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Então: $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$ e $\int_a^x g(t)\,dt = G(x)$

Como: $\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leq \left[\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx\right]^2 =$

$$\left[F(x) \cdot G(x)\right]^2 = (F(x))^2 \cdot (G(x))^2 =$$

$$(F(x))^2 = \int_a^b f(x)^2\,dx \quad e \quad (G(x))^2 = \int_a^b (g(x))^2\,dx$$

<u>Outra solução:</u> Teorema Desigualdade de Cauchy-Schwarz:

Seja V um espaço vetorial com produto interno. Se u e v são elementos de V, então:

$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$, e a igualdade é válida se, e somente se, os elementos u e v são l. d.

Se considerarmos um polinômio de segundo grau p na variável α definida por:

$$p(\alpha) = \int_a^b (f(x) - \alpha g(x))^2 dx$$

$$= \int_a^b (f(x)^2 - 2\alpha f(x) g(x) + \alpha^2 g(x)^2) dx$$

$$= \int_a^b f(x)^2 dx - 2\alpha \int_a^b f(x) g(x) dx + \alpha^2 \int_a^b g(x)^2 dx$$

Observamos que $p(\alpha) \geq 0$, portanto:

$$\Delta = \left[2\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 - 4\left[\int_a^b g(x)^2 dx \right] \left[\int_a^b f(x)^2 dx \right] \leq 0,$$

Temos que:

$$\left[\cancel{2}\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^{\cancel{2}} \leq \cancel{4}\left[\int_a^b g(x)^2 dx \right] \left[\int_a^b f(x)^2 dx \right]$$

$$\left[\int_a^b f(x)^2 \cdot g(x)^2 dx \right] \leq \left[\int_a^b g(x)^2 dx \right] \cdot \left[\int_a^b f(x)^2 dx \right]$$

Portanto:

$$\left[\int_a^b f(x) g(x) dx \right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \cdot \int_a^b g(x)^2 dx$$