Q1. Denote por $\mathcal{C}(\mathbb{N})$ o conjunto das sequências crescentes de nºs naturais.

Mostremos que nenhuma função $\varphi : \mathbb{N} \to$ pode ser sobrejetiva.

Para tanto, devemos construir $f \in \mathcal{C}(\mathbb{N})$ tal que $\varphi_n \neq f$ $\forall n \in \mathbb{N}$, em que φ_n é o valor de φ no ponto $n \in \mathbb{N}$.

Isto é feito ~~escolhendo, para cada $n \in X$,~~ ~~um elemento $f(n) \in \mathbb{N}$ diferente de $\varphi_n(n)$,~~ ~~e em seguida, tomando~~

$$\cancel{f(i) = \begin{cases} i & i<n \\ \varphi_n(n)+1 & i \geq n \quad \varphi_n(n) \\ \varphi_n(n)+i+1 \end{cases}}$$

ao se definir, por exemplo f pela ~~pe~~ lei

$$f(i) = \begin{cases} i, & i<n \\ \varphi_n(n) + i+1-n, & i \geq n, \end{cases}$$

note que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f(n) \neq \varphi_n(n)$. Logo, $f \neq \varphi_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ e $f \in \mathcal{C}(\mathbb{N})$.

Q4.

Seja $Y = \{n \in \mathbb{N} \mid n > a, n \notin X\}$, e suponha que $Y \neq \phi$. Então, pelo PBO, Y possui um menor elemento que denotaremos por m.

Como todo elemento de Y é maior do que a, temos que $m > a$, e portanto, que $m-1 \geq a$.

Agora $m-1 \in X$, donde se segue que $m-1+1 = m \in X$, um absurdo.

Logo, $Y = \phi$.

Q3 Seja (x_n) uma sequência convergente de nºs inteiros. Mostremos que (x_n) é essencialmente constante

Com efeito, $\lim x_n = a \in \mathbb{Z}$. Suponha que não, e seja $\varepsilon = \min\{a - [a], [a]+1-a\}$. Assim, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t q $\forall n \geq n_0$, $|x_n - a| < \varepsilon$. Em particular,

$$|x_{n_0} - a| < \varepsilon,$$

e como $x_{n_0} \in \mathbb{Z}$, segue-se que $d(a, \mathbb{Z}) < \varepsilon$. No entanto, $\varepsilon = d(a, \mathbb{Z})$, o que é um absurdo.

Seja $\varepsilon = 1$. Então, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t q $\forall n, m \geq n_0$,

$$|x_n - x_m| < 1$$

(toda seq convergente é de Cauchy). Se $x_n \neq x_m$, então $|x_n - x_m| \geq 1$, donde se segue que $\forall n \geq n_0$, $x_n = a$.

☐Planejamento ☐Outros Assuntos

Q3 • $\lim \varphi(n) = +\infty \rightarrow \forall k \in \mathbb{N},\ \varphi^{-1}(k)$ é finito.

Com efeito, $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ \varphi(n) > k$ (já que $\lim \varphi(n) = +\infty$), e portanto,

$$\varphi^{-1}(k) = \{n \in \mathbb{N} \mid \varphi(n) = k\} \subset I_{n_0} = \{1, 2, \ldots, n_0\},$$

o qual é finito

• $\forall k \in \mathbb{N},\ \varphi^{-1}(k)$ é finito $\rightarrow \forall F \subset \mathbb{N}$ finito, $\varphi^{-1}(F)$ é finito

Seja $F \subset \mathbb{N}$ finito. Então, F é limitado, i.e., $\exists k_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $F \subset I_{k_0}$, e portanto,

$$\varphi^{-1}(F) \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} \varphi^{-1}(k)$$

Como, por hipótese, $\varphi^{-1}(k)$ é finito $\forall k$, segue-se que

$$\bigcup_{k=1}^{k_0} \varphi^{-1}(k) \text{ é finito.}$$

• $\forall F \subset \mathbb{N}$ finito, $\varphi^{-1}(F)$ é finito $\rightarrow \lim \varphi(n) = +\infty$.

Devemos dem. que $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists n_0\ \forall n > n_0\ \ \varphi(n) > k$

Seja $k \in \mathbb{N}$. Como, por hipótese, $\varphi^{-1}(I_k)$ é finito, segue-se que $\varphi^{-1}(I_k)$ é limitado, i.e., $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. ~~$\varphi^{-1}(I_k) \subset I_{n_0}$ se~~ é limitado sup por n_0.
Em outras palavras, se $n > n_0$, então $n \notin \varphi^{-1}(I_k)$, i.e., $\varphi(n) \notin I_k$, ou ainda, $\varphi(n) > k$.

Q4. Como $\lim x_n \neq a$, $\exists\, \varepsilon > 0\ \forall n_0\ \exists n > n_0$ t.q. $|x_n - a| \geq \varepsilon$

Logo, $\exists\,(x_{n_k})$ t.q. $|x_{n_k} - a| \geq \varepsilon \ \forall k \in \mathbb{N}$.

Como a sequência $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(k) = x_{n_k}$, é limitada, segue-se do T de Bolzano-Weierstrass que x admite uma subs. conv.

Denotaremos, por simplicidade, o termo geral desta subs. por x_{n_k}, e o seu limite por b.

Mostremos que $b \neq a$.

Com efeito, $\exists\, k_0\ \forall k > k_0$, $|x_{n_k} - b| < \varepsilon/2$.

Agora, $|a - b| \geq |x_{n_k} - \cancel{b}^{\,a}| - |x_{n_k} - \cancel{a}^{\,b}| \geq \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2$

$(|x_{n_k} - a| \leq |x_{n_k} - b| + |b - a|)$, e portanto, $a \neq b$

Digitalizado com CamScanner

Q4 (x_n) limitada

Suponha, por absurdo, que $\lim x_n \neq a$, ou seja, que $\exists \varepsilon > 0 \; \forall n_0 \; \exists n > n_0 \; |x_n - a| \geq \varepsilon$.

Em particular, $\exists (x_{n_k})$, $n_k \to \infty$, t.q. $\forall k \in \mathbb{N}$

$$|x_{n_k} - a| \geq \varepsilon$$

Como $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, $x(k) = x_{n_k}$, é uma seq. limitada, x admite uma subseq. conv., pelo T. de Bolzano-Weierstrass. Denotemos, por simplicidade, seu termo geral por x_{n_k}. Naturalmente (x_{n_k}) é subseq. de (x_n), e, como tal, conv. para a. Assim, $\exists k_0 \; \forall k \geq k_0$ $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$. Tal contradição nos leva à $\lim x_n = a$.

☐Reunião ☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos

Q5 $A \cup B = \mathbb{Q}$, $x \in A, y \in B \to x < y$.

$\sup A = \inf B$

Naturalmente, $\sup A \leq \inf B$, já que todo $y \in B$ é cota superior para A e todo $x \in A$ é cota inferior para B

Mostremos que $a = \sup A < \inf B = b$ é falso

Com efeito, seja $\varepsilon = b - a$ Então, $\exists\, x \in A$ e $y \in B$

t.q. $\sup A - \varepsilon/2 < x < y < \inf B + \varepsilon/2$. Logo, $\frac{y+x}{2}$

$\leq \frac{a + a + \frac{3\varepsilon}{2}}{2} = a + \frac{3\varepsilon}{4} < b$,

$\frac{y+x}{2} \geq \frac{a + \varepsilon + a - \varepsilon/2}{2} = a + \frac{\varepsilon}{4} > a$,

e $\frac{x+y}{2} \in \mathbb{Q}$, i.e, $\frac{x+y}{2}$ é um racional pertencente do intervalo (a, b), um absurdo, já que $(a,b) \cap \mathbb{Q} = \phi$.

Logo, $\sup A = \inf B$

Seja $f: D \to \mathbb{R}$ t.q. $f((A,B)) = \sup A$.

Então, f é bijetiva. Com efeito, se (A,B) e (A',B') forem dois cortes distintos, então $\sup A \neq \sup A'$ / se $\sup A = \sup A'$, então $\inf B = \inf B'$ e como $A \cup B = A' \cup B' = \mathbb{Q}$, $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sup A\} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \sup A'\} = A'$/

Agora seja $x \in \mathbb{R}$. se $x \in \mathbb{Q}$, faça $A = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\}$, $B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \geq x\}$; se $x \notin \mathbb{Q}$, faça $A = \{y \in \mathbb{Q} \mid y < x\}$, $B = \{y \in \mathbb{Q} \mid y > x\}$, e note que $\sup A = x = \inf B$ em ambos os casos.

Q6 $\sum a_n < \infty$, (b_n) monótona e limitada

$\rightarrow \sum a_n b_n < \infty$

Suponhamos que (b_n) seja não-decrescente. Então $\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0$ t.q. $\forall n > n_0$, $|b_n - \sup\{b_n\}| < \varepsilon$. Suponhamos que $\sup\{b_n\} > 0$ (se $\sup\{b_n\} \leq 0$, a dem. é análoga). Apliquemos o teste de Cauchy para séries. Como $\sum a_n < \infty$, dado $\varepsilon > 0 \; \exists n_1$ t.q. $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$|a_{n_1} + \cdots + a_{n_1+p}| < \varepsilon$$

Agora, $\forall p \in \mathbb{N}$, $|a_{n_2} b_{n_2} + \cdots + a_{n_2+p} b_{n_2+p}| <$

$$|a_{n_2} + \cdots + a_{n_2+p}|(|b| + \varepsilon) < \varepsilon|b| + \varepsilon^2,$$

em que $b = \sup\{b_n\}$ e $n_2 = \max\{n_0, n_1, N\}$, com N t.q. $\forall n > N$ $b_n > 0$.

A dem. caso (b_n) seja não-crescente é análoga.

Q6. Caso 1 (a_n) é ilimitada.

Então, $\exists (x_{n_j})$ $n_j \to +\infty$, t.q. $a_{n_j} \to +\infty$

Como $\lim \frac{a_{n_j}}{1+a_{n_j}} = 1$, segue-se, em particular, que

$\lim \frac{a_n}{1+a_n} \neq 0$, e portanto, que $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ é div

Caso 2 (a_n) é limitada, com $\lim a_n \neq 0$.

Se $\lim a_n = \alpha$, como $\alpha \neq 0$, seguir-se-á que

$\lim \frac{a_n}{1+a_n} = \frac{\alpha}{1+\alpha} \neq 0$

Caso contrário, $\exists \alpha \neq 0$ e (n_j), $n_j \to \infty$, t.q.

$\lim \frac{a_{n_j}}{1+a_{n_j}} = \alpha \neq 0$. Neste caso, $\lim \frac{a_n}{1+a_n} \neq 0$.

Caso 3. $\lim a_n = 0$

Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ $\forall n > n_0$ $(a_n+1)^{-1} > 1/2$.

Assim, $\sum_{n>n_0} \frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{1}{2} \sum_{n>n_0} a_n$

Como $\sum a_n = +\infty$ (e $a_n \geq 0$ $\forall n$), temos que

$\forall M > 0$ $\forall n_1$ ~~$\forall$ t.q.~~ $\exists M>0 \, \exists n_1$

$\sum_{n>n_1} a_n > 2M$ (pois sendo, $\sum_{n \geq 1} a_n = \sum_{n \leq n_1} a_n$

$+ \sum_{n>n_1} a_n \leq \sum_{n \leq n_1} a_n + 2M < +\infty$), donde concluímos

que $\forall M > 0$ $\sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{1+a_n} \geq \frac{1}{2} \sum_{n>n_0} a_n > M$.