5) Se $f_N \to f$ e $g_N \to g$ uniformemente no conjunto X, demonstre que:

a) $f_N + g_N \to f + g$ uniformemente em X.

. Adição de uniformemente convergente: Se $f_N \to f$ e $g_N \to g$ em X, então $f_N + g_N \to f + g$ em X.

Resposta: Dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ arbitrariamente por continuidade uniforme de f_N e g_N, temos que:

$$|f_N(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \forall x \in X \text{ e } N > N_0$$

$$|g_N(x) - g(x)| < \varepsilon/2, \forall x \in X \text{ e } N > N_1$$

Ao tomarmos $N > N_1 + N_0$ valem as desigualdades, daí aplicamos a desigualdade triangular.

$$|f_N(x) + g_N(x) - [f(x) - g(x)]| \leq |f_N(x) - f(x)| + |g_N(x) - g(x)| <$$

$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, portanto temos que a soma é uniformemente convergente

b) Se f e g forem limitadas, então $f_N \cdot g_N \to f \cdot g$ uniformemente em X.

. Produto de uniformemente convergentes: Se $f_N \to f$, $g_N \to g$, com f e g limitadas em X então:

$$f_N \cdot g_N \to f \cdot g$$

Resposta: Sejam f e g limitadas, e temos que: $|f_N(x)| \leq K$ e $|g(x)| \leq K_1$. Então:

$f_N(x) \cdot g_N(x) - f(x) \cdot g(x) = f_N(x) \cdot g_N(x) + (-f_N(x) g(x) + f_N(x) g(x)) - f(x) \cdot g(x) = f_N(x) \cdot [g_N(x) - g(x)] + g(x)[f_N(x) - f(x)]$, para um N suficientemente, podemos tomar: $|g_N(x) - g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2K}$ e $|f_N(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2K_1}$

Aplicando a desigualdade triangular, nas expressões anteriores, temos:

$|f_N(x) \cdot g_N(x) - f(x) \cdot g(x)| = |f_N(x) \cdot [g_N(x) - g(x)] + g(x)[f_N(x) - f(x)]| \leq |f_N(x)| \cdot |g_N(x) - g(x)| + |g(x)||f_N(x) - f(x)| \leq$

$K \cdot \dfrac{\varepsilon}{2K} + K_1 \cdot \dfrac{\varepsilon}{2K_1} = \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

c) Se existir $c > 0$ tal que $|g(x)| \geq c$ para todo $x \in X$, então $1/g_N \to 1/g$ uniformemente em X.

- Quociente de uniformemente convergente: Se $g_N \to g$, com $|g(x)| \geq c$ em X, então $\dfrac{1}{g_N} \to \dfrac{1}{g}$.

Como $|g(x)| \geq c$ $\forall x \in X$, então $\dfrac{1}{g(x)} \leq \dfrac{1}{c}$, logo para $n > n_0$ temos:

$$\frac{1}{g_N(x)} \leq K \rightarrow \frac{1}{|g(x)||g_N(x)|} \leq \frac{K}{C},$$

Assim, por convergência uniforme, tomamos:

$|g_N(x) - g(x)| < \frac{C}{K} \cdot \varepsilon$, e portanto:

$$\left|\frac{1}{g_N(x)} - \frac{1}{g(x)}\right| = \left|\frac{g(x) - g_N(x)}{g_N(x) \cdot g(x)}\right| = \frac{|g_N(x) - g(x)|}{|g_N(x) \cdot g(x)|} < \frac{K}{C} \cdot \frac{C}{K} \varepsilon$$

Então: $\frac{K}{C} \cdot \frac{C}{K} \cdot \varepsilon = \varepsilon$ e $\frac{1}{g_N(x)} \rightarrow \frac{1}{g}$