3) Seja $X \subset \mathbb{R}$, uma função $f: X \to \mathbb{R}$ se diz semicontínua superiormente em $a \in X$ se para cada $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que se $x \in X$ satisfazer $|x-a| < \delta$, então $f(x) < f(a) + \varepsilon$.

a) 1) Defina a noção de função semicontínua inferiormente e mostre que f será contínua em um ponto se, e somente se, for semicontínua inferiormente e superiormente.

Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ diz-se semicontínua inferiormente no ponto $a \in X$ quando, para cada $\varepsilon > 0$ dado pode-se obter $\delta > 0$, tal que se:

$$x \in X \text{ e } |x-a| < \delta \to f(a) - \varepsilon < f(x)$$

Então podemos dizer que f é semicontínua quando ela atende esta definição em todos os pontos de X.

Supomos agora que $f: X \to \mathbb{R}$ seja semicontínua inferiormente e superiormente. Então devemos provar que f é contínua em um dado ponto $a \in X$ e então conclui-se que f é contínua.

Seja $\varepsilon > 0$, como f é semicontínua inferiormente e superiormente em $\underline{a}$, temos que existem δ_- e $\delta_+ > 0$ tais que:

$x \in X$ e $|x-a| < \delta_- \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x)$, e

$x \in X$ e $|x-a| < \delta_+ \Rightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon$

Temos que: $\delta = \min\{\delta_-, \delta_+\}$, então:

$x \in X$ e $|x-a| < \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$

Portanto, pode-se concluir que f é contínua em $a \in X$.

Agora supomos, que f é contínua. Então devemos mostrar que f é semicontínua inferiormente e superiormente em um dado ponto $a \in X$. Para se concluir que f é semicontínua inferiormente e superiormente.

Tomando um $\varepsilon > 0$, e como f é contínua em a, temos que existe $\delta > 0$ tal que:

$x \in X$ e $|x-a| < \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$

Então: $x \in X$ e $|x-a| < \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x)$, e

$x \in X$ e $|x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < f(a) + \varepsilon$

Portanto, podemos concluir que f é semicontínua inferiormente e superiormente em $a \in X$.

b) Mostre que $A \subset \mathbb{R}$ sera aberto (respectivamente fechado), se e somente se, sua função característica χ_A for semicontínua inferiormente (respectivamente, superiormente).

Supomos um dado subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ será aberto, devemos mostrar que uma função característica $f_A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente em um dado ponto $p \in \mathbb{R}$ arbitrário.
Em seguida concluir que f_A é semicontínua inferiormente.

Se $p \in A$ então existe $\delta > 0$ tal que:

$$(p-\delta, p+\delta) \subset A$$

Então, neste caso, se $x \in \mathbb{R}$ e $|x-p| < \delta$, temos:

$$f_A(p) - \varepsilon = x_A - \varepsilon < x_A = f_A(x_A)$$

Logo, se $p \in A$ então f_A é semicontínua inferiormente em p.

Se $p \in \mathbb{R}/A$ então, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos que:

$$f_A(p) - \varepsilon = x'_A - \varepsilon < x'_A \leq f_A(x_A)$$

Portanto, se $p \in \mathbb{R}/A$ então f_A é semicontínua inferiormente em p.

Portanto, f_A é semicontínua inferiormente em $p \in \mathbb{R}$.

Supomos, agora que f_A seja semicontínua inferiormente, devemos mostrar que, para um dado ponto arbitrário $a \in A$, existe $\delta > 0$ tal que $(a-\delta, a+\delta) \subset A$. Desta forma devemos concluir que A é aberto.

Como f_A é semicontínua inferiormente, tomando $\varepsilon = \chi''_A$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$, vale:

$$\chi''_A = f_A(a) - \varepsilon < f_A(x)$$

Desta forma, $f_A(x) \neq 0$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$. Logo, $(a-\delta, a+\delta) \subset A$.

Para ser semicontínua superiormente, temos que seja $A \subset \mathbb{R}$ aberto, temos que:

Seja $p \in A$ então existe $\delta > 0$ tal que:

$$(p-\delta, p+\delta) \subset A$$

Então, dado $x \in \mathbb{R}$ e $|x-p| < \delta$, temos:

$$f_A(p) + \varepsilon = \chi_A + \varepsilon > \chi_A$$

Então, $p \in A$ e f_A é semicontínua superiormente em p.

Seguindo o mesmo raciocínio temos que f_A é semicontínua superiormente em $p \in R$.

Agora tomamos f_A seja semicontínua superiormente, e seguindo o mesmo raciocínio desejamos concluir que A é Aberto.

Então dado: $x_A^1 = f_A(a) + \varepsilon > f_A(x)$

Portanto $f_A(x) \neq 0$ para todo $x \in (a-\delta, a+\delta)$.
Logo, $(a-\delta, a+\delta) \subset A$.

Supomos agora que $A \subset R$ seja fechado, se e somente se, sua função característica: $f_B : R \to R$ é semicontínua superiormente.

Tomamos que $A \subset \mathbb{R}$ seja fechado, então devemos mostrar que f_B é semicontínua superiormente em um ponto dado $p \in \mathbb{R}$, e com isso concluir que f_B é semicontínua superiormente.

Seja $\varepsilon > 0$, temos $p \in A$, para $x \in \mathbb{R}$, então:

$$f_B(x) \leq x_C < f_B(p) + \varepsilon$$

Logo, se $p \in A$ então f_B é semicontínua superiormente em p.

Se $p \in \mathbb{R}/A$ então existe $\delta > 0$ tal que:

$$(p-\delta, p+\delta) \subset \mathbb{R}/A$$

Assim, neste caso, se $x \in \mathbb{R}$ e $|x-p| < \delta$, então:

$$f_B(x) = x'_C < x'_C + \varepsilon = f_B(p) + \varepsilon$$

Portanto, se $p \in \mathbb{R}/A$ então f_B é semi-contínua inferiormente em p.

Portanto, f_B é semicontínua superiormente em $p \in \mathbb{R}$.

Devemos, agora supor que f_B é semi-contínua superiormente. Então devemos mostrar que para um dado ponto $p \in \mathbb{R}/A$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$(p-\delta, p+\delta) \subset \mathbb{R}/A$$

Desta forma, conclui-se que A é fechado.

Como f_B é semicontínua inferiormente, tomamos $\varepsilon = x''_C$, e existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in (p-\delta, p+\delta)$ vale:

$$f_B(x) < f_B(p) + \varepsilon = x''_C + x''_C = 2x''_C$$

Desta forma, $f_B(x) \neq x'_C$ para todo $x \in (p-\delta, p+\delta)$. Logo, $(p-\delta, p+\delta) \subset \mathbb{R}/A$.

c) Se X for compacto, mostre que toda função semicontínua superiormente $f: X \to \mathbb{R}$ será limitada e atingirá o seu máximo.

Suponhamos que $f: X \to \mathbb{R}$ seja uma função semicontínua superiormente em um conjunto compacto $X \subset \mathbb{R}$.

Para cada $a \in X$, existe $\delta(a) > 0$ tal que

$$f(x) < f(a) + x_A \text{, para todo } x \in X \text{ tal que } |x| < \delta(a)$$

Como: $X \subset \bigcup_{a \in X} (a - \delta(a), a + \delta(a))$

E X é compacto, então existirá $a_1, \ldots, a_N \in X$ tais que:

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{N} (a_k - \delta(a_k), a_k + \delta(a_k))$$

Seja: $M = \max\{f(a_k) + x_A : k = 1, \ldots, N\}$

Provaremos que M é uma cota superior para $f(X)$ e concluiremos com isso que f é limitada superiormente.

Seja $x \in X$, para algum $k \in \{1, \ldots, N\}$, e $x \in (a_k - \delta(a_k), a_k + \delta(a_k))$, e como:

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{N} (a_k - \delta(a_k), a_k + \delta(a_k)).$$

Então, pela escolha de $\gamma(a_k)$, temos que:

$$f(x) < f(a_k) + \varepsilon \leq M$$

Portanto, M é uma cota superior para $f(X)$.

Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ uma sequência em X tal que:

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \sup f(X)$$

Como X é compacto, existe uma subsequência convergente $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{Z}_+}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ tal tal que $a = \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} \in X$.

Assim, temos que:

$$\begin{aligned} \sup f(X) &= \lim_{n \to +\infty} f(x_n) \\ &= \lim_{n \to +\infty} f(x_{n_k}) \\ &\leq \limsup_{x \to a} f(x) \\ &\leq f(a) \end{aligned}$$

Portanto, $f(a) = \sup f(X)$ e, portanto, f assume seu valor máximo em um dado ponto de X.