19) Sejam C compacto, A aberto, e $C \subset A$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que se $x \in C$ e $|y - x| < \varepsilon$, então $y \in A$.

Teorema: Toda cobertura aberta de um compacto possui subcobertura finita.

Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto quando for limitado e fechado.

. Teorema: Seja $F \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado e fechado. Toda cobertura $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de F por meio de abertos admite uma subcobertura finita:

$F \subset A_{\lambda_1} \cup \ldots\ldots \cup A_{\lambda_n}$

Como C é compacto, temos que C é limitado e fechado, o conjunto A é aberto. Como $C \subset A$, então $A = \mathbb{R} - C$ e A é aberto. Temos que, para todo $x \in C$, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que:

$(x-\varepsilon_1, x+\varepsilon_1) \subset A$, os pontos interiores de A. $(x-2\varepsilon_{x_K}, x+2\varepsilon_{x_K}) \subset A$

Temos que C é fechado e limitado, logo $C = \bar{C}$, onde $\bar{C}$ é o conjunto formado pelos pontos de aderência de C.

Dado $x \in C$, temos que x é aderente a C quando há sequências $x_N \in C$ com $\lim x_N = x$. Ou x é aderente a C se, e somente se, toda vizinhança de x intersecta C. Portanto, a família:

$$\{(x-\varepsilon_2, x+\varepsilon_2); x \in C\}$$

é uma cobertura aberta para o conjunto C. E como C é compacto, existem $x_1, \ldots, x_N \in C$ tais que:

$$C \subset \bigcup_{i=1}^{N} (x_i-\varepsilon_i, x_i+\varepsilon_i)$$

Uma cobertura (finita) de um conjunto X é uma família (finita) C de conjuntos C_λ (com $\lambda \in L$) tal que:

$$X \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$$

Tomemos:

$$\varepsilon := \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N\} > 0$$

Supondo que $x \in C$ e $|x-y| < \varepsilon$ temos que $y \in A$. De fato, como $x \in C$, temos que:

$$x \in (x_k - \varepsilon_k, x_k + \varepsilon_k)$$

para $k = 1, \ldots, N-1, N$. Assim:

$$|x_k - y| \leq |x_k - x| + |x - y| < \varepsilon_{x_k} + \varepsilon \leq 2\varepsilon_{x_k}$$

E, finalmente:

$$y \in (x_k - 2\varepsilon_{x_k}, x_k + 2\varepsilon_{x_k}) \subset A$$

Agora temos que voltar na definição dos pontos interiores de A e trocar para $2\varepsilon_{x_k}$. Porque $C \subset A$, e os extremos é o conjunto A.