13) Prove que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, X' é um conjunto fechado.

Ponto de acumulação: $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ dizemos que a é ponto de acumulação de X se, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in X \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, e $x \neq a$.

- Se a é ponto de acumulação de X, então $a \in \overline{X}$. $\overline{X}$: conjuntos dos pontos de aderencia de X, $\overline{X}$ é o fecho de X.
- Dizemos que $a \in X$ é ponto isolado de X se $\exists$ $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X = \{a\}$.

- X' é o conjunto dos pontos de acumulação de X.

Seja $a \in \overline{X'}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X'$ tal que $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Temos que $\overline{X'}$ é o fecho do conjuntos dos pontos de acumulação X' de X.

E como $x \in X'$, existem infinitos elementos de X em $(x-\gamma, x+\gamma)$, onde $\gamma = \min\{|x-(a \pm \varepsilon)|\}$.

Assim, infinitos elementos de X pertencem à $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \supset (x-\gamma, x+\gamma)$.

Isso implica que $a \in X'$, concluímos que $X' \supset \overline{X'}$.

Exemplo: X' é fechado

Demonstração 1: Vamos mostrar que $\mathbb{R}/X'$ é aberto, então X' é fechado pela definição: "Se X' é fechado $\longrightarrow$ $\mathbb{R}-X'$ é aberto".

Seja $a \in \mathbb{R}/X'$ então $a \notin X'$ e portanto existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X/_{\{a\}} = \emptyset$. Logo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X' = \emptyset$ o que implica $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset \mathbb{R}/X'$.

Portanto $\mathbb{R}/X'$ é aberto.

Demonstração 2: Vale em geral que $B \subset \overline{B}$, o mesmo vale tomando $B = A'$, falta mostrar então que $\overline{A'} \subset A'$.

Tomando $a \in \overline{A'}$, logo existe uma sequência (x_n) em A' tal que:

$$\lim x_n = a$$

Por definição temos que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ tem-se $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ // $\forall a \varepsilon$, como cada x_n é ponto de acumulação de A, então existem termos $y_n \in A$ arbitrariamente próximos de x_n.

Logo existem termos y_n em $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ // $\forall a \varepsilon$ com ε arbitrário, sendo assim podemos construir uma sequência (y_n) que converge para a, portanto $a \in A'$.