Lista 8

$f, g : I \to \mathbb{R}$ analíticas, I um intervalo aberto.

~~Suponhamos que~~ Seja $X \subset I$ um conjunto t.q. $a \in X' \cap I$.

Suponha que $f|_X = g|_X$.

Mostremos inicialmente que existe um intervalo aberto centrado em a ~~t.q.~~, $I_a(r)$, t.q. $f|_{I_a(r)} = \cancel{g|} \, g|_{I_a(r)}$.

Como f e g são analíticas em I, $\exists \, r_1, r_2 > 0$ t.q. $\forall x \in I_a(r_1)$, $f(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$ e $\forall x \in I_a(r_2)$, $g(x) = \sum \frac{g^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$

Seja $r = \min\{r_1, r_2\}$. Como $a \in X'$, $\exists \, (x_n)$, $x_n \in X$, t.q. $x_n \to a$. Logo, $\exists \, n_0 \; \forall n > n_0 \; x_n \in I_a(r)$.

Necessitamos do seguinte

T. (a) Seja $f(x) = \sum a_n(x-a)^n$ uma série de potências não-constante t.q. $R>0$. Se $f(a)=0$, então existirá $s>0$ $(s<R)$ t.q. $\forall x \in I_a(s)$, $f(x) \neq 0$.

(b) Sejam $f(x) = \sum a_n (x-a)^n$ e $g(x) = \sum b_n (x-a)^n$ séries de potências com raio de conv. $R>0$. Se existir $X \subset I$ t.q. $a \in X' \cap I$ e $f|_X = g|_X$, então $f|_{I_a(R)} = g|_{I_a(R)}$

Dem. Como $f(x)$ é não-const., $\exists n$ t.q. $a_n \neq 0$. Seja

$m = \min\{n \geq 0 \mid a_n \neq 0\}$

☐Reunião ☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos

Então, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{n\geq m} a_m (x-a)^n = a_m (x-a)^m \cancel{\sum_{n\geq m} \frac{a_n}{a_m}(x-a)^{n-m}}$$

$$\left(1 + \sum_{n>m} \frac{a_n}{a_m} (x-a)^{n-m}\right) = a_m (x-a)^m \left(1 + \sum_{n\geq 1} c_n (x-a)^n\right)$$

(note que a série $\sum_{n\geq 1} c_n (x-a)^n$ têm raio de conv. igual a R)

$= a_m (x-a)^m (1 + h(x))$. Como $h(a) = 0$ e h é contínua em $x = a$, $\exists\, \delta > 0$ (que podemos tomar menor do que R) tal que $\forall\, x \in I_a(\delta)$, $1 + h(x) > 1/2$.

Como $a_m (x-a)^m \neq 0 \;\; \forall\, x \neq a$, o resultado se segue.

(b) Seja $h(x) = f(x) - g(x) = \sum (a_n - b_n)(x-a)^n$. Como, por hipótese, $\forall \delta > 0 \; \exists\, x \in I_a(\delta)$ t.q. $h(x) = 0$, segue-se do ítem (a) que $h|_{I_a(R)} = 0$.

Desse modo, temos que $f|_{I_a(R)} = g|_{I_a(R)}$.

Resta-nos mostrar que $f(x) = g(x) \;\; \forall\, x \in I$.

Note que se $b \in \text{fr}\, I_a(R)$, então b será um ponto de acumulação de um conjunto de pontos (a saber, $I_a(R)$) em que $f = g$. Logo, $f|_{I_b(R_b)} = g|_{I_b(R_b)}$, em que $R_b > 0$ é o raio de convergência em comum às séries de Taylor de f e g centradas em b.

Como é possível cobrirmos I a partir de tais intervalos (i.e., $I = \bigcup_{b\in I} I_b(R_b)$) e f e g coincidem em cada um deles, segue-se que $f = g$. É imprescindível que não haja um intervalo na cobertura disjunto dos demais.