15) Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se diz periódica quando existe $p \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demonstre que toda função contínua periódica é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo.

Resposta: Seja p o período da função, então $\forall x \in \mathbb{R}$ vale $f(x+p) = f(x)$, temos assim que a função repete os valores de sua imagem no intervalo $[0, p]$. Logo temos que sua restrição ao intervalo compacto $[0, p]$.

Temos que $f|_{[0,p]}$ é contínua e sua imagem é um compacto, logo a f possui um máximo e um mínimo, e existe $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_1)$ é mínimo e $f(x_2)$ é máximo.