Ex 7. 1) ($\rightarrow$) Suponha que $d(a,X)=0$. Então, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\inf\{|x-a| \mid x \in X\} < 1/n$, donde se segue que $\exists\, x_n \in X$ t q $|x_n - a| < 1/n$. Logo, $\exists\, (x_n)$, $x_n \in X$, t q $\lim x_n = a$, e α o que nos mostra que $a \in \overline{X}$;

($\leftarrow$) Suponha que $a \in \overline{X}$, mas que $d(a,X) = \varepsilon > 0$

Então, $|x-a| \geq \varepsilon$

No entanto, $\exists\, (x_n)$, $x_n \in X$, t q $\lim x_n = a$, i e,

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t q $\forall\, n > n_0$, $|x_n - a| < \varepsilon/2$

Tal contradição nos permite concluir que $d(a,X)=0$

2) Se $d(a,F)=0$, basta tomar $b = a$ (já que pelo item 1, $a \in F$

Se $d(a,F) = \alpha > 0$, ~~considere o caso em~~ dado $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_n \in F$ t q $\alpha \leq |x_n - a| < \alpha + 1/n$.

Disso, obtemos que ou $\alpha \leq x_n - a < \alpha + 1/n$, se $x_n > a$, ou $-\alpha - 1/n < x_n - a < -\alpha$, se $x_n < a$

Então, ou existirá uma subseq (x_{n_k}) t.q $\alpha \leq x_{n_k} - a < \alpha + \frac{1}{n_k}$, ou uma subseq (x_{n_j}) t q $-\alpha - 1/n_j < x_{n_j} - a \leq -\alpha$. Em ambos os casos, $\lim x_{n_k}$

existe, e é igual à $a+\alpha$ ou à $a-\alpha$.
Para fixar ideias, suponha que $\lim x_{n_k} = a+\alpha$
Como F é fechado, $a+\alpha \in F$. Seja $b = a+\alpha$
Então, $\alpha = b-a = |b-a|$