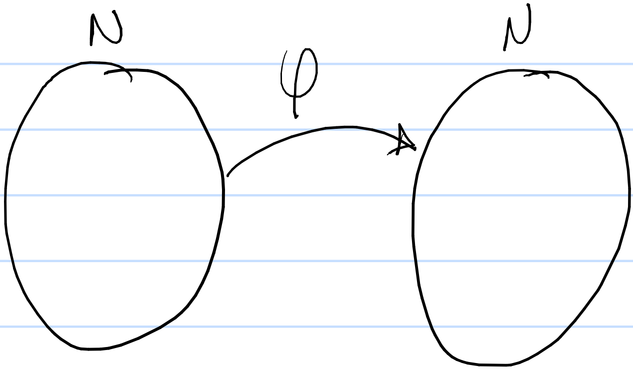

a) $\lim \varphi(N) = +\infty$

Dado o conjunto N temos que $\varphi: N \to N$ é uma função que leva cada elemento no domínio para a imagem, portanto como o domínio esta no conjunto dos naturais e este é infinito, temos que:

$$\lim \varphi(N) = +\infty$$

Desta forma assumimos que o item (a) é verdadeiro.

b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{-1}(k)$ é finito

Assumimos que (a) é verdadeiro, ou seja existe algum $k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^{-1}(k)$ é infinito.

Isso implica que existe uma subsequência de φ, de indices (listados em $\varphi^{-1}(k)$), digamos $\{n_1, n_2, \ldots\}$ de modo que $(\varphi(n))$

é a sequência constante $\varphi(k)$.

Com isso, temos duas possibilidades

- $\lim \varphi(n) = \varphi(k)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

- $\lim \varphi(n)$ não existe pois teriamos que a subsequência constante outra que converge para outro valor, ou vai para o infinito, ou não existe. Portanto:

$$(a) \longrightarrow (b)$$

c) $\forall F \subset \mathbb{N}$ finito, $\varphi^{-1}(F)$ é finito

Temos que o $\lim \varphi(n) = +\infty$, então supondo uma subsequência onde $\lim \varphi(n) = c$, e c é uma constante. Supomos então uma subsequência $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$, onde $\lim \varphi(n') = c$.

Esta subsequência está contida $(x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ está contida em (x_n) e por ser finita sua imagem também será finita.

Portanto como tratamos em c) de uma função bijetora (leva cada elemento do domínio para um único elemento na imagem), temos que a inversa:

$\varphi^{-1}(F)$ também será finita.