9) Seja $f: (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivável. Mostre que se existem $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ e $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = b$, então $b = 0$. Sugestão: $f(n+1) - f(n) = f'(x_n)$ em que $x_n \to \infty$.

Resposta: Temos que f é uma função cujo o domínio é $(c, +\infty)$ derivável, ou seja f é contínua neste intervalo aberto.

Se $\lim_{x \to \infty} f(x) = a$, ou seja, no ponto $\underline{a}$

temos que: $f(x)$ é contínua e $\underline{a}$ é um ponto da imagem de f.

Então dada uma sequência $x_n \in I$, temos que $\lim x_n = a$, e:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a} = f'(a)$$

$$f(x_n) - f(a) = f'(a) \cdot (x_n - a)$$

Corolário 2: Seja $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $f: X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto $\underline{a}$ e possui um máximo ou um mínimo local nesse ponto, então $f'(a) = 0$.

Corolário: Suponha que f tem um máximo local em a. Se $a \in X'_+$ então $f'_+(a) \leq 0$, ou não existe. Se f é derivável em $a \in X'_+ \cap X'_-$ então $f'(a) = 0$.
Se $f'(a) = 0$ então $\underline{a}$ é um ponto crítico de f.

Teorema de Lagrange: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), existe $c \in (a,b)$, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Resposta: Pelo enunciado temos que:

$\lim_{x \to \infty} f(x)$ e $\lim_{x \to \infty} f'(x)$ existem. Assim pelo teorema de Lagrange existe $x_N \in (N, N+1)$ sendo que: $f(N+1) - f(N) = f'(x_N)$ tomando $N \to \infty$ temos que $\lim_{x \to \infty} f'(x_N) = 0$.

Como o limite existe, e existe uma sequência em que o limite da função f' é zero, segue-se que $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$.