Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem conteúdo nulo quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ com:

$$\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \varepsilon.$$ 1 Demonstre:

1) Se X tem conteúdo nulo, o mesmo ocorre com seu fecho $\overline{X}$.

Seja $X \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k$ então $\overline{X} \subset \overline{\bigcup_{k=1}^{N} I_k}$, e usamos que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$, e portanto:

$$\overline{X} \subset \bigcup_{k=1}^{N} \overline{I_k},$$

Assim podemos tomar para cada I_k um intervalo J_k, sendo o dobro do comprimento de I_k e com o mesmo centro. Logo:

$$\overline{I_k} \subset J_k$$

Pois o fecho de um intervalo aberto (a,b) somente acrescenta as bordas de a e b, que estão contidas em um intervalo do dobro de comprimento. Então se:

$$\sum_{k=1}^{N} |I_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

O que pode ser tomado, como X tendo conteúdo nulo, e vale:

$$|J_k| = 2|I_k| \rightarrow \sum_{k=1}^{N} |I_k| \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto $\overline{X}$ tem conteúdo nulo.

2) Um conjunto compacto tem medida nula se, e somente se, tem conteúdo nulo.

i) Suponha X com medida nula, logo temos

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \quad , \quad \sum_{k=1}^{\infty} |I_k| < \varepsilon$$

Como X é compacto então X admite uma subcobertura finita.

$$X \subset \bigcup_{k \in A} I_k$$

A é finito, logo $\sum_{k \in A} |I_k| < \varepsilon$ e X tem conteúdo nulo.

ii) Em geral, temos que se X tem conteúdo nulo, para qualquer X e não necessariamente compacto), então X tem medida nula.

3) Se uma função limitada $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ coincide com uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ exceto num conjunto de conteúdo nulo, prove que g é integrável e sua integral é igual à de f.

Temos que $g - f : [a,b] / X \to \mathbb{R}$ é nula.
Seja $M = \sup_{x \in [a,b]} |g - f|$.

Então vale $\inf |g-f|=0$ em qualquer intervalo de $[a,b]$ pois X não pode conter um intervalo, e portanto sempre existe um elemento de $[a,b] \setminus X$ em qualquer intervalo.

Disso, segue que qualquer soma inferior de $|g-f|$ é nula. Dado $\varepsilon > 0$ existem intervalos abertos $(I_k)_1^N$ tais que:

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k = U \quad e \quad \sum_{k=1}^{N} |I_k| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Supondo agora que cada $I_k \subset [a,b]$, então as extremidades desses intervalos, e a e b formam uma partição P de $[a,b]$, os intervalos dessa partição que contém os pontos de X são os I_k, e logo temos a soma superior:

$$S(|g-f|, P) = \sum_{\exists j \mid [t_{k-1},t_k]=I_j} M_k \Delta t_{k-1} + \underbrace{\sum_{[t_{k-1},t_k] \neq I_j,\, \forall j} M_k \Delta t_{k-1}}_{0} \leq M.$$

$$\sum_{\exists j \mid [t_{k-1},t_k]=I_j} \Delta t_{k-1} = M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Portanto $\overline{\int_a^b} |g-f| = 0$, $g-f$ é integrável e sua integral é nula. Daí $g = f + (g-f)$ é integrável e:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$