12) Demonstre que $\lim_{x\to a} f(x)=L$, então $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$, e que se $\lim_{x\to a} |f(x)|=|L|$, então o conjunto dos valores de aderência de f no ponto $\underline{a}$ é $\{L\}$, ou $\{-L\}$, ou ainda $\{-L, L\}$.

• $\underline{a}$ é aderente a X quando há sequência $\underline{x_n} \in X$ com $\lim x_n = a$.
• $\bar{X}$ é o conjunto dos pontos de aderência.

Resposta: Dada a função $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in \bar{X}$, onde $\bar{X}$ é o conjunto dos pontos de aderência de X. Suponhamos que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|f(x) - L| < \varepsilon$$

Para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)$. Desta forma, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

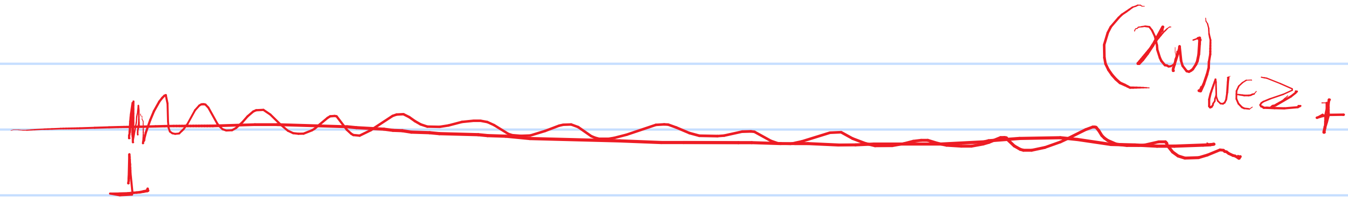
$$||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon$$

Para todo $x \in (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)$. Portanto,

$$\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|.$$

Suponhamos que $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$, então devemos provar que o conjunto dos pontos de aderência de f é $\{-L, L\}$, $\{L\}$ ou $\{-L\}$.

Seja $L_1 \in A$, então existe uma sequência $(x_N)_{N\in\mathbb{Z}_+}$ em X tal que $\lim_{N\to\infty} f(x_N) = L_1$.



Temos que:

$$|L_1| = \left|\lim_{N\to\infty} f(x_N)\right| = \lim_{N\to\infty} |f(x_N)| = |L|$$

Como $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$, logo $L_1 \in \{L, -L\}$ e conclui-se que $A \subset \{L, -L\}$.

Teorema 13: Um número real $\underline{c}$ é valor de aderência de f no ponto $\underline{a}$ se, e somente se, para ~~todo~~ $\delta > 0$ tem-se $\underline{c} \in f(V_\delta)$.

A partir do teorema 13, temos que L_1 é um ponto de aderência da função $g: X \to \mathbb{R}$ no ponto $\underline{a}$ se, e somente se, para todos ε e $\delta > 0$ vale:

$$(L_1-\varepsilon, L_1+\varepsilon) \cap g((X-\{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)) \neq \emptyset$$

Suponhamos, por absurdo, que L e $-L$ não são valores de aderência de f no ponto a. Temos que existem $\varepsilon_+, \varepsilon_-, \delta_+, \delta_-$ todos maiores que 0. Tais que:

$$(L-\varepsilon_+, L+\varepsilon_+) \cap f((X-\{a\}) \cap (a-\delta_+, a+\delta_+)) = \phi \quad e$$

$$(L-\varepsilon_-, L+\varepsilon_-) \cap f((X-\{a\}) \cap (a-\delta_-, a+\delta_+)) = \phi$$

Como $\lim_{x \to a} |f(x)| = |L|$, e existe:

$$(f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) \cap |f|((X-\{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)),$$

com $x \in (X-\{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)$. Desta forma, deveríamos ter que:

$$|f(x) - L| = ||f(x)| - |L|| < \varepsilon \leq \varepsilon_+,$$

caso $|f(x)| = \pm f(x)$ e $|L| = \pm L$, e

$$|f(x) - (-L)| = ||f(x)| - |L|| < \varepsilon \leq \varepsilon_-,$$

caso $|f(x)| = \pm f(x)$ e $|L| = \pm L$

Com isso, temos que:

$$f(x) \in (L-\varepsilon_+, L+\varepsilon_+) \cap f((X-\{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)),$$

e como $x \in (X-\{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta) \subset (X-\{a\}) \cap (a-\delta_+, a+\delta_+)$, ou

$f(x) \in (-L-\varepsilon_-, -L+\varepsilon_-) \cap f[(X-\{a\}) \cap (a-\gamma_-, a+\gamma_-)]$,

e como $x \in (X-\{a\}) \cap (a-\gamma, a+\gamma) \subset (X-\{a\}) \cap (a-\gamma_-, a+\gamma_+)$.

Nos dois casos, chegamos a uma contradição com as hipóteses de que L e $-L$ não são valores de aderência de f no ponto a. Portanto, L ou $-L$ são valores de aderência de f.