16) Seja $f: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ limitada. Para cada $t \geq a$, indiquemos por M_t o supremo e m_t o ínfimo de f no intervalo $I = [t, +\infty)$.

Com $w_t = M_t - m_t$ indicaremos a oscilação de f em I. ① Demonstre que existem $\lim_{t \to +\infty} M_t$ e $\lim_{t \to +\infty} m_t$. Demonstre que existe $\lim_{t \to +\infty} f(x)$ se, e somente se,

$\lim_{t \to +\infty} w_t = 0$.

Resposta: Deve-se inicialmente provar que existem $\lim_{t \to \infty} M_t$ e $\lim_{t \to \infty} m_t$. Note que M_t é uma função de t não-crescente e m_t é uma função de t não-decrescente.

Temos também que M_t e m_t são limitadas, pois a f é limitada. Portanto existem $\lim_{t \to \infty} M_t$ e $\lim_{t \to \infty} m_t$.

Assim temos que existe: $\lim_{t \to +\infty} f(x) \Leftrightarrow \lim_{t \to +\infty} w_t = 0$

1) Seja $\gamma = \lim_{t \to +\infty} f(x)$, então dado $\varepsilon > 0$,

existe $t_0 \geq a$ tal que $x > t_0 \Rightarrow |f(x) - \gamma| < \varepsilon$,
ou seja: $x > t_0 \Rightarrow \gamma - \varepsilon < f(x) < \gamma + \varepsilon$.

Observe, então que: $t > t_0 \rightarrow \gamma - \varepsilon \leq m_\tau \leq$

$f(x) \leq M_\tau \leq \gamma + \varepsilon$.

Portanto $M_\tau - m_\tau \leq 2\varepsilon$.

Assim, $\lim\limits_{t \to \infty} M_\tau = \lim\limits_{t \to \infty} m_\tau$

Logo:

$\lim w_\tau = \lim (M_\tau - m_\tau) = \lim M_\tau - \lim m_\tau = 0$

2) Se $\lim w_\tau = 0$, então sendo:

$l = \lim m_\tau$ e $L = \lim M_\tau$, temos que

$l = L$. Além disso, temos também:

$$m_\tau \leq f(\tau) \leq M_\tau, \text{ para todo } t \in [a, +\infty)$$

Portanto:

$$L = l = \lim_{t \to +\infty} m_\tau \leq \lim_{t \to \infty} f(t) \leq \lim_{t \to +\infty} M_\tau = L$$

Assim temos pelo teorema do confronto, que $\lim\limits_{t \to +\infty} f(x)$ existe, sendo este igual a L.