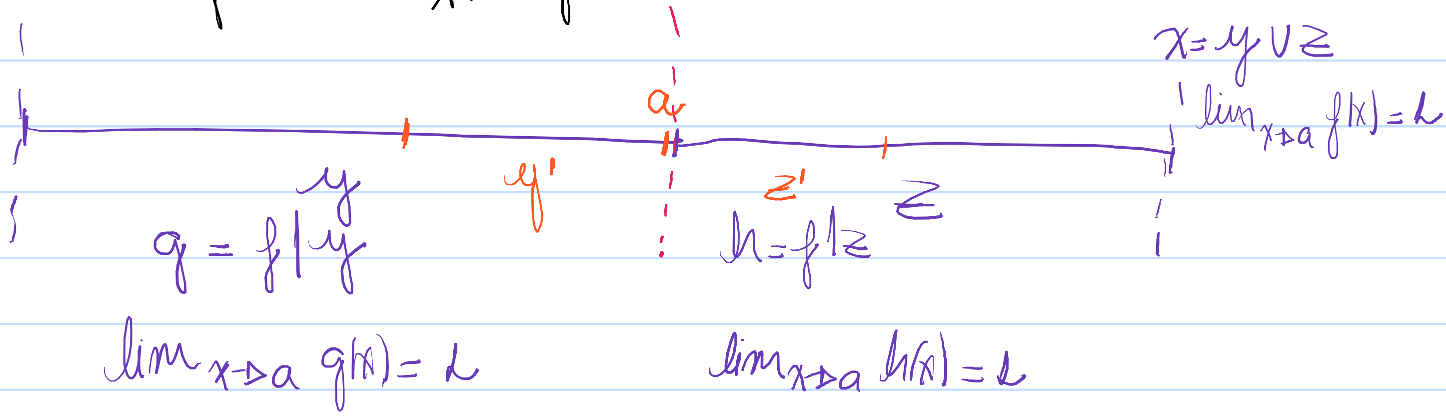
3) Seja $X = Y \cup Z$, com $a \in Y' \cap Z'$. Dada $f: X \to \mathbb{R}$, tomemos $g = f|_Y$ e $h = f|_Z$. Se $\lim_{x \to a} g(x) = L$ e $\lim_{x \to a} h(x) = L$, demonstre que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.



- Se o limite de uma função existir, ele é único.
- Se $\lim_{x \to a} f(x) = L < M = \lim_{x \to a} g(x)$, então existe $V_\delta^*(a)$ onde $f(x) \leq g(x)$. Em particular, se $\lim_{x \to a} f(x) < M$, então $f(x) < M$ em uma $V_\delta^*(a)$.
- Se $f(x) \leq g(x)$ em $V_\delta^*(a)$, então $\lim_{x \to a} f(x) \leq \lim_{x \to a} g(x)$ (desde que os limites existam).

Resposta: Seja $\varepsilon/2 > 0$, e existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x-a| < \delta/2 \to |g(x) - L/2| < \varepsilon/2, \text{ e}$$
$$0 < |x-a| < \delta/2 \to |h(x) - L/2| < \varepsilon/2$$

Como $a \in Y' \cap Z'$, então $a \in Y'$ e $a \in Z'$. Logo temos que o domínio da $f(x)$ é igual ao domínio da $g(x)$ união com o domínio da $h(x)$.

Então: $|x-a| < \delta/2 \cup |x-a| < \delta/2 = |x-a| < \delta$, e:

$$|g(x) - L/2| \cup |h(x) - L/2| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$$

$$|g(x) + h(x) - L| < \varepsilon \to |g(x) - L/2| + |h(x) - L/2| < \varepsilon$$

Portanto $\lim_{x \to a} (g(x) + h(x)) = L \to \lim_{x \to a} f(x) = L$

Outra forma:

Dado $\varepsilon > 0$, então existem δ_1 e δ_2, sendo $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$, tais que:

$$x \in (a-\delta_1, a+\delta_1) \cap Y$$

$$x \in (a-\delta_2, a+\delta_2) \cap Z$$

Assim: $|f(x) - L| < \varepsilon$, ao fixarmos um $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Então:

$x \in (a-\delta, a+\delta) \cap X$, temos que: $x \in Y$ ou $x \in Z$. Então para o primeiro caso temos: $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap Y \subset (a-\delta_1, a+\delta_1) \cap Y$ e com isso $|f(x) - L| < \varepsilon$.

No segundo caso temos:

$x \in (a-\delta, a+\delta) \cap Z \subset (a-\delta_2, a+\delta_2) \cap Z$, e com isso $|f(x) - L| < \varepsilon$.

Portanto temos: $|x-a| < \delta$, $x \in X \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$, e como ε é arbitrário, então temos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$.