2) Seja $p:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que se $\int_a^b p(x)\,dx = 0$, então o conjunto dos pontos $x \in [a,b]$ tais que $p(x) = 0$ é denso em $[a,b]$. Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ for qualquer função integrável que se anula num conjunto denso de pontos em $[a,b]$, prove que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Teorema 12: [Fórmulas de Valor médio para integrais]. São dadas as funções $f, p: [a,b] \to \mathbb{R}$, com f contínua. Então:

B. Se p é integrável e não muda de sinal, existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(c)\int_a^b p(x)\,dx$.

C. Se p é positiva, decrescente, com derivada integrável, existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = p(a) \cdot \int_a^c f(x)\,dx.$$

Resultado 1: Dado X um conjunto e $A \subset X$, sendo A um subconjunto denso em X. Então A^c tem medida nula em X.

Resultado 2: A integral de uma função integrável sobre um conjunto de medida nula é zero.

Resposta: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, $p(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, e:

$$\int_a^b p(x)\,dx = 0 \to A = \{x \in [a,b] \mid p(x) = 0\}$$ é denso em $[a,b]$. Dado que: $[a,b] = A \cup A^C$

Devemos mostrar que A^C tem medida nula, então A é denso em $[a,b]$.

$$\int_a^b p(x)\,dx = \int_A p(x)\,dx + \int_{A^C} p(x)\,dx$$

Temos que $\int_a^b p(x)\,dx = 0$ e $\int_A p(x)\,dx = 0$ (isto porque $p(x) = 0$), então:

$$0 = 0 + \int_{A^C} p(x)\,dx \to \int_{A^C} p(x)\,dx = 0$$

Mas $A^C = \{x \in [a,b] \mid p(x) > 0\}$, pois $p(x) \geq 0$. Se A^C não tiver medida nula, então:

$$\int_{A^C} p(x)\,dx > 0$$, o que contradiz $\int_{A^C} p(x)\,dx = 0$

Portanto, A^C tem medida nula e, assim A é denso em $[a,b]$.

$\blacksquare$

Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ se anula em um conjunto A denso em $[a,b]$ então escrevendo:

$$[a,b] = A \cup A^C$$

Temos que A^c tem medida Nula e:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_{A^c} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_A 0\,dx + \int_{A^c} f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0$$