12) Prove que se todos os pontos do conjunto $X \subset \mathbb{R}$ são isolados, então pode-se escolher, para cada $x \in X$, um intervalo aberto I_x, de centro x, tal que se $x \neq y$, então:

$$I_x \cap I_y = \emptyset$$

<u>Definição</u>: Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $X \subseteq \mathbb{R}$.

- Diz-se que <u>a</u> é <u>ponto de acumulação</u> de X quando toda vizinhança V de <u>a</u> satisfaz $V \cap X - \{a\} \neq \emptyset$.

O conjunto dos pontos de acumulação de X é denotado por X'.

- Um <u>ponto isolado</u> de X é um ponto <u>a</u> $\in X$ que não é ponto de acumulação.

- O conjunto X é <u>discreto</u> se todos os seus pontos são isolados.

- Um ponto de acumulação de um conjunto X é quando todo intervalo aberto $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, de centro a, contém algum ponto $x \in X$ diferente de a.

- A condição $a \in X'$ (a é ponto de acumulação de X) pode expresso por:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists x \in X : 0 < |x-a| < \varepsilon$$

Teorema 7: Dados $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, as seguintes afirmações são equivalentes:

1 – $a \in X'$ (a é ponto de acumulação de X),

2 – $a = \lim x_n$, onde (x_n) é uma sequência de elementos de X, dois a dois disjuntos,

3 – todo intervalo aberto contendo a possui uma infinidade de elementos de X.

Corolário: Se $X' \neq \emptyset$ então X é infinito.

Corolário: Se todos os pontos do conjunto X são isolados então X é enumerável.

Corolário: Todo conjunto fechado enumerável não-vazio possui algum ponto isolado.

Ponto de acumulação: $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ dizemos que a é ponto de acumulação de X se, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in X \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, $x \neq a$.

Obs: Se a é ponto de acumulação de X então $a \in \overline{X}$. Não vale a recíproca.

- Dizemos que $a \in X$ é ponto isolado de X se $\exists \varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X = \{a\}$.

- X' é o conjunto dos pontos de acumulação de X.

- Se $a \in X / \overline{X}$, a é ponto isolado de X.
$\overline{X} = X \cup X'$

• Dizemos que X é discreto se todos os seus pontos são isolados. Ou seja se $X' \cap X = \emptyset$.

Seja $X \subset \mathbb{R}$ tal que $X' \cap X = \emptyset$. Onde X' é o conjunto dos pontos de acumulação de X.

Temos que para $x \in X$ definimos:

$$\alpha_x = \inf\{|x - \bar{x}| ; \bar{x} \in X - \{x\}\}$$

Onde $X' \cap X = \emptyset$ é o conjunto discreto de todos os pontos isolados, e α_x é o modulo dos menores valores de cada ponto isolado de X.

Assim $\alpha_x = 0$ se, e somente se, $x \in X'$. Ou seja x é um ponto de acumulação. Então, $\alpha_x > 0$ para cada $x \in X$ já que $X' \cap X = \emptyset$.

Definimos para cada $x \in X$:

$$I_x = \left(x - \frac{\alpha_x}{2}, x + \frac{\alpha_x}{2}\right)$$

Assim, para $x \neq y$ em X, temos que se $z \in I_x \cap I_y$:

$$|x-y| \leq |x-z| + |z-y|$$

$$|x-y| \leq \frac{\alpha x}{2} + \frac{\alpha x}{2}$$

$$|x-y| \leq \frac{|x-y|}{2} + \frac{|x-y|}{2} = |x-y|$$

Portanto, $I_x \cap I_y = \emptyset$.

Outro exemplo similar:

Se A é discreto então para cada $x, y \in A$ existem intervalos abertos I_x, I_y de centro x, y respectivamente tais que se $x \neq y$ então $I_x \cap I_y \neq 0$. Isto é, podemos tomar intervalos de centro x e y respectivamente, tais que eles sejam disjuntos em $\mathbb{R}$ (não possuem elementos em comum de $\mathbb{R}$).

Demo: Para cada $x \in A$ existe $\varepsilon_x > 0$ tal que $(x-\varepsilon_x, x+\varepsilon_x) \cap \{x\}$.

Definimos para cada x, $I_x = \left(x - \frac{\varepsilon_x}{2}, x + \frac{\varepsilon_x}{2}\right)$. Tomando $x \neq y \in A$ podemos supor $\varepsilon_x \leq \varepsilon_y$. Se $z \in I_x \cap I_y$ então $z \in I_x$ e $z \in I_y$, logo $|z-x| < \frac{\varepsilon_x}{2}$, $|z-y| \leq \frac{\varepsilon_y}{2}$. Com isso:

$$|x-y| \leq |z-y| + |z-x| \leq \frac{\varepsilon_x}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} < \frac{\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_y}{2} = \varepsilon_y$$

Então conclui-se que $x \in I_y$, o que é absurdo pois I_y contém um único ponto de A, que é y, logo podemos tomar intervalos disjuntos como desejamos inicialmente.