L3. Ex. 14.

Seja, $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \sqrt[n]{n!}$. Então, $a_n^n = n!$. Suponhamos que $\lim a_n \neq +\infty$.

Logo, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall M > 0$ $\exists n_0 > n$ t.q. $a_{n_0} < M$, i.e.,

$M^{n_0} > n_0!$ Naturalmente, $\frac{M}{n_0} \cdot \frac{M}{n_0 - 1} \cdots \frac{M}{2} \cdot M > 1$

Agora, $\exists m \in \mathbb{N}$ t.q. $\frac{M}{m} < \frac{1}{M}$ (faça $M^2 < m$), de modo que $\frac{M}{n_0} \cdot \frac{M}{n_0 - 1} \cdots \frac{M}{2} \cdot M < M^{m-1} \cdot \frac{1}{M^{n_0 - m + 1}} = \frac{M^{2m}}{M^{n_0}}$

Fazendo-se $n > 2m$, obviamente $n_0 > 2m$, donde se seguirá que $1 < M \cdot \frac{M}{2} \cdots \frac{M}{n_0} < 1$, um absurdo!

Lista 3. Ex. 16

T Seja (y_n) t.q. $y_n > 0$, com $\Sigma y_n = +\infty$. Se $\lim x_n/y_n = a$, então $\lim \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} = a$

Dem Dado $\varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $n > n_0 \rightarrow a - \varepsilon < x_n/y_n < a + \varepsilon \leftrightarrow (a-\varepsilon) y_n < x_n < (a+\varepsilon) y_n$. Em part, para todo $n > n_0$,

$$a - \varepsilon < \frac{x_{n_0+1} + \cdots + x_n}{y_{n_0+1} + \cdots + y_n} < a + \varepsilon$$

Ainda, como $\Sigma y_i = +\infty$, segue-se que $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > n_1$, $-\varepsilon < \frac{x_1 + \cdots + x_{n_0}}{y_1 + \cdots + y_n} < \varepsilon$.

Por fim, $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > n_2$, $1 - \varepsilon < \frac{1}{1 + \frac{y_1 + \cdots + y_{n_0}}{y_{n_0+1} + \cdots + y_n}} < 1$

Combinando as afirmações anteriores, obtemos $\forall n > n_0$

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} = \frac{x_1 + \cdots + x_{n_0}}{y_1 + \cdots + y_n} + \frac{1}{1 + \frac{y_1 + \cdots + y_{n_0}}{y_{n_0+1} + \cdots + y_n}} \cdot \frac{x_{n_0+1} + \cdots + x_n}{y_{n_0+1} + \cdots + y_n},$$

e portanto, $\forall n > \max\{n_0, n_1, n_2\}$

$$a - (a+1)\varepsilon < -\varepsilon + (1-\varepsilon)(a-\varepsilon) < \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} < a + \varepsilon + \varepsilon < a + 2\varepsilon$$

Disso se segue que $\lim \frac{x_1 + \cdots + x_n}{y_1 + \cdots + y_n} = a$ ∎

Sejam $s_n = x_{n+1} - x_n$ e $t_n = y_{n+1} - y_n$. Como (y_n) é crescente e $\lim y_n = +\infty$, segue-se que $\sum t_n = +\infty$ e $t_n > 0$ $\forall n$.

Ainda, $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \lim \frac{s_n}{t_n} = a$.

Segue-se do Teorema que $\lim \frac{s_1 + \cdots + s_{n-1}}{t_1 + \cdots + t_{n-1}} = \lim \frac{x_n}{y_n} = a$.

Agora, como $x_{n+1} - x_n = \frac{x_{n+1} - x_n}{n+1 - n}$, a seq $y_n = n$ é crescente, $\lim y_n = +\infty$ e $\lim \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = a$, concluímos que $\lim \frac{x_n}{n} = a$.

Em particular, se $x_n = \ln n$, como $\lim (x_{n+1} - x_n) = \lim \ln(1 + 1/n) = 0$, segue-se que $\lim \frac{\ln n}{n} = 0$.