6| Mostre que a sequência de funções:

$$g_N(x) = x + \frac{x^N}{N} = \frac{xN + x^N}{N}$$

Converge uniformemente em $[0,1]$ para uma função derivável $g$ e que a sequência das derivadas $g'_N$ converge pontualmente em $[0,1]$, mas $g' \neq \lim g'_N$.

<u>Resposta</u>: Seja $g = f + h$, onde:

$$f_N(x) = x \text{ e } h_N(x) = \frac{x^N}{N} \longrightarrow g_N(x) = f_N(x) + h_N(x)$$

Temos que $f_N(x)$ e $h_N(x)$ converge uniformemente em $[0,1]$, logo sua soma também, dado que:

$$f_N + h_N \to f + h \text{ uniformemente em } x$$

Se $x=0$, temos que $|h_N(x)| = \frac{0^N}{N} \leq \frac{1}{N}$, e com isso

$g_N \to x$, pois: $g_N = x + \frac{0^N}{N} = x$ e $g(x) = x$, que possui derivada $g'(x) = 1$.

A $g'_N(x) = 1 + x^{N-1}$, que converge para 1 se $x=0$, e converge para 2 se $x=1$, já em $(0,1)$ converge para 1, pois $\lim x^{N-1} = 0$. Portanto temos que:

$$g = \lim g'_N$$