**Lista 7**

**Questão 6**

Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto $a$. Suponha que em cada vizinhança de $a$, existam pontos $x, y$ tais que $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$. Demonstre que $f(a) = g(a)$.

**Prova:**

Dado $n \in \mathbb{N}$, na vizinhança $(a - \frac{1}{n}, a + \frac{1}{n})$ contém $x_n$ e $y_n$ tal que $f(x_n) < g(x_n)$ e $f(y_n) > g(y_n)$. Isto equivale dizer que

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ e } |y_n - a| < \frac{1}{n}$$

e quando $n \to +\infty$ obtemos duas sequências $(x_n)$ e $(y_n)$ que convergem ao ponto $a$. Pela continuidade de $f$ e $g$, temos

$$f(x_n) \longrightarrow f(a) \text{ e } f(y_n) \longrightarrow f(a)$$

$$g(x_n) \longrightarrow g(a) \text{ e } g(y_n) \longrightarrow g(a).$$

Como $f(x_n) < g(x_n)$ e $f(y_n) > g(y_n)$, então $f(a) \leq g(a)$ e $f(a) \geq g(a)$. Portanto $f(a) = g(a)$.