Nona Lista de Exercícios de Análise Real: Integral de Riemann

1. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada. Demonstre que $\left|\overline{\int_a^b} f(x)dx\right| \leq \overline{\int_a^b} |f(x)dx$.

2. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. As seguintes afirmações são equivalentes:

   (a) $\int_a^b |f(x)|dx = 0$;

   (b) Se f é contínua no ponto c, então $f(c) = 0$;

   (c) $X = \{x \in [a, b]; f(x) \neq 0\}$ tem interior vazio.

3. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida pondo $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = 1/q$ se $x = p/q$ é uma fração irredutível e $q > 0$ (ponha $f(0) = 1$ caso $0 \in [a, b]$). Demonstre que f é contínua apenas nos pontos irracionais de $[a, b]$, que é integrável e que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, com $f(x) \geq 0$, com $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se f é contínua no ponto $c \in [a, b]$ e $f(c) > 0$, prove que $\int_a^b f(x)dx > 0$.

5. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínuas, com $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Defina $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = f(x)$ se x for racional e $\varphi(x) = g(x)$ para x irracional. Prove que

$$\underline{\int_a^b} \varphi(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad \text{e} \qquad \overline{\int_a^b} \varphi(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

   Conclua que φ é integrável se, e somente se, $f = g$.

6. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Prove que a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é lipschitziana.

7. Prove que se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas, então

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2dx \cdot \int_a^b g(x)^2dx.$$

8. Seja D o conjunto de pontos de descontinuidade de uma função limitada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Se D' é enumerável, prove que f é integrável.

9. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, que se anula fora de um conjunto de medida nula. Prove que sua integral é igual a zero.

10. Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem conteúdo nulo quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura $X \subset I_1 \cup \cdots I_k$, com $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \varepsilon$. Demonstre:

    (a) Se X tem conteúdo nulo, o mesmo ocorre com seu fecho $\overline{X}$.

    (b) Um conjunto compacto tem medida nula se, e somente se, tem conteúdo nulo.

    (c) Se uma função limitada $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ coincide com uma função integrável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ exceto num conjunto de conteúdo nulo, prove que g é integrável e sua integral é igual à de f.

11. Se um conjunto $X \subset [a, b]$ não tem medida nula, então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda partição P de $[a, b]$, a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contém pontos de X em seu interior é maior do que ε.

12. Seja $p : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Prove que se $\int_a^b p(x)dx = 0$, então o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ tais que $p(x) = 0$ é denso em $[a, b]$. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é qualquer função integrável que se anula num conjunto denso de pontos em $[a, b]$, prove que $\int_a^b f(x)dx = 0$.

13. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, contínua à direita no ponto $x_0 \in [a, b)$. Prove que $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é derivável à direita no ponto x_0, com $F'_+(x_0) = f(x_0)$.

14. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável, com f' integrável. Prove que, para quaisquer $x, c \in [a, b]$, tem-se $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)dt$. Conclua no enunciado da Fórmula de Taylor com resto integral I, vale "integrável" em vez de "contínua".

15. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivável, com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$. Se $\{x \in [a, b] : f'(x) = 0\}$ tem conteúdo nulo, prove que f é crescente.

16. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\alpha, \beta : I \to [a, b]$ deriváveis. Defina $\varphi : I \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)dt$, para todo $x \in I$. Demonstre que φ é derivável e $\varphi'(x) = f(\beta(x)) \cdot \beta'(x) - f(\alpha(x)) \cdot \alpha'(x)$.

17. Sejam $f, p : [a, b] \to \mathbb{R}$ tais que f é contínua, p é integrável e $p(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$. Demonstre que se

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(a) \int_a^b p(x)dx,$$

então existe $c \in (a, b)$ tal que $f(a) = f(c)$.

18. Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ limitada ou não, faz sentido considerar a soma de Riemann $\sum(f; P^*)$, para toda partição pontilhada P^*. Demonstre que se existe $\lim_{|P| \to 0} \sum(f; P^*)$, então f é uma função limitada.

19. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Para toda partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a, b]$, sejam $P^* = (P, \xi)$ e $P^\# = (P, \eta)$ pontilhamentos de P. Demonstre que

$$\lim_{|P| \to 0} \sum f(\xi_i)g(\eta_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

20. Dadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, para cada partição pontilhada P^* de $[a, b]$, define-se a soma de Riemann-Stieltjes

$$\lim_{|P| \to 0} \sum(f, g; P^*) = \sum f(\xi_i)[g(t_1) - g(t_{i-1})].$$

Prove que se f é integrável e g possui derivada integrável, então

$$\lim_{|P| \to 0} \sum)(f, g; P^*) = \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

21. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é convexa, demonstre que $f((a+b)/2) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$.

22. Seja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, positiva, monótona não-crescente. Prove que se $\int_a^\infty f(x)dx$ converge, então $\lim_{x \to +\infty} xf(x) = 0$.

23. Seja $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrável em cada intervalo limitado $[a, x]$. Demonstre que a integral imprópria

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)dt$$

existe se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $A > 0$ tal que $A < x < y$ implica $|\int_x^y f(t)dt| < \varepsilon$.