13) Dadas f, g analíticas no intervalo aberto, seja $X \subset I$ um conjunto que possui um ponto de acumulação $a \in I$. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$. Em particular, se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, então $f \equiv 0$.

Resposta: Sejam $f, g: I \to \mathbb{R}$ analíticas, e I um intervalo aberto. Seja $X \subset I$ um conjunto tal que $a \in X' \cap I$. Suponha que $f|_X = g|_X$.

Mostraremos inicialmente que existe um intervalo aberto centrado em a, $I_a(r)$, tal que $f|_{I_a(r)} = g|_{I_a(r)}$.

Como f e g são analíticas em I, $\exists\, r_1, r_2 > 0$ tal que $\forall x \in I_a(r_1)$, $f(x) = \sum_{i \geq 0} \frac{f^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$ e $\forall x \in I_a(r_2)$:

$$g(x) = \sum \frac{g^{(i)}(a)}{i!}(x-a)^i$$

Seja $r = \min\{r_1, r_2\}$. Como $a \in X'$, $\exists (x_n)$, x_n tal que $x_n \to a$. Logo, $\exists\, n_0$ $\forall n > n_0$ $x_n \in I_a(r)$.

Necessitamos do seguinte:

a) Seja $f(x) = \sum a_n (x-a)^n$ uma série de potências não-constante tal que $R > 0$. Se $f(a) = 0$, então existirá $s > 0$ tal que $\forall x \in I_a(s)$, $f(x) \neq 0$.

b) Sejam $f(x) = \sum a_n (x-a)^n$ e $g(x) = \sum b_n (x-a)^n$ séries de potências com raio de convergência $R > 0$.

Se existir $X \subset I$ tal que $a \in X' \cap I$ e $f|_X = g|_X$, então $f|_{I_a(R)} = g|_{I_a(R)}$.

Demonstração: Como $f(x)$ é não-constante, $\exists\, n$ tal que $a_n \neq 0$. Seja $m = \min\{n \geq 0 \mid a_n \neq 0\}$.

Então, podemos escrever:

$$f(x) = \sum_{n \geq m} a_n (x-a)^n = a_m (x-a)^m$$

$$\left(1 + \sum_{n > m} \frac{a_n}{a_m} (x-a)^{n-m}\right) = a_m (x-a)^m \cdot \left(1 + \right.$$

$$\left. \sum_{n \geq 1} c_n (x-a)^n \right).$$

Note que a série $\sum_{n \geq 1} a_n (x-a)^n$ tem raio de convergência igual a R, e: $a_n (x-a)^m (1 + h(x))$.

Como $h(a) = 0$ e h é contínua em $x = a$, $\exists\, s > 0$ (que podemos tomar menor do que R) tal que $\forall x \in I_a(s)$, $(1 + h(x)) > 1/2$.

Como $a_m (x-a)^m \neq 0$ e $\forall x \neq a$, o resultado se segue.

(b) Seja $h(x) = f(x) - g(x) = \sum (a_n - b_n)(x-a)^n$.

Como, por hipótese, $\forall s > 0\ \exists x \in I_a(s)$ tal que $h(x) = 0$, segue-se do item (a) que:

$$h|_{I_a(R)} = 0$$

Desse modo, temos que $f|_{I_a(R)} = g|_{I_a(R)}$

Resta-nos mostrar que $f(x) = g(x)$ $\forall x \in I$.

Note que se $b \in fr\, I_a(R)$, então b será um ponto de acumulação de um conjunto de pontos (a saber, $I_a(R)$) em que $f = g$.

Logo, $f|_{I_b(R_b)} = g|_{I_b(R_b)}$, em que $R_b > 0$ é o Raio de convergência em comum às séries de Taylor de f e g centrados em b.

Como é possível cobrirmos I a partir de tais intervalos (isto é, $I = \bigcup_{b \in I} I_b(R_b)$) e f e g coincidem em cada um deles, segue-se que $f = g$, é imprescidível que não haja intervalo na cobertura disjunta dos demais.