Funções integráveis

Uma função limitada $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ chama-se integrável quando:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Este valor comum é chamado a <u>integral</u> de f e indicado com:

$$\int_a^b f(x)\,dx \text{ , ou } \int_a^b f.$$

- Se $f(x) = c$, então é integrável com:

$$\int_a^b f(x)\,dx = c.(b-a)$$

- Se é uma função escada, então f é integrável e:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum c_i(t_i - t_{i-1}),$$ onde <u>c_i</u> são os valores que f assume nos intervalos (t_{i-1}, t_i).

- Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é igual a 0 nos números $\mathbb{R}|\mathbb{Q}$ e igual a 1 nos números $\mathbb{Q}$, temos que a f não é integrável.

<u>Lema 4</u>: Sejam σ, Σ conjuntos limitados não-vazios de números reais. Suponhamos que, para quaisquer $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$ seja $s \leq S$. Então $\sup \sigma = \inf \Sigma$ se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$ existem $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$ tais que

$S - s < \varepsilon$.

Lema 5: Seja Y um conjunto não-vazio limitado de números reais. Se $m = \inf Y$ e $M = \sup Y$, então, $M - m = \sup\{|x-y| : x, y \in Y\}$.

Corolário: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para todo $X \subset [a,b]$ não-vazio, tem-se $w(f;X) = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\}$.

Teorema 4: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:

1) f é integrável;

2) Para todo $\varepsilon > 0$ existem partições P, Q do intervalo $[a,b]$ tais que $S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon$.

3) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P do intervalo $[a,b]$ tal que:

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon,$$

4) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, t_1, \dots, t_N\}$ do intervalo $[a,b]$ tal que:

$$\sum_{i=1}^{N} w_i \cdot (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

Teorema 5: Sejam $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Então:

1) Para $a < c < b$, $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,d]}$ são integráveis e se tem:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Reciprocamente, se $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$ são integráveis, então f é integrável, e vale a igualdade acima.

2) Para todo $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot f$ é integrável e:

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

3) $f+g$ é integrável e:

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

4) Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

Em particular, se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$$

5) $|f(x)|$ é integrável e se tem:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Segue-se de (4) e (5) que se $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in [a,b]$, então:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq k(b-a)$$

(6) O produto $f.g$ é integrável.

Teorema 6: Toda função contínua $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.

Teorema 4: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Se, para cada $c \in [a,b)$, $f|[a,c]$ é integrável, então f é integrável.

Corolário 1: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Se, para cada $a < c < d < b$ quaisquer, $f|[c,d]$ é integrável, então f é integrável.

Corolário 2: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, com um número finito de descontinuidades. Então f é integrável.