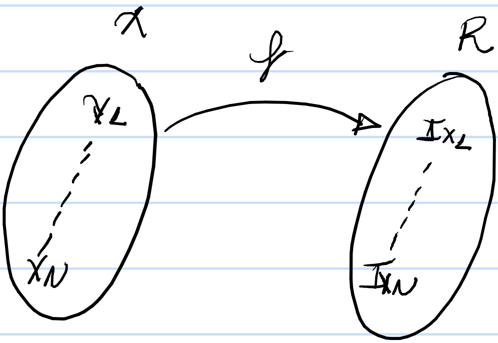
13) Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ se chama localmente limitada quando, para cada $x \in X$, existe um aberto $I_x \ni x$ tal que $f|_{I_x \cap X}$ é limitada. Mostre que se X é compacto, toda função $f: X \to \mathbb{R}$ localmente limitada é limitada.

$X \subset \mathbb{R}$

- $f: X \to \mathbb{R}$
- $x \in X$, existe um aberto I_x com $x \in I_x$
- $f|_{I_x \cap X}$ é limitada, $f-(I_x \cap X)$



$x_i \in I_{x_i}$, $i: 1, \ldots, N$.

Teorema Borel-Lebesgue: Toda cobertura aberta de um compacto possui subcobertura finita.

Idéia: Seja $X = \{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$. X é um conjunto infinito e seus pontos são todos isolados (isto é, $X \cap X' = \emptyset$). Assim, para cada $x \in X$, podemos obter um intervalo aberto I_x, de centro x, tal que $I_x \cap X = \{x\}$.
A família $C = (I_x \mid x \in X$ assim formada é uma cobertura de X, pois cada $x \in X$ pertence a I_x.
Note-se que C não possui subcobertura própria: se omitirmos qualquer I_x, o ponto x fica "descoberto" pois x não pertence a I_y algum com $y \neq x$.

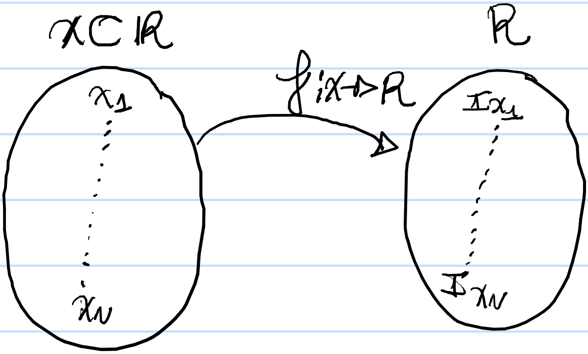
Teorema 10: Seja $[a,b]$ um intervalo limitado e fechado. Dada uma família $(I_\lambda)_{\lambda \in L}$ de intervalos abertos tais que $[a,b] \subset \bigcup_{\lambda \in L} I_\lambda$, existe um número finito deles: $I_{\lambda_1}, \ldots, I_{\lambda_n}$, tais que $[a,b] \subset I_{\lambda_1} \cup \ldots \cup I_{\lambda_n}$. Em outras palavras:

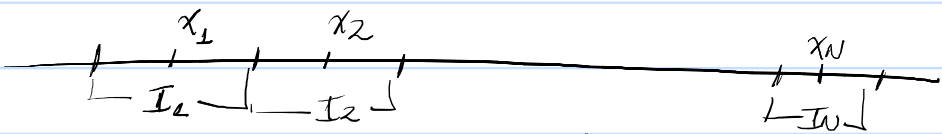
Toda cobertura de $[a,b]$ por meio de intervalos abertos admite uma sub cobertura finita.

Sejam X um subconjunto compacto de $\mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ uma função localmente limitada para cada $x \in X$, I_x é um intervalo contendo x e $A_x > 0$ tais que:

$f(x) = y$

$x \in X \cap I_x$





Temos que $x \in I_x$, para todo $x \in X$, temos que:

$$X = \bigcup_{x \in X} I_x$$

Sendo X um conjunto compacto, ou seja, limitado e fechado. Existem $x_1, \ldots, x_N$ em X tais que: $X = I_{x_1} \cup \ldots \cup I_{x_N}$

Para $A \in \mathbb{R}$ definido por:

$$A := \max \{A_{x_1}, \ldots, A_{x_N}\}$$

Temos que $x \in I_x$, então:

$$|f(x)| < A_{x_1} \leq A$$

Ou seja: $|f(x)| < A$

Para todo $x \in X = \bigcup_{i=1}^{N} I_{x_i}$, portanto, f é limitada.