7) Prove que se $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ são contínuas, então:

$$\left[\int_a^b f(x) g(x)\, dx\right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2 dx \cdot \int_a^b g(x)^2 dx$$

Temos que f, g são contínuas e temos que toda função contínua é integrável.

Pelo Teorema 5 temos que: sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integráveis e pelos itens:

5) $|f(x)|$ é integrável e se tem:

$$\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx,$$ segue-se que se $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in [a, b]$ então $\left|\int_a^b f(x)\, dx\right| \leq k \cdot (b-a)$

6) O produto $f \cdot g$ é integrável.

Teorema 8: Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrável. Se f é contínua no ponto $c \in [a, b]$, então a função $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, definida por:

$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$, é derivável no ponto c e se tem $F'(c) = f(c)$.

Temos que: $\int_a^b f(x)\,dx$, é integrável e contínua em um dado ponto $c \in [a,b]$. Assim temos:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \text{ e } F'(c) = f(c)$$

E pelo <u>Corolário</u>: Dada $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, existe $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, tal que:

$$F' = f \quad \text{e} \quad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Então: $\int_a^x f(t)\,dt = F(x)$ e $\int_a^x g(t)\,dt = G(x)$

Como: $\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\,dx\right]^2 \leq \left[\int_a^b f(x)\,dx \cdot \int_a^b g(x)\,dx\right]^2 =$

$$\left[F(x) \cdot G(x)\right]^2 = (F(x))^2 \cdot (G(x))^2 =$$

$$(F(x))^2 = \int_a^b f(x)^2\,dx \quad \text{e} \quad (G(x))^2 = \int_a^b (g(x))^2\,dx$$