1) Demonstre que um conjunto é denso em $\mathbb{R}$ se, e somente se, seu complementar tem interior vazio.

Tomamos D com um conjunto denso em $\mathbb{R}$, dado $x \in \mathbb{R} - D$ e $\varepsilon > 0$, temos que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap D \neq \emptyset$. Pela definição, e assim $x \notin \text{int}(\mathbb{R}-D)$.

E como $\text{int}(\mathbb{R}-D) \subset \mathbb{R} - D$, temos que $\text{int}(\mathbb{R}-D) \neq \emptyset$.

2) Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que vale a união disjunta $\mathbb{R} = \text{int}(X) \cup \text{int}(\mathbb{R}/X) \cup F$, em que F é formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R}/X$. O conjunto F se chama a fronteira de X.

Dado $x \in \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}$ vale uma é apenas das propriedades:

i) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset X$, e com isso $x \in \text{int}(A)$. Caso contrário $\forall \varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subset X$ e ficará valendo outra propriedade:

1) Existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (\mathbb{R}/X)$, e com isso $x \in \text{int}(\mathbb{R}/X)$, ou:

2) $\forall \varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $\forall \varepsilon > 0$ $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (\mathbb{R}/X) \neq \emptyset$ e temos as condições para $x \in F$ (a fronteira).

Com isso concluímos que $\mathbb{R} \subset int(X) \cup int(\mathbb{R} \setminus X) \cup F$ e como $int(X) \cup int(\mathbb{R} \setminus X) \cup F \subset \mathbb{R}$, temos que $\mathbb{R} = int(X) \cup int(\mathbb{R} \setminus X) \cup F$.

2.1) A é aberto se, e somente se $A \cap F = \emptyset$.

i) Se A é aberto, então $int A = A$, por definição. E $int(A)$ e F são disjuntos.

ii) Supomos agora que $A \cap F = \emptyset$, então dado $a \in A$ temos que:

$$a \in int(A) \cup int(\mathbb{R} \setminus A) \cup F$$

E não pode valer $a \in F$ ou $a \in int(\mathbb{R} \setminus A)$, com isso temos que $a \in int(A)$ e implica que $A \subset int(A)$, logo $A = int(A)$ e A é aberto.

2.2) A é fechado se e somente se, $A \cap F = F$.

Por analogia podemos pensar que A é fechado se e somente se, $F \subset A$. Ou seja F é um subconjunto de A e logo $A \cap F = F$.

Tomamos A fechado, e então $\bar{A} = A$, usando a identidade $\bar{A} = A \cup F$ e segue que $A \cup F = A$, portanto deve existir $F \subset A$.

Supondo agora que $F \subset A$, então: $A \cup F = A = \bar{A}$ e finalizamos com A sendo fechado.

2.3) A não é fechado e nem aberto, se e somente se, $A \cap F \neq \{\emptyset, F\}$.

i) Tomamos A como um conjunto que não é aberto e também não é fechado, assim dados os pontos (a, b) não podem ser pontos de fronteira de A.

Assim são pontos interiores do conjunto, da mesma forma que (b, ∞) e $(-\infty, a)$ não podem ser pontos de fronteira. Isto é são pontos de $R \setminus A$, e com isso segue que a $F = \{a, b\} \neq A$.

Temos portanto que $A \cap F \neq \{\emptyset, F\}$.