9) Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que:

$$\mathbb{R} / (\operatorname{int} X) = \overline{\mathbb{R}/X} \quad \text{e} \quad \mathbb{R}/\overline{X} = \operatorname{int}(\mathbb{R}/X)$$

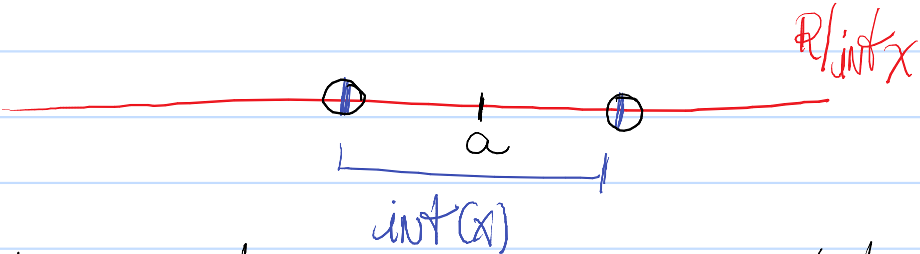
int(X): Diz-se que a é interior a X (ou X é uma vizinhança de a), quando há intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset X$.
O interior do conjunto X (int X) é o conjunto dos pontos interiores a X.
O conjunto X é aberto se $\operatorname{int} X = X$.

fecho: O fecho é o conjunto dos pontos aderentes a X. O fecho de X é $\overline{X}$.
Se $X = \overline{X}$, então X é fechado.

Diz que a é aderente a X quando há sequências $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.
O ponto a é aderente a X, se e somente se, toda a vizinhança de a intersecta X.
$\overline{X}$ é um conjunto fechado.
$X = \overline{X}$, temos que X é fechado.

1) Dado $X \subset \mathbb{R}$, temos que $\text{int}(X)$ são todos os pontos interiores a X. Logo: x é interior a X quando dado (x_n), para $\varepsilon > 0$ temos $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq X$.

Então $\mathbb{R} - \text{int}(X)$ são todos os pontos de $\mathbb{R}$ com exceção de $\text{int}(X)$.



Se $x \notin \text{int}(X)$ temos que $x \in \mathbb{R}/\text{int}(X)$, Como $\text{int}(X)$ é aberto e dada a condição:

"F é fechado se, e somente se, $A = \mathbb{R} - F$ é aberto."
"Temos que $\mathbb{R} = \text{int}(A) \cup \text{int}(\mathbb{R}/A) \cup \text{fr}\, A$"

Como a reta $\mathbb{R}$ é dada por:
$\mathbb{R} = \text{int}(X) \cup \text{int}(\mathbb{R}/X) \cup \text{fr}\, X$, temos:

$$\mathbb{R}/\text{int}(X) = \text{int}(\mathbb{R}/X) \cup \text{fr}\, X$$

$fr\, X = \mathbb{R}/X$, então:

$$\mathbb{R}/\text{int}(X) = \text{int}(\mathbb{R}/X) \cup fr(\mathbb{R}/X) = \overline{(\mathbb{R}/X)}$$

Temos que $\overline{(\mathbb{R}/X)}$ é o fecho onde é o conjunto de todos os pontos aderentes de $(\mathbb{R}/X)$.

2) $\mathbb{R}/\overline{X} = \text{int}(\mathbb{R}/X)$

Temos que $x \notin \overline{X}$, logo x não é ponto de aderência de X. Ou seja $x \neq \lim x_n$.

Então se $x \notin \overline{X}$, isto é existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X = \emptyset$, com isso temos que $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ não pertence a X. Logo pertence a $\mathbb{R}/X$.

Então $x \in \text{int}(\mathbb{R}/X)$.

Agora se $x \in \text{int}(\mathbb{R}/X)$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset (\mathbb{R}/X)$, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X = \emptyset$ e portanto $x \notin \overline{X}$. Então:

$$\left(\mathbb{R} / \overline{X} \right) = \text{int} \left(\mathbb{R} / A \right), \text{ pois } x \notin \overline{X},$$

se e somente se, $x \in \text{int} \left(\mathbb{R} / X \right)$.

Conclui-se então que $\mathbb{R} / \overline{X}$ é um conjunto aberto.

Dado pela definição: $\overline{X}$ é fechado, logo $\mathbb{R} / \overline{X}$ é aberto.