Sétima Lista de Exercícios de Análise Real: Funções contínuas

1. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $Z_f = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$ é fechado. Conclua que se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas, então $C = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = g(x)\}$ é um conjunto fechado.

2. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Demonstre que são contínuas no ponto a as funções $\phi, \psi : X \to \mathbb{R}$, definidas por $\phi(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ e $\psi(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ para todo $x \in X$.

3. Demonstre a proposição a seguir: uma função $f : A \to \mathbb{R}$, definida em um aberto $A \subset \mathbb{R}$, é contínua se, e somente se, para todo $c \in \mathbb{R}$, os conjuntos $E[f < c] = \{x \in A | f(x) < c\}$ e $E[f > c] = \{x \in A | f(x) > c\}$ forem abertos.

4. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Se $\overline{Y} \subset X$ e $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$, então $f \restriction \overline{Y} = g \restriction \overline{Y}$. Conclua que se duas funções contínuas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(r) = g(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$, então $f = g$.

5. Demonstre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

6. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto a. Suponha que em cada vizinhança de a, existam pontos x, y tais que $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$. Demonstre que $f(a) = g(a)$.

7. Demonstre que uma função $f : X \to \mathbb{R}$ é descontínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência de pontos $x_n \in X$ tais que $|x_n - a| \leq 1/n$ e $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Demonstre que se K é compacto, então $f^{-1}(K)$ é compacto.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto $C_n = \{a \in \mathbb{R} |$ existe $I \ni a$ aberto tal que se $x, y \in I$, então $|f(x) - f(y)| < 1/n\}$. Demonstre que:

(a) Cada C_n é um conjunto aberto;

(b) f é contínua em a se, e somente se, $a \in C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Conclua que o conjunto dos pontos de continuidade de qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma intersecção enumerável de abertos.

10. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ se diz localmente constante quando todo ponto de X possui uma vizinhança V tal que f é constante em $V \cap X$. Prove que toda função $f : I \to \mathbb{R}$ localmente constante num intervalo I é constante.

11. Diz-se que uma função $f : I \to \mathbb{R}$, definida no intervalo I, tem a propriedade do valor intermediário quando a imagem $f(J)$ de todo intervalo $J \subset I$ é um intervalo. Suponha que f satisfaça tal propriedade. Demonstre que se, para cada $c \in \mathbb{R}$, existe apenas um número finito de pontos $x \in I$ tais que $f(x) = c$, então f é contínua.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty$, demonstre a existência de um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ no qual f assume seu valor mínimo.

13. Classifique os intervalos da reta quanto a homeomorfismos, isto é, faça uma lista de tipos de modo que dois intervalos são homeomorfos se, e somente se, têm o mesmo tipo.

14. Prove que não existe uma função contínua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que assuma cada um dos seus valores $f(x)$, $x \in [a, b]$, exatamente duas vezes.

15. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se diz periódica quando existe $p \in \mathbb{R}^+$ tal que $f(x+p) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demonstre que toda função periódica é limitada e atinge seus valores máximo e mínimo.

16. Demonstre que $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, existir uma cobertura $X \subset \cup_{x\in X} I_x$, com $I_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$, tais que $y, z \in X \cap I_x \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Demonstre que f é uniformemente contínua se, e somente se, para cada $\varepsilon > 0$, os intervalos I_x puderem ser escolhidos com o mesmo comprimento.

17. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se existirem $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$, prove que f é uniformemente contínua.

18. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $\varepsilon > 0$, demonstre a existência de pontos $a_i \in [a, b]$, $a = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = b$ tais que, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, se $x, y \in [a_{i-1}, a_i]$, então $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

19. Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, suponha que para cada $\varepsilon > 0$ se possa obter uma função contínua $g : X \to \mathbb{R}$, tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$. Demonstre que f é contínua.