10) ① Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem conteúdo nulo quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ com $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \varepsilon$. ① Demonstre:

a) Se X tem conteúdo nulo, o mesmo ocorre com seu fecho $\overline{X}$.

b) Um conjunto compacto tem medida nula se, e somente se, tem conteúdo nulo.

c) Se uma função limitada $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ coincide com uma função integrável $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ exceto num conjunto de conteúdo nulo, prove que g é integrável e sua integral é igual à de f.

a) Seja $I_j = (a_j, b_j)$, tais que $X \subset \bigcup_{j=1}^{k} I_j$ e $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \varepsilon$. Considere $J_j = (2a_j, 2b_j)$. Dessa forma, temos que:

$$\overline{X} \subset \bigcup_{j=1}^{k} J_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{k} |J_j| < 2\varepsilon$$

Portanto $\overline{X}$ tem conteúdo nulo.

b) i) Seja $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto compacto que tem medida nula, então dado $\varepsilon > 0$, temos que existe uma cobertura enumerável $X \subset \bigcup I_j$ tal que $\sum |I_j| < \varepsilon$.

Pelo Teorema de Borel-Lebesgue, uma vez que X é compacto, toda cobertura de X admite uma subcobertura finita.

Portanto, existem $j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{N}$ tais que:
$X \subset I_{j_1} \cup \ldots \cup I_{j_k}$.

Como $\sum_{i=1}^{k} |I_{j_i}| \leq \sum |I_j| < \varepsilon$, obtemos que

X tem conteúdo nulo.

ii) Por definição um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem conteúdo nulo, quando para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura $X \subset I_1 \cup \ldots \cup I_k$, com $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \varepsilon$.

Ou seja, existe uma cobertura finita e limitada.

Como por definição: Uma cobertura (finita) de um conjunto X é uma família (finita) C de conjuntos C_λ (com $\lambda \in L$) tal que $X \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$.

Como $X \subseteq$ na $\bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, e esta união é limitada

temos que X é compacto.

c) Temos que $g: [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada, que coincide com uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Temos que g e f são integráveis fora do conjunto de conteúdo nulo. Se tomarmos X como o conjunto de conteúdo nulo, temos então:

- $g:[a,b] \to \mathbb{R}$ é dada por $g(x)=f(x)$ limitada e $\forall x \in [a,b]-X$, onde X tem conteúdo nulo, então g é integrável e sua integral é igual a de f.

i) $g-f:[a,b]-X \to \mathbb{R}$ é nula. Seja $M = \sup_{x\in[a,b]} |g-f|$ e vale que $\inf |g-f| = 0$ para qualquer intervalo de $[a,b]$ pois X não pode conter um intervalo, e portanto sempre existe um elemento de $[a,b]-X$ em qualquer intervalo.

Disso segue que qualquer soma inferior de $|g-f|$ é nula. Dado $\varepsilon > 0$ existem intervalos abertos $(I_k)_1^N$ tais que:

$$X \subset \bigcup_{k=1}^{N} I_k = u \quad e \quad \sum_{k=1}^{N} |I_k| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Supondo que cada $I_k \subset [a,b]$, então as extremidades desses intervalos e a, b formam uma partição P de $[a,b]$, os intervalos dessa partição que contém os pontos de K são os I_k, logo temos a soma superior:

$$S(|g-f|,P) = \sum_{\exists j | [t_{k-1},t_k]} M_k \Delta t_{k-1} + \sum_{[t_{k-1},t_k] \neq I_j, \forall j} \overset{0}{\widehat{M_k}} \Delta t_{k-1} \leq$$

$$M \sum_{\exists j | [t_{k-1},t_k] = I_j} \Delta t_{k-1} = M \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

Portanto $\int_a^b |g-f| = 0$, $g-f$ é integrável e sua integral é nula, daí $g = f + (g-f)$ é integrável e:

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

$\boxtimes$