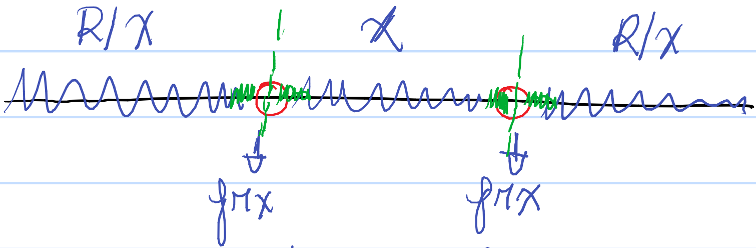
8) Demonstre que, para todo $X \subset \mathbb{R}$, vale $\overline{X} = X \cup \mathrm{fr}\, X$. Conclua que X é fechado se, e somente se, $X \supset \mathrm{fr}\, X$.

- $\mathrm{fr}\, X$: Temos que:

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$$

$$(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap R/X \neq \emptyset$$



- $\overline{X}$ é um conjunto fechado, é formado pelos pontos de aderência a X.

$X = \overline{X}$, temos que X é fechado.

- $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$
- O ponto a é aderente a X se, e somente se, toda vizinhança de a intersecta X.
- F é fechado se, e somente se, $A = R - F$ é aberto.

Temos $X \subset \mathbb{R}$, vale $\overline{X} = X \cup \text{fr}\, X$.

Dado um ponto $x \in X$, temos que x é aderente a X então $a = \lim x_n$ com $x_n \in X$ para todo n.

Dado $\varepsilon > 0$, temos $x_n \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ para todo n suficientemente grande.
Logo:

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset \text{ e}$$
$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \text{fr}\, X \neq \emptyset$$

Temos que:

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \cup (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \text{fr}\, X \neq \emptyset = \overline{X}$$

Por definição X é fechado se $X = \overline{X}$
Então dado $x \in \overline{X}$ se $x \in X$ então X é fechado.
Temos $x \in [(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \cup (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \text{fr}\, X]$
Temos que para X ser fechado,
$x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X$ e $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \text{fr}\, X$
Portanto: $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X = (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \text{fr}\, X$
Logo $\text{fr}\, X = X$ ou $\text{fr}\, X \subset X$.

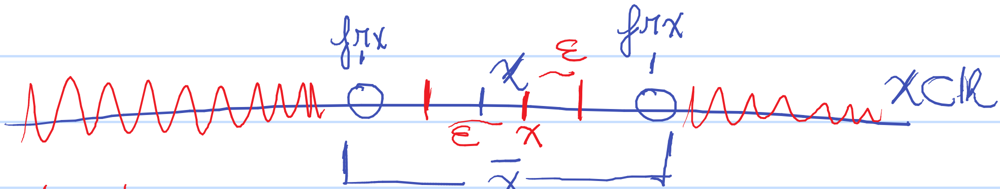
Melhor resposta:

Dada a condição $X \subset \mathbb{R}$, vale:

$$\overline{X} = X \cup \operatorname{fr} X$$

Se $x \in X$ então $x \in X \cup \operatorname{fr} X$, caso $x \notin X$ e $x \in \overline{X}$ então existe uma sequência (x_n) em X tal que $\lim x_n = x$, $\forall \varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n > n_0$ tem-se:

$$x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon).$$



Portanto nessas condições $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} \setminus X) \neq \emptyset$, pois $x \notin X$ e $x \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. Então temos pelo menos esse elemento no conjunto, implicado pela definição que $x \in \operatorname{fr} X$.

Agora $X \cup \operatorname{fr} X \subset \overline{X}$, basta mostrar que $\operatorname{fr} X \subset \overline{X}$, pois é sabido que $X \subset \overline{X}$. Dado $x \in \operatorname{fr} X$ então para todo $\varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$, logo podemos tomar uma sequência de pontos em X que converge para x, com isso $x \in \overline{X}$.

Agora falta mostrar que: $\text{fr} X \subset X$.

Como X é fechado então, temos: $\overline{X} = X$. Usando a identidade:

$$\overline{X} = X \cup \text{fr} X$$

Segue que $X \cup \text{fr} X = X$, logo deve valer $\text{fr} X \subset X$. Suponha agora que $\text{fr} X \subset X$ então:

$$X \cup \text{fr} X = X = \overline{X}$$

Portanto X é fechado.