13) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função com derivada limitada em (a,b) e com propriedade do teorema do valor intermediário. Prove que f é contínua.

Resposta: Pelo teorema do valor intermediário para derivadas, temos que f é derivável em todos os pontos $x \in [a,b]$. Se $f'(a) < d < f'(b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = d$.

Como toda função f derivável no ponto, temos que f é contínua no ponto. Temos que o intervalo é fechado e limitado.

Pelo teorema de Weierstrass, temos que $f: K \to \mathbb{R}$ contínua no compacto K de $\mathbb{R}^n$. Então, f assume valor máximo e valor mínimo absoluto em K.

Como todo intervalo compacto é limitado e fechado, temos que $[a,b]$ é compacto, e pelo teorema de Weierstrass temos que o intervalo $[a,b]$ possui extremos sendo:

b = máximo absoluto e a = mínimo absoluto

Então pelo teorema do valor intermediário temos que existe $x \in [a,b]$ onde $f'(a) < d < f'(b)$ sendo que $f'(x) = d$.

Assim determinamos os extremos e pelo teorema de Weierstrass temos que f é contínua no intervalo.