Lista 7

Questão 3 Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um conjunto aberto e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função.

$(\Rightarrow)$
Assumir que f é contínua. Dado $c \in \mathbb{R}$, mostremos que $[f < c]$ é aberto. Seja $a \in [f < c]$, isto é, $f(a) < c$. Mostraremos que a é um ponto interior de $[f < c]$. Tomamos um $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < c - f(a)$, pela continuidade de f, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } x \in A \text{ e } |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon < c - f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$x \in A \cap (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < c - f(a)$$

$$x \in A \cap (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow f(x) - f(a) < c - f(a)$$

Finalmente

$$x \in A \cap (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow f(x) < c$$

$$A \cap (a - \delta, a + \delta) \subset [f < c],$$

portanto a é um ponto interior de $[f < c]$. Analogamente provamos que $[f > c]$ é aberto.

$(\Leftarrow)$
Assumir que $[f < c]$ e $[f > c]$ são abertos para todo $c \in \mathbb{R}$. Dado $a \in A$ e $\epsilon > 0$. Os conjuntos $[f < f(a) + \epsilon]$ e $[f > f(a) - \epsilon]$ são abertos. Então existe um $\delta > 0$ tal que

$$(a - \delta, a + \delta) \subset [f < f(a) + \epsilon] \cap [f > f(a) - \epsilon] \cap A.$$

Consequentemente

$$\text{dado } x \in (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow x \in A, \quad f(x) < f(a) + \epsilon \text{ e } f(x) > f(a) - \epsilon$$

$$x \in A \text{ e } |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Portanto f é continua em $a \in A$.