5) Demonstre que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

Resposta: i) Temos que f é contínua, e devemos mostrar que dado $a \in f(\overline{A})$ então $a \in \overline{f(A)}$.

Tomemos um $a \in f(\overline{A})$, então existe $x \in \overline{A}$ tal que $f(x) = a$, mas como $x \in \overline{A}$, então existe uma sequência (x_N) em A tal que $\lim x_N = x$, por f ser contínua segue que $f(x_N) \in f(A)$ e $\lim f(x_N) = f(x) = a \in \overline{f(A)}$, assim temos que

$a \in f(\overline{A})$ e $a \in \overline{f(A)}$.

ii) Se tomarmos f como descontínua, então existe um ponto $a \in \mathbb{R}$ tal que f é descontínua em a, assim existe uma sequência (x_N) em $\mathbb{R}$ tal que:

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \frac{1}{N} > 0, |x_N - a| < 1/N$, mas $|f(x_N) - f(a)| \geq \varepsilon$

Então tomando A como o conjunto dos termos da sequência (x_N) segue que $a \in \overline{A}$, logo $f(a) \in f(\overline{A})$ mas a propriedade $|f(x_N) - f(a)| \geq \varepsilon$ é nos garante que

$f(a) \in f(\overline{A})$, assim temos a mesma prova utilizando a contrapositiva.