4) Seja $f: X \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $a \in X \cap X'$, defina $\gamma: X \to \mathbb{R}$ pondo $\gamma(x) = \left(\frac{f(x) - f(a)}{(x-a)}\right)$ se $x \neq a$, $\gamma(a) = L$. Demonstre que γ é contínua se, e somente se, existe $f'(a)$ e $f'(a) = L$.

Definição: Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X \cap X'$. A derivada de f em a é:

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Se $f'(a)$ existir, a função é derivável em a.

Se f for derivável em cada ponto de $X \cap X'$, f é derivável em X e a função $f': X \cap X' \to \mathbb{R}$ é a função derivada de f. Se f' for contínua f é de classe C^1.

- Dado $a \in X \cap X'_+$, a derivada $f'(a)$ existe se e somente se:

$$f(a+h) = f(a) + c.h + r(h), \text{ onde } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

- Se f é derivável em a, então f é contínua em a.

Resposta: Dada $f: X \to \mathbb{R}$ contínua e dado $a \in X \cap X'$ então:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(a).h = \lim_{h \to 0} f(a+h) - f(a)$$

Se tomarmos $r(h)$, onde:

$r(h) = f(a+h) - f(a) - f'(a).h \quad , \forall h \neq 0 \Rightarrow a+h \in X.$

Temos: $f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$,

com $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0$

Se tomarmos $f'(a) = \delta(x)$, então:

$\delta(x) = \frac{(f(x) - f(a))}{(x-a)}$

Assim: $f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$

$f(a+h) = f(a) + \delta(x).h + r(h)$, com $\delta(x) = L$

Então: $f(a+h) = f(a) + L.h + r(h)$

Temos que: $f(a+h) - f(a) = L.h + r(h) \; (\div h)$

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L + \frac{r(h)}{h}$, com $\lim\limits_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} \cong 0$

Então: $L = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Como $f'(a) = L$ e a derivada existe para $a \in X \cap X'$, pelo Teorema 1, se a derivada existe então f é contínua no ponto a.

Logo $\delta(x) = L$ é contínua no ponto a.

Como $\delta(x) = L = f'(a)$ temos que $\delta(x)$ é derivável no ponto, e como $f(x) = f(a+h)$.

$$f(a+h) = f(a) + \gamma(x)h + r(h)$$

$$f(x) = f(a) + \gamma(x)h + r(h)$$

Como $f(x)$ é contínua, temos que $\gamma(x)$ é contínua. Dado que $\gamma(x)$ é a derivada de $f(x)$.