

## Lista 7

### Questão 9

Seja  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função arbitrária. Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , consideremos o conjunto

$$C_n = \{a \in \mathbb{R} : \text{existe } I \ni a \text{ aberto tal que se } x, y \in I, \text{ então } |f(x) - f(y)| < 1/n\}.$$

Demonstre que:

- (a) Cada  $C_n$  é um conjunto aberto;
- (b)  $f$  é contínua em  $a$  se, e somente se,  $a \in C_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Conclua que o conjunto dos pontos de continuidade de qualquer função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma intersecção enumerável de abertos.

### Prova:

- (a) Seja  $a \in C_n$ , então existe um intervalo aberto  $I_a$  que contem  $a$  tal que  $\forall x, y \in I_a \implies |f(x) - f(y)| < 1/n$ . Como  $I_a$  é um intervalo aberto, existe  $\delta > 0$  tal que  $(a - \delta, a + \delta) \subset I_a$ . Basta mostrar que  $(a - \delta, a + \delta) \subset C_n$ , para afirmar que  $C_n$  é aberto.

Dado  $b \in (a - \delta, a + \delta)$ , existe um  $\delta_1 > 0$  tal que  $(b - \delta_1, b + \delta_1) \subset (a - \delta, a + \delta)$ . Logo,  $(b - \delta_1, b + \delta_1) \subset I_a$  e para todo  $x, y \in (b - \delta_1, b + \delta_1) \implies |f(x) - f(y)| < 1/n$ . Concluindo que  $b \in C_n$  e  $(a - \delta, a + \delta) \subset C_n$ .

- (b)  $\implies$

Assumir que  $f$  é contínua em  $a$ , dado  $n \in \mathbb{N}$  existe  $\delta > 0$  tal que

$$\text{para cada } z \in (a - \delta, a + \delta) \implies |f(z) - f(a)| < \frac{1}{4n}. \quad (1)$$

Tomamos  $x, y \in (a - \delta, a + \delta)$  por (1)

$$|f(x) - f(a)| < \frac{1}{4n} \text{ e } |f(y) - f(a)| < \frac{1}{4n}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n},$$

provando que  $a \in C_n$ .

$\Leftarrow$

Supor que  $a \in C_n$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Dado  $\epsilon > 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\frac{1}{n} < \epsilon$ . Por hipóteses existe um intervalo aberto  $I_a$  que contém  $a$  tal que

$$x, y \in I_a, \text{ implica } |f(x) - f(y)| < 1/n < \epsilon.$$

Existe  $\delta > 0$  tal que  $(a - \delta, a + \delta) \subset I_a$  e fazendo  $y = a$  obtemos

$$x \in (a - \delta, a + \delta), \text{ implica } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Então  $f$  é contínua em  $a$ .

Seja  $C = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ é contínua em } x\}$ , pela parte (b) afirmamos que

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x \in C_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : x \in C_n\}.$$

Por conseguinte  $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$  e pela parte (a) temos que cada  $C_n$  é aberto. Portanto  $C$  é a interseção enumerável de abertos.