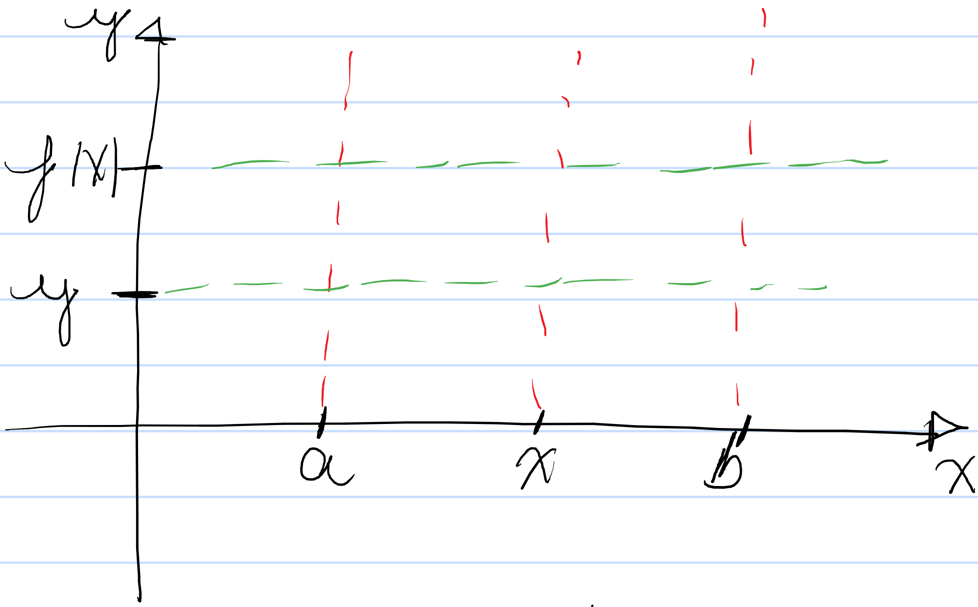
Suponhamos dada uma função:

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$, no intervalo $[a,b]$.

Se $f \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$. Tomamos o conjunto

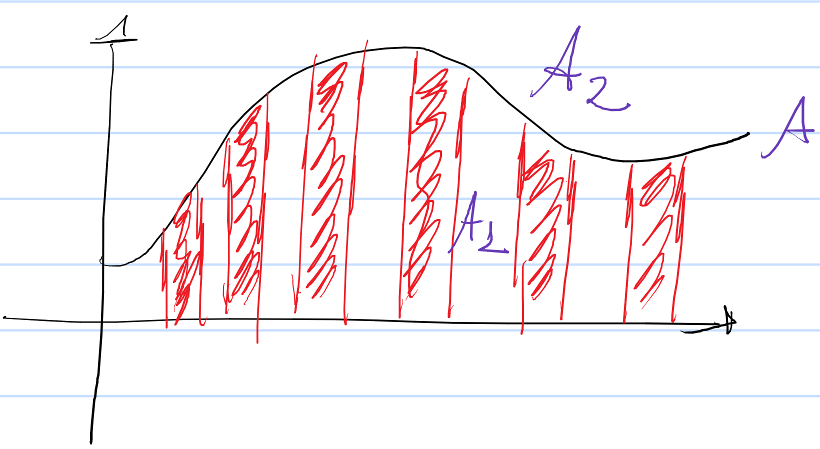
$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$



Área de um subconjunto limitado A do plano $\mathbb{R}^2$ deve ser um número real.

i) Área A_1 = supremo das áreas dos polígonos contidos em A.

ii) Área A_2 = ínfimo das áreas dos polígonos que contém A.



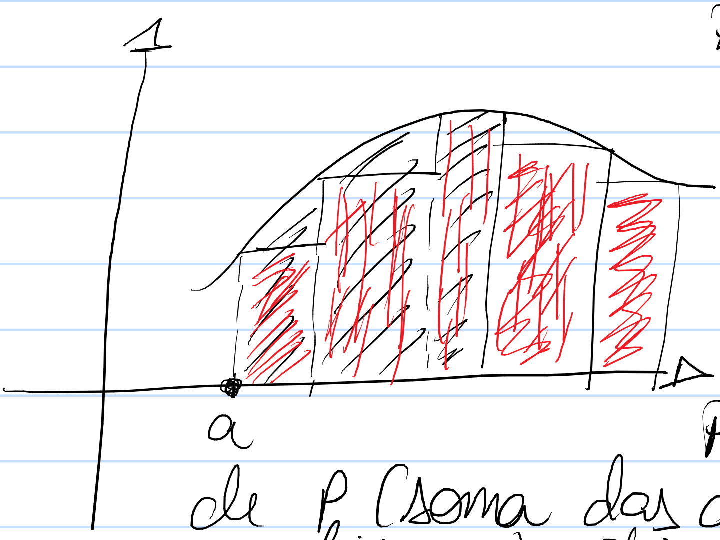
$A_1 \leq A_2$

$m_i(A)$: área interna do conjunto A, o sup. das áreas dos polígonos contidos em A.

$m_e(A)$: área dos polígonos que contém A, área externa de A.

Então temos que $m_i(A) \leq m_e(A)$, se ocorrer que $m_i(A) = m_e(A)$ então temos que A é um conjunto mensurável (no sentido de Jordan). E temos que $m(A) = m_i(A) = m_e(A)$ a área de A.

Dado o gráfico:



Cada um desses polígonos retangulares P determina uma decomposição ("partição") do intervalo $[a,b]$ em subintervalos justapostos, e conforme $P \subset A$ ou $P \supset A$, a área de P (soma das áreas dos retângulos que o constituem), isto motiva a noção de soma inferior ou de soma superior associada a uma partição de $[a, b]$.

A área interna será a integral inferior de f, enquanto a área externa será a integral superior. A existência ou não da área de A está ligada a regularidade da função f.

Temos que A possui área se, e somente se, f tem poucas descontinuidades, no sentido do texto.

A noção de área está relacionada com as derivadas, esta interdependência entre derivação e integração, é expressa pelo fato de que o conjunto A, associada a função f, tem como área o número:

$F(b) - F(a)$, desde que F seja uma função cuja derivada é f.