20) Dadas $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, para cada partição pontilhada P^* de $[a,b]$, define-se a soma de Riemann-Stieltjes:

$$\lim_{|P| \to 0} \Sigma(f, g; P^*) = \Sigma f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

Prove que se f é integrável e g possui derivada, então:

$$\lim_{|P| \to 0} \Sigma(f, g; P^*) = \int_a^b f(x) g'(x)\, dx$$

<u>Definição</u>: A integral de Riemann-Stieltjes de uma função resultante em valores reais f de uma variável real em relação a uma função real g é notada por:

$\int_a^b f(x)\, dg(x)$, e definida ser o limite, como a subpartição da partição:

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \ldots\ldots < x_n = b\}$$

do intervalo $[a,b]$ aproximando-se de zero, da soma de aproximação:

$$S(P, f, g) = \sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(g(x_{i+1}) - g(x_i))$$

Onde c_i está no i-ésimo subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$
As duas funções f e g são respectivamente chamadas o integrando e o integrador.
O "limite" é aqui entendido no seguinte sentido:

existe um certo numero A (o valor da integral de Riemann-Stieltjes) tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe uma partição P_ε tal que para cada partição P com subpartição $|P| < m(P_\varepsilon)$, e para cada escolha de pontos c_i em $[x_i, x_{i+1}]$.

$$|S(P, f, g) - A| < \varepsilon.$$

Resposta: Dada uma partição $P = \{t_0, \dots, t_N\}$ de $[a, b]$. Pelo teorema do valor médio, temos que para cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, existe $\nu_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tal que:

$$\frac{g(t_i) - g(t_{i-1})}{(t_i - t_{i-1})} = g'(\nu_i) \longrightarrow$$

$$g'(\nu_i)(t_i - t_{i-1}) = g(t_i) - g(t_{i-1})$$

Então pelo T.V.M para derivadas, para a "g" que é derivável.

Seja agora $N = \{\nu_1, \dots, \nu_N\}$, considere P^* um pontilhamento qualquer de P e $P^* = P \cup N$.
Portanto, temos que:

$$\lim_{|P| \to 0} \Sigma(f, g, P^*) = \lim_{|P| \to 0} \sum f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})]$$

$$= \lim_{|P| \to 0} \sum f(\xi_i)\, g'(\nu_i)(t_i - t_{i-1})$$

$$= \int_a^b f(x)\, g'(x)\, dx$$

$P^* = P \cup N$, um refinamento em P, incluindo mais pontos.

TVM para derivadas: Se f é contínua em $[a,b]$ e derivável em (a,b), então $\exists\, c \in (a,b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{(f(b) - f(a))}{(b-a)}$$

Pelo exercício 19, prova: $\lim_{\|P\| \to 0} \Sigma(f,g,P^*) =$
$\lim_{\|P\| \to 0} \sum f(\xi_i)[g(t_i) - g(t_{i-1})]$.