. $a \neq 0$ e $a \in \mathbb{Q}$, x é irracional

. $\underline{ax}$ é irracional

Demonstre: ax, $a+x$ são irracionais

Supondo que x é irracional, e $a \in \mathbb{Q}$.

Então $ax = \frac{m}{n}$, com $m, n \neq 0$ e

$m, n \in \mathbb{Z}$. Portanto o número a é da

forma: $a = \frac{s}{r}$, com $s, r \neq 0$ e

$s, r \in \mathbb{Z}$. Portanto:

$$ax = \frac{m}{n}, \text{ e } \frac{s}{r} \cdot x = \frac{m}{n}$$

Ao multiplicarmos por $\frac{r}{s}$ ambos os

lados, temos:

$$\cancel{\frac{r}{s}} \cdot \cancel{\frac{s}{r}} \cdot x = \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}$$

$x = \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s}$, uma contradição

Temos portanto um absurdo, dado que x é irracional. E não deveria possuir a forma: $x = \frac{M.r}{N.s}$.

. $(a+x)$ são irracionais

Supondo que $(a+x) \in \mathbb{Q}$, então $(a+x)$ é da forma:

$$(a+x) = \frac{M}{N}$$

Com isso: $a + x = \frac{M}{N}$

$$x = \frac{M}{N} - a$$

Temos que x é um número racional, por ser igual a diferença de dois números racionais.
Temos portanto um absurdo, porque $(a+x)$ é irracional.

- Sejam x, y dois números irracionais tais que:

$$(x+y) \text{ e } (x \cdot y) \in \mathbb{Q}$$

Ex: $x = (1+\sqrt{3})$, $y = (1-\sqrt{3})$

Então: $x+y = (1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})$

$$(x+y) = 1 + \cancel{\sqrt{3}} + 1 - \cancel{\sqrt{3}}$$

$$(x+y) = 2 \in \mathbb{Q}$$

$$x \cdot y = (1+\sqrt{3}) \cdot (1-\sqrt{3})$$

$$x \cdot y = 1 - \cancel{1\sqrt{3}} + \cancel{1\sqrt{3}} - 3$$

$$x \cdot y = -2 \in \mathbb{Q}$$