14) Prove que não existe uma função contínua $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ que assuma cada um dos seus valores $f(x)$, $x \in [a,b]$, exatamente duas vezes.

Resposta: Dado o intervalo fechado $[a,b] \to \mathbb{R}$ possui apenas dois extremos, assim temos 2 pontos de máximo e 2 pontos de mínimo da função f, então obrigatoriamente teremos que um desses pontos, como ponto crítico de f, ou seja um ponto da imagem interior de $[a,b]$.

Suponha que este ponto seja o máximo, ou seja o valor máximo de f será então assumido num ponto $x_{m_1} \in \text{int}[a,b]$. Vamos supor também que um outro ponto x_{m_2}, onde a função f terá então atingido o máximo no interior do intervalo, com $x_{m_1} > x_{m_2}$.

Ao tomarmos agora um ponto $x_3 < x_{m_2}$, $x_{m_2} < x_2 < x_{m_1}$, $x_{m_1} < x_1$ e $A = \max\{f(x_3), f(x_1), f(x_2)\}$, pelo Teorema do Valor Intermediário, temos que existe valores $x \in [x_3, x_{m_2})$, $y \in [x_2, x_{m_1})$ e $z \in (x_{m_1}, x_1]$, tais que $f(x) = f(y) = f(z) = A$. Assim temos um absurdo, pois deveria haver apenas 2 valores distintos em $[a,b]$ tais que suas imagens fossem iguais.