a) Se $g: [c,d] \to \mathbb{R}$ for contínua e se $f: [a,b] \to [c,d]$ for integrável, então $g \circ f: [a,b] \to \mathbb{R}$ será integrável.

Teorema 6: Toda função contínua $f: [a,b]$ é integrável.

Teorema 11: (Integração por partes) Se $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ possuem derivadas então:

$$\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\, dt = f \cdot g \Big]_a^b - \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\, dt$$

onde $f \cdot g \Big]_a^b = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$

Corolário: Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, existe $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $F' = f$.

Basta tomar: $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

Resposta: Dados que g é contínua, e a f é integrável e f possui uma primitiva:

$F: [a,b] \to \mathbb{R}$, pelo teorema fundamental do cálculo: $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\, dx = F(g(d)) - F(g(c))$

Tomamos agora a $g \circ f$:

$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)\, dx = G(f(b)) - G(f(a))$, como g é contínua, então é integrável pelo teorema 6.

Por outro lado, pela regra da cadeia:

$$(G\circ f)'(t) = G'(f(t)) \cdot f'(t) = g(f(t)) \cdot g'(t)$$

para todo $t \in [c,d]$. Assim, $G\circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função integrável: $t \to g(f(t)) \cdot g'(t)$. Temos, portanto:

$$\int_a^b g(f(t)) \cdot g'(t)\, dt = G(f(b)) - G(f(a))$$

pelo Teorema 10. $\blacksquare$

Teorema 10: (Mudança de variável.) Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ derivável, com g' integrável e $g([c,d]) \subset [a,b]$. Então:

$$\int_{g(c)}^{g(b)} f(x)\, dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\, dt.$$

---

b) Temos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é não-negativa e limitada, portanto f é monotona e logo é integrável.

Temos que $\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função escada, então:

Existem: $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$, tais que $\mathcal{E}|]a_{i-1}, a_i[$ é constante em e igual

a c_i, para $1 \leq i \leq N$.

Assim temos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua no compacto $[a,b]$, e portanto é uniformemente contínua.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que dados $x, y \in [a,b]$ com $|x-y| < \delta$, tem-se $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Tomemos $a = a_0 < a_1 < \dots < a_N = b$, tais que $|a_i - a_{i-1}| < \delta$ para $1 \leq i \leq N$ e $\mathcal{E}: [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por:

i) $\forall i \in \{1, \dots, N\}$, $\mathcal{E}|]a_{i-1}, a_i[$ = constante $= f(c_i)$, onde $c_i \in [a_{i-1}, a_i]$ é um ponto de mínimo de f em $[a_{i-1}, a_i]$, que existe pelo teorema de Weierstrass).

ii) $\mathcal{E}(b) = f(b)$. Então $\mathcal{E}$ é uma função escada e, dado $x \in [a,b]$, tem-se: (i) ou existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tal que $x \in]a_{i-1}, a_i[$, e portanto:

$\mathcal{E}(x) = f(c_i) \leq f(x)$ e

$$f(x) - \mathcal{E}(x) = |f(x) - \mathcal{E}(x)| = |f(x) - f(c_i)| < \varepsilon$$

Assim:

$|x - c_i| < |a_i - a_{i-1}| < \delta$, ou $x = b$ e portanto

$$\mathcal{E}(x) = f(x)$$

Temos portanto que o maior valor pode ser obtido em $x = b$, então:

$$\mathcal{E}(x) = \sup_{\mathcal{E}} \int_a^b \mathcal{E}$$

Onde em $x = b$ é a menor das cotas superiores em cada intervalo na função escada dada por $\mathcal{E}(x)$.

E como f é contínua, então f é integrável.

$\boxtimes$

<u>Teorema:</u> Se f é monotona, então f é integrável.

Teorema (Weierstrass): Seja $f: K \to \mathbb{R}$ contínua no compacto K de $\mathbb{R}$. Então, f assume um valor máximo absoluto e valor mínimo absoluto em K.