2) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = (x^3 + x)\cos x$.
Demonstre que, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe uma sequência, com limite $\lim x_n = \infty$, tal que $f(x_n) = c$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para valores de x suficientemente grande a oscilação de $f(x)$ é tão grande quanto queremos e a oscilação é crescente.

. Para $x_2 = 2\pi + 2\pi n$, vale $\cos x = 1$ e

$$f(x_2) = (2\pi + 2\pi n)^3 + (2\pi + 2\pi n)$$

. Para $x_1 = \pi + 2\pi n$, vale $\cos x = -1$ e

$$f(x_1) = [(\pi - 2\pi n)^3 + (\pi - 2\pi n)](-1)$$

Daí segue que $(f(x_2) - f(x_1)) > 0$

e a oscilação cresce pois:

Para $x_4 = 2\pi + 2\pi(n+1)$, vale $\cos x = 1$ e

$$f(x_4) = (2\pi + 2\pi(n+1))^3 + (2\pi + 2\pi(n+1))$$

Para $x_3 = \pi + 2\pi(n+1)$, vale $\cos x = -1$ e

$$f(x_3) = (\pi - 2\pi(n+1))^3 + (\pi - 2\pi(n+1))$$

e $(f(x_4) - f(x_3)) > 0$

Portanto a oscilação da função é tão grande quanto queremos crescer.

Então, dado $c \in \mathbb{R}$ existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $c \in [\pi - 2\pi N_0, 2\pi + 2\pi N_0]$ e por continuidade existe $x_1 \in [\pi - 2\pi N_0, \pi + 2\pi N_0]$ tal que $f(x_1) = c$.

Da mesma forma temos que existe:

$x_2 \in [\pi - 2\pi(N_0+1), 2\pi + 2\pi(N_0+1)]$ tal que $f(x_2) = c$. E em geral temos que:

$x_N \in [\pi - 2\pi(N_0 + N - 1), 2\pi + 2\pi(N_0+N-1)]$ tal que $f(x_N) = c$. Assim $\lim x_N = \infty$ e $\lim f(x_N) = c$.