$\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ seq.

a) $\lim \varphi(n) = +\infty$

b) $\forall K \in \mathbb{N}$, $\varphi^{-1}(K)$ é finito

Assume (a) e negue (b), ou seja, $\exists$ algum $K \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^{-1}(K)$ é infinito.

Isso implica que $\exists$ subsequência de φ, de índices morando em $\varphi^{-1}(K)$, digamos $\{n_1, n_2, \dots\}$ de modo que $(\varphi(n_m))$ é a sequência constante $\varphi(K)$. Daí, temos duas possibilidades:

-> $\lim \varphi(n) = \varphi(K)$, $n \in \mathbb{N}$

-> $\lim \varphi(n)$ não existe pois teríamos uma subsequência constante e outra que converge para outro valor ou vai para infinito ou não existe.

Logo (a) $\Rightarrow$ (b).