20) Dada uma sequência (x_n), seja $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\bigcap_{n \geq 1} \overline{X_n}$ é o conjunto dos valores de aderência de (x_n).

- a é aderente a X quando há sequência $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.
- a é aderente a X se, e somente se, toda vizinhança de a intersecta X.
- O fecho de X é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos aderentes a X.
- $F = \overline{F}$, temos F é fechado.
- Se $X_1 \supset X_2 \supset \ldots \supset X_n \supset \ldots$ é uma sequência de compactos não-vazios, então: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i \neq \emptyset$.
- X é compacto $\Leftrightarrow$ toda sequência (x_n) com $x_n \in X$ possui uma subsequência (y_n) com $\lim y_n \in X$.

1) Seja $a \in A$, então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ de (x_n) tal que $\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a$. (definição para ponto de aderência).

Dado $n \in \mathbb{N}$, temos que existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \leq n_{k_0} < n_{k_0+p}$$

Para todo $p \in \mathbb{N}$, assim $(x_{n_{k_0+p}})_{p \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em X_n tal que:

$$\lim_{p \to \infty} x_{k_0+p} = \lim_{k \to \infty} x_k = a$$

Desta forma, $a \in \overline{X_n}$ para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Ou seja, $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n}$.

Portanto temos uma sequência (x_n) que converge para a e um subsequência de (x_n), dada por $(x_{n_{k_0+p}})$ que também converge para a.

Portanto $A \subset \overline{X_n}$ e $\overline{X_n}$ é compacto.

2) Seja $a \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n}$. Provaremos que existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tal que

$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a$. Ou seja, que $a \in A$.

Começamos observando que para ~~todo~~ m e $k \in \mathbb{N}$, existe $n_k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_k > m \text{ e } |x_{n_k} - a| < 1/k$$

De fato, como $a \in \overline{X_{m+1}}$ e $X_{m+1} = \{x_n : n \geq m+1\}$, temos que existe $x_{n_k} \in X_{m+1}$ tal que:

$$|x_{n_k} - a| < 1/k$$

Princípio da definição recursiva: cada termo da sequência é definido como função de um ou mais termos anteriores.

Observamos que cada termo da sequência é definido como função de um ou mais termos anteriores. Assim está bem definida a sequência de índices

$(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, tal que:

$$n_1 := 1, \text{ e}$$

$$n_k := \min \{ n \in \mathbb{N} : n \geq n_{k-1}, |x_n - a| < \frac{1}{k} \}$$

para $k > 1$ em $\mathbb{N}$. Logo, a subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ é tal que:

$$|x_{n_k} - a| \leq \frac{1}{k}$$

Para todo $k \in \mathbb{N}$, e consequentemente:

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = a.$$

Então provamos que $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{X_n} \subset A$