5) Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I (limitada ou não). Suponha que $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$, com $0 \leq c < 1$.

Assuma que $f(I) \subset I$, demonstre que dado $x_0 \in I$, a sequência (x_n), definida recursivamente por $x_n = f(x_{n-1})$, é convergente. Se $a = \lim x_n$, demonstre ???

é o único ponto de I tal que $f(a) = a$.
Sugestão: mostre que (x_n) é uma sequência de Cauchy.

O enunciado não ficou claro, eu entendi que era para descobrir o ponto fixo de contração.

Respostas: i) Seja $f: I \to \mathbb{R}$, e I um intervalo fechado no domínio dado por:

$$I = [a-\delta, a+\delta] \to |f(a) - f(b)| \leq c|a-b|$$

Temos que $c \in [0, 1)$ e $|f(a) - a| \leq (1-c)\delta$ então existe um único $x \in I$ com $f(x) = x$.

Assim f é contração, e I é fechado, para que possamos usar o teorema do ponto fixo de contrações, basta mostrarmos que $f(I) \subset I$, isto é $x \in I$ implica que $f(x) \in I$.

Se $x \in I = [a-\delta, a+\delta]$ então $[x-a] < \delta$, o que implica por desigualdade triangular que:

$$|f(x) - a| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - a| \leq c|x-a| + (1-c)\delta \leq c\delta + (1-c)\delta = \delta$$

Portanto $f(x)$ pertence ao intervalo $[a-\delta, a+\delta] = I$ e podemos usar o teorema do ponto fixo das contrações, com isso f possui um único ponto fixo.

ii) Temos que $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável, então:

$$|f'(x)| \leq c \quad \forall x \in I \quad e \quad 0 \leq c < 1$$

Como $f(I) \subset I$, temos pelo teorema do Valor Médio que:

$$f'(x) = \frac{f(a) - f(b)}{a-b} \to f(a) - f(b) = f'(x) . |a-b|$$

$$|f(a) - f(b)| = c.(a-b)$$

Então f é lipschitziana, então f é contínua no intervalo fechado dado por:

$$[a-\delta, a+\delta]$$

e derivável no intervalo semi-aberto $[0,1)$.

Portanto temos que:

$$f(a) - f(b) = f'(x).(a-b), \text{ com } |f'(x)| \leq c$$

E: $|f(a) - f(b)| = |f'(x)|.|a-b| \leq c.|a-b|$

<u>TVM</u>: Se f é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b), então $\exists c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

<u>Corolário 3</u>: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I. Se existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ então, quaisquer que sejam $x, y \in I$, tem-se:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$$