4) Se a sequência de funções $f_N : X \to \mathbb{R}$ é tal que $f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_N \geq \dots$ e $f_N \to 0$ uniformemente em X, demonstre que a série $\sum (-1)^N f_N$ converge uniformemente em X.

• Uma seqüência de funções $f_N : X \to \mathbb{R}$ <u>converge monotonicamente</u> para $f : X \to \mathbb{R}$ se para x fixo a sequência $f_N(x)$ é monótona e converge para $f(x)$.

• <u>Critério de Leibniz</u>: Se a sequência de funções $g_N : X \to \mathbb{R}$ é tal que: $g_1(x) \geq g_2(x) \geq g_3(x) \geq \dots$, e $g_N \to 0$ então a série $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^N f_N(x)$ converge uniformemente em X.

<u>Resposta</u>: Devemos mostrar que dadas $f_N, g_N : X \to \mathbb{R}$ sequências de funções tais que:

$\exists K > 0$ tal que $s_N(x) = f_1(x) + \dots + f_N(x)$ satisfaz $|s_N(x)| \leq K$ $\forall N \in \mathbb{N}$, $\forall x \in X$.

E $g_N(x) \geq g_{N+1}(x)$ $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in X$, $g_N \to 0$ uniformemente.

Então, $\sum f_N . g_N$ é uniformemente convergente.

De fato, note que $\sum (-1)^N g_N$ cumpre tais condições sendo que $|s_N(x)| \leq 2$ $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in X$.

Usaremos, o fato que $\forall N \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in X$:

$$\sum_{i=1}^{N} f_N . g_N = \sum_{i=2}^{N} s_{i-1} (g_{i-1} - g_i) + s_N g_N$$

Mostraremos que $\sum_{i=2}^{N} s_{i-1}(g_{i-1} - g_i)$ e $s_N g_N$ converge uniformemente em X!

$$\left|\sum_{i>N} \Delta_{i-1}(g_{i-1}-g_i)\right| \leq \sum_{i>N} |\Delta_{i-1}|(g_{i-1}-g_i) \leq$$

$K.\sum_{i>N}(g_{i-1}-g_i) = K g_N$. Temos que $g_N \to 0$

E como $g_N \to 0$ uniformemente, dado $\varepsilon > 0$ $\exists N_0$ $\forall N > N_0$ e $\forall x \in X$:

$$\left|\sum_{i>N} \Delta_{i-1}.(g_{i-1}-g_i)\right| < K g_N < K.\frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}$$

Assim, $\sum_{i=1}^{N} f_i g_i$ converge uniformemente em X, já que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0$ $\forall N > N_0$ e $\forall x \in X$, temos:

$$\left|\sum_{i>N} f_i g_i\right| \leq \left|\sum_{i>N} \Delta_{i-1}(g_{i-1}-g_i)\right| + |\Delta_N g_N| <$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$