2) Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. As seguintes afirmações equivalentes:

a) $\int_a^b |f(x)| dx = 0$.

b) Se f é contínua no ponto c, então $f(c) = 0$.

c) $X = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$ tem interior vazio.

i) $a \to b$

Como f é integrável temos que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Se tomarmos $|f(x)| \leq c$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx = c(b-a)$$

Como toda função derivável é contínua, então:

$f(b) - f(a) = f'(x).(b-a)$, se $f'(x) = c$, então

Temos uma função Lipschitziana e f é contínua.

$f(b) - f(a) = c.(b-a)$

Como $\int_a^b f = 0$ temos que $c(b-a) = 0$, e como $c \neq 0$ temos que $b-a=0 \to b = a$

$f(b) - f(a) = c.(b-a) = c(b-b) = c.0$

$f(b) - f(a) = 0 \rightarrow f(b) = f(a) = 0$

Portanto no ponto c temos que a $f(c) = 0$.

ii) $b \rightarrow c$

Temos que f é contínua no ponto c, e $f(c) = 0$. Tomamos X dado que:

$X = \{x \in [a,b] ; f(x) \neq 0\}$. Assim x é um ponto do intervalo fechado onde $f(x) \neq 0$.

Como a integral $\int_a^b f(x)dx = 0$, temos que

$\int_a^b f = c(b-a) = 0$, ou seja $b = a$ e $c \in [a,b]$

onde $f(c) = 0$. Se $x \in [a,b]$ e $f(x) \neq 0$, então

$x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ que são os pontos interiores do intervalo. Logo X tem o interior vazio.

iii) $c \rightarrow a$

Como X é um conjunto que contém elementos do intervalo $[a,b]$ e seu interior é vazio, então dado uma vizinhança de x, onde $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \notin [a,b]$ para $\forall \varepsilon > 0$.
Assim $f(x) \neq 0$ e como $c \in [a,b]$ e $f(c) = 0$ temos $a \lesssim c \lesssim b$, mas $f(c) = 0$

e $c \leq b-a$. Mas $f(c)=0$

$0 \leq f(b-a)$

Como $c.(b-a)$, e $f'(x)=c$, então

$f'(x).(b-a)$, como x não é ponto interior de $[a,b]$ temos $f'(x)=c$. Temos que:

$$f'(x).(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Como é f é derivável então f é contínua, e por ser contínua é integrável pelo teorema C.

Mas como $x \notin \text{int}[a,b]$ então $a \leq b$ ou $a = b$. Com isso:

$$\int_a^b f(x)\,dx = 0 \quad \text{ou} \quad \int_a^b |f(x)|\,dx = 0.$$

Correção:

i) $a \to b$,

Temos que $\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$, então temos que $c.(b-a)=0$. Então $c=0$ ou $b-a=0$

Se $b-a=0 \longrightarrow b=0$ logo não existe uma partição. Desta forma temos que $c=0$!

Mas temos que f é integrável e temos:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx, \text{ se } |f(x)| \leq c$$

para todo $x \in [a,b]$ então $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq c(b-a)$

e $c=0$.

Assim se f é contínua no ponto c, então

$f(c)=0 = f(0)=0$.

e como toda função contínua é integrável, temos que:

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = 0$$

ii) $b \Rightarrow c$

Seja f é contínua no ponto c, então f é integrável no ponto c. Mas $f(c)=0$ e como $f(0)=0$, dado que $c=0$.

Temos que $c \in [a,b]$, isto porque $X = \{x \in [a,b]; f(x) \neq 0\}$. Mas $c \notin X$.

Com isso temos que f não é contínua X, ou seja, dado $x \in X \Rightarrow x \notin (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$. Logo $\text{int}\, X \subseteq \emptyset$.

iii) $c \to a$

Temos que $X = \{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$, e $\text{int}\, X = \emptyset$, desta forma $x \notin (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$, onde c é um ponto onde $f(x)$ é contínua.

Desta forma $f(x)$ não é diferenciável em $x \in X$.

Então: $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\, dx = \left| \int_a^b f(x)\, dx \right| = 0.$