1) Sejam $f, g, h: X \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in X$, se tenha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.
Demonstre que se num ponto $a \in X \cap X'$ tem-se $f(a) = h(a)$ e existem $f'(a) = h'(a)$, então existe $g'(a)$ e $g'(a) = f'(a)$.

Resposta: Temos a partir da identidade $f(a) = h(a)$ e da desigualdade:
$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, então:

$$f(a) \leq g(a) \leq h(a) = f(a) \to g(a) = f(a) = h(a)$$

Assim: $f(a+h) \leq g(a+h) \leq h(a+h)$, se e somente se: $f(a+h) - f(a) \leq g(a+h) - g(a) \leq h(a+h) - h(a)$

Partimos do teorema do confronto aplicado entre a $f(x)$ e $h(x)$, e aplicamos a definição de derivada para as funções: $f(x)$, $g(x)$ e $h(x)$.

Então como $f(a) = h(a) = g(a)$, e como as derivadas $f'(a)$ e $h'(a)$ existem, então também existem as derivadas laterais.

$$f'_+(a) = f'_-(a) = f(a) = g'(a) = h'_+(a) = h'_-(a)$$

Ao dividirmos a ultima desigualdade por $h > 0$ e tomando o limite à direita, segue-se que:

$$f'(a) \leq \lim_{h \to 0^+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \leq f'(a)$$

Repetimos o processo, dividindo por $h<0$ e tomando o limite à esquerda.

$$f'(a) \geq \lim_{h \to 0^-} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} \geq f'(a)$$

Concluímos que:

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} =$$

$$f'(a) = g'(a)$$

$\blacksquare$