7) Sejam $f, g, : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$.

$$g(0) = 1 \text{ e } g(x) = 0 \text{ se } x \neq 0$$

Mostre que $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{y \to 0} g(y) = 0$, porém não existe $\lim_{x \to 0} g(f(x))$.

A função $f(x)$ e $g(x)$ é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ x, \text{ se } x \in \mathbb{Q} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x = 0 \\ 0 \text{ se } x \neq 0 \end{cases}$$

Se $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{y \to 0} g(y) = 0$, então dado $\varepsilon > 0$

e $\delta = \varepsilon$. Assim, se $x, y \in \mathbb{R}/\{0\}$. Então:

$$\cdot\ 0 < |x - 0| = |x| < \delta = \varepsilon \begin{cases} \cdot\ |f(x) - 0| = 0 < \varepsilon \\ \cdot\ |f(x) - 0| = |x| < \varepsilon \end{cases}$$

$$\cdot\ 0 < |y - 0| = |y| < \delta = \varepsilon \longrightarrow |g(y) - 0| = 0 < \varepsilon$$

Portanto $\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{y \to 0} g(y) = 0$

Agora vamos provar que não existe $\lim_{x\to 0} g(f(x))$. Sejam (x_n) uma sequência de pontos $x_n \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$ e com $\lim x_n = 0$, e (y_n) uma sequência de pontos $y_n \in \mathbb{Q}/\{0\}$ com $\lim y_n = 0$. Dessa forma, temos:

$$\lim_{n\to\infty} g(f(x_n)) = \lim_{n\to\infty} g(0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0, \text{ e}$$

$$0 = \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} g(x) = \lim_{x\neq 0} g(x) =$$

$$\lim_{n\to\infty} g(f(y_n))$$

Portanto não existe $\lim_{x\to 0} g(f(x))$