15) Demonstre:

a) Todo ponto de um conjunto Aberto A é um ponto de acumulação de A.

- O conjunto X é aberto se $\text{int}\, X = X$
- Diz que a é interior a X (ou X é uma vizinhança de a) quando há intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq X$.
- O interior do conjunto X ($\text{int}\, X$) é o conjunto dos pontos interiores a X.
- Dado $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ dizemos que a é ponto de acumulação de X se, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x \in X \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $x \neq a$.
- Se a é ponto de acumulação de X, então $a \in \bar{X}$.

Dado um ponto $x \in X$, onde X é aberto, logo se x é interior a X, temos que $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq X$.
Como X é aberto, então $X = \text{int}(X)$, ou seja, $\forall x \in X$ temos que $x \in \text{int}(X)$.

Por definição temos que um ponto de acumulação é dada por:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists x \in X \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $x \neq a$.

Então com $x \in \operatorname{int} X$ e $X = \operatorname{int} X$, temos que $x \in \operatorname{int}(X) = X$. Assim $x \in X \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ ou $x \in X$ e $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, mas $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) = X$.
Então $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e portanto temos que para cada $\varepsilon > 0$ temos um x muito próximo de a. Temos assim um ponto de acumulação.

Outra resposta:

Seja $a \in A$, então existe $\delta > 0$ tal que
$(a-\delta, a+\delta) \subset A$.
Assim, dado $\varepsilon > 0$, para $\delta_1 = \min\{\delta, \varepsilon\}$
temos que:
$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \supset (a-\delta_1, a+\delta_2) \subset A$
logo, $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ contém infinitos elementos de A, já que $(a-\delta_1, a+\delta_2)$ tem infinitos elementos. Portanto, a é ponto de acumulação.

b) se F é fechado e $x \in F$ é um ponto isolado de F, então $F/\{x\}$ é fechado.

- Se $F = \overline{F}$, o conjunto F é fechado.
- O fecho de X é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos aderentes a X.
- $\underline{a}$ é aderente a X quando há sequência $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.
- F é fechado se, e somente se, $A = \mathbb{R} - F$ é aberto.
- O ponto $\underline{a}$ é aderente a X, se e somente se, toda vizinhança de $\underline{a}$ intersecta X.

Temos que F é fechado, logo $F = \overline{F}$. E para qualquer $x \in F$, temos que $x \in \overline{F}$, ou seja x é um ponto aderente de F.

Mas temos que x é um ponto isolado de F, ou seja, existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap F = \{x\}$. Então como $F = \overline{F}$, temos que $x \in F = \overline{F}$.

Assim:

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap F - \{x\} = \phi \rightarrow \overline{F} \cap F - \{x\} = \phi$$

$$F \cap F - \{x\} = \phi \rightarrow F - \{\cancel{x}\} = \phi$$

Então $F - \{x\} = \emptyset$ e por definição todo conjunto vazio é fechado.

outra forma melhor:

Seja $F = \{x\}$, temos diretamente que $F - \{x\} = \emptyset$ é fechado. Suponhamos que:

$$F - \{x\} \neq \emptyset$$

Seja (a_n) uma sequência em $F - \{x\}$ com $\lim a_n = a$. Como F é fechado e (a_n) é uma sequência em F, então $a \in F$.
Temos que $a \neq x$, pois para algum $\varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap F = \{x\}$. ($x$ é ponto isolado)

Portanto, $a \in F - \{x\}$. Conclui-se com isto que $F - \{x\}$ é fechado.

Suponhamos agora que x não seja um ponto isolado de F, então para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in \left(\left(x_n - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \cap F\right) - \{x\}$.

Assim, a sequência (x_N) em $F-\{x\}$ tende à x.

O que implica que $F-\{a\}$ não é fechado.

. Como x não é ponto isolado:

$$\left(\left(x_N-\frac{1}{N}, x+\frac{1}{N}\right)\cap F\right)-\{x\} \neq \phi,$$ então

temos pontos de acumulação.

e $F-\{a\}$ não é fechado, por que a