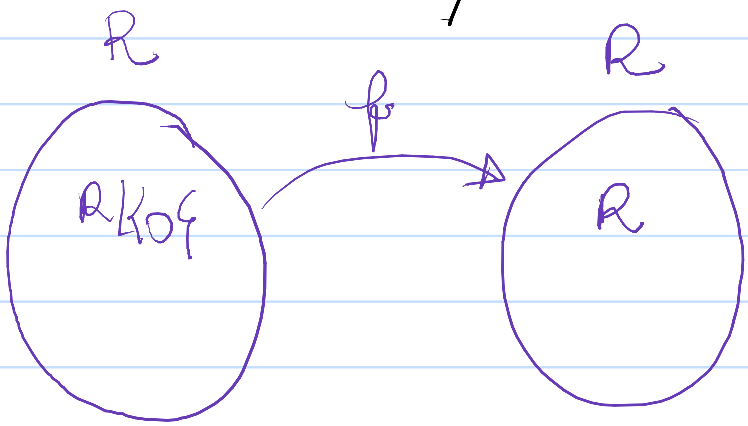
11) Determine o conjunto dos valores de aderência da função f:

$$f: \mathbb{R}/\{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \text{ sendo:}$$

$$f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \Big/ \left(1 + e^{1/x}\right), \text{ no ponto } x = 0.$$



- a é aderente a X quando há sequência $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.
- $\bar{X}$, o fecho de X, é o conjunto dos pontos de aderência dos valores de X.
- $\bar{X}$ é fechado, se $X = \bar{X}$ temos que X é fechado.

Resposta: Como $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não possui limites porque oscila no intervalo $[-1, 1]$, então tomamos pontos no domínio diferentes de zero. Assim:

$$0 \leq e^{1/x} \quad e \quad -1 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$$

Para todo $x \in \mathbb{R}/\{0\}$. Então:

$$-1 \leq \frac{\operatorname{sen}(1/x)}{1 + e^{1/x}} \leq 1$$

Se chamarmos o conjunto de pontos de aderência por A em f no ponto 0 é dado por $A \subset [-1,1]$.

Assim dado um x qualquer onde $x \in [-1,1]$, tomamos $\theta = \text{arcosen}\, x$.

Então, ao definirmos $x_N = \dfrac{1}{\theta - 2\pi N}$

temos que $\lim\limits_{N \to \infty} x_N = 0$ e $\lim\limits_{N \to \infty} e^{1/N} = 0$,

pois $\lim\limits_{N \to +\infty} \dfrac{1}{x_N} = \lim\limits_{N \to \infty} \dfrac{1}{\frac{1}{\theta - 2\pi N}} =$

$\lim\limits_{N \to +\infty} (\theta - 2\pi N) = -\infty$. Assim:

$$f(x_N) = \frac{\text{sen}(\theta - 2\pi N)}{1 + e^{\theta - 2\pi N}} = \frac{x}{1 + e^{\theta + 2\pi N}} \longrightarrow x$$

Quando $N \to +\infty$.

Portanto, $x \in [-1,1]$ e temos também que $[-1,1] \subset A$. Conclui-se que $A = [-1,1]$.