Sexta Lista de Exercícios de Análise Real: Limites de funções.

1. Na definição do limite $\lim_{x\to a} f(x)$, retire a exigência de ser $x \neq a$. Mostre que esta nova definição coincide com a anterior no caso $a \notin X$ mas, para $a \in X$, o novo limite existe se, e somente se, o antigo existe e é igual a $f(a)$.

2. Considere a seguinte sentença: $\forall\varepsilon > 0 \exists\delta > 0 (x \in X \wedge 0 < |x-a| < \varepsilon \to |f(x) - L| \leq \delta)$. Mostre que f cumpre esta condição se, e somente se, f é limitada em qualquer intervalo limitado de centro a. No caso afirmativo, L pode ser qualquer número real.

3. Seja $X = Y \cup Z$, com $a \in Y' \cap Z'$. Dada $f : X \to \mathbb{R}$, tomemos $g = f \upharpoonright Y$ e $h = f \upharpoonright Z$. Se $\lim_{x\to a} g(x) = L$ e $\lim_{x\to a} h(x) = L$, demonstre que $\lim_{x\to a} f(x) = L$.

4. Seja $f(x) = x + 10 \sin x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Demonstre que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

5. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ monótona, com $f(X) \subset [a, b]$. Demonstre que se $f(X)$ é denso no intervalo $[a, b]$, então, para cada $c \in X'_+ \cap X'_-$, tem-se que $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$. Demonstre que se $c \in X$, então $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$.

6. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ monótona e $a \in X'_+$. Demonstre que se existir uma sequência de pontos $x_n \in X$ com $x_n > a$, $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = L$, então $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

7. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = x$ se $x \in \mathbb{Q}$, $g(0) = 1$ e $g(x) = 0$ se $x \neq 0$. Mostre que $\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{y\to 0} g(y) = 0$, porém não existe $\lim_{x\to 0} g(f(x))$.

8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = 0$ e $f(x) = \sin(1/x)$ se $x \neq 0$. Mostre que para todo $c \in [-1, 1]$, existe uma sequência de pontos $x_n \neq 0$ tais que $\lim x_n = 0$ e $\lim f(x_n) = c$.

9. Dado $a > 1$, defina $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ pondo, para cada $p/q \in \mathbb{Q}$, $f(p/q) = a^{p/q}$. Demonstre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Conclua que para cada $b \in \mathbb{R}$, existe $\lim_{x\to b} f(x)$, sendo este limite igual a $f(b)$ se $b \in \mathbb{Q}$. Chame este limite de a^b. Demonstre que $a^b \cdot a^{b'} = a^{b+b'}$ e que $b < b' \to a^b < a^{b'}$.

10. Dado $a > 1$, defina $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela lei $g(x) = a^x$. Demonstre que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ e que $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$.

11. Determine o conjunto dos valores de aderência da função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(1/x)/(1 + e^{1/x})$, no ponto $x = 0$.

12. Demonstre que $\lim_{x\to a} f(x) = L$, então $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$, e que se $\lim_{x\to a} |f(x)| = |L|$, então o conjunto dos valores de aderência de f no ponto a é $\{L\}$, ou $\{-L\}$, ou ainda $\{-L, L\}$.

13. Dadas $f, g : X \to \mathbb{R}$, defina $h = \max\{f, g\} : X \to \mathbb{R}$ pondo $h(x) = f(x)$ se $f(x) \geq g(x)$ e $h(x) = g(x)$ caso $g(x) \geq f(x)$. Seja $a \in X'$. Demonstre que se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$, então $\lim h(x) = N$, em que $N = \max\{L, M\}$.

14. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ limitadas numa vizinhança do ponto $a \in X'$. Mostre que $\limsup_{x\to a}(f + g) \leq \limsup_{x\to a} f + \limsup_{x\to a} g$ e que $\limsup_{x\to a}(-f) = -\liminf_{x\to a} f$.

15. Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ limitada em cada intervalo limitado. Demonstre que se $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x + 1) - f(x)] = L$, então $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)/x = L$.

16. Seja $f : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ limitada. Para cada $t \geq a$, indiquemos por M_t o supremo e m_t o ínfimo de f no intervalo $I = [t, +\infty)$. Com $\omega_t = M_t - m_t$ indicaremos a oscilação de f em I. Demonstre que existem $\lim_{t\to+\infty} M_t$ e $\lim_{t\to+\infty} m_t$. Demonstre que existe $\lim_{t\to+\infty} f(x)$ se, e somente se, $\lim_{t\to+\infty} \omega_t = 0$.