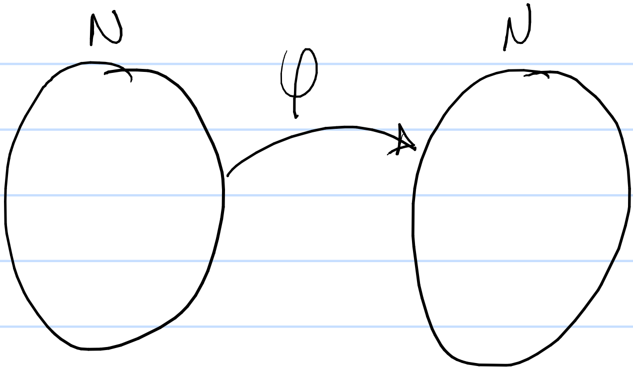


a) $\lim \varphi(N) = +\infty$

① Dado o conjunto N temos que $\varphi: N \to N$ é uma função que leva cada elemento no domínio para a imagem, portanto como o domínio está no conjunto dos naturais e este é infinito, temos que:

$\lim \varphi(N) = +\infty$

Desta forma assumimos que o item (a) é verdadeiro.

b) $\forall k \in \mathbb{N}$, $\varphi^{-1}(k)$ é finito

Assumimos que (a) é verdadeiro, ou seja existe algum $k \in \mathbb{N}$ tal que $\varphi^{-1}(k)$ é infinito.

Isso implica que existe uma subsequência de φ, de indices (lotados em $\varphi^{-1}(k)$), digamos $\{n_1, n_2, \ldots\}$ de modo que $(\varphi(n))$

é a sequência constante $\varphi(k)$.

Com isso, temos duas possibilidades

- $\lim \varphi(n) = \varphi(k)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

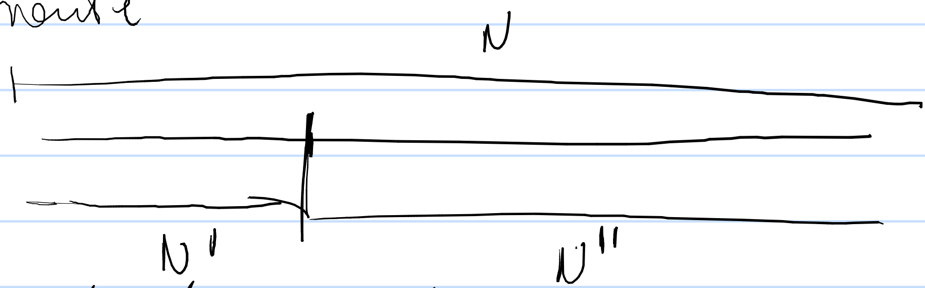
- $\lim \varphi(n)$ não existe pois teríamos que a subsequência constante outra que converge para outro valor, ou vai para o infinito, ou não existe. Portanto:

$$(a) \longrightarrow (b)$$

c) $\forall F \subset \mathbb{N}$ finito, $\varphi^{-1}(F)$ é finito

Temos que o $\lim \varphi(N) = +\infty$, então supondo uma subsequência onde $\lim \varphi(N) = C$, e C é uma constante. Supomos então uma subsequência $N' \subset N$, onde $\lim \varphi(N') = C$.

Dada $N = (N' + N'')$, onde N' é limitada e N'' é limitada somente inferiormente



Portanto $\lim \varphi(N) = +\infty$, e com $N = (N' + N'')$, temos que $\lim \varphi(N' + N'') = +\infty$.
Assim temos que $\lim \varphi(N') = C$ e $\lim \varphi(N'') = +\infty$.

Portanto dada uma F em N'', sendo uma subsequência limitada teremos $N' \longrightarrow \varphi(N')$ também limitada. E consequentemente $\varphi^{-1}(N') \longrightarrow N'$ também será limitada.

Ou seja $\varphi^{-1}(N')$, ou $\varphi^{-1}(F)$ será finita.