21) Determine quais dentre os números $1/n$, $2 \leq n \leq 10$ pertencem ao conjunto de Cantor.

- O conjunto K dos números que podem ser escritos em base 3 usando apenas dígitos 0 e 2:

$$K = \left\{ x \in \mathbb{R} \,/\, x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{3^i}, \text{ onde } a_i \in \{0,2\} \right\}$$

i) Retire o terço médio aberto do intervalo $K_0 = [0,1]$, sobrando:
$K_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$
Repita o processo indefinidamente, isto é, $K = K_1 \cap K_2 \cap \ldots$

- K é compacto e $\text{int} K = \emptyset$, mas K é não-enumerável e não tem pontos isolados.
- Seja $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n \supset \ldots$ uma sequência descendente de compactos não-vazios. Então $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ é não-vazio (e compacto).

Os números que devemos analisar são:

$$\cancel{\frac{1}{2}}, \cancel{\frac{1}{3}}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \cancel{\frac{1}{9}}, \frac{1}{10}$$

Temos que $\frac{1}{3}$ e $1/9$ são elementos do conjunto de Cantor, pois são extremos de intervalos que permanecem no conjunto após as remoções.

O $1/2$ não pertence ao conjunto de Cantor, dado que:

$$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \cancel{\frac{1}{2}}, \frac{2}{3}\right],$$ será removido

O $\frac{1}{4}$ pertence ao conjunto de Cantor, pois temos sua representação como:

$$\left[0, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right], \text{ e } 0{,}\overline{02} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{9^k} =$$

$$= \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{1 - 1/9} = \frac{1}{4}$$

Temos que: $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{7}$ e $\frac{1}{8}$ não pertencem ao conjunto de Cantor, pois são elementos pertencentes ao intervalo removido $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$

Agora vemos que $\frac{1}{10}$ pertence ao conjunto de Cantor, pois ele pode ser representado por:

$$0,\overline{0022} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{4k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{3^{4k}} =$$

$$\frac{1}{27} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{81^k} + \frac{1}{81} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{81^k} = \frac{1}{27} \cdot \frac{81}{80} + \frac{1}{81} \cdot \frac{81}{80} =$$

$$\frac{6}{80} + \frac{2}{80} = \frac{8}{80} = \frac{1}{10}$$

Assim os números que pertencem ao conjunto de Cantor são $1/3$, $1/4$, $1/9$ e $1/10$.

O números que não pertencem ao conjunto de cantor são: $\frac{1}{2}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}$.

Para determinar a expressão de um número entre 0 e 1 na base 3, pode-se usar esse processo que mostramos abaixo por meio de um exemplo:

$$\frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \qquad \underline{\underline{\times 3}}$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = x_1 + 3\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$$

Temos $x_1 = 1$, continuamos o processo para encontrar x_2,

$$\frac{1}{2} = 3\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \qquad \underline{\underline{\times 3}}$$

$$\frac{3}{2} = 1 + \frac{1}{2} = x_2 + 9\sum_{k=3}^{\infty} \frac{x_3}{3^k}$$

Com isso temos que $x_2 = 1$.

Nesse caso concluímos que $\frac{1}{2} = 0{,}11\ldots$, e concluímos de outra maneira que ele não pertence ao conjunto de Cantor, por possuir algarismos 1.

Ex: $\frac{1}{3} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ $\underline{\underline{\times 3}}$

$\frac{3}{3} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k} \Longrightarrow 1 = 3 . \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$

$\frac{1}{5} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ $\underline{\underline{\times 3}}$

$\frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = x_2 + 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ $x_1 = 0{,}4$

$\frac{1}{5} = 3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$ $\underline{\underline{\times 3}}$

$\frac{3}{5} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = 9 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{3^k}$; $x_2 = 0{,}004$