13. Pelo C2 do TVI (Elon, Curso de Análise) a imagem de um intervalo por uma f cont é um intervalo. Mas, como um homeom. é injetivo, este só pode ser estritamente monótono (o que se segue do TVI).
Assim, dentre os possíveis homeomorfismos entre intervalos, temos

1. J e I são abertos (limitados ou não)

2. J e I são fechados e limitados (já que se as extremidades de, digamos I, pertencerem a I, então suas extremidades serão pontos extremos de J; lembre-se que o homeomorfismo $f: I \to J$ é uma função monótona),

3. J é limitado e fechado em uma extremidade. I é uma semirreta fechada

4. J e I são limitados e fechados em uma extremidade

14. Suponha que exista $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ a qual assume seus valores exatamente 2 vezes.

Em part., como $[a,b]$ é compacto, f assume seus valores máximo e mínimo exatamente 2 vezes.

Assim, assumiremos, sem perda de generalidade, que o máximo de f é assumido ao menos em um ponto interior a $[a,b]$, digamos c. Seja $d \in [a,b]$ o outro ponto em que f assume o seu máximo.

Assim, $\exists\, \delta>0$ t.q. se $x\in[c-\delta,c+\delta]$, então $f(x)<f(c)$, e se $y\in[d-\delta,d)$ (caso $d\neq a$, se $d=a$, faça $[d,d+\delta]$), então $f(y)<f(d)$.

Seja $A=\max\{f(c-\delta),f(c+\delta),f(d-\delta)\}$. Pelo TVI, $\exists\, x\in[c-\delta,c)$, $y\in(c,c+\delta]$ e $z\in[d-\delta,d)$ t.q. $f(x)=f(y)=f(z)=A$ (pois se $A\neq f(c-\delta)$, por exemplo, como $A\in(f(c-\delta),f(c))$, o TVI garante o resultado)

Observe que x^2 não é contra-exemplo, já que $f(x)=0$ apenas em $x=0$.

9. $f:(c,+\infty) \to \mathbb{R}$ é derivável

Mostremos que se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$ e se $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = b$, então $b = 0$. Suponha que $b \neq 0$ (sem perda de gen, tomaremos $b > 0$)

Com efeito, como $\lim_{x \to +\infty} f(x) = a$, isto significa que $\exists\, \delta > 0$ t.q se $x, y > \delta_1$, então $|f(x) - f(y)| < b/2$

Por outro lado, como $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = b$, $\exists\, \delta_2 > 0$ t.q se $x > \delta_2$, então $|f'(x)| > b/2$

Em particular, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.q (faça $n_0 = [\delta_2] + 1$) $\forall x > n_0$, $|f'(x)| > b/2$

Agora, pelo TVM, dado $n > n_0$, $\exists\, x_n \in (n, n+1)$ t.q $|f(n+1) - f(n)| = |f'(x_n)| > b/2$

Ainda, se $n > \max\{\delta_1, n_0\}$, então $|f(n+1) - f(n)| < b/2$.

Tal contradição nos permite concluir que $b = 0$

11. As hipóteses implicam f' ilimitada tanto sup quanto inf. Com efeito, se existisse $K \in \mathbb{R}$ t.q. $f'(x) > K$, $\forall x \in (a,b)$, então a f. $g(x) = f(x) - Kx$ seria t.q. $g'(x) > 0$ $\forall x \in (a,b)$, e, portanto, monótona crescente. Logo, $\exists \lim_{x \to a^+} g(x)$ e $\lim_{x \to b^-} g(x)$, o que acarretaria a existência dos limites laterais de f em a e b.

De maneira análoga, $\nexists$ K t.q. $f'(x) < K$, $\forall x \in (a,b)$. Assim, dado $c \in \mathbb{R}$, $\exists\, x_1, x_2 \in (a,b)$ t.q. $f'(x_1) < c < f'(x_2)$. Pelo TVI para a derivada (1.5, cap. 8) $\exists\, x \in (a,b)$ t.q. $f'(x) = c$