① Demonstre que se $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_N \geq \ldots$ e $\sum a_N$ converge, então $\lim N a_N = 0$.

Tomamos (a_N) não-crescente e $\sum a_N$ convergente, e desejamos concluir que $\lim N a_N = 0$.

Iniciamos com (a_N) não-crescente e existe $\sum a_K$, então $a_N \geq 0$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Com isso se $a_{N_0} < 0$ para algum $N_0 \in \mathbb{N}$, temos que:

$$\sum_{K=N_0}^{N_0+i} a_K \leq \sum_{K=N_0}^{N_0+i} a_{N_0} = (i+1) a_{N_0} < 0$$

Por consequência:

$$\left| \sum_{K=N_0}^{N_0+i} a_K \right| \geq (i+1)|a_{N_0}|, \forall i \in \mathbb{N}$$

Com isso estamos contradizendo o fato de $\sum a_K$ existir.

Temos que $\left(\sum_{K=1}^{N} a_K\right)_{N \in N}$ é uma sequência crescente de Cauchy.

E com isso: $\left| \sum_{K=1}^{N+P} a_K - \sum_{K=1}^{N} a_K \right| \leq \sum_{K=N+1}^{N+P} a_K, \forall N, P \in \mathbb{N}$

Tomamos agora $\varepsilon > 0$ arbitrário. Como $\left(\sum_{K=1}^{N} a_K\right)_{N \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, assim existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geq N_0$, vale:

$$\frac{\varepsilon}{2} > \left| \sum_{K=1}^{N} a_K - \sum_{K=1}^{N_0} a_K \right| = \sum_{K=N_0+1}^{N} a_K \geq (N-N_0) a_N$$

Entretanto, como $\sum a_N$ é convergente, devemos ter que $\lim_{N \to \infty} a_N = 0$ e, em razão deste fato existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $N \geq N_1$, temos que:

$$\frac{\varepsilon}{2N_0} > a_N \text{, e consequentemente } \frac{\varepsilon}{2} > N_0 a_N$$

Assim, para $N > N_2 = \max\{N_0, N_1\}$, temos que:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} > (N - N_0) a_N + N_0 a_N = N a_N = |N a_N|$$

e finalmente temos que $\lim_{N \to \infty} N a_N = 0$.

$\blacksquare$