Helding fig ix DR limitadas numa Vizinhança do ponto a ex. Moshe que lim sup (ftg) \(\) lim sup f + lim sup g x+a \(\) x+a \(\) lim sup f. Monotona lénutada, a ext e bex. Eistem os linutus laterais: L= lim f(x) & M=lim f(x)
x+d+ +b= Veorema 14: Seja f limitada numa vizina-Nga de a. Entras: lim sup fkl=lim by e liminffkl=limby
N-Da y-Do Horema 15: Alja f limitada ruma vizinhanea de a. Para todo ESO suiste fo Stal que NEX, OL M-alx8 - 1-Ex fx/x/x L+E, Onde l-lim inf f x) e L=lim sup f x)
x+a
x+a Corolário: Aeja f limitada vuma viziaharva de a. Entas vaste lim f 1x/ se, e somente se, f possei um únio vaba de adere viça vo ponto a.

elle Número real c chama-se um valor de aderévicia de f no ponto a j quando existe uma sequencia de pontos XN = X-ra { Xal que lim XN-a l lim fMN = C. vsa · X é um conjunto de pontos de aderencia, 065 : Temos que: Função limitada! Seja ACR, J:A-DR E dita limitoda quando o confunto f(A) = JMI 1 x eAf, le fIM é limitada superiormonte entar dizemos que je limitada superiormente i caso flA seja limitada inferiormente dizemos que télémitada Arja uma função limitada f: V-AIR Entaro: supf = supf (v1=sup) fx/ lxeV { $mff = inff(x) = inff(x) | x \in V$ A funcão soma de duas funçãos lineitadas

Vale IfMIL = IgMIS M2 HAEA, 1fm)+gm)1 = 1fm)1+1gm)2 M1+ M2= M Portanto a ferreat soma f + g de duas funções Unitadas é também uma funças limitada. Sejam fig: V DR funções limutadas ecenc. Sup (ftg) < supf + supg Aljam A=3f1X)/XEVF, B=1g(y)/yEVE, C= 19M) + fM) 1x EV { Temos que CC A+B, pois borsta Homore X=y ND conjuntos, losp: Sup(A+B) > Sup (f+g) Sup (A) + sup (B) = sup f + supg > sup (f+g) · inf (ftg) >, inf (fl + inf (g) De C C A+B, tems que o infimo: inf(A+B)=inf(A)+inf(B)=inf(f)+inf(g)<inf(E)= inf(f+g)

Exemplo: Aljam fig: [O,1] -> IR dadas por fix) = x e g(x) = -x Vale que: sup f = 1, sup q = 0, entaro: loop sup(j+g) = 0, vale entar que: supf + sup g = 1 > sup (f+g) = 0 Temos ainda que: inf f=0, inf g=-1, e f+g=0, inf (f+g)=0, hopo: inf f + inf q = -1 < inf (ftg) = 0 entar f.g.; A + IR ú límitada. vale que ISMIXMA à 19MIXMA, entar Ismiquile Ms Ma = M, Vx EA, portanto f.g; A + 12 & limitada. · Sigam fig: A +R+ limitadar superior monte, então; sup (fig) < sup(f), sup (g) Alfam C=39M.JM) / KEA & B=29(y)/ yEAF e A= IfM / neA E. Vale que CCA.B para Voe iss basta tomore x=y vas

definiques, com isso: sup (A,B) >, supc sup(A). sup (B) 7, sup C Sup (fl. Sup (g) 7, Sup (f.g) Aljam f, g. A - R+ limitadas inferior-mente, então; unf(f-g) > inf(f).inf(g) entaro sup (y2) = (supf)2. · Dip f: A - DR t entas inf (f2)= (inf f)2 Ruspota; Temos que a soma e o produto de funções limitadas são também funções limitadas.

Toto é: ftg e f.g; x -> IR são funções linutadas. Assim para funções linutadas flg! A -> IR la Ex', dalemos provide Que i lim sup(f+g/fx) < lim supf(x) +

x+a lim supg (x)

po a

line inf (f+g)x) y line inf fx) + line inf g(x) NAa xAa xAa $\lim\sup_{x \to a} \{f(x)\} = -\lim\inf_{x \to a} f(x)$ Além dins, motraremos que se je g frem frençois Não negotivas. Isto é, f(X) e g(X) CR+, então; lím sup $(f \cdot g) \propto (\lim_{x \to a} \sup_{x \to a} f(x)) \cdot (\lim_{x \to a} \sup_{x \to a} g(x))$ liming (f.g) (x) > (lim inff(M)) (lim inf g(M))
Noa (Noa) Apra, se joug ; A DR Não frem vão Mgativas, podemos ter que: line sup (f.g)(x)> (line sup fm) / line sup g(m) De fato, definindo feg!R-DR por: g(n) = f(n) =

remos que: $\lim_{N\to 0} \sup(f,g)(N) = 1 > 0 = 0.0 =$ (lim sup for). (lim sup g (x1) Seja (NN) NEZ+ é Mma sequé poia em Neutro (f(N)) vez, e (g(N)) vez, são sequències en f(x) e g(x), respectivamente. Como flor e glos são compactos (pois são fechos de conjuntos limitados!, então existem subsequencias de (faxil) NEZ; e

(g (NN) que são convergentes.

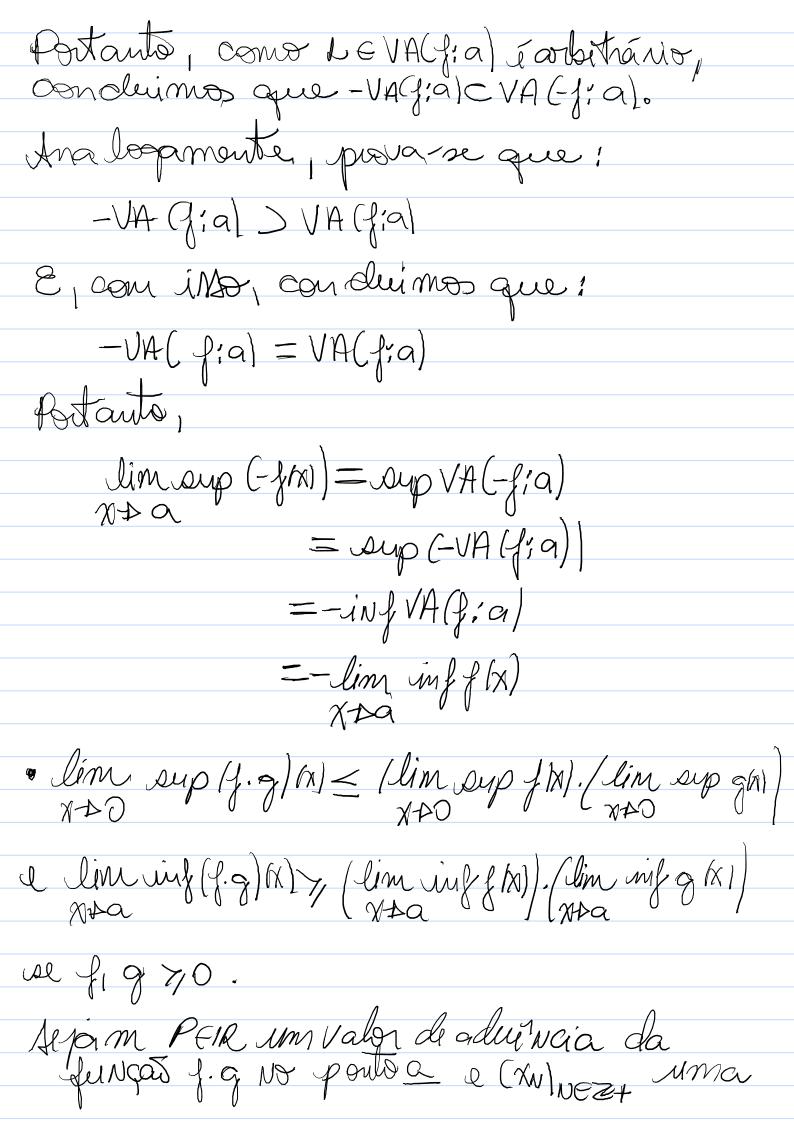
Em particular, existe uma subsequencia

(NN) NEZ; de (XN) NEZ; tal que (f(XN)) KEZ;

e (g (NNX) KEZ; são convergentes. · lim sup(ftg) (< lim sup f () + lim sup g (x), e diminf(ftg/M/ > lin inf fk/ + lin inf g (8/

sijam & ER um valor de aduévica da ful ção (f+g) No pouto a e (XN)NEZ+ uma Dequéricia en X tal que: line NN=a e line (f+g)(NN)=5 NDD ND+00 Dougmos mostreve que: lim inf f(x) + lim inf $g(x) \le 3 \le \lim \sup_{n \to a} f(x) + 1$ f(x) + f(x)E, como se in um valor de adviévcia arbitra-riro da funças (f+g) no ponto a, Con clui-se que: line sup (f+g/h) < line sup fh) + line sup gh) line inf (j+g)/x/7 line inf j M)+line inf g (x) Ono (AN) NEET I MA SIQUENCIA EM X, sique que viste uma subsequencia (ANX) KEET de (NN)NEZ+ Kalque (f/XNXI)KEZ+ l (9(XNXI)KEZ+ São Convergentes.

Seque que lim f(xnx) e lim g(xnx) sas pontos de aderencia de f.e.g, respectivamente, vo ponto a = lim Xux. $S = \lim_{K \to +0} (f+g)(x_{NK})$ $= \lim_{K \to +\infty} f(x_{NK}) + \lim_{K \to +\infty} g(x_{NK})$ · lin sup (-f(x)) = - line inf f(x)Aljam VAG:a) e VA(-f;a) so conjuntos dos Valores de adué Ncier vo ponto er des funçois Je-f. Dado LEVA(fia), existe uma seque Ncia (XV)_{NEXT} fal que: a=lin xv e L=lim f(xv)
N-Afor NAtor Assim: -L=-lim fKNI = lim(-f) (AN) EVA(-fia)



Alqui voia em X Hal que: lim 9N=a e lim (J.g) (7N)=5 Mostraremos que: (lim inf fx) (lin inf g x) < P< (line sup f(x)) (line sup g(x)) E como PEIR um valor de aduivacia corbitrário da funças f. g no porto z, Condeine que: lim sup (f.g/k) < (lim sup f/x)). (lim sup g/x)) lim inf (f.g/N) > (lim inf f/x). (lim inf g/x) Como (NN) vezt é uma seguévia em X/ seque Que existe uma subsequévia (NNK/KEZT de CNN) vezt foil que (f/XN)/KEZT e (g/NK/KEZT sow convergentes.

Algue aux lim f. (M) , lim G (M)
K-DOO K-DOO
Alque que lim frn) e lem g (xvx) Las portos de adrévicia de feg,
respectivemente, no porto a=line xnk.
hop;
3
P= lim (f.g) (xNX) R-D+00 = (lim f(xNX)) (lim g(xNX)) (K-D00) (KD+00)
$= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
= (lim f (NWK)) (UN G (NWK))
<pre> </pre> <pre> (line Supf(x)) (line Supg(x)) x>a </pre>
E malognmente,
PE (lim inf f(a) (lim inf g(a))
PE (lim inf f(x) (lim inf g(x))
υ