10) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a,b). Suponha $f(a)=f(b)=0$. Demonstre que, dado arbitrariamente $k \in \mathbb{R}$ existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)=k.f(c)$.
Sugestão $p(x)=f(x).e^{-kx}$ e aplique o teorema de Rolle.

<u>Teorema de Rolle</u>: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(a)=f(b)$. Se f é derivável em (a,b) então existe um ponto $c \in (a,b)$ onde $f'(c)=0$.

<u>Resposta</u>: Dado $k \in \mathbb{R}$, definimos a função $p(x)=f(x).e^{-kx}$ para $x \in [a,b]$, e podemos dizer que:

i) $p(a)=p(b)=0$

ii) $p'(x) = f'(x).e^{-kx} + (-k).f(x).e^{-kx} =$

$$f'(x).e^{-kx} - k\,f(x).e^{-kx} = e^{-kx}(f'(x) - k\,f(x))$$

Ao aplicar o teorema de Rolle à função p, teremos um $c \in (a,b)$ tal que $p'(c)=0$.
Isto é:

$$0 = p'(c) = (f'(c) - k\,f(c)).e^{-kc} \implies$$

$$\cancel{e^{-kc}}\,f'(c) = \cancel{e^{-kc}}\,k\,f(c)$$

$$f'(c) = k\,f(c)$$

E provamos o enunciado.