

1) Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $\mathbb{Z}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ é fechado.

Conclua que se $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, então $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$ é um conjunto fechado.

• Diz-se que $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: x \in V_\delta(a) = X \cap (a - \delta, a + \delta) \rightarrow f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon).$$

Diz que f contínua, se f for contínua em todos os pontos de X .

• Com esta definição, $f(x)$ é contínua em $a \in X$ se e somente se, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ou $a \notin X$.

• Se $F = \overline{F}$, temos que F é fechado.

• O fecho de X é o conjunto X dos pontos de aderência a X .

• a é aderente a X quando há sequência $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.

• O ponto a é aderente a X se, e somente se toda vizinhança de a intersecta X .

Resposta: Temos que provar primeiro que, se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, e se $f(x) = 0 \forall x \in X$, então $f(x) = 0 \forall x \in \overline{X}$. Ou $\overline{X} = \mathbb{Z}_f$, onde \overline{X} é o fecho de X .

Seja $x_1 \in \bar{X}$, então $x_1 = \lim x_n$, onde (x_n) é uma sequência de pontos $x_n \in X$.

Assim x_1 é um ponto de aderência de (x_n) .

Como f é contínua e $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, então $f(x_1) = \lim f(x_n) = \lim 0 = 0$. Assim, temos que $f(x) = 0$ para todo $x \in \bar{X}$, e conseqüentemente pertencente a \mathbb{Z}_f . E \mathbb{Z}_f é fechado.

Agora dados $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas, então $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$, e C é um conjunto fechado.

Dado $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$, se $x_1 = \lim x_n$ e $y_1 = \lim y_n$, então:

$$f(x_1) = \lim f(x_n) = \lim 0 = 0, \text{ e}$$

$$g(y_1) = \lim g(y_n) = \lim 0 = 0$$

Assim temos que x_1 é ponto de aderência de (x_n) , e y_1 é ponto de aderência de (y_n) .

Com isso temos que $x_1 \in \bar{X}$ e $y_1 \in \bar{Y}$, sendo \bar{X} e \bar{Y} conjuntos fechados.

Como C é dado por $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$ e $f(x) = 0 = g(x)$, temos que C é fechado.

Como a continuidade é um fenômeno local e dado $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$, temos que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in (a - \delta, a + \delta)$.

E assim temos que f é contínua e g é contínua, logo o conjunto C é fechado.