Lista 9

Questão 9.
Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, que se anula fora de um conjunto de medida nula. Prove que sua integral é igual a zero.

Prova:
Seja $X = \{x \in [a,b] \,:\, f(x) \neq 0\}$ o conjunto onde f não se anula, então X está contido num conjunto de medida nula (por hipóteses), e portanto X é de medida nula.

1. Se f é integrável então $|f|$ é integrável.
2. Dado $I \subset [a,b]$ um intervalo não-degenerado, então $\inf\{|f(x)| \,:\, x \in I\} = 0$.
   Suponha, por absurdo, que existe um intervalo não-degenerado $I \subset [a,b]$ tal que $r = \inf\{|f(x)| \,:\, x \in I\} > 0$, isto implica que $|f(x)| \geq r$ para todo $x \in I$. Portanto $I \subset X$, o que é um absurdo, já que I não tem medida nula.
3. $s(|f|, p) = 0$ para toda partição p de $[a,b]$. Consequentemente, temos que $\underline{\int_a^b} |f| = 0$.

   Seja $p = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$ uma partição de $[a,b]$

   $$s(|f|, p) = \sum_{i=0}^{n} \underbrace{m_i}_{=0} (t_i - t_{i-1}) = 0$$

   onde $m_i = \inf\{|f(x)| \,:\, x \in [t_{i-1}, t_i]\} = 0$ (pelo item 2).
4. $\displaystyle\int_a^b |f| = 0$, pois $|f|$ é integrável e $\underline{\int_a^b} |f| = 0$.
5. $\displaystyle\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f| = 0 \Rightarrow \left|\int_a^b f\right| = 0 \Rightarrow \int_a^b f = 0.$