8) Seja I um intervalo aberto e seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Prove que:

a) Se $f(I) \subset J$ e $g: J \to \mathbb{R}$ também é de classe C^2, então $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

b) Se $f(I) \subset J$ e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então $f^{-1}: I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

- Quando a função $f: I \to \mathbb{R}$ possui derivada em todos os pontos do intervalo I, e considera-se a função derivada $f': I \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in I$ a derivada $f'(x)$. Quando f' é contínua, diz-se que f é uma função continuamente derivável no intervalo I, ou uma função de classe C^1.

- Teorema 6 (Rolle): Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a,b) então existe um ponto $c \in (a,b)$ onde $f'(c) = 0$.

- Corolário 3 - Teorema 4: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$ então, quaisquer que sejam $x, y \in I$ tem-se:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

- Teorema 8: Uma função $f: [a,b]$ é uniformemente derivável se, e somente se, ela é de classe C^1.

- $f: I \to \mathbb{R}$ é N vezes derivável no intervalo I, quando existir $f^N(x)\ \forall\, x \in I$.
- $f: I \to \mathbb{R}$ é N vezes derivável no ponto a, $a \in I$, quando houver um intervalo aberto J contendo a, tal que f é $(N-1)$ vezes derivável em $I \cap J$, e além disso, existir $f^N(a)$.
- $f: I \to \mathbb{R}$ é de classe C^N, e escrevemos $f \in C^N$. Isto significa que f é N vezes derivável em I e $x \to f^N(x)$ é uma função contínua em I.

Resposta: Temos que I é um intervalo aberto e $f: I \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2, ou seja f pode ser derivável duas vezes.

Assim temos a primeira condição:

i) se $f(I) \subset J$ e $g: J \to \mathbb{R}$ também é de classe C^2, então $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2,

Temos que I é um intervalo do domínio e sua imagem $f(I) \subset J$, logo: $I \to f(I) \subset J$. Como J é o domínio da g e $g: J \to \mathbb{R}$, temos que: $f(I) \subset J$ e $g((f(I) \subset J)) \to \mathbb{R}$

logo temos uma função composta:

$$g \circ f(I) = g(f(I) \subset J) = \mathbb{R}.$$

Sendo f e g, ambas de classe C^2.

Temos que: $f: I \to \mathbb{R}$ pode ser derivável até $f^2(x)$, e $g: J \to \mathbb{R}$ pode ser derivável até $g^2(y)$. Então f é contínua em x e $f''(x)$ existe, a g é contínua em y e $g''(y)$ existe. Logo:

$$g \circ f(x) = g f(x) = g(y)$$

$$g \circ f'(x) = g' f'(x) = g'(y)$$

$$g \circ f''(x) = g'' f''(x) = g''(y)$$

Assim temos que $g \circ f''(x)$ é derivável e contínua em x, e $g''(y)$ é derivável e contínua em y. Logo $g \circ f: I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

b) se $f(I) \subset J$ e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então $f^{-1}: I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

Temos que $f: I \to \mathbb{R}$ é uma função classe C^2, logo pode ser derivável até $f''(x)$. E $f(I) \subset J$. A f não possui imagem nula em todo intervalo.

Então pelo corolário 6 do teorema 7, temos que se $f(x) \neq 0$ temos que a f possui uma inversa derivável. A $f^{-1}: I \to \mathbb{R}$, dada por:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \forall y = f(x) \in J.$$

Mas como $f(x)$ é classe C^2, temos que

$$(f^{-1})''(y) = \frac{1}{f''(y)}$$

Assim tanto a $f(x)$ com $f^{-1}(x)$ é de classe C^2 se $f(x) > 0$.