

2) Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ em geral. As seguintes afirmações equivalentes:

a) $\int_a^b |f(x)| dx = 0.$

b) Se f é contínua no ponto c , então $f(c) = 0.$

c) $X = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$ tem interior vazio.

ii) $a \rightarrow b$

Como f é integrável temos que:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx$$

Se tomarmos $|f(x)| \leq c$, então:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b |f(x)| dx \leq c(b-a)$$

Como toda função derivável é contínua, então:

$$f(b) - f(a) = f'(x) \cdot (b-a), \text{ se } f'(x) = c, \text{ então}$$

temos uma função Lipschitziana e f é contínua.

$$f(b) - f(a) = c \cdot (b-a)$$

Como $\int_a^b f = 0$ temos que $c(b-a) = 0$, e como $c \neq 0$ temos que $b-a = 0 \rightarrow b = a$

$$f(b) - f(a) = c \cdot (b-a) = c(b-b) = c \cdot 0$$

$$f(b) - f(a) = 0 \rightarrow f(b) = f(a) = 0$$

Portanto no ponto c temos que a $f(c) = 0$.

ii) $b \rightarrow c$

Temos que f é contínua no ponto c , e $f(c) = 0$. Tomamos λ dado que:

$\lambda = \{x \in [a, b] : f(x) \neq 0\}$. Assim λ é um ponto do intervalo fechado onde $f(x) \neq 0$.

Como a integral $\int_a^b f(x) dx = 0$, temos que

$$\int_a^b f = c(b-a) = 0, \text{ ou seja } b=a \text{ e } c \in [a, b]$$

onde $f(c) = 0$. Se $x \in [a, b]$ e $f(x) \neq 0$, então

$x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ que são os pontos interiores do intervalo. Logo λ tem o interior vazio.

iii) $c \rightarrow a$

Como λ é um conjunto que contém elementos do intervalo $[a, b]$ e seu interior é vazio, então dado uma vizinhança de λ , onde $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subset [a, b]$ para $\forall \varepsilon > 0$. Assim $f(x) \neq 0$ e como $c \in [a, b]$ e $f(c) = 0$ temos $a \leq c \leq b$, mas $f(c) = 0$

$c \leq b-a$. Mas $f(c)=0$

$$0 \leq f(b-a)$$

Como $c \in (b-a)$, e $f'(x) = c$, então

$f'(x) \cdot (b-a)$, como x não é ponto interior de $[a, b]$ temos $f'(x) = c$. Temos que:

$$f'(x) \cdot (b-a) = \int_a^b f'(x) dx$$

Como f é derivável então f é contínua, e por ser contínua é integrável pelo Teorema 6.

Mas como $x \notin \text{int}[a, b]$ então $a \leq b$ ou $a \geq b$. Com isso:

$$\int_a^b f'(x) dx = 0 \text{ ou } \int_a^b |f'(x)| dx = 0.$$