6) Demonstre que um conjunto é denso em $\mathbb{R}$ se, e somente se, seu complementar tem interior vazio.

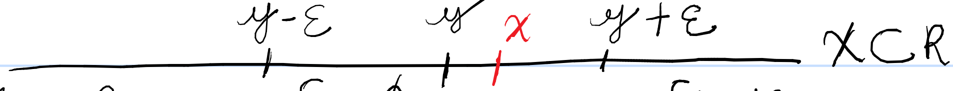
Teorema 4: Um conjunto $F \subset \mathbb{R}$ é fechado se, e somente se, seu complementar $\mathbb{R} - F$ é aberto.

Corolário: $\mathbb{R}$ e o conjunto vazio são fechados.

Temos que $X \subset \mathbb{R}$ é denso $\leftrightarrow$ X^c tem interior vazio.

Suponha que X é denso e considere $y \in X^c$. Então mostraremos que y não pertence ao interior de X^c.

Dado que $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$, temos que existe $x \in X$ tal que $x \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ pois X é denso. Logo, $y \notin \text{int}(X^c)$, de onde deduzimos que $\text{int}\, X^c = \emptyset$.



$X = \mathbb{R}$ $\quad X^c = \emptyset \rightarrow X \cup X^c = \mathbb{R}$

Suponha que $\operatorname{int} X^c = \emptyset$. Mostraremos que X é denso, para isso basta provar que qualquer intervalo de $\mathbb{R}$ contém algum ponto de X.

Seja $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ um intervalo, temos duas possibilidades: ou $y \in X$ ou $y \notin X$. Para o primeiro caso, o intervalo contém um ponto de X, que está muito próximo do centro y do intervalo.

Se $y \notin X$, então como o interior do complementar de X é vazio, este intervalo $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ não pode estar inteiramente contido em X^c, ou seja, contém algum ponto de X.

1 De acordo com o Teorema 6: Todo conjunto X de números reais contém um subconjunto enumerável E, denso em X.

Então como $X \subset \mathbb{R}$ e X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, temos que X é denso e seu complementare é vazio.