Oitava Lista de Exercícios de Análise Real: Derivadas e Fórmula de Taylor

1. Sejam $f, g, h : X \to \mathbb{R}$ tais que, para todo $x \in X$, se tenha $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Demonstre que se num ponto $a \in X \cap X'$ tem-se $f(a) = h(a)$ e existem $f'(a) = h'(a)$, então existe $g'(a)$ e $g'(a) = f'(a)$.

2. Seja $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau ímpar. Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p''(c) = 0$.

3. Demonstre a seguinte sentença: a fim de que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$, é necessário e suficiente que exista uma função $\eta : X \to \mathbb{R}$, contínua em a, tal que $f(x) = f(a) + \eta(x)(x - a)$ para todo $x \in X$.

4. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ contínua. Dado $a \in X \cap X'$, defina $\xi : X \to \mathbb{R}$ pondo $\xi(x) = (f(x) - f(a))/(x - a)$ se $x \neq a$, $\xi(a) = L$. Demonstre que ξ é contínua se, e somente se, existe $f'(a)$ e $f'(a) = L$.

5. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in X \cap X'_- \cap X'_+$. Se $x_n < a < y_n$ para todo n e $\lim x_n = \lim y_n = a$, demonstre que $\lim(f(y_n) - f(x_n))/(y_n - x_n) = f'(a)$.

6. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Um ponto crítico de f é um ponto $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. O ponto crítico c é dito não-degenerado quando $f''(c)$ existe e é diferente de zero. Demonstre que:

   (a) Se $f \in C^1$, para cada intervalo compacto $[a, b] \subset I$, o conjunto de pontos críticos de f pertencentes a $[a, b]$ é fechado.

   (b) Os pontos de máximos e mínimos locais de f são críticos. Um ponto crítico não-degenerado deve ser de máximo local ou de mínimo local.

   (c) Se $c \in I$ é um ponto crítico não-degenerado para f, então existe $\delta > 0$ tal que não há outros pontos críticos de f no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$.

(d) Se os pontos críticos de $f \in C^1$ contidos em $[a,b] \in I$ são todos não-degenerados, então há apenas um número finito deles. Conclua que f possui no máximo uma infinidade enumerável de pontos críticos não-degenerados em I.

7. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo I. Se existe $\alpha > 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^\alpha$ para quaisquer $x, y \in I$, então f é contínua e possui derivada nula em todos os pontos de I. Consequentemente, f é constante.

8. Seja I um intervalo aberto e seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Prove que:

   (a) se $f(I) \subset J$ e $g : J \to \mathbb{R}$ também é de classe C^2, então $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2;

   (b) se $f(I) \subset J$ e $f(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então $f^{-1} : I \to \mathbb{R}$ é de classe C^2.

9. Seja $f : (c, +\infty) \to \mathbb{R}$ derivável. Mostre que se existem $\lim_{x\to+\infty} f(x) = a$ e $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = b$, então $b = 0$. Sugestão: $f(n+1) - f(n) = f'(x_n)$, em que $x_n \to \infty$.

10. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a,b). Suponha $f(a) = f(b) = 0$. Demonstre que, dado arbitrariamente $k \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = k \cdot f(c)$. Sugestão: Tome $p(x) = f(x) \cdot e^{-kx}$ e aplique o Teorema de Rolle.

11. Seja $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ limitada e derivável. Se não existir $\lim_{x\to a+} f(x)$ ou $\lim_{x\to b-} f(x)$, prove que, para todo $c \in \mathbb{R}$, existe $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = c$.

12. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a,b), com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Prove que se $f'(x) = 0$ apenas num conjunto finito, então f é crescente.

13. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função com derivada limitada em (a,b) e com a propriedade do Teorema do Valor Intermediário. Prove que f é contínua.

14. Seja $f : I \to \mathbb{R} \in C^\infty$. Suponha que exista $K > 0$ tal que $|f^{(n)}(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ e todo $n \in \mathbb{N}$. Prove que, para $x_0, x \in I$ quaisquer vale $f(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$.

15. Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas vezes deriváveis no ponto $a \in \operatorname{int} I$. Se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ e $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in I$, prove que $f''(a) \geq g''(a)$.

16. Seja $f : I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo. Demonstre que f é convexa se, e somente se, para quaisquer $a, b \in I$ e $0 \leq t \leq 1$ vale $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

17. Se $f : I \to \mathbb{R}$ possui um ponto crítico não-degenerado $c \in \operatorname{int} I$ no qual f'' é contínua, prove que existe $\delta > 0$ tal que f é convexa ou côncava no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$.

18. Dadas f, g analíticas no intervalo aberto I, seja $X \subset I$ um conjunto que possui um ponto de acumulação $a \in I$. Se $f(x) = g(x)$ para todo $x \in X$, então $f(x) = g(x)$ para todo $x \in I$. Em particular, se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, então $f \equiv 0$.