12) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em (a,b), com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$. Prove que se $f'(x) = 0$ apenas num conjunto finito, então f é crescente.

Teorema do valor médio, de Lagrange: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), existe $c \in (a,b)$, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

Corolário: Se uma função contínua $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ possui derivada nula em todos os pontos $x \in (a,b)$ então f é constante.

Resposta: ① Dado $f: I \to \mathbb{R}$, onde $I = [a,b]$, contínua e derivável em (a,b). Temos que $f'(x) \geq 0$. Então existe um $x \in (a,b)$ tal que:

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \to f(b) - f(a) = f'(x).(b-a)$$

Se $(f(b) - f(a)) > 0$ e $(b-a) > 0$ então f é crescente, dado que $a < b$ e $f(a) < f(b)$. Mesmo em um conjunto não finito. E $f'(x) > 0$.

Se $f'(x) = 0$, então $f(b) - f(a) = 0 \to f(b) = f(a)$, dado um intervalo I finito com $I = [a,b]$, temos então se $f(a) = f(b)$, então $f'(x) = 0$ e para cada $x \in [a,b]$ temos que f é constante.

Como $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a,b)$, temos que f é não decrescente. Utilizando a contra-positiva, temos que se f não fosse crescente existiriam $x_0 < y_0 \in [a,b]$ tais que $f(x_0) = f(y_0)$.

Dessa forma $f|_{[x,y]}$ seria constante, isto é, $f(x) = c$ para todo $x \in [x_0, y_0]$.

De fato, dado $x \in [x_0, y_0]$, temos que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0)$, pois f é não-decrescente. Como $f(x_0) = f(y_0)$, concluímos que $f(x) = f(x_0) = c$.
Portanto, para todo $x \in [x_0, y_0]$, teríamos $f'(x) = 0$.
Desta forma $f'(x) = 0$ para um conjunto infinito, como queríamos mostrar.