3) ① Demonstre a seguinte sentença: a fim de que $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja derivável no ponto $a \in X \cap X'$, é necessário e suficiente que exista uma função $\nu: X \to \mathbb{R}$, contínua em a, tal que $f(x) = f(a) + \nu(x)(x-a)$ para todo $x \in X$.

Teorema 1: Se existe a derivada $f'(a)$ então f é contínua no ponto a.

• Dizemos que $f: X \to \mathbb{R}$ é derivável no conjunto X quando existir a derivada de f em todos os pontos $a \in X \cap X'$.

Resposta: i) Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja derivável, então $\exists\, \nu: X \to \mathbb{R}$, contínua em a, tal que:
$f(x) = f(a) + \nu(x) \cdot (x-a) \ \forall x \in X$.

Temos que $f(x)$ é dada por: $f(x) = f(a) + \nu(x)(x-a)$,

Como $f(a)$ é um ponto da imagem, ou seja, um elemento, então é somente um número para somar.

Temos que provar que $f(x)$ é contínua a partir de $\nu(x) \cdot (x-a)$.

A derivada possui caráter local, assim como a continuidade. Como $\nu(x)(x-a)$ é contínua no ponto a, então $\nu(x) \cdot (x-a)$ é derivável no ponto a. ① Dado $a \in X \cap X'$, temos que $\nu(x)(x-a)$ é contínua em todo x, logo é derivável em todo x. logo $f(x) = f(a) + \nu(x)(x-a)$ temos que $f(x)$ é contínua e derivável em todo x.

ii) Se tomarmos $f(x) = f(a) + \nu(x)(x-a)$, uma função derivável em todo X, em $\exists a \in X \cap X'$ onde $f(x)$ é derivável e contínua.

Assim como $\nu(x)(x-a)$ é contínua pelo enunciado em a, então é contínua em todo X. Como $f(x)$ é derivável temos pelo teorema 1 que $\nu(x)(x-a)$ também é derivável.

Portanto $f(x)$ é derivável, desde que $\nu(x)(x-a)$ seja derivável em todo X.