17) Sejam $f, p : [a,b] \to \mathbb{R}$ tais que f é contínua, p é integrável e $p(x) > 0$ para todo $x \in [a,b]$. Demonstre que:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(a)\int_a^b p(x)\,dx \text{, então}$$

existe $c \in (a,b)$ tal que $f(a) = f(c)$.

Teorema 32. (Fórmulas de Valor Médio para Integrais) São dadas as funções $f, p : [a,b] \to \mathbb{R}$, com f contínua. Então:

A. Existe $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c).(b-a)$.

B. Se p é integrável e não muda de sinal, existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(c)\int_a^b p(x)\,dx$$

C. Se p é positiva, decrescente, com derivada integrável, existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = p(a)\int_a^c f(x)\,dx$$

Resposta: Supondo que $f(x) > f(a)$ para todo $x \in (a,b)$, com isso temos que:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx > f(a)\int_a^b p(x)\,dx$$

Temos um absurdo, portanto existe $x_0 \in (a,b)$ tal que $f(x_0) < f(a)$.

Vamos supor agora que $f(x) < f(a)$ para todo $x \in (a,b)$, e temos:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx < f(a)\int_a^b p(x)\,dx$$

Temos novamente um absurdo, e portanto existe $x_1 \in (a,b)$ tal que:

$$f(x_1) > f(a)$$

Agora se $x_1 < x_0$ temos que: $f(x_1) < f(a) < f(x_0)$, e se $x_0 < x_1$ temos que: $f(x_0) < f(a) < f(x_1)$.

Então fixamos $x_0 < x_1$, com isso temos que:

$m = f(x_0) < f(a) < f(x_1) = M$, e como

a f é contínua pelo T.V.I temos que existe $d \in [m, M]$ tal que:

$$d \cdot \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b f(x)p(x)\,dx$$

e temos que $d = f(c)$ para algum $c \in [a,b]$.

Portanto: $d\int_a^b p(x)\,dx = f(c)\int_a^b p(x)\,dx$ e

como $\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(a)\int_a^b p(x)\,dx$. Temos que:

$f(a) = f(c)$.

$\blacksquare$