4) Mostre que se existir $\lim f_n(c) = L$ e se $\{f'_n\}$ convergir uniformemente a zero em I, então f_n convergirá uniformemente em cada compacto $K \subset I$. Aplique tal fato a $f_n(x) = \sin(x/n)$.

Corolário 2: Uma sequência (ou uma série) de funções deriváveis num intervalo I pode ser derivada termo a termo desde que convirja num ponto $c \in I$ e a sequência (ou série) das derivadas convirjam uniformemente em cada subintervalo compacto de I.

Resposta: Seja $\lim f_n(c) = L$, ou seja

a sequência de funções é limitada em L, convergindo para L em um ponto c! E suas derivadas convergem para zero em cada intervalo compacto de I.

Se tomarmos I como:

$I = K_1 + K_2 + \ldots\ldots + K_n$, onde os K_i's são

intervalos compactos disjuntos, então

$$f'_1 = f'_1 + f'_2 = \ldots = f'_n + f'_{n-1} + \ldots + f'_1 = 0$$

$$f'_1 + f'_2 + \ldots + f'_n = |f'_n| = 0$$

Pelo corolário 2, temos que f_n converge em cada $K_i \subset I$.

Ao aplicarmos o corolário em:

$f_N = \sin\left(\frac{x}{N}\right)$, temos:

$f_1 = \sin\left(\frac{x}{1}\right)$ em K_1, onde K_1

$f_1 = \sin(c)$

$f_2 = \sin\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow{c} f_2 = \sin\left(\frac{c}{2}\right)$, em K_2

$\vdots$

$f_N = \sin\left(\frac{x}{N}\right) \xrightarrow{c} f_N = \sin\left(\frac{c}{N}\right)$, em K_N

Em cada K_i temos que f_N converge para um valor dado por $\sin\left(\frac{x}{N}\right)$, onde $N = 1, \dots, N$.