Lista 6

Ex. Claramente, $\lim_{x\to c^-} f(x) \leq \lim_{x\to c^+} f(x)$

(estamos supondo f monótona não-decrescente)

Pelo T. 12, os limites $\lim_{x\to c^-} f(x)$ e $\lim_{x\to c^+} f(x)$ existem, e são iguais a $\sup\{f(x) \mid x\in X, x<c\} =: \alpha$ e $\inf\{f(x) \mid x\in X, x>c\} =: \beta$, resp.

Note que $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$.

Suponhamos que $\alpha < \beta$. Se $c \notin X$, então não existe $x\in X$ t.q. $f(x) \in (\alpha, \beta)$. Logo, $f(X)$ não é denso em $[a, b]$ (já que existe um int. aberto I, subc. de $[a, b]$, t.q. $f(X) \cap I = \emptyset$), o que é um absurdo.

Se $c\in X$ então ou $f(c) \neq \alpha$, ou $f(c) \neq \beta$, com $f(c) \in (\alpha, \beta)$. De qualquer modo, $\exists$ I aberto t.q. $f(X) \cap I = \emptyset$, e novamente $f(X)$ não será denso em $[a, b]$

Assim, $\alpha = \beta$

Se $c \in X$, então $\alpha \leq f(c) \leq \beta$, donde se segue que $\alpha = f(c) = \beta$.

Digitalizado com CamScanner