

17. (a) Devemos mostrar que dada uma bijeção $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, se (a_n) for somável com soma s , então $(b_n = a_{\varphi(n)})$ será somável.

Seja $\varepsilon > 0$. Como (a_n) é somável, $\exists J_0 \subset \mathbb{N}$ finito t.q., $\forall J$ finito t.q. $J_0 \subset J \subset \mathbb{N}$, $|s - \sum_{n \in J} a_n| < \varepsilon$.

Seja $I_0 = \varphi(J_0)$. Mostremos que $\forall I$ finito t.q. $I_0 \subset I \subset \mathbb{N}$, $|s - \sum_{n \in I} b_n| < \varepsilon$.

Com efeito, dado I ~~satisfazendo~~ ^{finito} t.q. $I_0 \subset I \subset \mathbb{N}$, seja $J = \varphi^{-1}(I)$. Como J é finito e $J \supset J_0$ (a saber, se $n \in J_0$, então $\varphi(n) \in I_0 \subset I$, donde se segue que $n = \varphi^{-1}(\varphi(n)) \in J$), segue-se da hipótese de que (a_n) é somável que

$$|s - \sum_{n \in J} a_n| < \varepsilon.$$

Por fim, como $\sum_{n \in J} a_n = \sum_{\varphi(n) \in I} a_{\varphi(n)}$ $\sum_{m \in I} b_m = \sum_{\varphi(n) \in I} a_{\varphi(n)}$

$$= \sum_{n \in J} a_n, \text{ segue-se que}$$

$$|s - \sum_{m \in I} b_m| < \varepsilon.$$