12) Prove que a função: $f(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$

Está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e que:

$$f'' + f'/_x + f = 0 \text{ , para todo } x \neq 0.$$

<u>Resposta</u>: A série converge absolutamente em qualquer $x \in X$, onde x é um número real.

Isto é comprovado pela comparação com a série exponencial:

$$\frac{1}{(n!)^2} \cdot \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^n \leq \frac{1}{(n!)} \left(\frac{x^2}{2^2}\right)^n \rightarrow \frac{1}{(n!)^2} \leq \frac{1}{(n!)}$$

A série possui raio de convergência infinito, então podemos derivar termos a termo:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^n} \cdot (2n) \cdot \frac{x^{2n-1}}{2^{2n}}$$

$$\frac{f'(x)}{x} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \cdot (2n) \cdot \frac{x^{2n-2}}{2^{2n}}$$

$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \cdot (2n) \cdot (2n-1) \cdot \frac{x^{2n-2}}{2^{2n}}$$

Podemos agora começar as somas de $n=1$, pois em $n=0$ se anulam, e em seguida pode-se colocar os termos em evidência.

$$f'' + \frac{f'}{x} = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(N!)^2} \cdot (2N) \cdot (2N-1) \cdot \frac{x^{2N-2}}{2^{2N}} +$$

$$\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(N!)^2} \cdot (2N) \cdot \frac{x^{2N-2}}{2^{2N}} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(N!)^2} \cdot (2N) \cdot \frac{x^{2N-2}}{2^{2N}} \cdot (2N-1+1) =$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(N!)^2} \cdot (2N)^2 \cdot \frac{x^{2N-2}}{2^{2N}} =$$

$$\cancel{\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(N!)^2} \cdot \frac{(-1)}{(N+1)^2} \cdot (N+1)^2 \cdot (2^2) \cdot (N^2) \cdot \frac{x^{2N-2}}{2^{2N}} =}$$

$$\cancel{\sum_{N=0}^{\infty} \frac{(-1)^N}{(N!)^2} \cdot \frac{(-1)}{(N+1)^2} \cdot (N+1)^2 \cdot (2^2) \cdot \frac{x^{2N-2}}{2^{2N}} \cdot N^2}$$

Para $N=1 \rightarrow \frac{(-1)}{1!} \cdot \cancel{4} \cdot \frac{x^0}{\cancel{4}} = \frac{-1 \cdot 1}{1} = -1$

Para $N=2 \rightarrow \frac{(-1)}{2} \cdot \cancel{16} \cdot \frac{x^2}{\cancel{16}} = -\frac{x^2}{2}$

Para $N = \frac{(-1)}{(N!)^2} \cdot (2N)^2 \cdot \frac{x^{2N-2}}{2^{2N}}$

Para $N+1 = \frac{(-1)}{(N+1)^2} \cdot (2(N+1))^2 \cdot \frac{x^{2(N+1)-2}}{2^{2(N+1)}} =$

$$\frac{(-1)^{N+1}}{(N+1)! \cdot (N+1)!} \cdot (N+1)^2 \cdot 2^2 \cdot \frac{2^{2N+\cancel{2}-\cancel{2}}}{2^{2N} \cdot 2^2} =$$

$$\frac{(-1)^{N+1}}{(N!)^2 \cdot \cancel{(N+1)^2}} \cdot \cancel{(N+1)^2} \cdot \cancel{2^2} \cdot \frac{2^{2N}}{\cancel{4} \cdot 2^{2N}} = \frac{(-1)^N}{(N!)^2} \cdot \frac{x^{2N}}{2^{2N}} \cdot (-1)$$

Para $N = N+1$, temos que $f'' + \frac{f'}{x} = -\left[\frac{(-1)^N}{(N!)^2} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^{2N}\right]$, que é igual a $-f$. Assim: $f'' + f'/x = -f \rightarrow f'' + f'/x + f = 0$. $\square$