3) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ definida pondo $f(x)=0$ se x é racional e $f(x)=1/q$ se $x = p/q$ é uma fração irredutível e $q>0$ (ponha $f(0)=1$ caso $0 \in [a,b]$).

Demonstre que f é contínua apenas nos pontos irracionais de $[a,b]$, que é integrável e que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ 1/q, & \text{se } x = p/q \text{ (fração irredutível)} \\ & q>0 \\ f(0)=1, & 0 \in [a,b] \end{cases}$$

Temos que f é descontínua num conjunto infinito, ou seja no conjunto dos números racionais do intervalo $[a,b]$.

Temos também que: $0 \leq f(x) \leq 1$, então f é limitada.

Falta mostrar que f é integrável no intervalo $[a,b]$, ou seja: $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

Com efeito dado $\varepsilon>0$, o conjunto:

$F = \{x \in [a,b];\ f(x) \geq \frac{\varepsilon}{(b-a)}\}$ é finito, pois é o conjunto das frações irredutíveis pertencentes a $[a,b]$ cujos os denominadores são:

$\leq \frac{b-a}{\varepsilon}$. Tomemos uma partição P de $[a,b]$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contém algum ponto de F seja menor do que ε.

Observemos que se $F \cap [t_{i-1}, t_i] = \emptyset$ então

$0 \leq f(x) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ para todo $x \in [t_{i-1}, t_i]$ e,

portanto, $M_i \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$.

A soma $S(f;P) = \sum M_i (t_i - t_{i-1})$ relativa a esta partição se decompõe em duas parcelas:

$$\sum M_i . (t_i - t_{i-1}) = \sum M_i' (t_i' - t_{i-1}') + \sum M_i'' (t_i'' - t_{i-1}'')$$

Onde assinalamos com um apóstrofo os intervalos $[t'_{i-1}, t'_i]$ que contém algum ponto de F, e com dois apóstrofos, $[t''_{i-1}, t''_i]$ os que são disjuntos de F.

Então o primeiro somatório é $< \varepsilon$, porque $\sum (t_i' - t_{i-1}') < \varepsilon$, e $M_i' \leq 1$. O segundo é $< \varepsilon$ porque $M_i'' \leq \frac{\varepsilon}{b-a}$ e $\sum (t_i'' - t_{i-1}'') < b-a$.

Logo $S(f;P) = \sum M_i . (t_i - t_{i-1}) < 2\varepsilon$.

Segue-se que: $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$

Como $f(x) \geq 0$ para todo x, temos que:

$$0 \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$$

Concluímos que f é integrável e que $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.