23) Seja $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ integrável em cada intervalo limitado $[a, x]$.
Demonstre que a integral imprópria:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t)\,dt$$

Existe se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $A > 0$ tal que $A < x < y$ implica $\left| \int_x^y f(t)\,dt \right| < \varepsilon$.

Definição Tipo II: Seja $f: [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua.
Sua integral imprópria (se convergir) é definida por

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to \infty} \int_a^c f(x)\,dx$$

Ela é dita absolutamente convergente se: $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ convergir.

Resposta: Suponha que a integral converge para um dado valor "L", então seja $\varepsilon > 0$ e usando a definição de convergência, podemos tomar um $x \geq a$ suficientemente grande tal que se $x \geq A$, e temos que:

$$\left| \int_a^x f(x)\,dx - L \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ Tomando } y > x \geq A.$$

Logo:

$$\left|\int_x^y f(x)\,dx - L\right| = \left|\int_a^y f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx\right| =$$

$$\left|\int_a^y f(x)\,dx - L + L - \int_a^x f(x)\,dx\right| \leq$$

$$\left|\int_a^y f(x)\,dx - L\right| + \left|\int_a^x f(x)\,dx - L\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Utilizando a desigualdade triangular, obtemos um ε. E portanto vale:

$$\left|\int_x^y f(x)\,dx - L\right| < \varepsilon$$

Agora temos a volta, e para isto tomamos um "N" natural, definimos:

$$a_N = \int_a^N f(x)\,dx$$

Para $\varepsilon > 0$, existe $m \geq a$ tal que se $m, N \geq A$ temos:

$$\left|a_N - a_M\right| = \left|\int_m^N f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Logo a (a_N) é uma sequência de Cauchy, então é convergente e seja $\lim a_N = L$.

Dado $\varepsilon > 0$ escolhemos $A \geq a$ (A natural) tal que $N > m$, e quaisquer x_1, y_1 com $y_1 > x_1 > A$ tem-se $|a_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ e,

$$\left|\int_{x_1}^{y_1} f(x)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando $y_1 \geq A+1$, então $\lfloor x'_1 \rfloor \geq A$ tal que

$$\left| \int_a^x f(x)\,dx - L \right| = \left| \int_a^{\lfloor x'_1 \rfloor} f(x)\,dx - L + \int_{\lfloor x'_1 \rfloor}^x f(x)\,dx \right| \leq$$

$$\left| a_{\lfloor x'_1 \rfloor} - L \right| + \left| \int_{\lfloor x'_1 \rfloor}^x f(x)\,dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$\blacksquare$

$\lfloor x_1 \rfloor$: é a função piso de um número real x_1 é o resultado do arredondamento de x_1 para baixo. Em outras palavras, o piso de x é o único número inteiro i tal que: $i \leq x_1 < i+1$

Em notação, podemos denotar o piso de x por (int)x, desde que x não seja estritamente negativo, em notação mais tradicional, o piso de x_1 é: $\lfloor x_1 \rfloor$