13) Dadas $f, g: X \to \mathbb{R}$, defina $h = \max\{f, g\}: X \to \mathbb{R}$ pondo $h(x) = f(x)$ se $f(x) \geq g(x)$ e $h(x) = g(x)$ caso $g(x) \geq f(x)$.

Seja $a \in X'$. Demonstre que se

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M$, então

$h(x) = N$, em que $N = \max\{L, M\}$.

$f, g: X \to \mathbb{R}$. $h(x) = \max\{f, g\}: X \to \mathbb{R}$

$$h(x) = \begin{cases} h(x) = f(x), \text{ se } f(x) \geq g(x) \\ h(x) = g(x), \text{ se } g(x) \geq f(x) \end{cases}$$

$\underline{a} \in X'$, e $X' \in X$

Teorema 13: Um número real $\underline{c}$ é valor de aderência de f no ponto $\underline{a}$ se, e somente se, para todo $\delta > 0$ tem-se $c \in \overline{f(V_\delta)}$.

. $\underline{a}$ é aderente a X quando há sequência $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.

. a é ponto de acumulação de X quando toda vizinhança V de $\underline{a}$ satisfaz $V \cap X - \{a\} \neq \emptyset$.

. X' é o conjunto dos pontos de acumulação, Teorema 8: Critério de Cauchy para funções. Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $f: X \to \mathbb{R}$. Para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ é necessário e suficiente que, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, se possa obter $\delta > 0$, tal que $x, y \in X$, $0 < |x-a| < \delta$, $0 < |y-a| < \delta$ impliquem $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Resposta: Seja $L > M$. Como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to a} g(x) = M$$

Tomando-se $\varepsilon = \frac{(L-M)}{2}$, e existe $\delta > 0$ tal que para todo: $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X - \{a\})$

Assim: $f(x) \in (L-\varepsilon, L+\varepsilon) = \left(L - \frac{L-M}{2}, L + \frac{L-M}{2}\right) =$

$$\left(\frac{2L - L - M}{2}, \frac{2L + L - M}{2}\right) = \left(\frac{L-M}{2}, \frac{3L-M}{2}\right)$$

E a $g(x)$ é dada por:

$$g(x) \in (M-\varepsilon, M+\varepsilon) = \left(M - \frac{L-M}{2}, M + \frac{L-M}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{2M + M - L}{2}, \frac{2M + L - M}{2}\right) = \left(\frac{3M-L}{2}, \frac{M+L}{2}\right)$$

Assim, para todo $x \in (a-\delta, a+\delta) \cap (X - \{a\})$,

$$g(x) < f(x)$$

Como $g(x) < f(x) \longrightarrow h(x) = f(x)$

Desta forma, temos que:

$$h|_{(a-\delta,\, a+\delta)\cap(X-\{a\})} = f|_{(a-\delta,\, a+\delta)\cap(X-\{a\})}$$

Portanto se $L > M$, temos que:

$$\lim_{x \to a} h(x) = \lim_{x \to a} h|_{(a-\delta,\, a+\delta)\cap(X-\{a\})}(x) =$$

$$\lim_{x \to a} f|_{(a-\delta,\, a+\delta)\cap(X-\{a\})}(x) = L = N.$$

Similarmente, repete-se o argumento para $M > L$. Então $\lim_{x \to a} h(x) = N$.

Pode-se finalizar com o caso em que $L = M$. Assim, seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim_{x \to a} f(x) = L = N$ e $\lim_{x \to a} g(x) = M = N$, existe $\delta > 0$ tal que para todo:

$$x \in (a-\delta,\, a+\delta)\cap(X-\{a\})$$

Vale $f(x) \in (N-\varepsilon,\, N+\varepsilon)$, e $g(x) \in (N-\varepsilon,\, N+\varepsilon)$

Assim, para todo $x \in (a-\delta,\, a+\delta)\cap(X-\{a\})$, tem-se que:

$$h(x) \in \{f(x), g(x)\} \subset (L-\varepsilon,\, L+\varepsilon).$$

Conclui-se que: $\lim_{x \to a} h(x) = N$