6) Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas no ponto a. Suponha que em cada vizinhança de a, existem pontos x, y tais que: $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$.

Demonstre que $f(a) = g(a)$.

Resposta: Tomemos f, g funções contínuas em a, tais que em cada vizinhança V de a existem pontos x, y tais que $f(x) < g(x)$ e $f(y) > g(y)$.

Se tomarmos $\delta_1 = 1$, então existem x_1 e y_1 tais que:

$$|x_1 - a| < \delta_1 \text{ e } |y_1 - a| < \delta_1, \text{ então}$$

$$f(x_1) < g(x_1) \text{ e } f(y_1) > g(y_1)$$

Tomamos agora $\delta_2 = 1/2$, então existem x_2 e y_2 tais que:

$$|x_2 - a| < \delta_2 \text{ e } |y_2 - a| < \delta_2, \text{ então}$$

$$f(x_2) < g(x_2) \text{ e } f(y_2) > g(y_2)$$

Se continuarmos reduzindo o valor de δ, até um valor muito pequeno, temos então $\delta = \frac{1}{N}$, e com isso existem x_N e y_N tais que:

$|x_N - a| < \delta_N$ e $|y_N - a| < \delta_N$, então

$f(x_N) < g(x_N)$ e $f(y_N) > g(y_N)$

Assim, encontramos duas sequências $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ e $(y_N)_{N\in\mathbb{N}}$, onde $x_N \to a$ e $y_N \to a$.

Temos que f, g são contínuas em a, com isso:

$f(x_N) < g(x_N)$ e $f(y_N) > g(y_N)$

E também:

$\lim_{N\to+\infty} f(x_N) \leq \lim_{N\to+\infty} g(x_N)$, e $\lim_{N\to+\infty} f(y_N) \geq \lim_{N\to+\infty} g(y_N)$

Então: $f(a) \leq g(a)$ e $f(a) \geq g(a)$

Assim conclui-se que $f(a) = g(a)$.