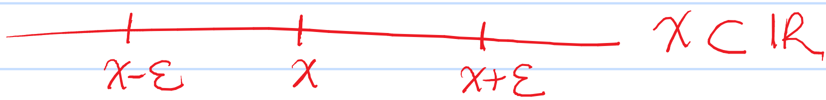
4) Para todo $X \subset \mathbb{R}$, prove que vale a união disjunta $\mathbb{R} = \text{int} X \cup \text{int}(\mathbb{R}/X) \cup F$, em que F é formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que toda vizinhança de x contém pontos de X e pontos de $\mathbb{R}/X$. O conjunto F: fr X se chama a fronteira de X.
Demonstre que A é aberto se, e somente se, $A \cap \text{fr} A = \emptyset$.

Dado $X \subset \mathbb{R}$ e: $\mathbb{R} = \text{int}(A) \cup \text{int}(\mathbb{R}/A) \cup \text{fr} A$, temos uma união disjunta. Assim dado $x \in \mathbb{R}$ e $X \subset \mathbb{R}$ vale:

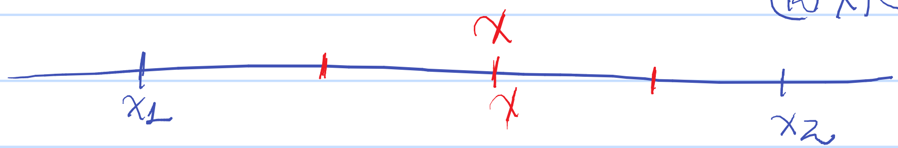
• Existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset X$, com isso $x \in \text{int}(X)$. Caso contrário $\forall \varepsilon > 0$ temos $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \not\subset X$.



São os pontos interiores de X.

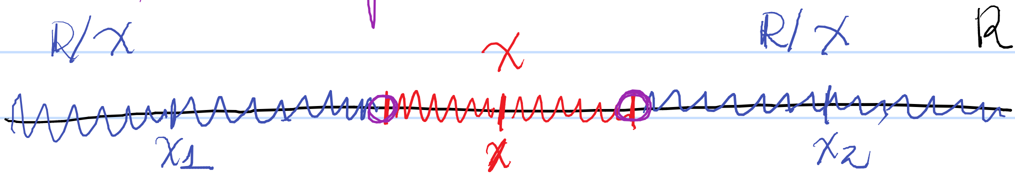
Existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (\mathbb{R}/X)$, com isso $x \in \text{int}(\mathbb{R}/X)$.

$(\mathbb{R}/X) \subset \mathbb{R}$



$x_1, x_2 \in \mathbb{R}/X$ e $(x_1-\varepsilon, x_1+\varepsilon)$, $(x_2-\varepsilon, x_2+\varepsilon) \subset \mathbb{R}/X$.

Existe $\forall \varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $\forall \varepsilon > 0$, $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (\mathbb{R}/X) \neq \emptyset$. Temos nestas condições $x \in \text{fr}\, X$.



- $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$, são os pontos na fronteira de X internos.

- $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap \mathbb{R}/X \neq \emptyset$, são os pontos nas fronteiras $\mathbb{R}/X$ próximos a x.

Assim conclui-se que $\mathbb{R} \subset \text{int}(x) \cup \text{int}(\mathbb{R}/A) \cup \text{fr}\, A$ e como $\text{int}(x) \cup \text{int}(\mathbb{R}/A) \cup \text{fr}\, A \subset \mathbb{R}$, segue-se: $\mathbb{R} = \text{int}(x) \cup \text{int}(\mathbb{R}/A) \cup \text{fr}\, A$.

A é aberto se, e somente se, $A \cap \text{fr}\, A = \emptyset$

Se A é aberto, então $\text{int} A = A$ por definição e $\text{int} A$ e $\text{fr}\, A$ são disjuntos.

Supondo que $A \cap \text{fr}\, A = \emptyset$, então $a \in A$ e vale que $a \in \text{int}(A) \cup \text{int}(\mathbb{R}/A) \cup \text{fr}\, A$, não satisfaz a condição $a \in \text{fr}\, A$ ou $a \in \text{int}(\mathbb{R}/A)$. Com isso temos que $a \in \text{int}(A)$ e implica $A \subset \text{int}(A)$, portanto $A = \text{int} A$ e A é aberto.