10) Dado $a > 1$, defina $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela lei:
$g(x) = a^x$

Demonstre que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ e que
$\lim_{x \to -\infty} g(x) = 0$.

Como $a > 1$, temos que a $g(x)$ é crescente:
$a < a^2 < a^3 < \ldots < a^n < \ldots$

Desigualdade de Bernolli: Vale a desigualdade
$$(1+x)^n \geq 1 + n.x$$
Onde $x \geq -1$ é um número real e n é um número natural.

Seja $a = 1 + \varepsilon$, assim dado $A > 0$ arbitrário, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \varepsilon > A$.

Assim, dado $x > n_0$ temos pela desigualdade de Bernolli que:

$$A < 1 + n_0 \varepsilon \leq (1+\varepsilon)^{n_0} = g(n_0) < g(x)$$

Com isso o $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Tomando, novamente, $A > 0$ temos que $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \varepsilon > 1/A$. Então, dado $x < -n_0$ temos que:

$$\varepsilon > \frac{1}{N_0\varepsilon + 1} \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{N_0}} = g(-N_0) > g(x) > 0$$

Assim temos que $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = 0$.