4) Sejam $f, g: X \to \mathbb{R}$ contínuas. Se $\bar{Y} \subset X$ e $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$, então:

$$f|\bar{Y} = g|\bar{Y}$$

Conclua que se duas funções contínuas $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são tais que $f(r) = g(r)$ para todo $r \in \mathbb{Q}$, então $f = g$.

<u>Resposta</u>: Temos que f, g são contínuas e $\bar{Y}$ é o fecho de Y, onde $\bar{Y}$ é o conjuntos dos pontos de aderência de (y_n) e $\bar{Y}$ é fechado.

Dado $y \in \bar{Y}$, então existe uma sequência $y_n \in Y$ com $\lim y_n = a$.

Como $\bar{Y} \subset X$ e $f(y) = g(y)$, para todo $y \in Y$, temos que:

f, g são contínuas e $f(y) = g(y)$, e

Como a continuidade é um fenômeno local temos que existe $\delta > 0$ tal que $f(x) = g(x)$, para todo $y \in (a-\delta, a+\delta)$. Então

$y \in (a-\delta, a+\delta) \cap X \to f(y) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ e

$\to g(y) \in (g(a) - \varepsilon, g(a) + \varepsilon)$

E como $y \in \bar{Y}$, temos $f|\bar{Y} = g|\bar{Y}$.

Temos portanto que dado:

$f,g:\bar{Y}\to\mathbb{R}$ e $f,g:X\to\mathbb{R}$, com $\bar{Y}\subset X$, sendo $\bar{Y}$ fechado então:

$\{y\in\bar{Y} \mid f(y)\le g(y)\}\cap\{y\in\bar{Y} \mid f(y)\ge g(y)\}$, onde ambos são conjuntos fechados.

Conclui-se que:

$\{y\in\bar{Y} \mid f(y)=g(y)\}$.

Se tomarmos $r\in\mathbb{Q}$, como $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, temos que $f(r)=g(r)$. Assim temos que $f=g$.