

8) Seja I um intervalo aberto e seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 .
Prove que:

a) Se $f(I) \subset f$ e $g: f \rightarrow \mathbb{R}$ também é de classe C^2 , então $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 .

b) Se $f(I) \subset f$ e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então $f^{-1}: f \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 .

Quando a função $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ possui derivada em todos os pontos do intervalo I , e considerase a função derivada $f': I \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $x \in I$ a derivada $f'(x)$.

Quando f' é contínua, diz-se que f é uma função continuamente derivável no intervalo I , ou uma função de classe C^1 .

Teorema 6 (Rolle): Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, tal que $f(a) = f(b)$. Se f é derivável em (a, b) então existe um ponto $c \in (a, b)$ onde $f'(c) = 0$.

Corolário 3 - Teorema 4: Seja $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I . Se existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ então, quaisquer que sejam $x, y \in I$ tem-se:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Teorema 8: Uma função $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente derivável se, e somente se, ela é de classe C^1 .

- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é n vezes derivável no intervalo I , quando existe $f^n(x) \forall x \in I$.
- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é n vezes derivável no ponto a , $a \in I$, quando houver um intervalo aberto J contendo a , tal que f é $(n-1)$ vezes derivável em $I \cap J$, e além disso, existir $f^n(a)$.
- $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^n , escrevemos $f \in C^n$. Isto significa que f é n vezes derivável em I e $x \mapsto f^n(x)$ é uma função contínua em I .

Resposta: Temos que I é um intervalo aberto e $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de classe C^2 , ou seja f pode ser derivável duas vezes.

Assim temos a primeira condição:

ii) se $f(I) \subset J$ e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ também é de classe C^2 , então $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 ,

Temos que I é um intervalo do domínio e sua imagem $f(I) \subset J$, logo $\text{loop}: I \rightarrow f(I) \subset J$. Como J é o domínio da g e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$, temos que: $f(I) \subset J$ e $g(f(I) \subset J) \rightarrow \mathbb{R}$

logo temos uma função composta:

$$g \circ f(I) = g(f(I) \subset J) = \mathbb{R}.$$

sendo f e g , ambas de classe C^2 .

Temos que: $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser derivável até $f''(x)$, e $g: J \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser derivável até $g''(y)$. Então f é contínua em x e $f''(x)$ existe, a g é contínua em y e $g''(y)$ existe. Logo:

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) \quad ; \quad g \circ f(x)' = f'(x) \cdot g'(f(x))$$

$$g \circ f(x)'' = f''(x) g'(f(x)) + (f'(x))^2 g''(f(x)) \geq 0$$

$$f''(x), g'(f(x)), (f'(x))^2, g''(f(x)) \geq 0$$

Assim temos que $g \circ f''(x)$ é derivável e contínua em x , e $g''(y)$ é derivável e contínua em y . Logo $g \circ f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 .

b) se $f(I) \subset J$ e $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, então $f^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^2 .

Temos que $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função classe C^2 , logo pode ser derivável até $f''(x)$. E $f(I) \subset J$. A f não possui imagem nula em todo intervalo.

Então pelo corolário 6 do Teorema 7, temos que se $f'(x) \neq 0$ temos que a f possui uma inversa derivável. A $f^{-1}: J \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \forall y = f(x) \in J.$$

Mas como $f(x)$ é classe C^2 , temos que

$$(f^{-1})^n(y) = \frac{1}{f^n(y)}$$

Assim, tanto a $f(x)$ com $f^{-1}(x)$ é de classe C^2 se $f'(x) > 0$.