Caracterização das funções integráveis

O objetivo é caracterizar as funções integráveis como aquelas cujos pontos de descontinuidade formam conjuntos que são "pequenos". Isto será feito mediante a noção de conjunto de medida nula (segundo Lebesgue). Iniciaremos, porém, com o conceito de conjunto de conteúdo nulo (segundo Jordan).

Seja $X \subset \mathbb{R}$, diremos que X tem conteúdo nulo e escrevemos $c(X) = 0$ quando, para todo $\varepsilon > 0$, for possível obter uma coleção finita de intervalos abertos $I_1, \ldots, I_k$ tal que $X \subset I_1 \cup \ldots \cup I_k$ e a soma dos comprimentos dos intervalos I_j seja $< \varepsilon$.

Indiquemos com $|I| = b - a$ o comprimento de um intervalo I cujos extremos são a, b. Então $c(X) = 0 \leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ pode-se fazer $X \subset I_1 \cup \ldots \cup I_k$ onde $I_1, \ldots, I_k$ são intervalos abertos, com $|I_1| + \ldots + |I_k| < \varepsilon$.

Não exigimos que os intervalos abertos $I_1, \ldots, I_k$ sejam disjuntos, mas o conjunto aberto $I_1 \cup \ldots \cup I_k$ pode ser expresso, de modo único, como reunião de intervalos abertos disjuntos $J_1, \ldots, J_r$, $(r \leq k)$.

Lema 7: Sejam $I_1, \ldots, I_k$ e $J_1, \ldots, J_r$ intervalos abertos, os J_i sendo dois a dois disjuntos. Se $I_1 \cup \ldots \cup I_k = J_1 \cup \ldots \cup J_r$ então:
$|J_1| + \ldots + |J_r| \leq |I_1| + \ldots + |I_k|$

ocorrendo a igualdade somente quando os I_j forem também dois a dois disjuntos (e portanto coincidirem com os J_i a menos da numeração).

Corolário: Seja $X \subset [a,b]$ um conjunto de conteúdo nulo. Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição P de $[a,b]$ tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contém algum ponto de X é $< \varepsilon$.

Os conjuntos de conteúdo nulo gozam das seguintes propriedades:

1- Se $c(X) = 0$, então X é limitado;
2- Se $c(X) = 0$ e $Y \subset X$, então $c(Y) = 0$;
3- Se $c(X_1) = \dots = c(X_n) = 0$, então $c(X_1 \cup \dots \cup X_n) = 0$;
4- Se, para cada $\varepsilon > 0$, existem intervalos abertos $I_1, \dots, I_k$ e um subconjunto finito $F \subset X$, tais que $X - F \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$ e $|I_1| + \dots + |I_k| < \varepsilon$, então $c(X) = 0$.

A propriedade 4 implica que, na definição de $c(X) = 0$, poderíamos ter utilizado intervalos fechados, sem alterar o significado do conceito.
Com efeito, se X for coberto por um número finito de intervalos fechados, cuja soma dos comprimentos é $< \varepsilon$, então os intervalos abertos correspondentes têm igual soma de comprimentos e deixam de cobrir no máximo um subconjunto finito de X formado por extremidades dos intervalos.

Em particular, obtemos a recíproca do corolário anterior, se $X \subset [a,b]$ e, para cada $\varepsilon > 0$ existe uma partição P de $[a,b]$, tal que a soma dos comprimentos dos intervalos de P que contém pontos de X é $< \varepsilon$, então, $c(X) = 0$.

A oscilação de uma função limitada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ num conjunto $X \subset [a,b]$, foi definida como:

$$w(f; X) = \sup f(x) - \inf f(x) = \sup \{ |f(x) - f(y)| ; x, y \in X \}$$

Temos que $X \subset Y \to w(f; X) \leq w(f; Y)$.

Definiremos agora a oscilação de f num ponto $x \in [a,b]$.

Fixemos x, f e escrevemos, para cada $\delta > 0$, $w(\delta)$ = oscilação de f no conjunto $(x-\delta, x+\delta) \cap [a,b]$.

Se $a < x < b$ e δ é suficientemente pequeno, então $w(\delta) = w(f; (x-\delta, x+\delta))$.

Se $x = a$ e $\delta \leq b-a$, então:

$w(\delta) = w(f; [a, a+\delta))$.

Se $x = b$ e $\delta \leq b-a$, então $w(\delta) = w(f; (b-\delta, b])$.

Mantendo sempre f e x fixos, $w(\delta)$ é uma função monótona não-decrescente de δ, definida num intervalo $(0, \delta_0)$. Como f é limitada, a função $\delta \to w(\delta)$ também é limitada. Existe portanto, o limite:

$$w(f; x) = \lim_{\delta \to 0} w(\delta) = \inf \{ w(\delta) ; \delta > 0 \},$$

A chamada oscilação de f no ponto x.

Teorema 16: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. A fim de que f seja contínua no ponto $x_0 \in [a,b]$ é necessário e suficiente que $w(f; x_0) = 0$.

O próximo teorema diz que a oscilação $x \mapsto w(f; x)$ é uma função semicontínua superiormente no intervalo $[a,b]$. Os corolários enunciam propriedades gerais das funções semicontínuas superiormente.

Teorema 17: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Dado $x_0 \in [a,b]$, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in [a,b]$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow w(f; x) < w(f; x_0) + \varepsilon$.

Corolário 1: Se $w(f; x_0) < \alpha$ então existe $\delta > 0$ tal que $x \in [a,b]$, $|x - x_0| < \delta \Rightarrow w(f; x) < \alpha$.

Corolário 2: Para todo $\alpha > 0$, o conjunto $E_\alpha = \{x \in [a,b]; w(f; x) \geq \alpha\}$ é compacto.

Corolário 3: Para todo $n \in \mathbb{N}$, seja $x_n \in [a,b]$ e $\lim x_n = x$. Se existir $\lim_{n\to\infty} w(f; x_n) = L$ será $L \leq w(f; x)$.

Em outros termos: $\lim w(f; x_n) \leq w(f; \lim x_n)$.

Teorema 18: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Se $w(f; x) < \varepsilon$ para todo $x \in [a,b]$, então existe uma partição P de $[a,b]$ tal que $w_i = M_i - m_i < \varepsilon$ em todos os intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ da partição.

Teorema 19: Uma função limitada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, para todo $\delta > 0$, o conjunto $E_\delta = \{x \in [a,b] ; w(f;x) \geq \delta\}$ tem conteúdo nulo.

① Dizemos que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula (à Lebesgue) e escrevemos $m(X) = 0$, quando para todo $\varepsilon > 0$, for possível obter uma coleção enumerável de intervalos abertos: $I_1, I_2, \dots, I_N, \dots$ tais que $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_N \cup \dots$ e $\sum_{N=1} |I_N| < \varepsilon$.

Em particular, se X tem conteúdo nulo, então $m(X) = 0$. Valem as seguintes propriedades:

1) Se $m(X) = 0$ e $Y \subset X$, então $m(Y) = 0$, $m(\phi) = 0$.

2) Se X é compacto e $m(X) = 0$, então $c(X) = 0$.

3) Se $Y = X_1 \cup \dots \cup X_N \cup \dots$, onde $m(X_1) = \dots = m(X_N) = \dots = 0$, então $m(Y) = 0$. Em palavras: uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula tem medida nula.

Em particular, como um ponto tem medida nula, todo conjunto enumerável tem medida nula. Assim, por exemplo: $m(\mathbb{Q}) = 0$, e com maior razão, os números racionais contidos num intervalo $[a,b]$ formam um conjunto de medida nula, o qual como sabemos, não tem conteúdo nulo.

4) Se, para cada $\varepsilon > 0$, existem intervalos abertos $I_1, \ldots, I_N, \ldots$ e um subconjunto enumerável $E \subset X$ tais que $X - E \subset I_1 \cup \ldots \cup I_N \cup \ldots$ e $\sum |I_N| < \varepsilon$, então $m(X) = 0$.

Teorema 20: Para que uma função limitada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ seja integrável, é necessário e suficiente que o conjunto D dos seus pontos de descontinuidade tenha medida nula.

Corolário 1: Se $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ são integráveis então o produto $f \cdot g$ é integrável. Se além disso, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$ e $1/f$ é limitada, então $1/f$ é integrável.

Corolário 2: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Se o conjunto dos seus pontos de descontinuidade é enumerável, então f é integrável. Em particular, se existem os limites laterais de f em cada ponto de $[a,b]$ então f é integrável. Mais particularmente ainda, se a função limitada f é monótona, então f é integrável!