Lista 7

1. Z_f é fechado.

Com efeito, seja (x_n), $x_n \in Z_f$, t.q. $x_n \to x$

Mostremos que $f(x) = 0$.

Como $f(x_n) = 0$ $\forall n$ e f é contínua, segue-se que

$\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(x) = 0$

Agora, note que $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$

$= Z_h$, em que $h = f - g$.

Como h é contínua, Z_h é fechado.

5. $(\to)$ Seja $a \in \overline{X}$. Devemos mostrar que $f(a) \in \overline{f(X)}$,

i.e., que $\exists (x_n)$, $x_n \in X$, t.q. $f(x_n) \to f(a)$

Seja $\varepsilon > 0$. Como $a \in \overline{X}$, $\exists (x_n)$, $x_n \in X$, t.q. $x_n \to a$,

i.e., dado $\delta > 0$ $\exists n_0$ $\forall n > n_0$ $|x_n - a| < \delta$

Sendo f contínua em a, $\exists \delta > 0$ t.q. se $|x - a| < \delta$,

então $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Então, $\forall n > n_0 = n_0(\delta)$, $|x_n - a| < \delta$, e portanto, $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$

Assim, demonstramos que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall n > n_0$ $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$,

i.e., que $(f(x_n))$ conv. para $f(a)$

$(\leftarrow)$ Demonstremos a contrapositiva, i.e. que se f não for contínua, então $\exists X \subset \mathbb{R}$ t.q. $f(\overline{X}) \subsetneq \overline{f(X)}$

Como f não é contínua, $\exists a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x \in U_a(\delta)$ t.q. $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$.

Em particular, $\exists (x_n)$, $x_n \to a$, t.q. $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$

Seja $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$. Mostremos que $f(\overline{X}) \subsetneq \overline{f(X)}$.

Com efeito, $f(\overline{X}) = \{f(a), f(x_1), f(x_2), \dots\}$, e se $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$, existiria uma sequência em $f(X)$ cujo limite seria $f(a)$, i.e., $\exists (x_{n_j})$, $x_{n_j} \to a$ (já que $x_n \to a$) t.q. $f(x_{n_j}) \to f(a)$, ou ainda, $\exists j_0\ \forall j > j_0\ |f(x_{n_j}) - f(a)| < \varepsilon$.

Tal contradição nos permite concluir que $f(\overline{X}) \subsetneq \overline{f(X)}$.

☐Reunião ☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos