17) Prove que:

a) Se $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de compactos, então $\bigcap K_\lambda$ é compacto.

Se $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_N \supseteq \dots$, é uma sequência de compactos não vazios, então $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i \neq \emptyset$.

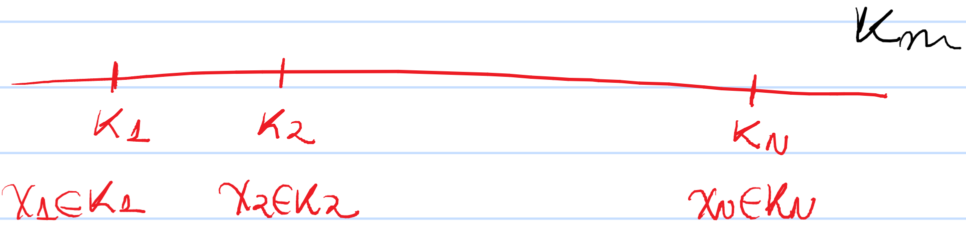
Dada a família $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$, de conjuntos compactos onde:

$K_1, K_2, \dots \subset \mathbb{R}$ são compactos, $K_N \neq \emptyset$, $\forall N \in \mathbb{N}$ e $K_N \supset K_{N+1}$, $\forall N \in \mathbb{N}$.

Então $\bigcap_{N \in \mathbb{N}} K_N \neq \emptyset$.

Considere uma sequência (x_N) com $x_N \in K_N$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Então $x_N \in K$, $\forall N \in \mathbb{N}$, logo (x_N) é limitada, e portanto tem uma subsequência (x_{N_K}) convergente, seja $a = \lim_{K \to \infty} x_{N_K}$.

Como, para todo $k \geq m$, $n_k \geq k \geq m$, temos $x_{n_k} \in K_m$ (pois $x_{n_k} \in K_{n_k}$).



Temos: $K_1, K_2, \ldots, K_N$ conjuntos compactos, e $x_N = x_1, x_2, \ldots, x_N$ todas as sub-sequências de x_N.

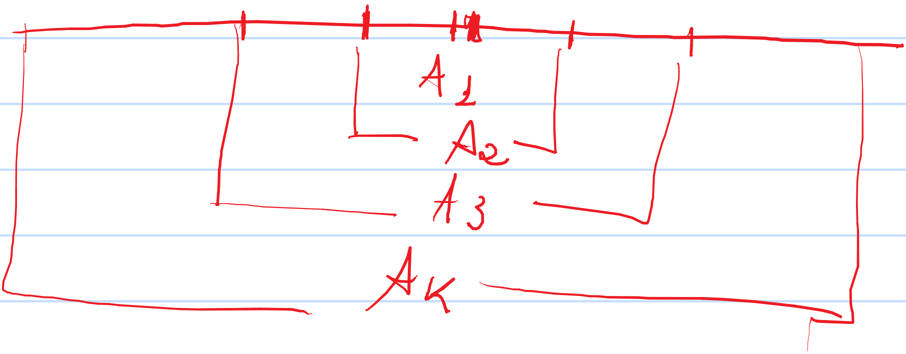
Temos que $a = \lim x_{n_k} \in K_m$, pois K_m é fechado. Assim, $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_m$.

$\blacksquare$

Outra forma:

A interseção arbitrária de compactos de é um conjunto compacto.

Seja $A = \bigcap_{k \in B} A_k$ a interseção arbitrária de compactos, como cada A_k é é fechado, e a interseção arbitrária de fechados é fechado. Segue que A é fechado, além disso A é limitado, pois dado $\tau \in B$, $A \subset A_\tau$, sendo A subconjunto de um conjunto limitado implica que A é limitado. A é fechado e limitado, portanto é compacto.



b) Se $K_1, \dots, K_N$ são compactos, então $\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ é compacto.

- Uma cobertura (finita) de um conjunto X é uma família (finita) C de conjuntos C_λ (com $\lambda \in L$) tal que
$$X \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda.$$
Numa cobertura aberta, cada C_λ é um conjunto aberto. Se $L' \subseteq L$ é tal

que $x \subseteq \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, então a família C_λ com $\lambda \in L'$ é uma subcobertura de C.

· Teorema (Borel-Lebesgue): Toda cobertura aberta de um compacto possui subcobertura finita.

· Teorema: K é compacto $\Leftrightarrow$ toda cobertura aberta de K admite subcobertura finita, isto é, para toda família:

$(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ de conjuntos abertos U_α com

$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $\exists F \subset A$ finito com $K \subset \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$.

Seja K compacto, podemos supor $K \neq \emptyset$. Sejam $a = \min K$, $b = \max K$, $K \subset [a,b]$.

$V = [a,b] / K = (a,b) / K = \underbrace{(a,b)}_{\text{aberto}} \cap \underbrace{(\mathbb{R}/K)}_{\text{aberto}}$

é aberto.

$K \subset \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$, $[a,b] = V \cup K \subseteq V \cup \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$

Se $\exists F \subset A$ finito com $[a,b] \subseteq V \cup \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$, $K \subset \bigcup_{\alpha \in F} U_\alpha$. Assim, podemos supor sem perda de generalidade que $K = [a,b]$.

Suponha agora $K = [a,b] \subset \bigcup_{\alpha \in A} W_\alpha$, W_α é aberto, $\forall \alpha \in A$. Seja:

$Y = \{c \in [a,b] \mid \exists F \subset A$ finito com $[a,c] \subset \bigcup_{\alpha \in F} W_\alpha \}$

Se existe $\gamma \in A$ tal que $a \in W_\gamma \rightarrow \exists \varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset W_\gamma$, donde W_γ é aberto e está contido em A. Temos que $c \in Y$, $\forall c \in [a, a+\varepsilon) \cap [a,b]$,

Assim, $Y \neq \emptyset$, $Y \subset [a,b]$, seja $d = \sup Y \leq b$. Devemos ter $d = b$, e $d \in Y$. Isto concluiu o argumento.

Pois $d \in [a,b]$, logo $\exists\ \beta \in A$ com $d \in W_\beta$, e existe $\delta > 0$ com $(d-\delta, d+\delta) \subset W_\beta$.

Escolhemos $t \in y \cap [d-\delta, d]$, e existe $F \subset A$ finito com $[a,t] \subset \bigcup_{\alpha \in F} W_\alpha$.

logo $[a, d+\delta/2] \cap [a,b] \subset [a,t] \cup (d-\delta, d+\delta) \subset W_\beta \cup \bigcup_{\alpha \in F} W_\alpha$.

devemos ter $d = b$, senão $c := \min\{d+\delta/2, b\} > d$ e $c \in y$, temos um absurdo.

logo $[a, d+\delta/2] \cap [a,b] = [a,b]$, e $b \in y$.

Para a volta, temos:

Se K não é limitado, $K \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} (-N, N) = \mathbb{R}$ é cobertura aberta sem subcobertura finita.

Se K não é fechado, $\exists\ a \in \bar{K}/K$,
$K \subset \bigcup_{N \in \mathbb{N}} (\mathbb{R} / [a - \frac{1}{N}, a + \frac{1}{N}]) = \mathbb{R}/\{a\}$

também é cobertura aberta sem subcobertura finita.

$\boxtimes$

Outra maneira:

Ex: Dado A_1, A_2 são compactos, então $A_1 \cup A_2$ é compacto.

Seja uma cobertura $\bigcup_{K \in L} B_K = B$ para $A_1 \cup A_2$, como $A_1 \subset \bigcup_{K \in L} B_K$ e A_1 é compacto, podemos extrair uma subcobertura finita da cobertura B.

$A_1 \subset \bigcup_{K=1}^{N} B_K$, da mesma maneira podemos extrair uma subcobertura finita para A_2.

$A_2 \subset \bigcup_{K=N+1}^{m} B_K$, então:

$\bigcup_{K=1}^{m} B_K = \bigcup_{K=1}^{N} B_K \bigcup_{K=N+1}^{m} B_K$ é uma subcobertura finita para a união.

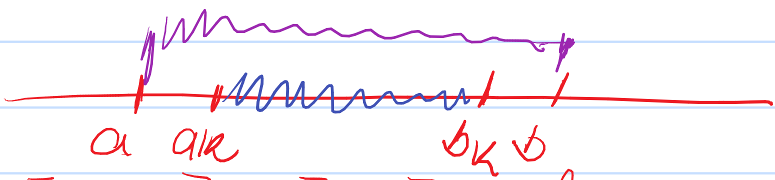
→ Uma reunião finita de compactos é um conjunto compacto.

Seja $A = \bigcup_{k=1}^{N} A_k$ a reunião, como cada A_k é fechado tem-se que A é fechado e por ser reunião finita de fechados.

$\bigcup_{k=1}^{N} A_k = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_N$

Além disso o fato de cada A_k ser limitado implica que A também é limitado, pois cada A_k pertence a um intervalo do tipo $[a_k, b_k]$.

Tomando $a < a_k \ \forall k$ e $b > b_k \ \forall k$, tem-se:



$A_k \subset [a_k, b_k] \subset [a, b]$, daí:

$A = \bigcup_{k=1}^{N} A_k \subset [a, b]$, então A é limitado.

Sendo limitado e fechado segue que A é compacto.

• Se $(K_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma família qualquer de compactos, então $\bigcap K_\lambda$ é compacto.

K_λ, $\lambda \in A$, compactos $\Rightarrow \bigcap_{\lambda \in A} K_\lambda$ é compacto:

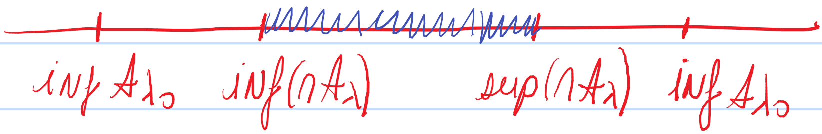
Como cada K_λ é fechado, temos que $\bigcap K_\lambda$ é fechado. Além disso, temos que, dado qualquer $\lambda_0 \in A$ qualquer:

$$\inf\left(\bigcap A_\lambda\right) \geq \inf A_{\lambda_0} > -\infty$$

e

$$\sup\left(\bigcap A_\lambda\right) \leq \inf A_{\lambda_0} < \infty$$

Assim, $\bigcap A_\lambda$ é limitado. Portanto, $\bigcap A_\lambda$ é compacto.



• Se $K_1, \dots, K_N$ são compactos então $K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_N$ é compacto.

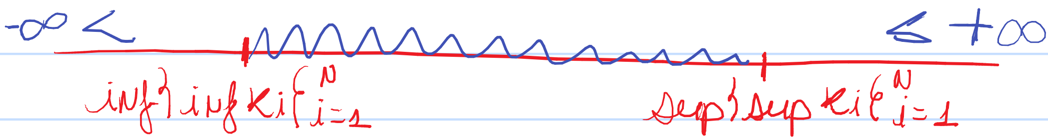
K_i, $i = 1, 2, \dots, N$, compacto $\rightarrow \bigcup_{i=1}^{N} K_i$ é compacto

Como cada K_i é fechado, temos que $\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ é fechado. Além disso:

$$\sup\left(\bigcup_{i=1}^{N} K_i\right) = \sup\{\sup K_i\}_{i=1}^{N} < \infty$$

e

$$\inf\left(\bigcup_{i=1}^{N} K_i\right) = \inf\{\inf K_i\}_{i=1}^{N} > -\infty$$



Assim, $\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ é limitado. Portanto:

$\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ é compacto

c) Se K é compacto e F é fechado, então $K \cap F$ é compacto.

K é compacto e F é fechado $\rightarrow K \cap F$ é compacto

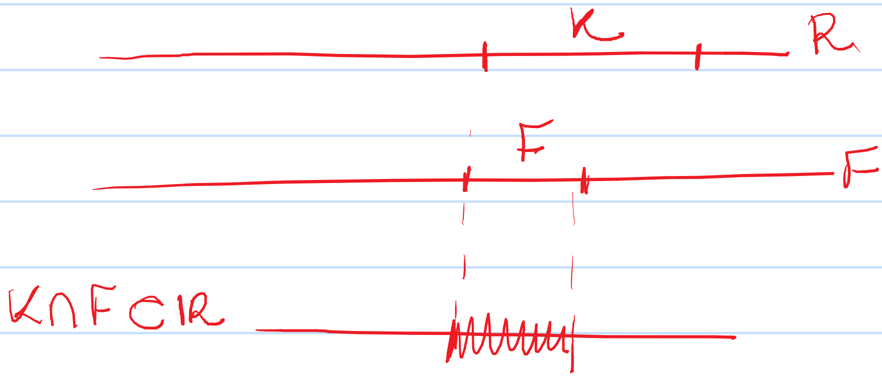
Como K e F são fechados, $K \cap F$ é fechado.
Além disso:

$$\sup(K \cap F) \leq \sup K < \infty$$

e

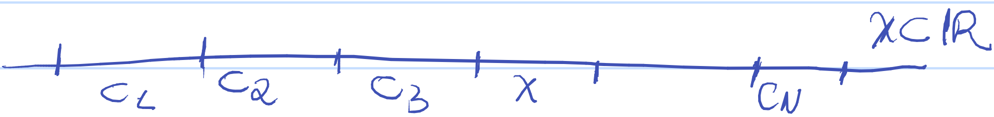
$$\inf(K \cap F) \geq \inf K > -\infty$$

Daí, $K \cap F$ é limitado. Portanto, $K \cap F$ é compacto.



Definição geral: uma cobertura de um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ é uma família:
$\mathcal{C} = (C_\lambda)_{\lambda \in L}$, de conjuntos $C_\lambda \subset \mathbb{R}$

Tais que $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é, para todo $x \in X$ existe algum $\lambda \in L$ tal que: $x \in C_\lambda$.

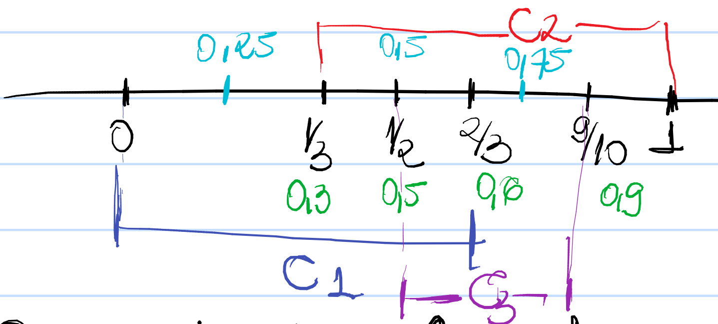


$X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, $x \in C_\lambda$

Uma subcobertura de $\mathcal{C}$ é uma família $\mathcal{C}' = (C_\lambda)_{\lambda \in L'}$, $L' \subset L$, tal que ainda se tem $X \subset \bigcup_{\lambda \in L'} C_\lambda$.

Exemplos: Os intervalos:

$C_1 = (0, 2/3)$, $C_2 = (1/3, 1)$ e $C_3 = (1/2, 9/10)$



$\frac{1}{4} = 0,25$

$$\bigcup_{i=1}^{3} C_i = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = (0, 1)$$

$3/4 = 0,75$

$[1/4, 3/4]$

C_λ, $\lambda = 1, 2, 3.$, $C_{\lambda=1} = 0,25 \quad (0, 1/3)$

$C_{\lambda=2} = 0,5 \quad (1/3, 2/3)$

$C_{\lambda=3} = 0,75 \quad (2/3, 1)$

A cobertura $C = \{C_1, C_2, C_3\} = [1/4, 3/4]$

$L = \{1, 2, 3\}$, temos que $[1/4, 3/4] \subset C_1 \cup C_2 \cup C_3 = (0, 1)$.

Tomando $L' = \{1, 3\} \rightarrow$ subfamília:

$C' = \{C_1, C_3\} \rightarrow [1/4, 3/4] \subset C_1 \cup C_3 = (0, 9/10)$