Lista 7

11) Suponha que, $\forall J \subset I$, intervalo, $f(J)$ é também um intervalo

Seja $a \in I$. Consideremos o caso em que $a \in \mathrm{int}(I)$; a demonstração caso $a \in \mathrm{fr}\, I$ (supondo-se que $\mathrm{fr}\, I \neq \emptyset$)

Seja $\varepsilon > 0$, e considere $A := f^{-1}(\{f(a)\}) \cup f^{-1}(\{f(a)+\varepsilon\}) \cup f^{-1}(\{f(a)-\varepsilon\})$. Por hipótese, A é finito, e naturalmente, $a \in A$. Seja $\delta_0 := \min\{\{|a - x_i| \mid x_i \in A, x_i \neq a\}, d(a, \mathrm{fr}\, I)\}$, e note que $\delta_0 > 0$.

Faça $0 < \delta < \delta_0$. Afirmamos que $f(U_\delta(a)) \subset U_{f(a)}(\varepsilon)$.

Com efeito, $f(U_\delta(a))$ é um intervalo (por hipótese), e como $U_\delta(a) \cap A = \{a\}$, segue-se que se $x \in U_\delta(a)$, então $f(x) \notin \{f(a) \pm \varepsilon\}$. ~~Como~~ Não é possível que $|f(x) - f(a)| > \varepsilon$, pois caso contrário, $\exists y \in U_\delta(a)$ t.q. $f(y) \in \{f(a) \pm \varepsilon\}$ (já que $f(U_\delta(a))$ é um intervalo).

Logo, $|f(x)-f(a)|<\varepsilon$, e portanto, $f(U_\delta(a)) \subset U_{f(a)}(\varepsilon)$

Se $a \in fr(I)$, então ou $x \geq a$ $\forall x \in I$, ou $x \leq a$ $\forall x \in I$. No 1º caso, substitua $U_\delta(a)$ por $U_\delta^+(a)$, em que $\delta = \min\{|x_i - a| \; x_i \in A, x_i \neq a\}$.

Lista 5

Ex 15. a) Devemos dem. que $\forall a \in A$ $\forall \delta > 0$, $\exists$ $x \in V_\delta(a)$, ~~$x \neq a$~~, $V_\delta(a) := \{x \in A \mid |x-a| < \delta\}$

Com efeito, $\exists \varepsilon > 0$ t.q. $\underbrace{U_\varepsilon(a)}_{=(a-\varepsilon, a+\varepsilon)} \subset A$ (A é aberto)

Se ~~$\delta > 0$~~ $\delta > \varepsilon$, basta tomar $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\}$; se $\delta < \varepsilon$, basta tomar $x \in (a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\} \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \setminus \{a\} \subset A \setminus \{a\}$

b) F é fechado, $x \in F$, x isolado.

Seja $a \in \overline{F \setminus \{x\}}$. Então, $\exists (x_n)$, $x_n \in F \setminus \{x\}$, t.q. $\lim x_n = a$

~~Seja $\varepsilon > 0$~~. Afirmamos que $a \neq x$. Com efeito $\exists n_0$ $\forall n > n_0$ $|x_n - a| < \frac{d(x,F)}{2}$. Em part,

$|x - x_n| \leq |x-a| + |a - x_n|$

$\rightarrow |x-a| > |x - x_n| - |a - x_n| > d(x,F)/2$

Logo, $a \in \overline{F \setminus \{x\}} \setminus \{x\} \subset \overline{F} \setminus \{x\} \subset F \setminus \{x\}$, ~~donde se segue que~~ já que F é fechado.

☐Reunião ☐Importante ☐Planejamento ☐Outros Assuntos