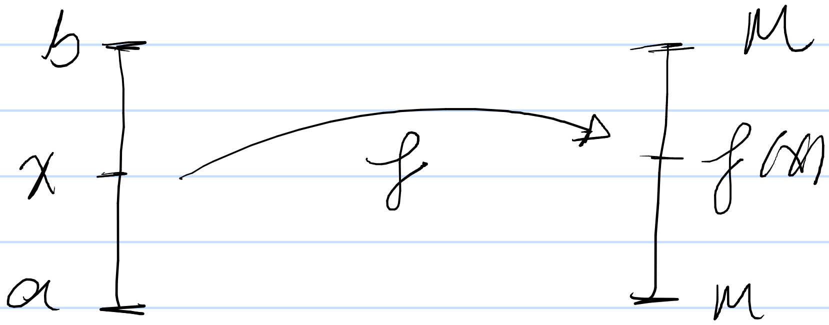
Consideremos funções reais $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, definidas num intervalo compacto $[a,b]$ e limitadas nesse intervalo.

Isto significa que existem números reais $m$, $M$ tais que $m \leq f(x) \leq M$ para todo $x \in [a,b]$, ou seja, que os valores $f(x)$ pertencem todos ao intervalo compacto $[m, M]$.




Temos que os intervalos contendo os valores de $f(x)$,

i) $x \in [a,b] \to m = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$, e
$M = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$

$$m = \inf f \text{ e } M = \sup f$$

Para que $f$ seja limitada em $[a,b]$, é necessário e suficiente que exista $K > 0$ tal que $|f(x)| \leq K \ \forall x \in [a,b]$.

Corolário 3: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo $I$. Se existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ então, quaisquer que sejam $x, y \in I$, tem-se:

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x - y|$$

Uma partição do intervalo $[a,b]$ é um subconjunto finito $P \subset [a,b]$ tal que $a \in P$ e $b \in P$.

Quando escrevermos $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ convencionaremos sempre que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = b$.

Os intervalos $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, N$ serão chamados os intervalos da partição $P$.

Sejam $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$, uma partição de $[a, b]$. Para cada $i = 1, \ldots, N$, indicaremos com $m_i$ o ínfimo e com $M_i$ o supremo dos valores de $f$ no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$.

Definiremos a soma inferior $s(f;P)$ e a soma superior $S(f;P)$ da função $f$ relativamente à partição $P$ pondo:

$$s(f;P) = m_1 . (t_1 - t_0) + \ldots + m_N . (t_N - t_{N-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} m_i (t_i - t_{i-1}), \text{ e}$$

$$S(f;P) = M_1 (t_1 - t_0) + \ldots + M_N . (t_N - t_{N-1}) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} M_i . (t_i - t_{i-1})$$

Como $m$ é o ínfimo e $M$ é o supremo de $f$ e $[a, b]$, temos:

$$m . (b - a) \leq s(f;P) \leq S(f;P) \leq M . (b - a), \ \forall \text{ partição } P \text{ de } [a, b]$$

Se $f > 0$, as somas $s(f;P)$ e $S(f;P)$ podem ser interpretadas como áreas de polígonos, um inscrito e outro circunscrito ao gráfico de $f$.

Sejam $P, Q$ partições de $[a,b]$. Quando $P \subset Q$, dizemos que a partição $Q$ é mais fina do que $P$. A maneira mais simples de refinar uma partição $P$ é acrescentar-lhe um único ponto.

Tomemos $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$ e consideremos:

$$Q = \{t_0, t_1, \dots, \underline{t_{i-1}, r, t_i}, \dots, t_n\}$$

$m_i = [t_{i-1}, t_i]$, $m' = [t_{i-1}, r]$, $m'' = [r, t_i]$

Então: $m_i \leq m'$ e $m_i \leq m''$.

Como: $t_i - t_{i-1} = (t_i - r) + (r - t_{i-1})$, e

$$s(f;Q) - s(f;P) = m''(t_i - r) + m'(r - t_{i-1}) - m_i(t_i - t_{i-1})$$

$$= (m'' - m_i)(t_i - r) + (m' - m_i)(r - t_{i-1}) \geq 0$$

Assim, se uma partição $Q$ resulta do acréscimo de um ponto à partição $P$, tem-se:

$s(f;P) \leq s(f;Q) \rightarrow$ repetindo temos:

$P \subset Q \rightarrow s(f;P) \leq s(f;Q)$.

Como o supremo é a menor das cotas superiores, temos:

$$P \subset Q \rightarrow s(f;Q) \leq S(P;Q)$$

Teorema 1: Seja $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Quando se refina uma partição $P$, a soma inferior não diminui e a soma superior não aumenta.

Corolário: Seja $f:[a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitada. Para quaisquer partições $P, Q$ de $[a,b]$, tem-se $s(f;P) \leq S(f;Q)$.

A partição $P \cup Q$ refina $P$ e $Q$. Logo:

$$s(f;P) \leq s(f;P \cup Q) \leq S(f;P \cup Q) \leq S(f;Q)$$

Toda soma inferior de $f$ é menor do que ou igual a qualquer soma superior.

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup_P s(f;P)$$, integral inferior

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \inf_P S(f;P)$$, integral superior

1) Para qualquer partição $P$ de $[a,b]$, tem-se

$$s(f;P) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx,$$

2) Dado $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P$ de $[a,b]$ tal que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx - \varepsilon < s(f;P)$.

1') Para toda partição $P$ de $[a,b]$, vale $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq S(f;P)$.

2') Dado $\varepsilon > 0$, existe $P$ tal que $S(f;P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$

Segue-se das definições e do corolário acima que se:

$$m \leq f(x) \leq M \quad , \forall x \in [a,b], \text{ então:}$$

$$m.(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leq M.(b-a)$$

Em particular, se $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$, então:

$$\left|\underline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| \leq K.(b-a) \quad \text{e} \quad \left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| \leq K.(b-a),$$

pois $|f(x)| \leq K$, significa que $-K \leq f(x) \leq K$.

Às vezes, por simplicidade, $\underline{\int_a^b} f$ e $\overline{\int_a^b} f$.

Teorema 2: Sejam $a<c<b$ e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada. Então:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx,$$

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^c} f(x)\,dx + \overline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

Lema 1: Seja $a<c<b$, se considerarmos apenas partições que contém o ponto $\underline{c}$, obteremos os mesmos valores para:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \text{ e } \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$$

Lema 2: Sejam $A$, $B$ conjuntos não-vazios limitados de números reais. Pondo $A+B=\{x+y; x\in A \text{ e } y\in B\}$ tem-se $\inf(A+B)=\inf A+\inf B$ e $\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

Corolário: Sejam $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitadas. Então $\sup(f+g)\leq \sup f+\sup g$ e $\inf(f+g)\geq \inf f+\inf g$.

Sejam $A$ e $B$, respectivamente os conjuntos das somas inferiores de $f|_{[a,c]}$ e $f|_{[c,b]}$. Vê-se facilmente que $A+B$ é o conjunto das somas inferiores de $f$ relativamente às partições de $[a,b]$ que contém o ponto $c$.

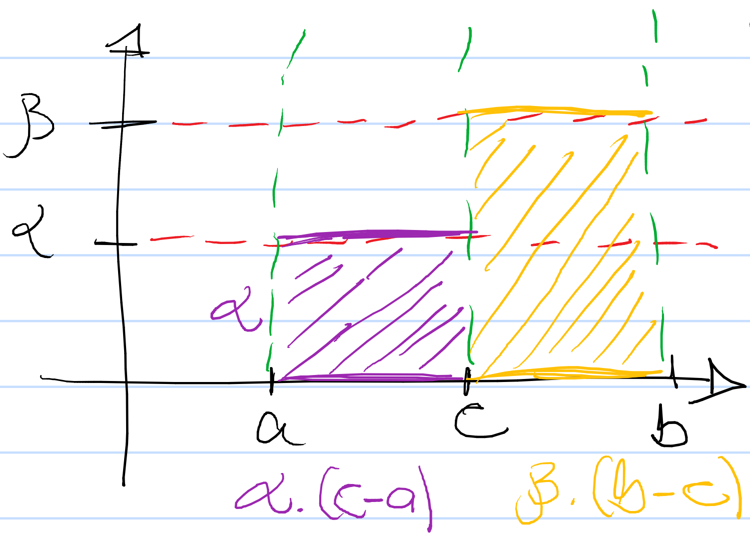
Pelos Lemas 1, 2 temos que:

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \sup(A+B) = \sup A + \sup B =$$

$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx + \underline{\int_c^b} f(x)\,dx$$

Quanto a $\int_a^c f$, é imediato que deve ser igual a $\alpha.(c-a)$, pois toda soma inferior de $f|_{[a,c]}$ tem este valor.

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \underline{\int_a^c} f(x)\,dx = \alpha.(c-a)$$



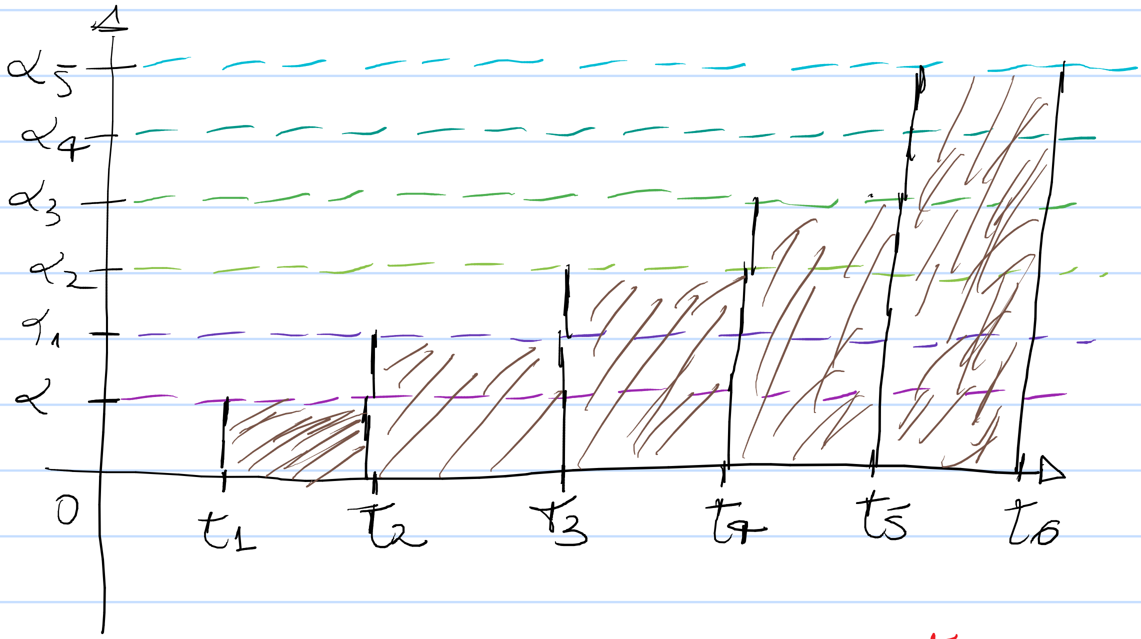

Pelo Lema 1,

$$\underline{\int_c^b} f(x)\,dx = \overline{\int_c^b} f(x)\,dx = \beta(b-c)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx + \underline{\int_b^c} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx + \overline{\int_b^c} f(x)\,dx = \alpha(c-a) + \beta(b-c)$$

<u>Função escada</u>: dada uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de $[a,b]$, uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ constante, digamos igual a $c_i$ em cada intervalo aberto $(t_{i-1}, t_i)$, chama-se função escada.

$$\int_{-a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} c_i\cdot(t_i - t_{i-1})$$




$i=1 \rightarrow c_1.(t_1 - t_0)$

$c_2.(t_2 - t_1)$

$c_3.(t_3 - t_2)$

$c_4.(t_4 - t_3)$

$c_5.(t_5 - t_4)$

$c_6.(t_6 - t_5)$

$$\int_{-t_1}^{t_6} f(x)\,dx = \int_{t_2}^{t_2} f(x)\,dx$$

$c_1.(t_1 - t_0) + c_2.(t_2 - t_1) + c_3(t_3 - t_2) + c_4(t_4 - t_3) + c_5(t_5 - t_4) + c_6(t_6 - t_5)$

<u>Lema 3</u>: Seja $A$ um conjunto limitado não vazio de números reais. Dado $c \in \mathbb{R}$, ponhamos:

$c.A = \{c.x; x \in A\}$

Então $\sup(c.A) = c.\sup A$ e $\inf(c.A) = c.\inf A$ caso $c > 0$.

Quando $c < 0$, tem-se $\sup(c.A) = c.\inf A$ e $\inf(c.A) = c.\sup A$.

<u>Teorema 3</u>: Sejam $f, g : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitadas. Então:

1) $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_a^b} g(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx \le$

$\overline{\int_a^b} [f(x)+g(x)]\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_a^b} g(x)\,dx$

2) Quando $c > 0$, $\underline{\int_a^b} c.f(x)\,dx = c.\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$

$\overline{\int_a^b} c.f(x)\,dx = c\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

No caso de $c<0$, tem-se:

$\underline{\int_a^b} c.f = c.\overline{\int_a^b} f$ e $\overline{\int_a^b} c.f = c\overline{\int_a^b} f$

No caso $c=-1$, $\underline{\int_a^b} (-f) = -\overline{\int_a^b} f$ e $\overline{\int_a^b} (-f) = -\underline{\int_a^b} f$

3) Se $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in [a,b]$, então

$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \underline{\int_a^b} g(x)\,dx$ e $\overline{\int_a^b} f \le \overline{\int_a^b} g$.

<u>Corolário</u>: Se $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$ então

$\underline{\int_a^b} f \geq 0$ e $\overline{\int_a^b} f \geq 0$.