19) ① Dada uma função $f: X \to \mathbb{R}$, suponha que para cada $\varepsilon > 0$ se possa obter uma função contínua $g: X \to \mathbb{R}$, tal que $|f(x) - g(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$. Demonstre que f é contínua.

Resposta: Para concluirmos que f é contínua, devemos mostrar que f é contínua em um ponto arbitrário qualquer $a \in X$.

Assim se tomarmos $\varepsilon > 0$, pela hipótese dada sobre f, existe uma função contínua $g: X \to \mathbb{R}$ tal que:

$$|f(x) - g(x)| < \varepsilon/3, \text{ para todo } x \in X.$$

Como g é contínua, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - a| < \delta \to |g(x) - g(a)| < \varepsilon/3, \ \forall x \in X$$

Com isto: $|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - g(a)| +$

$|g(a) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

Para todo $x \in X$ tal que $|x - a| < \delta$.

Desta forma, conclui-se que f é contínua em a.