9) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto $C_n = \{a \in \mathbb{R} \mid$ existe $a \in I$ aberto tal que se $x, y \in I$ então $|f(x) - f(y)| < 1/n\}$.

Demonstre que:

a) Cada C_n é um conjunto aberto,

b) f é contínua em $\underline{a}$ se, e somente se, $\underline{a} \in C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Temos que $x, y \in I$, então dado um $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ temos:

$$|x - y| < \delta \to |f(x) - f(y)| < \varepsilon = 1/n$$

Assim de acordo com o Teorema 14: "Seja $f: X \to \mathbb{R}$ contínua. Se X é compacto então $f(X)$ é compacto.

Temos que $f(X) \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$, assim para cada $x, y \in X$, pode-se escolher $A_{\lambda(x,y)}$ tal que $f(X) \in A_{\lambda(x,y)}$. Onde esta cobertura é aberta.

Assim cada ponto $x, y \in X$ pode ser posto em um intervalo aberto I_x, devido a continuidade de f. Tal que:

$x \in X \cap I_x \to f(x) \in A_{\lambda(x)}$ e

$y \in X \cap I_x \to f(y) \in A_{\lambda(y)}$

Obtemos, assim uma cobertura aberta, onde: dado $\delta > 0$ e $\varepsilon = 1/N$ temos:

$$|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < 1/N$$

onde cada $I_x = |x-y| \rightarrow f(I_x) = |f(x) - f(y)|$

e como $I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N$, temos que

$$f(I_x) = A_{\lambda(x_1,y_1)} \cup A_{\lambda(x_2,y_2)} \cup \dots\dots \cup A_{\lambda(x_N,y_N)}$$

onde $A_{\lambda(x,y)} = |f(x) - f(y)|$, e temos portanto que f é compacto, e C_N é a união de vários abertos.

b) Como f é compacta, temos que f é contínua em um ponto $\underline{a}$ se, $a \in C_N$.

Assim temos que pela definição de continuidade para cada $x, y \in X$:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in X, |x-a| < \delta/2 \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon/2, \text{ e}$$
$$y \in X, |y-a| < \delta/2 \rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$$

Mas como cada I_x é dado por $I_x = |x-y|$, então:

$$[|x-a| - |y-a|] < \delta \rightarrow [|f(x) - a| - |f(y) - a|] < \varepsilon$$

$$|x-y| < \delta \rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Temos que cada intervalo aberto com $a \in C_N$ é contínuo.

Mas $C_N = C_1 \cup C_2 \cup \ldots \cup C_N$, então podemos fazer uma bijeção de cada C_i, com $i = 1, \ldots, N$ com $\mathbb{N}$.

$$f_i : C_i \longrightarrow \mathbb{N}$$

Logo teremos que C_N é enumerável, ou seja:

$$C_1 \longrightarrow 1$$
$$C_2 \longrightarrow 2$$
$$\vdots$$
$$C_N \longrightarrow N$$