Lista 6

Q2. Suponha que $\forall \varepsilon > 0$ $f|_{V_\varepsilon(a)}$ seja limitada.

Como $\varepsilon' < \varepsilon \rightarrow \overline{f(V_{\varepsilon'}(a))} \subset \overline{f(V_\varepsilon(a))}$, temos uma família decrescente de conjuntos compactos $\{A_n\}_{n \geq 1}$, $A_n := \overline{f(V_{1/n}(a))}$ (note que sendo $f(V_\varepsilon(a))$ limitado, $\exists\, b_\varepsilon, c_\varepsilon$ t q $f(V_\varepsilon(a)) \subset [b_\varepsilon, c_\varepsilon]$, e portanto $\overline{f(V_\varepsilon(a))}$ é fechado e limitado).

Pelo T. de Cantor, $\bigcap_n A_n \neq \phi$; seja $M \in \bigcap_n A_n$

Sejam $L \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ e tome $x \in V_\varepsilon(a)$; então,

$|f(x) - L| \leq |f(x) - M| + |M - L| \leq \alpha_\varepsilon + |M - L|$, em que

$\alpha_\varepsilon = \max\{|\cancel{f(x)}\alpha - \beta| \mid \alpha, \beta \in \overline{f(V_\varepsilon(a))}\}$ (α_ε é o diâmetro de $\overline{f(V_\varepsilon(a))}$, o qual existe, já que $\overline{f(V_\varepsilon(a))}$ é compacto).*

Faça $\delta = \delta(\varepsilon, L) = 2(\alpha_\varepsilon + |M - L|)$

Então, $\forall L \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (x \in V_\varepsilon(a) \rightarrow |f(x) - L| < \delta)$

* Note que tanto $f(x)$ quanto M pertencem à $\overline{f(V_\varepsilon(a))}$.