T. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathbb{R}$ têm a mesma cardinalidade.

Dem. Usaremos o T. de CSB.

- Mostremos que existe $\varphi: \mathbb{R} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ injetiva.

Com efeito, como $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ e $\mathcal{F}(\mathbb{N};\{0,1\})$ têm a mesma cardinalidade, basta mostrar que existe $\psi: \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{N};\{0,1\})$ injetiva.

Dado $x \in \mathbb{R}$, escrevamos $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$, em que $\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ e $\{x\} \in (0,1)$

Escrevamos as decomposições, na base binária, de $|\lfloor x \rfloor|$ e $\{x\}$;

$$|\lfloor x \rfloor| = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$$

$$\{x\} = (\beta_1, \dots, \beta_n, \dots)$$

Agora, definamos
$$a_{3k} = \beta_k$$
$$a_{3k+1} = \begin{cases} \alpha_k, & \text{se } \lfloor x \rfloor > 0, k \leq n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$
$$a_{3k+2} = \begin{cases} \alpha_k, & \text{se } \lfloor x \rfloor < 0, k \leq n \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Temos, portanto, uma $\psi: \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{N};\{0,1\})$ injetiva

- Mostremos que existe $\xi: \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ injetiva

Mostraremos que $\exists\, \zeta : \mathcal{F}(\mathbb{N}; \{0,1\}) \to \mathbb{R}$ injetiva

Dado $x = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$, faça $\zeta(x) = \sum_{i \geq 1} a_i 2^{-i}$, se $\forall i \in \mathbb{N}\ \exists\, i_0 > i$ t.q. $a_{i_0} = 0$, e $\zeta(x) = 1 + \sum_{i \geq 1} a_i 2^{-i}$, caso contrário.

Claramente, ζ é injetiva.

Por fim, como $\psi : \mathbb{R} \to \mathcal{F}(\mathbb{N}; \{0,1\})$ e $\zeta : \mathcal{F}(\mathbb{N}; \{0,1\}) \to \mathbb{R}$ são injetivas, segue-se do T. de CSB que $\mathbb{R}$ e $\mathcal{F}(\mathbb{N}; \{0,1\})$ têm a mesma cardinalidade.

(com isso, evitamos a ~~ambiguidade~~ duplicidade $\cancel{2^{-i+1}} =$

$\cancel{2^{-i} + \sum_{j \geq i+1} 2^{-j}}$ $\forall i \in \mathbb{N}$

$2^{-i} = \sum_{j \geq i+1} 2^{-j}$)