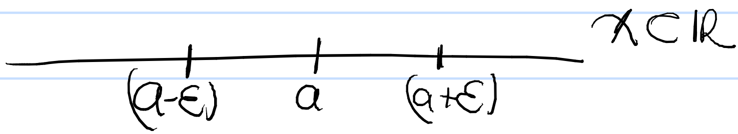
1) Demonstre que, para todo $X \subset \mathbb{R}$ tem-se $\text{int}(\text{int} X) = \text{int} X$ e conclua que $\text{int} X$ é um conjunto aberto.

$X \subset \mathbb{R}$

Definição: Diz-se que a é interior a X (ou X é uma vizinhança de a) quando há um intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq X$. O interior do conjunto X ($\text{int} X$) é o conjunto dos pontos interiores a X. O conjunto X é aberto se $\text{int} X = X$.

Se tomarmos a como um ponto interior de X, então $a \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subseteq X$.



Então para qualquer $\varepsilon > 0$ em X, temos um ponto a que pertence ao intervalo. Logo temos $\text{int}(X)$ dado por vários pontos em seu interior no intervalo.

logo $a \in int(X)$. Se tomarmos:

$int(int(X)) = int(X)$, então:

Temos que $int(int(X)) \subset int(X)$, vamos mostrar que $int(X) \subset int(int(X))$.

Dado $a \in int(X)$ existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset X$, logo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset int(X) = Y$. Assim $a \in int(Y) = int(int(X))$. Temos portanto que

$int(int(X)) = int(X)$

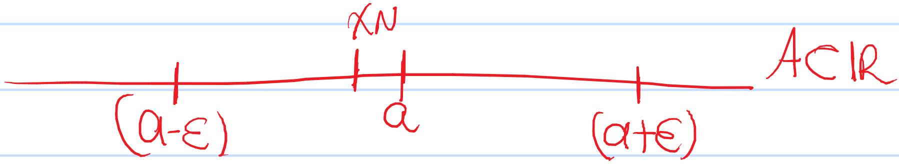
Assim temos que um conjunto $A \subset \mathbb{R}$ é aberto se $int X = X$, ou seja, todo o ponto de X é ponto interior de X.

Portanto temos que $a \in int(X)$ e $a \in int(int(X))$, logo todo ponto de $int(X)$ também é ponto de $int(int(X))$. Temos então que $int(X)$ é um conjunto aberto.

2) Demonstre que $\lim x_N = a$ se, e somente se, para todo aberto A contendo o ponto a, existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N > N_0$ implica $x_N \in A$.

Um conjunto $A \subset$ é aberto se, e somente se, cumpre a seguinte condição:
"se uma sequência (x_N) converge para um ponto $a \in A$ então $x_N \in A$ para todo N suficientemente grande."

Temos que dado um conjunto $A \subset \mathbb{R}$, para toda (x_N) com $\lim x_N = a \in A$, temos que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N > N_0$. Isto implica que x_N tende à a, e $a \in A$. Então A é aberto.



Suponhamos A aberto, com $a \in A$. Assim existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \subset A$ e temos $\lim x_N = a$, então existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N > N_0$ implica:

$x_N \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. Portanto $x_N \in A$.

Agora supondo que A não é aberto então existe (x_N) com $\lim x_N = a \in A$ e $x_N \notin A$. Ao negar a conclusão temos que a hipotese será negada também. Ou seja:

Temos que a contrapositiva é dada por: ao negar a conclusão também negamos a hipotese. Assim:
Se $x_N \notin A$, então A não é aberto

Então se A não é aberto, existe $a \in A$ tal que a não é ponto interior de A. Assim para qualquer $\varepsilon > 0$, temos que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (\mathbb{R} / A) \neq \emptyset$, então podemos tomar uma sequencia (x_N) em $\mathbb{R}/A$ que converge para $a \in A$.
Como negamos a hipotese e a conclusão, chegamos a um resultado que (x_N) não pertence a A. Assim temos que (x_N) pertence a A.

3) Demonstre que $\text{int}(A \cup B) \supset \text{int} A \cup \text{int} B$ e $\text{int}(A \cap B) \supset \text{int}(A) \cap \text{int}(B)$, quaisquer que sejam $A, B \subset \mathbb{R}$.

Teorema L:

a) Se $A_1 \subset \mathbb{R}$ e $A_2 \subset \mathbb{R}$ são abertos, então $A_1 \cup A_2$ é aberto.

b) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de conjuntos abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}$. A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

Corolário: Se $A_1, A_2, A_3, \dots, A_N$ são subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$ então $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_N$ é aberto. Em palavras: a interseção de um número de conjuntos abertos é um conjunto aberto.

Dado $X \subset \mathbb{R}$, o conjunto dos pontos $x \in X$ que são interiores a X será representado por $\text{int}(X)$ e chamado o interior do conjunto X. Temos $\text{int}(X) \subset X$.

Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ chama-se um conjunto aberto quando todos os seus pontos são interiores, isto é, quando $int(A) = A$.

1) $int(A \cup B) \supset int A \cup int B$

Temos que: $int(A) \cup int(B) \subset int(A \cup B)$

Portanto precisamos mostrar que a união dos pontos interiores estão contidas no interior da união dos conjuntos.

Seja $x \in int(A)$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in A$, logo $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in A \cup B$. Também pode-se dizer que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in int(A \cup B)$, o mesmo vale $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in B$.
Portanto vale que:

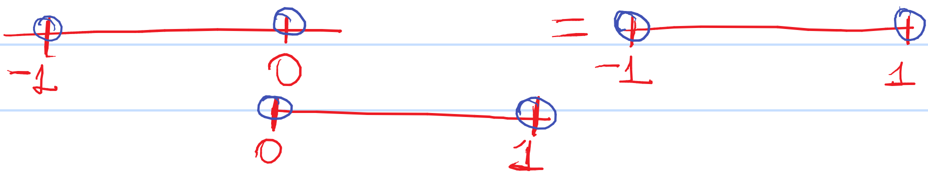
$$int(A) \cup int(B) \subset int(A \cup B)$$

Se tomarmos dois intervalos: $x = [-1, 0]$ e $y = [0, 1]$. Então,

$int(X) = (-1,0)$, são os pontos interiores do intervalo X.

$int(Y) = (0,1)$

$int(X) \cup int(Y) = (-1,0) \cup (0,1) = (-1,1) \setminus \{0\}$



$X \cup Y = (-1,0) \cup (0,1) = (-1,1)$

$int(X \cup Y) = (-1,1)$

① Dado $w \in int(X) \cup int(Y)$, então existem $(a_x, a_y, b_x, b_y) \in W$ tais que:

$(a_x, b_x) \in W \subset X$ e $(a_y, b_y) \in W \subset Y$

Então $X \cup Y \supset (a_x, b_x, a_y, b_y) \in W$, donde $w \in int(X \cup Y)$.

2) $int(A \cap B) \supset int(A) \cap int(B)$

Temos que a interseção de conjuntos abertos é aberto.

Iniciamos mostrando que:

$$int(A \cap B) \subset int(A) \cap int(B)$$

Se $x \in int(A \cap B)$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset (A \cap B)$, com isso $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset A$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset B$. O que implica que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset int A$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset int(B)$.

ou: Dado $x \in int(A \cap B)$ então existem $(a,b) \in x$ tais que $x \subset A \cap B$. Com isso, temos que $x \subset A$ e $x \subset B$, e portanto $x \in int(A) \cap int(B)$.

Agora vamos mostrar que:

$$int(A) \cap int(B) \subset int(A \cap B)$$

Dado $x \in int(A) \cap int(B)$, sabemos que tal conjunto é aberto, e como é uma interseção de abertos, logo existe $\varepsilon > 0$ tal que $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset int(A) \cap int(B)$. Com isso $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset int(A)$ e $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset int(B)$. Portanto $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \in A, B$ e consequentemente $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \subset int(A \cap B)$.

ou:

Dado $w \in int(A) \cap int(B)$, existem $(a_x, a_y, b_x, b_y) \in w$ tais que $(a_x, b_x) \subset A$ e $(a_y, b_y) \subset B$, então tomando $a = max\{a_x, a_y\}$ e $b = min\{b_x, b_y\}$, temos que: $(a, b) \subset A \cap B$, assim $(a, b) \in int(A \cap B)$