3) Demonstre a proposição a seguir:

"Uma função $f: A \to \mathbb{R}$, definida em um aberto $A \subset \mathbb{R}$, é contínua se, e somente se, para todo $c \in \mathbb{R}$, os conjuntos $E = [f < c] = \{x \in A \mid f(x) < c\}$ e $E = [f > c] = \{x \in A \mid f(x) > c\}$ forem abertos.

<u>Teorema 3</u>: Se $f, g: X \to \mathbb{R}$ são contínuas no ponto $a \in X$ e $f(a) < g(a)$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < g(x)$ para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$.

<u>Corolário</u>: Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ contínua no ponto a e $k \in \mathbb{R}$ uma constante. Se $f(a) < k$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) < k$ para todo $x \in X$ com $|x - a| < \delta$.

<u>Resposta</u>: Temos que $f: A \to \mathbb{R}$, onde A é aberto e temos que:

1) $f: A \to \mathbb{R}$ é semi-contínua superiormente em $a \in A$ quando: I_s - intervalo > 0

$$\forall c > f(a)\ \exists\ \delta > 0 \mid \forall x \in A,\ |x - a| < \delta \to f(x) < c$$

2) $f: A \to \mathbb{R}$ é semi-contínua inferiormente em $a \in A$ quando: I_i - intervalo < 0

$$\forall c < f(a)\ \exists\ \delta > 0 \mid \forall x \in A,\ |x - a| < \delta \to c < f(x)$$

Portanto a união dos dois intervalos abertos, $I_a = I_s \cup I_i$, é um conjunto aberto.

i) Sendo $f(a) < c$, tomamos $\varepsilon = c - f(a) > 0$. Pela definição de função contínua, a este ε corresponde um $\delta > 0$ tal que $x \in X$, $|x-a| < \delta \to f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$. Mas $f(a) + \varepsilon = c$. Logo todo ponto $x \in X$, cuja distância ao ponto <u>a</u> seja menor do que δ cumpre $f(x) < c$.

ii) De forma analoga é válido também se $f(a) > c$, então existe $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta \to f(x) > c$. O mesmo se dá para $f(a) \neq c$. Deve existir $\delta > 0$ tal que $x \in X$ e $|x-a| < \delta \to f(x) \neq c$.

Com efeito, se $f(a) \neq c$, tem-se $f(a) > c$ ou então $f(a) < c$.

Temos portanto que f é contínua em todos os pontos de X. Assim para cada $a \in A$ existe um intervalo aberto: I_s, I_i. Onde $I_a = I_s + I_i$ tal que:

$I_a = (a-\delta, a+\delta)$ e $x \in I_a \cap X \to f(x) > c$ e $x \in I_a \cap X \to f(x) < c$.

Isto significa que $a \in I_a \cap X \subset A$ para todo $a \in A$.

Seja $M = \bigcup_{a \in A} I_a$, então M é um conjunto aberto e $a \in M \cap X \subset A$ para todo $a \in A$, ou seja, $A \subset M \cap X \subset A$, portanto $A = M \cap X$.

Assim, quando X é aberto, o conjunto A é aberto, como interseção $A = U \cap X$ de dois abertos.