9) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, que se anula fora de um conjunto de medida nula. Prove que sua integral é igual a zero.

- Se f é contínua, então f é integrável.
- Se f é monótona, então f é integrável.
- X tem <u>medida nula</u> quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura enumerável $X \subseteq \bigcup I_k$ por intervalos abertos I_k tal que:

$$\sum |I_k| < \varepsilon.$$

- f é integrável se, e somente se, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.

<u>Resposta</u>: Consideremos $f:[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$ se x é irracional e $f(x) = 1$ se x é racional. Observa-se que f se anula fora de um conjunto de medida nula, mas f não é integrável, pois qualquer que seja a partição P do intervalo $[0,1]$, teremos:

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum_{i=1}^{N} M_i(t_i - t_{i-1}) - \sum_{i=1}^{N} m_i(t_i - t_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^{N} (t_i - t_{i-1}) - 0 = 1$$

Como $M_i = 1$ e $m_i = 0$ para todo $i = 1, \dots, N$.

Nestas condições, devemos provar que se f é integrável, então $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

De fato, por f ser integrável, temos que $|f|$ também é integrável. Além disso, como f se anula fora de um conjunto de medida nula, para qualquer que seja a partição:

$$P = \{a = t_0, \dots\dots, t_N = b\}$$

Tem-se que $m_i = \inf\{|f(x)|,\ x \in [t_{N-1}, t_N]\} = 0$

Logo: $\int_a^b |f(x)|\,dx = \underline{\int_a^b} |f(x)|\,dx = 0$

Dessa forma, temos que:

$$0 \leq \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < \int_a^b |f(x)|\,dx = 0 \rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = 0.$$

$\blacksquare$

<u>Definição</u>: $X \subset \mathbb{R}$ tem medida nula se $\forall \varepsilon > 0$ existem intervalos abertos (a_N, b_N) e $a_N \leq b_N$ com $N \in \mathbb{N}$ tal que $X \subset \bigcup_{N=1}^{\infty} (a_N, b_N)$ e $\sum_{N=1}^{\infty} (b_N - a_N) < \varepsilon$.

- Se X tem um único ponto, então tem medida nula.

. Se $a \in \mathbb{R}$, $\{a\}$ tem medida nula: $\forall \varepsilon > 0$, $(a_1, b_1) = \left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $(a_N, b_N) = (0, 0) = \emptyset$ $\forall N \geq 2$.

Proposição: Se $X_N \subset \mathbb{R}$ tem medida nula, $\forall N \in \mathbb{N}$ então:

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} X_N$$

tem medida nula. Em particular, todo o conjunto enumerável tem medida nula.

Teorema: $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ é limitada e integrável, se e somente se, $D(f)$ dos pontos de descontinuidade de f tem medida nula.