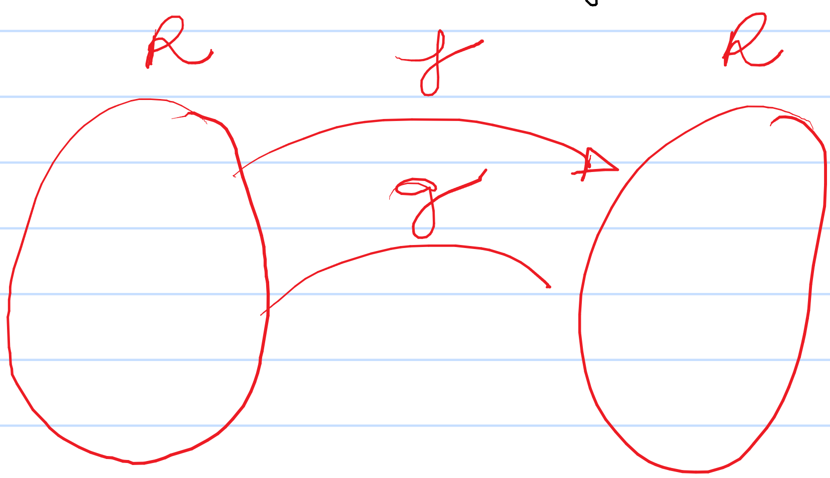
8) Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:
$f(0) = 0$ e $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, se $x \neq 0$.
Mostre que para todo $c \in [-1, 1]$, existe uma sequência de pontos $x_n \neq 0$ tais que $\lim x_n = 0$ e $\lim f(x_n) = c$

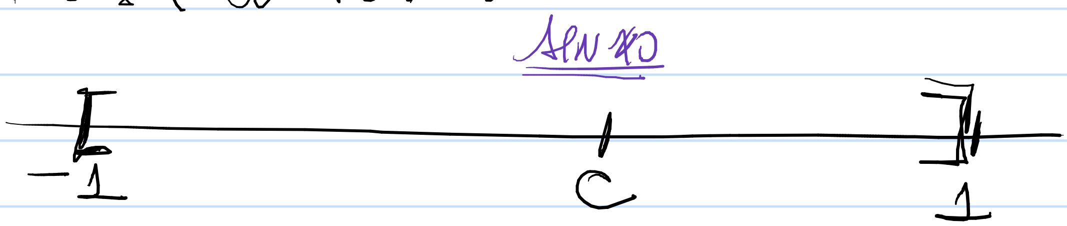


$f(0) = 0$
$f: \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), x \neq 0$
$c \in [-1, 1]$

A função $\operatorname{sen} x$, oscila no $[-1, 1]$, já $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$, oscila em $[-1, 1]$, então:

$$\limsup_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 1 \quad \text{e} \quad \liminf_{x \to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = -1$$

Resposta: Dado o intervalo $[-1, 1]$, seja $c \in$ a este intervalo:



Dado um $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que o $\operatorname{sen} x_0 = c$, define-se $x_n = \frac{1}{x_0 + 2n\pi}$. Assim, temos que (x_n) é uma sequência de pontos $x_n \neq 0$

tais que $\lim x_n = 0$ e $\lim f(x_n) =$

$$\lim \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x_n}\right) = \lim \operatorname{sen}\left(x_0 + 2\cancel{n}\pi\right) =$$

0

$\lim \operatorname{sen} x_0 = C.$