16) Prove que o conjunto A dos valores de aderência de uma sequência (x_n) é fechado. Se a sequência for limitada, A é compacto, logo existem l, L, respectivamente o menor e o maior valores de aderência da sequência limitada (x_n).

- Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto quando for limitado e fechado.

- X é compacto $\Leftrightarrow$ toda sequência (x_n) com $x_n \in X$ possui uma subsequência (y_n) com $\lim y_n \in X$.

- Se $X_1 \supseteq X_2 \supseteq \dots \supseteq X_n \supseteq \dots$ é uma sequência de compactos não-vazios, então: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} X_i \neq \emptyset$.

- K é compacto se, e somente se, para toda sequência (x_n) com $x_n \in K$, $\forall n \in \mathbb{N}$, existem uma

(x_{n_k}) de (x_n) e um ponto $a \in \mathbb{R}$ com $\lim x_k = a$.

- a é aderente a X quando há sequência $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.
- a é aderente a X, se e somente se, toda vizinhança de a intersecta X.

① Dada um conjunto A dos valores de aderência de uma sequência (x_n), então $a \in A$ e $\lim x_n = a$. Assim a é aderente a A e toda vizinhança de a intersecta X.

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset \rightarrow \bar{x} \cap X \neq \emptyset$$

Então $\bar{A} \cap A \neq \emptyset$, como A é o conjuntos de todos os pontos de aderência temos $\bar{A} = A$ então A é fechado.

① Dado que (x_n) é uma sequência limitada, então temos que:

$(x_n) = \{l, \ldots\ldots, L\}$, temos que $\inf x_n = l$ e $\sup x_n = L$.

Assim dado A compacto e (x_N) uma sequência limitada com $x_N \in A$, $\forall N \in \mathbb{N}$. Como toda sequência limitada possui uma subsequência convergente, então como A é limitado ou seja um fechado limitado.

Assim temos uma sequência (x_{N_A}) contida em (x_N), onde (x_{N_A}) é uma subsequência convergente de (x_N).

Como A é fechado, então o $\lim x_{N_A} = a$. Ou seja, o limite deve estar em A.

Agora tomando A como não fechado, então $a \in \bar{A} / A$ e existe uma (x_N) sequência com $x_N \in A$, $\forall N \in \mathbb{N}$ tal que $\lim x_N = a \notin A$. Dada qualquer subsequência (x_{N_A}) de (x_N), temos $\lim x_{N_A} = a \notin A$. Temos então um absurdo.

Também se A não é limitada, $\forall N \in \mathbb{N}$, existe $x_N \in A \mid [-L, L]$. Temos que $|x_N| > N$, logo $\lim |x_N| = +\infty$, e para toda subsequência x_{N_A} de A temos que $\lim |x_{N_A}| = +\infty$. Portanto (x_{N_A}) não converge, temos um absurdo.

Outra forma:

O conjunto A dos valores de aderência de uma sequência (x_N) é fechado.

Temos que mostrar que $A = \bar{A}$, já sabemos que vale $A \subset \bar{A}$, falta mostrar que $\bar{A} \subset A$. Se $a \in \bar{A}$ então $a \in A$, vamos usar a contrapositiva que é se $a \notin A$ então $a \notin \bar{A}$. $(p \to q, \bar{q} \to \bar{p})$

Se $a \notin A$ então existe $\varepsilon > 0$ tal que $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ não possui elementos de (x_N), com isso não pode valer $a \in \bar{A}$.

Se uma sequência (x_n) for limitada então seu conjunto de pontos de aderência é compacto.

Como A é fechado, então se (x_n) for limitada então A é limitado, sendo limitado e fechado é compacto. Nessas condições A possui elementos mínimos e elemento máximo, l e L respectivamente. O mínimo A é o inf x_n e o elemento máximo é o sup x_n.

lim inf x_n = mínimo

lim sup x_n = máximo