12) Seja $p:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, com $p(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Prove que se $\int_a^b p(x)\,dx = 0$, então o conjunto dos pontos $x \in [a,b]$ tais que $p(x) = 0$ é denso em $[a,b]$. Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é qualquer função integrável que se anula num conjunto denso de pontos em $[a,b]$, prove a $\int_a^b f(x)\,dx = 0$.

TVM para integrais: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e $p:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrável com $p(x) \geq 0$. Então existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(c)\int_a^b p(x)\,dx$$

Em particular, existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(c).(b-a)$$

- Teorema 12: Fórmulas de valor médio para integrais) São dadas as funções $f, p:[a,b] \to \mathbb{R}$, com $f$ contínua. Então:

A- Existe $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

B- Se $p$ é integrável e não muda de sinal, existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(c)\int_a^b p(x)\,dx$.

c) Se $p$ é positiva, decrescente, com derivada integrável, existe $c \in [a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = p(a) \cdot \int_a^c f(x)\,dx$$

Resposta: Devemos mostrar que $\int_a^b p(x)\,dx = 0$, então o conjunto dos pontos $x \in [a,b]$ tais que $p(x) = 0$ é denso em $[a,b]$.

Pelo teorema 12 temos $f, p : [a,b] \to \mathbb{R}$ com $f$ contínua, temos que $p$ é integrável e não muda de sinal, e existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)\,p(x)\,dx = f(c)\int_a^b p(x)\,dx$$

Temos que a integral de $f$ é constante e igual a $f(c)$ para um $c \in [a,b]$. Então dado $x \in [a,b]$, temos: $m \leq f(x) \leq M$ e

$m\,p(x) \leq f(x)\,p(x) \leq M\,p(x)$, logo:

$$m\int_a^b p(x) \leq f(c)\int_a^b p(x)\,dx \leq M\int_a^b p(x)\,dx$$

Temos que $m \leq f(c) \leq M$

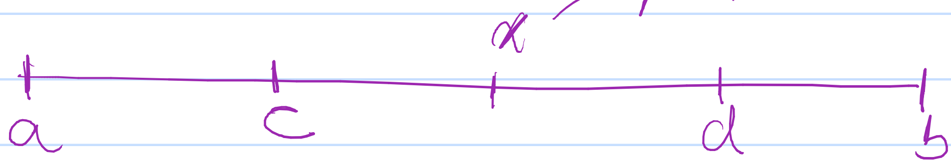
# Apoio Professor

12. $p:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável, $p(x)\geq 0\ \forall x\in[a,b]$

Mostraremos que se $\int_a^b p(x)\,dx=0$, então o conjunto de pontos $x\in[a,b]$ tal que $p(x)=0$ é denso em $[a,b]$.

Demonstraremos a contrapositiva. Assuma que $\exists\,[c,d]\subset[a,b]$, $d>c$ tal que $p(x)>0$ e $\forall x\in[c,d]$.

$$\to p(x)>0 \to \int_a^b p(x)\,dx>0$$



Mostraremos que $\int_c^d p(x)>0$, e portanto a $\int_a^b p(x)\,dx>0$

Naturalmente, $p|_{[c,d]}$ é integrável, e portanto seu conjunto de pontos de descontinuidade tem medida nula, em particular $\exists\,[e,f]\subset[c,d]$ tal que $p|_{[e,f]}>0$ e $p|_{[e,f]}$ é contínua.
Se tal subconjunto de $[c,d]$ não existisse então o conjunto de pontos de descontinuidade de $p|_{[c,d]}$ seria denso em $[c,d]$. Um absurdo.

Pelo teorema de Weierstrass, $\exists\, g\in[e,f]$ tal que: $0<p(g)\leq p(x)\ \forall x\in[e,f]$. Em particular:

$$\int_c^d p \geq \int_e^f p \geq p(g)(f-e)>0$$

Isso nos mostra que $\int_a^b p > 0$.

Dada $f:[a,b] \to \mathbb{R}$, defina $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$ e $f_-(x) = \max\{0, -f(x)\}$, assim:

$$f_\pm \geq 0 \text{ e } \forall x \in [a,b],\ f(x) = f_+(x) - f_-(x).$$

Mostraremos que $f_\pm$ são integráveis.

Com efeito, dado que $f$ é integrável, $\forall \varepsilon > 0\ \exists p$ tal que:

$$S(f,p) - s(f,p) = \sum w_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$$

com $w_i = M_i - m_i$.

Sejam $\tilde{M}_i = \sup f_+|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $\tilde{m}_i = \inf f_+|_{[t_{i-1}, t_i]}$

Mostraremos que $\tilde{w}_i \leq w_i$

Temos que $\tilde{w}_i = w_i$ se $m_i \geq 0$.

Se $M_i \leq 0$, então $\tilde{M}_i = \tilde{m}_i = 0 \Rightarrow \tilde{w}_i \leq w_i$

Se $m_i \leq 0 \leq M_i$, então $\tilde{M}_i = M_i$ e $\tilde{m}_i = 0$, donde se segue que $\tilde{w}_i \leq w_i$.

Assim:

$$S(f_+, P) - s(f_+, P) = \sum \tilde{w}_i(t_i - t_{i-1}) \leq \sum w_i(t_i - t_{i-1}) < \varepsilon,$$

e $f_+$ é integrável.

A demonstração de que $f-$ é integrável é inteiramente análoga.

Por fim aplicando-se a 1ª parte do exercício a $f+$ e $f-$, demonstra-se o respectivo para $f$.