1) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Demonstre que:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Resposta: Pelo Corolário do teorema 1, temos:

Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para quaisquer partições P, Q de $[a,b]$, tem-se $s(f;P) \leq S(f;Q)$.

Assim toda soma inferior de f é menor do que ou igual a qualquer soma superior.

Se $m = \inf$ e $M =$ supremo de f em $[a,b]$, temos que:

$$m.(b-a) \leq s(f;P) \leq S(f;P) \leq M.(b-a)$$

Para toda partição do intervalo $[a,b]$.

Assim:

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M.(b-a)$$

Ao tomarmos, $|f(x)| \leq k$ para todo $x \in [a,b]$, então:

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)dx\right| \leq k(b-a)$$, e como $|f(x)| \leq k$,

temos:

$$\overline{\int_a^b} |f(x)|dx \leq \overline{\int_a^b} k\,dx = k(b-a)$$

Então:

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| \leq k(b-a) \geq \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx,$$

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| \leq \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx \leq k(b-a)$$

Então: $\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| \geq 0$, e $\overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx \geq 0$

dado que $|f(x)| \leq k$ e $k \geq 0$. Portanto

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| = \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx \leq \overline{\int_a^b} k\,dx = k\overline{\int_a^b} dx =$$

$k(b-a)$. Então:

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| = \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx.$$