14) Seja $f: I \to \mathbb{R}$ e C^∞. Suponha que exista $K > 0$ tal que $|f^{(N)}(x)| \leq K$ para todo $x \in I$ e todo $N \in \mathbb{N}$. Prove que para cada $x_0, x \in I$ quaisquer vale:

$$f(x) = \sum_{N \geq 0} \frac{f^{(N)}(x_0)}{N!} (x - x_0)^N$$

Resposta: Pela função ser C^∞ podemos escrever o polinômio de Taylor de ordem N.

• Seja I um intervalo. Uma função $f: I \to \mathbb{R}$ é de classe C^N quando sua N-ésima derivada $f^{(N)}: I \to \mathbb{R}$ é contínua. Se f é de classe C^N para todo $N \in \mathbb{N}$, diz-se que f é de classe C^∞.

Então: $$f(x) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k}{k!} + r_N(h)$$

Como: $$r_N(h) = \frac{f^{(N+1)}(\gamma)(x - x_0)^{N+1}}{(N+1)!}$$

Tomamos o valor absoluto:

$$|r_N(h)| = \frac{|f^{(N+1)}(\gamma)| |(x - x_0)^{N+1}|}{(N+1)!} \leq \frac{K |(x - x_0)^{N+1}|}{(N+1)!}$$

Com x, x_0, K fixos podemos aplicar o teorema do confronto, sendo que os limites tenderem a zero, concluímos daí que $\lim r_N(h) = 0$. Logo a série de Taylor converge para a função.