Décima lista de exercícios de Análise Real: Sequências e Séries de funções

1. Mostre que a sequência de funções $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = x^n/(1 + x^n)$, converge pontualmente. Determine a função limite e mostre que a convergência não é uniforme.

2. Demonstre que a série $\sum_{n\geq 1} x^n(1 - x^n)$ converge quando $x \in (-1, 1]$, e que a convergência é uniforme em todos os intervalos do tipo $[-1 + \delta, 1 - \delta]$, com $0 < \delta < 1/2$.

3. Demonstre o critério de Cauchy: a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $m, n > n_0$, então $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$.

4. Se a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é tal que $f_1 \geq f_2 \geq \cdots \geq f_n \geq \cdots$ e $f_n \to 0$ uniformemente em X, demonstre que a série $\sum(-1)^n f_n$ converge uniformemente em X.

5. Se $f_n \to f$ e $g_n \to g$ uniformemente no conjunto X, demonstre que:

   (a) $f_n + g_n \to f + g$ uniformemente em X;

   (b) se f e g forem limitadas, então $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ uniformemente em X;

   (c) se existir $c > 0$ tal que $|g(x) \geq c$ para todo $x \in X$, então $1/g_n \to 1/g$ uniformemente em X.

6. Mostre que a sequência de funções $g_n(x) = x + x^n/n$ converge uniformemente em $[0, 1]$ para uma função derivável g e que a sequência das derivadas g_n' converge pontualmente em $[0, 1]$ mas $g' \neq \lim g_n'$.

7. Sejam X compacto, U aberto e $f : X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(X) \subset U$. Se uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para f, demonstre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$, então $f_n(X) \subset U$.

8. Se uma sequência de funções contínuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente em um conjunto denso $D \subset X$, prove que (f_n) converge uniformemente em X.

9. Dada uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$, suponha que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c < 1$ para todo $x \in X$ e todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Demonstre que $\sum |f_n(x)|$ e $\sum f_n(x)$ convergem uniformemente em X.

10. Se $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L$, prove que as séries de potências

$$\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n} \qquad \sum_{n\geq 0} a_n x^{2n+1}$$

têm ambas raio de convergência igual a $1/\sqrt{L}$.

11. Seja $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ uma série de potências cujos coeficientes são determinados pelas igualdades $a_0 = a_1 = 1$ e $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$. Mostre que o raio de convergência desta série é igual a $(-1 + \sqrt{5})/2$.

12. Prove que a função

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} (-1)^n \frac{1}{(n!)^2} (\frac{x}{2})^{2n}$$

está bem definida para todo $x \in \mathbb{R}$ e que $f'' + \frac{f'}{x} + f = 0$ para todo $x \neq 0$.