Integrais Impróprias

Até o momento consideramos somente funções limitadas e definida em um intervalo compacto, contudo se dada $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, e supomos que f é integrável em $[c,b]$ e para qualquer $c\in(a,b]$.

Definimos: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$ (se o limite existir)

Ex.: $0<\alpha<1 \to \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to 0^+}\int_c^1 \frac{dx}{x^\alpha} =$

$\displaystyle\lim_{c\to 0^+}\int_c^1 x^{-\alpha}\,dx = \lim_{c\to 0^+}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_c^1 = \lim_{c\to 0^+}\frac{1-c^{1-\alpha}}{1-\alpha} =$

$\dfrac{1}{1-\alpha}$, Temos uma função ilimitada mas é integrável.

Definimos analogamente: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ para $f:[a,b)\to\mathbb{R}$

Se $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$, integrável em $[a,c]$ $\forall c\geq a$,

$\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_a^c f(x)\,dx$

Ex: $\alpha>1$, $\displaystyle\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} = \lim_{c\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\Big|_1^c = \frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{\alpha-1}$,

Temos: $\displaystyle\int_{-\infty}^b f(x)\,dx \to$ análogo.

$\int_a^b f(x)dx$ ($b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$) é absolutamente convergente se: $\int_a^b |f(x)|\,dx$ converge, se e somente se, $\left\{\int_a^c f(x)dx,\ c<b\right\}$ é limitada.

Função zeta: $\zeta(\alpha) = \sum_{N=1}^{\infty} \frac{1}{N^\alpha}$, $\zeta(\alpha) - \frac{1}{\alpha-1} =$

$\sum_{N=1}^{\infty} \int_N^{N+1} \left(\frac{1}{N^\alpha} - \frac{1}{x^N}\right) dx$, com $\alpha . N^{-\alpha-1}$

se $\sum N^{-\alpha-1}$, converge se $\alpha>0$

Temos que: $\sum_{N=1}^{\infty} \int_N^{N+1} \left(\frac{1}{N^\alpha} - \frac{1}{x^N}\right) dx$, converge se $\alpha>0$

Temos que se a $\int_a^b f$, for absolutamente convergente ela é convergente.

Se a função é sempre positiva, ao aumentar o intervalo de integração o valor da função também aumenta. E com isso converge se e somente se é limitada, ai terá limite.

$f = f^+ - f^-$, $f^+ = \max\{f, 0\}$, $f^- = \max\{-f, 0\}$
≥ 0 ≥ 0

$|f| = f^+ + f^-$, então:

$\int |f|$ converge $\to$ $\int f^+$, $\int f^-$ também converge, porque são limitadas

Teorema: $f:[1,+\infty) \to [0,+\infty)$ monótona não-crescente $\int_1^{\infty} f(x)dx$ converge $\leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ converge.

$$\lim_{N\to\infty} \int_1^N f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_k^{k+1} f(x)dx$$

Onde: $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, $\forall x [k, k+1]$

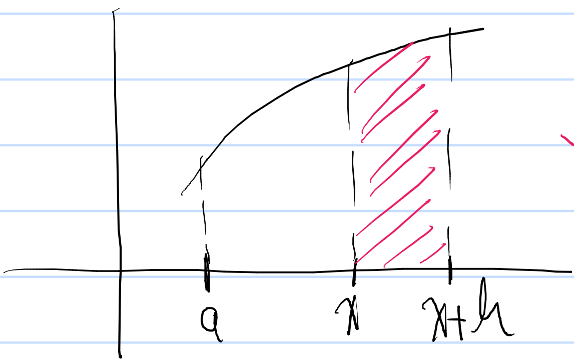
$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k+1) \leq \int_1^{\infty} f(x)dx \leq \sum_{k=1}^{\infty} f(k)$$

Pelo Teorema do confronto, se os extremos convergem a integral converge.

Se a integral converge, então $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ converge

Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, então a função $\varphi:[a,b] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua.

$\varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt =$



$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$, para $a < c < b$

A B C

$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$

$c \in [a,b]$, $|\varphi(c+h) - \varphi(c)| = \left|\int_c^{c+h} f(t)dt\right| \leq \int_c^{c+h} |f(t)|dt$

$\int_c^{c+h} |f(t)| dt \leq |h| . k$, $k = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$

Função lipschitziana

• Se a função integrável $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $c \in [a,b]$ então:

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \int_a^x f(t) dt$ é derivável no ponto c, e $\varphi'(c) = f(c)$.

$$\frac{\varphi(c+h) - \varphi(c)}{h} - f(c) = \frac{1}{h} \int_c^{c+h} [f(t) - f(c)] dt$$

$$\text{E: } \int_a^{c+h} f(t) dt - \int_a^c f(t) dt = \int_c^{c+h} f(t) dt$$