14) Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ limitadas numa vizinhança do ponto $\underline{a} \in X'$. Mostre que
$$\limsup_{x \to a} (f+g) \leq \limsup_{x \to a} f + \limsup_{x \to a} g$$
e que $\limsup_{x \to a} (-f) = -\liminf_{x \to a} f$.

Teorema 12: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função monótona limitada, $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$. Existem os limites laterais:

$$L = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad e \quad M = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Teorema 14: Seja $f$ limitada numa vizinhança de $\underline{a}$. Então:

$$\limsup_{x \to a} f(x) = \lim_{\delta \to 0} L_\delta \quad e \quad \liminf_{x \to a} f(x) = \lim l_\delta$$

Teorema 15: Seja $f$ limitada numa vizinhança de $\underline{a}$. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$x \in X, \; 0 < |x-a| < \delta \to l - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon,$$

onde $l = \liminf_{x \to a} f(x)$ e $L = \limsup_{x \to a} f(x)$

Corolário: Seja $f$ limitada numa vizinhança de $\underline{a}$. Então existe $\lim_{x \to a} f(x)$ se, e somente se, $f$ possui um único valor de aderência no ponto $\underline{a}$.

- Um número real $c$ chama-se um valor de aderência de $f$ no ponto $a$, quando existe uma sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ e $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$.
- $\bar{X}$ é um conjunto de pontos de aderência.

Obs: Temos que:

Função limitada: Seja $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ é dita limitada quando o conjunto $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$, se $f(A)$ é limitada superiormente então dizemos que $f$ é limitada superiormente e caso $f(A)$ seja limitada inferiormente dizemos que $A$ é limitada inferiormente.

Seja uma função limitada $f: V \to \mathbb{R}$

Então: $\sup f = \sup f(V) = \sup\{f(x) \mid x \in V\}$

$\inf f = \inf f(V) = \inf\{f(x) \mid x \in V\}$

A função soma de duas funções limitadas é limitada.

Vale $|f(x)| \leq M_1$ e $|g(x)| \leq M_2 \ \forall x \in A$, então:

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq M_1 + M_2 = M$$

Portanto a função soma $f+g$ de duas funções limitadas é também uma função limitada.

Sejam $f, g : V \to \mathbb{R}$ funções limitadas e $c \in \mathbb{R}$.

$$\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$$

Sejam $A = \{f(x) \mid x \in V\}$, $B = \{g(y) \mid y \in V\}$, $C = \{g(x) + f(x) \mid x \in V\}$

Temos que $C \subseteq A+B$, pois basta tomar $x = y$ nos conjuntos, logo:

$$\sup(A+B) \geq \sup(f+g)$$

$$\sup(A) + \sup(B) = \sup f + \sup g \geq \sup(f+g)$$

- $\inf(f+g) \geq \inf(f) + \inf(g)$

De $C \subset A+B$, temos que o ínfimo:

$$\inf(A+B) = \inf(A) + \inf(B) = \inf(f) + \inf(g) \leq \inf(C) = \inf(f+g)$$

Exemplo: Sejam $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = x$ e $g(x) = -x$

- Vale que: $\sup f = 1$, $\sup g = 0$, então: $f+g = 0$,

logo $\sup(f+g) = 0$, vale então que:

$$\sup f + \sup g = 1 > \sup(f+g) = 0$$

- Temos ainda que:

$\inf f = 0$, $\inf g = -1$, e $f+g = 0$, $\inf(f+g) = 0$,

logo: $\inf f + \inf g = -1 < \inf(f+g) = 0$

- Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções limitadas, então $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ é limitada.

Vale que $|f(x)| < M_1$ e $|g(x)| < M_2$, então $|f(x) g(x)| < M_1 M_2 = M$, $\forall x \in A$, portanto $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ é limitada.

- Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}^+$ limitadas superiormente, então: $\sup(f \cdot g) \leq \sup(f) \cdot \sup(g)$

Sejam $C = \{g(x) \cdot f(x) \mid x \in A\}$, $B = \{g(y) \mid y \in A\}$ e $A = \{f(x) \mid x \in A\}$. Vale que $C \subset A \cdot B$ para ver isso basta tomar $x = y$ nas definições, com isso:

$$\sup(A \cdot B) \geq \sup C$$

$$\sup(A) \cdot \sup(B) \geq \sup C$$

$$\sup(f) \cdot \sup(g) \geq \sup(f \cdot g)$$

- Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}^+$ limitadas inferiormente, então:

$$\inf(f \cdot g) \geq \inf(f) \cdot \inf(g)$$

- Sejam $f : A \to \mathbb{R}^+$ limitada superiormente então $\sup(f^2) = (\sup f)^2$.

- Seja $f : A \to \mathbb{R}^+$ então $\inf(f^2) = (\inf f)^2$

Resposta: Temos que a soma e o produto de funções limitadas são também funções limitadas.

Isto é: $f+g$ e $f \cdot g : X \to \mathbb{R}$ são funções limitadas. Assim para funções limitadas $f$ e $g : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$, devemos provar que:

$$\limsup_{x \to a} (f+g)(x) \leq \limsup_{x \to a} f(x) + \limsup_{x \to a} g(x)$$

$$\liminf_{x\to a} (f+g)(x) \geq \liminf_{x\to a} f(x) + \liminf_{x\to a} g(x)$$

$$\limsup_{x\to a} (-f(x)) = -\liminf_{x\to a} f(x)$$

Além disso, mostraremos que se $f$ e $g$ forem funções não negativas. Isto é, $f(x)$ e $g(x) \subset \mathbb{R}_+$, então;

$$\limsup_{x\to a} (f\cdot g)(x) \leq \left(\limsup_{x\to a} f(x)\right)\cdot\left(\limsup_{x\to a} g(x)\right)$$

e

$$\liminf_{x\to a} (f\cdot g)(x) \geq \left(\liminf_{x\to a} f(x)\right)\left(\liminf_{x\to a} g(x)\right)$$

Agora, se $f$ ou $g: X \to \mathbb{R}$ não forem não negativas, podemos ter que:

$$\limsup_{x\to a} (f\cdot g)(x) > \left(\limsup_{x\to a} f(x)\right)\left(\limsup_{x\to a} g(x)\right)$$

De fato, definindo $f$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Temos que:

$$\lim_{x\to 0} \sup (f\cdot g)(x) = 1 > 0 = 0 \cdot 0 =$$

$$\left(\lim_{x\to 0} \sup f(x)\right) \cdot \left(\lim_{x\to 0} \sup g(x)\right)$$

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ é uma sequência em $X$ então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ e $(g(x_n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ são sequências em $\overline{f(X)}$ e $\overline{g(X)}$, respectivamente.

Como $\overline{f(X)}$ e $\overline{g(X)}$ são compactos (pois são fechos de conjuntos limitados), então existem subsequências de $(f(x_n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ e $(g(x_n))_{n\in\mathbb{Z}_+}$ que são convergentes.

Em particular, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{n\in\mathbb{Z}_+}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tal que $(f(x_n))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ e $(g(x_{n_k}))_{k\in\mathbb{Z}_+}$ são convergentes.

Como:

- $\lim_{x\to a} \sup (f+g)(x) \leq \lim_{x\to a} \sup f(x) + \lim_{x\to a} \sup g(x)$, e

$\lim_{x\to a} \inf (f+g)(x) \geq \lim_{x\to a} \inf f(x) + \lim_{x\to a} \inf g(x)$

Sejam $S \in \mathbb{R}$ um valor de aderência da função $(f+g)$ no ponto $\underline{a}$ e $(x_N)_{N \in \mathbb{Z}_+}$ uma sequência em $X$ tal que:

$$\lim_{N \to \infty} x_N = a \quad e \quad \lim_{N \to +\infty} (f+g)(x_N) = S$$

Devemos mostrar que:

$$\liminf_{x \to a} f(x) + \liminf_{x \to a} g(x) \leq S \leq \limsup_{x \to a} f(x) + \limsup_{x \to a} g(x)$$

E, como $S \in \mathbb{R}$ um valor de aderência arbitrário da função $(f+g)$ no ponto $\underline{a}$,

Conclui-se que:

$$\limsup_{x \to a} (f+g)(x) \leq \limsup_{x \to a} f(x) + \limsup_{x \to a} g(x)$$

e,

$$\liminf_{x \to a} (f+g)(x) \geq \liminf_{x \to a} f(x) + \liminf_{x \to a} g(x)$$

Como $(x_N)_{N \in \mathbb{Z}_+}$ é uma sequência em $X$, segue que existe uma subsequência $(x_{N_K})_{K \in \mathbb{Z}_+}$ de $(x_N)_{N \in \mathbb{Z}_+}$ tal que $(f(x_{N_K}))_{K \in \mathbb{Z}_+}$ e $(g(x_{N_K}))_{K \in \mathbb{Z}_+}$ são convergentes.

Segue que $\lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k})$ e $\lim_{k\to+\infty} g(x_{n_k})$ são pontos de aderência de $f$ e $g$, respectivamente, no ponto $\underline{a} = \lim_{k\to+\infty} x_{n_k}$.

Logo:

$$S = \lim_{k\to+\infty} (f+g)(x_{n_k})$$
$$= \lim_{k\to+\infty} f(x_{n_k}) + \lim_{k\to+\infty} g(x_{n_k})$$

$$\leq \limsup_{x\to a} f(x) + \limsup_{x\to a} g(x)$$

Analogamente, tem-se:

$$S \geq \liminf_{x\to a} f(x) + \liminf_{x\to a} g(x)$$

- $\limsup_{x\to a} (-f(x)) = -\liminf_{x\to a} f(x)$

Sejam $VA(f:a)$ e $VA(-f;a)$ os conjuntos dos valores de aderência no ponto $a$ das funções $f$ e $-f$. Dado $L \in VA(f;a)$, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ tal que:

$$a = \lim_{n\to+\infty} x_n \text{ e } L = \lim_{n\to+\infty} f(x_n)$$

Assim: $-L = -\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} (-f)(x_n) \in VA(-f;a)$

Portanto, como $L \in VA(f;a)$ é arbitrário, concluímos que $-VA(f;a) \subset VA(-f;a)$.

Analogamente, prova-se que:

$$-VA(f;a) \supset VA(f;a)$$

E, com isso, concluímos que:

$$-VA(f;a) = VA(f;a)$$

Portanto,

$$\limsup_{x \to a} (-f(x)) = \sup VA(-f;a)$$
$$= \sup(-VA(f;a))$$
$$= -\inf VA(f;a)$$
$$= -\liminf_{x \to a} f(x)$$

- $\limsup_{x \to 0} (f \cdot g)(x) \leq (\limsup_{x \to 0} f(x)) \cdot (\limsup_{x \to 0} g(x))$

e $\liminf_{x \to a} (f \cdot g)(x) \geq (\liminf_{x \to a} f(x)) \cdot (\liminf_{x \to a} g(x))$

se $f, g \geq 0$.

Seja $m \in \mathbb{R}$ um valor de aderência da função $f \cdot g$ no ponto $\underline{a}$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ uma sequência em $X$ tal que:

$$\lim_{n \to +\infty} x_n = a \text{ e } \lim_{n \to \infty} (f \cdot g)(x_n) = S$$

Mostraremos que:

$$\left(\liminf_{x \to a} f(x)\right)\left(\liminf_{x \to a} g(x)\right) \leq P \leq$$

$$\left(\limsup_{x \to a} f(x)\right)\left(\limsup_{x \to a} g(x)\right)$$

E, como $P \in \mathbb{R}$ um valor de aderência arbitrário da função $f \cdot g$ no ponto $a$, conclui-se que:

$$\limsup_{x \to a} (f \cdot g)(x) \leq \left(\limsup_{x \to a} f(x)\right) \cdot \left(\limsup_{x \to a} g(x)\right)$$

$$\liminf_{x \to a} (f \cdot g)(x) \geq \left(\liminf_{x \to a} f(x)\right) \cdot \left(\liminf_{x \to a} g(x)\right)$$

Como $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ é uma sequência em $X$, segue que existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{Z}_+}$ de $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ tal que $(f(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{Z}_+}$ e $(g(x_{n_k}))_{k \in \mathbb{Z}_+}$ são convergentes.

Segue que $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_N)$ e $\lim\limits_{k\to\infty} g(x_{N_k})$ são pontos de aderência de f e g, respectivamente, no ponto $a = \lim\limits_{k\to+\infty} x_{N_k}$.

Logo:

$$P = \lim_{k\to+\infty} (f.g)(x_{N_k})$$

$$= \left(\lim_{k\to\infty} f(x_{N_k})\right)\left(\lim_{k\to+\infty} g(x_{N_k})\right)$$

$$\leq \left(\limsup_{x\to a} f(x)\right)\left(\limsup_{x\to a} g(x)\right)$$

E, analogamente,

$$P \leq \left(\liminf_{x\to a} f(x)\right)\left(\liminf_{x\to a} g(x)\right)$$