22) Se $f:[a,+\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, positiva, monótona não-crescente. Prove que se $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$ converge, então $\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0$.

Tipo II: Seja $f:[a,+\infty) \to \mathbb{R}$ contínua. Sua integral imprópria (se convergir) é definida por:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{c \to +\infty} \int_a^{c} f(x)\,dx$$

Ela é dita absolutamente convergente se: $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ convergir

- Se f é contínua $\to$ f é integrável
- Se f é monótona $\to$ f é integrável

Resposta: Se tomarmos $g(x) = \int_a^{x} f(t)\,dt$ e $x \geq a$, existe $\lim_{x \to \infty} g(x) = L$. Então dado $\varepsilon > 0$, existe $A > 0$, sendo que $x > A \to L - \varepsilon < g(x) < L$.

Para $x > 2A \to \frac{x}{2} > A \to L - \varepsilon < g\left(\frac{x}{2}\right) < L$

Com isso temos que a g é crescente:

$$L - \varepsilon < g\left(\frac{x}{2}\right) < g(x) < L$$

Com isso, temos:

$$\varepsilon > g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right),$$ pois o comprimento do intervalo é $L - (L - \varepsilon) = \varepsilon$.

$$\varepsilon > g(x) - g\left(\frac{x}{2}\right) = \int_{x/2}^{x} f(t)\,dt \geq \left(x - \frac{x}{2}\right) f(x) = \frac{x}{2} f(x)$$

Como a integral converge, então para qualquer $\varepsilon > 0$ existe M tal que:

$$M < \frac{x}{2} < x,$$ e vale:

$$\int_{x/2}^{x} f(t)\,dt < \varepsilon,$$ como a f é positiva e não-crescente. Temos:

$$0 \leq \frac{x}{2} f(x) \leq \varepsilon$$

Portanto temos que o limite é zero.

$$\lim_{x \to +\infty} x f(x) = 0.$$