15) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, com $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Se $\{x \in [a,b] : f'(x) = 0\}$ tem conteúdo nulo, prove que f é crescente.

. Diz-se que um conjunto $X \subset \mathbb{R}$ tem conteúdo nulo quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe uma cobertura $X \subset I_1 \cup \dots \cup I_k$, com $\sum_{j=1}^{k} |I_j| < \varepsilon$. Ou seja a cobertura é muito pequena, quase nula.

Resposta: Suponha que f não seja crescente.

Assim existiriam $x_0 < y_0 \in [a,b]$ tais que $f(x_0) = f(y_0)$. Assim sendo, $x_0 < x < y_0$ e com isso teríamos que: $f(x_0) \leq f(x) \leq f(y_0) = f(x_0)$, e portanto $f(x) = f(x_0)$.

Então no intervalo $[x, y_0]$ f seria constante e com isso $f'(x) = 0$ para todo $x \in [x_0, y_0]$, temos então um absurdo, pois neste caso o conjunto $\{x \in [a,b] ; f'(x) = 0\}$ não teria conteúdo nulo.

Então a f é crescente.

$\blacksquare$