8) Seja D o conjunto de pontos de descontinuidade de uma função limitada.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Se D' é enumerável, prove que f é integrável.

- O conjunto de pontos de descontinuidade de uma função monótona é enumerável.
- O conjunto dos pontos de descontinuidade de uma função monótona é enumerável (então tem medida nula), então toda função monótona é integrável.

Resposta: Temos D como o conjunto de pontos de descontinuidade de uma função limitada, e D' é o conjunto de pontos de acumulação de uma função: $f: [a+b] \to \mathbb{R}$.

Temos que $D \setminus D'$ é o conjunto dos pontos isolados, e portanto é enumerável. Temos que $(D \setminus D') \cup D'$ é enumerável por ser a união de conjuntos enumeráveis e $D \subset (D \setminus D') \cup D'$.

D é um subconjunto de um conjunto enumerável, então D é enumerável, com isso segue que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável. Pois o seu conjunto de pontos de descontinuidade tem medida nula.

. X tem medida nula quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura enumerável $X \subseteq \bigcup I_k$ por intervalos abertos I_k tal que $\sum |I_k| < \varepsilon$.

. f é integrável se, e somente se, o conjunto dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.