6) Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto $I$. Um ponto crítico de $f$ é um ponto $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. O ponto crítico $c$ é dito Não-degenerado quando $f''(c)$ existe e é diferente de zero. Demonstre que:

a) Se $f \in C^1$, para cada intervalo compacto $[a, b] \subset I$, o conjunto de pontos críticos de $f$ pertencentes a $[a, b]$ é fechado.

- Um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é compacto quando for limitado e fechado.
- $X$ é compacto $\Leftrightarrow$ toda sequência $(x_n)$ com $x_n \in X$ possui uma subsequência $(y_n)$ com $\lim y_n \in X$.

- Se $X$ é compacto e $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua então $f(X)$ é compacto.
- Se $f'(a) = 0$ então $a$ é um ponto crítico de $f$.

- Corolário 2: Teorema 4: Seja $a \in X \cap X'_+ \cap X'_-$. Se $f: X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto $a$ e possui um máximo e um mínimo local nesse ponto, então $f'(a) = 0$.

- Dado $X$ um conjunto compacto, sendo $X \subset \mathbb{R}$ tal que $\forall x \in X$, com exceção de $a = \inf X$ e $b = \sup X$, fosse um ponto de acumulação de $X$ à esquerda e à direita, e além disso, $X \neq \{a, b\}$.
- $X = [a, b]$ e seu complementar é aberto $\mathbb{R} - X$, ou seja $\mathbb{R} - X$ é uma reunião de intervalos abertos, dois a dois disjuntos.

$\mathbb{R} - X = (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$, $X = [a, b]$

• Seja $f: I \to \mathbb{R}$, uma função que possui derivada em todos os pontos do intervalo $I$, considera-se a função derivada $f'(x)$, onde $f': I \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in I$ a derivada $f'(x)$.
Quando $f'$ é contínua, diz-se que $f$ é uma função continuamente derivável no intervalo $I$, ou uma função de classe $C^1$.
Isto nem sempre ocorre; a função derivada não precisa ser contínua.

Resposta: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto $I$, se $f \in C^1$ então $f$ possui derivada em todos os pontos do intervalo $I$.
Considerando-se a função derivada que associa a cada $x \in I$ a derivada $f'(x)$.
Temos que $f'(x)$ é contínua, temos que $f$ é continuamente derivável no intervalo $I$.

Assim $f \in C^1$, para cada intervalo compacto $[a, b] \subset I$. Então cada $x \in I$, temos derivadas para todos os pontos.

Seja $x \in I$, temos que $x$ é ponto de acumulação de $I$:

$$x \in I'_+ \cap I'_-$$

Então no ponto $x$ temos uma derivada para o intervalo $[a, b]$ compacto.

Como $[a, b]$ é limitado e fechado, e $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto $x$, temos que $x \in I \cap I'_+ \cap I'_-$, ou seja no ponto $x$ temos um máximo e um mínimo local, logo $f'(x) = 0$, pelo Corolário 2.

Corolário 2: Seja $a \in X \cap X_+' \cap X_-'$. Se $f: X \to \mathbb{R}$ é derivável no ponto $a$ e possui um máximo ou um mínimo local nesse ponto, então $f'(a) = 0$.

O corolário 1 reforça o argumento, pois sendo $x \in I$ um ponto de acumulação à direita e à esquerda, como $f: I \to \mathbb{R}$ possui no ponto $x$ derivada, temos que existe um $\delta > 0$ tal que $a, b \in I$, e temos que $a - \delta < a < x < b < b + \delta$ isto implica que $f(a) < f(x) < f(b)$.

E portanto para o $I_1 = [a, b] \subset I$ temos que $f'(x)$ é derivável e é um ponto crítico com $f'(x) = 0$.

Como $I$ é uma reunião de vários intervalos $[a, b]$, então:

$I = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_N$, onde $I_i = [a, b]$ para $i = 1, \dots, N$

E como cada $x \in I_i$ é um ponto crítico, temos que cada $x$ forma um conjunto fechado!

$I_f = [x_1, \dots, x_N]$, onde ~~todo~~ os $x_i$ possui derivada e $f \in C^1$.

b) Os pontos de máximos e mínimos locais de $f$ são críticos. Um ponto crítico não degenerado deve ser de máximo local ou de mínimo local.

Um ponto é dito não-degenerado quando a $f''(c) \neq 0$ e existe para o ponto específico.

Como mostrado anteriormente temos $x \in Ii$ como um ponto de máximo e mínimo local, foram denominados como pontos críticos.

Utilizando como argumentação o corolário 1 e 2, com isso se tomarmos os pontos $x_1, x_2$ onde:

$$x_1 < x < x_2$$

Pelo corolário 2 temos que dado:

$$x_1 \in I \cap I_+' \cap I_-' \text{ e } x_2 I \cap I_+' \cap I_-'$$

Como $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável em $x_1$ e $x_2$, temos que $x_1$ e $x_2$ são pontos de máximos e ou mínimos locais. Assim $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

Mas para ser não-degenerado então: $f''(x_1) \neq 0$ e $f''(x_2) \neq 0$. logo

Seja $x \in I$, um ponto crítico não degenerado de $f$, portanto $f'(x) = 0$ e $f''(x) \neq 0$. Digamos que $f''(x) > 0$, dessa forma temos que existe $\delta > 0$ tal que $x_1, x_2 \in I$, então:

$$x - \delta < x_1 < x < x_2 < x + \delta \to f'(x_1) < f'(x) < f'(x_2)$$

Isto é: $x_1, x_2 \in I$ então:

$$x - \delta < x_1 < x < x_2 < x + \delta \to f'(x_1) < 0 < f'(x_2)$$

Portanto $x-\delta < x_1 < x \Rightarrow f(x_1) > f(x)$ e

$x < x_2 < x+\delta \Rightarrow f(x) < f(x_2)$

Logo para todo $x \in (x-\delta, x+\delta)$, tem-se que $f(x_1) \geq f(x)$ e portanto $x$ é um mínimo local. Se $f''(x) < 0$, então $x$ seria um ponto de máximo local.

c) Se $c \in I$ é um ponto crítico não-degenerado para $f$, então existe $\delta > 0$ tal que não há outros pontos críticos de $f$ no intervalo $(c-\delta, c+\delta)$.

Se $c \in I$ é um ponto crítico não degenerado de $f$, então $f''(c) \neq 0$.
Se $f''(c) > 0$, então pelo corolário 2 do teorema 4, temos que existe $\delta > 0$ tal que:

$$c-\delta < x < c < y < c+\delta \Rightarrow f'(x) < f'(c) = 0 < f'(y)$$

Portanto no intervalo $(c-\delta, c+\delta)$ $c$ é o único ponto crítico de $f$.

Supomos por absurdo que exitam uma infinidade de pontos críticos $c_n$ não-degenerados em $K$. A sequência $(c_n)$ é limitada, pois $K$ é limitado e fechado, portanto possui uma subsequência $(d_n)$ convergente.

Sendo $d = \lim d_n$, temos que $d \in K$ (pois $K$ é fechado), e como $f$ pertence a classe $C^1$, então $f'$ é contínua.

Portanto, vale que $f'(d) = \lim f'(d_n)$. Mas $f'(d_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, $f'(d) = 0$, temos portanto um absurdo, pois deveria existir $\delta > 0$ tal que $\underline{d}$ fosse o único ponto crítico em $(d-\delta, d+\delta)$.

d) Se os pontos críticos de $f \in C^1$ contidos em $[a, b] \in I$ são todos não-degenerados, então há apenas um número finito deles. Conclua que $f$ possui no máximo uma infinidade de pontos críticos não degenerados em $I$.

No item c foi provado que os pontos críticos em cada intervalo é único, assim para cada intervalo $I_i \in I$, temos um único ponto crítico $x_i \in I_i$, onde $i = 1, \dots, n$.

Sendo assim é possível fazer uma bijeção de cada ponto crítico com os naturais. Assim podemos mostrar que são enumeráveis.

$$f : x_i \longrightarrow \mathbb{N}$$

Portanto os pontos críticos de $f \in C^1$ podem ser agrupados em único intervalo, que pode ser enumerável pela bijeção com os naturais.