11) Seja $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ limitada e derivada. Se não existir $\lim_{x\to a^+} f(x)$ ou $\lim_{x\to b^-} f(x)$, prove que para todo $c \in \mathbb{R}$, existe $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = c$.

Resposta: Temos que $f:(a,b) \to \mathbb{R}$ é limitada e derivada, logo f é contínua no intervalo.

Temos que se não existir algum limite lateral seja $x \to a^+$ ou $x \to b^-$, então $f'(x)$ é ilimitada seja superiormente ou inferiormente.

Assim, supomos por absurdo que f' seja limitada inferiormente, então existe $A \in \mathbb{R}$ tal que $f'(x) \geq A$ para todo $x \in (a,b)$.

Ao fazermos $g(x) = f(x) - Ax$, obtemos $g'(x) = f'(x) - A \geq 0$. Portanto "g" é uma função monótona não decrescente e, pela hipótese é limitada. Com isso $\lim_{x\to a^+} g(x)$ e $\lim_{x\to b^-} g(x)$ existiriam e, consequentemente, existiriam $\lim_{x\to a^+} f(x)$ e $\lim_{x\to b^-} f(x)$, o que é um absurdo.

Portanto f' não é limitada inferiormente, analogamente conclui-se que f' não é limitada superiormente.

Deste modo, dado $c \in \mathbb{R}$, existem $x_1, x_2 \in (a,b)$ tais que $f'(x_1) < c < f'(x_2)$ e portanto pelo Teorema de Darboux, existe um $x \in (a,b)$ tal que $f'(x) = c$.

Teorema de Darboux: Do valor intermediário para derivadas:

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável em todos os pontos $x \in [a,b]$. Se $f'(a) < d < f'(b)$ então existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = d$.