Lista 9

13. Sejam $x, c \in [a,b]$, e note que dada uma partição $P = \{t_0, \dots, t_n\}$ de ~~$[a,b]$~~ $[c,x]$,

$$f(x) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} \left(f(t_i) - f(t_{i-1})\right).$$

Agora, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\exists\, \xi_i \in (t_{i-1}, t_i)$ t.q.

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(\xi_i)(t_i - t_{i-1}),$$

pois f é der. em $[c,x]$.

Como, $\forall i \in \{1, \dots, n\}$, $\inf\{f'(t) \mid t \in [t_{i-1}, t_i]\} \leq f'(\xi_i) \leq \sup\{f'(t) \mid t \in [t_{i-1}, t_i]\}$, segue-se que

$$s(f'; P) \leq f(x) - f(c) \leq S(f'; P)$$

Como f' é integrável, dado $\varepsilon > 0$, $\exists$ uma part. P' t.q.

$$s(f'; P') + \varepsilon > \int_c^x f' > S(f'; P') - \varepsilon,$$

donde se segue que $\int_c^x f' - \varepsilon \leq f(x) - f(c) \leq \int_c^x f' + \varepsilon$,

ou ainda, que $\left| f(x) - f(c) - \int_c^x f' \right| < \varepsilon$, e portanto, que

$$f(x) - f(c) = \int_c^x f'$$

12. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é integrável e contínua à direita em $x_0\in[a,b)$.

Mostremos que $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ é der. à direita em x_0, com $F'(x_0)=f(x_0)$.

Com efeito, seja $h>0$ t.q. $x_0+h\leq b$. Então,

$$\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}f(t)\,dt.$$

Como f é cont. à direita em x_0, dado $\varepsilon>0$ $\exists\, h_0>0$ t.q. $x_0<x<x_0+h_0 \to |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

$\forall\, 0<h<\min\{h_0, b-x_0\}$

Assim, $$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\frac{1}{h}\left|\int_{x_0}^{x_0+h}f-f_0\right|$$

$$\leq\frac{1}{h}\int_{x_0}^{x_0+h}|f-f(x_0)|<\varepsilon\frac{h}{h}=\varepsilon,$$

donde se segue que $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$.

16. Note que a função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, def. pela lei

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$$

é derivável $\forall x\in[a,b]$, pelo TFC. Assim, como

$$\varphi(x)=\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)}f(t)\,dt=\int_{\alpha(x)}^{a}f(t)\,dt+\int_a^{\beta(x)}f(t)\,dt$$

$$=F(\beta(x))-F(\alpha(x)),\quad x\in I$$

segue-se que $\varphi = F\circ\beta - F\circ\alpha$ é derivável, já que se trata da diferença entre duas funções deriváveis (dado que a composição entre funções deriváveis é derivável).

Ainda, pela regra da cadeia,

$$\varphi'(x) = F'(\beta(x))\cdot\beta'(x) - F'(\alpha(x))\cdot\alpha'(x)$$
$$= f(\beta(x))\cdot\beta'(x) - f(\alpha(x))\cdot\alpha'(x).$$

L. 10

4. Demonstraremos, inicialmente, a seguinte proposição:

Af. Se $\sum|g_n|$ convergir unif. em X e se existir $K>0$ t.q. $|f_n(x)| \le K$ $\forall n\in\mathbb{N}$ $\forall x\in X$, então $\sum f_n g_n$ convergirá absoluta e unif. em X.

Com efeito, basta mostrarmos que $\sum|f_n g_n|$ converge ~~abs.~~ e unif. em X.

Como $\sum|g_n|$ conv. unif. em X, $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0$ $\forall x\in X$, $\sum_{n>n_0}|g_n(x)| < \varepsilon/K$.

Dado que $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in X\ |f_n(x)|\le K$, segue-se que $\forall\varepsilon>0\ \exists n_0\ \forall n>n_0\ \forall x\in X\ \sum_{n>n_0}|f_n g_n| < \frac{\varepsilon K}{K} = \varepsilon$, i.e., a cauda da série converge unif. ~~e abs.~~ a zero quando $n\to\infty$.

4. Basta dem. a seguinte proposição:

Af. Sejam $f_n, g_n: X\to\mathbb{R}$ seq. de funções t.q.: $\exists K>0$ t.q. $s_n(x) := f_1(x)+\dots+f_n(x)$ satisfaz $|s_n(x)|\le K$ $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in X$, $g_n(x)\ge g_{n+1}(x)$ $\forall n\in\mathbb{N}\ \forall x\in X$ e $g_n\to 0$ unif. Então, $\sum f_n g_n$ é unif. conv.

De fato,

Note que $\sum (-1)^n g_n$ cumpre tais condições. ~~Assim~~, basta dem que $|s_n(x)| \leq 2$ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$.

~~a A~~

Usaremos o fato que

~~Com efeito~~ $\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$,

$$\sum_{i=1}^{n} f_n g_n = \sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(g_{i-1} - g_i) + s_n g_n$$

~~Mostremos que $\sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(b_{i-1}-b_i)$ e $s_n b_n$ conv. unif em X:~~

~~$$\left|\sum_{i=1}^{n} s_{i-1}(b_{i-1}-b_i)\right| \leq \sum_{i=2}^{n} |s_{i-1}|(b_{i-1}-b_i) \leq K b_1,$$~~

~~$\forall n \in \mathbb{N}$ $\forall x \in X$~~

Mostremos que $\sum_{i=2}^{n} s_{i-1}(g_{i-1}-g_i)$ e $s_n b_n$ conv. unif em X:

$$\left|\sum_{i>n} s_{i-1}(g_{i-1}-g_i)\right| \leq \sum_{i>n} |s_{i-1}|(g_{i-1}-g_i)$$

$$\leq K \sum_{i>n} (g_{i-1}-g_i) = K g_n \quad (\text{já que } g_n \to 0),$$

e como $g_n \to 0$ unif., dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall n > n_0$ $\forall x \in X$

$$\left|\sum_{i>n} s_{i-1}(g_{i-1}-g_i)\right| < K g_n < \frac{K\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2};$$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall n > n_0$ $\forall x \in X$ $|s_n g_n| \leq K|g_n| < \frac{K\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2}$

Assim, $\sum_{i=1}^{n} f_i g_i$ conv. unif. em X, já que $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0$ $\forall n > n_0$ $\forall x \in X$

$$\left|\sum_{i>n} f_i g_i\right| \leq \left|\sum_{i>n} s_{i-1}(g_{i-1}-g_i)\right| + |s_n g_n|$$

$$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

9. Basta demonstrar que $\sum |f_n(x)|$ conv. unif. em X.

Assumamos que $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, $c \in (0,1)$ t.q. $\forall n > n_0\ \forall x \in X$, $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c$, i.e., que $|f_n(x)| \leq c^n$

Como $\forall n > n_0$ $\sum_{i \geq n} |f_i(x)| \leq \sum_{i \geq n} c^i = \frac{c^n}{1-c}$,

$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}$ (que podemos tomar maior do que n_0) t.q. $\forall n > N\ \forall x \in X$

$$\sum_{i \geq n} |f_i(x)| < \varepsilon$$

Assim, $\sum |f_n(x)|$ conv. unif.