14| Demonstre que um numero $\underline{a}$ é ponto de acumulação de X se, e somente se, é ponto de acumulação de $\overline{X}$.

- O fecho de X é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos aderentes a X.
- Se $X = \overline{X}$, o conjunto X é fechado.
- $\overline{X}$ é fechado.
- $\underline{a}$ é ponto de acumulação de X quando toda vizinhança V de $\underline{a}$, satisfaz:

  $V \cap X - \{a\} \neq \emptyset$ ou $V \cap X = \{a\}$
- X' é o conjunto dos pontos de acumulação de X.
- Ponto de acumulação: $X \subset \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ dizemos que $\underline{a}$ é ponto de acumulação de X se:

  $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X \cap (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $x \neq a$.
- Seja $\underline{a}$ um ponto de acumulação de X então $\underline{a} \in \overline{X}$.

Seja a um ponto de acumulação de X.

$X \subset \mathbb{R}$

Então, para todo $\varepsilon > 0$ existem infinitos elementos de X em $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$.

E como $X \subset \bar{X}$, existem infinitos elementos de $\bar{X}$ em $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, ou seja, a é ponto de acumulação de $\bar{X}$.

Seja a um ponto de acumulação de $\bar{X}$. 1 Dado $\varepsilon > 0$, existe $\bar{x} \in \bar{X}$ tal que $\bar{x} \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) - \{a\}$.

Tomando-se $\delta = \min\{|\bar{x}-a|, |\bar{x}-(a-\varepsilon)|\}$, temos que existe $x \in X$ tal que $|\bar{x}-x| < \delta$!

Assim, $x \in (\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta) \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) - \{a\}$.

Temos com isso que a é ponto de acumulação de X.