O Teorema fundamental do Cálculo

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Pelo item (1) do teorema 5:

Para $a < c < b$, $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$ são integráveis e se tem:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Reciprocamente, se $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$ são integráveis, então f é integrável, e vale a igualdade anterior.

Então para ~~todo~~ $x \in [a,b]$, $f|[a,x]$ é integrável.

Definiremos então uma função $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ pondo:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Se tivermos $|f(t)| \leq K$ para todo $t \in [a,b]$, então, dados quaisquer $x, y \in [a,b]$, tem-se:

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \leq K|y-x|.$$

Por conseguinte, F é (uniformemente) contínua no intervalo $[a,b]$.
A função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ chama-se uma integral indefinida de f.

O processo de passar de f para F melhora ou "amacia" as qualidades da função. Mostramos anteriormente que f limitada implica F lipschitziana. Veremos que f contínua implica F derivável.

Teorema 8: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. Se f é contínua no ponto $c \in [a,b]$, então a função $F: [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por:

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, é derivável no ponto c e se tem $F'(c) = f(c)$.

Corolário: Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, existe $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, tal que $F' = f$.

Basta tomar $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

Chama-se primitiva de uma função $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ a uma função derivável $F: [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $F' = f$.

O corolário anterior afirma que toda função contínua num intervalo compacto possui primitiva.

Nem toda função integrável f possui uma primitiva F. Com efeito, já sabemos que se $f = F'$ então f não pode ter descontinuidades de primeira espécie.

Não precisa supor F' contínua.

Teorema 9: Teorema fundamental do cálculo: Se uma função integrável $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ possui uma primitiva $F:[a,b] \to \mathbb{R}$, então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Em outras palavras, temos que se uma função: $F:[a,b] \to \mathbb{R}$ possui derivada integrável, então:

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t)\,dt.$$

O Teorema 9 nos diz que as únicas primitivas de uma função integrável $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ (se existirem) são da forma:

$$\int_a^x f(t)\,dt + \text{constante}$$

Ele reduz a avaliação de $\int_a^b f(x)\,dx$, (quando a função f possui primitiva) à obtenção de uma primitiva de f.