Fórmulas Clássicas do Cálculo Integral

<u>Teorema 10:</u> (Mudança de variável). Sejam $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, $g:[c,d] \to \mathbb{R}$ derivável, com g' integrável e $g([c,d]) \subset [a,b]$. Então:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt$$

<u>Teorema 11:</u> (Integração por partes). Se $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$ possuem derivadas integráveis então:

$$\int_a^b f(t) \cdot g'(t)\,dt = f \cdot g\Big|_a^b - \int_a^b f'(t) \cdot g(t)\,dt$$

onde $f \cdot g\Big|_a^b = f(b) \cdot g(b) - f(a) \cdot g(a)$

<u>Teorema 12:</u> (Fórmulas de Valor Médio para Integrais). São dadas as funções:

$f, p: [a,b] \to \mathbb{R}$, com f contínua. Então:

A) Existe $c \in (a,b)$ tal que $\int_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$

B) Se p é integrável e não muda de sinal, existe $c \in [a,b]$ tal que $\int_a^b f(x)p(x)\,dx = f(c) \cdot \int_a^b p(x)\,dx$.

c) Se p é positiva, decrescente, com derivada integrável, existe $c \in [a,b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)p(x)\,dx = p(a).\int_a^c f(x)\,dx$$

① Deduziremos agora a fórmula de Taylor com resto integral, usando integração por partes. Comecemos com um caso particular.

Seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ possuindo derivada segunda integrável. Temos que:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)\,dt.$$

Vamos "calcular" esta integral por partes, mas não de maneira óbvia, que nos levaria de volta ao valor $\varphi(1)-\varphi(0)$.

Tomemos $f(t) = 1-t$ e $g(t) = \varphi'(t)$, de modo que $f'(t) = -1$ e $\int_0^1 \varphi'(t)\,dt = -\int_0^1 f' \cdot g$.

Com este sinal menos, a fórmula de integração por partes fica: (Note as posições de 0 e 1 no símbolo $f.g|_1^0$.)

$$\int_0^1 \varphi'(t)\,dt = f.g|_1^0 + \int_0^1 f.g' = \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt.$$

$$\int_0^1 \varphi'(t)\,dt = f.g|_1^0 + \int_0^1 f.g' = \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t)\varphi''(t)\,dt$$

Chegamos assim a um resultado interessante. Se φ possui derivada segunda integrável no intervalo $[0,1]$ então:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \int_0^1 (1-t).\varphi''(t)dt.$$

Suponhamos agora que φ possua derivada terceira integrável em $[0,1]$ e tentemos a sorte outra vez na integração por partes.

Escrevemos agora $f(t) = \frac{(1-t)^2}{2}$ e $g(t) = \varphi''(t)$.

Então $f'(t) = -(1-t)$

$$\int_0^1 (1-t).\varphi''(t)dt = -\int_0^1 f'.g$$

Com este sinal menos, a fórmula de integração por partes nos dá:

$$\int_0^1 (1-t).\varphi''(t)dt = f.g\Big|_1^0 + \int_0^1 f.g' = \frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}.$$

$\varphi'''(t)\,dt$. Então podemos escrever:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2}.\varphi'''(t)dt$$

Isto nos conduz imediatamente ao próximo lema.

Lema 6: Seja $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função que possui derivada de ordem $(N+1)$ integrável em $[0,1]$. Então:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2} + \dots + \frac{\varphi^{(N)}(0)}{N!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} \cdot \varphi^{(N+1)}(t)\,dt.$$

Teorema 13: (Fórmula de Taylor com resto integral) Se $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ possui derivada de ordem $(N+1)$ integrável então:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a) \cdot h + \dots + \frac{f^{N}(a)}{N!} \cdot h^N + \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^N}{N!} \cdot f^{(N+1)} \cdot (a+th)\,dt\right] \cdot h^{(N+1)}.$$

Com efeito, temos $h = b-a \to h-b = -a \; (-1) \to a = b-h$. e $th = x-a \to th - x = -a \; (-1) \to a = x - th$. Então:

$$a = a \to b-h = x-th$$
$$b-x = h-th$$

No integrando da fórmula anterior escrevemos:

$$(1-t)^N \cdot h^{(N+1)}\,dt = (h-th)^N \cdot h\,dt = (b-x)^N dx$$

O outro fator, $f^{N+1}(a+th)$ se torna simplesmente $f^{(N+1)}(x)$. O denominador $N!$, fica como está. E os limites de integração são a e b, pois quando t varia entre 0 e 1, estes são os extremos assumidos por $(a+th)$.