9) 1) Dado $a>1$, defina $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ pondo, para cada $p/q\in\mathbb{Q}$, $f(p/q)=a^{p/q}$.

Demonstre que $\lim_{x\to 0} f(x)=1$.

Conclua que para cada $b\in\mathbb{R}$, existe $\lim_{x\to b} f(x)$, sendo este limite igual a $f(b)$ se $b\in\mathbb{Q}$. Chame este limite de a^b. Demonstre que $a^b\cdot a^{b'}=a^{b+b'}$ e que $b<b'\to a^b<a^{b'}$.

1) $a>1$ e $a^{p/q}$; $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$; $p/q\xrightarrow{f} a^{p/q}$

$\sqrt[q]{a^p}$ e $a>1$; $p/q\xrightarrow{f}\sqrt[q]{a^p}$

<u>Resposta:</u> Como $a>1$, temos pelas propriedades básicas da multiplicação que f é crescente, ou seja:

$$a^1<a^2<a^3<\ldots\ldots<a^N<\ldots\ldots$$

Assim seja $N_0\in\mathbb{N}$ tal que se $N_0>a$, então para todo $N>N_0$ temos:

$$1<a<N_0<N$$

$$\sqrt{1}<\sqrt{a}<\sqrt{N_0}<\sqrt{N}$$

$$\sqrt[N]{1}<\sqrt[N]{a}<\sqrt[N]{N_0}<\sqrt[N]{N}$$

Temos que $\lim_{N\to\infty} \sqrt[N]{N} = 1$, então:

$\lim_{N\to+\infty} f(1/N)$ = aplicando a função do enunciado temos:

$$f(1/N) = a^{1/N} = \sqrt[N]{a}$$

Então como: $\sqrt[N]{1} < \sqrt[N]{a} < \sqrt[N]{N}$, pelo teorema do confronto temos que:

$$\lim_{N\to\infty} f(1/N) = 1.$$

Teorema do confronto: Se $f(x) < g(x) \leq h(x)$ e $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$, então: $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Vale observar também:

$$\lim_{N\to\infty} f(-1/N) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{f(1/N)} = \frac{1}{\lim_{N\to\infty} f(1/N)} = \frac{1}{1} = 1$$

Com isso podemos tomar como referência o exercício 6 desta lista cujo enunciado vale como argumento:

Sejam $f: X \to \mathbb{R}$ monótona e $a \in X'_+$. Se existir uma sequência de pontos $x_N \in X$ com $x_N > a$, $\lim x_N = a$ e $\lim f(x_N) = L$, então $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$.

Assim conclui-se que:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$$

iii) Devemos concluir agora que para cada $b \in \mathbb{R}$, existe $\lim_{x \to b} f(x)$, sendo este limite igual a $f(b)$ se $b \in \mathbb{Q}$.

Seja $b \in \mathbb{R}$, então:

i) $b \in \mathbb{Q}$,

. $\lim_{N \to \infty} f(b + 1/N) = \lim_{N \to +\infty} f(b) \cdot f(1/N) = f(b)$,

dado que $\lim_{N \to \infty} f(1/N) = 1$.

. $\lim_{N \to +\infty} f(b - 1/N) = \lim_{N \to \infty} f(b) \cdot f(1/N) = f(b)$

Assim conclui-se que $\lim_{x \to b} f(x) = f(b)$

ii) $b \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$

Sejam $x_N = m/N$ tal que $m = \max\{u \in \mathbb{Z} : \frac{u}{N} < b\}$ e $y_N = \frac{M}{N}$ tal que $M = \min\{u \in \mathbb{Z} : \frac{u}{N} > b\}$. Segue que se $x_N = \frac{m}{N}$ então $y_N = \frac{m+1}{N}$ pois $b \notin \mathbb{Q}$.

As sequências (x_n) e (y_n) são, respectivamente não-decrescente e não-crescente.

Isso implica que as sequencia:

$(f(x_n))$ e $(f(y_n))$ também são não-decrescente e não-crescente.

Com isso temos que $\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ e $\lim_{n\to\infty} f(y_n)$ existem pois $f(x_n) < f(y_n)$ para ~~todo~~ $n \in \mathbb{N}$, isto é, estas sequências são limitadas.

Por fim, temos que:

$$\lim f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim f(y_n)/f(x_n) = \frac{\lim f(y_n)}{\lim f(x_n)} = 1$$

Portanto, temos que:

$$\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(y_n) = \lim_{x\to b^+} f(x)$$

iii) Chame este limite de a^b. Demonstre que: $a^b \cdot a^{b'} = a^{b+b'}$ e que $b < b' \to a^b < a^{b'}$.

Será necessário verificar duas condições:

a) $a^b \cdot a^{b'} = a^{b+b'}$

Sejam (x_N) e (y_N) sequências que tendem à b e b', respectivamente. Então $(x_N + y_N)$ tendem à $b+b'$ e:

$$
\begin{aligned}
a^b \cdot a^{b'} &= \lim_{x \to b} f(x) \cdot \lim_{x \to b'} f(x) \\
&= \lim_{N \to \infty} f(x_N) \cdot \lim_{N \to \infty} f(y_N) \\
&= \lim_{N \to \infty} f(x_N) \cdot f(y_N) \\
&= \lim_{N \to \infty} f(x_N + y_N) \\
&= \lim_{x \to b+b'} f(x) \\
&= a^{b+b'}
\end{aligned}
$$

b) $b < b' \to a^b < a^{b'}$

Sejam $r_1, r_2 \in \mathbb{Q} \cap (b, b')$ tais que $r_1 < r_2$. Então, como f é crescente, temos:

$$a^b = \inf \{ f(r) ; r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ tal que } r < b \}, \text{ e}$$

$$a^{b'} = \sup \{ f(r) ; r \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \text{ tal que } r < b \}$$

Assim, $a^b \leq f(r_1) < f(r_2) \leq a^{b'}$, com isso provamos o resultado desejado.