5) Seja $f: X \to \mathbb{R}$ derivável no ponto $a \in X \cap X'_- \cap X'_+$. Se $x_n < a < y_n$ para todo n e $\lim x_n = \lim y_n = a$. Demonstre que:

$$\lim \frac{(f(y_n)) - f(x_n)}{(y_n - x_n)} = f'(a)$$

Temos que:

$$\frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \frac{f(y_n) - f(a) - f(x_n) + f(a)}{y_n - x_n} =$$

$$\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} - \frac{f(x_n) - f(a)}{y_n - x_n} =$$

$$\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \left(\frac{-x_n + a}{y_n - x_n}\right) \cdot \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right) =$$

$$\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - x_n} + \left(1 - \frac{y_n - a}{y_n - x_n}\right) \cdot \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right) =$$

$$\left(\frac{y_n - a}{y_n - x_n}\right) \cdot \left(\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a}\right) + \left(1 - \frac{y_n - a}{y_n - x_n}\right)\left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right) =$$

Se $t_n = \dfrac{y_n - a}{y_n - x_n}$

$$t_n \left(\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a}\right) + (1 - t_n) \cdot \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right)$$

Se $f'(a) = \dfrac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a}$ e $f'(a) = \dfrac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}$

$$t_n \cdot f'(a) + (1 - t_n) \cdot f'(a) =$$

Temos que (t_n) é limitada pois:

$$x_n < a \to y_n - a < y_n - x_n \to \frac{y_n - a}{y_n - x_n} < 1$$

Pois $y_n > x_n$, com isto podemos dividir por $(y_n - x_n)$ sem alterar a desigualdade.
Da mesma forma vale $0 < y_n - a$ e:

$$0 < \frac{y_n - a}{y_n - x_n} < 1$$

Temos portanto que (t_n) é limitada, o mesmo vale para $(1 - t_n)$. Logo aplicamos:

<u>Lema</u>: Sejam (a_n) e (b_n) sequências limitada tais que $a_n + b_n = 1$ $\forall n \in \mathbb{N}$, (z_n) e (t_n) com o mesmo limite $\underline{a}$, então $\lim a_n . z_n + b_n . t_n = a$.

Isto garante que:

$$\lim \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = \lim t_n \left(\frac{f(y_n) - f(a)}{y_n - a}\right) + (1 - t_n) . \left(\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}\right) = \lim t_n . f'(a) + (1 - t_n) f'(a)$$

$$\lim \cancel{t_n f'(a)} + f'(a) - \cancel{t_n f'(a)} = f'(a)$$

$\blacksquare$