3) Dadas $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, defina $(f, g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ e $[f, g](x) = \max\{f(x), g(x)\}$.

Mostre que se f e g forem integráveis, então (f, g) e $[f, g]$ serão integráveis.

Conclua que uma funcao será integravel se, e somente se suas partes positivas e negativa forem integráveis.

<u>Resposta</u>: Tomamos f, g de forma isolada no intervalo $[a, b] \to \mathbb{R}$.

Então tomamos $x, y \in [a, b]$, e temos:

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_a^x f(t)\,dt + \int_a^y f(t)\,dt \right|$$

$$|F(x) - F(y)| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right|$$

$$|F(x) - F(y)| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq M|x - y|$$

Onde $M = \sup\{|f(t)|, t \in [a, b]\}$

Com isso temos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é lipschitziana, e o mesmo vale para $g : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Pelo Teorema 5: "Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Então:

5.1 $|f(x)|$ é integrável e se tem:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Segue-se de (4) e (5) que se $|f(x)| \leq K$, para todo $x \in [a,b]$, então:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq K \cdot (b-a)$$

Temos que f, g são integráveis.

Agora tomamos: $(f,g) = \min\{f(x), g(x)\}$ e $[f,g] = \max\{f(x), g(x)\}$. Então:

$$[f,g] = \frac{f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|}{2}$$ e

$$(f,g) = \frac{f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|}{2}$$

Como a soma, o produto por escalar e o modulo de funcções integraveis são funcções integráveis, então $[f,g]$ e (f,g) são integráveis. Assim, concluímos que $f+$ e $f-$ (partes positivas e negativas de f) são integráveis e para isto observamos que:

$$f_+(x) = \max\{f(x), 0\}, \quad g_+(x) = \max\{g(x), 0\}$$

$$f_-(x) = \min\{f(x), 0\}, \quad g_-(x) = \min\{g(x), 0\}$$

E como f é lipschitziana, temos que $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ é integrável.