2) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrável. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\int_a^b |f(x)|dx = 0$.

b) Se f é contínua no ponto c, então $f(c) = 0$.

c) $X = \{x \in [a,b] ; f(x) \neq 0\}$ tem interior vazio.

i) $a \to b$

Com efeito, se $f(c) \neq 0$ então $|f(c)| > 0$. Agora como f é contínua em c, temos que existe $\delta > 0$ tal que se $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$ e então $|f(x)| > \frac{|f(c)|}{2}$.

Assim,
$$\int_a^b |f(x)|\, dx \geq \int_{(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]} |f(x)|dx \geq \frac{|f(c)|}{2} \cdot |I| > 0,$$

em que $I = (c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$. Tal contradição nos permite concluir que $f(c) = 0$.

ii) $b \to c$

Suponha que $\operatorname{int} X \neq \emptyset$. Então, $\exists\, d \in X$ e $\exists\, \delta > 0$ tal que $\forall x \in (d-\delta, d+\delta)$, $f(x) \neq 0$. Isto é, $|f(x)| > 0$.

Como f é integrável, o conjunto de pontos de descontinuidade de f tem conteúdo nulo. Pela hipótese (b), X é subconjunto do conjunto de pontos de descontinuidade de f.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, $\exists$ uma coleção enumerável de intervalos abertos, $\{I\}$ tal que:

$$\sum_{j \geq 1} |I_j| < \varepsilon \text{ e } X \in \bigcup I$$

Em particular, tomando $\varepsilon = \delta$, obtemos uma coleção enumerável de intervalos abertos $\{I\}$, tal que:

$$\sum |I_j| < \delta \text{ e } X \subset \bigcup I$$

Como $X \supset (d-\delta, d+\delta)$, temos uma contradição. Logo $\operatorname{int} X = \emptyset$.

iii) $c \to a$

① Demonstraremos a contrapositiva. Suponha:

$$\int_a^b |f(x)|\, dx > 0$$

Como f é integrável, o conjunto de pontos de descontinuidade de f, tem conteúdo nulo. Logo, o conjunto de pontos de continuidade de f tem interior não vazio. Senão, o conjunto de pontos de descontinuidade de f seria denso em $[a, b]$. Teríamos um absurdo.

Denotemos tal conjunto por Y. Claramente, $Y = \operatorname{int} Y$. Se $f|_Y \equiv 0$, teríamos:

$$\int |f(x)|\, dx = 0$$

Logo, $\exists\, d \in Y$ tal que $f(d) \neq 0$. Sendo d um ponto interior de $[a,b]$ e $d \in X$, segue-se que $\operatorname{int} X \neq \emptyset$.

Pois para qualquer $\varepsilon > 0$, $\int_a^b |f| = \int_Y |f| + \int_{Y^c} |f| < M\varepsilon$, em que $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, o resultado se segue.

Aqui, como Y é aberto e Y^c é a reunião enumerável de intervalos fechados cuja soma dos comprimentos é menor do que ε, temos que:

$$\int_a^b |f| \leq \sum_{j \geq 1} \int_{I_j} |f| \leq M \sum_{j \geq 1} |I_j| < M\varepsilon$$