2) Demonstre que a série $\sum x^N(1-x^N)$ converge quando $x \in [-1,1]$, e que $N \geq 1$ a convergência é uniforme em todos os intervalos do tipo $[-1+\gamma, 1-\gamma]$, com $0<\gamma<1/2$.

Resposta: A série converge em $(-1,1)$, por ser uma soma de séries geométricas, e também converge se $x=1$, pois:

$$\sum_{N=1}^{\infty} 1^N(1-1^N) = \sum_{N=1}^{\infty} 1^N(0) = 0$$

Devemos agora verificar a convergência uniforme. Com $|x| \leq \gamma$ temos que $|x|^N \leq \gamma^N < 1$. Então:

$$|1-x^N| \leq |1| + |x^N| \leq 2, \text{ para } x \in [-1,1]$$

Aplicamos estas desigualdades na série:

$$\sum_{N=1}^{\infty} |x^N (1-x^N)| \leq 2 \sum_{N=1}^{\infty} |x^N| \leq 2 \sum_{N=1}^{\infty} \gamma^N = 2 \left. \frac{\gamma^N}{\gamma-1} \right|_N^{\infty} =$$

$$2 \cdot \frac{\gamma^N}{1-\gamma}.$$

Como a convergência uniforme para um dado $\varepsilon>0$ é sempre possível obter um N_0 que serva $\forall x \in X$, ou seja:

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N > N_0 \rightarrow |f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$ seja qual for $x \in X$.

Então: $2 \cdot \frac{\gamma^N}{1-\gamma}$, é uma expressão que pode ser tomada sempre menor do que qualquer ε independente de $x \in [-1, 1]$, para qualquer N suficientemente grande, logo temos o caso de convergência uniforme.