17) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ derivável, com f' integrável. Prove que, para quaisquer $x, c \in [a,b]$, tem-se $f(x) = f(c) + \int_c^x f'(t)\,dt$. Conclua no enunciado da fórmula de Taylor com resto integral I, vale "integrável" em vez de "contínua".

Lema 6: Seja $\varphi:[0,1] \to \mathbb{R}$ uma função derivada de ordem $(n+1)$ integrável em $[0,1]$. Então:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{n}(0)}{n!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot \varphi^{(n+1)}(t)\,dt$$

Como consequência direta;

Teorema 13: (Fórmula de Taylor com resto integral). Se $f:[a,a+h] \to \mathbb{R}$ possui derivada de ordem $(n+1)$ integrável então:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\cdot h + \dots + \frac{f^{n}(a)}{n!}\cdot h^n + \left[\int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \cdot f^{(n+1)}(a+th)\,dt\right] \cdot h^{n+1}$$

Resposta: Suponha $c < x$, dada qualquer partição $P = \{c = t_0, \dots, t_n = x\}$ do intervalo $[c,x]$, temos que:

$$f(x) - f(c) = \sum_{i=1}^{n} [f(t_n) - f(t_{n-1})]$$

Como f é derivável em $[a,b]$, temos que pelo teorema do valor médio, existem $c_i \in (t_{i-1}, t_i)$ tais que:

$$f(t_i) - f(t_{i-1}) = f'(c_i).(t_i - t_{i-1})$$

Sendo m_i e M_i, respectivamente, o ínfimo e o supremo de f' no intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, temos:

$m_i \leq f'(c_i) \leq M_i \rightarrow m_i(t_i - t_{i-1}) \leq f'(c_i).(t_i - t_{i-1}) \leq$ $M_i(t_i - t_{i-1})$. Com isso de forma análoga ao que foi feito anteriormente, temos:

$$s(f', P) \leq \sum_{i=1}^{n} f'(c_i).(t_i - t_{i-1}) = f(x) - f(c) \leq S(f', P).$$

Logo:

$$f(c) - f(x) = \int_x^c f'(t)dt = -\int_c^x f'(t)dt \rightarrow f(x) - f(c) = \int_c^x f'(t)dt$$

Como $f(c) - f(x) = -\int_c^x f(t)dt \rightarrow f(x) = f(c) + \int_c^x f(t)dx$

Se $x = c+h$, temos: $\int_c^{c+h} f(t)\,dt$

$f(x) = f(c) + \int_c^x f(t)dt \rightarrow f(c+h) = f(c) + \int_c^{c+h} f(t)\,dt$

$f(c+h) = \cancel{f(c)} + f(c+h) - \cancel{f(c)} \rightarrow f(c+h) = f(c+h) \rightarrow$ $f(x) = f(x)$

Agora tomando $x = c+h$, pode-se obter uma expressão equivalente para a fórmula de Taylor substituindo h por $x-c$.

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x-c) + \ldots + \frac{f^{N}(c)}{N!} \cdot (x-c)^{N} + \int_{a}^{c+h} \frac{(x-c)^{N}}{N!} \cdot f^{(N+1)}(x)\, dx$$

Temos portanto que a f é integrável.