10) Uma função $f: X \to \mathbb{R}$ se diz localmente constante quando ~~todo~~ ponto de X possui uma vizinhança V tal que f é constante em $V \cap X$.

Prove que toda função $f: I \to \mathbb{R}$ localmente constante num intervalo I é constante.

Resposta: Temos que provar que toda função $f: I \to \mathbb{R}$ localmente constante é constante, onde I é um intervalo.

Assim dado $a \in I$, definimos:

$A = \{x \in I \mid f(x) = f(a)\}$, $B = \{x \in I \mid f(x) \neq f(a)\}$

Temos que $A \neq \emptyset$, pois $a \in A$ e vale também que $I = A \cup B$.

Como f é localmente constante, ~~todo~~ $x \in A$ possui uma vizinhança V disjunta de B. Assim $A \cap \overline{B} = \emptyset$ e por analogia $\overline{A} \cap B = \emptyset$.

Portanto A e B formam um cisão para I. Como I é um intervalo, I admite apenas a cisão trivial. Como $A \neq \emptyset$, pois $a \in A$, temos que $B = \emptyset$. Logo $f: I \to \mathbb{R}$ é uma constante.