Lista 7
Questão 3
Demonstre a proposição a seguir: uma função $f : A \to \mathbb{R}$, definida em um aberto $A \subset \mathbb{R}$, é contínua se, e somente se, para todo $c \in \mathbb{R}$, os conjuntos
$[f < c] = \{x \in A \,:\, f(x) < c\}$ e $[f > c] = \{x \in A \,:\, f(x) > c\}$ forem abertos.

$(\Rightarrow)$
Assumir que f é contínua. Dado $c \in \mathbb{R}$, mostremos que $[f < c]$ é aberto. Seja $a \in [f < c]$, isto é, $f(a) < c$. Mostraremos que a é um ponto interior de $[f < c]$. Tomamos um $\epsilon > 0$ tal que $\epsilon < c - f(a)$, pela continuidade de f, existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{se } x \in A \text{ e } |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon < c - f(a)$$

$$\Downarrow$$

$$x \in A \cap (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < c - f(a)$$
$$x \in A \cap (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow f(x) - f(a) < c - f(a)$$

Finalmente
$$x \in A \cap (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow f(x) < c$$
$$A \cap (a - \delta, a + \delta) \subset [f < c],$$
portanto a é um ponto interior de $[f < c]$. Analogamente provamos que $[f > c]$ é aberto.

$(\Leftarrow)$
Assumir que $[f < c]$ e $[f > c]$ são abertos para todo $c \in \mathbb{R}$. Dado $a \in A$ e $\epsilon > 0$. Os conjuntos $[f < f(a) + \epsilon]$ e $[f > f(a) - \epsilon]$ são abertos. Então existe um $\delta > 0$ tal que

$$(a - \delta, a + \delta) \subset [f < f(a) + \epsilon] \cap [f > f(a) - \epsilon] \cap A.$$

Consequentemente

$$\text{dado } x \in (a - \delta, a + \delta) \Longrightarrow x \in A, \quad f(x) < f(a) + \epsilon \text{ e } f(x) > f(a) - \epsilon$$

$$x \in A \text{ e } |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Portanto f é continua em $a \in A$.

Lista 7
Questão 9
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função arbitrária. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos o conjunto

$$C_n = \{a \in \mathbb{R} \,:\, \text{ existe } I \ni a \text{ aberto tal que se } x, y \in I, \text{ então } |f(x) - f(y)| < 1/n\}.$$

Demonstre que:

(a) Cada C_n é um conjunto aberto;

(b) f é contínua em a se, e somente se, $a \in C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Conclua que o conjunto dos pontos de continuidade de qualquer função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma intersecção enumerável de abertos.

Prova:

(a) Seja $a \in C_n$, então existe um intervalo aberto I_a que contrem a tal que $\forall\, x, y \in I_a \implies |f(x) - f(y)| < 1/n$. Como I_a é um intervalo aberto, existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset I_a$. Basta mostar que $(a - \delta, a + \delta) \subset C_n$, para afirmar que C_n é aberto.
Dado $b \in (a - \delta, a + \delta)$, existe um $\delta_1 > 0$ tal que $(b - \delta_1, b + \delta_1) \subset (a - \delta, a + \delta)$. Logo, $(b - \delta_1, b + \delta_1) \subset I_a$ e para todo $x, y \in (b - \delta_1, b + \delta_1) \implies |f(x) - f(y)| < 1/n$. Concluindo que $b \in C_n$ e $(a - \delta, a + \delta) \subset C_n$.

(b) $\Rightarrow$)
Assumir que f é contínua em a, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para cada } z \in (a - \delta, a + \delta) \implies |f(z) - f(a)| < \frac{1}{4n}. \tag{1}$$

Tomamos $x, y \in (a - \delta, a + \delta)$ por (1)

$$|f(x) - f(a)| < \frac{1}{4n} \text{ e } |f(y) - f(a)| < \frac{1}{4n}$$

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(a)| + |f(a) - f(y)| < \frac{1}{4n} + \frac{1}{4n} = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n},$$

provando que $a \in C_n$.

$\Leftarrow$)
Supor que $a \in C_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado $\epsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$. Por hipóteses existe um intervalo aberto I_a que contém a tal que

$$x, y \in I_a, \text{ implica } |f(x) - f(y)| < 1/n < \epsilon.$$

Existe $\delta > 0$ tal que $(a - \delta, a + \delta) \subset I_a$ e fazendo $y = a$ obtemos

$$x \in (a - \delta, a + \delta), \text{ implica } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Então f é contínua em a.

Seja $C = \{x \in \mathbb{R} : f \text{ é contínua em } x\}$, pela parte (b) afirmamos que

$$C = \{x \in \mathbb{R} : x \in C_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{x \in \mathbb{R} : x \in C_n\}.$$

Por conseguinte $C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ e pela parte (a) temos que cada C_n é aberto. Portanto C é a interseção enumerável de abertos.