4) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, com $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$. Se f é contínua no ponto $c \in [a,b]$ e $f(c) > 0$, prove que $\int_a^b f(x)\,dx > 0$.

Temos que $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função integrável, e $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [a,b]$.

Suponmos que f seja contínua, logo pelo teorema é integrável no ponto c (onde é contínua).

Dado $c \in [a,b]$ e $f(c) > 0$.

Como $c \in [a,b]$, então $a < c < b$ e $f|[a,c]$ e $f|[c,b]$ são integráveis então:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Pelo item 3) do teorema 5.

Como $f(c) > 0$ e $f(x) \geq 0$, como $c \in [a,b]$ e $x \in [a,b]$

Pelo item 4 do teorema 5, se $f(x) \geq 0$ para $x \in [a,b]$ então:

$$\int_a^b f(x)\,dx \geq 0 = \int_a^c f(c)\,dx > 0 + \int_c^b f(c)\,dx \geq 0$$

Portanto: $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.