Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, demonstre a existência de um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ no qual f assume seu valor mínimo.

Temos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua, se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$, então temos que f tem um ponto de mínimo x_0, isto é existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f(x_0) = \min f(\mathbb{R})$.

Com isso tomamos um ponto $a \in \mathbb{R}$, e com $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty$, e existe $M > 0$ tal que $f(x) > f(a)$ se $x \in (M, +\infty)$ ou $x \in (-\infty, -M)$.

Assumimos que $M \geq |a|$, e pelo teorema de Weierstrass: $f|_{[-M,M]}$ tem um ponto de Mínimo $x_0 \in [-M, M]$. Assim x_0 é um ponto de mínimo de f, e portanto:

$\forall x \in [-M, M]$ $f(x) \geq f(x_0)$ e $\forall x \in (-\infty, -M) \cup (M, +\infty)$

$f(x) > f(a) \geq f(x_0)$

Esta última desigualdade possui efeito por $M > |a|$, e portanto $a \in [-M, M]$.

$\blacksquare$