7. Por hipótese, $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n \geq a_{n+1}$ e $\lim a_n = 0$

(i.e., $\forall \varepsilon > 0$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, $\forall n > n_0$, $0 \leq a_n < \varepsilon$)

Mostremos que $\lim \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = 0$.

Com efeito, seja $\varepsilon > 0$. Como $\lim a_n = 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q., $\forall n > n_0$, $0 \leq a_n < \varepsilon/2$.

Seja $n_1 \in \mathbb{N}$ t.q., $\forall n > n_1$, $\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_{n_0}) < \varepsilon/2$

(a saber, como $\lim \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_{n_0}) = 0$, dado $\varepsilon > 0$ $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ para o qual a sentença acima é verdadeira).

Por fim, $\forall n > \max\{n_0, n_1\}$,

$$\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_{n_0}) + \frac{1}{n}(a_{n_0+1} + \cdots + a_n)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0 - 1}{n} \cdot a_{n_0+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Isso nos mostra que dado $\varepsilon > 0$, $\exists N = \max\{n_0, n_1\}$ t.q. $\forall n > N$, $\frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n) < \varepsilon$, i.e., $\lim b_n = 0$.

Por fim, como a série alternada em consideração é $\sum_{i \geq n} (-1)^{n+1} b_n$ e $\lim b_n = 0$, o resultado se segue do critério de Leibniz.

17. (a) Devemos mostrar que dada uma bijeção $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, se (a_n) for somável com soma s, então $(b_n = a_{\varphi(n)})$ será somável.

Seja $\varepsilon > 0$. Como (a_n) é somável, $\exists J_0 \subset \mathbb{N}$ finito t.q., $\forall J$ finito t.q. $J_0 \subset J \subset \mathbb{N}$, $|s - \sum_{n \in J} a_n| < \varepsilon$.

Seja $I_0 = \varphi(J_0)$. Mostremos que $\forall I$ finito t.q. $I_0 \subset I \subset \mathbb{N}$, $|s - \sum_{n \in I} b_n| < \varepsilon$.

Com efeito, dado I finito ~~satisfazendo~~ t.q. $I_0 \subset I \subset \mathbb{N}$, seja $J = \varphi^{-1}(I)$. Como J é finito e $J \supset J_0$ (a saber, se $n \in J_0$, então $\varphi(n) \in I_0 \subset I$, donde se segue que $n = \varphi^{-1}(\varphi(n)) \in J$), segue-se da hipótese de que (a_n) é somável que

$$|s - \sum_{n \in J} a_n| < \varepsilon.$$

Por fim, como $\cancel{\sum_{n \in J} a_n = \sum_{\varphi(n) \in I} a}$ $\sum_{m \in I} b_m = \sum_{\varphi(n) \in I} a_{\varphi(n)}$

$= \sum_{n \in J} a_n$, segue-se que

$$|s - \sum_{m \in I} b_m| < \varepsilon.$$

(b) ($\longrightarrow$) Suponha que (a_n) é somável, com soma s. Mostremos inicialmente que $\sum a_n = s$.

Com efeito, como (a_n) é somável, com soma s, dado $\varepsilon > 0$, $\exists J_0$ finito, t.q. $\forall J$ finito, com $J_0 \subset J \subset \mathbb{N}$ t.q. $|s - \sum_{n \in J} a_n| < \varepsilon$.

Como J_0 é finito, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $J_0 \subset \{1, \dots, n_0\}$.

Em particular, $\forall n \geq n_0$, $|s - \sum_{i \leq n} a_i| < \varepsilon$.

~~Dado que~~ $\cancel{|s - \sum_{i \leq n_0} a_i| < \varepsilon}$, ~~segue-se que~~

$$\cancel{|s - \sum_{i \geq 1} a_i| \leq |s - \sum_{i \leq n_0} a_i| + |\sum_{i > n_0} a_i|}$$

Mas isso é o mesmo que dizer que $s_n = \sum_{i \leq n} a_i$ converge à s quando $n \to \infty$, i.e., que $\sum_{i \geq 1} a_i = s$.

Agora, segue-se da afirmação anterior e do item (a) que $\sum_{i \geq 1} a_i$ é comutativamente conv., e portanto, abs. conv.

($\longleftarrow$) Assuma que $\sum a_n \overset{=s}{}$ é abs. conv., logo conv.

Seja $\varepsilon > 0$. Segue-se da definição de soma de uma série que $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.q. $|s - \sum_{n > n_0} a_n| < \varepsilon/2$, $\forall n > n_0$

Faça $J_0 = I_{n_0} = \{1, \dots, n_0\}$. Seja J um conj. finito t.q. $J_0 \subset J \subset \mathbb{N}$; em particular, $\exists\, m \in \mathbb{N}$ t.q. $J \subset I_m$.

Agora, segue-se do critério de Cauchy para séries abs. conv. que $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0' \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall\, n \geq n_0'$, $|a_{n_0'+1}| + \dots + |a_n| < \varepsilon/2$.

Logo, $\left| \sum_{i \in J \setminus J_0} a_i \right| \leq |a_{n_0'+1}| + \dots + |a_m| < \varepsilon/2$.

Combinando ~~as afirma~~ os resultados anteriores, concluímos que para todo J finito t.q. $I_N \subset J \subsetneq \mathbb{N}$,

$$\left| s - \sum_{i \in J} a_i \right| = \left| s - \sum_{i \in J_N} a_i - \sum_{i \in J \setminus J_N} a_i \right|$$

$$\leq \left| s - \sum_{n \leq N} a_n \right| + \left| \sum_{i \in J \setminus J_N} a_i \right| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon,$$

em que $N = \max\{n_0, n_0'\}$.