1) Mostre que a sequência de funções $f_n : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, definidas por $f_n(x) = x^n / (1 + x^n)$, converge pontualmente. Determine a função limite e mostre que a convergência não é uniforme.

• Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para $f : X \to \mathbb{R}$ se, para cada $x \in X$, tem-se $f_n(x) \to f(x)$, isto é:

$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists N_0 > 0$ tal que $n \geq N_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

• Uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para $f : X \to \mathbb{R}$ se é possível escolher N acima sem depender de x, isto é:

$\forall \varepsilon > 0, \exists N_0 > 0$ tal que $\forall x \in X, n \geq N_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Diz-se que uma sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge simplesmente para a função $f : X \to \mathbb{R}$ quando, para cada $x \in X$, a sequência de números $(f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots)$ converge para o número $f(x)$. Ou seja, para todo $x \in X$ fixado, tem-se $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

A convergência simples às vezes também se chama convergência ponto a ponto ou convergência pontual.

A diferença entre a convergência simples e uniforme é que: a simples $\exists N_0$ tal que $N_0 = N_0(\varepsilon, x)$, o qual depende de ε e de x, tal que: $n \geq N_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
Já a convergência uniforme: $\forall \varepsilon > 0$ dado, é possível obter N_0 que sirva $\forall x \in X$, dizemos que $f_n \to f$

uniformemente em X. Ou seja:

$\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ seja qual for $x \in X$.

Para provar que f_n não converge uniformemente para f em X devemos exibir um $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $n_0 \in \mathbb{N}$ se pode achar $n > n_0$ e $x \in X$ com $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Resposta: A sequência de funções $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$, com $f_n(x) = \frac{x^n}{1+x^n} = 1 - \frac{1}{1+x^n}$, converge simplesmente, pois em 0 a sequência é constante assumindo o valor zero, para $x \in (0,1)$ fixo e vale $\lim x^n = 0$, logo:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = 0$$

Agora se $x = 1$, temos que a sequência é constante assumindo o valor $\frac{1}{2}$.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1^n}{1+1^n} = \frac{1}{2}$$

Temos que se $x > 1$, então:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{x^n}{1+x^n} = \infty, \text{ e portanto } \frac{x^n}{1+x^n} = 1 - \frac{1}{1+x^n} \to 1$$

e finalmente a convergência não pode ser uniforme, pois apesar das funções serem contínuas não há convergência para a função contínua dada.