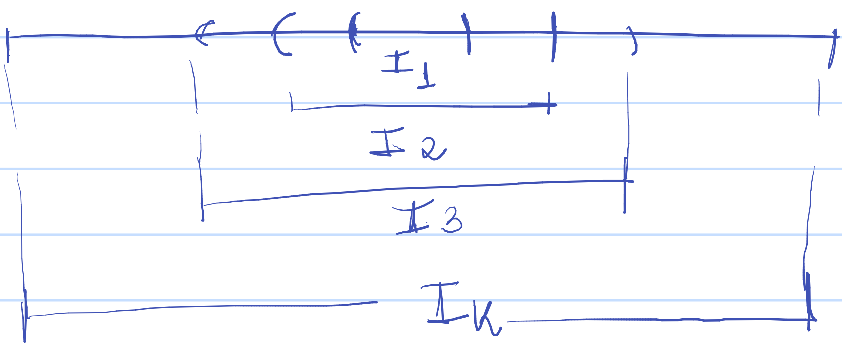
5) Sejam $I_1 \supset I_2 \supset \ldots I_N \supset \ldots$ intervalos limitados dois a dois distintos, cuja interseção $I = \bigcap_{N \geq 1} I_N$ não é vazia.

Demonstre que I é um intervalo, o qual nunca é aberto.

Sejam (I_K) uma sequência de intervalos limitados dois a dois disjuntos tais que $I_K \supset I_{K+1}$ $\forall K \in \mathbb{N}$ e a interseção

$I = \bigcap_{K=1}^{\infty} I_K$ não é vazia.

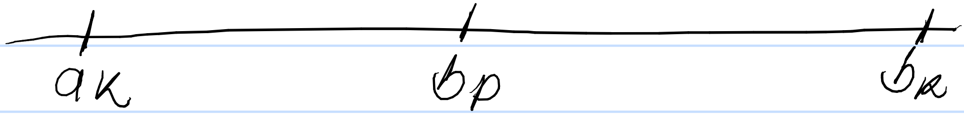
Nessas condições I é um intervalo que não é um intervalo aberto.



- Diz que <u>a</u> é <u>aderente</u> a X quando há sequência $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$. O <u>fecho de X</u> é o conjunto $\overline{X}$ dos pontos aderentes a X. Se $F = \overline{F}$, o conjunto F é <u>fechado</u>. Se $X \subseteq Y \subset \overline{X}$, diz-se que X é <u>denso</u> em Y.

- O ponto <u>a</u> é aderente a X se, e somente se, toda vizinhança de <u>a</u> intersecta X.

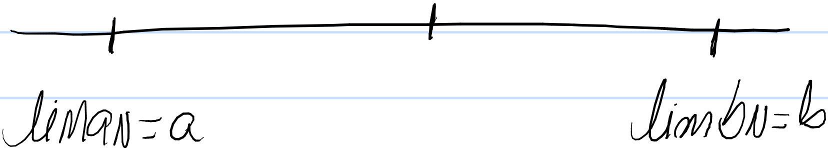
Sejam a_k e b_k extremidades de I_k, então vale $a_k \leq b_p$, $\forall k, p \in \mathbb{N}$.



As sequências (a_k) e (b_k) são limitadas, (a_k) é não-decrescente e (b_k) é não-crescente. Logo elas são convergentes sendo $\lim a_n = a$ e $\lim b_n = b$.

(a_k) é dada por $x_n \leq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$

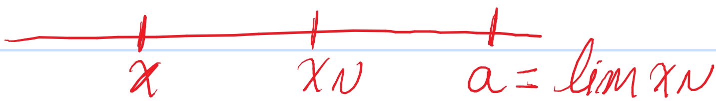
(b_k) é dada por $x_n \geq x_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$



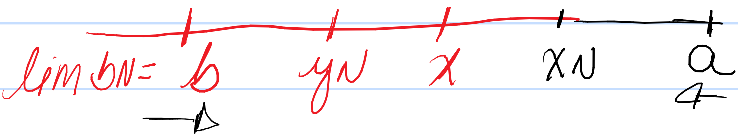
1) Dado $x \in I$ não pode valer $x < a$, pois existe x_N tal que $x < x_N < a$ e (x_N) é não-decrescente, da mesma forma não pode valer $b < x$, pois com isso existe y_N tal que $b < y_N < x$ e y_N é não-crescente.

(x_N) é não decrescente: $a_N < a_{N+1}$ $\forall N \in \mathbb{N}$

Então: $x < x_N < a$

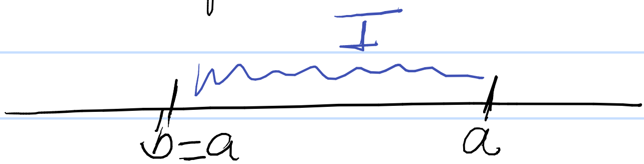


(y_N) é não crescente: $a_N > a_{N+1}$ $\forall N \in \mathbb{N}$



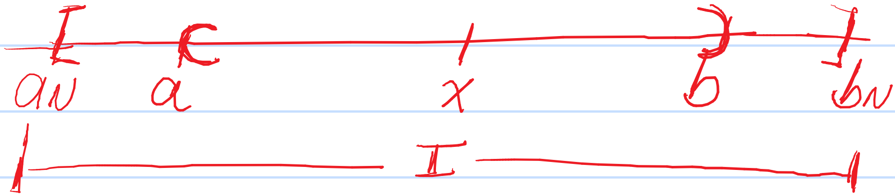
Temos que $I \subset [a,b]$

2) Se $b = a$, então $I \subset [a,a] = \{a\}$ de onde segue $I = \{a\}$.



3) Se $a < b$ então $\forall x$ com $a < x < b \Rightarrow a_N < a < x < b < b_N$, logo $(a,b) \subset I \subset [a,b]$.

$a < b \rightarrow \forall x$ com $a < x < b$



$\lim a_N = a$ $\lim b_N = b$

Como os I_N são dois a dois disjuntos, ou seja $I_N \cap I_{N+1} = \emptyset$. Então (a_N) ou (b_N) tem uma infinidade de termos distintos.

Por exemplo seja (a_N) com uma infinidade de de termos distintos, então $\forall N \in \mathbb{N}$ existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $a_N < a_{N+p} \leq a$.

Portanto $a \in (a_N, b_N) \subset I$, como $a \in I$ então I não pode ser um intervalo aberto, sendo do tipo $[a, b)$ ou $[a, b]$.

Temos então que I é fechado ou ele não é fechado e nem aberto.

$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset \ldots\ldots I_{N-1} \cap I_N \neq \emptyset$