1) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Demonstre que:

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)dx\right| \leq \overline{\int_a^b} |f(x)|dx.$$

Resposta: Pelo Corolário do Teorema 1, temos:

Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para quaisquer partições P, Q de $[a,b]$, tem-se $s(f;P) \leq S(f;Q)$.

Assim toda soma inferior de f é menor do que ou igual a qualquer soma superior.

Se $m = \inf$ e $M =$ supremo de f em $[a,b]$, temos que:

$$m.(b-a) \leq s(f;p) \leq S(f;p) \leq M.(b-a)$$

Para toda partição do intervalo $[a,b]$.

Assim:

$$m(b-a) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq M.(b-a)$$

Ao tomarmos, $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in [a,b]$, então:

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)dx\right| \leq K(b-a)$$, e como $|f(x)| \leq K$,

temos:

$$\overline{\int_a^b} |f(x)|dx \leq \overline{\int_a^b} K\,dx = K(b-a)$$

Então:

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| \leq K(b-a) \geq \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx,$$

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| \leq \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx \leq K(b-a)$$

Então: $\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| \geq 0$, e $\overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx \geq 0$

dado que $|f(x)| \leq K$ e $K \geq 0$. Portanto

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| = \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx \leq \overline{\int_a^b} K\,dx = K\overline{\int_a^b} dx =$$

$K(b-a)$. Então:

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,dx\right| = \overline{\int_a^b} |f(x)|\,dx.$$

Segunda resolução:

Devemos mostrar que a função $x \to f(x)$ é integrável. Para $x, y \in [a,b]$ quaisquer temos:

$$||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$$

Então pelo Corolário do Lema 5: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para todo $X \subset [a,b]$ não-vazio, tem-se $w(f; X) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in X\}$.

Temos que para qualquer subconjunto $X \subset [a,b]$, temos que $w(|f|;X) \leq w(f;X)$.

Em particular, dada uma partição arbitrária P de $[a,b]$, temos:

$$w(|f|) \leq w(f)$$

Segue-se pelo Teorema 4: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. As seguintes afirmações são equivalentes:

1) f é derivável
2) Para todo $\varepsilon > 0$ existem partições P, Q do intervalo $[a,b]$ tais que $S(f;Q) - s(f;P) < \varepsilon$,

3) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição P do intervalo $[a,b]$ tal que $S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon$,

4) Para todo $\varepsilon > 0$, existe uma partição $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_N\}$ do intervalo $[a,b]$ tal que

$$\sum_{i=1}^{N} w_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon.$$

Temos que $|f|$ é integrável.

Além disso, para todo $x \in [a,b]$, vale:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Como $|f|$ é integrável, podemos usar: Para todo $c \in \mathbb{R}$, $c \cdot f$ é integrável e:

$$\int_a^b c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int_a^b f(x)\, dx$$

Se $c = -1$ e usamos: Se $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a, b]$, então:

$$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx$$

Em particular, se $f(x) \geq 0$, para todo $x \in [a, b]$, então,

$$\int_a^b f(x)\, dx \geq 0$$

Para obter:

$$-\int_a^b |f(x)|\, dx \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$, ou seja:

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$