18) Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ contínua. Dado $\varepsilon>0$, demonstre a existência de pontos $a_i\in[a,b]$, $a=a_0<a_1<a_2<\dots<a_N=b$ tais que, para cada $i=1,2,\dots,N$, se $x,y\in[a_{i-1},a_i]$, então $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Resposta: Seja $\varepsilon>0$, devemos mostrar que

$$a=a_0<a_1<\dots<a_{N-1}<a_N=b$$

tais que, para cada $i=1,2,\dots,N$. Temos que:

$$x,y\in[a_{i-1},a_i]\to|f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

Como o intervalo $[a,b]$ é compacto e $f:[a,b]\to$ é contínua, temos que:

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é uniformemente contínua. Então dado $\varepsilon>0$, existe $\delta>0$ tal que $x,y\in X$, e $|x-y|<\delta\to|f(x)-f(y)|<\varepsilon$.

Assim a família de intervalos abertos:

$$\left\{\left(p-\frac{\delta}{2},p+\frac{\delta}{2}\right)\right\}_{p\in[a,b]}$$

É uma cobertura aberta para o intervalo compacto $[a,b]$. Assim temos que existe uma partição:

$$a=a_0<a_1<\dots<a_{N-1}<a_N=b$$

Do intervalo $[a,b]$ tal que para cada subintervalo $[a_k,a_{k+1}]$ existe $p_k\in[a,b]$ tal que: $[a_k,a_{k+1}]\subset\left(p_k-\frac{\delta}{2},p_k+\frac{\delta}{2}\right)$.

Com isso, ao utilizarmos uma partição de $[a,b]$ como a anterior, dados:

$$x, y \in [a_k, b_k] \subset (p_k - \delta/2, p_k + \delta/2),$$ é válida a desigualdade:

$$|x-y| < \delta$$

E, por isso e pela escolha de δ, temos que:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Portanto, temos uma partição de $[a,b]$ com a propriedade desejada.