19) Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integráveis. Para toda partição $P = \{t_0, \dots, t_N\}$ de $[a,b]$, sejam $P^* = (P, \xi)$ e $P^\# = (P, \nu)$ pontilhamentos de P.

Demonstre que:

$$\lim_{|P| \to 0} \sum f(\xi_i) g(\nu_i)(t_i - t_{i-1}) = \int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

Resposta: $\sum f(\xi_i) g(\nu_i)(t_i - t_{i-1}) = \sum [f(\xi_i) g(\xi_i) +$
$f(\xi_i)(g(\nu_i) - g(\xi_i))](t_i - t_{i-1})$

Se $B = \sum f(\xi_i)(g(\nu_i) - g(\xi_i))(t_i - t_{i-1})$

Então temos que mostrar que $\lim_{|P| \to 0} B = 0$,

e desta forma teremos:

$$\lim_{|P| \to 0} f(\xi_i) g(\nu_i)(t_i - t_{i-1}) = \lim_{|P| \to 0} f(\xi_i) g(\nu_i)(t_i - t_{i-1}) =$$
$$\int_a^b f(x) g(x)\, dx$$

Se tomarmos $M = \sup\{|f(x)|, x \in [a,b]\}$. Como g é integrável e dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|P| < \delta \to |\Sigma(f, P^\#) - \Sigma(f, P^*)| < \varepsilon/M.$$

$|P| < \delta \to \left|\sum f(\xi_i)(g(\nu_i) - g(\xi_i))(t_i - t_{i-1})\right| \leq$

$M\left|\sum (g(\nu_i) - g(\xi_i))(t_i - t_{i-1})\right| = M\left|\sum g(\nu_i) \cdot\right.$

$\left.(t_i - t_{i-1}) - \sum g(\xi_i)(t_i - t_{i-1})\right| = M\left|\sum(g, P^{\#}) - \right.$

$\left.\sum(g, P^{*})\right| < M \cdot \dfrac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$

Portanto $\lim\limits_{|P| \to 0} \sum f(\xi_i)(\varphi(\nu_i) - \varphi(\xi_i))(t_i - t_{i-1}) = 0.$

<u>Teorema 14:</u> Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $S(f; P) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon$ qualquer que seja a partição P com norma menor do que δ.