1) Demonstre que:

a) Para todo $X \subset \mathbb{R}$, X' é fechado.

Seja $a \in \overline{X'}$, dado $\varepsilon > 0$, existe $x \in X'$ tal que $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$. E como $x \in X'$, existem infinitos elementos de X em $(x-\delta, x+\delta)$, onde:

$$\delta = \min\{|x - (a-\varepsilon, a+\varepsilon)|\}.$$

Assim, infinitos elementos de X pertencem à $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \supset (x-\delta, x+\delta)$.

Isso implica que $a \in X'$, e pode-se concluir que $X' \supset \overline{X'}$.

b) Se F for fechado e infinito enumerável, então F terá uma infinidade de pontos isolados.

Teorema 9: Seja $F \subset \mathbb{R}$ não-vazio tal que $F = F'$. (Isto é, F é um conjunto fechado não-vazio sem pontos isolados). Então F é não-enumerável.

Corolário 1: Todo conjunto fechado enumerável não-vazio possui algum ponto isolado.

Resposta: Pelo Corolário 1 do teorema 9, temos que F possui algum ponto isolado. Suponhamos que $x_1, x_2, \ldots, x_N$ são

pontos isolados de F. Assim temos que
$F - \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ é fechado

Além disso, $F - \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ é um conjunto sem pontos isolados e infinito e enumerável, que contradiz o corolário 1 do teorema 9.

Então F possui uma infinidade de pontos isolados.