7) Demonstre que uma função $f: X \to \mathbb{R}$ é descontínua no ponto $a \in X$ se, e somente se, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência de pontos $x_N \in X$ tais que $|x_N - a| \leq 1/N$ e $|f(x_N) - f(a)| \geq \varepsilon$ para todo $N \in \mathbb{N}$.

Resposta: Dado que para $\delta = 1/N$, temos que $|x_N - a| \leq 1/N$ e $|f(x_N) - f(a)| \geq \varepsilon$, ou seja $f(x)$ esta afastado de a e temos uma descontinuidade.

Se tomarmos $N=1$, temos:

$|x_N - a| < 1/1$ e $|f(x_N) - f(a)| \geq \varepsilon$

Então dada uma $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim x_N = a$, mas o $\lim f(x_N) \neq f(a)$

Se tomarmos $N=2$, temos:

$|x_N - a| < 1/2$ e $|f(x_N) - f(a)| \geq \varepsilon$

Então dada uma $(x_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim x_N = a$, mas o limite $\lim f(x_N) \neq f(a)$

Ao repetir sucessivamente até N, temos que:

$|x_N - a| \leq 1/N$ e $|f(x_N) - f(a)| \geq \varepsilon$

Então da a sequência $(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$ e $\lim x_N = a$, mas o limite de

$\lim f(x_N) \neq f(a)$

Então pelo teorema 4: "Para que $f: X \to \mathbb{R}$ seja contínua no ponto $a \in X$ é necessário e suficiente que se tenha $\lim f(x_N) = f(a)$ para toda sequência de pontos $x_N \in X$ com $\lim x_N = a$".

Temos que o resultado nega o $\lim f(x_N) \neq f(a)$, então a f é descontínua no ponto $\underline{a}$.