Se a não é limite de (x_n), então existem $\varepsilon > 0$ e $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito tais que $|x_{n'} - a| \geq \varepsilon$, para todo $n' \in \mathbb{N}'$.

Como (x_n) é limitada, temos que $(x_{n'})_{n' \in \mathbb{N}}$ também é limitada.

Portanto, por Bolzano-Weierstrass, existe $\mathbb{N}'' \subset \mathbb{N}'$ tal que $(x_{n''})_{n'' \in \mathbb{N}''}$ é convergente, e portanto $\lim x_{n''} = b$.

Assim temos então que $|b - a| = \lim |x_{n''} - a| \geq \lim \varepsilon = \varepsilon$. E com isso conclui-se que $|b - a| \geq \varepsilon$.
Então $b \neq a$.

Teorema de Bolzano-Weierstrass:
Toda sequência limitada (a_n) possui uma subsequência convergente.