1) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Mostre que o conjunto $Z_f = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\}$ é fechado.

Conclua que se $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas, então $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$ é um conjunto fechado.

- Diz-se que $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in V_\delta(a) = X \cap (a-\delta, a+\delta) \to$

$f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$.

Diz que f contínua, se f for contínua em todos os pontos de X

- Com esta definição, $f(x)$ é contínua em $\underline{a} \in X$ se e somente se, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou $a \notin X'$.
- Se $F = \bar{F}$, temos que F é fechado.
- O fecho de X é o conjunto $\bar{X}$ dos pontos de aderência a X.
- $\underline{a}$ é aderente a X quando há sequência $x_n \in X$ com $\lim x_n = a$.
- O ponto a é aderente a X se, e somente se toda vizinhança de $\underline{a}$ intersecta X.

Resposta: Temos que provar primeiro que, seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, e se $f(x) = 0 \ \forall x \in X$, então $f(x) = 0 \ \forall x \in \bar{X}$. Ou $\bar{X} = Z_f$, onde $\bar{X}$ é o fecho de X.

Seja $x_1 \in \overline{X}$, então $x_1 = \lim x_N$, onde (x_N) é uma sequência de pontos $x_N \in X$. Assim x_1 é um ponto de aderência de (x_N).

Como f é contínua e $f(x) = 0$ para todo $x \in X$, então $f(x_1) = \lim f(x_N) = \lim 0 = 0$. Assim, temos que $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{X}$, e consequentemente pertencente a Z_f. E Z_f é fechado.

Agora dados $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas, então $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$, e C é um conjunto fechado.

Dado $f(x) = 0$ e $g(x) = 0$, se $x_1 = \lim x_N$ e $y_1 = \lim y_N$, então:

$f(x_1) = \lim f(x_N) = \lim 0 = 0$, e

$g(y_1) = \lim g(y_N) = \lim 0 = 0$

Assim temos que x_1 é ponto de aderência de (x_N), e y_1 é ponto de aderência de (y_N).

Com isso temos que $x_1 \in \overline{X}$ e $y_1 \in \overline{Y}$, sendo $\overline{X}$ e $\overline{Y}$ conjuntos fechados.

Como C é dado por $C = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = g(x)\}$ e $f(x) = 0 = g(x)$, temos que C é fechado.