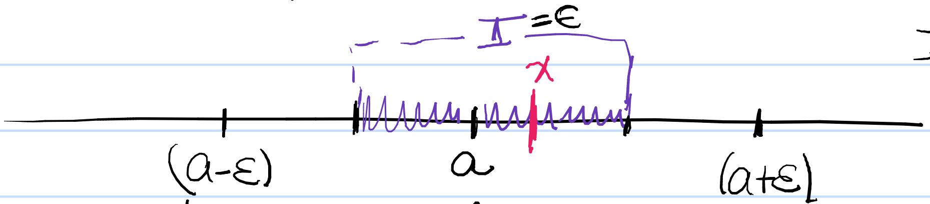
2) Considere a seguinte sentença: $\forall \varepsilon>0\ \exists \gamma>0\ (x\in X \cap 0<|x-a|<\varepsilon \rightarrow |f(x)-L|\leq \gamma)$. Mostre que f cumpre esta condição se, e somente se, f é limitada em qualquer intervalo limitado de centro a. No caso afirmativo, L pode ser qualquer número real.

Definição: Seja $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ e $a\in X'$. Dizemos que $\lim_{x\rightarrow a} f(x) = L$ quando

$\forall \varepsilon>0, \exists \gamma>0: x\in((X-\{a\})\cap(a-\gamma, a+\gamma)) \longrightarrow f(x)\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$

Resposta: i) Seja I um intervalo com comprimento ε e seu centro a. Então:



$I \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$

Pela hipótese, existe $\gamma>0$ tal que: $|f(x)|-|L|\leq|f(x)-L|<\gamma$
Então para todo $x\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, e como para todo $x\in I$ temos que: $|f(x)|<\gamma+|L|$. Com isso f é limitada em I.

ii) Seja $\varepsilon>0$, existe $A\in\mathbb{R}$ tal que para todo $x\in(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ temos que $|f(x)|<A$. Com isso temos que para todo $x\in\mathbb{R}$ tal que:

$$|x-a|<\varepsilon \longrightarrow |f(x)-L|\leq|f(x)|+|L|<A+|L|$$

Assim, tomando $\gamma = A+|L|$ teremos a condição desejada, e com ε é arbitrário a hipótese do enunciado é valida.