9| ① Dada uma sequência de funções $f_N : X \to \mathbb{R}$, suponha que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\sqrt[N]{|f_N(x)|} \leq c < 1,$$ para todo $x \in X$ e para todo $N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.

Demonstre que $\sum |f_N(x)|$ e $\sum f_N(x)$ convergem uniformemente em X.

Teorema: Teste M de Weierstrass: Se $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ é normalmente convergente, então $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ e $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ são uniformemente convergentes. Lembrando que uma série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ é uniformemente convergente se existe c_k tal que $|f_k(x)| \leq c_k \; \forall x \in X, N \in \mathbb{N}$, e X sendo o domínio de cada f_k.

- Seja $f_N : X \to \mathbb{R}$, suponha que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[N]{|f_N(x)|} \leq c < 1 \; \forall x \in X$ e $N > N_0$, então: $\sum_{k=1}^{\infty} |f_N(x)|$ e $\sum_{k=1}^{\infty} f_N(x)$ convergem uniformemente em X.

Resposta: Temos que $f_N : X \to \mathbb{R}$, e para um dado $c \in \mathbb{R}$, temos que $\sqrt[N]{|f_N(x)|} \leq c < 1$, $\forall x \in X$ e $\forall N \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Portanto temos que $|f_N(x)| \leq c^N < 1$ e $\forall x \in X$ e $N > N_0$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} c^N$, podemos aplicar o teorema de Weierstrass.

Assim como $|f_N(x)| \leq C^N < 1$, então:

$|f_N(x)| < 1$ para todo x no Domínio de f_N

Então $\sum |f_N(x)| \leq \sum C^N$, converge pois é uma série geometrica com $0 < c < 1$ e pelo Teorema "Teste M de Weierstrass" temos que $\sum |f_N(x)|$ converge uniformemente.

Temos que: $\sum |f_N(x)| \leq \sum f_N(x)|$, tomando $x > 0$ temos que:

$\sum |f_N(x)| = \sum f_N(x)|$, logo $\sum f_N(x)|$ é uniformemente

e de acordo com a proposição: "Seja $f_N : X \to \mathbb{R}$, suponha que exista $C \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[N]{|f_N(x)|} \leq C \leq 1$ $\forall x \in X$ e $N > N_0$, então $\sum_{N=1}^{\infty} |f_N(x)|$ e $\sum f_N(x)|$ convergem uniformemente em X.

Assim tomando $N > N_0$ e como $\sum |f_N(x)| \leq \sum f_N(x)|$ temos que $\sum f_N(x)|$ converge uniformemente.