8) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Demonstre que as afirmações a seguir são equivalentes:

c) Se K for compacto, então $f^{-1}(K)$ será compacto.

Teorema 15: Seja $X \subset \mathbb{R}$ compacto. Se $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua e injetiva então $Y = f(X)$ é compacto e a função inversa $f^{-1}: Y \to \mathbb{R}$ é contínua.

Teorema 14: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ contínua. Se X é compacto então $f(X)$ é compacto.

a) $\lim_{x \to \infty} |f(x)| = \lim_{x \to -\infty} |f(x)| = \infty$

b) Se $|x_n| \to \infty$, então $|f(x_n)| \to \infty$.

1) $b \to c$

Suponha que exista K compacto tal que $f^{-1}(K)$ não seja compacta. Como K é fechado e f é contínua, então necessariamente $f^{-1}(K)$ é fechado.

Com efeito, se $x \in f^{-1}(K)$ então existe $x_n \in f^{-1}(K)$ tal que $x_n \to x$. Agora $\forall n$, temos que $f(x_n) \in K$, donde se segue da continuidade de f e da compacidade de K que o $\lim f(x_n) = f(\lim x_n) = f(x) \in K$ e, K é fechado.

Como $f(x) \in K$, $x \in f^{-1}(K)$, assim $f^{-1}(K)$ é ilimitado: $\exists (y_n)$, $y_n \in f^{-1}(K)$, $|y_n| \to \infty$.

Então $\exists (x_n)$, $x_n \in K$, tal que $f(y_n) = x_n$.

Como por hipótese, $|f(y_n)| \to \infty$, segue-se que $|x_n| \to \infty$. Isto é, que K não é limitado. Temos portanto um absurdo.

Logo, K é compacto e implica que $f^{-1}(K)$ é compacto.

2) $c \to a$

Suponha que $\lim_{x \to +\infty} |f(x)| \neq +\infty$, isto é,

temos que $\exists M > 0$ $\forall \delta > 0$ $\exists x > \delta$ tal que

$|f(x)| < M$. Em particular, $\exists (x_n)$, onde

$x_n \to +\infty$, tal que $|f(x)| < M$.

Seja $y_n = f(x_n)$, e note que $\forall n$, $|y_n| < M$.

Logo, o compacto $[-M, M]$ tem pré-imagem

por f ilimitada, isto é, $f^{-1}([-M, M])$ não

é compacta. Então tal contradição

nos permite concluir que $\lim_{x \to \infty} |f(x)| = +\infty$.

3) $a \to b$): Dado $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$, dizemos que o limite $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$, quando:

$$\forall A > 0, \exists V_\delta^*(a) \text{ onde } f(x) \in (A, \infty)$$

Temos que $\lim_{x \to +\infty} |f(x)| = \infty$, ou seja:

Dado $A \in \mathbb{R}$, $\exists \delta > 0$ onde:

$$\forall A > 0, \exists V_\delta^*(a) \text{ onde } f(x) \in (A, +\infty),$$

como a $f(x)$ esta em modulo temos:

$$\forall A > 0 \; \exists V_\delta^*(a) \text{ onde } |f(x)| \in (A, +\infty)$$

No caso de $\lim_{x \to -\infty} |f(x)|$, temos:

$\forall A > 0, \exists V_\delta^*(a)$ onde $f(x) \in (-\infty, A)$, mas $f(x)$ esta em modulo então: $|f(x)|$

$$\forall A > 0, \exists V_\delta^*(a) \text{ onde } |f(x)| \in |(-\infty, A)| = |(A, +\infty)|$$

Então temos que $\lim_{x \to \infty} |f(x)| = \lim_{x \to -\infty} |f(x)| = \infty$

Então:

$\infty = \lim |f(x_n)| \neq f(x)$, temos portanto que existe uma sequência $x_n \in X$ tal que que $|x_n|$ é divergente e $|x_n| = \infty$