

9) Dada uma sequência de funções $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, suponha que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c < 1, \text{ para todo } x \in X \text{ e para todo } n \in \mathbb{N} \text{ suficientemente grande.}$$

Demontre que $\sum |f_n(x)|$ e $\sum f_n(x)$ convergem uniformemente em X .

Teorema: Teste M de Weierstrass: Se $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ é normalmente convergente, então $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|$ e $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ são uniformemente convergentes. Lembrando que uma série $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ é uniformemente convergente se existe c_k tal que $|f_k(x)| \leq c_k \forall x \in X, n \in \mathbb{N}$, e X sendo o domínio de cada f_k .

• Seja $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, suponha que exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c < 1 \forall x \in X$ e $n > n_0$, então: $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)|$ e $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ convergem uniformemente em X .

Resposta: Temos que $f_n: X \rightarrow \mathbb{R}$, e para um dado $c \in \mathbb{R}$, temos que $\sqrt[n]{|f_n(x)|} \leq c < 1, \forall x \in X$ e $\forall n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande. Portanto temos que $|f_n(x)| \leq c^n < 1$ e $\forall x \in X$ e $n > n_0$. Como $\sum_{k=1}^{\infty} c^k$, podemos aplicar o Teorema de Weierstrass.

Assim como $|f_n(x)| \leq C^k < 1$, então:

$|f_n(x)| < 1$ para todo x no domínio de f_n

e com isso: $\sum |f_n(x)| < C^k < 1 \rightarrow \sum |f_n(x)| < 1$

e portanto $\sum |f_n(x)|$ é uniformemente convergente pelo teorema de Weierstrass.

Agora como $|\sum f_n(x)| \leq \sum |f_n(x)|$ e

tomando $x > 0$ para todo $x \in \mathbb{N}$, temos que

$$\sum |f_n(x)| \leq \sum f_n(x)$$

Como $\sum |f_n(x)| < C^k < 1 \rightarrow \sum |f_n(x)| < 1$,
logo:

$$\sum |f_n(x)| \leq \sum f_n(x) < C^k < 1$$

$$\sum |f_n(x)| \leq \sum f_n(x) < 1 \rightarrow \sum f_n(x) < 1 \text{ e}$$

$$\sum f_n(x) < C^k$$

Então pelo teorema de Weierstrass temos que

$\sum f_n(x)$ é uniformemente convergente.