5) Seja $f: I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo I (limitada ou não). Suponha que $|f'(x)| \leq c$ para todo $x \in I$, com $0 \leq c < 1$.

Assuma que $f(I) \subset I$, demonstre que dado $x_0 \in I$, a sequência (x_n), definida recursivamente por $x_n = f(x_{n-1})$, é convergente. Se $a = \lim x_n$, demonstre ???

é o único ponto de I tal que $f(a) = a$. Sugestão: mostre que (x_n) é uma sequência de Cauchy.

O enunciado não ficou claro, eu entendi que era para descobrir o ponto fixo de contração.

<u>Resposta</u>: Seja $f: I \to \mathbb{R}$, e I um intervalo fechado no domínio dado por:

$$I = [a - \delta, a + \delta] \to |f(y) - f(x)| \leq c|y - x|$$

Temos que $c \in [0, 1)$ e $|f(a) - a| \leq (1 - c)\delta$ então existe um único $x \in I$ com $f(x) = x$.

i) Assim f é contração, e I é fechado, para que possamos usar o teorema do ponto fixo de contrações, basta mostrarmos que $f(I) \subset I$, isto é $x \in I$ implica que $f(x) \in I$.

Se $x \in I = [a-\delta, a+\delta]$ então $[x-a] < \delta$, o que implica por desigualdade triangular que:

$$|f(x) - a| < |f(x) - f(a)| + |f(a) - a| \leq c|x-a| + (1-c)\delta \leq c\delta + (1-c)\delta = \delta$$

Portanto $f(x)$ pertence ao intervalo $[a-\delta, a+\delta] = I$ e podemos usar o teorema do ponto fixo das contrações, com isso f possui um único ponto fixo.

ii) Temos que $f: I \to \mathbb{R}$ é derivável, então:

$$|f'(x)| \leq c \quad \forall x \in I \text{ e } 0 \leq c < 1$$

Como $f(I) \subset I$, temos pelo teorema do Valor Médio que:

$$f'(z) = \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \to f(x) - f(y) = f'(z) \cdot (x-y)$$

$$|f(x) - f(y)| = c \cdot (x-y)$$

Então f é lipschitziana, então f é contínua no intervalo fechado dado por:

$$[a-\delta, a+\delta]$$

e derivável no intervalo semi-aberto $[0, 1)$.

Portanto temos que:

$$f(x) - f(y) = f'(z) \cdot (x-y), \quad \text{com } |f'(z)| \leq c$$

E: $|f(x) - f(y)| = |f'(z)| \cdot |x-y| \leq c \cdot |x-y|$