Lista 9

2. (a) $\rightarrow$ (b)

Com efeito, se $f(c) \neq 0$ então $|f(c)| > 0$. Agora como f é contínua em c, $\exists\, \delta > 0$ t.q. se $x \in (c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$ então $|f(x)| > |f(c)|/2$.

Assim,
$$\int_a^b |f(x)|dx \geq \int_{(c-\delta,c+\delta)\cap[a,b]} |f(x)|dx \geq \frac{|f(c)|}{2}|I| > 0,$$

em que $I = (c-\delta, c+\delta) \cap [a,b]$. Tal contradição nos permite concluir que $f(c) = 0$.

(b) $\rightarrow$ (c)

Suponha que $\text{int}\, X \neq \phi$. Então, $\exists\, d \in X\ \exists\, \delta > 0$ t.q. $\forall\, x \in (d-\delta, d+\delta)$, $f(x) \neq 0$, i.e., $|f(x)| > 0$

Como f é integrável, o conjunto de pontos de descontinuidade de f tem conteúdo nulo. Pela hipótese (b), X é subconjunto do conjunto de pontos de descontinuidade de f.

Logo, dado $\varepsilon > 0$, $\exists$ uma coleção enumerável de intervalos abertos, $\{I_j\}$, t.q. $\sum_{j \geq 1} |I_j| < \varepsilon$ e $X \in \bigcup I_j$

~~Em part~~ Tomando $\varepsilon = \delta$, obtemos uma coleção enumerável de intervalos abertos $\{I_j\}$ t.q. $\sum |I_j| < \delta$ e $X \subset \bigcup I_j$

Como $X \supset (d-\delta, d+\delta)$, temos uma contradição. Logo, $\text{int}\, X = \phi$

Digitalizado com CamScanner

(c) $\rightarrow$ (a)

~~Demonstremos a contrapositiva: suponha que~~ ~~$\int_a^b |f(x)|dx > 0$.~~ Demonstremos a contrapositiva. Suponha $\int_a^b |f| > 0$. Como f é integrável, o conjunto de pontos de descontinuidade de f tem conteúdo nulo. Logo, o conjunto de pontos de continuidade de f tem interior não-vazio (pois, senão, o conjunto de pontos de descontinuidade de f seria denso em $[a,b]$, um absurdo).

Denotemos tal conjunto por Y. Claramente, $Y = \text{int}\, Y$. Se $f|_Y \equiv 0$, teríamos $\int |f(x)|dx = 0$*. Logo, $\exists\, d \in Y$ ~~Como $\text{int}\, X' = \phi$~~ t.q. $f(d) \neq 0$. Sendo d um ponto interior de $[a,b]$ e $d \in X$, segue-se que $\text{int}\, X \neq \phi$.

* Pois $\forall \varepsilon > 0$ $\int_a^b |f| = \int_Y |f| + \int_{Y^c} |f| < M\varepsilon$, em que $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$,

Sendo $\varepsilon > 0$ arbitrário, o resultado se segue.

Aqui, como Y é aberto e Y^c é a reunião enumerável de intervalos fechados cuja soma dos comprimentos é menor do que ε, temos que

$$\int_a^b |f| \leq \sum_{j \geq 1} \int_{I_j} |f| \leq M \sum_{j \geq 1} |I_j| < M\varepsilon$$