A integral como limite de somas

Seja $P = \{t_0, \ldots, t_n\}$ uma partição do intervalo $[a,b]$. Chamamos a norma de P ao número $|P|$ = maior comprimento:

$|t_i - t_{i-1}|$ dos intervalos de P.

Mostraremos inicialmente que a integral superior de uma função limitada f é o limite das somas superiores $S(f;P)$. Isto se escreve:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} S(f;P).$$

O significado preciso da fórmula é dado pelo

Teorema 14: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$S(f;P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

Qualquer que seja a partição P com norma menor do que δ.

Corolário: A integral inferior de uma função limitada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é o limite das somas inferiores $s(f;P)$ quando a norma da partição P tende a zero, ou seja:

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \lim_{|P| \to 0} s(f;P).$$

Com efeito: $-s(f;P) = S(-f;P)$ e

$$-\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} -f(x)\,dx$$

Em seguida, caracterizamos as funções integráveis e exprimiremos suas integrais em termos de limites de soma.

Pontilhar uma partição $P = \{t_0, \ldots, t_N\}$ é escolher, em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ um ponto ξ_i. Portanto, $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$.

Sejam $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P^* uma partição pontilhada (P era a partição antes de a pontilharmos).

Formemos a soma de Riemann:

$$\Sigma(f; P^*) = \sum_{i=1}^{N} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$$

Evidentemente, seja qual for a maneira de pontilhar a partição P, temos:

$$s(f;P) \leq \Sigma(f;P^*) \leq S(f;P).$$

Dada $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, diremos que o número real I é o limite de $\Sigma(f; P^*)$ quando a norma $|P|$ tende para zero, e escrevemos:

$$I = \lim_{|P| \to 0} \Sigma(f; P^*),$$

Quando, para todo $\varepsilon > 0$, for possível obter $\delta > 0$ tal que $|\Sigma(f; P^*) - I| < \varepsilon$, seja qual for a partição pontilhada P^* com $|P| < \delta$.

<u>Teorema 15</u>: Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Existe o limite $I = \lim_{|P| \to 0} \Sigma(f; P^*)$ se, e somente, f for integrável. No caso afirmativo, tem-se $I = \int_a^b f(x)\,dx$.