

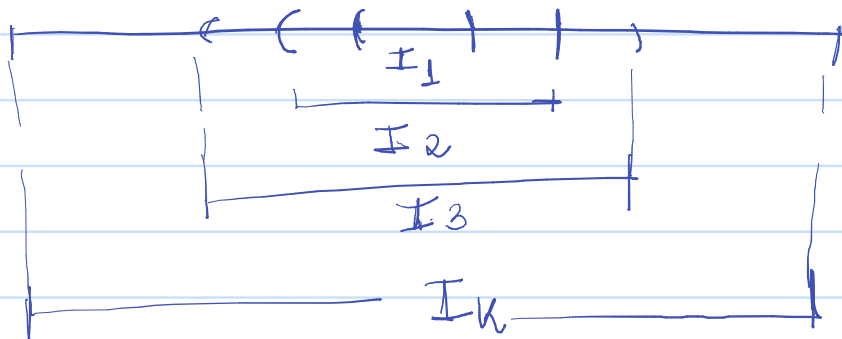
5) Sejam  $I_1 \supset I_2 \supset \dots \supset I_n \supset \dots$  intervalos limitados dois a dois distintos, cuja interseção  $I = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n$  não é vazia.

Demonstre que  $I$  é um intervalo, o qual nunca é aberto.

Sejam  $(I_k)$  uma sequência de intervalos limitados dois a dois disjuntos tais que  $I_k \supset I_{k+1} \forall k \in \mathbb{N}$  e a interseção

$I = \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k$  não é vazia.

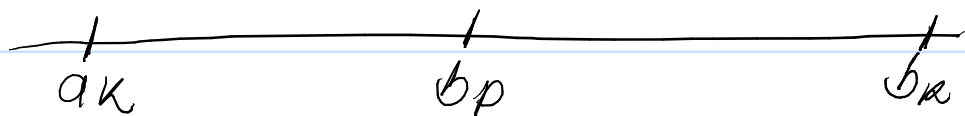
Nessas condições  $I$  é um intervalo que não é um intervalo aberto.



• Diz-se que  $a$  é aderente a  $X$  quando há sequência  $x_n \in X$  com  $\lim x_n = a$ .  
 O fecho de  $X$  é o conjunto  $\bar{X}$  dos pontos aderentes a  $X$ . Se  $F = \bar{F}$ , o conjunto  $F$  é fechado. Se  $X \subseteq Y \subseteq \bar{X}$ , diz-se que  $X$  é denso em  $Y$ .

• O ponto  $a$  é aderente a  $X$  se, e somente se, toda vizinhança de  $a$  intersecta  $X$ .

Sejam  $a_k$  e  $b_k$  extremidades de  $I_k$ , então vale  $a_k \leq b_p$ ,  $\forall k, p \in \mathbb{N}$ .



As sequências  $(a_k)$  e  $(b_k)$  são limitadas,  $(a_k)$  é não-decrescente e  $(b_k)$  é não-crescente. Logo elas são convergentes, sendo  $\lim a_n = a$  e  $\lim b_n = b$ .

$(a_k)$  é dada por  $x_n \leq x_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$   
 $(b_k)$  é dada por  $x_n \geq x_{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$

A horizontal number line with three vertical tick marks. Below the first tick mark on the left is the handwritten text  $\lim a_n = a$ . Below the third tick mark on the right is the handwritten text  $\lim b_n =$ . The middle tick mark is unlabeled.

$$\lim b_n = b$$

1) Dado  $x \in I$  não pode valer  $x \leq a$ , pois existe  $x_n$  tal que  $x \leq x_n \leq a$  e  $(x_n)$  é não-decrescente, da mesma forma não pode valer  $b \leq x$ , pois com isto existe  $y_n$  tal que  $b \leq y_n \leq x$  e  $y_n$  é não-crescente.

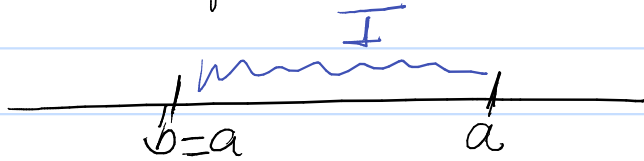
$(x_n)$  é não decrescente:  $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$   
Então:  $x \leq x_n \leq a$

(cyn) é não crescente:  $q_n \geq q_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

A number line diagram illustrating the epsilon-delta definition of a limit. The line has tick marks labeled  $b$ ,  $y_n$ ,  $x$ ,  $x_n$ , and  $a$ . An arrow points to the tick mark labeled  $b$ , which is also labeled  $\lim b_n =$ . The tick mark labeled  $a$  has a  $4$  written below it.

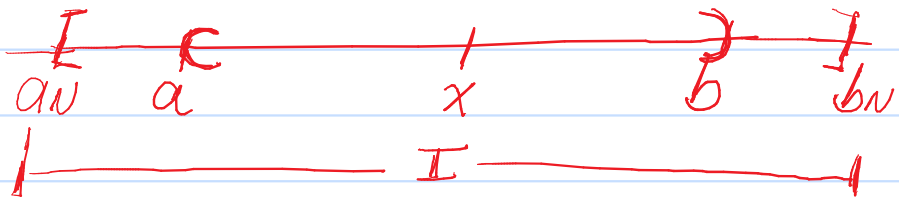
Temos que  $I \subset [a, b]$

2) Se  $b = a$ , então  $I \subset [a, a] = \{a\}$   
 de onde segue  $I = \{a\}$ .



3) Se  $a < b$  então  $\forall x$  com  $a < x < b \rightarrow$   
 $a_N < a < x < b < b_N$ , logo  $(a, b) \subset I \subset$   
 $[a, b]$ .

$a < b \rightarrow \forall x$  com  $a < x < b$



$\lim a_N = a$

$\lim b_N = b$

Como os  $I_N$  são dois a dois disjuntos,  
 ou seja  $I_N \cap I_{N+1} = \emptyset$ . Então  $(a_N)$  ou  
 $(b_N)$  têm uma infinidade de termos  
 distintos.

Por exemplo seja  $(a_N)$  com uma infinidade  
 de termos distintos, então  $\forall n \in \mathbb{N}$   
 existe  $p \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n < a_{n+p} \leq a$ .

Portanto  $a \in (a_n, b_n) \subset I$ , como  $a \in I$  então  $I$  não pode ser um intervalo aberto, sendo do tipo  $[a, b)$  ou  $[a, b]$ .

Temos então que  $I$  é fechado ou ele não é fechado e nem aberto.



$$I_1 \cap I_2 \neq \emptyset \dots I_{n-1} \cap I_n \neq \emptyset$$