7) Sejam X compacto, U aberto e $f: X \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(X) \subset U$. Se uma sequência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente para f, demonstre que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n > n_0$ então $f_n(X) \subset U$.

• Sejam X compacto, U aberto. $f: X \to \mathbb{R}$ contínua, $f(X) \subset U$. Se $f_n X \to \mathbb{R}$, $f_n \to f$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$ implica $f_n(X) \subset U$.

Resposta: A imagem de um conjunto compacto por uma função contínua é um conjunto compacto, logo $f(X)$ é compacto, e disjunto de $\mathbb{R} \setminus U$ que é fechado, isto porque U é aberto e $f(X) \subset U$.

Existe $\varepsilon > 0$ tal que $\forall x \in X$, e $y \in \mathbb{R} \setminus U$ implica que $|f(x) - y| \geq \varepsilon$, logo se:

$$x \in X \text{ e } |f(x) - z| < \varepsilon \to z \in U.$$

Ao tomarmos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0$, isso implica que:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; \forall x \in X, \text{ e}$$

Por convergência uniforme da sequência, então $f_n(X) \subset U$ se $n > n_0$.