10) Prove que X tem fronteira vazia, então $X = \emptyset$ ou $X = \mathbb{R}$.

Temos que o conjunto vazio é aberto. Com efeito, um conjunto X somente pode deixar de ser aberto se existir em X algum ponto que não seja interior.
"O conjunto X é aberto se $\operatorname{int}(X) = X$."

Como não existe ponto algum em $\emptyset$, somos forçados a admitir que $\emptyset$ é aberto. Evidentemente, a reta $\mathbb{R}$ inteira é um conjunto aberto.

Corolário: Seja I um intervalo aberto. Se $I = A \cup B$, onde A e B são conjuntos abertos disjuntos, então um desses conjuntos é igual a I e o outro é vazio.

Corolário: $\mathbb{R}$ e o conjunto vazio são fechados.

Com efeito, $\mathbb{R}$ é o complementar do aberto $\emptyset$, e $\emptyset$ é o complementar do aberto $\mathbb{R}$. Agora, $F_1, \dots, F_N$ fechados $\Rightarrow \mathbb{R}-F_1, \dots, \mathbb{R}-F_N$ são abertos $\Rightarrow$ $(\mathbb{R}-F_1) \cap \dots \cap (\mathbb{R}-F_N) = \mathbb{R}-(F_1 \cup \dots \cup F_N)$ aberto $\Rightarrow F_1 \cup \dots \cup F_N$ são fechados. Finalmente, cada F_λ fechado $\Rightarrow$ cada $\mathbb{R}-F_\lambda$ aberto $\Rightarrow \bigcup(\mathbb{R}-F_\lambda) = \mathbb{R}-(\bigcap_\lambda F_\lambda)$ aberto $\Rightarrow \bigcap F_\lambda$ é fechado.

Teorema 2: a) Se $A_1 \subset \mathbb{R}$ e $A_2 \subset \mathbb{R}$ são abertos, então $A_1 \cap A_2$ é aberto.

b) Seja $(A_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família arbitrária de conjuntos abertos $A_\lambda \subset \mathbb{R}$. A reunião $A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é um conjunto aberto.

fr X: dado $a \in \mathbb{R} \to$ a não pertence ao interior, nem ao exterior do intervalo.

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X \neq \emptyset$ e $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (\mathbb{R}/X) \neq \emptyset$.

Se tomarmos a fronteira de X, como fr X $= \emptyset$, então:

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X = \emptyset$ e

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (\mathbb{R}/X) = \emptyset$

① Desta forma $\forall \varepsilon > 0$ $x \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X$ e $x \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (\mathbb{R}/X)$, com isso

temos que $x \notin (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ e $x \notin X$, como também $x \notin (\mathbb{R}/X)$

Portanto a fronteira é nula, então

- Se $X = \emptyset$ temos que seu complementar é $\mathbb{R}$, logo vale a condição p/ fr $X = \emptyset$.
- Se $X = \mathbb{R}$, então $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap X$, e com $X = \mathbb{R}$, temos que $\mathbb{R}/X = \emptyset$

então $(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap \emptyset = \emptyset$

Portanto se $X = \mathbb{R}$, temos $x \in \mathbb{R}$, logo sua fronteira é $\emptyset$.

Assim dada $\operatorname{fr} X = \emptyset$, temos que X somente poderá ser: $\emptyset$ ou $\mathbb{R}$.

outra forma:

se $\operatorname{fr} X = 0$, então $X = \mathbb{R}$ ou $X = \emptyset$

Sabendo a identidade $\mathbb{R} = \operatorname{int}(X) \cup \operatorname{fr} X \cup \operatorname{int}(\mathbb{R}/X)$ uma união disjunta,

sendo $\operatorname{fr} X = \emptyset$, segue que $\mathbb{R} = \operatorname{int} X \cup \operatorname{int}(\mathbb{R}/A)$. E sabendo que $\mathbb{R}$ é conexo

isso implica que $X = \mathbb{R}$ ou $X = \emptyset$.