6) Seja $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Prove que a função $F: [a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, é lipschitziana.

Como f é integrável, então f é limitada, assim existe M tal que $|f(x)| \leq M \ \forall x$.

Com isso temos que:

$$|f(y) - f(x)| = \left| \int_a^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| =$$

$$\left| \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^y f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt \right| =$$

$$\left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq \int_x^y M\,dt \leq M|y-x|$$

Portanto f é lipschitziana e uniformemente contínua. Agora sendo $M < 1$ g é uma contração.