L. 9

12. $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrável, $p(x) \geq 0 \ \forall x \in [a,b]$

Mostremos que se $\int_a^b p(x)dx = 0$, então o conjunto de pontos $x \in [a,b]$ t.q. $p(x) = 0$ é denso em $[a,b]$

~~Supo~~ Demonstremos a contrapositiva. Assuma que $\exists [c,d] \subset [a,b]$, $d > c$, t.q. $p(x) > 0 \ \forall x \in [c,d]$.
Mostraremos que $\int_c^d p(x) > 0$, e portanto, que $\int_a^b p(x)dx > 0$

Naturalmente, $p|_{[c,d]}$ é integrável, e portanto, seu

$$\cancel{\int_a^b p = \sum \int_{I_n} p + \sum}$$

conjunto de pontos de descontinuidade tem medida nula; em part., $\exists [e,f] \subset [c,d]$ t.q. $p|_{[e,f]} > 0$ e $p|_{[e,f]}$ é contínua (se tal subc. de $[c,d]$ não existisse, então o conjunto de pontos de desc. de $p|_{[c,d]}$ seria denso em $[c,d]$, um absurdo).

Pelo T. de Weierstrass, $\exists g \in [e,f]$ t.q. $0 < p(g) \leq p(x)$ $\forall x \in [e,f]$. Em part.,

$$\int_c^d p \geq \int_e^f p \geq p(g)(f-e) > 0.$$

Isso nos mostra que $\int_a^b p > 0$.

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, defina $f_+(x) = \max\{0, f(x)\}$ e $f_-(x) = \max\{0, -f(x)\}$; assim, $f_\pm \geq 0$ e $\forall x \in [a,b]$, $f(x) = f_+(x) - f_-(x)$. ~~Como~~ Mostremos que $f_\pm$ são integráveis.

Com efeito, dado que f é integrável, $\forall \varepsilon > 0$ $\exists P$ t.q.

$$S(f;P) - s(f;P) = \sum w_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon,$$

com $w_i = M_i - m_i$

Sejam $\tilde{M}_i = \sup f_+|_{[t_{i-1}, t_i]}$, $\tilde{m}_i = \inf f_+|_{[t_{i-1}, t_i]}$

Mostremos que $\tilde{w}_i \leq w_i$.

Temos que $\tilde{w}_i = w_i$ se $m_i > 0$

Se $M_i \leq 0$, então $\tilde{M}_i = \tilde{m}_i = 0 \to \tilde{w}_i \leq w_i$

Se $m_i \leq 0 \leq M_i$, então $\tilde{M}_i = M_i$ e $\tilde{m}_i = 0$, donde se segue que $\tilde{w}_i \leq w_i$.

Assim, $S(f_+;P) - s(f_+;P) = \sum \tilde{w}_i (t_i - t_{i-1}) \leq \sum w_i (t_i - t_{i-1}) < \varepsilon$,

e f_+ é integrável.

A dem de que f_- é integ. é inteiramente análoga.

Por fim, aplicando-se à 1ª parte do exercício a f_+ e à f_-, demonstra-se o res. para f.