11) Diz-se que uma função $f: I \to \mathbb{R}$, definida no intervalo I, tem a propriedade do valor intermediário quando a imagem $f(J)$ de todo intervalo $J \subset I$ é um intervalo.

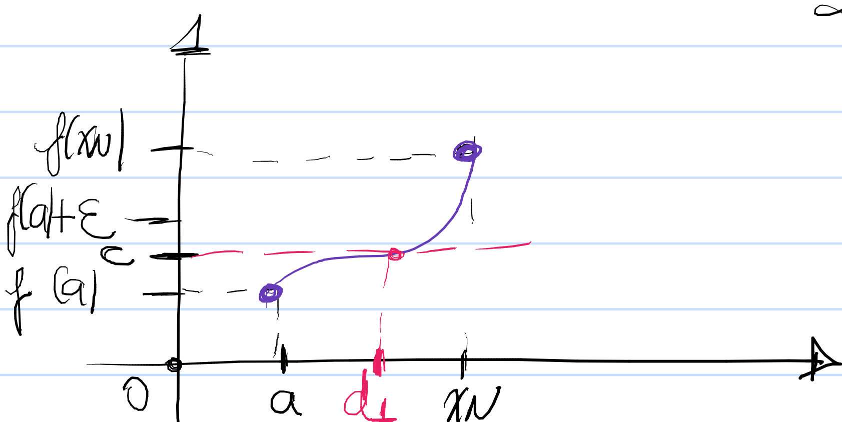
Suponha que f satisfaz tal propriedade.

Demonstre que se, para cada $c \in \mathbb{R}$, existe apenas um número finito de pontos $x \in I$ tais que $f(x) = c$, então f é contínua.

<u>Resposta</u>: Suponha que exista $a \in I$, e que a função f seja descontínua. Pelo critério de sequências, existe (x_n) em I com $\lim x_n = a$ e $f(x_n) > f(a) + \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$, ou $f(x_n) < f(a) - \varepsilon$.

Ao tomarmos algum $c \in (f(a), f(a)+\varepsilon)$, observamos o intervalo $(f(a), f(x_n))$, como $f(x_n) > f(a) + \varepsilon$ e segue que:

$$c \in (f(a), f(a)+\varepsilon) \subset (f(a), f(x_n)) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



Temos que o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de d_1 entre a e x_1 tal que $f(d_1) = c$.

Como $\lim x_n = a$, podemos tomar x_{n_1} tal que d_1 não esteja entre a e x_{n_1}. Porém, teremos que o Teorema do Valor intermediário garante a existência de d_1 entre a e x_{n_1} tal que $f(d_1) = c$. Novamente, com esse processo garantimos infinitos valores $\underline{d}$ tal que $f(d) = c$, o que contraria a hipótese inicial sobre f ser descontínua. Assim temos então que a função f deve ser contínua.