5) Seja $f: X \to \mathbb{R}$ monótona, com $f(X) \subset [a,b]$, então para cada $c \in X'_+ \cap X'_-$ tem-se que $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$.

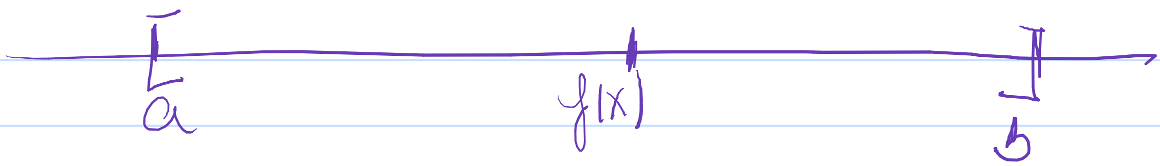
Demonstre que se $c \in X$, então $\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x) = f(c)$

• a é ponto de acumulação de X à direita ($a \in X'_+$) quando $\forall \delta > 0$, $V^+_\delta(a) = (a, a+\delta) \cap X \neq \emptyset$.

• a é ponto de acumulação de X à esquerda ($a \in X'_-$) quando $\forall \delta > 0$, $V^+_\delta(a) = (a-\delta, a) \cap X \neq \emptyset$.

• $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{\to a^-} f(x) = L \to \lim_{\to a} f(x) = L$. Se $a \in X'_+ \cap X'_-$, vale também a volta.

• Existem sempre os limites laterais (que fizerem sentido) de uma função monótona limitada.



$f(x)$ é monótona, pode ser crescente ou decrescente.

$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^-} f(x)$

• Teorema 10: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X'_+$. Ponhamos $Y = X \cap (a, +\infty)$ e $g = f|Y$. Então $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ se, e somente se, $\lim_{x\to a} g(x) = L$. Um resultado análogo vale para o limite à esquerda.

Teorema 2: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Dado $Y \subset X$ tal que $a \in Y'$, ponhamos $g = f|_Y$. Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$, então $\lim_{x \to a} g(x) = L$.

Se $Y = I \cap X$ onde I é um intervalo aberto contendo a, então $\lim_{x \to a} g(x) = L \to \lim_{x \to a} f(x) = L$

Teorema 12: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ uma função monotóna limitada, $a \in X'_+$ e $b \in X'_-$. Existem os limites laterais:

$$L = \lim_{x \to a^+} f(x) \quad e \quad M = \lim_{x \to b^-} f(x)$$

Resposta: i) Devemos mostrar que $f(x)$ é denso no $[a,b]$, então para cada $c \in X'_+ \cap X'_-$, tem-se que $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$.

Como $c \in X'_+ \cap X'_-$ e $f: X \to \mathbb{R}$ é monotóna, então pelo teorema 12, existem os limites:

$$L = \lim_{x \to c^+} f(x) \quad e \quad M = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

Temos também que $f(x) \subset [a,b]$ é $[a,b]$ é compacto, ou seja é limitado e fechado.

Assim, temos que $L = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$, para alguma sequência em $[c,b]$. E $M = \lim_{n \to \infty} f(y_n)$, para alguma sequência em $[a,c)$. Portanto os intervalos $[a,c) \cup [c,b] = [a,b]$. Assim temos que f é denso em $[a,b]$.

E de acordo com o Teorema 11, temos que existem γ_1, γ_2 ambos positivos, tais que:

$$x \in X \cap (a-\gamma_2), a) \rightarrow |f(x) - M| < \varepsilon/2$$

$$x \in X \cap (a+\gamma_1, a) \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon/2$$

Seja $\gamma = \min\{\gamma_1, \gamma_2\}$, então $x \in (X - \{a\}) \cap (a-\gamma, a+\gamma) \rightarrow |f(x) - M| + |f(x) - L| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2$

Assim: $|f(x) - M| + |f(x) - L| < \varepsilon$, se $M = L$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$ e portanto: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

E portanto:

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x)$$

Teorema 11: Seja $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'_+ \cap X'_-$. Então existe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, existem e são iguais os limites laterais

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L.$$

ii) Se $c \in X$, então $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$.

Suponhamos que f é não-decrescente, os casos para f: crescente, decrescente e não-crescente são análogos.

Seja $x \in X$ e $x < c$, então:

$$f(x) \leq M = \sup\{f(y) : y \in X \text{ e } y < c\}$$

Também, $f(x) \leq f(y)$ para todo $y > c$ e, consequentemente:

$$f(x) \leq L = \inf\{f(y) ; y \in X \text{ e } y > c\}$$

Assim, $f(x) \notin (\min\{L, M\}, \max\{L, M\})$. Se $x > c$, obteremos de forma análoga que:

$$f(x) \notin (\min\{L, M\}, \max\{L, M\}).$$

Agora se $x = c$, então: $M \leq f(x) \leq L$

Pois $f(y) \leq f(x)$ para todo $y < c = x$ e

$f(x) = f(y)$ para todo $y > c = x$, dado que f é não decrescente.

Se $c \notin X$, então:

$$\emptyset = (\min\{L, M\}, \max\{L, M\}) \cap f(X)$$

O que implica que $L = M$, pois caso contrário haveria um aberto em $[a, b]$ sem nenhum ponto de $f(X)$.

Finalmente se $c \in X$, devemos ter:

$$M = f(c) = L$$

Pois caso contrário haveria um aberto:

$$(M, f(c)) \text{ ou } (f(c), L)$$

Ambos não vazio em $[a, b]$ sem nenhum elemento de $f(x)$ pelo que foi argumentado anteriormente. Assim, de acordo com o Teorema 11, temos que

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c).$$