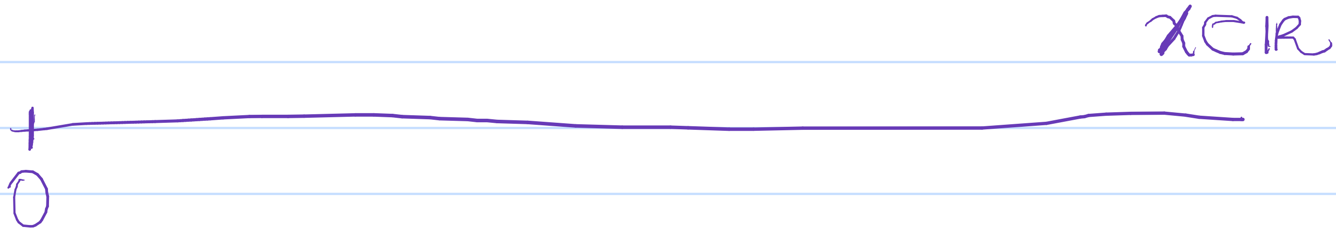
6) Seja $f: X \to \mathbb{R}$ monótona e $a \in X'_+$. Demonstre que se existir uma sequência de pontos $x_n \in X$ com $x_n > a$, $\lim x_n = a$ e $\lim f(x_n) = L$, então $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.




- Diz que $f(x)$ é monótona não-decrescente quando $x_1, x_2 \in \text{Dom} f$, $x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$.

As definições de monótona decrescente, monótona crescente e monótona não-crescente são análogas.

- $\underline{a}$ é ponto de acumulação de $X$ à direita ($a \in X'_+$) quando $\forall \delta > 0$, $V_\delta^+(a) = (a, a+\delta) \cap X \neq \emptyset$.

- Seja $a \in X'_+$. Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quando:

  $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in X \cap (a, a+\delta) \to f(x) \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$

- Tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente, toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, satisfaz $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$.

Corolário 2 $\to$ Teorema 6.

Teorema 6: Sejam $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$. Para que $\lim_{x \to a} f(x) = L$, é necessário e suficiente que se tenha $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = L$ para toda sequência de pontos $x_n \in X - \{a\}$, tal que $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Corolário 1: Para que exista $\lim_{x \to a} f(x)$ é necessário que exista $\lim_{n \to \infty} f(x_n)$ e independa da sequência de números $x_n \in X - \{a\}$ com $\lim_{n \to \infty} x_n = a$.

Resposta: Dado que $f$ é monótona e $a \in X'_+$, e de acordo com o Teorema 6 dada uma sequência de pontos onde $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, onde $x_n \in (X - \{a\})$, e por hipótese $a$ é ponto de acumulação, ou seja $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = a$.

Assim temos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$, de acordo com o Corolário 2 do Teorema 6.

Se $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$ e $a \in X_+'$, então $a$ é ponto de acumulação e consequentemente é denso em $X$. Assim temos que $x_N \in X - \{a\}$, ou seja uma sequência $x_N \subset X$.

Assim, temos que $\lim_{N \to \infty} x_N = a$ e consequentemente $x_N$ é convergente.

<u>Outra forma:</u>

Considere o caso em que $f$ é não-decrescente e $(x_N)_{N \in \mathbb{N}}$ é tal que $x_N > a$ para ~~todo~~ $N \in \mathbb{N}$, $\lim x_N = a$ e $\lim f(x_N) = L$. ① Dado $x \in X$ tal que $x > a$, então:

$$L < f(x)$$

① De fato, se existisse $x \in X \cap (a, +\infty)$ tal que $f(x) < L$, então existiria uma subsequência de $(f(x_N))$ que não tende a $L$. Como exemplo:

Seja $(x_{N_K})$ dada por:

$\{x_{N_0}\} \in (a, x) \cap \{x_N\}_{N \in N'} \in (a, x_{N_{K-1}}) \cap \{x_N\}_{N > N_{K-1}}$

onde $N' \subset N$.

Então: $f(x_{N_K}) \leq \ldots \leq f(x_{N_0}) \leq f(x) < L$

Portanto, $L$ não é limite da sequência $(f(x_N))$. Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomemos $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f(x_{N_0}) - L| < \varepsilon$ e $\delta = x_{N_0} - a$.

Com isso, se $0 < x - a < \delta$ teremos que $a < x < x_{N_0}$ e, pelo que foi anteriormente, $L < f(x) \leq f(x_{N_0})$.

Portanto: $|f(x) - L| \leq |f(x_{N_0}) - L| < \varepsilon$

Assim, $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

Como $f$ é monótona vale a mesma argumenta para os caso crescente e Não-crescente, observando que dado:

$x_1 < x_2 \longrightarrow f_1 < f_2$: crescente
$x_1 < x_2 \longrightarrow f_1 \geq f_2$: Não-crescente