Seja $f: I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo I. Demonstre que se existe $\alpha > 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^\alpha$ para quaisquer $x, y \in I$, então f é contínua e possui derivada nula em todos os pontos de I. Conclua que f é constante.

Tomamos uma $f: I \to \mathbb{R}$ onde $|(f(x) - f(y))| \leq |x-y|^\alpha$, com $\alpha > 1$ para $x, y \in I$.

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^\alpha, \text{ com } x, y \in I \text{ e } x \neq y$$

Assim temos que:

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq |x-y|^{\alpha - 1}$$

Se tomarmos o limite, como $\alpha - 1 > 0$, então:

$$0 \leq \lim_{x \to y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x-y} \right| \leq 0$$

Portanto, pelo teorema do confronto, $f'(x) = 0$ e logo a f é constante.