8) Se uma sequência de funções contínuas $f_n : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente em um conjunto denso $D \subset X$, prove que (f_n) converge uniformemente em X.

• Seja $f_n : X \to \mathbb{R}$ contínua com $f_n \to f$ em $D \subset X$, $\overline{D} = X$, então temos que $f_n \to f$ em X.

<u>Resposta</u>: Sabemos que f é contínua e $f : X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente em um conjunto denso $D \subset X$, então vale o critério de Cauchy.

$\forall \varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$, isto implica $|f_m(d) - f_n(d)| < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall d \in D$. Dado $x \in X$ arbitrário (x_k) em D com $\lim x_k = x$, temos que:

$$|f_m(x_k) - f_n(x_k)| < \varepsilon/2$$

Como (f_n) é sequência de funções contínuas, podemos aplicar o limite $k \to \infty$ na desigualdade anterior, e temos que:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Para x arbitrário em X, temos portanto a convergência uniforme pelo critério de Cauchy.