15) Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ duas vezes deriváveis no ponto $a \in \text{int}\, I$. Se $f(a) = g(a)$, $f'(a) = g'(a)$ e $f(x) \geq g(x)$ para ~~todo~~ $x \in I$. Prove que $f''(a) \geq g''(a)$.

Resposta: Temos que $f, g : I \to \mathbb{R}$ são duas vezes deriváveis, logo $f, g \in C^2$ no ponto $a \in \text{Int}\, I$.

Pela fórmula de Taylor infinitesimal temos que:

$$f(x) = \cancel{f(a)} + \cancel{f'(a)}\cancel{(x-a)} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_1(h)$$

$$g(x) = \cancel{g(a)} + \cancel{g'(a)}\cancel{(x-a)} + g''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_2(h)$$

Usando que $f(x) \geq g(x)$ e anulando os termos semelhantes temos:

$$f''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_1(h) \geq g''(a)\frac{(x-a)^2}{2} + R_2(h) \longrightarrow$$

$$\frac{(x-a)^2}{2} \cdot f''(a) + R_1(h) - \frac{(x-a)^2}{2} g''(a) - R_2(h) \geq 0$$

$$(x-a)^2 \cdot \left[\frac{f''(a) - g''(a)}{2} + \frac{R_1(h) - R_2(h)}{(x-a)^2}\right] \geq 0$$

Se $g''(a) > f''(a)$ então o termo em destaque nos colchetes teria um sinal negativo, pois:

$$R_1(h) - R_2(h) \longrightarrow 0, \text{ com } h \text{ pequeno.}$$

Isto não pode ocorrer, então: $f''(a) \geq g''(a)$.