2) Seja $p: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio de grau ímpar. Mostre que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p''(c) = 0$.

Proposição: f é derivável em a se, e somente se, existem $c \in \mathbb{R}$ e uma função $r: X \to \mathbb{R}$, com $r(a) = 0$ e:

$$\lim_{h \to 0} \frac{r(a+h)}{h} = \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{x-a} = 0, \text{ com } h \in X/\{a\}$$

De modo que:

$$f(x) = f(a) + c.(x-a) + r(x), \quad \forall x \in X$$

Neste caso, $c = f'(a)$

Demo: $f(x) = f(a) + c.(x-a) + r(x)$

$$f(x) - f(a) = c.(x-a) + r(x) \quad \div (x-a)$$

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} = c + \cancel{\frac{r(x)}{x-a}}^{\,0} \Rightarrow \frac{f(x) - f(a)}{x-a} = c$$

Resposta: Dado um polinômio canônico em grau ímpar: $p(x) = x^3$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{a^3} + 3ha^2 + 3ah^2 + h^3 - \cancel{a^3}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{3ha^2 + 3ah^2 + h^3}{h}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(3a^2 + 3ah + h^2)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 3a^2 + 3ah + h^2 = 3a^2$$

$p'(x) = 3x$

$$\lim_{h \to 0} \frac{3(a+h)^2 - 3a^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{3a^2} + 6ah + 3h^2 - \cancel{3a^2}}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{6a\cancel{h} + 3h^{\cancel{2}}}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} 6a + 3h = 6a$$

$p''(x) = 6x$, se $6x = 0 \to x = 0$

Então $p''(0) = 0$ e $c = 0$

Tomando um polinômio de grau ímpar geral, temos:

Seja $p(3) = c_i x^i$, onde $i = 1, \ldots, 2N+1$

$p'(x) = 2N+1 \cdot c_{2N+1} x^{2N}$

$p''(x) = 2N+1 \cdot 2N \cdot c_{2N+1} \cdot x^{2N-1}$

Como $2N$ é par e $2N-1$ é ímpar, temos que $p''(x)$ é um polinômio grau ímpar.

$p''(x) = 0 \to 2N+1 \cdot 2N \cdot c_{2N+1} x^{2N-1} = 0$

Então $x = 0$

Logo $p''(c) = p''(0) = 0$ $\blacksquare$