13) Dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitada ou não, faz sentido considerar a soma de Riemann

$\Sigma(f; P^*)$, para toda partição pontilhada P^*.

Demonstre que existe $\lim\limits_{|P|\to 0} \Sigma(f; P^*)$, então f é uma função limitada.

<u>Teorema 14</u>: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada. Para $\varepsilon>0$ existe $\delta>0$ tal que:

$$\Delta(f; P) < \int_a^{-b} f(x)\,dx + \varepsilon,$$ qualquer que seja a partição P com norma menor do que δ.

<u>Corolário</u>: A integral inferior de uma função limitada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ é o limite das somas inferiores $\Delta(f; P)$ quando a norma da partição P tende a zero, ou seja:

$$\int_{-a}^{b} f(x)\,dx = \lim_{|P|\to 0} \Delta(f; P)$$

Com efeito: $-\Delta(f; P) = \Delta(f; P)$ e $-\int_{-a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{-b} -f(x)\,dx$

Pontilhar uma partição $P=\{t_0,\dots,t_n\}$ é escolher, em cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ um ponto μ_i.
Portanto: $t_{i-1} \le \mu_i \le t_i$.

Sejam $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e P^* uma partição pontilhada (P era a partição antes de a pontilharmos.)

Formemos a soma de Riemann:

$$\Sigma(f; P^*) = \sum_{i=1}^{N} f(s_i) \cdot (t_i - t_{i-1}), \text{ temos:}$$

$$s(f;P) \leq \Sigma(f;P^*) \leq S(f;P)$$

Dada $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada, então o número real I é o limite de $\Sigma(f;P^*)$ quando a norma $|P|$ tende para zero, i.e:

$$I = \lim_{|P| \to 0} \Sigma(f;P^*)$$

Quando, para todo $\varepsilon > 0$, for possível obter $\delta > 0$ tal que $|\Sigma(f;P^*) - I| < \varepsilon$, seja qual for a partição pontilhada P^* com $|P| < \delta$.

<u>Teorema 15</u>: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Existe o limite $I = \lim_{|P| \to 0} \Sigma(f;P^*)$ se, e somente se, f for integrável. No caso afirmativo, tem-se $I = \int_a^b f(x)\,dx$.

<u>Resposta</u>: Supomos que exista o limite de $\lim_{|P| \to 0} \Sigma(f;P^*) = I$, então mostraremos que f é limitada em $[m, M]$, onde m = ínfimo e M = supremo.

Dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$, temos a partição $P = \{t_0, \dots, t_N\}$ tal que $|\Sigma(f; P^*) - I| < \varepsilon/4$, seja qual for a maneira de pontilhar P.

Fixemos P e a pontilhemos de duas maneiras.

1) Cada intervalo $[t_{i-1}, t_i]$ podemos escolher um ponto v_1 tal que $f(v_1) < m_i + \dfrac{\varepsilon}{4N(t_i - t_{i-1})}$.

Assim teremos uma partição pontilhada P^* tal que:

$$\Sigma(f; P^*) = \sum_{i=1}^{N} f(v_i)(t_i - t_{i-1}) < \sum_{i=1}^{N} m_i . (t_i - t_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{4}$$
$$= s(f; P) + \frac{\varepsilon}{4}$$

2) De forma semelhante, podemos obter uma partição pontilhada $P^\#$ tal que:

$$S(f; P) - \varepsilon/4 < \Sigma(f; P^\#), \text{ então:}$$

$$\Sigma(f; P^*) - \frac{\varepsilon}{4} < s(f; p) \leq S(f; P) < \Sigma(f; P^\#) + \frac{\varepsilon}{4}$$

Como os números $\Sigma(f; P^*)$ e $\Sigma(f; P^\#)$ pertencem ao intervalo:

$\left(I - \dfrac{\varepsilon}{4}, I + \dfrac{\varepsilon}{4}\right)$, segue-se que $s(f; P)$ e $S(f; P)$ pertencem ao intervalo $\left(I - \dfrac{\varepsilon}{2}, I + \dfrac{\varepsilon}{2}\right)$, e portanto, $S(f; P) - s(f; P) < \varepsilon$. Temos que f é uma integrável e limitada no intervalo

$[s(f; P), S(f; P)] \subset [a, b]$