13) Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável, contínua à direita no ponto $x_0 \in [a,b)$. Prove que $F:[a,b] \to \mathbb{R}$, definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, é derivável à direita no ponto x_0, com $F'_+(x_0) = f(x_0)$.

Teorema 14: Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $S(f;P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$ qualquer que seja a partição P com norma menor do que δ.

• Seja $f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitada. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|P| < \delta \to S(f;P) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{|P| \to 0} S(f;P) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$

Resposta: Temos que f é contínua à direita no ponto $x_0 \in [a,b)$, então: $f(x_0) = \lim\limits_{h \to 0^+} f(x_0+h)$.

Isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $0 < h < \delta \to x_0 + h \in [a,b)$ e $|f(x_0+h) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Portanto:

$$\left|\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}-f(x_0)\right|=\left|\frac{1}{h}\int_a^{x_0+h} f(t)dt-h.f(x_0)\right|$$

$$=\frac{1}{h}\left|\int_a^{x_0+h}[f(t)-f(x_0)].dt\right|$$

$$\leq\frac{1}{h}\int_a^{x_0+h}|f(t)-f(x_0)|dt<\frac{1}{h}.\varepsilon.h=\varepsilon$$

Como $t=x_0+h$ $|f(x_0+h)-f(x_0)|<\varepsilon$

Portanto $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}=f(x_0)$, e portanto $F_+'(x_0)=f(x_0)$.

<u>Teorema 8</u>: Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrável. Se f é contínua no ponto $c\in[a,b]$, então a função $F:[a,b]\to\mathbb{R}$, definida por:

$F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ é derivável no ponto c e se tem $F'(c)=f(c)$.