13) Classifique os intervalos da reta quanto a homeomorfismo, isto é, faça uma lista de tipos de modo de dois intervalos são homeomorfos se, e somente se, têm o mesmo tipo.

Teorema 13: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ uma função contínua injetiva, definida num intervalo I. Então f é monótona, sua imagem $J = f(I)$ é um intervalo e sua inversa $f^{-1}: J \to \mathbb{R}$ é contínua.

Uma relação de homeomorfismo, é uma bijeção contínua: dado $X, Y \subset \mathbb{R}$, então:

$$f: X \to Y \quad e \quad f^{-1}: Y \to X,$$ contínuas e

homeomorfas entre X e Y. Pelo teorema 13, temos que se X for um intervalo, a continuidade da f^{-1} será consequentemente da continuidade de f.

① Dada $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ e $f(x) = 1/x$, assim:

$f((0,1]) = [1, +\infty)$, com isso geramos uma imagem com uma semi-reta fechada inferiormente.

A partir de um intervalo monótono crescente, e sendo um intervalo limitado, gerou-se um intervalo ilimitado.

Assim, temos que intervalos fechados e limitados são associados a intervalos fechados e limitados.

Intervalos abertos irão se associar a intervalos abertos, sejam eles limitados ou ilimitados.

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan x$

$f(\mathbb{R}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ é aberto, contínuo no domínio e imagem

Intervalos semi-fechados ou semi-abertos: ( ], [ ).

i) Se Img for limitada, então então será: ( ] ou [ )

ii) Se f for ilimitada, então resultará em uma semi-reta fechada.

iii) Uma semi-reta fechada pode ser mapeada em um intervalo limitado.

Intervalos semi-abertos podem ser associados a intervalos semi-abertos.

Finalizamos este argumento, com todas as transformações somente podem ser aplicadas a funções monótonas.

Se f não for monotona não é injetiva, e consequentemente não é bijetiva.