7| Seja $f: I \to \mathbb{R}$ definida num intervalo I. Se existe $\alpha > 1$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^\alpha$ para quaisquer $x, y \in I$, então f é contínua e possui derivada nula em todos os pontos de I. Consequentemente, f é constante.

• Diz-se que $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua no ponto $a \in X$ quando:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in V_\delta(a) = X \cap (a-\delta, a+\delta) \to f(x) \in (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$

Diz-se que f é contínua se f for contínua em todos os pontos de X.

Teorema 4: Teorema do Valor Médio, de Lagrange

Seja $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua. Se f é derivável em (a,b), existe $c \in (a,b)$, tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Corolário 1: Se uma função contínua em $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ possui derivada nula em todos os pontos $x \in (a,b)$ então f é constante.

Corolário 3: Seja $f: I$ em $\mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto I. Se existe $k \in \mathbb{R}$ tal que $|f'(x)| \leq k$ para todo $x \in I$ então, quaisquer que sejam $x, y \in I$, tem-se:

$$|f(x) - f(y)| \leq k|x-y|$$

Temos que $f: I \to \mathbb{R}$ esta definida no intervalo, então:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^{\alpha}, \forall x, y \in I.$$

Se $\alpha = 2$ então:

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^2 \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq |x-y||x-y|$$

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} \leq |x-y|$$

Pela definição de derivada, pelos que:

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|} = f'(c) > 0$$ dado que é um quociente dos módulos.

Então: $f'(c) \leq |x-y|$, como a f é derivavel no ponto temos que f é contínua no ponto c.

Se $f'(c) = d$ então $d \in (f(x), f(y))$ e $c \in (x, y) \to c \in I$

Pelo Teorema 5 temos $f'(c) = d$ é constante

Então se $\alpha = 3$, então:

$$f'(c) = d \leq |x-y|^2$$

Agora se $\alpha = n$, temos que:

$$f'(c) = d \leq |x-y|^{n-1}$$

e f é constante igual a d.