11) Se um conjunto $X \subset [a,b]$ não tem medida nula, então existe $\varepsilon > 0$ tal que, para toda partição P de $[a,b]$, a soma dos comprimentos dos intervalos de P contém pontos de X em seu interior é maior do que ε.

- X tem <u>medida</u> <u>nula</u> quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura enumerável $X \subset \bigcup I_k$ por intervalos abertos I_k tal que $\sum |I_k| < \varepsilon$.

- f é integrável se, e somente se, o conjunto dos seus pontos de descontinuidades tem medida nula.

<u>Resposta</u>: Como $X \subset [a,b]$ <u>não</u> <u>tem</u> <u>medida</u> <u>nula</u>, então existe $N > 0$ tal que, para toda cobertura finita ou infinitamente enumerável $X \subset \bigcup I_k$ de X por intervalos abertos I_k tem-se $\sum |I_k| > N$.

Seja $P = \{a = t_0, \ldots, t_n = b\}$ uma partição de $[a,b]$. Observe que, para todo $\gamma > 0$,

$X \subset (a - \gamma/4, a + \gamma/4) + (t_0, t_1) + \ldots + (t_{n-1}, t_n) + (b - \gamma/4, b + \gamma/4) \cup \bigcup_{i=1}^{n-1} \{t_i\}$, é uma cobertura de X. Seja $\gamma_0 < N$ e defina $\varepsilon = N - \gamma_0$.

$$\left|a - \frac{\gamma_0}{4}, a + \frac{\gamma_0}{4}\right| + \left|(t_0, t_1) + \ldots + (t_{n-1}, t_n)\right| + \left|(b - \frac{\gamma_0}{4}, b + \frac{\gamma_0}{4})\right| =$$

$$|(t_0,t_1)|+\ldots+|(t_{N-1},t_N)|+\frac{\gamma_0}{2}+\frac{\gamma_0}{2}>N$$

Portanto:

$$|(t_0,t_1)|+\ldots\ldots+|(t_{N-1},t_N)|>N-\gamma_0=\varepsilon$$

$\blacksquare$