**Lista 8**

**Questão 6.**

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ derivável no intervalo aberto $I$. Um ponto crítico de $f$ é um ponto $c \in I$ tal que $f'(c) = 0$. O ponto crítico $c$ é dito não-degenerado quando $f''(c)$ existe e é diferente de zero. Demonstre que:

(a) Se $f \in C^1$, para cada intervalo compacto $[a, b] \subset I$, o conjunto de pontos críticos de $f$ pertencentes a $[a, b]$ é fechado.

(b) Os pontos de máximos e mínimos locais de $f$ são críticos. Um ponto crítico não-degenerado deve ser de máximo local ou de mínimo local.

(c) Se $c \in I$ é um ponto crítico não degenerado para $f$, então existe $\delta > 0$ tal que não há outros pontos critícos de $f$ no intervalo $(c - \delta, c + \delta)$.

**Prova:**

(a) Seja $S = \{x \in [a, b] : x \text{ é ponto crítico de } f\}$. Devemos demonstrar que $S$ é fechado. Sabemos que $S \subset \overline{S}$.
Tomamos $c \in \overline{S}$, então existe uma sequência $(x_n)$ cujos elementos pertencem a $S$ tal que $x_n \longrightarrow c$ $(c \in [a, b])$. Como $f$ é $C^1$, a função $f'$ é contínua em $[a, b]$.
Usando a continuidade de $f'$ e a convergência $x_n \longrightarrow c$ obtemos

$$\underbrace{f'(x_n)}_{=0} \longrightarrow f'(c).$$

Portanto $f'(c) = 0$ e $c \in S$.

(b) Seja $c \in I$ um máximo local de $f$, mostremos que $f'(c) = 0$.
Pela definição de máximo local, existe um $\delta_1 > 0$ tal que

$$f(c) \geq f(x) \text{ para todo } x \in (c - \delta_1, c + \delta_1).$$

Supor que $f'(c) > 0$, por definição de limite existe $\delta > 0$ com $\delta < \delta_1$ tal que

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \Longrightarrow -f'(c) < \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - f'(c) < f'(c) \quad (1)$$

Escolhemos $y \in (c, c + \delta)$ $(c < y)$ então por (1)

$$-f'(c) < \frac{f(y) - f(c)}{y - c} - f'(c) \Longrightarrow 0 < \frac{f(y) - f(c)}{y - c}$$

o que é absurdo pois $f(y) < f(c)$ e $c < y$. Por tanto $f'(c) \leq 0$. Usando a mesma estratégia anterior, podemos demonstrar que $f'(c) < 0$ é absurdo. Finalmente $f'(c) = 0$.

Seja $c \in I$ um ponto crítico não degenerado. Suponha que $f''(c) > 0$, demonstraremos que $c$ é um mínimo local. Pela formula de Taylor

$$f(c + h) = f(c) + \underbrace{f'(c)}_{=0} h + f''(c)\frac{h^2}{2} + r(h) \qquad (1)$$

onde $\lim_{h\to 0} \dfrac{r(h)}{h^2} = 0$. Dado $\epsilon = \dfrac{f''(c)}{2} > 0$ existe um $\delta > 0$ tal que

$$\text{para cada } h \in (-\delta, +\delta) \setminus \{0\} \longrightarrow -\frac{f''(c)}{2} < \frac{r(h)}{h^2} < \frac{f''(c)}{2} \qquad (2)$$

De (1) e (2), obtemos

$$f(c+h) - f(c) = f''(c)\frac{h^2}{2} + r(h) > 0 \text{ para } 0 < |h| < \delta,$$

isto é, $f(c+h) > f(c)$ para qualquer $h \in (-\delta, +\delta) \setminus \{0\}$. Por conseguinte, $c$ é um mínimo local.
Analogamente se $f''(c) < 0$, $c$ é um máximo local.

(c) Suponha $f''(c) > 0$. Sabemos que $\lim_{x\to c} \dfrac{f'(x) - f'(c)}{x - c} = f''(c)$. Por definição de limite, para $\epsilon = f''(c) > 0$ existe $\delta > 0$ tal que

$$\text{para cada } x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\} \Longrightarrow -f''(c) < \frac{f'(x) - f'(c)}{x - c} - f''(c),$$

ou seja,

$$\text{para cada } x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\} \Longrightarrow 0 < \frac{f'(x)}{x - c}.$$

Finalmente $f'(x) \neq 0$, $\forall\, x \in (c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$, isto significa que $(c-\delta, c+\delta) \setminus \{c\}$ não contem pontos críticos.
Analogamente se $f''(c) < 0$, repetimos o processo descrito acima.

**Questão 10.**
Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua, derivável em $(a, b)$. Suponha $f(a) = f(b) = 0$. Demonstre que, dado arbitrariamente $k \in \mathbb{R}$, existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = k.f(c)$. Sugestão: Tome $p(x) = f(x).e^{-kx}$ e aplique o Teorema de Rolle.

**Prova:**
Dado $k \in \mathbb{R}$, definimos a função $p(x) = f(x).e^{-kx}$ para $x \in [a, b]$ e afirmamos que:

- $p(a) = p(b) = 0$;
- $p'(x) = f'(x).e^{-kx} - kf(x).e^{-kx} = (f'(x) - kf(x)).e^{-kx}$.

Aplicando o Teorema de Rolle à função $p$, existe $c \in (a, b)$ tal que $p'(c) = 0$, isto é,

$$0 = p'(c) = (f'(c) - kf(c)).e^{-kc} \Rightarrow 0 = f'(c) - kf(c).$$

Finalmente $f'(c) = kf(c)$.