3) Demonstre o critério de Cauchy: a sequência de funções $f_n: X \to \mathbb{R}$ converge uniformemente se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n > n_0$, então $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ qualquer que seja $x \in X$.

Teorema de Cauchy para convergência uniforme: Uma sequência de funções (f_n) é uniformemente convergente, se e somente se, é uma sequência de Cauchy.

<u>Resposta</u>: Temos dois casos a considerar.

i) Suponhamos que $f_n \to f$, sendo uniformemente convergente em X. Então:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall x \in X, n > n_0 \to |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Ao tomarmos m e n ambos maiores do que n_0, vale a desigualdade anterior para m também. Então:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall x \in X, m > n_0 \to |f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/2$$

Portanto, a hipótese $m, n > n_0$ implica que:

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

para todo $x \in X$. Portanto (f_n) é uma sequência de Cauchy.

ii) Se a sequência de funções $f_n : X \to \mathbb{R}$ é de Cauchy então, para cada $x \in X$, os números $f_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$ formam uma sequência de Cauchy de números reais.

Temos que pelo Teorema 13 do capítulo II: Toda sequência de Cauchy de números reais é convergente.

Assim pelo teorema 13, esta sequência converge para um número real que chamamos $f(x)$.

Assim definimos uma função $f : X \to \mathbb{R}$, tal que $f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$ para todo $x \in X$.

Para mostrar que $f_n \to f$ uniformemente em X, seja dado $\varepsilon > 0$. Temos que existe n_0 tal que $m, n > n_0 \to |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ para todo $x \in X$.

Nesta desigualdade, mantenhamos n e x fixos e façamos $m \to \infty$. Obteremos: $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$ para todo $x \in X$, desde que seja $n > n_0$. Com isso temos que $f_n \to f$ é uniformemente convergente.