16) Seja $f: I \to \mathbb{R}$ definida em um intervalo. Demonstre que f é convexa se, e somente se, para quaisquer $a, b \in I$ e $0 \leq t \leq 1$ vale $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$.

• A função $f: I \to \mathbb{R}$ é convexa quando:

$$x \in (a,b) \subseteq I \to f(x) \leq f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) =$$

$$f(b) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-b) = \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

$$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq f'(b)$$

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq \frac{f(x)-f(b)}{x-b}$$

Teorema 11: Seja $f: I \to \mathbb{R}$ duas deriváveis no intervalo aberto I. Para que f seja convexa é necessário e suficiente que $f''(x) \geq 0$, para todo $x \in I$.

Resposta: Sejam $a, b \in I$, temos que $0 \leq t \leq 1$. Supomos que $f: I \to \mathbb{R}$ seja convexa e desejamos mostrar que:

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t) f(a) + t f(b)$$

Se tomarmos $a = b$, temos que:

$$f((1-t)a + tb) = f((1-t)a + ta) = f(a) = (1-t)f(a) + t f(a) = (1-t) f(a) + t f(b)$$

Já para o caso em que $b < a$, se tomarmos $a' = b$, $b' = a$ e $t' = 1 - t$, temos:

$$f((1-t)a + tb) = f((1-t')a' + t'b') \leq (1-t')f(a') + t'f(b') = (1-t')f(a) + tf(b)$$

Portanto, se f é convexa, então vale a desigualdade:

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b),$$ para todos a e $b \in I$ e $t \in [0,1]$.

Sejam a e $b \in I$, e agora com $a < b$, e $t \in [0,1]$. Desta forma $x \stackrel{!}{=} ((1-t)a + tb)$ é tal que:

$$x - a = t(b-a) \geq 0 \quad e \quad b - x = (1-t)(b-a) \geq 0$$

Ou seja, $x \in [a,b] \subset I$. Além disso, segue da definição de x que:

$$t = \frac{x-a}{b-a}, \quad e \ (1-t) = \frac{b-x}{b-a}$$

Como f é convexa, temos que:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b-a},$$ e consequentemente,

$$f(x) \leq \frac{(b-x)}{(b-a)} \cdot f(a) + \frac{(x-a)}{(b-a)} \cdot f(b)$$

Logo,

$$f(\underbrace{(1-t)a+tb}_{x}) = f(x)$$
$$\leq \left(\frac{b-x}{b-a}\right) \cdot f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) f(b)$$
$$= (1-t) f(a) + t f(b)$$

Consideremos, agora, que f satisfaz a desigualdade:

$$f((1-t)a+tb) \leq (1-t) f(a) + t f(b)$$

Para todos a e $b \in I$ e $t \in [0,1]$. Mostraremos que f é convexa.

Seja a e $b \in I$, com $a < b$ e $x \in [a,b]$, definindo

$t = \dfrac{x-a}{b-a}$, temos que: $x = (1-t)a + tb$

E, da desigualdade $a \leq x \leq b$, temos que $t \in [0,1]$. Com isso:

$$f(x) = f((1-t)a+tb)$$
$$\leq (1-t) f(a) + t f(b)$$
$$= \left(\frac{b-x}{b-a}\right) f(a) + \left(\frac{x-a}{b-a}\right) f(b)$$

E, consequentemente: $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Temos com isso, que f é convexa.