1) Na definição do limite $\lim_{x \to a} f(x)$, retire a exigência de ser $x \neq a$. Mostre que esta nova definição coincide com a anterior no caso $a \notin X$ mas, para $a \in X$, o novo limite existe se, e somente se, o antigo existe e é igual a $f(a)$.

$a \notin X$ ou $a \in X$

Definição: Seja $f: X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Dizemos que $\lim_{x \to a} f(x) = L$ quando:

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in ((X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta))$ "Em uma vizinhança de a em X".

Sendo $a \in X'$, denotaremos $V^*_\delta(a) = (X - \{a\}) \cap (a-\delta, a+\delta)$

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ então $f(x)$ é limitada em alguma vizinhança $V^*_\delta(a)$.

Tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se, e somente se, toda sequência de pontos $x_N \in X - \{a\}$ com $\lim_{N \to \infty} x_N = a$, satisfaz $\lim_{N \to \infty} f(x_N) = L$.

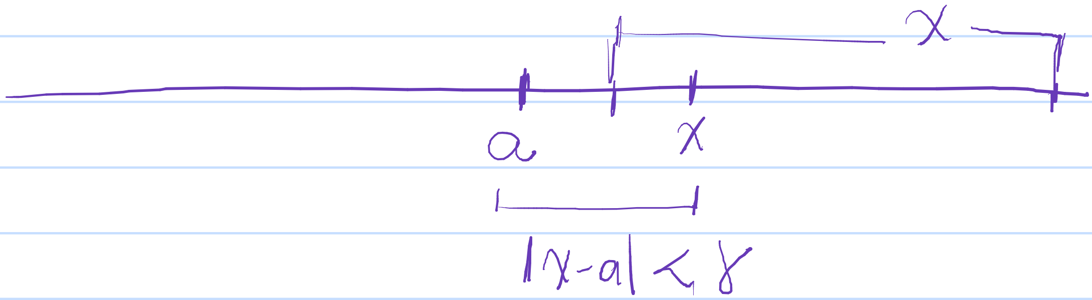
Está relacionado ao comportamento da f perto do a, mas não é o ponto a, o valor da f(a) não altera o limite, o ponto a não precisa ser pertencente ao domínio de f. E mesmo estando o valor da f(a) não altera, o que desejamos é: "para valores perto de a, que pertença a X, o valor da f(x) esteja próximos de L.

$|f(x) - L| < \varepsilon$

O a pode estar em X', para $(X - \{a\}) \neq \phi$. Se $(X - \{a\}) = \phi$, então: $x \in (a-\delta, a+\delta)$ não intersecta $(X - \{a\})$, e a implicação é a mesma e para qualquer L afirmação seria verdadeira e haveria vários limites diferentes.

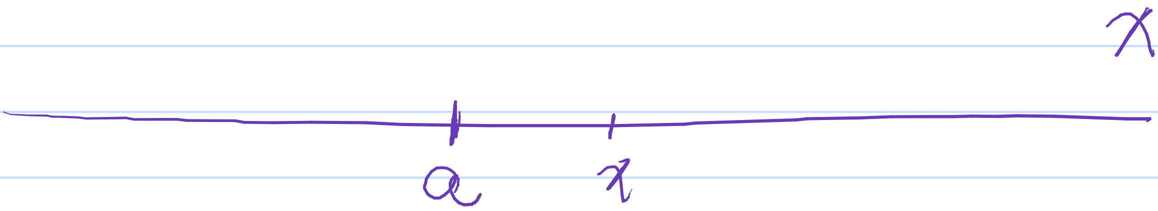
Resposta: Seja $\lim_{x \to a} f(x) = L$ pela definição antiga. Temos 3 condições para observar:

i) $a \notin X$: Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que: $0 < |x-a| < \delta$, $x \in X$, implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Então, como $a \in X$, se $|x-a| < \delta$, $x \in X$, então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Portanto, ainda temos $\lim_{x \to a} f(x) = L$.



ii) $a \in X$ e $f(a) \neq L$

Se tomarmos $\varepsilon = |L - f(a)|$ temos que para todo $\delta > 0$ existe $x \in X$ tal que $|x-a| < \delta$ e $|f(x) - L| \geq \varepsilon$. Se $x = a$. Portanto, $\lim f(x)$ não existe mais.



iii) $a \in X$ e $f(a) = L$

Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < |x-a| < \delta$, $x \in X$, implica $|f(x) - L| < \varepsilon$. Mas, além disso, $|f(a) - L| = 0 < \varepsilon$. Assim, para ~~todo~~ $x \in X$ tal que $|x-a| < \delta$ temos que $|f(x) - L| < \varepsilon$. Portanto, ainda temos $\lim f(x) = L$.

Por fim, se $\lim_{x \to a} f(x) = L$ pela nova definição, então f e L satisfazem também as condições da anterior. Logo, $\lim_{x \to a} f(x) = L$ também pela definição anterior.