Mostre que $GL(\mathbb{R}^m)$ é aberto.

① Definição: $GL(\mathbb{R}^m)$ é o conjunto de todas as matrizes invertíveis $m \times m$, com o $\det \neq 0$.
$M_m(\mathbb{R})$ é um simples conjunto de todas as matrizes $m \times m$

Desejo mostrar que: $GL(\mathbb{R}^m)$ é um subconjunto aberto de $M_m(\mathbb{R})$ usando a definição de um conjunto aberto.

Como o complementar de um conjunto aberto é fechado, então tomamos $GL(\mathbb{R}^m)$ como aberto. Assim o complementar de $GL(\mathbb{R}^m)$ é o conjunto de todas as matrizes com $\det = 0$ e: $\det : M(\mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Para funções contínuas, a pré-imagem de um conjunto fechado é fechado e $\{0\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}$.

Assim, a pré-imagem deste único conjunto fechado sob o mapeamento de determinante, ou seja, o conjunto de todas as matrizes não invertíveis, isto é o complemento deste conjunto $GL(\mathbb{R}^m)$ é um conjunto fechado.

Portanto $GL(\mathbb{R}^m)$ é um conjunto aberto em $M(\mathbb{R}^m)$.