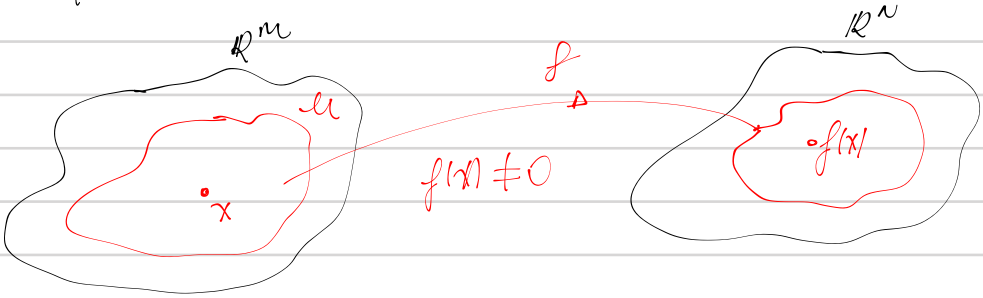
Seja $f: U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com $f(x) \neq 0 \ \forall x \in U$.
Seja:

$$\varphi(x) = \left\langle f(x), \frac{x}{|f(x)|} \right\rangle, \ \forall x \in U.$$ Onde $\langle , \rangle$ é o produto interno usual.

Calcule $\varphi'(x) . v \ \forall v \in \mathbb{R}^m$.



Um produto interno em V é uma função $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$
$\langle (a,b), (c,d) \rangle = ac + bd$
Agora seja $V = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R} ; f$ é contínua$\}$. A função $\langle , \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ é definida por: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) g(x)\, dx$, é um produto interno em V.

Resposta: Temos que $\varphi(x) = \left\langle f(x), \frac{x}{|f(x)|} \right\rangle, \ \forall x \in U$. Desejamos calcular $\varphi'(x) . v$ para todo $v \in \mathbb{R}^m$. Sabemos que:

$$\frac{d}{dt} \langle f, g \rangle = \langle f(t), g'(t) \rangle + \langle f'(t), g(t) \rangle$$

Agora, $\varphi(x) = \left\langle f(x), \frac{x}{|f(x)|} \right\rangle$ e tomamos a derivada.

$$\varphi'(x) = \left\langle f(x), \frac{d}{dt}\left[\frac{x}{|f(x)|}\right] \right\rangle + \left\langle f'(x), \frac{x}{|f(x)|} \right\rangle$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{x}{|f(x)|}\right] = \frac{d/dx\,(x) . |f(x)| - d/dx\,(|f(x)|) . x}{(|f(x)|)^2} = \left(\frac{1 . |f(x)| - \frac{f(x) . d/dx\,(f(x))}{|f(x)|} . x}{|f(x)|^2} \right)$$

Agora vamos simplificar:

$$\frac{|f(x)| - \frac{f(x)\ d/dx\,(f(x))}{|f(x)|} . x}{|f(x)|^2} \Longrightarrow \frac{f(x) - x\ d/dx\,(f(x))}{|f(x)|\, f(x)}$$

$$\varphi'(x) = \left\langle f(x), \frac{f(x) - x \, d/dx\,(f(x))}{|f(x)|\, f(x)} \right\rangle + \left\langle f'(x), \frac{x}{|f(x)|} \right\rangle$$

Então $\varphi'(x) \cdot v = \left[\left\langle f(x), \frac{f(x) - x \, d/dx\,(f(x))}{|f(x)|\, f(x)} \right\rangle + \left\langle f'(x), \frac{x}{|f(x)|} \right\rangle \right] \cdot v$

$$\varphi'(x) \cdot v = f(x) \cdot v + \frac{f(x) - x \, d/dx\,(f(x))}{|f(x)|\, f(x)} \cdot v + f'(x) \cdot v + \frac{x}{|f(x)|} \cdot v$$