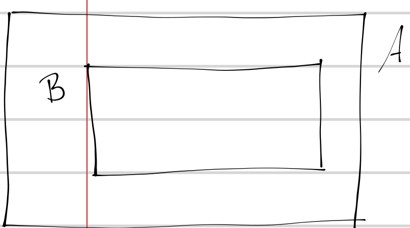
Sejam $f, g : A \to \mathbb{R}$, A m-bloco integráveis, $A \subset \mathbb{R}^m$. Então:

1) $f+g$ é integrável e $\int_A f+g = \int_A f + \int_A g$



Tomando um bloco B e $B \subset A$, temos que:
$m_B(f) + m_B(g) \leq m_B(f+g)$
$\inf\{f(x) : x \in B\} + \inf\{g(x) : x \in B\} \leq \inf\{f(x)+g(x) : x \in B\}$

Temos que B é domínio contido em A, então:
$s(f,P) + s(g,P) \leq s(f+g,P) = \inf\{f(x)+g(x) : x \in B\} = m_B(f+g)$

$$\underline{\int_A} f(x)\,dx + \underline{\int_A} g(x)\,dx \leq \underline{\int_A} [f(x)+g(x)]\,dx$$

Tomamos agora os sup: $M_B(f+g) \leq M_B(f) + M_B(g)$, então:

$\sup\{f(x)+g(x) : x \in B\} \leq \sup\{f(x) : x \in B\} + \sup\{g(x) ; x \in B\}$
$S(f+g, Q) \leq S(f,Q) + S(g,Q)$, onde $P \subset Q$
$$\overline{\int_A} [f(x)+g(x)]\,dx \leq \overline{\int_A} f(x)\,dx + \overline{\int_A} g(x)\,dx$$

Portanto: $s(f,p) + s(g,p) \leq s(f+g,p) \leq S(f+g,Q) \leq S(f,Q) + S(f,Q)$

$$s(f+g,P) \leq S(f,Q) + S(g,Q)$$

$$\underline{\int_A} [f(x)+g(x)]\,dx \leq \overline{\int_A} f(x)\,dx + \overline{\int_A} g(x)\,dx$$

Como $f+g$ é integrável então: $\int_A [f(x)+g(x)]\,dx = \int_A f(x)\,dx + \int_A g(x)\,dx$.

b) Para todo $c \in \mathbb{R}$, a função $c.f$ é integrável e $\int_A c.f(x)\,dx = c.\int_A f(x)\,dx$.

Temos que $c \in \mathbb{R}$ é um escalar, então $c.f$ também pertence a $\mathbb{R}$, como f é integrável então: $\underline{\int_A} f(x)\,dx = \overline{\int_A} f(x)\,dx$. Com isso:

$s(c.f, P) = S(c.f, P)$, como c é um escalar então:
$s(c.f, P) = c.s(f,P)$ se $c \geq 0$ então: $c.s(f,P) = c.S(f,P)$

Para $c<0$, eu não entendi???

Assim $\underline{\int}_A (c \cdot f(x)) dx = c \cdot \underline{\int}_A f(x)\, dx = c \cdot \overline{\int}_A f(x) dx = \int_A c f(x)\, dx$, dado $c \geq 0$

c) Se $f(x) \geq 0$ $\forall x \in A \rightarrow \int_A f(x) \geq 0$, se $f(x) \leq g(x)$ $\forall x \in A \rightarrow \int_A f = \int_A g$

Temos que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in A$, então $m_B \geq 0$:

$m_B = \inf\{f(x) : x \in B\} = \sup s.(f, P) = \underline{\int}_A f(x)\, dx \geq 0$, dado $B \subset A$

para toda partição P. Se $f(x) \leq g(x)$ e como $f(x) \geq 0$ $\forall x \in A$, então $g(x) \geq 0$, logo:

$$g(x) - f(x) \geq 0 \rightarrow \int_A g(x) f(x) - \int_A f(x) dx = \int_A (g-f)(x) dx \geq 0$$

Ou seja, $\underline{\int}_A (g-f)(x)\, dx = \overline{\int}_A (g-f)(x) dx \Rightarrow \int_A g(x) dx - \int_A f(x) dx$

Como $f(x)$ é integrável então: $s(f, P) = S(f, P) \rightarrow s(f,P) - S(f,P) = 0$

$$\int_A g(x) dx - \int_A f(x) dx \geq 0 \rightarrow \int_A g(x) dx \geq \int_A f(x) dx$$

d) A função $|f(x)|$ é integrável e $\left|\int_A f(x) dx\right| \leq \int_A |f(x)| dx$. Em particular, se $|f(x)| \leq K$ para todo $x \in A$ então $\left|\int_A f(x) dx\right| \leq K \cdot Vol\, A$.

Por propriedade de módulo $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$ resulta que a oscilação de $|f| \leq f$ para qualquer conjunto, como f é integrável implica que $|f|$ é integrável pelo teorema 2 onde:
$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon$.

Além disso, temos que: $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ $\forall x \in A$, então:

$$-\int_A |f(x)| dx \leq \int_A f(x)\, dx \leq \int_A |f(x)|\, dx \rightarrow \left|\int_A f(x) dx\right| \leq \int_A |f(x)| dx$$

Seja $|f(x)| \leq K$ $\forall x \in A$, então $\left|\int_A f(x) dx\right| \leq \int_A |f(x)| dx \leq \int_A K \cdot dx = K \cdot Vol.\, A$

c) Se f é contínua, existe $c \in A$ tal que $\int_A f(x)\,dx = f(c) \cdot \text{Vol.} A$.

Sejam $m = \inf\{f(x); x \in A\}$ e $M = \sup\{f(x); x \in A\}$, Sabe-se pelo Corolário "Toda função contínua $f: A \to \mathbb{R}$, A m-bloco é integrável."

Sabe-se que: $m \leq f(x) \leq M \Rightarrow m\,\text{vol}(A) \leq \underline{\int_A} f(x)\,dx \leq \overline{\int_A} f(x)\,dx \leq M\,\text{vol}(A)$

Como f é integrável: $\underline{\int_A} f(x)\,dx = \overline{\int_A} f(x)\,dx$, então:

$$m\,\text{vol}(A) \leq \int_A f(x)\,dx \leq M\,\text{vol}(A) \quad (\div \text{vol}(A))$$

$$m \leq \int_A \frac{f(x)\,dx}{\text{vol}(A)} \leq M$$, assim pelo teorema do valor intermediário

A é conexo (não pode ser dividido em apenas 2 subconjuntos fechados que não tem nenhum ponto comum), então existe $c \in A$ tal que: $\int_A \frac{f(x)\,dx}{\text{Vol.} A} = f(c)$

E pelo teorema do confronto $\int_A \frac{f(x)\,dx}{\text{vol}(A)}$ é um valor entre o ínfimo e o supremo da função.