UFMG

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática - ICEX
Análise II - 2021
Lista 3

1. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ integrável e seja $g = f$ excepto num número finito de pontos. Mostre que g é integável e $\int_A f = \int_A g$.

2. Se $f : A \to \mathbb{R}$ é integrável, mostre que $|f|$ é integrável e $|\int_A f| \leq \int_A |f|$.

3. Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & x \ \text{ irracional}, \\ 0 & x \ \text{ racional}, \ y \ \text{ irracional}, \\ 1/q & x \ \text{ racional}, \ y = p/q. \end{cases}$$

   Mostre que f é integrável e $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$.

4. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula e $f : X \to \mathbb{R}^m$ é localmente Lipschitz então $f(X)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.

5. Se $m < n$ e $f : U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ então $f(U)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

6. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : B \to \mathbb{R}$ funções limitadas não-negativas nos retângulos A, B. Defina $\varphi : A \times B \to \mathbb{R}$ pondo $\varphi(x,y) = f(x) \cdot g(y)$. Prove que

$$\overline{\int}_{A\times B} \varphi(z)dz = \overline{\int}_A f(x)dx \cdot \overline{\int}_B g(y)dy.$$

   e que vale um resultado similar para integrais inferiores.

7. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ integráveis, prove a desigualdade de Schwarz:

$$\left[\int_A f(x)g(x)dx\right]^2 \leq \int_A f(x)^2 dx \cdot \int_A g(x)^2 dx.$$

8. Sejam $A = [0,1] \times [0,1]$, $A_0 = A - \{(0,0)\}$ e $f : A_0 \to \mathbb{R}$ a função contínua (ilimitada) definida por $f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}$. Mostre que se tem

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)dy = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)dx = -\frac{1}{2}.$$

9. Seja $f : A \to B$ contínua tal que $|f(x) - f(y)| \geq c|x - y|$ com $c > 0$ constante e $x, y \in A$ quaisquer. Prove que, para todo $g : B \to \mathbb{R}$ integrável, a composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é integrável.

10. (Principio de Cavalieri.) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^{m+1}$ conjuntos J-medíveis tais que para cada $t \in \mathbb{R}$, as seções $X_t = \{x \in \mathbb{R}^m : (x,t) \in X\}$ e $Y_t = \{y \in \mathbb{R}^m : (y,t) \in Y\}$ são ainda J-medíveis e têm o mesmo volume em $\mathbb{R}^m$. Prove que $vol(X) = vol(Y)$.

11. Dê um exemplo de uma função descontinua f para o qual a oscilação $\omega(f,x)$ é uma função contínua de x.

12. Se uma função $f : A \to \mathbb{R}$, limitada no retângulo $A \subset \mathbb{R}^m$, é integrável então seu gráfico tem volume zero. E a recíproca?

13. Seja $T = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, \ \ y \geq 0, \ \ z \geq 0, \ \ x + y + z \leq 1\}$. Mostre que

$$vol(T) = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dz \int_0^{1-y-z} dy = 1/6.$$

14. Se $X \subset \mathbb{R}^m$ tem volume zero, o mesmo ocorre com $\overline{X}$. E medida nula?

Professor Arturo Fernández
Livros de referência, Elon Lages e Michael Spivak.