Seja $f: A \to \mathbb{R}$ integrável e seja $g = f$ exceto num número finito de pontos. Mostre que g é integrável e $\int_A f = \int_A g$.

(1) Devemos provar que a afirmação é verdadeira para $g(x) = f(x)$ para todo $x \in A$ exceto para um $a \in A$, então usamos um argumento de indução simples para chegar ao resultado.
Portanto $f = g$ exceto para um número finito de pontos.

Como f é integrável sobre A, então g é integrável exceto pelo um número finitos de pontos sobre A.

(1) Desta forma existe $B \in \mathbb{R}$ com $B > 0$ sendo que $|f(x)| \leq B$ e $|g(x)| \leq B$ para todo $x \in A$ exceto para um número finito de pontos.
Tomamos $\varepsilon > 0$, então existe uma partição $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ de A sendo que:

$$s(f,p) - S(f,p) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ e } \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{12B} \quad \forall i = 1, \ldots, N$$

Como $s \in A$ e pertence s pertence a todos os dois a dois intervalos da forma $[x_{i-1}; x_i]$, então:

$$|s(g,p) - s(f,p)| = \sum_{i=1}^{N} [m_i(g,p) - m_i(f,p)] \cdot \Delta x_i$$

$$\leq 2[B+B] \cdot \max\{\Delta x_i \,; i = 1, \ldots, N\}$$

$$< \frac{4B}{12B} = \frac{\varepsilon}{3}$$

Assim, $|S(g,p) - S(f,p)| < \frac{\varepsilon}{3}$, então:

$$s(g,p) - S(g,p) = s(g,p) - s(f,p) - S(g,p) + S(f,p) + s(f,p) - S(f,p)$$

$$\leq |s(g,p) - s(f,p) - S(g,p) + S(f,p) + s(f,p) - S(f,p)|$$

$$\leq |s(g,p) - s(f,p)| + |S(g,p) - S(f,p)| + |s(f,p) - S(f,p)|$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Assim, pela definição de g ser integrável e além disso, temos:

$$\int_A g \leq s(g,p) < S(f,p) + \frac{\varepsilon}{3} < S(f,p) + \frac{2\varepsilon}{3} \leq \int_A f + \frac{2\varepsilon}{3}$$

Similarmente, temos:

$$\int_A g > \int_A f - \frac{2\varepsilon}{3} \longrightarrow \int_A g = \int_A f$$