Se $f: A \to \mathbb{R}$ é integrável, mostre que $|f|$ é integrável e:

$$\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|.$$

Tomamos $F: A \to \mathbb{R}$ e temos $\varepsilon > 0$, dado que F é integrável, com isso existe uma partição $p = \{x_0, x_1, \ldots, x_N\}$ de A, sendo que:

$S(f, p) - s(f, p) < \varepsilon$, para qualquer $i = 1, \ldots, n$ sendo que $(x, y) \in (x_{i-1}, x_i)$. Então:

$$\left| |F(x)| - |F(y)| \right| \leq |F(x) - F(y)|$$

Então $m_i(F)$ é um limite superior para:

$\{ \left| |F(x)| - |F(y)| \right| : x, y \in [x_{i-1}, x_i] \}$, que implica:

$$\sum_{i=1}^{N} (m_i(|F|) \Delta x \leq S(F, p) - s(F, p) < \varepsilon$$

Portanto $|F|$ é integrável.

Aplicando a propriedade do valor absoluto, temos:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Como F é contínua, sabemos que $|F|$ é integrável e podemos integrar cada lado desta desigualdade:

$$\int_A - |f(x)| \, dx \leq \int_A f(x) \, dx \leq \int_A |f(x)| \, dx$$

$$-\int_A |f(x)| \, dx \leq \int_A f(x) \, dx \leq \int_A |f(x)| \, dx$$

$$\left|\int_A f(x) \, dx\right| \leq \int_A f(x) \, dx \leq \int_A |f(x)| \, dx$$

$$\left|\int_A F\right| \leq \int_A |F|$$