Seja $w = y\,dx - x\,dy + dz$ uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$, sejam $u, v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Se $\eta = w - v\,du$ é fechada. Prove que u e v são funções que não dependem da variável z.

Pelo enunciado temos que w é 1-forma em $\mathbb{R}^3$ e $u, v: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, portanto u, v também são 1-forma. Também temos que η é fechado logo $d\eta = 0$, portanto:

3

$$\eta = w - v\,du \to d\eta = d(w - v\,du) = dw - d(v\,du) = 0$$

$$dw = d(v\,du)$$

$$d(y\,dx - x\,dy + dz) = dv \wedge du$$

$$dy \wedge dx - dx\,dy + d(dz) = dv \wedge du \quad , \text{ Mas } d(dz) = 0 \text{ então:}$$

$$dy \wedge dx - dx\,dy = dv \wedge du$$

Portanto $\underbrace{u, v \text{ não depende da variável}}_{\text{porque?}}$ z.

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 0\,? \qquad \frac{\partial v}{\partial z} = 0\,?$$