Enuncie o teorema de Fubini para duas variáveis. Aplique o teorema de Fubini para a função do exercício anterior para mostrar que:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

<u>Teorema de Fubini para duas variáveis:</u>

Seja $f:[a,b]\times[c,d]\to\mathbb{R}$ limitada e $\forall y\in[c,d]$ e $x\in[a,b]$, temos $A(y)=\int_a^b f(x,y)\,dx$ existe e que $A:[c,d]\to\mathbb{R}$ é integrável

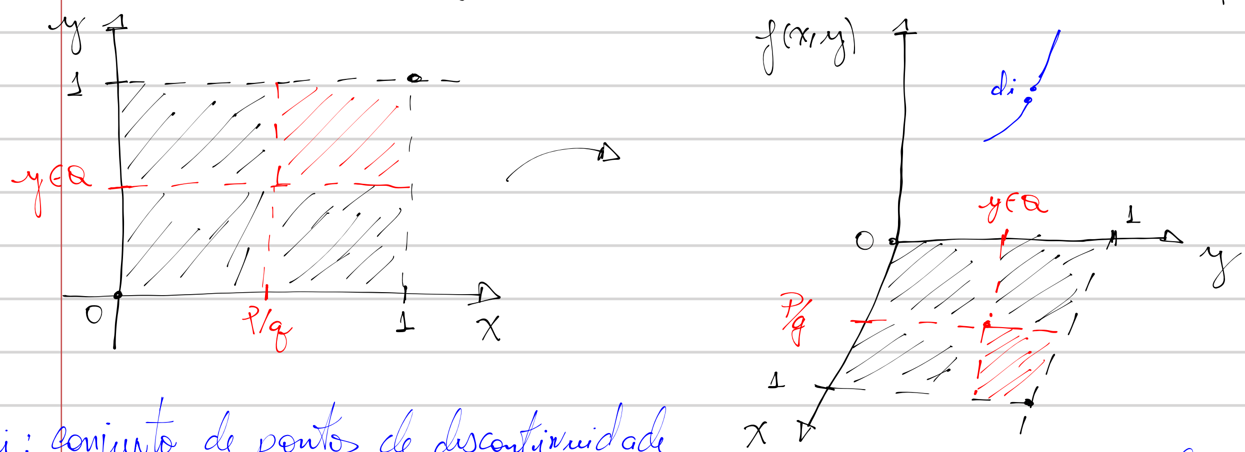
Então: $\iint f(x,y)\,dA = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$, e sua versão análoga

$$\iint_D f(x,y)\,dA = \int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx.$$

<u>Obs</u>: dA é a integral dupla em relação ao elemento de área.

Agora vamos aplicar ao exercício da questão 3, desta prova.

Seja D o domínio de $f(x,y)$, então $D=[0,1]\times[0,1]$, uma quadrado.



di: conjunto de pontos de descontinuidade (medida nula), pelo teorema de Lebesgue a f é integrável.

Vamos calcular a integral de dentro para fora, o teorema de Fubini garante que:

$$\iint f(x,y)\,dA = \int_0^1\underbrace{\int_0^1 f(x,y)\,dx}\,dy,$$

1º integral para calcular

$$\int_0^1 \left([x]\Big|_0^1 \right) dy = \int_0^1 [1-0]\, dy = \int_0^1 1\, dy = [y]\Big|_0^1 = [1-0] = 1.$$

Agora trocamos a ordem:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\, dA = \int_0^1 \underbrace{\int_0^1 f(x,y)\, dy}\, dx$$., 1º integral para calcular.

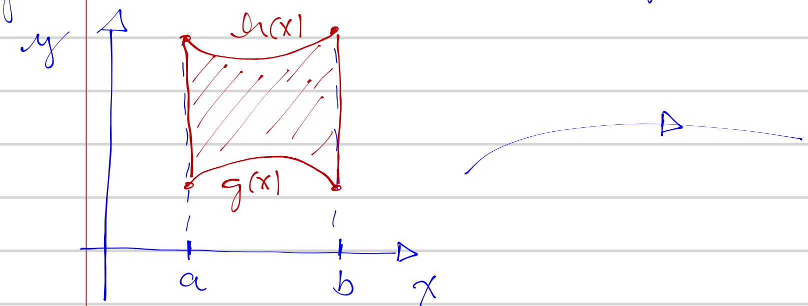
$$\int_0^1 \left([y]\Big|_0^1 \right) dx = \int_0^1 \left([1-0] \right) dx = \int_0^1 1\, dx = [x]\Big|_0^1 = [1-0] = 1$$

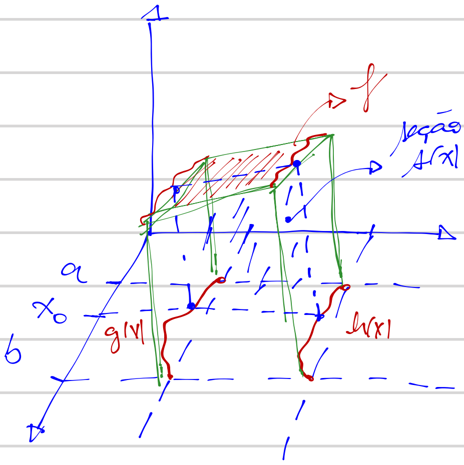
Portanto $\iint f(x,y)\, dA = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^1\int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx = 1$

Esta parte merece mostrar, aprendi durante a prova, se quiser desconsiderar, somente p/ mostrar minha evolução:

Teorema de Fubini (Geral):

$f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ e $D = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b$ e $g(x) \leq y \leq h(x)\}$





$A(x_0) = \int_{g(x_0)}^{h(x_0)} f_x(y)\, dy = \int_{g(x_0)}^{h(x_0)} f(x_0, y)\, dy$, temos que o x_0 foi fixado.

E $A(x_0)$ é uma área da seção em y. Agora para cada $x \in [a,b]$, vamos deixar o x variar no intervalo, então:

$$A(x) = \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy,$$ então:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy\, dx = \int_{g(x)}^{h(x)} \int_a^b f(x,y)\, dx\, dy.$$