Seja $w \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ dada por $w = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$.

a) Mostre que $dw = 0$, ou seja w é fechado.

b) Mostre que não existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ tal que $w = df$, ou seja w não é exata.

a) $w = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$ e tomamos $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y}$ e $g = (x\,dy - y\,dx)$

Seja $d\alpha = df \wedge g + f\,dg$

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2)^2}.(2x\,dx + 2y\,dy) \wedge g + \frac{1}{x^2+y^2}\, 2\,dx \wedge dy$$

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2)^2}(2x\,dx + 2y\,dy) \wedge (x\,dy - y\,dx) + \frac{1}{x^2+y^2}(2\,dx \wedge dy)$$

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2)^2}(2x^2\,dx \wedge dy - 2y^2\,dy \wedge dx) + \frac{1}{x^2+y^2}\, 2\,dx \wedge dy$$

Permutação $dx \wedge dy$ multiplica por (-1) e troca o sinal

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2)^2}.2(x^2+y^2)\,dx \wedge dy + \frac{1}{x^2+y^2}\, 2\,dx \wedge dy$$

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2}.2\,dx \wedge dy + \frac{1}{x^2+y^2}.2\,dx \wedge dy = 0 \longrightarrow dw = 0$$ e com isso w é fechado.

---

b) $w = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$, precisamos mostrar que w não é exato. Agora, tomamos um τ sendo uma curva fechada e:

$\tau : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\theta \longrightarrow (\cos\theta, \sin\theta)$

Calculamos a integral: $\int_\tau w = \int_\tau \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{-\sin\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta}(-\sin\theta) + \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta + \cos\theta^2}(\cos\theta) \right\} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{+\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin^2\theta + \cos^2\theta} \right\} dt$$, sabemos que $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\int_0^{2\pi} 1\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$, como $\int_\tau w \neq 0$ e w não é exato. Ou seja, não existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ sendo que $w = df$. Isto é, w é fechado mas não é exato.