0

Sejam w uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^m$ e $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função C^∞, com $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Mostre que $d(fw) \equiv 0$ (identicamente zero) se, e somente se, a 1-forma:

$$\beta = w - \frac{1}{f} dx_{m+1}$$

em $\mathbb{R}^{m+1}$ satisfaz a equação $\beta \wedge d\beta = w \wedge dw$. (Considere $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ definido por $x_{m+1} = 0$).

Como w é 1-forma e $f(x)$ uma função não nula para qualquer ponto do domínio. Desejamos mostrar que $d(fw) \equiv 0$.

Para mostrar vamos utilizar o "pull back", então:
"Seja uma forma de grau r e classe C^1 em M, para toda parametrização $\varphi: M_0 \to M$ em M, existe uma única forma $d\varphi M$, de grau $(r+1)$ em M, tal que $\varphi^*(d\varphi w) = d(\varphi^* w)$."

Então: $\beta = w - \frac{1}{f} dx_{m+1} \to w - \beta = \frac{1}{f} dx_{m+1}$

Aplicando o "pull back", temos:

$$\varphi^*(d\varphi w) = d(\varphi^* w)$$

$$\varphi^*\left(\frac{1}{f} dx_{m+1}\right) = d(w - \beta) \to \int \frac{1}{f} dx_{m+1} = \int f^{-1} dx_{m+1} = 0 \text{ e } x_{m+1} = 0, \text{ então } d_0 = 0$$

$$\varphi^*(0) = \underline{w \wedge dw - \beta \wedge d\beta}$$

$$0 = w \wedge dw - \beta \wedge d\beta \to w \wedge dw = \beta \wedge d\beta.$$

Com isso $d(fw) \equiv 0$.

Agora a volta se $d(fw) \equiv 0$, então $fw \wedge dw = 0$, mas $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$.
Aplicando a regra da cadeia, temos $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ possui, em cada ponto $x \in \mathbb{R}^m$, uma derivada, que é uma transformação linear:

$$f'(x): T_x \mathbb{R}^m \to T_{f(x)} \mathbb{R}, \text{ ou}$$

$$[f'(x)]^*: A_m(T_{f(x)} \mathbb{R}) \to A_m(T_x \mathbb{R}^m)$$

$$(f^* w)(x) = [f'(x)]^* . w(f(x))$$