Questão 4) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $\varphi : U \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínua, com derivada parcial contínua $\partial_1 \varphi : U \times [a,b] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, e $\alpha, \beta : U \to [a,b]$ funções de classe C^1. Considere a aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida por:

$$f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x,t)\,dt$$

Prove que $f \in C^1$ e calcule $f'(x).h$ para $x \in U$ e $h \in \mathbb{R}^m$ arbitrários.

Tomamos $U \subseteq \mathbb{R}^m$ sendo um conjunto aberto e $\varphi : U \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sendo uma função contínua com derivada parcial $\partial \varphi : U \times [a,b] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, também dada por $\alpha, \beta : U \to [a,b]$ são funções de classe C^1.

Vamos definir:

$f : U \to \mathbb{R}^n$ por $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x,t)\,dt$, precisamos provar que $f \in C^1$.

Com isso tomamos o Teorema de Leibniz:

"Temos f definida em $X \times [a,b]$, onde X sendo um conjunto aberto contido em $\mathbb{R}^m$ e sua derivada parcial existe, sendo contínua em $X \times [a,b]$. Então $\varphi(x) = \int_a^b F(x,t)\,dt$ é contínua e diferenciável e $\underbrace{\varphi'(x) = \int_a^b \frac{\partial F}{\partial x}\,dt}$

$\underbrace{e \ \frac{\partial \varphi}{\partial t} = F(x,t).}$" (✱)

Agora definimos: $\phi(x,y) = \int_a^y \varphi(x,t)\,dt$, $\forall x \in U$ e $y \in [a,b]$, (i)

Então: $f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x,t)\,dt \quad \forall x \in U$, então:

$$f(x) = \int_{\alpha(x)}^{a} \varphi(x,t)\,dt + \int_a^{\beta(x)} \varphi(x,t)\,dt = -\int_a^{\alpha(x)} \varphi(x,t)\,dt + \int_a^{\beta(x)} \varphi(x,t)\,dt =$$

$$\int_a^{\beta(x)} \varphi(x,t)\,dt - \int_a^{\alpha(x)} \varphi(x,t)\,dt.$$

Voltando em (i), temos:

$$f(x) = \phi(x, \beta(x)) - \phi(x, \alpha(x)) \quad (ii)$$

Se considerarmos ϕ diferenciável, a derivada parcial $\phi(x,y)$ pode ser dada por:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = \int_a^y \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt \quad e \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = \varphi(x,y)$$

Como $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ é contínua sua integral é também uma função contínua e como ϕ e φ são contínuas. Isto mostra que ambas as derivadas parciais de $\phi(x,y)$ são contínuas. Temos que derivada parcial $\rightarrow$ diferenciabilidade da função $\rightarrow$ ϕ é diferenciável.

Agora de (ii), temos:

$$f'(x) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \beta(x)) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, \beta(x)) \cdot \beta'(x)\right) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, \alpha(x)) + \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, \alpha(x)) \cdot \alpha'(x)\right) \quad (iii)$$

Portanto $\alpha(x)$, $\beta(x)$ e $\phi(x,y)$ são funções em C^1.

Agora $\forall x \in \mathcal{U}$ e $\forall y \in [a,b]$, $\frac{\partial \phi}{\partial x}(x,y) = \int_a^y \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt$. Tomando a derivada de ϕ e mantendo y fixado, aplicamos (*) e pelo teorema fundamental do calculo integral temos:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y}(x,y) = \varphi(x,y)$$

E substituindo em (iii), temos:

$$f'(x) = \left(\int_a^{\beta(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt + \varphi(x, \beta(x)) \cdot \beta'(x)\right) - \left(\int_a^{\alpha(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt + \varphi(x, \alpha(x))\,\alpha'(x)\right)$$

$$= \varphi(x, \beta(x)) \cdot \beta'(x) - \varphi(x, \alpha(x)) \cdot \alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt$$

Agora $\varphi \in C^1$, $\beta \in C^1$ e $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)$ também é contínua, e isto implica que $f'(x)$ é contínua também e portanto $f \in C^1$. Assim $f' \in C^1$ e $f'(x) \cdot h$ para $h \in \mathbb{R}^m$ e $h = [h_1, \dots, h_m]^T$, então:

$$f'(x) \cdot h = \left[\varphi(x, \beta(x)) \cdot \beta'(x) - \varphi(x, \alpha(x)) \cdot \alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t)\,dt\right] \cdot h$$