(Princípio de Cavalieri) Sejam $X, Y \subset \mathbb{R}^{m+1}$ conjuntos J-mensuráveis tais que cada $t \in \mathbb{R}$, as seções $X_t = \{x \in \mathbb{R}^m : (x,t) \in X\}$ e $Y_t = \{y \in \mathbb{R}^m : (y,t) \in Y\}$ são ainda J-mensuráveis e têm o mesmo volume em $\mathbb{R}^m$. Prove que $vol(X) = vol(Y)$.

Devemos mostrar o princípio de Cavalieri dado que: $Vol(X) = \int_a^b vol(X_T)$ e $Vol(Y) = \int_a^b vol(Y_T)$ para $a, b \in \mathbb{R}$.

Observamos que X, Y são J-mensuráveis e limitados, logo existe $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $Vol(X_N) = vol(Y_N) = 0$ e seja $m > b$ então $Vol(X_m) = Vol(Y_m) = 0$ para $n, m \in \mathbb{R}$.

Seja agora $A = \prod_{i=1}^{m} [c_i, d_i]$ um bloco em $\mathbb{R}^m$, tal que as partições $P = [P_1, \dots, P_m]$ estão em X. Então $P_i \in [c_i, d_i]$ para $i = 1, \dots, m$. Com isso temos que $X \subset A \times [a,b]$, então:

$$Vol(X) = \int_{A \times [a,b]} \chi_X \text{, onde } \chi_X \text{ é a função característica de } X$$

Se χ_X é integrável podemos reescrever pelo teorema de Fubini, como:

$Vol(X) = \int_a^b \int_A \chi_X$, mas $\int_A \chi_X = Vol(X)$ e como X_T é J-mensurável temos então que: $vol(X) = \int_a^b Vol(X_T)$ e analogamente $Vol(Y) = \int_a^b vol(Y_T)$. Mas $Vol(X_T) = Vol(Y_T)$ $\forall t \in [a,b]$ e finalmente $Vol(X) = Vol(Y) = 0$, pois todo conjunto com medida nula possui volume zero.