Seja $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que para cada $x, v \in \mathbb{R}^m$ quaisquer tem-se:

$$\langle f'(x).v, v\rangle \geq |\alpha| |v|^2, \text{ onde } \alpha > 0 \text{ é uma constante}$$

Prove que $|f(x) - f(y)| \geq \alpha|x-y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$ arbitrários. Conclua que $f(\mathbb{R}^m)$ é fechado, e daí, que f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^m$.

Resposta: Como $f \in C^1$ pode ser entendida por f ser diferenciável, então definimos $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}^m$ por $\varphi(t) = \langle f(x + t(y-x)), y - x\rangle$.

Temos que $\varphi|_{[0,1]}$ é contínua e $\varphi|_{(0,1)}$ é diferenciável, então pelo Teorema do valor intermediário (T.V.M), existe $\theta \in (0,1)$ tal que $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi(\theta)(1-0) \to \langle f(y), y-x\rangle - \langle f(x), y-x\rangle =$

$\langle f'(x+\theta(y-x))(y-x), y-x\rangle \to \langle f(y) - f(x), y-x\rangle =$

$\langle f'(x+\theta(y-x))(y-x), y-x\rangle \to |(f(y)-f(x), y-x| = |f'(x+\theta(y-x)),$

$y-x| \geq \alpha|y-x|^2$, então:

$|f(y) - f(x)|.|y-x| \geq |(f(y)-f(x), y-x)| \geq \alpha|y-x|^2 \to |f(y)-f(x)| \geq$

$\alpha|y-x|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$. Agora se $x = y$ então a desigualdade é trivial.

Agora tomamos $f(\mathbb{R}^m)$ sendo fechado, assim seja $y \in \overline{f(\mathbb{R}^m)}$, e $y = \lim f(x_k)$, e $(x_k) \subset \mathbb{R}^m$, temos que $|x_r - x_s| \leq \frac{1}{\alpha}|f(x_r) - f(x_s)|$, donde (x_k) é de Cauchy e portanto converge. Seja $x = \lim x_k$, da continuidade de f temos que $f(x) = \lim f(x_k) = y \to y \in f(\mathbb{R}^m) \to f(\mathbb{R}^m)$ é fechado. Pode-se notar que $f \in C^1$ e $f'(x).v \neq 0$, $\forall v \in \mathbb{R}^m$, então f é difeomorfismo global sobre sua imagem aberta $f(\mathbb{R}^m)$.

Portanto, f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre si mesmo.