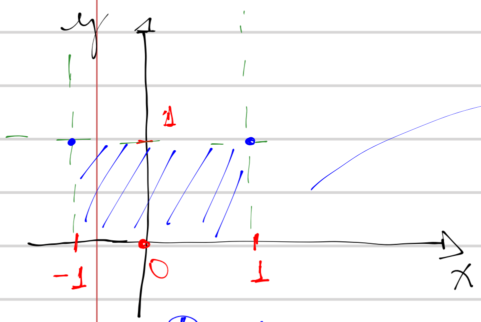
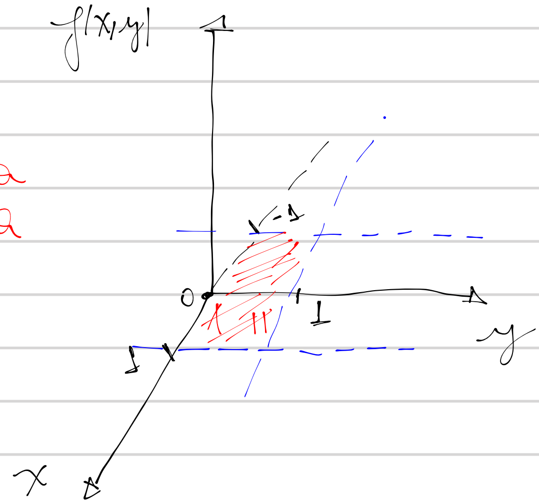
Defina $f: [-1,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ por $f(x,y) = x$, se $y \in \mathbb{Q}$ e $f(x,y) = 0$ em outro caso. Mostre:

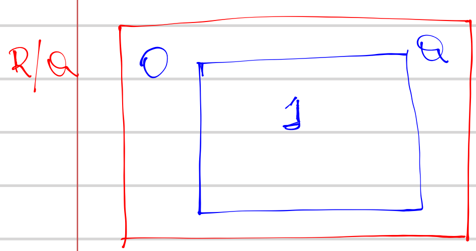
- $\int_0^1 \int_{-1}^1 f(x,y)\, dx\, dy$ existe, mas $\int_{-1}^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx$ não existe.



Domínio

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } y \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } y \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$





Tomamos $\int_0^1 \int_{-1}^1 f(x,y)\, dx\, dy$, se $y \in \mathbb{Q} \to \int_0^1 \int_{-1}^1 x\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2}\right]\Big|_{-1}^{1} dy$ $= \int_0^1 \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right] dy = 0$. Agora se $y \notin \mathbb{Q}$ $\int_0^1 \int_{-1}^1 0\, dx\, dy = 0$, temos que é possível calcular a integral iterada para todo $y \in [0,1]$.

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 f(x,y)\, dx\, dy = 0$$

Agora tomamos $x \in [-1,1]$ e consideramos $\int_{-1}^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx$ e vamos considerar a função $f(x,y)$.
Temos que $f(x,y)$ não é Riemann-integrável, pois ela é descontínua em todos os pontos de seu domínio (com exceção de $x=0$), neste caso não está definida a integral iterada:

$$\int_{-1}^1 \int_0^1 f(x,y)\, dy\, dx$$

- Calcule $\int_{-1}^{1}\overline{\int_{0}^{1}} f(x,y)\,dy\,dx$ e $\int_{-1}^{1}\underline{\int_{0}^{1}} f(x,y)\,dy\,dx$

Tomamos todas as somas inferiores $s(f,P)$ são limitadas inferiormente por -1, isto porque dado um $y \in [0,1]$ o valor da integral esta vinculado a $x \in [-1,1]$

$$\int_{-1}^{1}\underline{\int_{0}^{1}} f(x,y)\,dy\,dx \quad , \quad \underline{\int_{0}^{1}} f(x,y)\,dy = -1$$

$$\int_{-1}^{1} -1\,dx = -x \Big|_{-1}^{1} = 0$$

Agora tomamos todas as soma superiores $S(f,P)$ são limitadas superiormente por $x \in [-1,1]$.

$$\int_{-1}^{1}\overline{\int_{0}^{1}} f(x,y)\,dy\,dx \quad , \quad \overline{\int_{0}^{1}} f(x,y)\,dy = 1 \text{, então}$$

$$\int_{-1}^{1} 1\,dx = x \Big|_{-1}^{-1} = 0$$

- Mostre que f não é integrável em $[-1,1] \times [0,1]$.

Para mostrar que a f não é integrável no produto cartesiano $[-1,1] \times [0,1]$, vamos considerar uma partição P em $[-1,1] \times [0,1]$ e $\{I_1, \dots, I_k\}$ a familia de pequenos intervalos gerados. Podemos então escolher um $x \in [-1,1]$ de modo que para qualquer intervalo I_j, existam números n, m onde: $n \in \mathbb{Q}$ e $m \in \mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Tais pares (n,m) pertence a I_j e como em cada um desses intervalos há pontos com coordenadas irracionais e racionais, temos que:

$$s(f,P) = -1 \quad e \quad S(f,P) = 1$$

Portanto temos uma descontinuidade e $S(f,P) - s(f,P) = 1-(-1) = 2$ e $2 > \varepsilon$. Assim não é integrável.