Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um m-bloco e $f: A \to \mathbb{R}$ uma função limitada e integrável. Prove que para todo $\delta > 0$, o conjunto $E_\delta = \{x \in A: w(f,w) \geq \delta\}$ tem volume zero. Aqui $w(f,x)$ é a oscilação de f no ponto x.

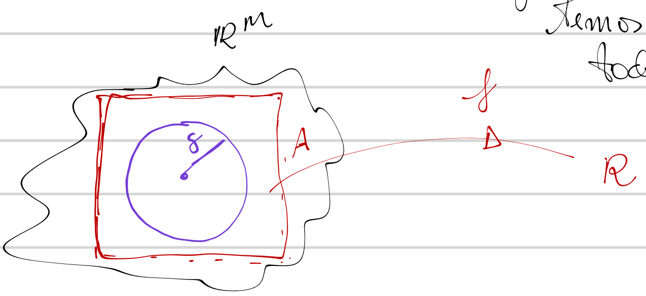
Temos que f é limitada, então supomos que $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, e P é uma partição de $[a,b]$, e Q é um refinamento de P. Então:

$$s(f,P) \leq s(f,Q) \leq S(f,Q) \leq S(f,P)$$

O mesmo vale p/ $A \subset \mathbb{R}^m$ e $P \subset Q$ com Q sendo um refinamento de P. Desta forma p/ quaisquer 2 partições P, Q de A temos que: $s(f,P) \leq S(f,Q)$.

Temos que f é integrável então: $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$

Resposta: Tomamos $A \in \mathbb{R}^m$ e $f: A \to R$, temos também uma temos um conjunto E_δ, onde são todos os pontos onde $w(f,x) \geq \delta$, este δ é arbitrário.



Definimos a oscilação de uma função limitada sobre um conjunto A como: $\underset{A}{w} f = \sup_A(f) - \inf_A(f)$

Assim se $[a,b] \in A$ e $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e $P = \{I_1, I_2, \dots, I_N\}$ é uma partição de $[a,b]$, então:

$$S(f,P) - s(f,P) = \sum_{k=1}^{N} \sup_{I_k} f \cdot |I_k| - \sum_{k=1}^{N} \inf_{I_k} f \cdot |I_k| = \sum_{k=1}^{N} \underset{I_k}{w} f \cdot |I_k|$$

Como a f é integrável, uma integral de Riemann podemos tomar $[S(f,P) - s(f,P)]$ tão pequeno como desejado. Neste caso, vamos tomar um refinamento de partições P sendo que a oscilação de f no intervalo é arbitrariamente pequena, e a soma do comprimento dos intervalos restantes (onde a oscilação de f é grande) também é arbitrariamente pequena.

Por exemplo: $f(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } 0 < x \leq 1 \\ 1, \text{ se } x = 0 \end{cases}$, é Riemann integrável e $\int_0^1 f(x)dx = 0$ e possui oscilação constante igual a 1, mas o comprimento de cada intervalo pode ser tão pequeno quanto desejado.

Assim uma função f é integrável, possui uma oscilação arbitrariamente pequena, ou constante como no exemplo acima. Então tomamos um $\delta > 0$, para a qual temos $E_\delta = \{x \in A : w(f,x) \geq \delta\}$.

Por definição $E_\delta \subset A$ tem medida zero por Lebesgue, se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma coleção contável de intervalos abertos $\{(a_k, b_k) : k \in \mathbb{N}\}$ sendo que:

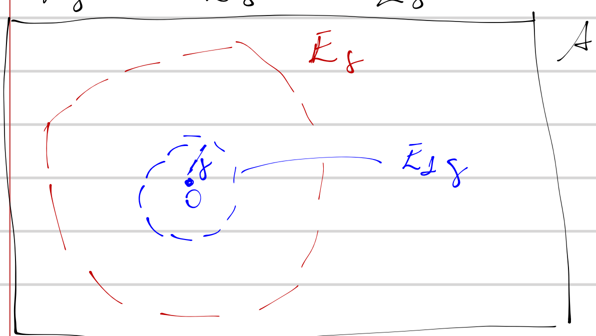
$$E_\delta \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k), \quad \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon$$

"Estes intervalos abertos não precisam ser disjuntos ou sobrepostos."

Seja $a_k = x - \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}$ e $b_k = x + \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \dfrac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Assim E_δ tem medida nula, e sua oscilação dada por:

$$W_{E_\delta}(f) = \sup_{E_\delta}(f) - \inf_{E_\delta}(f) \geq \delta$$



Se $\delta = 0$ então $E_\delta = A$ e f é integrável porque $w(f,x)$ é constante.

Agora se $\delta > 0$, então E_δ será $w(f,x) < c$, onde c é uma constante arbitrária, e f também será integrável

Esta constante c será menor sempre que δ aumentar, e pelo teorema de Lebesgue:

"Uma função $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, definida no retângulo $A \subset \mathbb{R}^n$ é integrável, se e somente se, o conjunto de seus pontos de descontinuidade possui medida nula em $\mathbb{R}^n$."

Assim E_δ tem medida nula, logo $med(E_\delta) = 0$ e com isso

E_δ é J-mensurável então $Vol(E_\delta) = \int_{E_\delta} \chi_{E_\delta} = 0$.