5| Seja $M \subset \mathbb{R}^m$ aberto e conexo, se $f: M \to \mathbb{R}$ tem, em todos os pontos de M, derivadas parciais nulas então f é constante.

Definição: Um espaço topológico X é dito conexo por caminhos se dados $a, b \in X$, existe uma função contínua $f: [0,1] \to X$ tal que $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Diremos que f é um caminho em X entre a e b.

Proposição: Cada espaço conexo por caminhos é conexo.

Um espaço topológico X é conexo quando ser escrito como união disjunta não trivial de abertos, ou seja se:

$$X = \bigcup_{\lambda \in A} A_\lambda$$, onde todos os A_λ são abertos, não-vazios e disjuntos, então $\# A \leq 1$.

Exemplo: Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um aberto conexo, então 2 pontos de A podem ser ligados por um "caminho contínuo" em A. Ou seja, dados $a, b \in A$, existe $f: [0,1] \to A$ contínua, com $f(0) = a$ e $f(1) = b$.

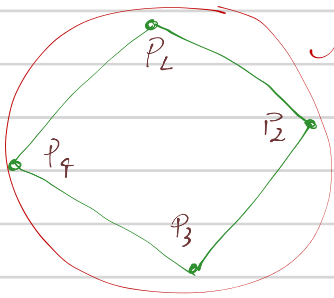
Assim seja C o conjunto dos pontos que podem ser ligados a a. Então, C é aberto. De fato, se $c \in C$, tomando $\varepsilon > 0$ tal que:

$$B_\varepsilon(c) \subset A$$

temos que todos os pontos $b \in B_\varepsilon(c)$ podem ser ligados a c por um "caminho retilíneo." Assim, "concatenando" o caminho de a até c com o caminho de c até b, temos um caminho de a até b. Portanto, $B_\varepsilon(c) \subset C$, ou seja, C é aberto.

" Por outro lado, se $c \notin C$, tomando novamente $\varepsilon > 0$ tal que $B_\varepsilon(c) \subset A$, temos que nenhum ponto de $B_\varepsilon(c)$ pode ser ligado a a. Ou seja, $A \cap C_c$ é aberto. E como $a \in C$, C é não-vazio. Assim, podemos concluir pela conexidade de A que $C = A$." Ajuda para melhorar!!!

Resposta: Temos que M é aberto e conexo, ou seja, ele é poligonalmente conectado por seus pontos. Portanto cada ponto x e y em M pode ser conectado por um caminho poligonal dentro de M.



Assim os vértices deste polígono que parte de $x = p_1$, $y = p_2$, $z = p_3$ e $w = p_4$. Cada linha de segmento está contida em M, assim se aumentarmos os vértices, temos:

$\measuredangle(P_{i+1}, P_i) \subseteq M$, para $i = 1, \ldots, n$.

Tomamos o teorema do valor médio: "Seja $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ contínua em U aberto. Se o segmento de reta $[a, a+h]$ está contido em U e f é diferenciável em $(a, a+h)$ então: $|f(a+h) - f(a)| \leq |h| \sup \| f'(a+th) \|$, para $0 < t < 1$."

Com isso: $\forall a \in \mathbb{R}^n$, temos: $a \cdot | f(p_{i+1}) - f(p_i) | = \nabla f(z) \cdot (y - x)$, onde $z \in L(p_{i+1}, p_i)$, assim: $a \cdot | f(p_{i+1}) - f(p_i) | = 0$

Portanto: $a \cdot | f(y) - f(x) | = 0 \ \forall a \in \mathbb{R}^n$, assim $a = 0$ ou $| f(y) - f(x) | = 0$
Então como a norma é a distância entre 2 pontos, temos que:

$$\| f(y) - f(x) \|^2 = 0 \to f(y) - f(x) = 0 \to f(y) = f(x)$$

Mas x e y são pontos distintos, então f é constante.