UFMG

Universidade Federal de Minas Gerais

Departamento de Matemática - ICEX

Análise II - 2021

Prova Substitutiva - 01/09/2021

1. (6 pontos) Seja $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com $f(x) \neq 0$ para todo $x \in U$. Seja
$$\varphi(x) = \langle f(x), \frac{x}{|f(x)|} \rangle, \quad \forall x \in U$$
where $\langle , \rangle$ é o produto interno usual. Calcule $\varphi'(x).v$ para todo $v \in \mathbb{R}^m$.

2. (7 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 tal que $||f'(x).v|| = ||v||$ para todo $x, v \in \mathbb{R}^m$ (onde $||.||$ é a norma euclideana). Prove que f satisfaz
$$||f(x) - f(y)|| = ||x - y|| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m.$$

3. (7 pontos) Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um m-bloco e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função límitada e integrável. Prove que para todo $\delta > 0$, o conjunto $E_\delta = \{x \in A : \omega(f, x) \geq \delta\}$ tem volume zero. Aqui $\omega(f, x)$ é a oscilação de f no ponto x.

4. (7 pontos) Seja $f : U \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^∞ no aberto $U \subset \mathbb{R}^2$. Defina a função
$$J(x, y) = \det f'(x, y) \quad \forall (x, y) \in U.$$
Suponha que $D \subset U$ é um domínio compacto cujo bordo ∂D seja uma curva lisa fechada. Se $f(x, y) = 0$ para todo $x \in \partial D$, prove que
$$\iint_D J(x, y) dx dy = 0.$$

5. (7 pontos) Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis no ponto $a \in U$, com $f(a) = g(a)$. Então $f'(a) = g'(a)$ se e somente se
$$\lim_{v \to 0} \frac{f(a + v) - g(a + v)}{|v|} = 0.$$

Professor Arturo Fernández