Sejam $f, g: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ tais que $g(x) = f(x) + (f(x))^5$. Se $g \in C^r$ (de classe C^r) então $f \in C^r$ (é de classe C^r).

<u>Resposta</u>

Vamos fixar um ponto x_0 arbitrário em $\mathbb{R}^N$ e definimos:

$$F: \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F(x,y) = g(x) - y - y^5$$

Temos que $F(x_0, f(x_0)) = 0$ e $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, f(x_0)) = 1 - 5f(x_0)^4 \neq 0$

Com isso, pelo teorema da Função Implícita, existem abertos $I \subset \mathbb{R}^N$ e $J \subset \mathbb{R}$, contendo x_0 e $f(x_0)$, respectivamente, tais que $\forall x \in I$ existe um único $y \in \varphi(x) \in J$ tal que $F(x,y) = 0$ e $\varphi: I \to J$ está definida em C^r.

Temos que f é contínua em $\mathbb{R}^N$ e J aberto em $\mathbb{R}$, então $f^{-1}(J) \subset \mathbb{R}^N$ é aberto. Tomemos então um $W = (f^{-1}(J) \times J) \cap (I \times J)$.
Assim, temos que $(x_0, f(x_0)) \in W$ e $\forall (x, f(x)) \in W$, $F(x, f(x)) = 0$, com isso, pela unicidade de φ temos que $\varphi(x) = f(x)$, $\forall x \in F^{-1}(J)$ e isto implica que f é de classe C^r numa vizinhança de x_0, e como x_0 foi tomado arbitrariamente, segue que f é de classe C^r em $\mathbb{R}^N$.