Questão 3! Seja $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ contínua no aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2$, tal que:
$(x^2 + y^4) f(x,y) + f(x,y)^3 = 1$, para qualquer $(x,y) \in \mathcal{U}$. Prove que $f \in C^\infty$.

Defina $F(x,y,z) = (x^2 + y^4) z + z^3$, tomamos $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$. Assim,
$F(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = 1$.
Temos que $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = x_0^2 + y_0^2 + 3(f(x_0,y_0))^2 \neq 0$

Observa-se que $x_0^2 + y_0^2 + 3(f(x_0,y_0))^2 = 0 \leftrightarrow x_0 = y_0 = f(x_0,y_0) = 0$, mas isto não ocorre pois implicaria $F(x_0, y_0, F(x_0,y_0)) = 0 \neq 1$).

Pelo teorema da função implícita, existem abertos $V_{(x_0,y_0)}$, $W_{f(x_0,y_0)}$ tais que $\forall (x,y) \in V_{(x_0,y_0)}$, $\exists !\, z = \xi(x,y) \in W_{f(x_0,y_0)}$ ($\xi \in C^\infty$) tal que $F(x,y,\xi(x,y)) = 1$.
Observa-se que $F(x_0, y_0, f(x_0,y_0)) = 1$ e assim da unicidade de ξ podemos concluir que $f(x_0,y_0) = \xi(x_0,y_0)$. Como f é contínua e $W_{f(x_0,y_0)}$, então $f^{-1}(W_{f(x_0,y_0)})$ é aberto e contém (x_0,y_0). Consideremos o aberto $A = f^{-1}(W_{f(x_0,y_0)}) \cap V_{(x_0,y_0)} \subset V_{(x_0,y_0)}$.

Temos que $\forall (x,y) \in A$, $\exists !\, \xi(x,y) \in C^\infty$ que satisfaz $F(x,y,\xi(x,y)) = 1$

No entanto, $\forall (x,y) \in A$ temos que $f(x,y) \in W_{f(x_0,y_0)}$ e $F(x,y,f(x,y)) = 1$, assim da unicidade de ξ segue que $f(x,y) = \xi(x,y)$, $\forall (x,y) \in A$.
Portanto, $f \in C^\infty$.