Questão 5| Faça o que se pede:

- Enuncie o Teorema da forma local das Imersões:

Seja $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$, e U aberto de classe C^k, e $k \geq 1$. Suponha que exista $x_0 \in U$ tal que $f'(x_0): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é injetiva. Então existe um difeomorfismo de classe C^k:

$$h: Z \to V \times W$$

Z é uma vizinhança de $f(x_0)$ e $V \times W$ é uma vizinhança de $x_0 \in V$ e $0 \in W \subset \mathbb{R}^n$ tal que:

$$h \circ f(x) = (x, 0) \quad \forall x \in V$$

- Demonstre o teorema da forma local das imersões:

Tomamos um ponto $x_0 \in U$, cuja a $f'(x_0): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$, devemos denotar com $E = f'(x_0) . \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$.

$$\dim E = m$$

Também tomamos F com um espaço vetorial de dimensão n, logo:

$$\dim F = n$$

Desta forma, temos: $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$ (completando a base). Definimos $\phi: U \times F \to \mathbb{R}^{m+n}$, onde $\phi(x,y) = f(x) + y$. $\phi \in C^k(U \times F)$ e $f \in C^k(U)$. Temos que:

$$\phi(x_0, 0) = f(x_0) \quad e \quad \phi'(x_0, 0)(u, v) = (f'(x_0).u, v)$$

Como $f'(x_0)$ é injetivo, então possui inversa e $\phi'(x_0, 0)$ é um isomorfismo entre $\mathbb{R}^m \times F$ e $\mathbb{R}^{m+n} \cong E \oplus F$. Pelo teorema da função inversa ϕ é um difeomorfismo de classe C^k, definimos agora $h: Z \to V \times W$ por: $h = \phi^{-1}|_Z$. Mas $\phi(x,y) = f(x) + y$, então $f(x) = \phi(x, 0)$. Com isso tomamos a composta:

$h \circ f(x) = h(f(x)) = h(\phi(x,0)) = h \circ \phi(x, 0) = (x, 0)$, isto porque $h \circ \phi = Id$. Então:

$$h \circ f(x) = (x, 0)$$

- Prove que toda imersão é uma aplicação localmente injetiva.

Tomamos $f \in C^k (k \geq 1)$ e $f'(a)$ é injetiva para algum $a \in M$, então $f'(x) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é injetiva para todo x num aberto V contendo $a \in \mathbb{R}^m$.

Desta forma, se $\phi(f(x)) = x$ para todo $x \in V$, resulta pela regra da cadeia que $\phi'(f(x)) \circ f'(x) = Id : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, logo $f'(x)$ é injetiva.

Com isso temos dois casos:

i) A aplicação derivada $f' : M \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m+n})$ é contínua.,

ii) O conjunto das transformações lineares injetivas é aberto em $\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m+n})$.

Tomando o conjunto das transformações lineares injetivas se, e somente se, sua matriz contém um subdeterminante menor $(m \times n)$ não nulo. O mesmo menor, sendo uma função contínua, também será não nulo numa pequena bola de centro T, logo todas as transformações pertencentes a essa bola serão injetivas.

Portanto como uma imersão, é dada por $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$, tomamos esta bola em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$, temos com isso que todas as transformações pertencem à bola em $\mathbb{R}^m$ sendo injetiva, temos também que uma imersão se dá de um aberto $(M \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n})$, então temos que toda imersão é uma aplicação localmente injetiva.

"As aulas no youtube tem um corolário, e no livro do Elon também, mas eu não posso usar certo." Fiz esta questão duas vezes em razão disso."