Seja $f: A \to \mathbb{R}$ integrável e seja $g=f$ exceto por um número finito de pontos. Mostre que g é integrável e $\int_A f = \int_A g$.

Como f é integrável sobre A, então g também é integrável em A, mas $f=g$ exceto por um número finito de pontos.

Tomamos $A=[a_1,b_1]\times \dots \times [a_n,b_n] \to \mathbb{R}$ e f é limitada, logo g também é limitada, temos por definição que uma função é integrável se:

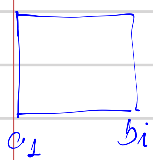
$\underline{\int_A} f(x)\,dx = \overline{\int_A} f(x)\,dx$, neste caso $\underline{\int_A} g(x)\,dx = \overline{\int_A} g(x)\,dx$

Desta forma temos que f é contínua em $\mathbb{R}$, mas g é contínua em $\mathbb{R}-\{0\}=\mathbb{R}^*$, então dados $\mathbb{R}^*$ temos que $f=g$.

Assim tomamos subblocos em A, ou seja, $B\subset A$ e $B>0$ são blocos n-dimensionais, então $B\in P$ onde P é uma partição de A.

$$s(f,P)=\sum_{B\in P} m_B \cdot Vol(B) \quad \text{e} \quad S(f,P)=\sum_{B\in P} M_B \cdot Vol(B)$$

Mas f é integrável, então: $S(f,P)-s(f,P)<\varepsilon$. Assim temos f definida em todos os pontos, e integrável. Agora tomamos g contínua somente em $\mathbb{R}^*$, então para todos os blocos depois as partições, em suas arestas $B_i \in B$.



$a_1-b_1>0 \to a_i-b_i>0$, onde $i=2,\dots,n$ sejam diferentes de zero, assim temos que g está definida logo $f=g$. Então:

$$s(g,P)=\sum_{B_i\in P} m_B\, Vol(B) \quad \text{e} \quad S(g,P)=\sum_{B_i\in P} M_B\, Vol(B)$$

Portanto: $$s(f,P)=\sum_{B_i\in P} m_B\, Vol(B) = s(g,P)$$

$$S(f,P)=\sum_{B_i\in P} M_B\, Vol(B) = S(g,P)$$

Se: $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon/2$ e $S(g,P) - s(g,P) < \varepsilon/2$, mas $f = g$ p/ $\forall B_i \in P$, onde $i = 2, \dots, N$. Então:

$$S(f,P) + S(g,P) - s(f,P) - s(g,P) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$2S(f,P) - 2s(f,P) < \varepsilon \rightarrow S(f,P) - s(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

logo é integrável. Se tomarmos $\varepsilon = 0$, então:

$$S(f,P) - s(f,P) = 0 = S(g,P) - s(g,P)$$

$$(M_B - m_B) \sum_{B_i \in P} Vol(B) = (M_B - m_B) \sum_{B_i \in P} Vol B$$

$$\int_A f = \int_A g$$