Questão 2) Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^1. Prove que f não pode ser injetiva.

Sabemos que f é injetiva quando $f(x) = f(y) \to x = y$ em $\mathbb{R}$, como $f \in C^1$ então f é diferenciável em $\mathbb{R}^2$ e sua derivada é contínua.

Tomamos agora $Df(x,y) = 0$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e supomos um ponto $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ sendo que $Df(a,b) \neq 0$, e $D_1 f(a,b) \neq 0$. Usando a continuidade $D_1 f$, ela é diferente de zero sobre uma vizinhança U de (a,b), e U é aberto.
Agora, definimos uma $g(x,y) = (f(x,y), y)$ de U para $\mathbb{R}^2$. Aplicando o teorema da função inversa para um conjunto aberto V contendo (a,b) e W contendo $g(a,b)$ então:

$$g: V \to W \text{, é uma bijeção com inversa em } C^1$$

Como W é aberto, podemos tomar um $t \neq b$ sendo que $(f(a,b), t) \in W$.
Se temos $(c,d) = g^{-1}(f(a,b), t)$ então:

$$(f(a,b), t) = g(c,d) \neq g(a,b) = (f(a,b), b)$$

Isto implica que $(c,d) \neq (a,b)$, assim:

$$(f(a,b), t) = g(c,d) = (f(c,d), d)$$

Então temos que $f(c,d) = f(a,b)$, o que mostra que f não é injetiva.