Sejam w uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^n$ e $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função C^∞, com $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Mostre que $d(fw) \equiv 0$ (identicamente zero) se, e somente se, a 1-forma:

$$\beta = w - \frac{1}{f} dx_{n+1}$$

Em $\mathbb{R}^{n+1}$ satisfaz a equação $\beta \wedge d\beta = w \wedge dw$. (Considere $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ definido por $x_{n+1} = 0$).

Como w é 1-forma e $f(x)$ uma função não nula para qualquer ponto do domínio. Desejamos mostrar que $d(fw) \equiv 0$.

Para mostrar vamos utilizar o "pull back", então:
"Seja uma forma de grau r e classe C^1 em M, para toda parametrização $\varphi: M_0 \to M$ em M, existe uma única forma $d\varphi M$, de grau $(r+1)$ em M, tal que $\varphi^*(d\varphi w) = d(\varphi^* w)$."

Então: $\beta = w - \frac{1}{f} dx_{n+1} \to w - \beta = \frac{1}{f} dx_{n+1}$

Aplicando o "pullback", temos:

$\varphi^*(d\varphi w) = d(\varphi^* w)$

$\varphi^*\left(\frac{1}{f} dx_{n+1}\right) = d(w - \beta) \to \int \frac{1}{f} dx_{n+1} = \int f^{-1} dx_{n+1} = 0$ e $x_{n+1} = 0$, então $d_0 = 0$

$\varphi^*(0) = w \wedge dw - \beta \wedge d\beta$

$0 = w \wedge dw - \beta \wedge d\beta \to w \wedge dw = \beta \wedge d\beta.$

Como isso $d(fw) \equiv 0$.

Agora a volta se $d(fw) \equiv 0$, então $fw \wedge dw = 0$, mas $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
Aplicando a regra da cadeia, temos $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ possui, em cada ponto $x \in \mathbb{R}^n$, uma derivada, que é uma transformação linear:

$f'(x): T_x \mathbb{R}^n \to T_{f(x)} \mathbb{R}$, ou

$[f'(x)]^*: A_n(T_{f(x)} \mathbb{R}) \to A_n(T_x \mathbb{R}^n)$

$(f^* w)(x) = [f'(x)]^* . w(f(x))$