Se uma função $f: A \to \mathbb{R}$, limitada no retângulo $A \subset \mathbb{R}^n$, é integrável então seu gráfico tem volume zero. E a recíproca?

Teorema de Lebesgue: Uma função limitada $f: A \to \mathbb{R}$, definida no retângulo $A \subset \mathbb{R}^n$, é integrável, se e somente se, o conjunto de seus pontos de descontinuidade possui medida nula em $\mathbb{R}^n$.

Pelo enunciado f é integrável, no retângulo $A \subset \mathbb{R}^n$, então seu gráfico tem volume zero.

Tomamos um $D = \{x \in A : f$ é descontínua em $x\}$ e $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, para todo $x \in A$. Suponhamos que D possua medida nula e vamos mostrar que f é integrável através do Critério de Riemann.

Dado $\varepsilon > 0$, ou seja $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2(M + Vol(A))}$.

Sejam $int\,Q_1, int\,Q_2, \ldots$ uma cobertura de D por retângulos abertos tal que $\sum_{i=1}^{\infty} Vol(Q_i) < \varepsilon'$, consideraremos também para cada $a \in A/D$, um retângulo aberto, $int\,Q_a$ tal que $|f(a) - f(x)| < \varepsilon'$ qualquer que seja $x \in Q_a \cap A$.

Logo $\{int\,Q_1, int\,Q_2, \ldots\} \cup \{int\,Q_a : a \in A/D\}$ é uma cobertura aberta de A. Sendo A compacto podemos extrair uma subcobertura finita $int\,Q_1, \ldots, int\,Q_\ell, int\,Q_{a_1}, \ldots, int\,Q_{a_K}$, e pode-se observar que os retângulos $int\,Q_1, int\,Q_2, \ldots, int\,Q_\ell$ não pode cobrir D.

Assim, denotaremos por Q_i (ou Q_{a_j}), a intersecção do respectivo retângulo c/ A. Esses novos retângulos ainda cobrem A e satisfazem $\sum_{i=1}^{\ell} Vol(Q_i) < \varepsilon'$ e $|f(x) - f(y)| < 2\varepsilon'$, com $x, y \in Q_{a_j}$ e $j = 1, \ldots, K$.

Seja P a partição de A determinada pelos pontos extremos de cada intervalo em cada componente desses retângulos, todo sub-retângulo $S \in P$ esta contido em algum dos Q_i's ou Q_{a_j}'s.

Façamos uma divisão desses sub retângulos em duas categorias (não necessariamente disjuntas):

- R: coleção dos sub-retângulos S contidos em algum dos Q_i's.;
- R': coleção dos sub-retângulos S contidos em algum dos Q_{a_j}

Portanto:

$$S(f,P) - s(f,P) \le \sum_{S\in R} (M_S(f) - m_S(f))\,vol(S) + \sum_{S\in R'} (M_S(f) - m_S(f))\,vol(S)$$

$$\le 2M \sum_{S\in R} vol(S) + 2\varepsilon' \sum_{S\in R'} vol(S)$$

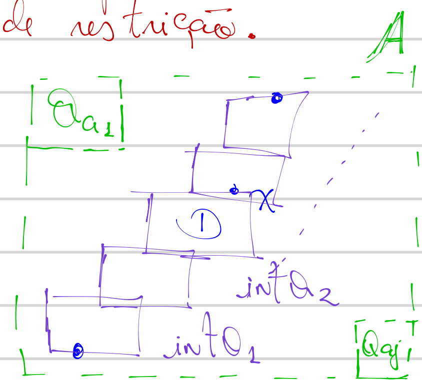
$$< 2M\varepsilon' + 2\varepsilon'\, vol(A) = \varepsilon$$

Assim temos que f é integrável.

$D = \{x \in A : f$ é descontínua em $x\}$

$M > 0$ tal que $|f(x)| \le M \quad \forall x \in A$

Temos que D possui medida nula e f é integrável, mas não no ponto de restrição.



$\sum_{i=1}^{\infty} vol(Q_i) < \varepsilon'$

$a \in A/D$, um retângulo aberto

int $Q_a \rightarrow |f(a) - f(x)| < \varepsilon'$