2) Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \sqrt{|xy|}$. Prove que f não é diferenciável em $(0,0)$.

Pela definição de classe: "$f(x,y)$ é diferenciável em (x_0,y_0) se existe $a,b \in \mathbb{R}$ sendo que para $h,k \in \mathbb{R}$, temos que $(h,k) \to (0,0)$, então:

$$\frac{f(x_0+h,\, y_0+k) - f(x_0,y_0) - (ah+bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} \to 0 \text{ "}$$

Assim vamos mostrar que a fração acima não converge para 0 para qualquer a,b.

Temos $a,b \in \mathbb{R}/(0,0)$ e $(x_0,y_0) = (0,0)$.

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(0+h,0+k) - f(0,0) - (ah+bk)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|xy|} - ah - bk}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$\lim_{(h,k)\to 00} \frac{\sqrt{|0.0|} - a.0 - b.0}{\sqrt{0^2+0^2}} = 0.$$

Mas os limites laterais são diferentes para as derivadas parciais:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{0.k} - a.0 - b.k}{\sqrt{0^2+k^2}} = \frac{0-0-bk}{\sqrt{k^2}} = \frac{-bk}{k} = -b \neq 0$$

$$\lim_{k\to 0} \frac{\sqrt{h.0} - a.h - b.0}{\sqrt{h^2+0^2}} = \frac{0-ah-0}{\sqrt{h^2}} = \frac{-ah}{h} = -a \neq 0$$

Então mesmo que os limites laterais não é zero, agora temos $a,b=0$ e $h=k=1/n$. Então:

$$\lim_{x,y\to 0,0} \frac{f(x+h,y+k) - f(x,y)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{x,y\to 0,0} \frac{f(h,k) - (0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}} = \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

Se $h=k=1/n$, então:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{|1/n \cdot 1/n|}}{\sqrt{\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{1}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{|1/n^2|}}{\sqrt{\frac{2}{n^2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1/n}{\frac{\sqrt{2}}{n}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

Portanto não é diferenciável em $(0,0)$