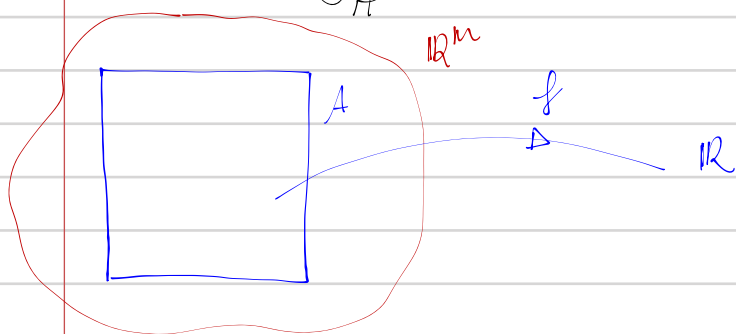


Seja $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uma função limitada e $f \geq 0$ no m -bloco $A \subset \mathbb{R}^m$.

Seja:

$$C(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in A, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Prove que f é integrável se e somente se $C(f)$ é f -medível. Neste caso, temos que $\int_A f(x) dx = \text{vol}(C(f))$.



f é limitada e maior que zero,

Como a $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada, temos que seu conjunto será limitado, tomamos o bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ e sua função característica:

$$\chi_A: A \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow \text{vol}(A) = \int_A \chi_A(x) dx$$

Como $A \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, temos que $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ é o conjunto dos pontos $a \in \mathbb{R}^m$ tais que toda vizinhança de a (V_a) contém os pontos de \mathbb{R}^m e os pontos de $(\mathbb{R}^{m+1} - \mathbb{R}^m)$. Também temos que $\mathbb{R}^{m+1} = (\text{int. } \mathbb{R}^m) \cup \partial \mathbb{R}^m \cup \text{int. } (\mathbb{R}^{m+1} - \mathbb{R}^m)$, sendo \mathbb{R}^{m+1} uma reunião disjunta.

Pelo teorema: "Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^m$ é f -medível se, e somente se, sua fronteira ∂X tem medida nula."

Como $C(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in A, 0 \leq y \leq f(x)\}$ e tomamos $X \subset \mathbb{R}^m$. Agora seja D o conjunto dos pontos de discontinuidade da função característica:

$$\chi_A: A \rightarrow \mathbb{R} \text{ e o bloco } A \text{ está: } X \subset A \subset \mathbb{R}^m$$

Então $D \subset \partial X$, assim um ponto da ∂X que não seja discontinuidade de χ_A deve pertencer a ∂A então:

$$\partial X = D \cup (\partial X \cap \partial A), \text{ e se } X \subset \text{int.}(A) \rightarrow \partial X = D$$

Como a ∂A (é a reunião das faces próprias do bloco A) tem medida nula, então $\text{med } \partial X = 0$ se, e somente se, $\text{med } D = 0$.

Então $\text{Vol}(X) = \text{Vol}(A) = \int_A \chi_X(x) dx$.

Agora tomamos $Y \subset \mathbb{R}^{m+1}$ e $Y \subset A_1$ e D_1 como o conjunto dos pontos de descontinuidade da função característica em Y .
 $\chi_Y: A_1 \rightarrow \mathbb{R}$ e $X \subset A \subset \mathbb{R}^m \subset Y \subset A_1 \subset \mathbb{R}^{m+1}$

Temos que A_1 é um bloco que cobre Y , então:

$$\partial Y = D_1 \cup (\partial Y \cap \partial A_1) \text{ e se } Y \subset \text{int } A_1 \rightarrow \partial Y = D_1$$

Assim D_1 tem medida nula e $\partial Y = 0$ se, e somente se, $\text{med}. D_1 = 0$.
Desta forma como $A \subset A_1$ e $X \subset Y$, e $\text{med}. \partial Y = 0$ então Y é f -medível e os pontos de Y são dados por $C(f)$, com isso temos que $C(f)$ é f -medível, mas $f \in C(f)$ então

$$\int_A f(x) dx = \text{Vol}(X) \subset \text{Vol}(Y) = \text{Vol}(C(f))$$

Como $C(f)$ é f -medível temos que f é integrável pois $\text{med}. X = 0$.

Vamos fazer agora a volta, pelo Teorema 7: "Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto f -medível. Uma função limitada $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, se e somente se, o conjunto D_f dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula."

Temos que $A \subset A_1$ e $D \subset D_1$ e $\text{med}. D_1 = \text{med}. D = 0$, temos também que $C(f)$ é f -medível e $X \subset C(f)$. Então X é f -medível, como f é uma função limitada em X , então f é integrável.

Temos também que $C(f)$ tem medida nula, logo $\text{Vol}(C(f)) = 0$, mas $C(f) \supset f$, então $\text{Vol}(X) = \int_A f(x) dx = 0$. Desta forma temos que $\text{Vol}(C(f)) \subset \int_A f(x) dx$, mas anteriormente afirmamos

que $\int_A f(x) dx \subset \text{Vol}(C(f))$, então:

$$\int_A f(x) dx = \text{Vol}(C(f))$$