Seja $w \in \Omega^1(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ dada por $w = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$.

a) Mostre que $dw = 0$, ou seja w é fechado.

b) Mostre que não existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\})$ tal que $w = df$, ou seja w não é exata.

a) $w = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$ e tomamos $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y}$ e $g = (x\,dy - y\,dx)$

Seja $d\alpha = df \wedge g + f\,dg$

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2)^2} \cdot (2x\,dx + 2y\,dy) \wedge g + \frac{1}{x^2+y^2} 2\,dx \wedge dy$$

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2)^2} (2x\,dx + 2y\,dy) \wedge (x\,dy - y\,dx) + \frac{1}{x^2+y^2} (2\,dx \wedge dy)$$

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2)^2} (2x^2 dx \wedge dy - 2y^2 dy \wedge dx) + \frac{1}{x^2+y^2} 2\,dx \wedge dy$$

Permutação $dx \wedge dy$ multiplica por (-1) e troca o sinal

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2)^2} \cdot 2(x^2+y^2)\,dx \wedge dy + \frac{1}{x^2+y^2} 2\,dx \wedge dy$$

$$= \frac{-1}{(x^2+y^2)} \cdot 2\,dx \wedge dy + \frac{1}{x^2+y^2} \cdot 2\,dx \wedge dy = 0 \longrightarrow dw = 0$$ e com isso w é fechado.

---

b) $w = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$, precisamos mostrar que w não é exato. Agora, tomamos um τ sendo uma curva fechada e:

$\tau : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\theta \longrightarrow (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$

Calculamos a integral: $\int_\tau w = \int_\tau \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy =$

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{-\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}(-\operatorname{sen}\theta) + \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta + \cos\theta^2}(\cos\theta) \right\} dt =$$

$$\int_0^{2\pi} \left\{ \frac{+\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta} \right\} dt$$, sabemos que $\operatorname{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\int_0^{2\pi} 1\,dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$, portanto $\int_\tau w = 2\pi$, isto é:

$\int_\tau \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy \right) = 2\pi$, que é diferenciável para ambos os lados. Então!:

$$\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy = 0 \rightarrow \frac{+y}{\cancel{x^2+y^2}}\,dx = \frac{x}{\cancel{x^2+y^2}}\,dy \rightarrow \text{Cancela}$$

$y\,dx = x\,dy \rightarrow x\,dy - y\,dx = 0$, assim podemos tomar a forma:

$M\,dx + N\,dy$, onde M e N são funções de x, y. Se:

$M(x,y) = -y$ e $N(x,y) = x$, então:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -1 \text{ e } \frac{\partial N}{\partial x} = 1 \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow \text{não é exato.}$$

Com isso devemos observar que se: $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$ para ser exata, se e somente se, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$.