Matriz Jacobiana

$f: \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ e $f=(f_1,\dots,f_N)$ $\forall a \in Dom(f)$, $Jf(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le N \\ 1\le j\le M}}$.

$Jf(a) \in M_{N\times M}$

Observação: Existência de derivadas parciais num ponto dado não garante que a função é diferenciável naquele ponto.

Exercício: Dê um exemplo onde a matriz Jacobiana exista, mas a função não é diferenciável

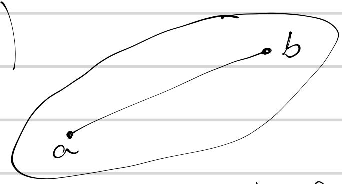
Derivada direcional (derivadas ao longo de direções):

$f: U \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$, U aberto, $v \in \mathbb{R}^M$ e $x \in U$ fixado, a derivada direcional de f em relação a v é: $\frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}$ quando tal limite existe.

Observação: Se f é diferenciável em $x \in U \Rightarrow$ existem as derivadas direcionais $\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ $\forall v \in \mathbb{R}^M$.

Exercício: Mostre que o recíproco é falso: Tem derivadas direcionais mas não é diferenciável.

$\frac{\partial f}{\partial v}(x)$ e $v \in (a,b)$



$\mathbb{R}^M$

$f|_{(a,b)} : (a,b) \to \mathbb{R}^N$

$(a,b) = \{x \in \mathbb{R}^M : x = at + (1-t)b,\ t \in (0,1)\}$

Funções Holomorfas: $\mathbb{C}$ plano complexo e $z \in \mathbb{C}$, $z = x+iy$, $\sqrt{-1} = i$ e $x \in \mathbb{R}$ e $y \in \mathbb{R}$.

$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ Ex: $(3,2) \to z = 3+i2 = 3+2i$

$(x,y) \to z = x+iy$

Uma função $f: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ complexa pode ser vista como uma função $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Ex: $f(z) = z^2$, $z \in \mathbb{C} \to (x+iy)^2 = (x^2 + 2xyi - y^2) = (x^2-y^2) + 2xyi$

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$(x,y) \to f(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$

f é diferenciável, $Jf(x,y) = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2y \end{bmatrix}_{2\times 2}$

$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ Matriz ortogonais

(sen, cos)

Uma função complexa $f: U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ e U aberto é holomorfa em U, se $\forall z \in U$ o limite $\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$ existe!

A derivada holomorfa de f é $f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$

$f(z) = z^2 \longrightarrow f'(z) = 2z \longrightarrow f$ é holomorfa em $\mathbb{C}$.

$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ e $f'(z) = e^z$, $Ln(z) \Rightarrow$ ramos do logaritmo

Exemplo: $f: U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\therefore$ $f(u,v)$ é holomorfa em $U \leftrightarrow$

$\begin{cases} u_x = v_y \\ u_y = -v_x \end{cases}$ e $Jf \begin{bmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{bmatrix}$

$\hookrightarrow$ equações de Cauchy-Riemann

Classe de diferenciabilidades: C^1: $f: U \to \mathbb{R}^n$, com $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e f é diferenciável em U e $f': U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é contínua.

- $f \in C^1(U)$, função de classe C^1

$\to$ funções duas-vezes diferenciáveis, $f: U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^m$ diferenciável em U, temos: $f': U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Dizemos que f é duas vezes diferenciável em $x \in U$ se f' é diferenciável em x. Isto é, existe $f''(x)$.

$\exists f''(x): \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$.

Classe C^2: $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ diferenciável em U e $f': U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ diferenciável em U e $f'': U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ contínua em U.

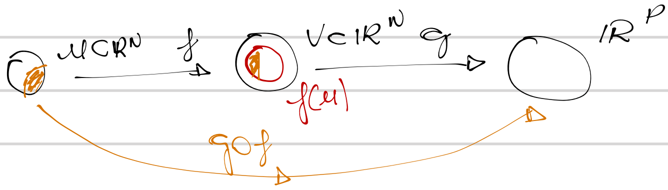
$f \in C^2(U)$

A $C^0(U) = \{f: U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n,\ f$ é contínua em $U\}$, com $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto

$$C^0(U) \supset C^1(U) \supset C^2(U) \supset C^3(U) \supset \dots \supset C^k(U) \supset \dots \supset C^\infty(U)$$

$f \in C^\infty(U) \leftrightarrow f$ possui derivadas de todas as ordens e são contínuas,

Regra da Cadeia:



Se f e g são diferenciáveis em a, b respectivamente $\to$ $g \circ f$ é diferenciável em a e $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \circ f'(a)$

Exemplo: $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$
↳ diferenciável em U e $f(x) \neq 0\ \forall x \in U$.

Seja $h: U \to \mathbb{R}$, $h(x) = \|f(x)\| = \langle f(x), f(x) \rangle^{1/2}$

Exercício: Mostre que h é diferenciável em U e calcule $g'(x).h$,

$$U \subset \mathbb{R}^m \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\psi} \mathbb{R} \xrightarrow{\theta} \mathbb{R}$$
$$x \to \varphi(x) = (x,x) \to \langle x, x \rangle \to \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\begin{cases} \varphi(x) = (x,x) \\ \psi(x,y) = \langle x, y \rangle \\ \theta(x) = \sqrt{x} \end{cases}$$

$g(x) = \|f(x)\|$ e $g(x) = \theta \circ \psi \circ \varphi(x)$

i) φ é diferenciável em U, porque cada entrada é diferenciável.,

ii) ψ " "

iii) θ " " , desde que não se anula $x > 0$

Portanto g é diferenciável em U e $g'(x).h = \theta'(\psi \circ \varphi(x)) \circ \psi'(\varphi(x)) \circ \varphi'(x).h$

Cálculo de derivadas: $\varphi(x) = (f(x), f(x))$ e $\varphi'(x).h = (f'(x).h, f'(x).h)$

• $\psi(x,y) = \langle x, y \rangle \to \psi'(x,y).(v,w) = \langle v, y \rangle + \langle w, x \rangle$

• $\theta(x) = \sqrt{x} = x^{1/2} \to \theta'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

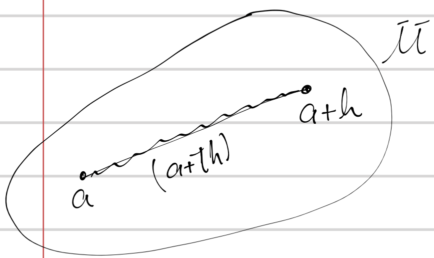
$= \theta'(\psi \circ \varphi(x)) \circ \psi'(\varphi(x)) \circ (f'(x).h, f'(x).h)$

$= \theta'(\psi \circ \varphi(x)) \circ (\langle f'(x).h, f(x) \rangle + \langle f(x), f'(x).h \rangle)$

$$= \Theta'(\psi_0\, \varphi(x))[2<f(x), f'(x).h>] = \Theta'(<f(x), f(x)>)[2 \times <f(x), f'(x).h>] = \frac{1}{2\sqrt{<f(x), f(x)>}} \cdot [2<f(x), f'(x).h>]$$

$$= g'(x).h = \frac{<f(x), f'(x).h>}{(<f(x), f(x)>)^{1/2}}, \text{ e } g(x) = \|f(x)\|$$

Desigualdade do valor médio: Seja $f: U \subset \mathbb{R}^M \to \mathbb{R}^N$ contínua em U aberto. Se o segmento de reta $[a, a+h]$ está contido em U e f é diferenciável em $(a, a+h)$ então: $|f(a+h) - f(a)| \le |h| \sup\limits_{0<t<1} \|f'(a+th)\|$



$\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}^N$

$\lambda(t) = f(a+th)$

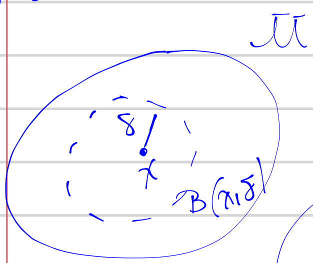
$\lambda'(t) = f'(a+th).h \to \|\lambda'(t)\| = |f'(a+th).h| \le \|f'(a+th)\|.|h|$

Diferenciabilidade no interior de $[a, a+h]$.

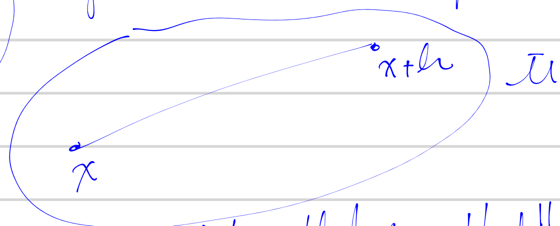
Para caminhos: $|\lambda(1) - \lambda(0)| \le \sup \|\lambda'(t)\|$ para $0<t<1$ $\to$ $|f(a+h) - f(a)| \le \|f'(a+th)\|\,|h|$ para $0<t<1$

Corolário: Seja $U \subset \mathbb{R}^M$ aberto e conexo e $f: U \to \mathbb{R}^N$ diferenciável em U tal que $f'(x) = 0 \ \forall x \in U \to f$ é constante.

Prova: Fixe $a \in U$, defina $X = \{x \in U / f(x) = f(a)\}$ e $X \subset U$ é fechado. Vamos mostrar que é aberto.
Seja $x \in X$, $x \in U$ e $f(x) = f(a)$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset U$ e U é aberto.



Vamos mostrar que $B(x,\delta) \subset X$, e seja $y \in B(x, \delta)$ e seja $h = y - x \to y = x+h$



Pelo T.D.V. médio: $|f(x+h) - f(x)| \le |h| \sup \|\underbrace{f'(x+th)}_{0}\|$ para $0<t<1$

$\to f(x+h) = f(x) = f(a) \to x+h \in X \to B(x, \delta) \subset X \to X$ é aberto

Como U é conexo $\to U = X \to f$ é constante.