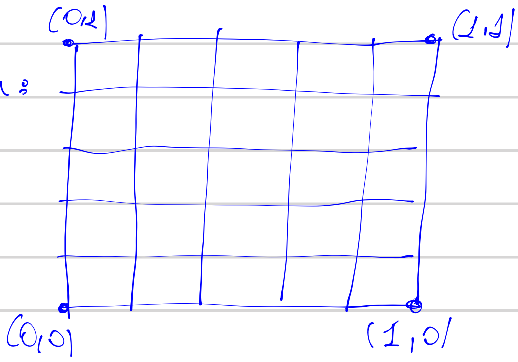
3) Seja $f:[0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 0, & \text{se } x \text{ racional, } y \text{ irracional} \\ 1/q, & \text{se } x \text{ racional, } y = p/q \end{cases}$$

Mostre que f é integrável e $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$.



Temos $f:[0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ 1/q, & \text{se } x \in \mathbb{Q},\ y = p/q \end{cases}$$

Tomamos partições arbitrárias de $[a,b]$, então $P_1 = P_2 = \{0 = x_0, x_1, \ldots, x_N = 1\}$.

Agora $S(P_N, f) = \sum_i \sum_j P_1(x,y)\,\Delta x_i\,\Delta y_j$, onde $P_1(x,y)$ é o supremo de $f(x,y)$

Então $\sum_i \sum_j \left(1/q\right) \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{2qN} \to \lim_{N\to\infty} U(P_N, f) = 0.$

Em seguida, tomamos o ínfimo: $L(P_N, f) = \sum_i \sum_j P_N(x,y)\,\Delta x_i\,\Delta y_i = \sum_i \sum_j 0 \cdot \Delta x_i\,\Delta y_i = 0 \to \lim_{N\to\infty} L(P_N, f) = 0.$

Pelo teorema: $\underline{\int} f(x) = \overline{\int} f(x) = \int f(x)$; então f é integrável, logo:

$S(P_N, f) - s(f,p) = 0 \to S(f,P) = s(f,P)$ e portanto f é integrável

e $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 0.$