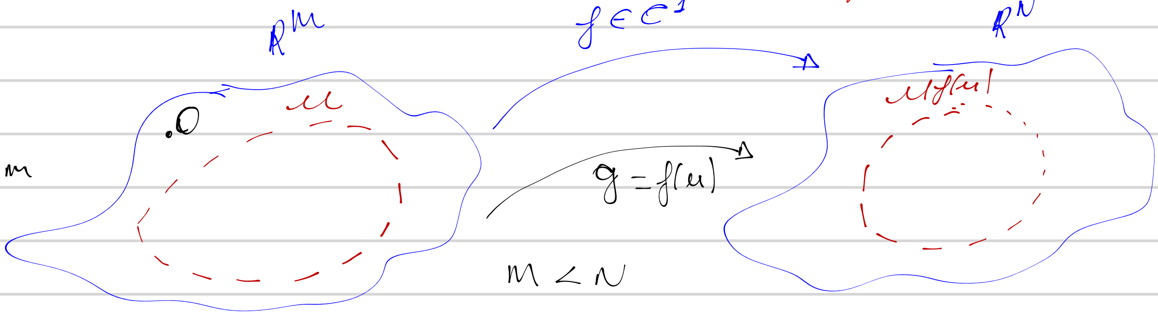
Se $m < n$ e $f: U \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, então $f(U)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

Se f é de classe C^1 em B, então f é diferenciável em B. Para saber se uma função é de classe C^1, basta encontrar sua derivada primeira e verificar se ela é contínua em um ponto dado.

Resposta:

f' é contínua em $\forall x \in W$.



Vamos considerar $0 \in \mathbb{R}^{n-m}$, pela observação que se segue a um resultado já provado:

"Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é tal que, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência de blocos fechados $A_1, \ldots, A_i, \ldots$ com $X \subset \bigcup A_i$ e $\sum \text{vol.} A_i < \varepsilon$, então $\text{med.}(X) = 0$. Ou seja: Na definição de conjunto de medida nula podemos usar blocos fechados em vez de cubos."

Então $U \times \{0\}$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Tomamos um aberto $W = U \times \mathbb{R}^{n-m} \subset \mathbb{R}^n$ e definimos a aplicação $g: W \to \mathbb{R}^n$, de classe C^1. Pondo $g(x,y) = f(x)$, tomando um resultado já provado:

"Seja $f: U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se $X \subset U$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$ então $f(X) \subset \mathbb{R}^m$ também tem medida nula."

O conjunto $g(U \times \{0\}) = f(U)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$.

Portanto um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ é localmente de medida nula quando, para cada $x \in X$, existir V_x aberto em $\mathbb{R}^m$, contendo x, tal que $\text{med}(V_x \cap X) = 0$. Da cobertura aberta $X \subset \bigcup V_x$ se extrai pelo Teorema de Lindelöf, uma subcobertura enumerável $X \subset \bigcup V_i$; logo $X = \bigcup (V_i \cap X)$ é uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula, donde $\text{med.}\, X = 0$. Assim, um conjunto

$X \subset \mathbb{R}^m$ é localmente de medida nula se, e somente se, tem medida nula.