U F *m* G

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática - ICEX
Análise no II - 2021
Lista 4

1. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação bilinear definida por $\varphi(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x_1y_1, x_1y_2, x_2y_1, x_2y_2)$. Mostre que a imagem de φ não é um subespaço vetorial.

2. Sejam $f_1, \ldots, f_n \in \mathcal{L}^1(V)$, onde V é um espaço vetorial. Mostre que, para que estes vetores sejam linearmente independentes, é necessário e suficiente que $f_1 \wedge \ldots \wedge f_n = 0$.

3. Se $T : V \to W$ for uma transformação linear e se f e g forem tensores alternados em W, mostre que $T^*(f \wedge g) = T^*f \wedge T^*g$.

4. Suponha que sejam dados dois subconjuntos $\{w_1 \ldots, w_k\}$ e $\{\alpha_1 \ldots, \alpha_k\}$ de $\mathcal{L}^1(V)$ onde V é um espaço vetorial. Suponha ainda que os elementos deste conjunto estejam relacionados por

$$w_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}\alpha_j, \quad i = 1, \ldots, k.$$

   Mostre que se $A = (a_{ij})_{k\times k}$, então $w_1 \wedge \ldots \wedge w_k = (\det(A))\alpha_1 \wedge \ldots \wedge \alpha_k$.

5. Fixados $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geq r$, seja ω uma r-forma em $\mathbb{R}^n$, tal que $f^*(\omega) = 0$ para toda transformação afim $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$. Prove que $\omega = 0$.

6. Sejam α, β 1-formas num aberto $U \subset \mathbb{R}^3$ tais que $\alpha \wedge \beta \neq 0$ em todos os pontos de U. Se uma 2-forma ω em U é tal que $\omega \wedge \alpha = \omega \wedge \beta = 0$, prove que existe uma função $f : U \to \mathbb{R}$ tal que $\omega = f \cdot \alpha \wedge \beta$. Se $\alpha, \beta, \omega \in C^1(U)$ então $f \in C^1(U)$.

7. Seja ω a 2-forma em $\mathbb{R}^{2n}$ dada por

$$\omega = dx_1 \wedge dx_2 + dx_3 \wedge dx_4 + \ldots + dx_{2n-1} \wedge dx_{2n}.$$

   Calcule o produto exterior de n cópias de ω.

8. Seja ω_{vol} a n-forma em $\mathbb{R}^n$ dada por $\omega_{vol}(e_1, \ldots, e_n) = 1$, onde $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

   - Mostre que se $v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}e_j$ então $\omega_{vol}(v_1, \ldots, v_n) = \det(a_{ij})$. Observe que, no caso $n = 3$, $\omega_{vol}(v_1, v_2, v_3)$ é justamente o produto misto destes três vetores, ou seja, $\omega_{vol}(v_1, v_2, v_3) = vol(v_1, v_2, v_3)$. Por este fato, ω_{vol} é chamada de elemento de volume em $\mathbb{R}^n$.
   - Mostre que $\omega_{vol} = dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$.

9. Considere a forma diferencial $\omega = adx + bdy + cdz$, onde as funções $a, b, c : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ são homogêneas de grau k. Mais ainda suponha que $d\omega = 0$. Mostre que $\omega = df$, onde

$$f = \frac{xa + yb + zc}{k + 1}.$$

   Sugestão: note que se $d\omega = 0$, então $\frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial z}$, $\frac{\partial b}{\partial z} = \frac{\partial c}{\partial y}$. Depois aplique a Fórmula de Euler (relação entre as derivadas e a função homogênea).

10. (Lema de Cartan) Suponha que $\omega_1, \ldots, \omega_k \in \Omega^1(U)$ sejam linearmente independentes, onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é aberto. Se $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \Omega^1(U)$ são tais que

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \wedge \omega_i = 0,$$

   demonstre que cada α_i, $i = 1, \ldots, k$ pode ser escrito como combinação linear (com coeficientes suaves) de $\omega_1, \ldots, \omega_k$.

Prof. Arturo Fernández Pérez

Livro de referência, Elon Lages Lima e Michael Spivak