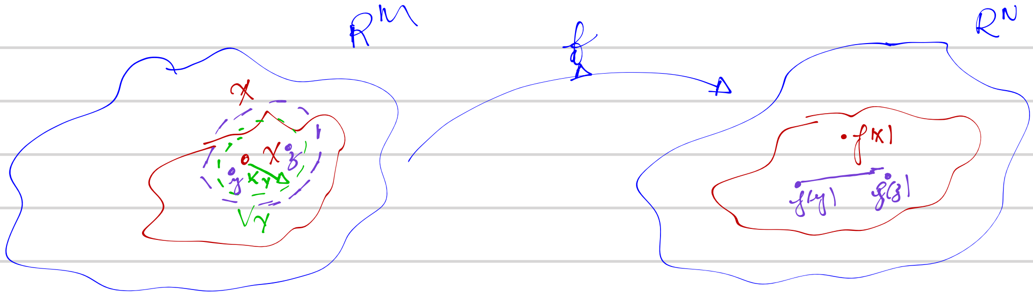
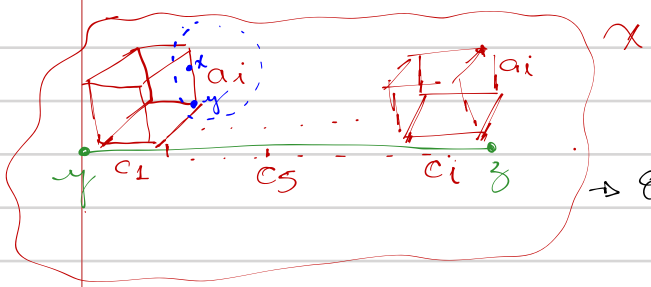
Se $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula e $f: X \to \mathbb{R}^m$ é localmente Lipschitz então $f(X)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.

Uma aplicação $f: X \to \mathbb{R}^n$, definida num conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, diz-se localmente lipschitziana quando, para todo $x \in X$, existem $V_x \subset \mathbb{R}^m$ aberto contendo x e $K_x > 0$ tais que $y, z \in V_x \to |f(y) - f(z)| \leq K_x . |y - z|$. Noutras palavras, existe uma cobertura aberta $X \subset V_x$ tal que cada restrição $f|(V_x \cap X)$ é Lipschitziana.



Resposta: Vamos considerar primeiro o caso em que f é lipschitziana, então $|f(x) - f(y)| \leq K_x . |x - y|$ com $K > 0$ constante e $x, y \in X$ quaisquer.

Tomemos em $\mathbb{R}^m$ a norma do máximo, dado $\varepsilon > 0$, existe uma cobertura enumerável $X \subset \bigcup C_i$, onde cada C_i é um cubo de aresta a_i e $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^m < \varepsilon / K^m$.



$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^m < \frac{\varepsilon}{K^m}$$

$\to$ Existe uma cobertura $\bigcup C_i = \sum_{i=1}^{\infty} C_i$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $x, y \in X \cap C_i \to |x - y| < a_i \to |f(x) - f(y)| < K . a_i$. Segue-se que cada uma das m projeções de $f(X \cap C_i)$ sobre os eixos está contida num intervalo de comprimento $K . a_i$. Portanto $f(X \cap C_i)$ está contido no produto cartesiano desses intervalos, que é um cubo D_i, cujo volume é igual a $K^m . a_i^m$. Onde D_i é um cubo fechado, e com isso $f(X) = \bigcup_i f(X \cap C_i) \subset \bigcup D_i$, com $\sum_i \text{vol.}(D_i) = K^m . \sum_i a_i^m < \varepsilon$. Portanto $\text{med} f(X) = 0$, pois $f(x)$ é a imagem de $X \subset \mathbb{R}^m$, onde X tem medida nula. No caso geral, temos $X \subset \bigcup V_x$ e onde cada V_x é aberto e a restrição $f|(V_x \cap X)$ é Lipschitziana.

Pelo teorema de Lindelöf: "Toda cobertura de X, $\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$ possui uma subcobertura enumerável". Com isso tomamos uma subcobertura enumerável $X \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$, pela primeira parte, $f(V_j \cap X)$ tem medida nula, para cada $j \in \mathbb{N}$. Logo:

$$f(X) = \bigcup_j f(V_j \cap X)$$ é uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula, donde:

$$\text{med.}\,(f(X)) = 0.$$