3) Seja $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função tal que $|f(x)| \leq |x|^2$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Prove que f é diferenciável em 0.

Tomamos $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $|f(x)| \leq |x|^2$, e pela definição f é diferenciável em $x=0$ se o seguinte limite existe:

$$L = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(0+h) - f(0)}{h} \right)$$

Desde que $|f(x)| \leq |x|^2$, temos que $|f(0)| \leq |0|^2$, isto é, $f(0) = 0$. Então:

$$L = \lim_{h \to 0} \left(\frac{f(h)}{h} \right)$$

Se $h > 0$ então $|h|^2 = h^2$ e com isso:

$$\lim_{h \to 0^+} \left(\frac{f(h)}{h} \right) \leq \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{|h|^2}{h} \right) = \lim_{h \to 0^+} \left(\frac{h^2}{h} \right) = \lim_{h \to 0^+} (h) = 0$$

Se $h < 0$ então $|h|^2 = h^2$ e com isso:

$$\lim_{h \to 0^-} \left(\frac{f(h)}{h} \right) \leq \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{|h|^2}{h} \right) = \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{h^2}{h} \right) = \lim_{h \to 0^-} (h) = 0$$

Ao aplicar este argumento para qualquer função contínua $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sendo aproximado para zero nas diferentes coordenadas do eixo. Por exemplo, seja $x = h$, $y = 0$ e $z = 0$. Temos uma diferenciação linear e prova diferenciabilidade usando uma base de direções.