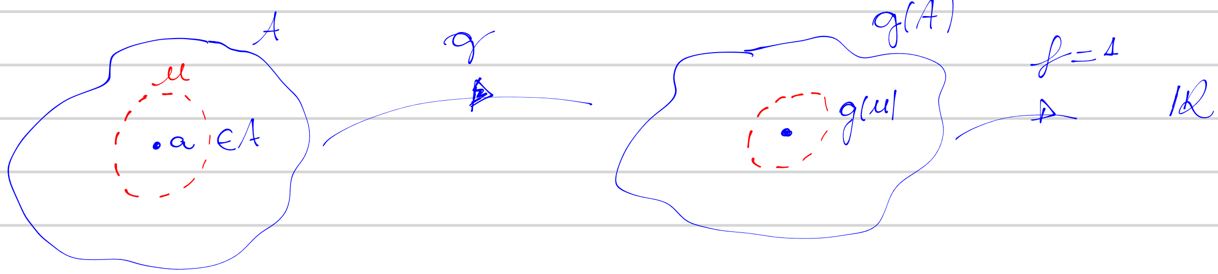
O teorema é verdadeiro se g é uma transformação linear inversível.

$$\int_{g(U)} 1 = \int_U |\det g'| \text{ se } g \text{ é linear.}$$

Teorema: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e $g: A \to \mathbb{R}^n$ injetiva de classe C^1 tal que $\det g'(x) \neq 0$ $\forall x \in A$. Se $f: g(A) \to \mathbb{R}$ é integrável, então: $\int_{g(A)} f = \int_A (f \circ g) |\det g'|$



Devemos encontrar um aberto de $f \circ g(a) = 1$, temos que $g'(a) = I$ (identidade) e $T = g'(a)$ e $(T^{-1} \circ g)'(a) = Id$. Temos que g é linear dado que: "Para cada $\varphi \in \Phi$ existe um aberto $U \in \mathcal{U}$ tal que $\varphi = 0$ fora de um conjunto fechado $U' \subset U$."

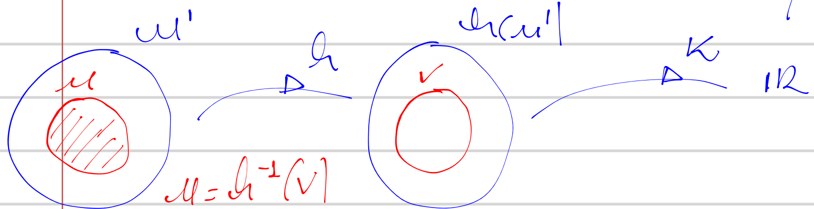
Desta forma temos que g é linear e $g'(a) = Id$, e desejamos mostrar que

$\int_{g(W)} 1 = \int_W |\det g'|$ e W é um aberto que contém x.

Definimos $h: A \to \mathbb{R}^n$
$h(x) = (g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x), x_n)$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$ e
$h'(a) = Id$

Pelo teorema da função inversa existe U' aberto com $a \in U' \subset A$, h é injetiva e $\det h'(x) \neq 0$. Definimos também $K: h(U') \to \mathbb{R}^n$ e $K(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, g_n(h^{-1}(x))) \to g = K \circ h$. Temos que $K'(h(a)) = Id$.

A K' também tem inversa e $\det K'(x) \neq 0$,



Seja $W \subset U$ um bloco da forma $D \times [a_N, b_N]$ onde D é um bloco em $\mathbb{R}^{N-1}$.

Pelo teorema de Fubini:

$$\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_N,b_N]} \left(\int_{h(D\times\{x_N\})} 1 \, dx_1 \ldots dx_{N-1} \right) dx_N \text{ , como } x_N = [a_N, b_N]$$

$$= \int_{[a_N,b_N]} \left(\int_D |\det h'_{x_N}| \, dx_1 \ldots dx_{N-1} \right) dx_N \text{ , onde } h_{x_N} = h|_{D\times\{x_N\}}$$

Como $h = (g_1, \ldots, g_{N-1}, x_N)$ e $h_{x_N} = \{g_1, \ldots, g_{N-1}\} \rightarrow \det h'_{x_N} = \det h'$

$$= \int_{[a_N,b_N]} \left(\int_D |\det h'| \, dx_1 \ldots dx_{N-1} \right) dx_N = \int_W |\det h'|$$

Analogamente vale p/ K e G.