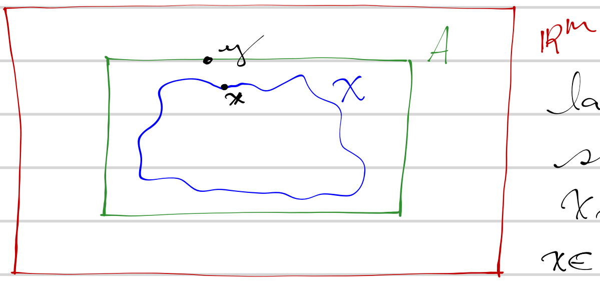
Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é J-mensurável. Prove que $Vol.(X) = 0 \longleftrightarrow int.(X) = \emptyset$.

Dado o bloco $A \supset X$ em $\mathbb{R}^m$, e seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade da função característica $\chi_X : A \to \mathbb{R}$.



Assim $D \subset \partial X$, e por outro lado um ponto de ∂X que não seja uma descontinuidade de χ_X deve pertencer a ∂A.

$x \in \partial X \to x \in A \to x \in \mathbb{R}^m$

$y \notin \partial X \to y \in A \to y \in \mathbb{R}^m$

Desta forma $\partial X = D \cup (\partial X \cap \partial A)$ e $X = \partial X \cup int.(X)$, como $\partial X \in int(A) \longrightarrow \partial X = D$, e como ∂A (reunião das faces próprias do bloco A) tem medida nula, segue-se que $med.\,\partial X = 0 \longleftrightarrow med.\,D = 0$.

Temos 2 casos:

i) Tomamos o $vol.(X) = 0$, como $X = \partial X \cup int(X)$, então:

$$Vol(X) = \int_A \partial(X)\,dx + \int_A int.(X)\,dx \quad , \text{ mas } Vol(X) = 0, \text{ então:}$$

$$\int_A \partial X\,dx + \int_A int.(X)\,dx = 0 \longrightarrow \int_A \partial(X)\,dx = -\int_A int(X)\,dx. \text{ Contudo a}$$

fronteira de X tem medida nula, logo: $med\,(\partial X) = 0 \to Vol\,(\partial X) = 0$.

Então: $-\int_A int.(X)\,dx = 0 \longrightarrow Vol\,(int.\,X) = 0 \to med\,(int\,X) = 0 \longrightarrow$

$int.\,(X) = \emptyset$.

ii) Tomamos agora $int.\,(X) = \emptyset \longrightarrow med\,(int.\,(X)) = 0 \to Vol\,(int(X)) = 0$, então $\int_A int(X)\,dx = 0$, mas: $Vol\,(X) = \int_A \partial X\,dx + \int_A int.\,(X)\,dx$

$$Vol\,(X) = \int_A \partial X\,dx + 0 \to Vol\,(X) = \int_A \partial X\,dx \quad , \text{ mas } med(\partial X) = 0$$

logo: $$Vol(X) = \int_A \partial X\,dx = 0 \longrightarrow Vol\,(X) = 0.$$