Notas de Análise Básico

Pablo D. Carrasco

2 de fevereiro de 2021

Conteúdo

I Espaços métricos completos e Espaços de Banach **1**
I.1 Espaços Normados . . . 1
I.2 Funções continuas, espaços compactos e espaços completos . . . 3
I.2.1 Espaços métricos completos . . . 10
I.2.2 Completação . . . 12
I.3 Espaços de Banach . . . 13
I.3.1 Extenção de operadores lineares: o teorema BLT e a integral de Riemann . 14
I.4 Apêndice: compacidade em espaços topológicos . . . 16

II Funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$ **17**
II.0.1 A regra de Leibnitz . . . 23
II.0.2 O teorema do valor médio . . . 23
II.1 Apêndice: notação “o” de Landau . . . 25

III Os teoremas da função inversa e função implícita **27**
III.1 O teorema da função implícita . . . 30
III.2 Forma local as imersões e submersões: o teorema do posto. . . . 31

CAPÍTULO I

Espaços métricos completos e Espaços de Banach

I.1 Espaços Normados

Para nós dizer que V é um espaço vetorial quer dizer que V é um $\mathbb{K}$ espaço vetorial onde $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$. Uma função $\|:\|V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uma norma se satisfaze as propriedades

- $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
- $\|\lambda\| = |\lambda|\|v\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{K}, v \in V$.
- $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Definição I.1.1. *O par* $(V, \|\cdot\|)$ *é chamado de espaço normado.*

A seguinte propriedade (consequência da desigualdade triangular) é útil:

$$\forall v, w \in V, \quad |\|v\| - \|w\|| \leq \|v + w\|. \tag{I.1}$$

Se $(V, \|)\|$ é um espaço normado a função $d : V \times V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ definida por $d(v, w) = \|v - w\|$ é uma distância em V. Escreveremos $(V, d) = (V, \|)\|$ indistintamente.

Notação: Se (M, d) é um espaço métrico, denotamos para $x \in M, \epsilon > 0$

$$\begin{aligned} D(x, \epsilon) &= \{y \in M : d(x, y) < \epsilon\} \quad &\text{disco (ou bola) aberto} \\ \overline{D}(x, \epsilon) &= \{y \in M : d(x, y) \leq \epsilon\} \quad &\text{disco (ou bola) fechado} \end{aligned}$$

Lembremos que d define uma topología em M ($U \subset M$ é aberto see $U = \bigcup_{i \in I} D_i$, onde cada D_i é um disco aberto).

Por enquanto trabalharemos em espaços normados. Em este caso temos

1. $\forall v \in V$ a traslação $T_v : V \to V, T_v(w) = w + v$ é uma isometria; por tanto a topologia é invariante por traslações. Na prática isto quer dizer que o espaçõ V é *homogéneo* e em cada ponto as propriedades locais são as mesmas que perto do ponto 0.
2. $\|:\|V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ é uniformemente continua (ver eq. (I.1)).

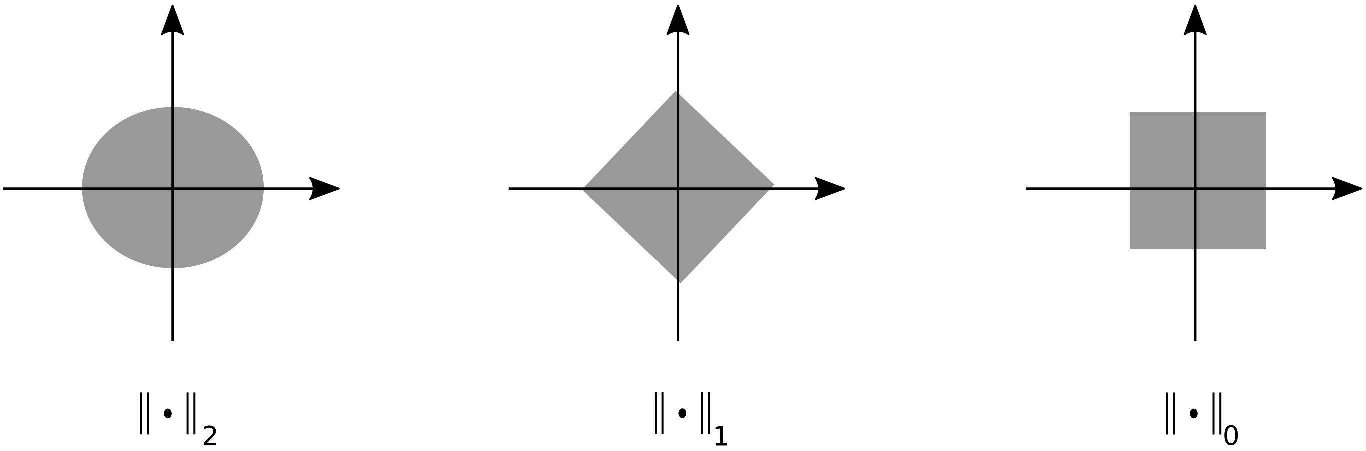


Figura I.1: Forma dos discos em $\mathbb{R}^2$ com suas diferentes normas.

3. Os mapas $P : \mathbb{K} \times V \to V, S : V \times V \to V$ dados por

$$P(\lambda, v) = \lambda v$$
$$S(v, w) = v + w$$

são continuos.

Exemplo I.1.1. Em $\mathbb{R}^n$ consideramos as normas

- $\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^n}$ onde $v = (v_1, \cdots, v_n)$; esta é a norma euclidea, e em geral escrevemos $\|v\| = \|v\|_2$.
- $\|v\|_1 = \sum_{i=1}^n |v_i|$; esta é a norma da soma (ou norma ℓ^1).
- $\|v\|_0 = \max_{i=1,\cdots,n} |v_i|$; esta é a norma do máximo.

É claro que

$$\|v\|_0 \leq \|v\| \leq \|v\|_1 \leq n \cdot \|v\|_0$$

Similarmente para $\mathbb{C}^n$ (trocando valor absoluto pelo módulo).

Exemplo I.1.2. Seja $I = [0, 1]$ e $V = \mathcal{C}(I) = \{f : I \to \mathbb{R} \text{ (ou } \mathbb{C}) : f \text{ é continua}\}$. Consideramos

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0} = \max_{x \in I} |f(x)|$$
$$\|f\|_{\mathscr{L}^1} = \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Então $(V, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}), (V, \|\cdot\|_{\mathscr{L}^1})$ são espaçós normados.

Definição I.1.2. *Seja (M, d) espaço métrico, e $(x_n)_n \subset M$ sequência. Dezimos que $(x_n)_n$ converge a x, para certo $x \in M$ (Notação: $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x$ ou $\lim_n x_n = x$) se para todo $\epsilon > 0$ existe $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_\epsilon \Rightarrow x_n \in D(x, \epsilon)$.*

Equivalentemente, $\lim_n d(x_n, x) = 0$.

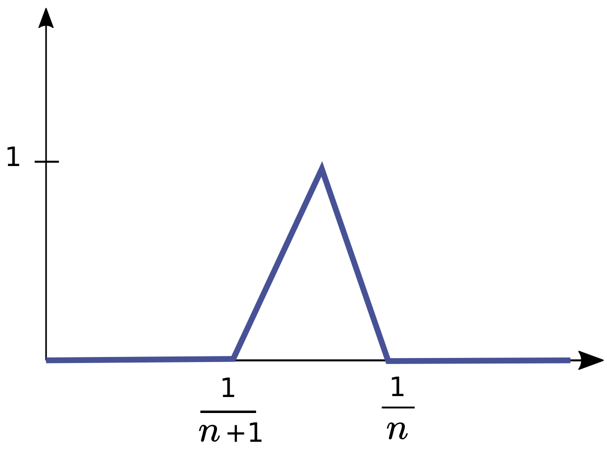
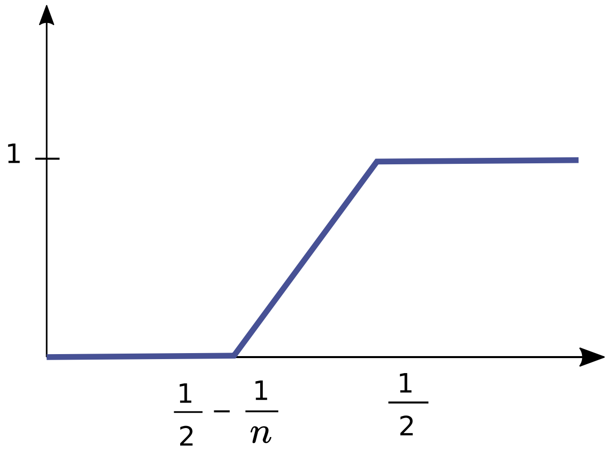


Figura I.2: Convergencia em $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^1}$ não implica convergencia em $\|\cdot\|_{C^0}$.



Exemplo I.1.3. Voltando ao exemplo I.1.2, consideramos $(f_n)_n \subset V$ onde o gráfico da f_n está dado na seguinte figura.

Temos que $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_{\mathscr{L}^1}} 0$, mais não converge não norma $\|\cdot\|_{C^0}$. Notar que como $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^1} \leq \|\cdot\|_{C^0}$, converência na norma $\|\cdot\|_{C^0}$ implica convergência na norma $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^1}$.

Por outro lado, consideremos a sequência $(g_n)_n$ com g_n como segue: A sequência $(g_n)_n$ não converge em nenhuma das duas normas; por outra parte observar que para todo $x \in I$ existe $g(x) = \lim_n g_n(x)$ (porém $g \notin V$).

I.2 Funções continuas, espaços compactos e espaços completos

Sejam $(M, d_M), (N, d_N)$ espaços métricos e $f : M \to N$ uma função.

Definição I.2.1.

1. *f é continua em $x_0 \in M$ see[1] para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ talque $f(D_M(x_0, \delta)) \subset D_N(fx_0, \epsilon)$.*

2. *f é continua (em M) se é continua em cada ponto $x_0 \in M$*

[1] see= se e somente se

Notação: Se M espaço metrico (ou topológico) e $x \in M$ denotamos

$$\mathcal{N}_x = \{U \subset M : \exists \epsilon > 0 \text{ com } D(x,\epsilon) \subset U\} \tag{I.2}$$
$$\mathcal{N}_x^{\text{ab}} = \{U \subset M : U \text{ aberto e} x \in U\}. \tag{I.3}$$

Se verifica facilmente que f é continua em x_0 see dado $V \in \mathcal{N}_{fx_0,N}$ existe $U \in \mathcal{N}^{\text{ab}}_{x_0,M}$ tal que $f(U) \subset V$; com isto f é contiua see para todo aberto $V \subset N$ temos que $f^{-1}(U)$ é aberto.

Definição I.2.2. *f é uniformemente continua se dado $\epsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ tal que*

$$\forall x, y \in M, \quad d_M(x,y) < \delta \Rightarrow d_N(fx, fy) < \epsilon.$$

Se verifica fácilmente que

- f é continua em x_0 see para toda sequência $(x_n)_n \subset M$ temos $x_n \xrightarrow[n\to oo]{} x_0 \Leftrightarrow fx_n \xrightarrow[n\to oo]{} fx_0$.
- f é uniformemente continua see para todo par de sequências $(x_n)_n, (y_n)_n \subset M$ com temos $d_M(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to oo]{} 0 \Leftrightarrow d_N(fx_n, fy_n) \xrightarrow[n\to oo]{} 0$.

Compacidade

Seja (M, d) espaço métrico (ou topológico).

Definição I.2.3. *$K \subset M$ é compacto se todo cobrimento aberto do K tem um subcobrimento finito. Isto é, se $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in\Lambda}$ é uma familia de conjuntos abertos com $K \subset \bigcup_{i\in\Lambda} U_i$, então existe $\Lambda_F \subset \Lambda$ finito tal que $K \subset \bigcup_{i\in\Lambda_F} U_i$.*

Observação I.2.1. *Se $K \subset M$ é compacto e $F \subset K$ é fechado, então F é compacto: $F = \tilde{F}M$ fechado, e por tanto se $\{U_i\}_{i\in\Lambda}$ é um cobrimento aberto de F, $\{U_i\}_{i\in\Lambda} \cup \{M \setminus \tilde{F}\}$ é um cobrimento aberto de K, por tanto admite um recobrimento finito.*

Observe também que se $K \subset M$ é compacto, então é fechado. Considere $x \in M \setminus K$, e para cada $y \in K$ seja ϵ_y tal que $D(x,\epsilon_y) \cap D(y,\epsilon_y) = \emptyset$. Sejam $y_1, \cdots y_k \in K$ tais que $K \subset \bigcup_{i=1}^k D_{y_i}$. Se $\epsilon = \min_{i=1,\cdots,k} \epsilon_{y_i}$, então $D(x,\epsilon) \cap K = \emptyset$ e $M \setminus K$ aberto, por tanto K é fechado.

Proposição I.2.1. *$K \subset M$ é compacto see toda familia de fechados $\mathcal{F}$ em K tal que toda sub familia finita de $\mathcal{F}$ tem interseção não vazía$*$, satisfaz tambem que $\cap_{f\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$.*

$(*)$ Abreviaremos esta propriedade com as siglas PIF.

Demonstração. Utilizando a topologia relativa podemos supor $K = M$. Suponha então que M é compacto e considere uma familia $\mathcal{F} = \{F_j\}_{j\in\Lambda}$ de conjuntos fechados tais que toda sub-familia finita tem interseção não vazía. Se $\cap_{i\in\Lambda} F_i = \emptyset$ então $\mathcal{U} = \{M \setminus F_i : i \in \Lambda\}$ é um cobrimento aberto de M, por tanto para un conjunto finito temos $M = \cup_{i\in\tilde{\Lambda}} M \setminus F_i$, e por tanto $\emptyset = \cup_{i\in\tilde{\Lambda}} F_i$, uma contradição.

O recíproco é similar. ∎

Proposição I.2.2. *Se $f : M \to N$ é uma função continua, então para todo compacto $K \subset M$ temos que $f(K) \subset N$ é compacto*

Demonstração. Imediato. ■

Notação: Denotamos

$$\mathcal{K}(M) = \{K \subset M : K \text{ compacto}\}.$$

Corolário I.2.3. *Seja M espaço métrico (o espaço topológico Hausdorf). Considere $(K_i)_{i\in\Lambda} \subset \mathcal{K}(M)$ familia indexada por um conjunto dirigido Λ tal que $i \geq i' \Rightarrow K_i \subset K_{i'}$. Então $K = \cap_{i\in\Lambda} K_i$ é compacto e não vazío.*

Em geral o corolário anterior se utiliza na situação onde $(K_n)_n \subset \mathcal{K}(M)$ é uma sequência decrescente de compactos.

Corolário I.2.4. *Seja M espaço métrico. Então $K \subset M$ é compacto see para toda sequência $(x_n)_n \subset K$ existe uma sub-sequência $(\phi(n))_n \subset \mathbb{N}$ e $x \in K$ tais que $\lim_n x_{\phi(x)} = x$.*

Demonstração. Novamente podemos assumir $M = K$. Suponha que M é compacto e $(x_n)_n \subset M$ e considere $K_n = \mathtt{cl}(x_m : m \geq n)$. Então $(K_n)_n \subset \mathcal{K}(M)$ é uma sequência decrescente de conjuntos compactos, por tanto existe $x \in \cap_n K_n$. Para cada n podemos encontrar $x_{\phi(n)} \in D(x, \frac{1}{n})$, e claramente $(\phi(n))_n$ satisfaz $\lim_n x_{\phi(x)} = x$.

Reciprocamente, suponha que toda sequência em M tenha alguma sub-sequência convergente.
Afirmação: M é separável, isto é, tem um subconjunto $N \subset M$ denso e enumerável.

Fixamos k e consideramos $x_{1,k} \in M$; se $M = D(x_{1,k}, \frac{1}{k})$ terminamos, de outra forma escolhemos $x_{2,k} \notin D(x_{1,k}, \frac{1}{k})$. Por indução, tendo escolhido $x_{1,k}, \cdots, x_{n,k}$temos que $M = \cup_{i=1}^n D(x_{i,k}, \frac{1}{k})$, ou podemos escolher $x_{n+1,k} \in M \setminus \cup_{i=1}^n D(x_{i,k}, \frac{1}{k})$. Por outro lado, necessáriamente o processo tem que terminar, pois a sequencia $(x_{n,k})_n$ não tem pontos de acumulação.

Definimos $N = \{x_{n,k} : n, k\}$ e temos o conjunto denso e enumerável.

Afirmação: M tem uma base enumerável.

$\mathcal{B} = \{D(x, \frac{1}{m}) : x \in N, m \in \mathbb{N}_{>0}\}$ é base da topología.

Afirmação: M é Lindelöf: todo cobrimento aberto tem um sub-cubrimento enumerável.

Claro do anterior.

Para mostrar compacidade é suficente então demostrar que toda família de fechados enumerável com a PIF tem interseção não vacía. Consideramos então uma tal familia $\mathcal{F} = \{F_n\}_{n=1}^\infty$ e definimos

$$\mathcal{G} = \{G_n = \cap_{k=1}^n F_k\}_n.$$

Então $\mathcal{G}$ é uma família de fechados decrescente. Para cada n seja $x_n \in G_n$; existe $(\phi(n))_n \subset \mathbb{N}$ sub-sequência e $x \in M$ tais que $\lim_n x_{\phi(n)} = x$, e sem pérdida de generalidade podemos supor $\phi(n) \geq n$. Como $G_k \subset G_n$ para todo $k \geq n$ temos que $(x_{\phi(k)})_{k\geq n} \subset G_n$, e por tanto $x \in G_n$ (G_n fechado). Isto mostra que $x \in \cap_{n=1}^\infty G_n$. ■

É possível dar uma demostração mais direta da proposição anterior; por outra parte os argumentos utilizados podem ser generalizados ao caso quando M é um espaço topológico. Veja o appéndice.

Teorema I.2.5 (Heine-Borel)**.** *$I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ é compacto.*

Demonstração. É suficente mostrar que $(x_n)_n \subset I$ tem alguma sub-sequência convergente. Para cada $n \geq 1$ defina $\mathcal{J}^{(n)} = \{J_{j,n} = [\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n}], j = 0, \cdots, 2^n - 1\}$ e observe que $\mathcal{J}^{(n+1)}$ se obtem a partir de $\mathcal{J}^{(n)}$, dividindo cada um de seus intervalos pela metade. Dano n definimos indutivamente $I_n \in \mathcal{J}^{(n)}$ tal que

- $I_n \subset I_{n-1}$
- I_n contem infinitos elementos $(x_n)_n$

Escrevendo $I_n = [a_n, b_n]$ temos $b_n - a_n = \frac{1}{2^n}$ e por tanto $x = \sup_n a_n = \inf_n b_n$. Pela definição de supremo, claramente existe uma sub-sequencia da $(x_n)_n$ convergindo a x. ■

Exemplo I.2.1. Seja $(V, \|)\|$ espaço normado e $K \subset V$.
Afirmação: se K é compacto, então é fechado e limitado (propriedade de Heine-Borel).

Já vimos que é fechado. Para mostrar que é limitado suponha que existe uma sequência de vetores $(v_n)_n \subset K$ tais que $\|v_n\| > n$ e observe que tal sequência não pode ter sub-sequências convergentes.

Em geral, a propriedade de Heine-Borel *não implica* que o sub-conjunto é compacto. Como exemplo considere a sequência dada em example I.1.3 e observe que $\|g_n\|_{\mathcal{C}^0} = 1$ para todo n, e por tanto $(g_n) \subset \overline{D}(0,1)$, porém $(g_n)_n$ não tem nenhuma sub-sequência convergente (se tivesse, o limite coincidiría com a g, que não é continua); concluimos que $\mathtt{cl}(D(0,1))$ não é compacto em $(\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$.

Num espaço normado, o disco fechado $\overline{D}(0,1)$ (e por tanto, qualquer disco) é compacto se e somente se $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$.

Lema I.2.6 (Lema de Riesz's). *Seja V espaço normado e $W \subset V$ um sub-espaço fechado, $W \neq V$. Então existem vetores "quase perpendiculares" ao W: dado $\epsilon > 0$ podemos encontrar $u \in V$, $\|u\| = 1$ tal que*

$$\|u + W\| = \inf\{\|u + w\| : w \in W\} \geq 1 - \epsilon.$$

Demonstração. Consider qualquer vetor $v \notin W$; como W é fechado temos que $a = \|v + W\| > 0$ e por tanto dado $n \in \mathbb{N}_{>0}$ existe $w \in W$ com $\|v + w\| < a + \frac{1}{n}$. Definimos $u = \frac{v+w}{\|v+w\|}$ e calculamos

$$\|u + W\| = \inf_{w' \in W}\{\frac{v + w'}{\|v + w\|}\} = \frac{\|v + W\|}{\|v + w\|} > \frac{a}{a + \frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

e de aqui queda. ■

Proposição I.2.7. *V espaço normado, $\overline{D} = \{v : \|v\| \leq 1\}$. Então D é compacto see $\dim_{\mathbb{K}} V < \infty$.*

Demonstração. Suponha que $\overline{D}$ é compacto e escolha v_1 com $\|v_1\| = 1$ e defina $W_1 = \mathtt{span}\,\{v_1\}$. Se $V = W_1$ então $\dim V = 1$; se não pelo lema de Riesz ($\epsilon = \frac{1}{2}$+ o fato de que qualquer sub-espaço de dimensão finita em um espaço normado é fechado) existe v_2 de norma 1 em $V \setminus W_1$ tal que $\|v_1 - v_2\| \geq \frac{1}{2}$. Por indução, tendo escolhido $v_1, \cdots, v_n$ denotamos $W_n = \mathtt{span}\,\{v_1, \cdots, v_n\}$ e temos que

- $V = W_n$, e por tanto $\dim V = n < \infty$; ou

- podemos escolher v_{n+1} de norma 1 tal que $\|v_{n+1} - v_i\| \geq \frac{1}{2}$, para todo $i = 1, \cdots n$.

Pela compacidade do $\overline{D}$ o processo tem que terminar em uma quantidade finita de pasos (pois se não teriamos uma sequência em $\overline{D}$ sem pontos de acumulação), o por tanto $\dim V < \infty$

Recíprocamente, se $\dim V$ é finita fixamos uma base $\{v_1, \cdots v_n\}$ e definimos o mapa linear

$$A(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i) = (a_1, \cdots, a_i).$$

Usando sequências se verifica diretamente que A é um homeomorfismo, e por tanto $A(\overline{D})$ é um conjunto fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$ (ou $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$). Por tanto $A(\overline{D}) \subset [-a, a]^n$ para algum a positivo, o qual é compacto como consequência quasi-direta do teorema de Heine-Borel. Sabemos tambem que subconjuntos fechados são compactos, assim que $A(\overline{D})$ é compacto, e por tanto $\overline{D}$ é compacto. ■

Definição I.2.4. *Um espaço métrico é localmente compacto se cada ponto tem uma base local de conjuntos (pre)-compactos.*

Corolário I.2.8. *Se $(V, \|\cdot\|)$ é um espaço normado de dimensão infinita, então não é localmente compacto.*

Para finalizar esta parte, observe os seguintes fatos.

Proposição I.2.9. *Seja M compacto e $f : M \to \mathbb{R}$ continua. Então f tem máximo e mínimo em M.*

Demonstração. $f(M)$ é compacto em $\mathbb{R}$, por tanto e fechado e limitado. De aquí queda queda a primeira parte. ■

Proposição I.2.10. *Seja $f : M \to N$ função continua entre espaços métricos. Então f é uniformemente continua.*

Demonstração. Sejam $(a_n)_n, (b_n)_n \subset M$ sequências com $\lim_n d_M(a_n, b_n) = 0$. Então $((fa_n, fb_n))_n \subset f(M) \times f(M)$, e por tanto $x_n = d_N(fa_n, fb_n)$ é uma sequência em um compacto de $\mathbb{R}$, e tem alguma sub-sequência convergente. Suponha que $\alpha = \lim_n d_N(fa_{\phi(n)}, fb_{\phi(n)})$ e cualquer sub-sequencia convergente da $(x_n)_n$: para alguma sub-sequencia $(\varphi(n) = \phi \circ \psi(n))_n$ da $(\phi(n))_n$ temos que existe $\lim_n a_{\varphi(n)} = a, \lim_n b_{\varphi(n)} = b$ (pela compacidade de M, e como $\lim_n d_M(a_n, b_n) = 0$ temos $a = b$. Então $\alpha = \lim_n d_N(fa_{\phi(n)}, fb_{\phi(n)}) = \lim_n d_N(fa_{\varphi(n)}, fb_{\varphi(n)}) = d_N(fa, fb) = 0$.

Concluimos que toda sub-sequência de $(x_n)_n$ converge a 0, e como existe ao menos uma sub-sequência convertente, $\lim_n x_n = 0$, o que implica que f é uniformemente continua. ■

Norma de uma transformação limear

Sejam $(V, \|\cdot\|_V), (W, \|\cdot\|_W)$ espaços normados e $T : V \to W$ linear. A norma de operador da transformação T (respeito ás normas $\|\cdot\|_W, \|\cdot\|_W$) é

$$\|T\|_{\texttt{OP}} = \sup_{x \in V, v \neq 0} \left\{ \frac{\|T(x)\|_W}{\|v\|_V} \right\} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V = 1}} \{\|T(x)\|_W\}.$$

Exercício I.2.1. *Mostrar que* $\|T\| = \sup_{x\in V, \|x\|_V\le 1}\{\|T(x)\|_W\}$. *Mostrar também que se* $T : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W), \hat{T} : (W, \|\cdot\|_W) \to (U, \|\cdot\|_U)$ *são lineares, então*

$$\|\hat{T} \circ T\| \le \|\hat{T}\| \cdot \|T\|.$$

Lema I.2.11. *São equivalentes*

1. T *é continua em* 0.
2. T *é continua em todo ponto.*
3. T *é uniformemente continua.*
4. $\|T\|_{\texttt{OP}} < \infty$.

Demonstração. $1) \Rightarrow 2)$: Fixamos $a \in V$ e seja $L_a : V \to V$ a traslação $L_a(x) = x + a$ (que sabemos é um homeomorfismo). Pela hipótese, $S = T \circ L_{-a}$ é continua em a, por tanto $T = S \circ L_a$ é continua em a.

$3) \Rightarrow 2) \Rightarrow 1), 4) \Rightarrow 3)\checkmark$.

$1) \Rightarrow 4)$ Seja δ corrrespondente a $\epsilon = 1$ na definição de continuidade; então se $x \neq 0$ temos

$$\|T(\delta\frac{1}{\|x\|_V}x)\|_W < 1 \Rightarrow \|T(x)\| < \delta^{-1}\|x\|_V$$

e $\|T\|_{\texttt{OP}} \le \delta^{-1} < \infty$. ∎

Definição I.2.5. *Se* $\|T\|_{\texttt{OP}} < \infty$ *diremos que* T *é* limitada. *Denotamos*

$$\texttt{Lin}(V)(V, W) = \{T : V \to W : T \textit{ linear e limitada}\},$$

e se $V = W$ *escrevemos* $\texttt{Lin}(V)V = \texttt{Lin}(V)V, V$.

É direto verificar que $(\texttt{Lin}(V)V, W, \|\cdot\|_{\texttt{OP}})$ é um espaço vetorial normado

Consideremos agora $V = \mathbb{R}^n$ e $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|$ a norma euclídea, é dizer

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots x_n^2}.$$

Claramente, para toda componente $x_i, |x_i| \le \|x\|$.

Proposição I.2.12. $T : \mathbb{R}^n \to (W, \|\cdot\|_W)$ *é limitada, por tanto continua.*

Demonstração. Consideramos a base canônica $\{e_i = \underbrace{(0 \cdots, i, \cdots, 0)}_{\text{posição } i}\}$ e tomamos $M = \max\{\|T(e_i)\|_W\}$; se $x \in \mathbb{R}$, $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e

$$\|T(x)\|_W \le \sum_{i=1}^n |x_i|\|T(e_i)\|_W \le M\sum_{i=1}^n |x_i| \le M\sum_{i=1}^n \|x\| = nM\|x\|.$$

Concluímos que $\|T\|_{\texttt{OP}} \le nM$. ∎

Suponhamos que $T : \mathbb{R}^n \to (W, \|\cdot\|_W)$ é um isomorfismo linear; vamos mostrar que T é um homeomorfismo. Já sabemos que T é continua; por tanto a função $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$F(x) = \|T(x)\|_W$$

é continua (composição de funções continuas), e como $S = \{x : \|x\| = 1\}$ é compacto (proposition I.2.7), temos que existe $m = \min_{x\in S}\{F(x)\}$; como $T(x) \neq 0$ para $x \in S$, vale $m > 0$. Então para $y \in W$,

$$\|y\| = \|T \circ T^{-1}(y)\| \geq m \cdot \|T^{-1}y\| \Rightarrow \|T^{-1}y\| \leq \frac{1}{m}\|y\|_W$$

e T^{-1} é limitada.

Corolário I.2.13. *Se $(V, \|\cdot\|_V)$ é um espaço vetorial de dimensão finita e $T : (V, \|\cdot\|_V) \to (W, \|\cdot\|_W)$ é linear, então T é continua. Se além disso T é um isomorfismo linear, então T é um homeomorfismo.*

Demonstração. Como $\mathbb{C}^n \approx \mathbb{R}^{2n}$ é suficente considerar o caso real. Fixamos uma base $\{v_1, \cdots, v_n\}$ de V de definimos $A : \mathbb{R}^n \to V$ com

$$A(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i v_i.$$

A é claramente um isomorfismo, e pelo que vimos antes, é um homeomorfismo de $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ em $(V, \|\cdot\|_V)$. Se $T : V \to W$ é linear, então $B = T \circ A : \mathbb{R}^n \to W$ é continua, e por tanto $T = B \circ A^{-1}$ é continua. A segunda parte é direta da primeira. ■

Corolário I.2.14. *Sejam $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$ normas em $\mathbb{R}^n$ (ou em um espaço vetorial de dimensão finita). Então as normas são equivalentes, é dizer existem $a, b > 0$ tais que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad a\|x\| \leq \|x\|' \leq b\|x\|.$$

Demonstração. A identidade $I : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$ é um homeomorfismo e por tanto ela e sua inversa são limitadas. ■

Exemplo I.2.2. Seja $V = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} : f$ tem derivada continua$\}$ e utilizamos a norma $\|f\| = \|f\|_{\mathcal{C}^0}$. Definimos $T : (V, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}) \to (\mathcal{C}(I), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$ o operador $T(f) = f'$; é um resultado básico do cálculo que T é linear, porém se $f_n(x) = x^n$ temos $\|f_n\|_{\mathcal{C}^0} = 1$ para todo n, mas $\|Tf_n\|_{\mathcal{C}^0} = n$. Concluimos que T não é limitada.

Exemplo I.2.3. Consideremos o operador linear identidade $\mathrm{Id} : (V = \mathcal{C}(I), \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}) \to (V, \|\cdot\|_{\mathscr{L}^1})$. Temos que $\|\mathrm{Id}\|_{\mathtt{OP}} = 1$, por tanto se $U \subset V$ é aberto com a norma $\|\cdot\|_{\mathscr{L}^1}$, é também aberto com a norma do máximo. Isto nos diz que a topologia dada pela norma do máximo é mais fina que a topología $\mathcal{L}^1$.

Observe, por outra parte, que a inversa $\mathrm{Id} : (V, \|\cdot\|_{\mathscr{L}^1}) \to (V, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0})$ não é continua: a sequência dada em $fig.\ I.2$ converge á função nula na norma $\mathcal{L}^1$, porém não converge na norma $\mathcal{C}^0$.

pdcarrasco@mat.ufmg.br

I.2.1 Espaços métricos completos

Nesta parte (M,d) espaço métrico.

Definição I.2.6. *Dezimos que M é completo se toda sequência de Cauchy em M é convergente em M.*

Exemplo I.2.4. $\mathbb{R}$ é completo. Se $(x_n)_n$ é de Cauchy, então é limitada e por tanto contida dentro de um intervalo compacto. Assim, $(x_n)_n$ tem uma sub-sequência convergente; mas é simples de ver que se uma sequência de Cauchy tem uma sub-sequência convergente, então ela mesma converge.

A propriedade de completitude de $\mathbb{R}$ é equivalente ao axioma do supremo (exercício).

Como no caso da compacidade, existe uma caracterização da completitude em termos de sequências de fechados.

Proposição I.2.15. *M espaço métrico é completo see para toda sequência de fechados $(F_n)_n$ en M com*

a) $F_{n+1} \subset F_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$

b) $\operatorname{diam} F_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

temos que $\cap_n F_n \neq \emptyset$ (e por tanto consiste de um único ponto).

Demonstração. Se consideramos $(F_n)_n$ como na hipotése, escolhemos para cada n um $x_n \in F_n$. O fato de que $\lim_n \operatorname{diam} F_n = 0$ leva a que $(x_n)_n$ é de Cauchy e como $(x_n)_{n\geq m} \subset F_m$, $x \in F_m$ (pois o conjunto é fechado). Concluimos que $x \in \cap_{m\geq 0} F_m$.

Reciprocamente, assumimos a condição nas familias decrescentes de fechados e consideramos $(x_n)_n$ de Cauchy. Definimos $F_n = \mathtt{cl}(x_m : m \geq n)$: a sequência de fechados (F_n) é decrescente, e pela condição de Cauchy temos $\lim_n \operatorname{diam} F_n = 0$. Se $\{x\} = \cap_n F_n$ é claro que $\lim_n x_n = x$. ■

Completitude e Funções continuas Observe que a propriedade de completitude não é invariante por funções continuas (homeomorfismos). Por exemplo $\mathbb{R}$ é completo, e é homeomorfo ao intervalo aberto $(0,1)$ que não é.

Lema I.2.16. *Se $f : M \to N$ é uniformemente continua, então leva sequências de Cauchy em sequências de Cauchy. Por tanto, se f é invertivél, uniformemente continua e com inversa uniformemente continua temos que M é completo see N é completo.*

Demonstração. O fato de que $(a_n)_n$ de Cauchy implica que $((f(x_n))_n$ também é de Cauchy seque diretamente da definição de continuidade uniforme. A segunda parte é consequência da primeira. ■

Proposição I.2.17. *Seja $f : M_0 \to N$ função uniformemente continua, onde $M_0 \subset M$ e N completo. Então f tem uma única extensão continua $F : \overline{M_0} \to N$. Além disso, F é uniformemente continua.*

Demonstração. Dado $x \in \overline{M}_0$ seja $(a_n)_n \subset M_0$ com $\lim_n a_n = x$. Então $(f(a_n))_n \subset N$ é de Cauchy, e por tanto converge a um ponto $F(x; (a_n)_n)$. Observe que se $(b_n)_n \subset M_0$ é outra sequência convergindo a x, temos $d_M(a_n, b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ e por tanto $d_N(f(a_n), f(b_n)) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. Concluimos que $F(x; (a_n)_n) = F(x)$, e assim temos bem definida uma função $F : \overline{M_0} \to N$ que extende á f (se $x \in M_0$ podemos tomar a sequência constante $a_n = x$).

A unicidade da tal extensão é clara (funções continuas enviam sequências convergentes em sequências convergentes). Por último, fixamos $\epsilon > 0$ e consideramos $\delta > 0$ tal que

$$x, y \in M_0, d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(fx, fy) < \frac{\epsilon}{3}.$$

Se $x, y \in \overline{M_0}$ com $d_M(x, y) < \frac{\delta}{2}$ e tomamos $(a_n)_n, (b_n)_n \subset M_0$ com $\lim_n a_n = x, \lim_n b_n = w$. Seja n sufficentemente grande tal que

- $d_M(a_n, x), d_M(b_n, y) < \frac{\delta}{4}$, e por tanto $d_N(fa_n, fb_n) < \frac{\epsilon}{3}$.
- $d_N(fa_n, Fx), d_N(Fy, fb_n) < \frac{\epsilon}{3}$.

Então temos

$$d_N(Fz, Fw) \leq d_N(Fx, fa_n) + d_N(fa_n, fb_n) + d_N(fb_n, Fy) < \epsilon,$$

e F é uniformemente continua. ∎

Observação I.2.2. *Na proposição anterior, note que* $\mathrm{Im}(F) \subset \mathtt{cl}(f(M_0))$*: a igualdade não é necessáriamente válida.*

Compacidade e completitude A fato de um espaço ser compacto, de alguma forma nos diz que o espaço é "topológicamente pequeno". A ideia é que, dada uma escala ϵ podemos encontrar uma boa approximação finita do espaço com esta escala.

Definição I.2.7. *Se M é um espaço métrico diremos que $S \subset M$ é uma ϵ-rede se $M = \cup_{x \in S} D(x, \epsilon)$.*

Se M é compacto, para cada $\epsilon > 0$ podemos encotnrar uma ϵ-rede finita (certo?). Por outro lado, esta ϵ-rede não consegue detectar escalas menores; para controlar estas podemos utilizar o conceito de completitude.

Proposição I.2.18. *M espaço métrico é compacto $\Leftrightarrow$ M é completo e para todo $\epsilon > 0$ existe uma ϵ-rede finita*[2]

Demonstração. $\Rightarrow$ Já vimos isto: dada $(a_n)_n \subset M$ de Cauchy, pela compacidade existe uma sub-sequência convergente e isto implica que $(a_n)_n$ converge. A existência de ϵ-redes finitas é obvia.

$\Leftarrow$ Seja $(a_n)_n \subset M$ sequência. Para $\epsilon = 1$ consideramos uma ϵ-rede finita S_1, e tomamos $x_1 \in S_1$ tal que $\#F_1 = \overline{D}(x_1, 1) \cap \{a_n : n\} = \infty$. Por indução, se construimos $F_1 \supset F_2 \supset \cdots F_n$ conjuntos fechados com $\operatorname{diam} F_n = \frac{2}{n}$ e $F_n \cap \{a_n : n\} = \infty$ utilizamos uma $\frac{1}{n+1}$ rede finita com $\overline{D}(x_{n+1}, \frac{1}{n+1}) \cap \{a_n : n\} = \infty$, $x_{n+1} \in F_n$ e definimos $F_{n+1} = \overline{D}(x_{n+1}, \frac{1}{n+1}) \cap F_n$. Assim temos uma sequência de fechados decrescente com $\lim_n \operatorname{diam} F_n = 0$, por tanto pela completitude, $\{x\} = \cap_n F_n$. Por construção, x é um ponto de acumulação da $(a_n)_n$, e itemos uma sub-sequência desta que converge a x. ∎

[2] $=$ M é totalmente limitado.

I.2.2 Completação

Seja (M, d_M) espaço métrico. No espaço

$$\mathcal{C} = \{(a_n)_n : (a_n)_n \text{ é de Cauchy em } M\}$$

definimos a relação $(a_n)_n \equiv (a'_n)_n \Leftrightarrow \lim_n d_M(a_n, a'_n) = 0$. E imediato que $\equiv$ é uma relação de equivalência: denotamos $\tilde{M} = \mathcal{C}/\equiv$.

Observação I.2.3. *Se $(a_n)_n, (b_n)_n \in \mathcal{C}$ então $(d_M(a_n, b_n)) \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy, e por tanto existe $\tilde{d}((a_n)_n, (b_n)_n) = \lim_n d_M(a_n, b_n)$. Com isto se verifica diretamente que $\tilde{d}$ define uma distância em $\tilde{M}$.*

Definimos agora $\iota : (M, d) \to (\tilde{M}, \tilde{d})$ a função

$$\iota(x) = [(x, x, \cdots x, \cdots)_x]$$

e observamos que ι é uma imersão isométrica: $d_M(x, y) = d_{\tilde{M}}(\iota(x).\iota(y))$. Definimos $N = \iota(M)$.

Afirmação. *N é denso em $\tilde{M}$.*

Para ver isto consideramos $\alpha = [(a_n)_n] \in \mathcal{C}, \epsilon > 0$ e tomamos n_ϵ tal que

$$n, m \geq n_\epsilon \Rightarrow d_M(a_n, a_m) < \frac{\epsilon}{2}.$$

Seja $\beta = \iota(a_{n_\epsilon})$; temos

$$\tilde{d}(\alpha, \beta) = \lim_n d(a_n, a_{n_\epsilon}) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon.$$

Afirmação. *$\tilde{M}$ é completo.*

Consideramos $(\alpha_m)_m \subset \tilde{M}$ de Cauchy, $\alpha_m = [(a^n_m)_n]$. Notemos primeiro que se $(\alpha_m)_m \subset N$, então ela converge. Perceba que neste caso $\alpha_m = [(a^n_m = a_m]$ para todo m, e a sequência $(a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots)_m \subset M$ é de Cauchy. Definimos $\alpha = [(a_1, a_2, \cdots, a_m, \cdots)] \in \tilde{M}$, e temos

$$\lim_m d_{\tilde{M}}(\alpha, \alpha_m) = \lim_m \lim_n d_M(a_n, a_m) = 0$$

pois $(a_n)_n \in \mathcal{C}$. Em general, para cada m consideremos $\beta_m \in N$ com $\tilde{M}(\alpha_m, \beta_m) < \frac{1}{m}$ (afirmação anterior.) Então $(\beta_m)_m \subset N$ é de Cauchy e pelo que vimos existe $\alpha = \lim_m \beta_m$. Como $\lim_m \tilde{M}(\alpha_m, \beta_m) = 0$, $(\alpha_m)_m$ converge a α.

Mostramos:

Teorema I.2.19. *Se (M, d_M) existe um espaço métrico, então existe um espaço métrico completo $(\tilde{M}, d_{\tilde{M}})$ e uma imersão isométrica $\iota : (M, d_M) \to (\tilde{M}, d_{\tilde{M}})$ com $\mathtt{cl}(\iota(M)) = \tilde{M}$*

Um espaço métrico satisfazendo a tese do teorema anterior é chamado de *completação do M*.

Exercício I.2.2. *Mostrar que se $(\tilde{M}, d_{\tilde{M}}), (\hat{M}, d_{\hat{M}})$ são duas completações do espaço M, então existe uma isometría entre elas.*

Exemplo I.2.5. Consideremos o caso quando $(M, d_M) = (V, \|)\|$ é um espaço normado. Seguindo os argumentos anteriores podemos ver que $\tilde{V}$ é um espaço normado, e $\iota : V \to \tilde{V}$ é linear (e continua, claro).

I.3 Espaços de Banach

Definição I.3.1. *Um espaço normado $(V, \|\cdot\|)$ é de Banach (um B-espaço) se é completo com a distância induzida pela norma.*

Do theorem I.2.19 e o exemplo depois dele deduzimos:

Corolário I.3.1. *Se $(V, \|\cdot\|)$ espaço normado, então existe um B-espaço $(\tilde{V}, \|\cdot\|_{\tilde{V}})$ e uma imersão isométrica linear $\iota : V \to \tilde{V}$. O espaço $(\tilde{V}, \|\cdot\|_{\tilde{V}})$ é unico modulo isometrías lineares.*

Exemplo I.3.1. Seja V um B-espaço, X um conjunto não vazío e defina

$$\mathscr{B}(X, V) = \{f : X \to V : f \text{ limitada}\}$$

Claramente este é um espaço vetorial definindo a soma e multiplicão por escalares de forma pontual. Em $\mathscr{B}(X, V)$ definimos a norma (verificar que é uma norma!)

$$\|f\|_0 = \sup_x \|fx\|.$$

Afirmamos que $(\mathscr{B}(X, V), \|\cdot\|_0)$ é de Banach. Para ver isto, considere $(f_n)_n \subset \mathscr{B}(X, V)$ de Cauchy. Então para cada $x \in X$, $(f_n(x))_n \subset V$ é de Cauchy, e assim

$$\exists f(x) := \lim_n f(x_n).$$

Podemos definir assim $f : X \to V$; mostraremos agora que f é limitada (e por tanto $f \in \mathscr{B}(X, V)$). Como $|\|f_n\|_0 - \|f_m\|_0| \leq \|f_n - f_m\|_0$, temos que $(\|f_n\|_0)_n \subset \mathbb{R}$ é de Cauchy, e em particular é limitada: $R := \sup_n \|f_n\|_0$. Seja n_1 tal que se $n \geq n_1$ então $\sup_x\{\|f_n(x) - f_{n_1}(x)\|\} < 1$: então para cada x,

$$\|f(x) - f_{n_1}(x)\| = \lim_n \|f_n(x) - f_{n_1}(x)\| \leq 1$$

e

$$\|f(x)\| \leq \|f(x) - f_{n_1}(x)\| + \|f_{n_1}(x)\| \leq 1 + \|f_{n_1}\|_0 \leq 1 + R \Rightarrow \|f\|_0 \leq 1 + R.$$

Afirmamos agora que $\lim_n \|f - f_n\|_0 = 0$; se $x \in X$,

$$\|f(x) - f_n(x)\| = \lim_m \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \limsup_m \|f_m - f_n\|_0 \Rightarrow \|f - f_n\|_0 \leq \limsup_m \|f_m - f_n\|_0$$

e

$$\limsup_n \|f - f_n\|_0 \leq \limsup_{n,m} \|f_m - f_n\|_0 = 0$$

pois $(f_n)_n$ é de Cauchy. Mostramos que toda sequência de Cauchy em $(\mathscr{B}(X, V), \|\cdot\|_0)$ é convergente, e por tanto $(\mathscr{B}(X, V), \|\cdot\|_0)$ é de Banach.

Notação: Escrevemos $f_n \rightrightarrows f$ para indicar convergência na norma $\|\cdot\|_0$ (convergência uniforme).

Suponha agora que $X = M$ onde M é um espaço métrico (ou topológico), e definamos

$$\mathcal{C}(M,V)_b = \mathcal{C}(M,V) \cap \mathscr{B}(M,V).$$

Então $(\mathcal{C}(M,V)_b, \|\cdot\|_{\mathcal{C}^0}) \subset (\mathscr{B}(M,V), \|\cdot\|_0)$ é um sub-espaço. Afirmamos que $\mathcal{C}(M,V)$ é fechado. Seja então $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(M,V)$ que converge uniformemente a uma função $f \in \mathscr{B}(M,V)$, queremos mostrar que f é continua. Fixamos $\epsilon > 0, a \in M$ e tomamos n tal que $\|f - f_n\|_0 < \frac{\epsilon}{3}$. Como f_n é continua em a existe $\delta > 0$ tal que $d_M(a,x) < \delta$ implica $\|f_n x - f_n a\| < \frac{\epsilon}{3}$, e por tanto

$$\|fx - fa\| \le \|fx - f_n x\| + \|f_n x - f_n a\| + \|f_n a - fa\| < \epsilon.$$

Em outras palavras: *limite uniforme de funçoes continuas e limitadas é continua e limitada*. O exemplo da example I.1.3 mostra que convergencia pontual não é sufiente para garantir continuidade.

I.3.1 Extenção de operadores lineares: o teorema BLT e a integral de Riemann

Vamos utilizar agora a proposition I.2.17 para o caso partiular de transformações limitadas entre espaços normados. O seguinte teorema é simples, porém muito útil.

Teorema I.3.2 (BLT). *Seja $(V, \|\cdot\|_V)$ espaço normado, $(W, \|\cdot\|_W)$ B-espaço e $T : V \to W$ transformação linear. Suponha que $V' \subset V$ é um sub-espaço denso tal que $T : V' \to W$ é limitada.*

Então T extende de forma única a uma transformação linear limitada $\tilde{T} : V \to W$, a além disso $\|\tilde{T}\|_{\mathtt{OP}} = \|T\|_{\mathtt{OP}}$.

Demonstração. Pela proposition I.2.17 sabemos que existe uma única extensão continua $\tilde{T}$ da T definida por: $(x_n)_n \subset V', \lim_n x_n = x \Rightarrow \tilde{T}(x) = \lim_n T(x_n)$. Claramente então $\tilde{T}$ é linear e limitada, e como extende á T temos $\|\tilde{T}\|_{\mathtt{OP}} \ge \|T\|_{\mathtt{OP}}$. Por outra parte

$$\|\tilde{T}(x)\|_W = \lim_n \|T(x_n)\|_n \le \limsup_n \|T\|_{\mathtt{OP}} \|x_n\|_V = \|T\|_{\mathtt{OP}} \|x\| \forall x \in V \Rightarrow \|\tilde{T}\|_{\mathtt{OP}} \le \|T\|_{\mathtt{OP}}.$$

■

Consdidere $\mathbb{E}$ espaço de Banach (real ou complexo) e para um intervalo $[a,b] \subset \mathbb{R}$ defina

$$\mathrm{Step}([a,b],\mathbb{E}) := \{\sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]} w_i : w_i \in \mathbb{E}, n \in \mathbb{N}_{>0}, a = t_0 < t_1 < \cdots t_n = b\}$$

Acima $\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]}$ denota a função característica do intervalo $[t_i, t_{i+1}]$. Cada elemento de $\mathrm{Step}([a,b],\mathbb{E})$ é limitado, e $\mathrm{Step}([a,b],\mathbb{E}) \subset \mathscr{B}([a,b],E)$ é um sub-espaço. Como exercício você pode mostrar (usar continuidade uniforme) que

$$\mathcal{C}([a,b],\mathbb{E}) \subset \mathtt{cl}(\mathrm{Step}([a,b],\mathbb{E})).$$

Definimos agora o mapa $\mathrm{Int} : \mathrm{Step}([a,b],\mathbb{E}) \to \mathbb{E}$ com

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]} w_i \Rightarrow \mathrm{Int}(f) := \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) w_i$$

Observe que em princípio poderiamos representar f como duas somas diferentes:

$$f = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]} w_i = \sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{1}_{[s_k,s_{k+1}]} e_k. \tag{I.4}$$

Como primer caso imagine que divimos o intervalo i-ésimo em duas partes, sem mexer nos outros: tomamos $t_i < s < t_{i+1}$ e escrevemos

$$\mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]} w_i = \mathbb{1}_{[t_i,s]} w_i + \mathbb{1}_{[s,t_{i+1}]} w_i$$

Como $t_{i+1} - t_i = (t_{i+1} - s) + (s - t_i)$ neste caso particular vemos que Int tem o mesmo valor nas duas representações (I.4). Por indução vemos que se $\{s_k : k = 0, \cdots m\} \subset \{t_i : i = 0, \cdots n\}$, então $\mathrm{Int}(\sum_{i=0}^{n-1} \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}]} w_i) = \mathrm{Int}(\sum_{k=0}^{m-1} \mathbb{1}_{[s_k,s_{k+1}]} e_k)$. Mais isto implica o caso geral pois dadas duas representações da f, o valor de Int em elas é igual ao valor do refinamento comum $\{s_k : k = 0, \cdots m\} \cup \{t_i : i = 0, \cdots n\}$.

Da mesma observação obtemos que Int é uma transformação linear, e claramente

$$\|\mathrm{Int}(f)\|_E \le \|f\|_0 \Rightarrow \|\mathrm{Int}\|_{\mathtt{OP}} \le 1.$$

Pelo teorema BLT Int extende a um operador linear acotado $\mathrm{Int} : \mathtt{cl}(\mathrm{Step}([a,b],\mathbb{E})) \to \mathbb{E}$. Denotamos

$$\mathrm{Int}(f) = \int f = \int_a^b f(t)dt.$$

Definição I.3.2. *$\int f$ é a integral de Riemann da função f.*

Suponha agora que $U \subset \mathbb{C}$ é um aberto, e $\gamma : [a,b] \to U$ é $\mathcal{C}^1$ por partes, isto é, existe $\gamma'(t)$ para todo $t \in [a,b] \setminus S_\gamma$ onde S_γ é finito, e γ' é continua neste conjunto (em particular tem derivadas laterais em todo ponto de $[a,b] \setminus S_\gamma$). Para tal curva definimos

$$l(\gamma) := \int \|\gamma'(t)\| dt$$

Seja $I_\gamma : \mathcal{C}(U,\mathbb{E}) \to \mathbb{E}$ definido por

$$I_\gamma(f) = \int \gamma'(t) \dot{f}(\gamma(t)) dt$$

Então I_γ é linear e

$$\|I_\gamma\|_{\mathtt{OP}} \le l(\gamma)\|f\|_0.$$

Denotamos $I_\gamma(f) = \int_\gamma f(z)dz$.

Suponha que $t : [c,d] \to [a,b]$ é um homeomorfismo crescente, $\mathcal{C}^1$ por partes e considere a curva $\alpha(s) = \gamma(t(s))$. Fixemos $f \in \mathcal{C}(U,\mathbb{E}) \to \mathbb{E}$ e seja $(\phi_n)_n \in \mathrm{Step}([a,b],\mathbb{E})$ com $\lim_n \|f \circ \gamma - \phi_n\|_0 = 0$. Definimos $\psi_n = \phi_n \circ t : [c,d] \to \mathbb{E}$: cada ϕ_n é da forma

$$\phi_n = \sum_{i=0}^{N_n - 1} \mathbb{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n]} w_i^n$$

e por tanto

$$\psi_n(s) = \sum_{i=0}^{N_n-1} \mathbb{1}_{[t_i^n, t_{i+1}^n]}(t(s)) w_i^n = \sum_{i=0}^{N_n-1} \mathbb{1}_{[s_i^n, s_{i+1}^n]}(s) w_i^n.$$

onde $s_i^n = t^{-1}(t_i^n)$. Concluímos que $(\phi_n)_n \subset \mathrm{Step}([c,d], \mathbb{E})$ converge uniformenente á $f \circ \alpha$. Assim, $\gamma' \cdot \phi_n \rightrightarrows \gamma' \cdot f \circ \gamma$ e $\alpha' \cdot \phi_n \rightrightarrows \alpha' \cdot f \circ \alpha$. Note que

$$\alpha'(s) \cdot \phi_n(s) = \sum_{i=0}^{N_n-1} \alpha'(\theta_i^n) \mathbb{1}_{[s_i^n, s_{i+1}^n]}(s) w_i^n + R_n(t)$$

onde $\theta_i^n \in (s_i^n, s_{i+1}^n)$ é tal que $\alpha'(\theta_i^n) = \frac{\alpha(s_{i+1}^n) - \alpha(s_i^n)}{s_{i+1}^n - s_i^n}$ e

$$R_n(t) = \sum_{i=0}^{N_n-1} (\alpha'(t) - \alpha'(\theta_i^n)) \mathbb{1}_{[s_i^n, s_{i+1}^n]}(s) w_i^n.$$

Não é perdida de generalidade assumir que os pontos $S_{\alpha'}$ onde α' não é continua estão contidos em extremos de intervalos $(s_i^n : i = 1, \cdots, N_n - 1)_n$, com isto podemos garantir que α' , obtemos que

$$\lim_n \max_{i=0,\cdots N_n-1} \|\alpha'(t \cdot) \mathbb{1}_{[s_i^n, s_{i+1}^n]} - \alpha'(\theta_i^n)\| = 0,$$

e por tanto $R_n \rightrightarrows 0$. Como Int é continuo, deduzimos

$$\begin{aligned} I_\alpha(f) = \lim_n \mathrm{Int}(\alpha' \cdot \phi_n) &= \lim_n \sum_{i=0}^{N_n-1} (s_{i+1}^n - s_i^n) \alpha'(\theta_i^n) w_i^n + \mathrm{Int}(R_n) = \lim_n \sum_{i=0}^{N_n-1} (s_{i+1}^n - s_i^n) \alpha'(\theta_i^n) w_i^n \\ &= \lim_n \sum_{i=0}^{N_n-1} (s_{i+1}^n - s_i^n) \frac{dt}{ds}(\theta_i^n) \gamma'(t(\theta_i^n)) w_i^n = \lim_n \sum_{i=0}^{N_n-1} (t_{i+1}^n - t_i^n) \frac{\frac{dt}{ds}(\theta_i^n)}{\frac{dt}{ds}(\zeta_i^n)} \gamma'(t(\theta_i^n)) w_i^n \end{aligned}$$

para algum $\zeta_i^n \in (s_i^n, s_{i+1}^n)$, pelo Teorema de Valor méio para o mapa t. Novamente temos uniformidade, e concluimos que

$$\lim_n \max_{i=0,\cdots N_n-1} \frac{\frac{dt}{ds}(\theta_i^n)}{\frac{dt}{ds}(\zeta_i^n)} = 1,$$

e assim,

$$I_\alpha(f) = I_\gamma(f).$$

Mostramos que $I_\gamma(f)$ so depende do sentido da parametrização de γ: para re-parametrizações no mesmo sentido (t crescente) temos que a integral é a mesma, e se tomamos uma parametrização em sentido oposto (t decrescente) se ve diretamente que $I_\alpha(f) = -I_\gamma(f)$.

I.4 Apêndice: compacidade em espaços topológicos

.

CAPÍTULO II

Funções diferenciáveis em $\mathbb{R}^n$

Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ função definida no aberto U, e seja $p \in U$.

Definição II.0.1. *f é diferenciável em p se existe $T_p \in \mathtt{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que*

$$f(p+v) = f(p) + T_p(v) + o(\|v\|) \quad v \sim 0.$$

Observação II.0.1. *Veja o Apêndice para a notação "o" de Landau.*

Proposição II.0.1. *Se f é diferenciável em p então T_p é a única transformação linear que satisfaz a definição. Alem disso, f é continua em p.*

Demonstração. Seja S_p outra tal transformação. Então

$$T_p(v) - S_p(v) = (f(p+v) - f(p) + o(\|v\|) - (f(p+v) - f(p) + o(\|v\|) = o(v)$$

e em particular $T_p - S_p$ é uma transformação linear que converge a zero quando $v \mapsto 0$, o que implica que é a transformação nula.

Para mostrar que f é continua em p note que $T(v) = o(1)$ quando $v \mapsto 0$ (é dizer, $\lim_{v\to 0}\|Tv\| = 0$), e por tanto

$$f(p+v) = f(p) + T_p(v) + o(\|v\|) = o(1) + o(\|v\|) = o(1) \Rightarrow \lim_{v\to 0} f(p+v) = f(p).$$

■

Definição II.0.2. *No caso de que f é diferenciável em p, chamamos T_p a (aplicação) diferéncial da f em p, e denotamos $D_pf = T_p$.*

Exemplo II.0.1. Cualquer função constante é diferenciável em todo ponto, com diferencial $D_pf \equiv 0$; pois se $f(p) \equiv c$,

$$f(p+v) - f(p) = 0 = D_pf(v) + o(\|v\|).$$

Da mesma forma, se f é uma transformação linear, é diferenciável em todo ponto p com $D_pf = f$.

Podemos escrever $f = (f_1, \cdots, f_m)$ onde $f_i : U \to \mathbb{R}$ é a i-ésima função componente da f.

Lema II.0.2. *f é diferenciável em $p \Leftrightarrow$ cada f_i é diferenciável no ponto p. Neste caso $D_p f = (D_p f_1, \cdots, D_p f_m)$ onde $D_p f_i \in \mathbb{R}^n, \mathbb{R}$ são as funções compomentes do mapa linear $D_p f$.*

Demonstração. $\Rightarrow$ Fixamos i; seja $T_i \in \mathbb{R}^n, \mathbb{R}$ a i-esima componente do mapa $T = D_p f$. Como $f_i(p+v) - f_i(p) - T_i(v)$ é a i-ésima componente do vetor $f(p+v) - f(p) - T(v)$ podemos escrever,

$$|f_i(p+v) - f_i(p) - T_i(v)| \leq \|f(p+v) - f(p) - T(v)\| = o(\|v\|) \Rightarrow$$
$$|f_i(p+v) - f_i(p) - T_i(v)| = o(\|v\|).$$

Concluímos que f_i é diferenciável em p com diferencial T_i.

$\Leftarrow$ Seja T a transformação linear $T = (D_p f_1, \cdots, D_p f_m)$. Calculamos, utilizando para qualquer vetor $w = (w_1, \cdots, w_m)$ temos $\|w\| \leq \sum_{i=1}^m w_i$,

$$\|f(p+v) - f(p) - T(v)\| \leq \sum_{i=1}^m |f_i(p+v) - f_i(p) - T_i(v)| \leq \sum_{i=1}^m o(\|v\|) = o(\|v\|).$$

Por tanto f é diferenciável em p com $D_p f = T$. ∎

Suponhamos que f é diferenciável em p; então para $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ temos

$$\|f(p+tv) - f(p) - tD_p f(v)\| = o(\|tv\|) = o(|t|) \quad t \sim 0.$$

(notar: v é fixo, t aproxima a 0, por tanto $\|tv\|$ aproxima a 0). Concluímos que existe

$$\frac{\partial f}{\partial v}(p) = \partial_v f(p) := \lim_{t=0} \frac{f(p+tv) - f(p)}{t} \tag{II.1}$$

e coincide com $D_p f(v)$.

Definição II.0.3. *$\partial_v f(p)$ é a derivada direcional da f no ponto p na direção v. Quando $v = e_i$ em geral se escreve*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \partial_{x_i} f(p).$$

e se de denomina i-ésima derivada parcial da f em p.

Mostramos acima que se f é diferenciável no ponto p, então f tem derivada direcional em p, para toda direção.

Exercício II.0.1. *Considere a função*

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & (x,y) = (0,0) \\ \dfrac{x^3 y}{x^6 + y^2} & (x,y) \neq (0,0). \end{cases}$$

Mostre que para todo $v \neq (0,0)$ existe $\partial_v f(0,0)$. Mostre também que f não é diferenciável na origem.

Para entender a relação entre diferenciavilidade e derivadas direcionais vamos a fazer algumas considerações. Suponhamos que f é diferenciável em p e consideremos $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$ a matriz asociada á transformação linear D_pf nas bases canônicas de $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$. Então se $v = \sum_{i=1}^n v_ie_i \neq 0$, temos

$$\partial_v f(p) = D_pf(v) = A \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

Em particular para $v = e_j$ obtemos

$$\partial_{x_j} f(p) = A \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

Isto nos diz que $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) = a_{ij}$. Observemos tambem que D_pf_i tem matriz asociada (nas bases escolhidas),

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots a_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_i}{\partial x_1}(p) & \frac{\partial f_i}{\partial x_2}(p) & \cdots \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(p) \end{bmatrix}$$

Definição II.0.4. *Se f é diferenciável em p a matriz*

$$A_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \end{bmatrix}_p$$

é a matriz jacobiana da f no ponto p. Se $m = n$ o determinante desta matriz é o jacobiano da f em p e se denota

$$\mathrm{Jac}_p(f) = \left(\frac{\partial f_1 \cdots \partial f_n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \right)(p).$$

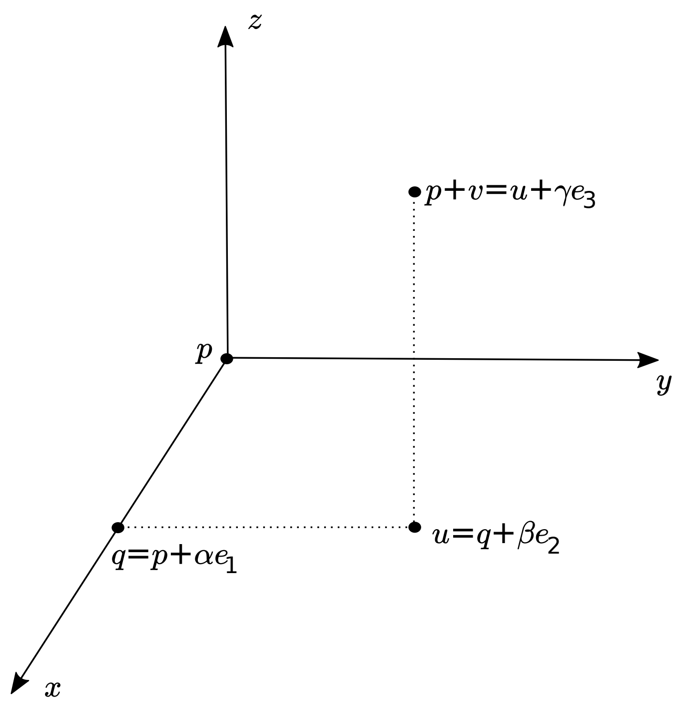
Utilizando as observações acima agora podemos mostrar o seguinte.

Teorema II.0.3. *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ para a qual existem as derivadas parciais $\partial_{x_i} f : U \to \mathbb{R}^m$ e são continuas no ponto p. Então f é diferenciável em p.*

Demonstração. Consideremos $A = (\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p))_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq m}$ e seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ a transformação linear que define, $T(v) = A \cdot v$. Vamos a mostrar que T é a diferencial da f em p (pelo que vimos antes, esta é a única possibilidade se D_pf existe). Pelo lemma II.0.2 é suficente mostrar que cada função componente da f é diferenciável, e por tanto podemos assumir que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (considerando as componentes). Então o que queremos mostrar é que a transformação

$$T(v) = \sum_{j=1}^{n} \partial_{x_i} f(p) \cdot v_j$$

é a diferencial da f no ponto p. Para poder disenhar consideremos o caso $n = 3$ (e deixamos como exercício quase-trivial escrever o caso geral); escrevemos $p = (a, b, c), v = (\alpha, \beta, \gamma)$ e queremos calcular $f(p + v) - f(p)$.



Temos (ver figura)

$$f(p + v) - f(p) = (f(p + v) - f(u)) + (f(u) - f(q)) + (f(q) - f(p))$$

onde cada termo é calculado entre pontos que diferem em uma única coordenada. Por exemplo, $f(q) - f(p) = f(a + \alpha, b, c) - f(a, b, c)$; consideremos a função $g(t) = f(a + t, b, c)$ com $t \in [0, \alpha]$ e notemos que esta função é derivável, com derivada

$$g'(t) = \partial_x f(a + t, b, c).$$

Pelo teorema de valor médio temos $f(q) - f(p) = g'(t_x)(\alpha - 0) = \partial_x f(k_x) \cdot \alpha$ onde $t_x \in (0, \alpha), k_x = p + t_x e_1$. Observemos também que quando $v \mapsto 0, k_x \mapsto p$. Assim,

$$f(p + v) - f(p) = \partial_x f(k_x) \cdot \alpha + \partial_y f(k_y) \cdot \beta + \partial_z f(k_z) \cdot \gamma$$

onde $k_x, k_y, k_z \mapsto p$ quando $v \mapsto 0$. Pela hipotêse de continuidade das derivadas parciais no ponto p temos que $v \mapsto 0$ implica $\partial_x f(k_x) \mapsto \partial_x f(p)$, por tanto se fixamos $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|v\| < \delta$ implica

$$|\partial_x f(k_x) - \partial_x f(p)| < \frac{\epsilon}{3}$$

e similarmente para as outras derivadas. Finalmente podemos escrever assim:

$$\begin{aligned}
&|f(p+v) - f(p) - (\partial_x f(p)\cdot\alpha + \partial_y f(p)\cdot\beta + \partial_z f(p)\cdot\gamma)| \\
&= |(\partial_x f(k_x) - \partial_x f(p))\cdot\alpha + (\partial_y f(k_y) - \partial_y f(p))\cdot\beta + (\partial_z f(k_z) - \partial_z f(p))\cdot\gamma| \\
&\le |\partial_x f(k_x) - \partial_x f(p)|\cdot|\alpha| + |\partial_y f(k_y) - \partial_y f(p)|\cdot|\beta| + |\partial_z f(k_z) - \partial_z f(p)|\cdot|\gamma| \\
&< \frac{\epsilon}{3}(|\alpha| + |\beta| + |\gamma|) \le \frac{\epsilon}{3}3\|v\| = \epsilon\|v\|
\end{aligned}$$

se v é suficentemente pequeno. Isto implica que

$$|f(p+v) - f(p) - (\partial_x f(p)\cdot\alpha + \partial_y f(p)\cdot\beta + \partial_z f(p)\cdot\gamma)| = o(\|v\|)$$

quando $v \sim 0$, e f é diferenciável em p com diferencial dada pela T, o que queriamos mostrar. ■

Proposição II.0.4. *Sejam $f, g : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ funções diferenciáveis no ponto p, e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então $h = f + \lambda g$ é diferenciável em p, e $D_p h = D_p f + \lambda D_p g$.*

A demostração fica como exercício.

Proposição II.0.5 (Regra da cadeia)**.** *Suponha que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, g : V \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ são funçoes diferenciáveis em p e $q = f(p)$, respectivamente. Então $h = g \circ f$ é diferenciável em p, e*

$$D_p h = D_{fp} g \circ D_p f.$$

Se A_p, B_q são as matrizes jacobianas de f e g nos pontos p, q então a matriz jacobiana da h no ponto p é $B_q \cdot A_p$.

Demonstração. Podemos escrever

$$\begin{aligned}
&f(p+v) = f(p) + D_p f(v) + o(\|v\|) \quad v \sim 0 \\
&g(q+w) = g(q) + D_q g(w) + o(\|w\|) \quad w \sim 0
\end{aligned}$$

Fazemos $w = D_p f(v) + o(\|v\|)$: observe que $\lim_{v\to 0}\|D_p f(v) + o(\|v\|)\| = 0$, por tanto obtemos substituindo a primeira na segunda fórmula,

$$\begin{aligned}
&g(f(p+v)) = g(f(p) + D_p f(v) + o(\|v\|)) \\
&= g(q) + D_q g \circ D_p f(v) + D_q g(o(\|v\|)) + o(\|D_p f(v) + o(\|v\|\|) \quad v \sim 0
\end{aligned}$$

Queda enteder os termos de erro:

- $D_q g(o(\|v\|))$: como $\|D_q g(u)\| \le \|D_q g\|_{\text{OP}}\|u\|$ temos $D_q g(o(\|v\|)) = o(\|v\|)$
- $o(\|D_p f(v) + o(\|v\|\|)$: vamos utilizar a seguinte observação. Suponha que $\phi(x) = o(\psi(x))$ quando $x \sim 0$, e suponha que $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ é limitada perto do $x = 0$. Então $\phi(x) = o(\varphi(x))$ (exercício de uma linha). Como $\frac{\|D_p f(v) + o(\|v\|)\|}{\|v\|} \le \|D_p f\|_{\text{OP}} + O(1)$, é limitada perto de $v = 0$ e temos $o(\|D_p f(v) + o(\|v\|\|) = o(\|v\|)$

Concluimos que

$$h(p+v) = g(f(p+v)) = h(p) + D_q g \circ D_p f(v) + o(\|v\|) \quad v \sim 0.$$

a primeira parte queda demostrada. A segunda é consequência direta da primeira. ■

Mapas Multilineares

Consideramos $V_1, \cdots, V_k, W$ espaços vetoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Um mapa $M : V_1 \times \cdots V_k \to W$ é dito multilinear se é linear fixando todas menos uma coordenada, culaquera seja esta coordenada. Isto é,

$$\forall 1 \le i, \forall \le M(v_1, \cdots, v_i + \lambda v_i', \cdots, v_k) = M(v_1, \cdots, v_i, \cdots, v_k) + \lambda M(v_1, \cdots, v_i', \cdots, v_k).$$

Denotamos $\mathtt{Mult}(V_1 \times \cdots, V_k, W)$ o conjunto de aplicações multilineares de $V_1 \times \cdots, V_k$ em W. Clarameente $\mathtt{Mult}(V_1 \times \cdots, V_k, W)$ é um $\mathbb{K}$ espaço vetorial. Para entender melhor a estrutura de este conjunto, considermos primeiro as aplicações bilineares ($k = 2$):

$$\mathtt{Bil}(V_1 \times V_1, W) = \{B : V_1 \times V_2 \to W : B \text{ linear em cada coordenada}\}.$$

Lema II.0.6. *Os espaços vetoriais* $\mathtt{Bil}(V)(V_1 \times V_1, W)$ *e* $\mathtt{Lin}(V_1, \mathtt{Lin}(V_2, W))$ *são isomorfos.*

Demonstração. Seja $\Phi : \mathtt{Bil}(V)(V_1 \times V_1, W) \to \mathtt{Lin}(V_1, \mathtt{Lin}(V_2, W))$, $\Phi(B) : V_1 \to \mathtt{Lin}(V_2, W)$ definida por $\Phi(B)(v_1) = B(v_1, \cdot)$. Claramente Φ é linear, e $\Phi(B) = 0 \Leftarrow B(v_1, \cdot) = 0 \forall v_1 \in V_1 \Leftrightarrow B(v_1, v_2) = 0 \forall v_1 \in V_1, v_2 \in V_2 \Leftrightarrow B \equiv 0$. Por tanto, Φ é injetora. É também sobrejetora: dada $T : V_1 \to \mathtt{Lin}(V_2, W)$ linear defina $B_T(v_1, v_2) = T(v_1)(v_2)$. Temos $B_T \in \mathtt{Bil}(V_1 \times V_2, W)$ e $\Phi(B_T) = T$.

Concluimos que Φ é um isomorfismo linear, o que termina a prova. ∎

Por indução obtemos:

Corolário II.0.7. *Os espaços vetoriais* $\mathtt{Mult}(V_1 \times \cdots \times V_k, W)$ *e* $\mathtt{Lin}(V_1, \mathtt{Mult}(V_2 \times \cdots \times V_k, W))$ *são isomorfos.*

Pelo isomorfismo anterior temos uma forma natural de definir uma norma em $\mathtt{Bil}(V)(V_1 \times V_1, W)$: dada $B \in \mathtt{Bil}(V)(V_1 \times V_1, W)$ definimos

$$\|B\|_{\mathtt{OP}} := \|\Phi(B)\|_{\mathtt{OP}} = \sup_{\substack{\|v_1\|_{V_1}=1 \\ \|v_2\|_{V_2}=1}} \|B(v_1, v_2)\|_W$$

Claramente $\|B\|_{\mathtt{OP}} < \infty$, e se $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ temos

$$\|B(v_1, v_2)\|_2 \le \|B\|_{\mathtt{OP}} \|v_1\|_{V_1} \|v_2\|_{V_2}.$$

Similar para o caso de $\mathtt{Mult}(V_1 \times \cdots \times V_k, W)$.

Produto tensorial Em vez de pensar em mapas bilineares de $V_1 \times V_2$ em W podemos pensar em mapas lineares desde outro espaço.

Teorema II.0.8. *Existe um espaço vetorial* $V_1 \otimes V_2$ *e uma aplicação linear* $\Gamma : V_1 \times V_2 \to V_1 \otimes V_2$ *tal que: dado qualquer espaço vetorial* W *e cualquer* $B \in \mathtt{Bil}(V_1 \times V_2, W)$ *existe uma única transformação linear* $T_B : V_1 \otimes V_2 \to W$ *tal que*

$$\begin{tikzcd} V_1 \times V_2 \arrow[r, "B"] \arrow[d, "\Gamma"'] & W \\ V_1 \otimes V_2 \arrow[ur, "T_B"'] & \end{tikzcd}$$

II.0.1 A regra de Leibnitz

Considere $B \in \texttt{Bil}(\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}, \mathbb{R}^l)$ e sejam $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_1}, g : U \to \mathbb{R}^{m_2}$ funções diferenciáveis em $p \in U$.

Proposição II.0.9 (Regra de Leibnitz). *A função $h = B \circ (f, g)$ é diferenciável em p, e temos*

$$D_p h(v) = B(D_p f(v), g(p)) + B(f(p), D_p g(v)).$$

Demonstração. Calculamos,

$$\begin{aligned}h(p+v) &= B(f(p+v), g(p+v)) = B(f(p) + D_p f(v) + o(\|v\|), g(p) + D_p g(v) + o(\|v\|))\\ &B(f(p), D_p g(v)) + B(D_p f(v), g(p)) + B(f(p), g(p)) + B(o(\|v\|), \cdots) + B(\cdots, o(\|v\|)).\end{aligned}$$

Observe que $\|B(o(\|v\|), \cdots)\| \leq \|B\|_{\texttt{OP}} o(\|v\|)\|\cdots\|$ onde termo $\|\cdots\|$ é limitado, e por tanto $B(o(\|v\|), \cdots) = o(\|v\|)$. Similarmente para o outro termo de erro. Por fim,

$$h(p+v) = h(p) + B(D_p f(v), g(p)) + B(f(p), g(p)) + o(\|v\|)$$

o que conclui a demostração. ■

Por indução você pode verificar o seguinte.

Corolário II.0.10. *Sejam $f_i : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m_i}, i = 1, \cdots k$ diferenciáveis no ponto $p \in U$, e seja $M \in \texttt{Mult}(\mathbb{R}^{m_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{m_k}, \mathbb{R}^k)$. Então a função $H = M \circ (f_1, \cdots, f_k)$ é diferenciável em p, e*

$$D_p H(v) = \sum_{i=1}^{k} M(f_1(p), \cdots, \underbrace{D_p f_i(v)}_{i}, \cdots f_k(p)).$$

Exemplo II.0.2. Considere $H = \det : \texttt{Mat}_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \times \cdots \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ o determinante, onde pensamos cada matriz cuadrada A de dimensão n da forma $A = (A^1, \cdots, A^n)$ sendo $A^i \in \mathbb{R}^n$ a i-ésima coluna do A. A função H é multilinear, por tanto é diferenciável em todo ponto do seu domínio, e

$$B, A \in \texttt{Mat}_n(\mathbb{R}),\ D_A H(B) = \sum_{i=1}^{n} \det(A^1, \cdots, B^i, \cdots A^n).$$

II.0.2 O teorema do valor médio

Considere uma função clase $\mathcal{C}^1$, $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Então temos uma função $Df : U \to \mathbb{E} = \texttt{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ continua, e por tanto podemos integrar esta função em curvas γ contidas dentro de U. Isto é, se $\gamma : [a, b] \to U$ curva continua, a função $H : [a, b] \to \mathbb{E}$ dada por $H(t) = D_{\gamma(t)} f$ é continua, e por tanto podemos aplicar nossa teoria de integrais para funções a valores vetoriais (section I.3.1). Alternativamente, se representamos $H(t)$ em forma matricial, temos $H(t) \sim (a_{i,j}(t))_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ e podemos integrar as funções continuas $a_{i,j} : [a, b] \to \mathbb{R}$. Em todo caso, faz sentido

$$\int_0^1 H(t) dt \in \mathbb{E}.$$

Teorema II.0.11 (TVM). *Nas hipóteses anteriores, suponha que o segmento $[p,q] \subset U$. Então*

$$f(q) - f(p) = T(q-p) \quad T = \int_0^1 D_{tp+(1-t)q} f \, dt.$$

Em particular,

$$\|f(q) - f(p)\| \leq M_{p,q} \cdot \|q-p\|$$

onde $M_{p,q} = \max_{r \in [p,q]} \|D_z f\|_{\mathtt{OP}}$.

Demonstração. Seja $\gamma(t) = tp + (1-t)q, t \in [0,1]$. Então temos

$$\begin{aligned} & f(q) - f(p) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = \big(f^1(\gamma(1)) - f^1(\gamma(0)), \cdots, f^m(\gamma(1)) - f^m(\gamma(0))\big) \\ & = \left(\int_0^1 \frac{d}{dt} f^1 \circ \gamma(t) dt, \cdots, \int_0^1 \frac{d}{dt} f^m \circ \gamma(t) dt\right) = \\ & = \left(\int_0^1 D_{\gamma(t)} f^1 (q_1 - p_1), \cdots, \int_0^1 D_{\gamma(t)} f^1 (q_1 - p_1)\right) = T(q-p). \end{aligned}$$

A segunda parte é consequência da primeira, utilizando que $\|\int_0^1 H(t)dt\|_{\mathtt{OP}} \leq \max_{t \in [0,1]} \|H(t)\|_{\mathtt{OP}}$. ∎

Temos também o recíproco.

Teorema II.0.12 (Recíproco do TVM). *Suponha que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é dada, e existe $T : U \times U \to \mathtt{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ continua tal que*

$$f(q) - f(p) = T(p,q)(q-p).$$

Então f é $\mathcal{C}^1$ em U, com $D_p f = T(p,p)$.

Demonstração. Podemos escrever

$$f(p+v) - f(p) = T(p, p+v)v = T(p,p)v + (T(p,p+v) - T(p,p))v = T(p,p)v + o(\|v\|)$$

pois $\lim_{v \to 0} T(p, p+v) - T(p,p) = 0$. Isto mostra que f é diferenciável em p com $D_p f = T(p,p)$; como T é continua, f é $\mathcal{C}^1$. ∎

Observemos a seguinte consequência

Corolário II.0.13. *Suponha que U é (aberto e) conexo, e $Df \equiv 0$. Então f é constante em U.*

Demonstração. Fixamos $p \in U$: então para qualqer outro $q \in U$ existe um caminho poligonal contido em U que começa em p e termina em q. Aplicando o TVM em cada um dos segmentos de este caminho, deduzimos que $f(q) = f(p)$. ∎

II.1 Apêndice: notação “o” de Landau

Sejam $\phi, \psi : I_a = (a-\delta, a+\delta) \to \mathbb{R}$ funções definidas numa vizinhança do a. Escreveremos

$$\phi(x) = o(\psi(x)), \quad x \sim a \Leftrightarrow \lim_{x\to a} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

Se $a = 0$ em geral omitimos a refêrencia ao ponto a: notar que

$$\phi(x) = o(\psi(x)), \quad x \sim a \Leftrightarrow \phi(x-a) = o(\psi(x-a)) \quad x - a \sim 0.$$

Dizer que $\phi(x) = o(\psi(x))$ indica que $\phi(x)$ converge (quando $x \mapsto 0$) á zero mais rapidamente do que o mapa ψ.

Exemplo II.1.1. Pelo teorema de Taylor (com resto de Lagrange) podemos escrever

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cos(\theta_x)\frac{x^6}{6!}$$

para algum $\theta_x \in (-|x|, |x|)$. Como $\lim_{x\to 0} \frac{-\cos(\theta_x)\frac{x^6}{6!}}{x^5} = 0$ podemos escrever

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5).$$

Esta notação é muito útil pois nos permite saber a manitude do erro, sem nos preocupar pela sua forma específica. Para simplificar podemos utilizar as seguintes propriedades.

1. $\lambda \neq 0, \phi(x) = o(\lambda\psi(x)) \Rightarrow \phi(x) = o(\psi(x))$.

   Demonstração. $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{\lambda\psi(x)} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{\psi(x)} = 0.$ ∎

   Podemos então escrever $o(\lambda\psi(x)) = o(\psi(x))$. As outras propriedades se demostram de forma similar.

2. $o(\psi(x)) + o(\psi(x)) = o(\psi(x))$.
3. Se $\phi(x) = o(\psi(x)), \psi(x) = o(\varphi(x))$ então $\phi(x) = o(\varphi(x))$.
   Em particular para $n > m$ temos $o(x^n) = o(x^m)$
4. Se $\phi(x) = o(\psi(x))$ e $\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ é limitada numa vizinhança de $x = 0$, então $\phi(x) = o(\varphi(x))$.

pdcarrasco@mat.ufmg.br

CAPÍTULO III

Os teoremas da função inversa e função implícita

Começamos com a seguintes definições.

Definição III.0.1. *Considere $U, V \subset \mathbb{R}^n$ abertos e seja $f : U \to V$ clase $\mathcal{C}^r$ com $r \geq 1$*

1. *f é um difeomorfismo clase $\mathcal{C}^r$ se f é invertível e $f^{-1} : V \to U$ é de clase $\mathcal{C}^r$.*

2. *f é um difeomorfismo local (clase $\mathcal{C}^r$) perto de $p \in U$ se existe $A \subset U$ vizinhança aberta de p e $B \subset V$ vizinhança aberta de $f(p)$ tais que $f| : A \to B$ é um difeomorfismo (clase $\mathcal{C}^r$).*

O teorema mais importante de esta parte é o seguinte.

Teorema III.0.1 (Teorema da função inversa)**.** *Suponha que $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um mapa clase $\mathcal{C}^r$ e $p \in U$ é tal que $D_p f \in \mathtt{Lin}(\mathbb{R}^n)$ é um isomorfismo linear. Então f é un difeomorfismo local em p clase $\mathcal{C}^r$.*

Denotemos M a matriz asociada a $D_p f$ na base canônica: podemos escrever para x perto de p

$$f(x) = M \cdot x + \alpha(x)$$

onde α é uma função $\mathcal{C}^r$ (note que $\alpha(x) = f(x) - M \cdot x$), com $\alpha(p) = 0, D_p\alpha = O_n$ (a transformação linear nula). Considere

$$m := \inf\{\|M \cdot x\| : \|x\| = 1\}$$

e perceba que como M é um isomorfismo, $m > 0$. Pode arguemtar assim[1] M é continua, $B = \{x : \|x\| = 1\}$ é compacto, e por existe um $x \in B$ com $\|M \cdot x\| = m$; se $m = 0$ então $x \in \ker(M) = \{0\}$ o que contradiz o fato de $\|x\| = 1$.

Como a diferencial de α é continua e se anula em p, existe uma vizinhança $A \subset U$ do p tal que

$$\forall x \in A, \|D_x\alpha\|_{\mathtt{OP}} \leq \frac{m}{2}.$$

[1] De fato, não é necessário utilizar a compacidade de B: mostre diretamente que $m = \frac{1}{\|M^{-1}\|_{\mathtt{OP}}}$

Isto implica, pelo teorema do valor médio que a constante de Lipschitz de α em A é $\leq \frac{m}{2}$. Agora, para $x, y \in A$ temos

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\| &= \|M\cdot(x-y)+(\alpha(x)-\alpha(y))\| \geq \|M\cdot(x-y)\|-\|\alpha(x)-\alpha(y)\| \\ &\geq (m-\sup_{z\in A}\operatorname{Lip}(\alpha))\|x-y\| \\ &\geq \frac{m}{2}\|x-y\|.\end{aligned}$$

Deduzimos duas coisas:

- $f|A$ injetora.
- $f^{-1}|f(A)$ é Lipschitz: se $z=f(x), w=f(y)$

  $$\|f^{-1}(z)-f^{-1}(w)\| = \|x-y\| \leq \frac{2}{m}\|fx-fy\| = \frac{2}{m}\|z-w\|$$

  e por tanto

  $$\operatorname{Lip}(f^{-1}) \leq \frac{2}{m}. \tag{III.1}$$

Vamos mostrar agora que $f(A)$ é aberto. Lembremos o seguinte teorema abstracto de espaços métricos.

Teorema III.0.2 (Banach). *Seja X espaço métrico completo, e seja $F: M\to M$ uma contração, isto é, um mapa Lipschitz com $\operatorname{Lip}(F)=\lambda<1$.*

Então existe um único ponto $x_0\in X$ tal que $F(x_0)=x_0$. Além disso, para todo $x\in X$ temos

$$F^n(x) = \underbrace{F\circ\cdots F}_{n \text{ vezes}}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0.$$

Lema III.0.3. *$f(A)$ é aberto.*

Demonstração. Seja $y_0\in f(A), y_0=f(x_0)=M\cdot x_0+\alpha(x_0)$. Queremos mostrar que se $\epsilon>0$ é suficentemente pequeno, então $D(y_0,\epsilon)\subset f(A)$, é dizer, se $\|y-y_0\|<\epsilon \Rightarrow \exists x\in A$ com $f(x)=y$. Fixamos um tal y: a equação $f(x)=y$ é equivalente a $M^{-1}(y-r(x))=x$, assim definimos $h=h_y:\overline{D}(x_0,2\epsilon)\to\mathbb{R}^n$ pela fórmula

$$h(x)=M^{-1}(y-r(x)).$$

Queremos encontrar x com $h(x)=x$, e para isto vamos utilizar o teorema de Banach. Acima, escolhimos ϵ de forma tal que $\overline{D}(x_0,2\epsilon)\subset A$.

1. h é uma contração:

   $$\|h(x)-h(x')\| = \|M^{-1}(\alpha(x')-\alpha(x))\| \leq \|M^{-1}\|\operatorname{Lip}(\alpha)\|x-x'\| \leq \|M^{-1}\|\frac{m}{2}\|x-x'\|.$$

   Agora se $\|x\|=1$ temos $1=\|M(M^{-1}x)\|\geq m\|M^{-1}x\|$, e pelo tanto $\|M^{-1}\|\leq\frac{1}{m}$; na equação acima concluimos $\|h(x)-h(x')\|\leq\frac{1}{2}\|x-x'\|$ para todo $x,x'\in A$ e h contração.

2. h envía $\overline{D}(x_0, 2\epsilon)$ em se mesmo: seja $x/\|x - x_0\| \leq \epsilon$, então como $h(x_0) = y_0$,

$$\|h(x) - x_0\| \leq \|h(x) - h(x_0)\| + \|y_0\| \leq \frac{1}{2}\|x - x_0\| + \epsilon \leq 2\epsilon.$$

Pelo teorema de Banach, existe um único $x \in \overline{D}(x_0, 2\epsilon)$ com $h(x) = x$, o que queríamos demostrar. ■

Definimos $B = f(A)$: já mostramos que B é uma vizinhança aberta de $f(p)$, e também sabemos que f^{-1} é Lipschitz. Vamos agora mostrar que f^{-1} é clase $\mathcal{C}^1$ e depois por indução mostraremos que é clase $\mathcal{C}^r$.

Se $f(p) + w = f(p + h) \in B$ podemos escrever

$$f^{-1}(f(p) + w) - f^{-1}(f(p)) = h$$

e

$$f(p + h) = M \cdot (p + h) + \alpha(p + h) = f(p) + M \cdot h + (\alpha(p + h) - \alpha(p))$$

por tanto

$$w = M \cdot h + (\alpha(p + h) - \alpha(p)) \Rightarrow f^{-1}(f(p) + w) - f^{-1}(f(p)) = M^{-1}w - (\alpha(p + h) - \alpha(p))$$

Como $D_0\alpha = O$,

$$\alpha(p + h) - \alpha(p) = o(\|h\|) \Rightarrow \alpha(p + h) - \alpha(p) = o(\|w\|)$$

e

$$f^{-1}(f(p) + w) - f^{-1}(f(p)) = M^{-1}w + o(\|w\|)$$

o que mostra que f^{-1} é diferenciável p com derivada dada pela transformação inducida M^{-1}, o que no final nos diz que $D_{fp}f^{-1} = (D_p f)^{-1}$.

Agora p é um ponto qualquer do A, assim que deduzimos que f^{-1} é diferenciável em B. Mas $p \mapsto (D_p f)^{-1}$ é continua, por tanto f^{-1} é $\mathcal{C}^1$.

Para finalizar a demostração do teorema da função inversa, mostremos agora que f^{-1} é $\mathcal{C}^r$. Considere o mapa $F : A \times \mathbb{R}^n \to B \times \mathbb{R}^n$ dado por

$$F(x, v) = (fx, D_x f(v))$$

Este mapa é $\mathcal{C}^{r-1}$. Suponemos por indução que mostramos que inversas de difeomorfismos locais são $\mathcal{C}^{r-1}$, e calculamos a matriz associada a F em um ponto (p, v): temos

$$\begin{bmatrix} D_p f & O \\ * & D_p f \end{bmatrix}$$

que é uma matriz não singular, assim pela hipôtese de indução temos que F^{-1} é um difeomorfismo $\mathcal{C}^{r-1}$. Mas $F^{-1}(y, w) = (f^{-1}y, D_y f^{-1}w)$, o que nos diz que $y \mapsto D_y f^{-1}$ é $\mathcal{C}^{r-1}$, e f^{-1} é clase $\mathcal{C}^r$. A prova do teorema está completa.

III.1 O teorema da função implícita

Consideramos uma função $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, onde escreveremos as coordenadas de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ coomo (x, y), isto é, $x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n, y = (y_1, \cdots, y_m)$. A pergunta que queremos responder é a seguinte.

Pergunta. *Suponha que $F(x_0, y_0) = 0$. A equação $F(x, y) = 0$ define implícitamente y em função de x perto de (x_0, y_0)?*

Isto é, existem vizinhanças abertas $x_0 \in A, y_0 \in B$ e $\phi : A \to B$ tal que $F(x, \phi(x)) = 0$? Alternativamente, a equação $F(x, y) = 0$ permite a solução como um gráfico perto do ponto considerado.

Exemplo III.1.1. Considere $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. Então dado (x_0, y_0) com $F(x_0, y_0) = 0$ temos

$$\begin{cases} y_0 > 0 & \phi : (-1, 1) \to (0, 1), \phi(x) = \sqrt{1 - x^2} \\ y_0 < 0 & \phi : (-1, 1) \to (-1, 0), \phi(x) = -\sqrt{1 - x^2} \\ y_0 = 0 & \text{não pode se escrever a solução como um gráfico perto do } (x_0, y_0). \end{cases}$$

Imaginemos que existe uma tal solução $\phi : A \to B$ com $F(x, \phi(x)) = 0$, e ainda mais, suponhamos que ϕ é diferenciável. Então pela regra da cadeia temos

$$0 = \partial_x F(x, \phi(x)) + \partial_y F(x, \phi(x)) \circ \partial_x \phi(x)$$

onde $\partial_x F$ refere-se á derivada de F respecto as variáveis x a similarmente nos outros casos,

$$\begin{aligned} \partial_x F(x, \phi(x)) &\in \mathtt{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ \partial_y F(x, \phi(x)) &\in \mathtt{Lin}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m) \\ \partial_x \phi(x) &\in \mathtt{Lin}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m). \end{aligned}$$

Assim, se $\partial_y F$ é não singular, temos

$$\partial_x \phi(x) = (\partial_y F(x, \phi(x)))^{-1} \circ \partial_x F(x, \phi(x)). \tag{III.2}$$

Teorema III.1.1 (Teorema da função implícita)**.** *Suponha que $F : U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é clase $\mathcal{C}^r, r \geq 1$ e seja $p_0 = (x_0, y_0)$ tal que $\det \partial_y F(p_0) \neq 0$. Então existem vizinhanças $x_0 \in A, y_0 \in B$ e $\phi : A \to B$ de clase $\mathcal{C}^r$ tal que $F(x, \phi(x)) = 0$ para todo $x \in A$.*

Demonstração. A demostração é uma aplicação direta do teorema da função inversa. Defina $G : U \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ por

$$G(x, y) = (x, F(x, y)).$$

Temos que G é classe $\mathcal{C}^r$ e sua differencial em p_0 pode se escrever em forma de bloque como

$$D_{p_0} G = \begin{bmatrix} I & O \\ \partial_x F & \partial_y F \end{bmatrix}_{p_0}$$

que é não singular, e por tanto podemos encontrar $A \times B$ vizinhança aberta de p_0 de forma tal que $G : A \times B \to G(A \times B)$ é um difeomorfismo clase $\mathcal{C}^r$. Note que G^{-1} tem a forma

$$G^{-1}(x, y) = (x, g(x, y))$$

para certa g clase $\mathcal{C}^r$. Definimos $\phi : A \to B$ com $\phi(x) = g(x, 0)$ e observamos que

$$(x, 0) = G(x, g(x, 0)) = (x, F(x, \phi(x))) \Rightarrow F(x, \phi(x)) = 0.$$

■

III.2 Forma local as imersões e submersões: o teorema do posto.

Teorema III.2.1 (Forma local das imersões)**.** *Considere um mapa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^r$ com $0 \in U, f(0) = 0$. Suponha que $D_0 f$ é injetora (f imersão em 0). Então existe $\psi : V \subset \mathbb{R}^m \to V' \subset \mathbb{R}^m$ diffeomorfismo, $\psi(0) = 0$ e tal que*

$$\psi \circ f(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_n, 0, \cdots, 0)$$

onde estiver definido (é dizer, em $f^{-1}(V)$).

Demonstração. Claramente $m \geq n$; defina $g : U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$, $g(x, y) = f(x) + (0, y)$. Observe que $D_0 g = \left[\begin{smallmatrix} D_0 f & I_{m-n} \end{smallmatrix}\right]$ e por tanto é invertível em 0; pelo teorema de função inversa, g é um difeomorfismo local numa vizinhança do 0. Seja $\psi = g^{-1}$ e observe,

$$\psi(f(x)) = \psi(g(x, 0) = (x, 0)$$

como queriamos mostrar. ■

Observação III.2.1. *O fato de $f(0) = 0$ no teorema anterior não é importante. Suponha que dada tal f temos que f é uma imersão em $p \in U$. Sejam $T_p : \mathbb{R}^n \circlearrowleft, T_{-f(p)} : \mathbb{R}^m \circlearrowleft$ as traslações $T_p(x) = x + p, T_{-fp}(z) = z - f(p)$. Defina $\tilde{f} : U - p \to \mathbb{R}^m$ com $\tilde{f} = T_{-f(p)} \circ f \circ T_p$.*

Então $\tilde{f}$ tem a mesma clase de diferenciabilidade que f, $\tilde{f}(0) = 0$ e $D_0 \tilde{f} = T_{-f(p)} \circ D_p f \circ T_p$. Podemos então aplicar o teorema a $\tilde{f}$ e encontrar um difeo local perto de $0 \in \mathbb{R}^m$ tal que $\tilde{\psi} \circ \tilde{f}(x) = (\tilde{\psi} \circ T_{-fp}) \circ f \circ T_p(x) = (x, 0)$. Se denotamos $\psi = \tilde{\psi} \circ T_{-fp}$, então ψ é um difeomorfismo de uma vizinhança de $f(p)$ em 0, e

$$\psi \circ f(x + p) = (x, 0) \quad x \sim 0.$$

Considerações similares serão utilzadas nos outros casos (i.e. fazer $p = 0, f(p) = 0$), ja que modulo uma mudança de coordenadas é exatamente o mesmo.

Teorema III.2.2 (Forma local das submersões)**.** *Considere um mapa $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ de clase $\mathcal{C}^r$ com $0 \in U, f(0) = 0$. Suponha que $D_0 f$ é sobrejetora (f imersão em 0). Então existe $\phi : A \subset \mathbb{R}^n \to A' \subset \mathbb{R}^n$ diffeomorfismo, $\phi(0) = 0$ e tal que*

$$f \circ \phi(x_1, \cdots, x_n) = (x_1, \cdots, x_m)$$

onde estiver definido.

Demonstração. Defina $g : U \to \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ por $g(x) = (f(x), x_{m+1}, \cdots x_n)$. Novamente $g(0) = 0$, e g é um difemorfismo numa vizinhança do 0 (verifique!). Definimos $\psi = g^{-1}$ e verificamos

$$x = g \circ \phi(x) = (f(\phi(x)), *, \cdots, *) \Rightarrow f(\phi(x)) = (x_1, \cdots, x_m).$$

∎

Teorema III.2.3 (Teorema do posto)**.** *Seja* $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *tal que* $\mathrm{rk}(D_p f) = k$ *para todo* $p \in U$*. Então...*

Demonstração. Sem pérdida de generalidade vamos supor que $f(0) = 0$ (aplicando traslações). Como o posto de $D_0 f = k$, pelo teorema da dimensão da algebra linear temos

$$n = \dim(\text{domínio da } D_0 f) = \dim\ker(D_0 f) + k \Rightarrow \dim\ker(D_0 f) = n - k.$$

Escrevemos $(x, y) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ (isto é, $x = (x_1, \cdots, x_k)$, e similar para y). Consideramos um isomorfismo linear $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que envia $0 \times \mathbb{R}^{n-k}$ em $\ker(D_0 f)$: para isto fixamos $\mathcal{B} = \{v_1, \cdots, v_{n-k}\}$ base de $\ker(D_0 f)$, $\mathcal{B}' = \{v_{n-k+1}, \cdots, v_n\}$ base de $\ker(D_0 f)^\perp$ e definimos S linear e tal que $S(e_i) = v_i, 1 \cdots i \cdots n$, onde e_i denota o i-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Observamos que $\ker(D_0(f \circ S)) = 0 \times \mathbb{R}^{n-k}$, e como $f \sim_{\mathcal{C}^r} f \circ S$ não é pérdida de generalide trocar f por $f \circ S$. Assim, suponemos $\ker(D_0 f) = 0 \times \mathbb{R}^{n-k}$.

Da mesma forma, consideramos um isomorfismo linear $\tilde{S} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ que envia $\mathrm{Im}(D_0 f)$ em $\mathbb{R}^k \times 0 \subset \mathbb{R}^m$: temos $\tilde{S} \circ f \sim_{\mathcal{C}^r} f$, e $\mathrm{Im}(D_0(\tilde{S} \circ f)) = \mathbb{R}^k \times 0 \subset \mathbb{R}^m$. Novamente trocamos f por $\tilde{S} \circ f$.

Podemos escrever $f(x, y) = (f_X(x, y), f_Y(x, y)) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$, onde $f_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, $f_Y : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m-k}$; como $D_0 f = (D_0 f_x, D_0 f_Y)$ tem imagem $\mathbb{R}^k \times 0$ deduzimos que $D_0 f_Y \equiv 0$, e como $D_0 f$ tem posto k, necessáriamente $D_0 f_X$ é sobrejetora. Pela forma local das submersões podeos encontrar um difeomorfismo $\mathcal{C}^r$ de $\mathbb{R}^n$ tal que

$$f_X \circ \phi(x, y) = x,$$

e por tanto $f \circ \phi(x, y) = (x, g(x, y))$ para certa função $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m-k}$. Trocando f por $f \circ \phi(x, y)$ assumimos que f é da forma anterior.

Agora observamos que

$$D_p f = \begin{pmatrix} I_{k \times k} & O \\ * & \frac{\partial g}{\partial y}(p) \end{pmatrix}$$

tem posto k. Necessáriamente então $\frac{\partial g}{\partial y}(p)$ é a matrix nula, e $g(x, y) = g(x)$, $f(x, y) = (x, g(x))$. Considere $\psi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k} \to \mathbb{R}^m$, $\psi(x, z) = (x, z - g(x))$ e observe que ψ é um difeomorfismo (sua inversa é $(x, z) \to (x, z + g(x))$); temos $\psi \circ f(x, y) = \psi(x, g(x)) = (x, 0)$. ∎