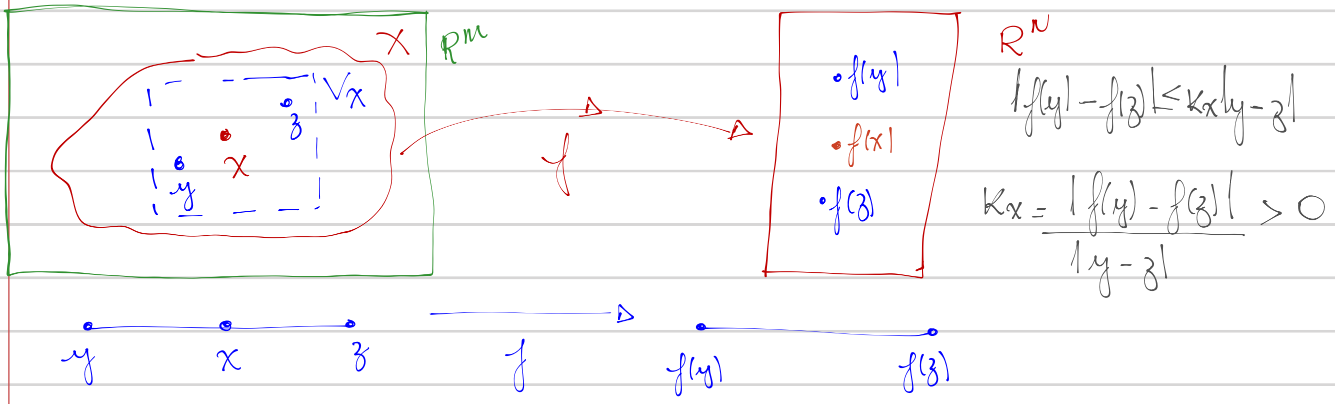
Se $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula e $f: X \to \mathbb{R}^m$ é localmente lipschitz, então $f(X)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.

Uma aplicação $f: X \to \mathbb{R}^n$, definida num conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$, diz-se localmente lipschitziana quando, para todo $x \in X$, existem $V_x \subset \mathbb{R}^m$ aberto contento x e $K_x > 0$ tais que $y, z \in V_x \to |f(y) - f(z)| \leq K_x \cdot |y - z|$. Em outras palavras, existe uma cobertura aberta $X \subset \bigcup V_x$ tal que cada restrição $f|(V_x \cup X)$ é lipschitziana.

$f: X \subset \mathbb{R}^m \to R^n$, $\forall x \in X\ \exists V_x \subset \mathbb{R}^m$ aberto contento x, $K_x > 0$



Demonstração:

Vamos considerar primeiro o caso em que f é lipschitziana, então $|f(x) - f(y)| \leq K \cdot |x - y|$ com $K > 0$ constante e $x, y \in X$ quaisquer. Tomemos em $\mathbb{R}^m$ a norma do máximo, dado $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura enumerável $X \subset C_i$, onde cada C_i é um cubo de aresta a_i e:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^m < \frac{\varepsilon}{K^m}$$

Para cada $i \in \mathbb{N}$, temos $x, y \in X \cap C_i \to |x - y| < a_i \to |f(x) - f(y)| < K \cdot a_i$

Segue-se que cada uma das m projeções de $f(X \cap C_i)$ sobre os eixos está contida num intervalo de comprimento $K \cdot a_i$. Logo $f(X \cap C_i)$ está contido no produto cartesiano desses intervalos, que é um cubo D_i, cujo volume é igual a $K^m \cdot a_i^m$.

Portanto $f(X) = \bigcup_i f(X \cap C_i) \subset \bigcup D_i$ com $\sum_i \operatorname{Vol} D_i = K^m \cdot \sum_i a_i^m < \varepsilon$,

onde ① é o bloco fechado contido em A.

Desta forma a med.$(f(X)) = 0$, dado que ε é um valor muito pequeno. No caso geral, temos $X \subset \bigcup V_x$, onde cada V_x é aberto e a restrição $f|(V_x \cap X)$ é lipschitziana.
Pelo Teorema de Lindelöf, tomamos uma subcobertura enumerável $X \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} V_j$.

Pela primeira parte, $f(V_j \cap X)$ tem medida nula, para cada $j \in \mathbb{N}$. Logo $f(X) = \bigcup f(V_j \cap X)$ é uma reunião enumerável de conjuntos de medida nula, donde med.$(f(X)) = 0$.

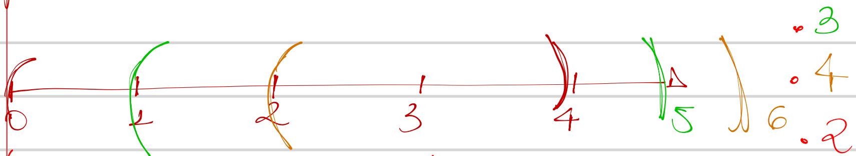
Teorema de Lindelöf:

Seja $X \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto, e dado uma cobertura por abertos de X é uma família $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ onde A_λ é aberto e:

$$X \subset \bigcup_{\lambda \in I} A_\lambda$$

Assim para cada $x \in X$ está contido em um aberto, com propriedades próprias. Assim é possível trabalhar com vizinhas V_x, que tem as propriedades desejadas.

Exemplo: $\{A_N\}_{N \in \mathbb{N}}$, onde $A_N = (N-2, N+2)$ é cobertura de N.



$\{A_{2N}\}_{N \in \mathbb{N}}$ é uma cobertura de N.

Assim A_N é cobertura e A_{2N} é uma subcobertura

Uma subcobertura de $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ de X é uma cobertura $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I'}$ de X onde $I' \subsetneq I$.

Teorema: Toda cobertura de X $\{A_\lambda\}_{\lambda \in I}$ possui uma subcobertura enumerável.