Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática - ICEX
Análise II - 2021
Prova 2 - 26/07/2021

1. (6 pontos) Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, ω uma k-forma diferencial definida em V e $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicacão C^∞, tal que $f(U) \subset V$. Prove os seguintes enunciados:
   - $d(d\omega) = 0$, (aqui d denota a diferencial exterior).
   - $d(f^*(\omega)) = f^*(d\omega)$.

2. (6 pontos) Seja $U = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, e $x = (x_1, x_2, x_3)$. Considere $\eta \in \Omega^2(U)$, definida por

$$\eta = g_1(x)dx_2 \wedge dx_3 - g_2(x)dx_1 \wedge dx_3 + g_3(x)dx_1 \wedge dx_2,$$

   onde $g_i : U \to \mathbb{R}$ é definida por $g_i(x_1, x_2, x_3) = x_i/||x||$. A 2-forma η é fechada? Prove sua resposta. (Aqui $||.||$ denota a norma euclideana).

3. (7 pontos) Seja $\alpha \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^3)$ e $\beta \in \mathcal{A}^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\alpha \wedge \beta = 0$. Prove que existe $\gamma \in \mathcal{A}^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\beta = \alpha \wedge \gamma$.

4. (7 pontos) Seja $\omega = ydx - xdy + dz$ uma 1-forma em $\mathbb{R}^3$, sejam $u, v : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funções $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Se $\eta = \omega - vdu$ é fechada. Prove que u e v são funções que não depedem da variável z.

5. (7 pontos) Sejam ω uma 1-forma diferencial em $\mathbb{R}^m$ e $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ uma função C^∞, com $f(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Mostre que $d(f\omega) \equiv 0$ (identicamente zero) se, e somente se, a 1-forma

$$\beta = \omega - \frac{1}{f}dx_{m+1}$$

   em $\mathbb{R}^{m+1}$ satisfaz a equação $\beta \wedge d\beta = \omega \wedge d\omega$. (Considere $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ definido por $x_{m+1} = 0$).

Professor Arturo Fernández Pérez