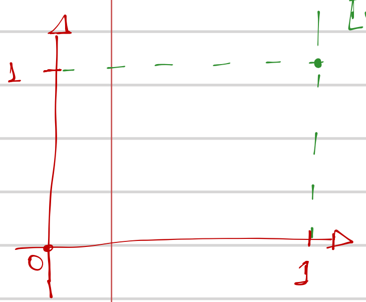
Sejam $A = [0,1] \times [0,1]$, $A_0 = A - \{(0,0)\}$ e $f : A_0 \to \mathbb{R}$ a função contínua (ilimitada) definida por:

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}.$$ Mostre que se tem:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\, dy = \frac{1}{2} \quad e \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\, dx = -\frac{1}{2}$$



$[0,1] \times [0,1] = A$

$A_0 = A - \{(0,0)\}$

$f : A_0 \to \mathbb{R}$, contínua ilimitada

$f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$, não está definida em $(0,0)$.

Seja $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\, dy = 1/2 \to \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3}\, dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3}\, dy\, dx$

Seja $I = \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3}\, dy$, podemos reescrever o numerador então:

$$I = \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3}\, dy = \int \frac{2x - (x+y)}{(x+y)^3}\, dy = \int \frac{2x}{(x+y)^3}\, dy - \int \frac{(x+y)}{(x+y)^{3\,2}}\, dy = \int \frac{2x}{(x+y)^3}\, dy - \int \frac{1}{(x+y)^2}\, dy$$

Tomamos $u = x+y \to du = dy$ (diferenciando com respeito a y).

$$2x \int \frac{1}{u^3}\, du - \int \frac{1}{u^2}\, du = 2x \left[\frac{u^{-2}}{-2}\right] - \left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]$$

$\int x^n = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\cancel{2}x \left[\frac{1}{-\cancel{2}(x+y)^2}\right] - \left[-\frac{1}{(x+y)}\right] = \left[-\frac{x}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)}\right] = \left[\frac{-x + x + y}{(x+y)^2}\right] = \frac{y}{(x+y)^2}$$

Agora tomamos a variável x, então:

$\int_0^1 \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]\Big|_0^1 dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{(x+1)^2}\right] dx$, se $w = (x+1) \to dw = dx$, com respeito a x.

Os intervalos será: $w = x+1$, se $x=0 \to w=1$, se $x=1 \to w=2$, logo:

$$\int_1^2 \frac{1}{w^2}\, dw = \int_1^2 w^{-2}\, dw \Rightarrow [-w^{-1}]\Big|_1^2 = \left[-\frac{1}{w}\right]\Big|_1^2 = \left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] =$$

$$\left[-\frac{1}{2} + 1\right] = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \to \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}\, dy\, dx = \frac{1}{2}.$$

Agora tomamos $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = \frac{-1}{2} = \int_0^1\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3}\,dx\,dy$, assumimos que $I = \int \frac{(x-y)}{(x+y)^3}\,dx$, agora reescrevemos o numerador da integral como:

$$\int \frac{(x-y)}{(x+y)^3}dx = \int \frac{(x+y)-2y}{(x+y)^3}dx = \int \frac{\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{3}2}}dx - \int \frac{2y}{(x+y)^3}dx = \int \frac{1}{(x+y)^2}dx - \int \frac{2y}{(x+y)^3}dx$$

, se $t = x+y \rightarrow dt = dx$, assim:

$$\int \frac{1}{t^2}dt - 2y\int \frac{1}{t^3}dt = -\frac{1}{t} + \cancel{2}y\frac{1}{\cancel{2}t^2} = \frac{y}{t^2} - \frac{1}{t}$$

, mas $t = x+y$, então:

$$\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x+y)} = \frac{y-(x+y)}{(x+y)^2} = \left(\frac{-x}{(x+y)^2}\right)$$

, agora:

$$\int_0^1 \left[\frac{-x}{(x+y)^2}\right]\Big|_0^1 dy = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2}dy$$

, se $s = y+1 \rightarrow ds = dy$, os intervalos de integração:

se $y=0 \rightarrow s=1$
$y=1 \rightarrow s=2$

Então:

$$\int_1^2 \frac{-1}{s^2}ds = -\left[-\frac{1}{s}\right]\Big|_1^2 = \left[\frac{1}{s}\right]\Big|_1^2 = \left[\frac{1}{2} - 1\right] = -\frac{1}{2}$$

, então:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3}dx\,dy = -\frac{1}{2}.$$

$\boxtimes$

No livro do Elon é um corolário, nas aulas é o teorema de Fubini:

Corolário:

Se $f: A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável então: $\int_{A_1} dx \left(\int_{A_2} f(x,y)\,dy\right) = \int_{A_2} dy \left(\int_{A_1} f(x,y)\,dx\right)$

$$= \int_{A_1\times A_2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Teorema de Fubini: Se $f: A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável, então as funções φ e ψ são integráveis e $\int_{A_1}\varphi(x)\,dx = \int_{A_2}\psi(x)\,dx = \int_{A_1\times A_2} f(x,y)\,dx\,dy$

Temos que o teorema de Fubini falha por que a $f(x,y)$ não é integrável em todo intervalo, temos que $f(0,0)$ não esta definida a função é como:

$$\int f_x(y)\,dy = -\int f_y(x)\,dx \longrightarrow \int f_x(y)\,dy + \int f_y(x)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Assim: $\underline{\int} f(x,y)\,dx\,dy + \overline{\int} f(x,y)\,dx\,dy = 1$, que é maior do que ε. $1 > \varepsilon$,

Ou seja, é o intervalo inteiro e portanto não é integrável.

Pelo teorema de Fubini temos as funções: $\mathcal{L}(x) = \underline{\int_B} g_x$ e $\mathcal{U}(x) = \overline{\int_B} g_x$ são integráveis sobre A, e valem as identidades:

$$\text{I}) \int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{L} = \int_A \left[\underline{\int_B} f(x,y)\,dy \right] dx \qquad \text{II}) \int_{A\times B} f = \int_A \mathcal{U} = \int_A \left[\overline{\int_B} f(x,y)\,dy \right] dx$$

Com isso temos que: $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dy \right] dx = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dy\,dx = \frac{1}{2}$, desta forma temos uma contradição

pois: $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\,dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 f(x,y)\,dx \right] dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy = -\frac{1}{2}$

Portanto temos uma contradição pois $\frac{1}{2} \neq -\frac{1}{2}$ e portanto $f(x,y)$ não é integrável.