Questão 4 | Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $\varphi : U \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínua, com derivada parcial contínua $\partial_1 \varphi : U \times [a,b] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$, e $\alpha, \beta : U \to [a,b]$ funções de classe C^1. Considere a aplicação $f : U \to \mathbb{R}^n$, definida por:

$$f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \varphi(x,t)\,dt$$

Prove que $f \in C^1$ e calcule $f'(x).h$ para $x \in U$ e $h \in \mathbb{R}^m$ arbitrários.

Teorema de Leibniz: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $\partial_1 f : U \times [a,b] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é contínua. Então $\phi : U \to \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ é de classe C^1 e $\phi'(x).h = \int_a^b \partial_1 f(x,t).h\,dt$ $\forall h \in \mathbb{R}^m$.

$$f : \mathbb{R}^m \times [a,b] \to \mathbb{R}^n \qquad \to \partial_1 f(x,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$$
$$(x_1, \ldots, x_m, t) \to f(x_1, \ldots, x_m, t)$$

Resposta: Tomamos:

$$\left| f(x+h) - f(x) - \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_1 \varphi(x,t)\,dt\right).h \right| =$$

$$\left| \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \left(f(x+h,t) - f(x,t) - \partial_1 \varphi(x,t).h\right) dt \right| =$$

Como $\partial_1 \varphi(x,t)$ é a transformação linear T, dado por:

$$\partial_1 \varphi(x,t).h = T.h$$

Agora pelo Teorema do valor médio:

$$\left| f(x+h) - f(x) - \left(\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_1 \varphi(x,t)\,dt\right).h \right| \leq |\beta(x) - \alpha(x)|\,|h| \sup_{\substack{0<s<1 \\ \alpha(x) \leq t \leq \beta(x)}} |\partial_1 f(x+sh,t) - \partial_1 \varphi(x,t)|$$

Como $\partial_1 \varphi$ é contínua em $U \times [\alpha(x), \beta(x)]$ e $[\alpha(x), \beta(x)]$ é compacto e dado por $\alpha, \beta : U \to [a,b]$ de funções de classe C^1 sendo $[a,b]$ também compacto. Então dado $\varepsilon > 0$, podemos achar $\delta > 0$ tal que:

$$|h| < \delta \to |\partial_1 f(x+sh,t) - \partial \varphi(x,t)| < \varepsilon/_{b-a}, \text{ onde } (b-a) > 0.$$
$\forall t \in [a,b]$.

Então:

$$\left| f(x+h) - f(x) - \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_1 \varphi(x,t) \cdot h \, dt \right| < \varepsilon |h|$$, ao dividir tudo por h,

temos que:

$$\frac{\left| f(x+h) - f(x) - \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_1 \varphi(x,t) \cdot h \cdot dt \right|}{|h|} < \varepsilon$$, então a expressão é menor do que ε, que é muito pequeno.

Portanto a expressão tende a zero. Isto implica que:

$$f'(x) \cdot h = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \partial_1 \varphi(x,t) \cdot h \, dt \quad \forall x \in U \text{ e } h \in \mathbb{R}^n$$

Temos que $f'(x) \cdot h$ é contínua, dado que $\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} : U \times [\alpha(x), \beta(x)] \to \mathbb{R}^n$ possui n derivadas parciais e também ∂x_i é contínua, temos que a f é de classe C^1, pela definição de C^1 a f é diferenciável e sua derivada $f'(x)$ é contínua.