6) Seja $f: U \to \mathbb{R}$ contínua no aberto limitado $U \subset \mathbb{R}^m$, admitindo que f tem todas suas derivadas parciais em todos os pontos de U. Se, para todo $a \in \partial U$ tem-se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$, então existe $c \in U$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, m$. (Teorema de Rolle).

Temos $f: U \to \mathbb{R}$ contínua no aberto e limitada, tomando este limite em $[a,b] \subset U \subset \mathbb{R}^m$. Assim temos f sendo uma função definida em $[a,b]$, sendo que:

i) f é contínua em $[a,b]$
ii) f é diferenciável em $[a,b]$
iii) $f(a) = f(b)$

Então $\exists\, c \in (a,b)$ tal que $f'(c) = 0$

Temos que f é contínua em $[a,b]$ (utilizando (i)), como f tem valores maximos e mínimos em $[a,b]$, então:

- $f(m) = \min_{x \in [a,b]} f(x)$ - $f(M) = \max_{x \in [a,b]} f(x)$

- Caso 1: Se $f(m) = f(M)$, então f é constante em $[a,b]$, portanto $f'(x) = 0 \quad \forall x \in (a,b)$. Então tomando o $c \in (a,b)$ temos que:

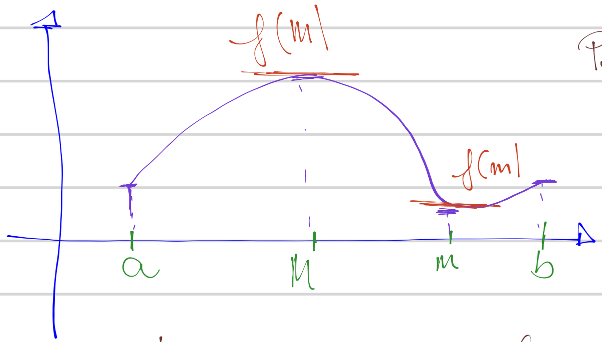
$$f'(c) = 0$$

- Caso 2: Se $f(m) \neq f(M)$, então temos que:

$$f(a) = f(b) \neq f(m) \text{ ou } f(a) = f(b) \neq f(M)$$

Assim sem perda de generalidade, temos que:

$$f(a) = f(b) \neq f(M), \text{ e } a \neq M \neq b \to M \in (a,b)$$



Portanto $f(M)$ é maximo $\to$ $f(x) \leq f(M)$, $\forall x \in [a,b]$ e tomando limite como $h \to 0$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(M+h) - f(M)}{h} \leq 0$$

Portanto a f é contínua e derivável em todos os pontos do intervalo $[a,b]$.

Como $f'(M) \leq 0$, temos: $Rf'(M) \leq 0$

$$f(M-h) \leq f(M) \rightarrow f(M-h) - f(M) \leq 0 \rightarrow f(M) - f(M-h) \geq 0$$

E tomando o limite quando $h \rightarrow 0$,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(M) - f(M-h)}{h} \geq 0 \longrightarrow Lf'(M) \geq 0 \quad \forall R, L \in \mathbb{Z}_+^*$$

Temos com isso que a f é diferenciável em todos os pontos em (a,b), então $Rf'(M) = Lf'(M) = f'(M) = 0$

E portanto se tomarmos $c = M \in (a,b)$, isto é, existe $c \in (a,b)$, então $f'(c) = 0$.

Desta forma mostramos para $f: U \rightarrow \mathbb{R}$, e como $U \subset \mathbb{R}^n$ temos que $a = \{a_1, \ldots, a_n\}$ e $b = \{b_1, \ldots, b_n\}$, onde (a,b) é um conjunto de pontos em um conjunto aberto.

E como $f'(x)$ exista em (a,b), temos que $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ exista em $(a,b) \in \mathbb{R}^n$. O mesmo vale para:

$$c = \{c_1, \ldots, c_n\}$$

Então: $\frac{\partial f}{\partial x_i}(c) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

E portanto o teorema de Rolle vale para $\mathbb{R}^n$, utilizando o teorema do valor intermediário.