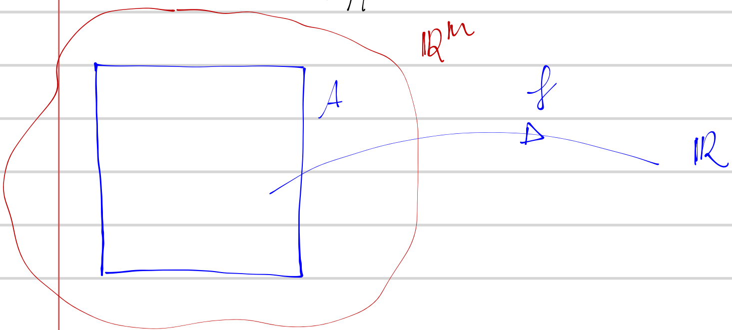
Seja $f: A \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $f \geq 0$ no m-bloco $A \subset \mathbb{R}^m$.
Seja:

$$C(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in A,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Prove que f é integrável se e somente se $C(f)$ é J-medível. Neste caso, temos que $\int_A f(x)\,dx = vol\,(C(f))$.



. f é limitada e maior que zero,

Como a $f: A \to \mathbb{R}$ é limitada, temos que seu conjunto será limitado, tomamos o bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ e sua função característica:

$$\chi_X : A \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow vol(A) = \int_A \chi_X(x)\,dx$$

Como $A \subset \mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$, temos que $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+1}$ é o conjunto dos pontos $a \in \mathbb{R}^m$ tais que toda vizinhança de a (Va) contém os pontos de $\mathbb{R}^m$ e os pontos de $(\mathbb{R}^{m+1} - \mathbb{R}^m)$. Também temos que $\mathbb{R}^{m+1} = (int.\,\mathbb{R}^m) \cup \partial\mathbb{R}^m \cup int(\mathbb{R}^{m+1} - \mathbb{R}^m)$, sendo $\mathbb{R}^{m+1}$ uma reunião disjunta.

Pelo teorema: "Um conjunto limitado $X \subset \mathbb{R}^m$ é J-medível se, e somente se, sua fronteira ∂X tem medida nula."

Como $C(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in A,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ e tomamos $X \subset \mathbb{R}^m$. Agora seja D o conjunto dos pontos de descontinuidade da função característica:

$$\chi_X : A \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{e o bloco } A \text{ seja: } X \subset A \subset \mathbb{R}^m$$

Então $D \subset \partial X$, assim um ponto da ∂X que não seja descontinuidade de χ_X deve pertencer a ∂A então:

$$\partial X = D \cup (\partial X \cap \partial A), \text{ e se } X \subset int.(A) \to \partial X = D$$

Como a ∂A (é a reunião das faces próprias do bloco A) tem medida nula, então med $\partial X = 0$ se, e somente se, med. $D = 0$.

Então o $Vol(X) = Vol(A) = \int_A \chi_X(x)\,dx$.

Agora tomamos $Y \subset \mathbb{R}^{m+1}$ e $Y \subset A_1$ e D_1 como o conjunto dos pontos de descontinuidade da função característica em Y.

$$Y_x : A_1 \longrightarrow \mathbb{R} \quad e \quad X \subset A \subset \mathbb{R}^m \subset Y \subset A_1 \subset \mathbb{R}^{m+1}$$

Temos que A_1 é um bloco que cobre Y, então:

$$\partial Y = D_1 \cup (\partial Y \cap \partial A_1) \quad e \text{ se } Y \subset \text{int}\, A_1 \rightarrow \partial Y = D_1$$

Assim D_1 tem medida nula e $\partial Y = 0$ se, e somente se, $med. D_1 = 0$
Desta forma como $A \subset A_1$ e $X \subset Y$, e $med. \partial Y = 0$ então Y é J-medível e os pontos de Y são dados por $C(f)$, com isso temos que $C(f)$ é J-medível, mas $f \subset C(f)$ então

$$\int_A f(x)\,dx = Vol(X) \subset Vol(Y) = Vol(C(f))$$

Como $C(f)$ é J-medível temos que f é integrável pois $med. X = 0$.

Vamos fazer agora a volta, pelo <u>Teorema 7</u>: "Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto J-medível. Uma função limitada $f: X \to \mathbb{R}$ é integrável, se e somente se, o conjunto D_f dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula."

Temos que $A \subset A_1$ e $D \subset D_1$ e $med. D_1 = med D = 0$, temos também que $C(f)$ é J-medível e $X \subset C(f)$. Então X é J-medível, como f é uma função limitada em X, então f é integrável.

Temos também que $C(f)$ tem medida nula, logo $Vol(C(f)) = 0$, mas $C(f) \supset f$, então $Vol(X) = \int_A f(x)\,dx = 0$. Desta forma temos que $Vol(C(f)) \subset \int_A f(x)\,dx$, mas anteriormente afirmamos que $\int_A f(x)\,dx \subset Vol(C(f))$, então:

$$\int_A f(x)\,dx = Vol(C(f))$$