Sejam $g:[0,+\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua, com $g(t)>0$ para todo $t\geq 0$ e $\mathcal{U}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 0<x<y\}$. Defina $f:\mathcal{U}\rightarrow\mathbb{R}^2$ pondo:

$$f(x,y)=\left(\int_0^{x+y} g(t)\,dt, \int_0^{y-x} g(t)\,dt\right)$$

Mostre que f é um difeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{R}^2$

<u>Resposta</u>: Temos que $g:[0,+\infty]\rightarrow\mathbb{R}$ contínua e $g(t)>0$ $\forall t\geq 0$.

1) f é injetiva

Sejam $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathcal{U}$ com $(x_1,y_1)\neq(x_2,y_2)$ tais que $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$, daí:

$$f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2) \leftrightarrow \left(\int_0^{x_1+y_1} g(t)\,dt, \int_0^{y_1-x_1} g(t)\,dt\right)=\left(\int_0^{x_2+y_2} g(t)\,dt, \int_0^{y_2-x_2} g(t)\,dt\right)$$

$$\int_0^{x_1+y_1} g(t)\,dt=\int_0^{x_2+y_2} g(t)\,dt \leftrightarrow x_1+y_1=x_2+y_2 \quad (\mathrm{I})$$

$$\int_0^{y_1-x_1} g(t)\,dt=\int_0^{y_2-x_2} g(t)\,dt \leftrightarrow y_1-x_1=y_2-x_2 \quad (\mathrm{II})$$

Então $\mathrm{I}+\mathrm{II}$: $\cancel{x_1}+y_1+y_1-\cancel{x_1}=\cancel{x_2}+y_2+y_2-\cancel{x_2}$

$$2y_1=2y_2$$

$$y_1=y_2 \longrightarrow x_1=x_2$$

Portanto f é injetiva.

2) f é um difeomorfismo local

Temos que $f(x,y)=(h(x+y)-h(0), h(y-x)-h(0))$, onde h é uma primitiva de g. ① Daí f é contínua e ainda:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial x}(x+y)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x+y)=g(x+y) \text{ é contínua}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial y}(x+y)\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x+y)=g(x+y) \text{ é contínua}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial x}(y-x)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(y-x)=-g(y-x) \text{ é contínua}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial h}{\partial y}(y-x)\cdot\frac{\partial}{\partial x}(y-x)=g(y-x) \text{ é contínua}$$

Então f é de classe C^1, pois f é contínua e as derivadas parciais de suas funções coordenadas são contínuas.

Agora temos: $J_{f(x,y)} = \begin{bmatrix} g(x+y) & g(x+y) \\ -g(y-x) & g(y-x) \end{bmatrix}$, e daí temos

o determinante $\det J_{f(x,y)} = g(x+y).\,g(y-x) + g(x+y).\,g(y-x) =$

$2\,g(x+y)..g(y-x) > 0$, pois por hipótese $g(t) > 0\ \forall t \geq 0$ e $0 < x < y$ e

com isso $f'(x,y): U \to \mathbb{R}^2$ é inversível. Temos então que pelo

teorema da função inversa que existe uma bola aberta $B = B_\delta(x,y) \subset U$ e um aberto V de $\mathbb{R}^2$ contendo $f(x,y)$ tal que $f|_B : B \to V$ é um

difeomorfismo local de classe C^1.

Como f é injetiva segue que f é um difeomorfismo de U sobre um aberto de $\mathbb{R}^2$.