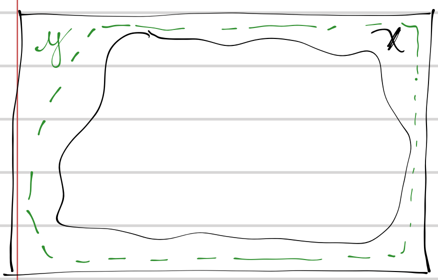
Se $m_X = \inf\{f(x); x \in X\}$ e $M_X = \sup\{f(x); x \in X\}$, devemos mostrar que:

$$W_X = M_X - m_X$$

Temos que um dado conjunto X limitado em $\mathbb{R}^m$, então:



$\mathbb{R}^m$ As oscilações de f em X:

$$w_X = \sup\{|f(x) - f(y)|; x, y \in X\} = w(f, X)$$

Se tomarmos $X \subset Y \subset \mathbb{R}^m$, então $w(f,X) \leq w(f,Y)$, para uma função ser integrável devemos tomar um $\varepsilon > 0$ e dadas as partições X e Y em $\mathbb{R}^m$ temos que:

$$S(f,Y) - s(f,Y) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{e} \quad S(f,X) - s(f,X) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como ε é um valor muito pequeno temos que $\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ e portanto também integrável. Logo ao somarmos as duas desigualdades temos:

$$S(f,Y) - s(f,Y) + S(f,X) - s(f,X) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$S(f,Y) + S(f,X) - s(f,Y) - s(f,X) < \varepsilon$$

Mas $M_X = \sup\{f(x); x \in X\}$ ou $M_{\mathbb{R}^m} = \sup\{f(\mathbb{R}^m); x, y \in \mathbb{R}^m\}$ ou $M_{(x,y)} = \sup\{f(x,y); x, y \in \mathbb{R}^m\}$ e como $X \subset Y$, então:

$M_{(x,y)} = \sup\{f(x,y); x, y \in Y\} = M_Y$, o mesmo vale para

$m_X = \inf\{f(x,y); x, y \in Y\}$. Portanto a oscilação é dado por w_X, onde:

$$W_{(x,y)} = \sup\{f(x,y); x, y \in Y\} - \inf\{f(x,y); x, y \in Y\}$$

$W_{(x,y)} = M_{(x,y)} - m_{(x,y)} \Rightarrow W_Y = M_Y - m_Y \rightarrow W_X = M_X - m_X$, e se tivermos $Z \subset X \rightarrow w_Z = M_Z - m_Z$.