Seja $\alpha \in A^1(\mathbb{R}^3)$ e $\beta \in A^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\alpha \wedge \beta = 0$. Prove que existe $y \in A^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\beta = \alpha \wedge y$.

0

O produto exterior $\wedge : \Omega^k \times \Omega^l = \Omega^{k+l}$, satisfaz a condição natural:

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I,j} a_I b_j \, dx_{I,j} \,, \text{ para } \alpha = \sum_I a_I dx_I \text{ e } \beta = \sum_j B_j dx_j$$

X

Temos que α é 1-forma, logo $\alpha = \sum_I a_I dx_I$ e β é 2-forma logo $\beta = \sum_j b_j \, dx_j \wedge dy_j$.

Se $j = I$, então: $\alpha \wedge \beta = \sum_{I,j} a_I b_j \, dx_I \wedge dx_j \wedge dy_j = \sum_{I,I} a_I b_I \, dx_I \wedge dx_I \wedge dy_I$

Mas $dx_I \wedge dx_I = 0$. Então:

isto é hipotese

$$\alpha \wedge \beta = 0.$$

Agora precisamos encontrar um y.

$\alpha = \sum_I a_I \, dx_I$ e $y = \sum_{I=j} b_I \, dy_I$, assim:

$$\alpha \wedge y = \left(\sum_I a_I dx_I\right) \wedge \left(\sum_{I=j} b_I \, dy_I\right) = \sum_{I,j} a_I b_j \, dx_I \wedge dy_I$$

X

Portanto esta provado.