Seja $M = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, e $x = (x_1, x_2, x_3)$. Considere $\eta \in \Omega^2(M)$, definida por:

$$\eta = g_1(x)\, dx_2 \wedge dx_3 - g_2(x)\, dx_1 \wedge dx_3 + g_3(x)\, dx_1 \wedge dx_2,$$

Onde $g_i : M \to \mathbb{R}$ é definida por $g_i(x_1, x_2, x_3) = x_i / \|x\|$. A 2-forma η é fechada? Prove sua resposta. (Aqui $\|.\|$ denota norma euclidiana).

Tomamos w uma forma diferencial de grau 3, dizemos que w é fechada quando $dw = 0$ e w é exata, com isso toda forma exata é fechada. Mas nem toda forma fechada é exata.

Como $\eta = g_1(x)\, dx_2 \wedge dx_3 - g_2(x)\, dx_1 \wedge dx_3 + g_3(x)\, dx_1 \wedge dx_2$
$= g_1(x)\, dx_2 \wedge dx_3 + g_2(x)\, dx_3 \wedge dx_1 + g_3(x)\, dx_1 \wedge dx_2$

Temos que $\eta \in \Omega^2(M)$ é um 2-formas, e vamos considerar um 1-forma w_1, um 2-forma w_2 e 3-forma w_3 sobre um subconjunto M de $\mathbb{R}^3$, isto porque $M = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$ com as coordenadas x_1, x_2, x_3.

$$w_1 = f_1(x)\, dx_1 + f_2(x)\, dx_2 + f_3(x)\, dx_3$$

$$w_2 = g_1(x)\, dx_2 \wedge dx_3 + g_2\, dx_3 \wedge dx_1 + g_3\, dx_1 \wedge dx_2$$

$$w_3 = h(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Então:

$$dw_1 = df_1(x) \wedge dx_1 + df_2(x) \wedge dx_2 + df_3(x) \wedge dx_3$$

$$= \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_1 + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_2 + \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3} dx_3 \wedge dx_2 +$$

$$\frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1} dx_1 \wedge dx_3 + \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} dx_2 \wedge dx_3$$

$$dw_1 = \left(\frac{\partial f_3(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2(x)}{\partial x_3}\right) dx_2 \wedge dx_3 + \left(\frac{\partial f_1(x)}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3(x)}{\partial x_1}\right) dx_3 \wedge dx_1 + \left(\frac{\partial f_2(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2}\right) dx_1 \wedge dx_2$$

Assim o vetor de 1-forma: $V = f_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + f_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + f_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$ e para 2-forma

é $M = g_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + g_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + g_3 \frac{\partial}{\partial x_3}$, com isso é possível vez que o

2-forma de dw_1 corresponde a V sendo um rotacional em w_1.

Agora o $w_2 = \gamma$, então:

$$dw_2 = dg_1(x) \wedge dx_2 \wedge dx_3 + dg_2(x) \wedge dx_3 \wedge dx_1 + dg_3(x) \wedge dx_1 \wedge dx_2$$
$$= \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}(x)\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

$$= \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1} + \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \frac{\partial g_3}{\partial x_3}\right) dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3$$

Assim w_3 é um função h, então a 3-forma dw_2 corresponde a um divergente de g, o gradiente de g é dado por:

$$\nabla g = \frac{\partial g}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial g}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial g}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_3}$$, que pode ser dado como 1-forma:

$$dg = \frac{\partial g}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial g}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial g}{\partial x_3}dx_3$$

Como $g_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{x_2}{\|x\|}$, então: $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} > 0$ porque $M = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, Como $dw_2 \neq 0$ temos que não é fechada.

Pois $dw_2 > 0$, $dw_1 > 0$