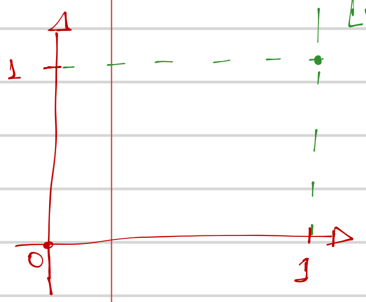
Sejam $A = [0,1] \times [0,1]$, $A_0 = A - \{(0,0)\}$ e $f: A_0 \to \mathbb{R}$ a função contínua (ilimitada) definida por:

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}.$$ Mostre que se tem:

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\, dy = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\, dx = -\frac{1}{2}$$



$[0,1] \times [0,1] = A$

$A_0 = A - \{(0,0)\}$

$f: A_0 \to \mathbb{R}$, contínua ilimitada

$f(x,y) = \dfrac{x-y}{(x+y)^3}$, não esta definida em $(0,0)$.

Seja $\displaystyle\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y)\, dy = 1/2 \to \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dy\, dx$

Seja $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dy$, podemos reescrever o numerador então:

$$I = \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dy = \int \frac{2x - (x+y)}{(x+y)^3} dy = \int \frac{2x}{(x+y)^3} dy - \int \frac{\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{3}\,2}} dy = \int \frac{2x}{(x+y)^3} dy - \int \frac{1}{(x+y)^2} dy$$

Tomamos $u = x+y \to du = dy$ (diferenciando com respeito a y).

$$\boxed{\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}}$$

$$2x \int \frac{1}{u^3} du - \int \frac{1}{u^2} du = 2x \left[\frac{u^{-2}}{-2}\right] - \left[\frac{u^{-1}}{-1}\right]$$

$$\cancel{2}x \left[\frac{1}{-\cancel{2}(x+y)^2}\right] - \left[-\frac{1}{(x+y)}\right] = \left[\frac{-x}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)}\right] = \left[\frac{-x + x + y}{(x+y)^2}\right] = \frac{y}{(x+y)^2}$$

Agora tomamos a variável x, então:

$$\int_0^1 \left[\frac{y}{(x+y)^2}\right]\Bigg|_0^1 dx = \int_0^1 \left[\frac{1}{(x+1)^2}\right] dx$$, se $w = (x+1) \to dw = dx$, com respeito a x.

Os intervalos será: $w = x+1$, se $x = 0 \to w = 1$, se $x = 1 \to w = 2$, logo:

$$\int_1^2 \frac{1}{w^2} dw = \int_1^2 w^{-2} dw \Rightarrow [-w^{-1}]\Big|_1^2 = \left[-\frac{1}{w}\right]\Big|_1^2 = \left[-\frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{1}\right)\right] =$$

$$\left[-\frac{1}{2} + 1\right] = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \to \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy\, dx = \frac{1}{2}.$$

Agora tomamos $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y)\, dx = \frac{-1}{2} = \int_0^1\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3}\, dx\, dy$, assumimos que $I = \int \frac{(x-y)}{(x+y)^3}\, dx$, agora reescrevemos o numerador da integral como:

$$\int \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dx = \int \frac{(x+y)-2y}{(x+y)^3} dx = \int \frac{\cancel{(x+y)}}{(x+y)^{\cancel{3}2}} dx - \int \frac{2y}{(x+y)^3} dx = \int \frac{1}{(x+y)^2} dx - \int \frac{2y}{(x+y)^3} dx$$

, se $t = x+y \rightarrow dt = dx$, assim:

$$\int \frac{1}{t^2} dt - 2y \int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{t} + \cancel{2}y \frac{1}{\cancel{2}t^2} = \frac{y}{t^2} - \frac{1}{t}$$

, mas $t = x+y$, então:

$$\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x+y)} = \frac{y-(x+y)}{(x+y)^2} = \left(\frac{-x}{(x+y^2}\right)$$

, agora:

$$\int_0^1 \left[\frac{-x}{(x+y)^2}\right]\Bigg|_0^1 dy = \int_0^1 \frac{-1}{(1+y)^2} dy$$

, se $s = y+1 \rightarrow ds = dy$, os intervalos de integração:

se $y = 0 \rightarrow s = 1$

$y = 1 \rightarrow s = 2$

Então:

$$\int_1^2 \frac{-1}{s^2} ds = -\left[-\frac{1}{s}\right]\Bigg|_1^2 = \left[\frac{1}{s}\right]\Bigg|_1^2 = \left[\frac{1}{2} - 1\right] = -\frac{1}{2}$$

, então:

$$\int_0^1\int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dx\, dy = -\frac{1}{2}.$$

$\blacksquare$

Agora a dúvida : Corolário : Se $f: A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável então:

$$\int_{A_1} dx \left(\overline{\int_{A_2}} f(x,y)\, dy\right) = \int_{A_2} dy \left(\overline{\int_{A_1}} f(x,y)\, dx\right) = \int_{A_1 \times A_2} f(x,y)\, dx\, dy$$

Assim se f_x e f_y são contínuas para quaisquer $x \in A_1$ e $y \in A_2$ e se f é contínua então:

$$\int_{A_1\times A_2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_{A_1} dx \left(\int_{A_2} f(x,y)\, dy\right) = \int_{A_2} dy \left(\int_{A_1} f(x,y)\, dx\right).$$

"Eu devo entender que elas são integrais em módulo ???