1- Sejam $U \subset \mathbb{R}^m$, $V \subset \mathbb{R}^n$ abertos, w uma k-forma diferencial definida em V e $f: U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^∞, tal que $f(U) \subset V$. Prove os seguintes enunciados:

a) $d(dw) = 0$, (aqui d denota a diferencial exterior).

Temos $f: U \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação C^∞, então se tomarmos w formas diferenciais em classe C^1, temos que:

- Se $w: U \to \mathbb{R}$ é uma forma de grau zero (função real) então dw é a diferencial usual de uma função. Como C^1 é uma vez diferenciável e C^∞ é infinita vezes, então vale a afirmação. Portanto w faz corresponder a forma k-linear alternada:

$$w(x) = \sum_I a_I(x)\, dx_I \quad e \quad a_I = w(x).(e_{i_1}, \dots, e_{i_k})$$

Tomamos agora $w = a\, dx_I \to dw = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial a}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_I$, onde $I = \{1, \dots, k\}$. Portanto:

$$d(dw) = \left[\sum_{l,j=1}^{k} \frac{\partial^2 a}{\partial x_l \partial x_j} dx_l \wedge dx_j\right] \wedge dx_I = \left[\sum_{j<l} \left(\frac{\partial a^2}{\partial x_j \partial x_l} - \frac{\partial^2 a}{\partial x_l \partial x_j}\right) dx_j \wedge dx_l\right]$$

$\wedge\, dx_I = 0$, isto porque $\frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_l} = \frac{\partial^2 a}{\partial x_l \partial x_j}$ em razão do teorema de Schwarz.

b) $d(f^*(w)) = f^*(dw)$

Iniciamos com o caso que a forma w se reduz a uma função $g: V \to \mathbb{R}$, então pela regra da cadeia em todo ponto $x \in U$ temos $dg(f(x)) \cdot f'(x) = d(g \circ f)(x)$ e portanto, para qualquer $w \in \mathbb{R}^m$, vale:

$$f^*(dg)(x).w = dg(f(x)).f'(x).w = d(g \circ f)(x).w$$

Assim $f^*(dg) = d(g \circ f) = d(f^* g)$. Vamos considerar agora uma forma $w = a\, dx_I = a\, dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}$, com grau k arbitrário.

Tomando $a: V \to \mathbb{R}$ sendo de classe C^1 e $g_1, \dots, g_k: V \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^2, então:

$$d(a\,dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k) = da \wedge dg_1 \wedge \dots \wedge dg_k$$

Mas $f^*(\alpha \wedge \beta) = f^*\alpha \wedge f^*\beta$, então:

$$f^*w = f^*a \cdot f^*dx_{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dx_{i_k} = f^*a \cdot d(x_{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x_{i_k} \circ f),$$

logo:

$$\begin{aligned} df^*w &= d(f^*a) \wedge d(x_{i_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(x_{i_k} \circ f) \\ &= f^*da \wedge f^*dx_{i_1} \wedge \dots \wedge f^*dx_{i_k} \\ &= f^*(da \wedge dx_{i_1} \wedge \dots \wedge dx_{i_k}) \\ &= f^*(dw) \end{aligned}$$