U F M G

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática - ICEX
Análise II - 2021
Prova 3 - 30/08/2021

1. (7 pontos) Na aula onde foi demonstrado o Teorema de Mudança de Variável, faltou demonstrar o seguinte: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um m-bloco aberto e $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear invertível. Então
$$\int_{T(A)} 1 = \int_A |\det T'|.$$
Dê uma prova deste fato. Assim a prova do Teorema de Mudança de Variável será completa.

2. (7 pontos) Se $X \subset \mathbb{R}^n$ tem medida nula e $f : X \to \mathbb{R}^m$ é localmente lipschitziana então $f(X)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^m$.

3. (8 pontos) Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & x \ \text{ irracional}, \\ 1, & x \ \text{ racional}, \ y \ \text{ irracional}, \\ 1 - \frac{1}{q}, & x = \frac{p}{q} \ \text{ racional e } mdc(p,q) = 1, \quad y \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$
Mostre que f é integrável.

4. (4 pontos) Enuncie o Teorema de Fubini para funções de varias variáveis. Aplique o Teorema de Fubini para a função f do exercício anterior para mostrar que
$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy = 1.$$

5. (8 pontos) Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função limitada e $f \geq 0$ no m-bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Seja
$$C(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^{m+1} : x \in A, \quad 0 \leq y \leq f(x)\}.$$
Prove que f é integrável se e somente se $C(f)$ é J-mensurável. Neste caso, temos que $\int_A f(x)dx = vol(C(f))$.

Professor Arturo Fernández