Questão 5: Faça o que se pede: Usei o livro Azul do Elon como referencia, achei mais completo. Os teoremas são mais detalhados.

i) Enuncie o teorema da forma local das imersões.

Seja $f: U \to \mathbb{R}^{m+n}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, fortemente diferenciável no ponto $a \in U$. Se a derivada $f'(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é injetiva, existe um homeomorfismo $h: Z \to V \times W$ de um aberto $Z \ni f(a)$ em $\mathbb{R}^{m+n}$ sobre um aberto $V \times W \ni (a, 0)$ em $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, tal que $hf(x) = (x, 0)$ para todo $x \in V$ e h é fortemente diferenciável no ponto $f(a)$. Caso $f \in C^k$ $(k \geq 1)$, é possível restringir V, W e Z se necessário, de modo que h seja um difeomorfismo de classe C^k.

ii) Demonstre o Teorema da forma local das imersões

Seja $E = f'(a) \cdot \mathbb{R}^m$ a imagem de $f'(a)$. Existem vetores linearmente independente $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^{m+n}$, que geram um subespaço vetorial $F \subset \mathbb{R}^{m+n}$ tal que $\mathbb{R}^{m+n} = E \oplus F$. Definamos $\varphi: U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{m+n}$ pondo:

$$\varphi(x, y) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} y_i v_i, \text{ onde } y = (y_1, \ldots, y_n).$$

Então φ é fortemente diferenciável no ponto $(a, 0)$, e:

$$\varphi'(a, 0) \cdot (v, w) = f'(a) \cdot v + \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i, \text{ onde } v \in \mathbb{R}^m \text{ e } w = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Sendo $f'(a)$ injetiva, e $\mathbb{R}^{m+n}$ a soma direta da imagem de $f'(a)$ com o subespaço gerado por $v_1, \ldots, v_n$, resulta imediatamente que $\varphi'(a, 0): \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{m+n}$ é injetiva e portanto um isomorfismo. Pelo teorema da aplicação inversa, φ aplica homeomorficamente um aberto contendo $(a, 0)$, (o qual podemos supor $V \times W$, onde $W \ni 0$ em $\mathbb{R}^n$) sobre um aberto $Z \ni f(a)$ em $\mathbb{R}^{m+n}$.

Seja $h = \varphi^{-1}: Z \to V \times W$. Como $\varphi(x, 0) = f(x)$ temos $h(f(x)) = h\varphi(x, 0) = (x, 0)$. Quando $f \in C^k$ $(k \geq 1)$ então φ também é de classe C^k. Ainda pelo teorema da aplicação inversa, V e W podem ser tomados de modo que $\varphi|(V \times W)$ seja um difeomorfismo sobre $Z = \varphi(V \times W)$, cujo inverso h é também de classe C^k.

iii) Prove que toda imersão é uma aplicação localmente injetiva.

Corolário: Seja $f: U \to \mathbb{R}^{m+n}$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, fortemente diferenciável no ponto a, com $f'(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ injetiva. Existe um aberto V, com $a \in V \subset U$, que é aplicado homeomorficamente por f sobre $f(V)$. O homeomorfismo inverso $f^{-1}: f(V) \to V$ é a restrição de uma aplicação contínua $\xi: Z \to V$, definida num aberto $Z \ni f(a)$ em $\mathbb{R}^{m+n}$ e ξ é fortemente diferenciável no ponto $f(a)$. Se $f \in C^k$ $(k \geq 1)$ então ξ pode ser tomada de classe C^k.

Resposta: Decorre deste corolário que se $f \in C^k$ $(k \geq 1)$ e $f'(a)$ é injetiva para algum $a \in U$, então $f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$ é injetiva para todo x num aberto V contendo $a \in \mathbb{R}^m$.
Com efeito, de $\xi f(x) = x$ para todo $x \in V$, resulta pela regra da Cadeia que $\xi'(f(x)) \circ f'(x) = Id: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, logo $f'(x)$ é injetiva.
Isto também pode ser verificado diretamente, como consequencia dos seguintes fatos:

i) A Aplicação derivada $f': U \to L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m+n})$ é contínua,
ii) O conjunto das transformações lineares injetivas é aberto em $L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^{m+n})$, este fato pode ser comprovado.
Tomando uma transformação linear T é injetiva se, e somente se, sua matriz contém um subdeterminante menor $m \times n$ não-nulo. O mesmo menor, sendo uma função contínua, será não nulo numa pequena bola de centro T, logo todas as transformações pertencentes a essa bola serão injetivas.

Portanto como uma imersão pode ser dada por: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n}$, tomamos esta bola em $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^{m+n}$, temos que todas as transformações pertencentes a bola em $\mathbb{R}^m$ é injetiva, e uma imersão se dá de um aberto $(U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m+n})$, este corolário comprova que toda imersão é uma aplicação localmente injetiva.