Aula 1 - 04/02/2015 - Análise no $\mathbb{R}^n$.

Espaço Euclidiano em $\mathbb{R}^n$, dadas por sequências finitas de números reais.

$$x \in \mathbb{R}^n \longrightarrow x(x_1, \ldots, x_n) \text{ com } x_i \in \mathbb{R}$$

Cada x_i é um ponto ou vetor para espaço vetorial, como:

$$y = (y_1, \ldots, y_n) \qquad x = (x_1, \ldots, x_n)$$

i) $y + x = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n)$

ii) $\alpha . x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$

iii) $0 = (0, 0, 0, \ldots, 0)$

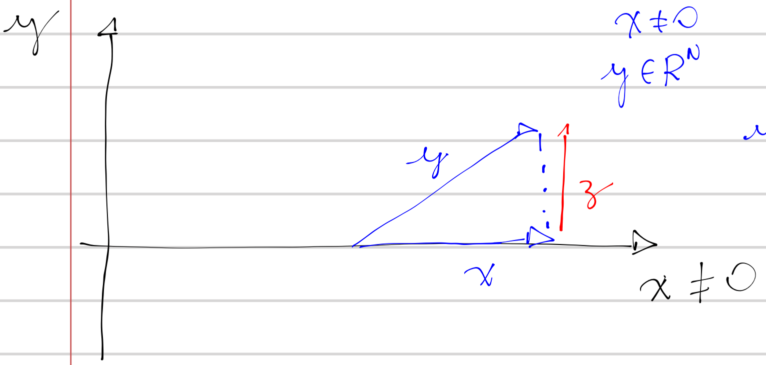
iv) $-x = (-x_1, \ldots, -x_n)$

$\langle x, y \rangle = \underbrace{x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n}$ (produto interno)

$\langle x, x \rangle > 0$ se $x \neq 0$; $\in \mathbb{R}$; se $x = 0$ $\langle x, x \rangle = 0$

Vetores ortogonais quando $\langle x, y \rangle = 0$, $x \perp y$

Base Canonica: $\{e_1, \ldots, e_n\} \in \mathbb{R}^n$, onde $e_i = \{0, \ldots, 1, \ldots 0\}$



$x \neq 0$, $y \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\langle y, x \rangle}{\langle x, x \rangle} . x = \text{proj } y$$

$$y - \text{proj } y = z$$

$$\langle z, x \rangle = \langle y - \text{proj } y, x \rangle = \langle x, y \rangle - \frac{\langle x, y \rangle}{\langle x, x \rangle} . \langle x, x \rangle$$

$$z \perp x$$

Teorema de Pitagoras: se $x \perp y \longrightarrow |x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$, uma norma $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, norma euclidiana

$$\langle x + y, x + y \rangle = |x|^2 + |y|^2 + \cancel{2\langle x, y \rangle} \to 0$$

① Desigualdade de Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq |x| . |y|$

$$|y|^2 = |x|^2 + |z|^2 = |x|^2 + |$$

$\alpha = \frac{\langle x, y \rangle}{|x|^2}$, $|x|^2 . |y|^2 \geq |\langle x, y \rangle|^2$

i) $|x| \geq 0$ e $x \neq 0 \longrightarrow |x| > 0$

ii) $|\alpha . x| = |\alpha| . |x|$

iii) $|x + y| \leq |x| + |y|$

<u>Norma do máximo</u>: é o maior valor absoluto de qualquer uma de suas coordenadas.

$$|x|_M = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

<u>Norma da soma</u>: soma dos valores absolutos das coordenadas.

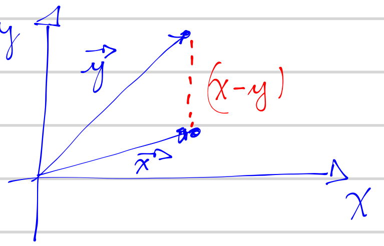
$$|x|_S = |x_1| + \ldots + |x_n|$$

<u>Norma Euclidiana</u>: $|x| = \sqrt{\sum x_i^2}$

$|x|_M \le |x| \le |x|_S \le n.|x|_M$ para $x \in \mathbb{R}^n$

↳ euclidiana

A distância entre 2 pontos é a norma da diferença.



$$d(x,y) = |x-y|$$

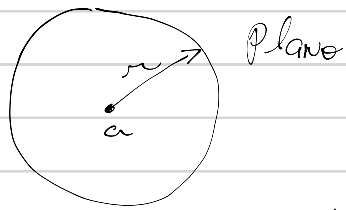
$d(x,y) > 0$ se $x \neq y$, então:
- $d(x,x) = 0$
- $d(x,y) = d(y,x)$
- $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$

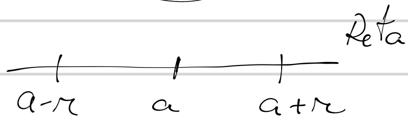
Bola: $a \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ ($\in \mathbb{R}$) ↗ espaço. $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-a| < r\}$

↳ espaço euclidiano ↳ aberta

$B = [a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n, |x-a| \le r\}$

↳ fechada

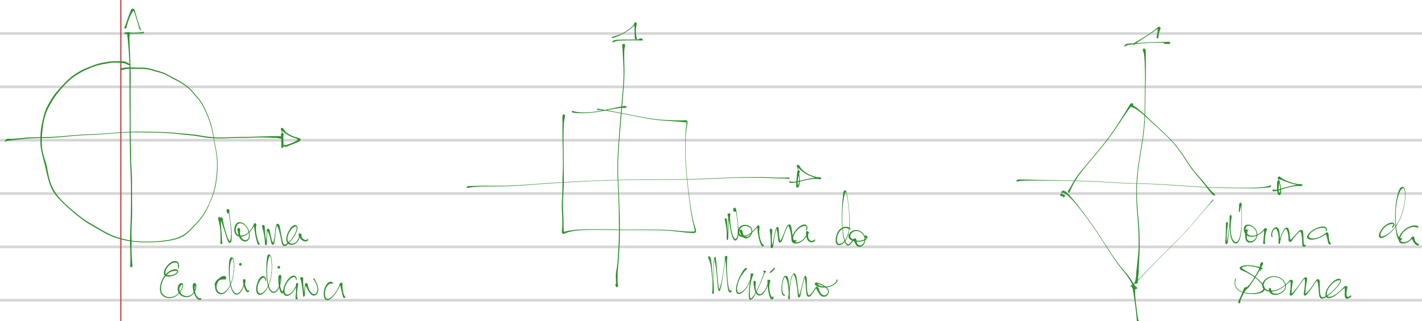




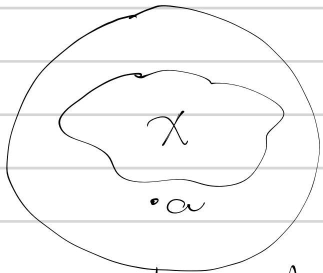
$B[a,r] = B(a,r) + S(a,r)$

$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n; |x-a| = r\}$, Esfera unitária: $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, $S^{n-1}(0,1)$

↳ é a casca da bola



Conjunto limitado: $X \in \mathbb{R}^n$ limitado



① Dado um X limitado ($X \in \mathbb{R}^n$), então

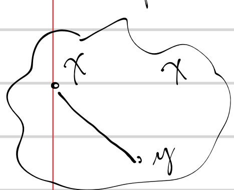
$X \subset$ alguma bola $B(a,r)$ ↔

$\exists c > 0$; $x \in X \to |x| \le c$.

$f: X \to \mathbb{R}^n$ limitada, quando $f(X)$ for um conjunto limitado.

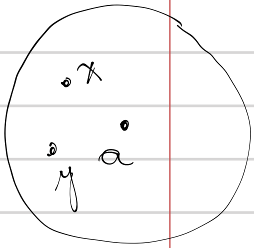
Em relação qualquer norma, toda bola é um conjunto convexo.

Um conjunto é convexo quando um segmento de reta está contido no conjunto.



$x, y \in X \to [x,y] \subset X$

$[x,y] = \{(1-t)x + ty;\ 0 \le t \le 1\}$ ou $\{x + t(y-x)\}$



$y, x \in B(a,r)$, $t \in [0,1]$ $\qquad a = (1-t)a + ta$

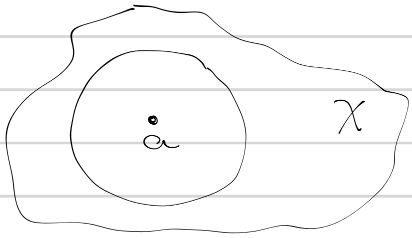
- $|x-a| < r$
- $|y-a| < r$
- $|(1-t)x + ty - a| < r$

$|(1-t)x + ty - a| < r$

$|(1-t)(x-a) + t(y-a)| \leq (1-t)|x-a| + t|y-a| < r$

<u>Conjunto aberto</u>: todos os pontos são interiores, $a \in X$ é <u>interior</u> se $\exists\, r>0$, $B(a,r) \subset X$

$X \subset \mathbb{R}^n$, e todo o ponto de X é interior. ($\mathrm{int}(X)$).



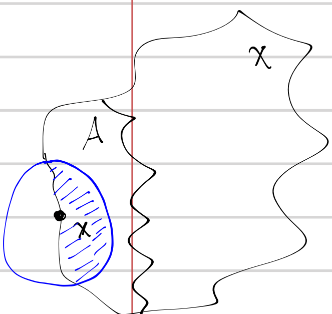
. Toda bola aberta $B(a,r)$ é um conjunto aberto, a reunição de conjuntos abertos é aberto, a interseção de conjuntos abertos é aberto.

$(A_\lambda)_{\lambda \in L}$, cada A_λ é aberto $\rightarrow A = \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ é aberto

↳ família

- A_1, A_2 abertos $\rightarrow A_1 \cap A_2$ é aberto.

$x \in A_1 \cap A_2 \rightarrow x \in A_1$ e $x \in A_2$ e $B(x, r_1) \subset A_1$ e $B(x, r_2) \subset A_2$ e $r = \min\{r_1, r_2\} \rightarrow B(x,r) \subset A$.



$\forall a \in A\ \exists\, r>0$, $B(a,r) \cap X \subset A$

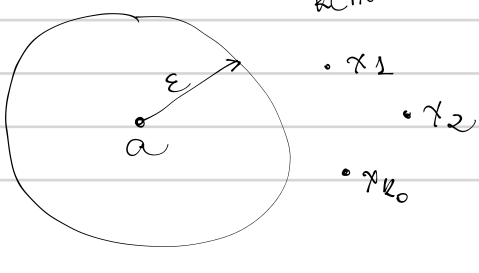
$A \subset X$ aberto em X

A aberto em $X \leftrightarrow A = U \cap X$, U aberto em $\mathbb{R}^n$

<u>Convergência no espaço Euclidiano</u>: Sequências em $\mathbb{R}^n$ $(x_1, \ldots, x_k, \ldots)$

$k \in \mathbb{N} \longrightarrow x_k \in \mathbb{R}^n$, com $x_k = (x_{k1}, \ldots, x_{kn})$: $(x_{k1})_{k \in \mathbb{N}}, \ldots\ldots, (x_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$

$(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}^n$. $\lim_{k \in \mathbb{N}} x_k = a \therefore \forall \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N} \mid k > k_0 \rightarrow |x_k - a| < \varepsilon$



Teorema: $\lim_{k\in\mathbb{N}} x_k = a \leftrightarrow \lim_{k\in\mathbb{N}} x_{k_1} = a_1, \ldots, \lim_{k\in\mathbb{N}} x_{k_N} = a_N$, e $a = (a_1, \ldots, a_N)$.

Sequência limitada $\exists c>0$ com $|x_k| \leq c$, qualquer que seja $k\in\mathbb{N}$

Implica que $|x_{k_1} - a| \leq |x_k - a|$, $\lim_{k\in\mathbb{N}} x_k = a = \lim_{k\in\mathbb{N}} |x_k - a| = 0$

Teorema de Bolzano-Weierstrass: Toda sequência limitada em $\mathbb{R}^N$, possui uma subsequência convergente.

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, para cada $x_k \in \mathbb{N}$. $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ infinito e $(x_k)_{k\in\mathbb{N}'}$

$\mathbb{N}' = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_r < \ldots\}$

Exemplo: Se $z_k (x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ é limitado $\rightarrow (x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}$ é limitada, assim pelo teorema de B/W $(x_k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ converge $\lim_{k\in\mathbb{N}_1} x_k = a$, $\mathbb{N}_1 \subset \mathbb{N}$ infinito

$(z_k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ limitada, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}_1}$ limitada $\exists \mathbb{N}_2 \in \mathbb{N}$ infinito

$\lim_{k\in\mathbb{N}_2} y_k = b$ e $\lim_{k\in\mathbb{N}_2} x_k = a$, $\lim_{k\in\mathbb{N}_2} z_k = (a, b)$

Critério de Cauchy.

Sequência de Cauchy: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em $\mathbb{R}^N$, $\forall \varepsilon>0 \; \exists k_0 \in \mathbb{N}$, $k, r > k_0$ $\rightarrow |x_k - x_r| < \varepsilon$.

Teorema: Toda sequência de Cauchy em $\mathbb{R}^N$ é convergente.

$\lim_{r,k\in\mathbb{N}} |x_k - x_r| = 0$, $\lim_{k\in\mathbb{N}, r\in\mathbb{N}'} |x_k - x_s| = 0$ e $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}'$ infinito

Toda sequência de Cauchy é limitada, logo $\exists a \in \mathbb{R}^N$, $\mathbb{N}' \subset \mathbb{N}$,
$\lim_{r\in\mathbb{N}'} x_r = a$ $\quad |x_k - a| \leq |x_k - x_r| + |x_r - a|$

Se $r \in \mathbb{N}' \rightarrow |x_r - a| \rightarrow 0$ e $|x_k - x_r| \rightarrow 0$ porque a sequência é de Cauchy.