Se $f: A \to \mathbb{R}$ é integrável, mostre que $|f|$ é integrável e $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$.

Temos que $||f(x)| - |f(y)|| \leq |f(x) - f(y)|$, portanto a oscilação de $|f|$ em qualquer conjunto é menor do que à oscilação de f.

Temos que $f: A \to \mathbb{R}$ é integrável, isto implica que $|f|$ é integrável pelo teorema 2:

"A fim de que uma função limitada $f: A \to \mathbb{R}$ seja integrável no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ é necessário e suficiente que, para todo $\varepsilon > 0$ dado, se possa obter uma partição P de A tal que:

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon \text{"}$$

Desta forma:

$$\overline{\int_A} f(x)\,dx - \underline{\int} f(x)\,dx < \varepsilon \to \left|\overline{\int_A} f(x)\,dx - \underline{\int} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

$$S(f, P) - s(f, P) < \varepsilon \to |S(f, P) - s(f, P)| < \varepsilon$$

Além disso, como $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ para todo $x \in A$, então tomando o item anterior:

$$-\int_A |f(x)|\,dx \leq \int_A f(x)\,dx \leq \int_A |f(x)|\,dx$$

$$-|S(f, P) - s(f, P)| \leq S(f, P) - s(f, P) \leq |S(f, P) - s(f, P)|$$

Portanto $\left|\int_A f(x)\,dx\right| \leq \int_A |f(x)|\,dx$.