Solução dos Exercícios
Capítulo 12

Exercício 1. (a) *Dê um exemplo de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ limitado tal que $\overline{c}(\partial A) > 0$.*

(b) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto limitado e $\boldsymbol{I}$ um n-pavê tal que $\boldsymbol{I} \supset A$. Considere uma partição $P \in \mathcal{P}(\boldsymbol{I})$. Mostre que

$$\overline{J}(\partial A, P) = \overline{J}(A, P) - \underline{J}(A, P).$$

(c) Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ limitado tal que A' é finito. Mostre que A é J-mensurável e $c(A) = 0$.

Solução: (a) Considere $A = \big([0,1] \setminus \mathbb{Q}\big)^2$. Então $\partial A = [0,1]^2$ e $c(\partial A) = 1$.

(b) Afirmo: $\mathrm{Cat}_2(\partial A, P) = \mathrm{Cat}_2(A, P) \setminus \mathrm{Cat}_1(A, P)$.

Se $j \in \mathrm{Cat}_2(\partial A, P)$, então $\boldsymbol{I}_j \cap \partial A \neq \emptyset$. Como $\partial A \subset \overline{A}$, temos $\boldsymbol{I}_j \cap \overline{A} \neq \emptyset$ e consequentemente $j \in \mathrm{Cat}_2(A, P)$. Além disso, $\boldsymbol{I}_j \cap \partial A \neq \emptyset$ implica $\boldsymbol{I}_j \not\subset \overset{\circ}{A}$, de modo que $j \notin \mathrm{Cat}_1(A, P)$.

Por outro lado, se $j \in \mathrm{Cat}_2(A, P) \setminus \mathrm{Cat}_1(A, P)$, então $\boldsymbol{I}_j \cap \overline{A} \neq \emptyset$ e $\boldsymbol{I}_j \not\subset \overset{\circ}{A}$. Logo, $\boldsymbol{I}_j \cap \big(\overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}\big) \neq \emptyset$. De fato, observe que $\boldsymbol{I}_j \cap \overline{A} \neq \emptyset$ e $\boldsymbol{I}_j \not\subset \overset{\circ}{A}$ implicam $\boldsymbol{I}_j \cap \overline{A} \cap \big(\overset{\circ}{A}\big)^c \neq \emptyset$ e como $\overline{A} \cap \big(\overset{\circ}{A}\big)^c = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \partial A$, concluímos a afirmativa.

Como consequência da afirmativa, temos a igualdade: $\overline{J}(\partial A, P) = \overline{J}(A, P) - \underline{J}(A, P)$.

(c) Suponhamos inicialmente $A' = \emptyset$. Então, A possui um número finito de pontos: $A = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Seja $r > 0$. Então,

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_r(x_j),$$

onde B_r denota a bola de raio r com respeito à norma $\| \ \|_\infty$. Assim,

$$0 \leq \overline{c}(A) \leq \sum_{j=1}^{m} \overline{c}\big(B_r(x_j)\big) = m(2r)^n \to 0 \quad \text{se} \quad r \to 0.$$

Suponhamos agora $A' = \{x_1, \ldots, x_m\}$. Seja $r > 0$ e

$$B = A \setminus \bigcup_{j=1}^{m} B_r(x_j).$$

Então B é vazio ou possui um número finito de elmentos e, pelo item anterior, $\overline{c}(B) = 0$. Como

$$A \subset B \cup \left(\bigcup_{j=1}^{m} B_r(x_j) \right),$$

temos

$$\overline{c}(A) \leq \overline{c}(B) + \sum_{j=1}^{m} \overline{c}\big(B_r(x_j)\big) \leq m(2r)^n$$

e a conclusão segue.

Exercício 2. *Mostre que se $A \subset \mathbb{R}^n$ é J-mensurável, o mesmo vale para $\overline{A}$. A recíproca é verdadeira?*

Solução: Fixe um n-pavê tal que $\overline{A} \subset \boldsymbol{I}$ e uma partição P de $\boldsymbol{I}$. Considere $\{\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_m\}$ a família gerada por P. Então, $\mathrm{Cat}_2(\overline{A}, P) = \{j\,;\, \boldsymbol{I}_j \cap \overline{A} \neq \emptyset\} = \mathrm{Cat}_2(A, P)$. Logo, $\overline{J}(\overline{A}, P) = \overline{J}(A, P)$. Além disso, como $A \subset \overline{A}$, temos $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{\overline{A}}$, de modo que

$$\mathrm{Cat}_1(A, P) = \{j\,;\, \boldsymbol{I}_j \subset \overset{\circ}{A}\} \subset \{j\,;\, \boldsymbol{I}_j \subset \overset{\circ}{\overline{A}}\} = \mathrm{Cat}_1(\overline{A}, P) \quad \Rightarrow \quad \underline{J}(\overline{A}, P) \geq \underline{J}(A, P).$$

Assim,

$$\overline{J}(\overline{A}, P) - \underline{J}(\overline{A}, P) \leq \overline{J}(A, P) - \underline{J}(A, P)$$

de onde concluimos que se A é J-mensurável, $\overline{A}$ também é.

A recíproca é falsa, vide Exercício 12.1(a).

Exercício 3. *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ conjunto J-mensurável. Mostre que:*

(1) existe $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sequência de conjuntos elementares tal que

$$A_1 \subset A_2 \subset \ldots \quad \text{e} \quad \lim_{k \to \infty} c(A_k) = c(A);$$

(2) existe $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ sequência de conjuntos elementares tal que

$$B_1 \supset B_2 \supset \ldots \quad \text{e} \quad \lim_{k \to \infty} c(B_k) = c(A).$$

Solução: (a) Seja $\boldsymbol{I}$ um n-pavê tal que $\boldsymbol{I} \supset A$. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $P_\varepsilon \in \mathcal{P}(\boldsymbol{I})$ tal que

$$\overline{J}(A, P) - \underline{J}(A, P) < \varepsilon, \quad \forall P \supset P_\varepsilon.$$

Para $\varepsilon = 1, 1/2, 1/3, \ldots$, podemos escolher $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \cdots$ partições de $\boldsymbol{I}$ tais que

$$\overline{J}(A, P_k) - \underline{J}(A, P_k) < \frac{1}{k}.$$

Seja $\mathcal{I}_k = \{\boldsymbol{I}_{k,1}, \ldots, \boldsymbol{I}_{k,n_k}\}$ a família de n-pavês gerada pela partição P_k e consideremos

$$A_k = \bigcup_{j \in \mathrm{Cat}_1(A, P_k)} \boldsymbol{I}_{k,j}.$$

Como $P_k \subset P_{k+1}$, cada n-pavê de $\mathcal{I}_{k+1}$ está contido em algum n-pavê de $\mathcal{I}_k$. logo, $A_k \subset A_{k+1}$. Além disso, temos por definição, $c(A_k) = \underline{J}(A, P_k)$. Portanto

$$0 \leq c(A) - c(A_k) \leq \overline{J}(A, P_k) - \underline{J}(A, P_k) < \frac{1}{k}$$

e, consequentemente, temos

$$\lim_{k \to \infty} c(A_k) = c(A).$$

(b) Segue do mesmo argumento acima com

$$B_k = \bigcup_{j \in \mathrm{Cat}_2(A, P_k)} \boldsymbol{I}_{k,j}.$$

Exercício 4. *Seja $\mathcal{C}$ o conjunto de Cantor, isto é, aquele obtido pelo seguinte processo recursivo:*

$$\mathcal{C}_1 = [0,1] \setminus \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right), \ \mathcal{C}_2 = \mathcal{C}_1 \setminus \left(\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right), \text{ etc...}$$

Mostre que $\partial\big([0,1] \setminus \mathcal{C}\big) = \mathcal{C}$ e conclua que $[0,1] \setminus \mathcal{C}$ é J-mensurável.

Solução: É claro que $\mathcal{C}_n \supset \mathcal{C}_{n+1}$ e $\mathcal{C}_n$ é compacto, qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema 3.19, temos

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \mathcal{C}_k \neq \emptyset.$$

Observe que

$$c(\mathcal{C}_1) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \quad c(\mathcal{C}_2) = \frac{2}{3} - \frac{2}{9} = \left(\frac{2}{3}\right)^2, \quad c(\mathcal{C}_3) = \frac{4}{9} - \frac{4}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^3, \ldots$$

e assim por diante, obtemos

$$c(\mathcal{C}_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Como $\mathcal{C} \subset \mathcal{C}_k$ para todo k, temos

$$0 \leq \overline{c}(\mathcal{C}) \leq c(\mathcal{C}_k) = \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

de onde se conclui que $\overline{c}(\mathcal{C}) = 0$.

Para mostrar que $A = [0,1] \setminus \mathcal{C}$ é J-mensurável, mostremos que $\partial A \subset \mathcal{C}$. Observe inicialmente que, por construção, $\mathcal{C} = [0,1] \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$, onde I_i denota o i-ésimo intervalo retirado. Logo, $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$.

Suponhamos $x \in \partial A$. Então, para todo $r > 0$ temos

$$(a) \quad B_r(x) \cap A \neq \emptyset, \quad (b) \quad B_r(x) \cap A^c \neq \emptyset.$$

Mas se $x \notin \mathcal{C}$, então

$$x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \cup \left(\bigcup_{=1}^{\infty} I_i \right).$$

Se $x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, então existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(x) \subset (-\infty, 0) \cup (1, \infty)$, o que implica $B_{r_0}(x) \cap A = \emptyset$ e temos uma contradição com (a).

Logo, $x \in I_{i_0}$ para algum $i_0 \in \mathbb{N}$ e, consequentemente, existe $r_0 > 0$ tal que $B_{r_0}(x) \subset I_{i_0}$, o que implica $B_{r_0}(x) \subset A$, assim temos também uma contradição com (b). Portanto, $x \in \mathcal{C}$ e A é J-mensurável, pois $\overline{c}(\partial A) \leq \overline{c}(\mathcal{C}) = 0$.

Exercício 5. *Prove o Corolário 12.9.*

Solução: Por hipótese, f' é contínua em Ω. Logo, existe $M > 0$ tal que

$$\|f'(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)} \leq \frac{M}{2}, \quad \forall x \in K.$$

Se $x \in \Omega$ e $h \in \mathbb{R}^n$ é tal que $x + h \in \Omega$, então

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + \epsilon(x, h),$$

onde $f' : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ é contínua e, para cada $x \in \Omega$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|\epsilon(x, h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{12.1}$$

Se $K \subset \Omega$ é compacto, então o limite em (12.1) é uniforme em $x \in K$, isto é (veja Exercício 5.12), para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ independente de x tal que se $\|h\| < \delta$,

$$\frac{\|\epsilon(x, h)\|}{\|h\|} < \varepsilon, \quad \forall x \in K. \tag{12.2}$$

Assim, por (12.2) (com $\varepsilon = M/2$), existe $\delta_0 > 0$ tal que se $x \in K$ e $y \in \Omega$, com $\|y - x\| < \delta_0$, então $\|f(y) - f(x)\| < M\|y - x\|$ e a conclusão segue do Teorema 12.8.

Exercício 6. *Mostre as seguintes propriedades sobre medida zero:*

(a) Se $m(A) = 0$ e $B \subset A$, então $m(B) = 0$;

(b) Se $c(A) = 0$, então $m(A) = 0$;

(c) A união enumerável de conjuntos de medida zero tem medida zero;

(d) $m(A) = 0$ se, e somente se, existe uma família enumerável de n-paralelepípedos satisfazendo as seguintes condições:

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \overset{\circ}{\boldsymbol{I}}_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} c\big(\overset{\circ}{\boldsymbol{I}}_j\big) < \varepsilon.$$

(e) Seja $\boldsymbol{I} = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ um n-paralelepípedo tal que $a_j < b_j$ e $\partial \boldsymbol{I}$ a fronteira der $\boldsymbol{I}$. Mostre que $m(\partial \boldsymbol{I}) = 0$, mas que $\boldsymbol{I}$ não tem medida zero.

Solução: O item (a) é trivial.

(b) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\{\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_m\}$ família finita de n-paralelepípedos tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{m} \boldsymbol{I}_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m} c(\boldsymbol{I}_j) \leq \varepsilon/2.$$

Considere então uma família enumerável qualquer $\{\boldsymbol{I}_{m+1}, \boldsymbol{I}_{m+2}, \ldots\}$ tal que

$$\sum_{j=m+1}^{\infty} (\boldsymbol{I}_j) \leq \varepsilon/2.$$

Então é claro que a família $\{\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_m, \boldsymbol{I}_{m+1}, \ldots\}$ satisfaz a propriedade:

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_j) \leq \varepsilon.$$

(c) Seja $\{A_1, A_2, \ldots\}$ uma família enumerável de conjuntos de medida nula. Por hipótese, dado $\varepsilon > 0$, existe para cada $i \in \mathbb{N}$ uma família enumerável de n-paralelepípedos $\mathcal{I}_i = \{\boldsymbol{I}_1^i, \boldsymbol{I}_2^i \ldots\}$ tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_j^i \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_j^i) \leq \varepsilon/2^i.$$

Então

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}_j = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_j^i.$$

Como a união enumarável de conjuntos enumeáveis é enumerável, a família $\bigcup_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}_i$ é enumerável e

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_j^i) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

(d) A condição é suficiente, pois $c(\overset{\circ}{\boldsymbol{I}}) = c(\boldsymbol{I})$ e $\overset{\circ}{\boldsymbol{I}} \subset \boldsymbol{I}$. Provemos então que a condição é necessária. Seja $\varepsilon > 0$ e $\{\boldsymbol{I}_1, \boldsymbol{I}_2, \ldots\}$ uma família enumerável de n-paralelepípedos tal que

$$A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_j \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_j) \leq \varepsilon/2.$$

Se $\boldsymbol{I}_k = [a_1^k, b_1^k] \times \cdots \times [a_n^k, b_n^k]$, denotemos $l_i^k = b_i^k - a_i^k$, de modo que $c(\boldsymbol{I}_k) = l_1^k l_2^k \cdots l_n^k$.

É claro que $c(\boldsymbol{I}_k) = c(\overset{\circ}{\boldsymbol{I}}_k)$. Para cada $s \geq 0$, consideremos o n-paralelepípedo aberto

$$\boldsymbol{I}_k^s = \Big(a_1^k - \frac{s}{2}, b_1^k + \frac{s}{2}\Big) \times \Big(a_2^k - \frac{s}{2}, b_2^k + \frac{s}{2}\Big) \times \cdots \times \Big(a_n^k - \frac{s}{2}, b_n^k + \frac{s}{2}\Big).$$

de modo que $c(\boldsymbol{I}_k^s) = (l_1^k + s)(l_2^k + s) \cdots (l_n^k + s)$.

A aplicação $s \mapsto c(\boldsymbol{I}_k^s)$ é um polinômio $p_k(s)$ de grau n e, pelo Teorema do Valor Médio, existe $0 < \xi < s$ tal que

$$c(\boldsymbol{I}_k^s) - c(\boldsymbol{I}_k) = c(\boldsymbol{I}_k^s) - c(\boldsymbol{I}_k^0) = p_k(s) - p_k(0) = p_k'(\xi)s.$$

Denotando $l_{\max}^k = \max\{l_1^k, \ldots l_n^k\}$, temos

$$p_k'(\xi)s = \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} (l_j^k + \xi)s \leq n(l_{\max}^k + \xi)^{n-1}s \leq n2^{n-1} l_{\max}^{n-1} s.$$

Assim, para cada $k \in \mathbb{N}$ tomamos $s_k > 0$ tal que $n2^{n-1} l_{\max}^{n-1} s_k < \varepsilon/2^{k+1}$, de modo que

$$\sum_{k=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_k^s) < \sum_{k=1}^{\infty} \Big(c(\boldsymbol{I}_k) + n2^{n-1} l_{\max}^{n-1} s_k\Big) < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Como os n-paralelepípedos $\boldsymbol{I}_k^s$ são abertos, concluímos a prova do item (d).

(d) Trivial! De fato, $\boldsymbol{I}$ é elementar e, consequenetmente, J-mensurável. Logo, pelo Teorema 12.7, $c(\partial \boldsymbol{I}) = 0$. Pelo item (c) acima, concluímos que $\mathrm{med}(\partial \boldsymbol{I}) = 0$. Se $\mathrm{med}(\boldsymbol{I}) = 0$, existe para todo $\varepsilon > 0$ uma cobertura enumerável de n-paralelepípedos com soma total dos conteúdos menor que ε. Em particular, se $\varepsilon = c(\boldsymbol{I})/2$ temos

$$\boldsymbol{I} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{I}_i \quad \Rightarrow \quad c(\boldsymbol{I}) \leq \sum_{i=1}^{\infty} c(\boldsymbol{I}_i) < c(\boldsymbol{I})/2,$$

o que é impossível se $a_i < bi$ para todo $i = 1, \ldots, n$.

Exercício 7. *Seja* $\boldsymbol{I} \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geq 1)$ *um* n*-pavê e* $f : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ *função contínua. Considere o gráfico de* f*:*

$$\mathrm{Graf}(f) = \big\{x = (x', x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}\,;\, x' \in \boldsymbol{I},\ x_n = f(x')\big\}.$$

Mostre que $\mathrm{Graf}(f)$ *tem conteúdo nulo em* $\mathbb{R}^{n+1}$.

Solução: Como f é uniformemente contínua em $\boldsymbol{I}$, dado $\varepsilon > 0$, existe δ tal que

$$\|x - y\|_2 < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(\boldsymbol{I})}.$$

Seja $P \in \mathcal{P}(\boldsymbol{I})$ tal que $|P| < \delta$ e $\{\boldsymbol{I}_1, \dots, \boldsymbol{I}_m\}$ a família gerada por P. Se

$$f(x_j) = \min\{f(x)\,;\, x \in \boldsymbol{I}_j\}, \quad f(y_j) = \max\{f(x)\,;\, x \in \boldsymbol{I}_j\}$$

então

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{j=1}^{m} \big(f(y_j) - f(x_j)\big)\mu(\boldsymbol{I}_j) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sejam

$$m = \min\{f(x)\,;\, x \in \boldsymbol{I}\}, \quad M = \max\{f(x)\,;\, x \in \boldsymbol{I}\}$$

e considere $\widetilde{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I} \times [n, M]$. Então $\widetilde{\boldsymbol{I}}$ é um $(n+1)$-pavê e $\mathrm{Graf}(f) \subset \widetilde{\boldsymbol{I}}$. Seja $\mathcal{I} = \{m = s_0 < s_1 < \cdots < s_l = M\}$ uma partição de $[m, M]$ tal que $\Delta s_i < \varepsilon$ e denotemos $\widetilde{P} = P \times \mathcal{I}$. Então $\widetilde{P}$ é uma partição de $\widetilde{\boldsymbol{I}}$ cuja família gerada é

$$\Big\{\widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j} = \boldsymbol{I}_i \times [s_{j-1}, s_j]\,;\, i = 1, \dots, m,\ j = 1, \dots l\Big\}.$$

Observe que se $\mathrm{Graf}(f) \cap \widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j} \neq \emptyset$, então $\mathrm{Graf}(f) \cap \widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j-2} = \mathrm{Graf}(f) \cap \widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j+2} = \emptyset$. De fato, se

$$\big(x, f(x)\big) \in \mathrm{Graf}(f) \cap \widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j}, \quad \big(y, f(y)\big) \in \mathrm{Graf}(f) \cap \widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j-2}$$

então $\|x - y\| < \delta$ e $|f(x) - f(y)| > \varepsilon$, o que contradiz a continuidade uniforme de f. Portanto, a quantidade de $(n+1)$-pavês da família gerada por $\widetilde{P}$ que interceptam o gráfico de f é, no máximo, $3m$ e como $\mu(\widetilde{\boldsymbol{I}}_{i,j}) = \varepsilon\mu(\boldsymbol{I}_i)$, temos

$$\overline{J}\big(\mathrm{Graf}(f), \widetilde{P}\big) \leq 3\big(U(f,P) - L(f,P)\big) < 3\varepsilon.$$

Exercício 8. *Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ uma curva retificável e $\Gamma = \big\{\gamma(t)\,;\, t \in [a,b]\big\}$. Mostre que Γ tem conteúdo de Jordan nulo em $\mathbb{R}^n$.*

Solução: Seja $\mathrm{med}(\Gamma)$ o comprimento da curva Γ. Como a aplicação $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua, dado $0 < \varepsilon < 1$, existe $\delta > 0$ tal que $\|\gamma(t) - \gamma(s)\|_2 < \varepsilon$ se $|t - s| < \delta$.

Seja $P_\varepsilon = \{t_0 = a < t_1 < \cdots < t_m = b\}$ uma partição de $[a,b]$ tal que $t_i - t_{i-1} < \delta$ para todo $i = 1, \dots, m$. Seja Γ_ε a poligonal com vértices nos pontos $x_i = \gamma(t_i)$. Então, é claro que

$$\|\gamma(t) - x_i\|_2 < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_{i-1}, t_i] \tag{$*$}$$

e

$$\sum_{i=1}^{m} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|_2 \leq L.$$

Considere a seguinte visinhança tubular da poliginal Γ_ε:

$$\mathcal{V}_\varepsilon = \bigcup_{x \in \Gamma_\varepsilon} B_\varepsilon(x).$$

Afirmativa 1: $\Gamma \subset \mathcal{V}_\varepsilon$

Afirmativa 2: $\overline{c}(\mathcal{V}_\varepsilon) \leq \dfrac{|\mathbb{S}^{n-2}|}{n-1}\mathrm{med}(\Gamma)\varepsilon^{n-1} + \dfrac{|\mathbb{S}^{n-1}|}{n}\varepsilon^n. \qquad (**)$

A afirmariva 1 é consequência direta de $(*)$ e a desigualdade da afirmativa 2 implica que, no caso $\varepsilon < 1$, $\overline{c}(\Gamma) \leq C\varepsilon$, onde $C > 0$ independe de ε. Assim, uma vez demostrada a afirmativa 2, teremos concluída a prova, fazendo $\varepsilon \to 0$.

Não faremos a prova da desiguladade $(**)$ no caso geral. Entretanto, as figuras e as explicações abaixo são suficientemente convincentes no caso n=3 (em vez de demonstrar o óbvio complicado, eu aqui prefiro praticar com desenhos minhas aptidões aríticas).

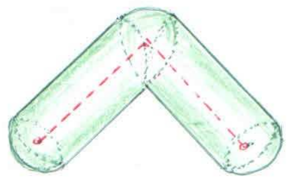

Figura 1

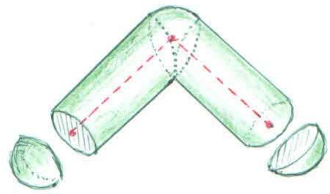

Figura 2

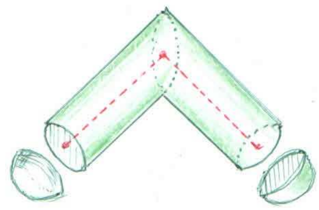

Figura 3

A Figura 1 ilustra a visinhança $\mathcal{V}_\varepsilon$ no caso $m = 2$ (i.e., com dois segmentos $[\gamma(a), \gamma(t_1)] \cup [\gamma(t_1), \gamma(b)]$), onde a linha pontilhada representa a poligonal Γ_ε. Neste caso, observamos (veja Figura 2) que as semiesferas das expremidades somam o volume $\frac{4}{3}\pi\varepsilon^3$, que correponde à parcela $|\mathbb{S}^{n-1}|\varepsilon^n/n$ na desigualdade $(**)$, onde $|\mathbb{S}^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

A Figura 3 mostra uma visinhança $\mathcal{W}_\varepsilon$ que contém a poliginal Γ_ε. Observe que $\mathcal{W}_\varepsilon$ é semelhante à $\mathcal{V}_\varepsilon$, exceto no entorno do ponto $\gamma(t_1)$ comum nos dois segmentos. Nessa região, $\mathcal{W}_\varepsilon$ é formada pela interseção dos cilindros. É fácil ver que o volume de $\mathcal{W}_\varepsilon$ é igual ao volume do cilindro circular reto cuja base é o círculo de raio ε e altura igual ao comprimento da poligonal, isto é, $\pi\varepsilon^2\mathrm{med}(\Gamma_\varepsilon)$, que corresponde a $|\mathbb{S}^{n-2}|\mathrm{med}(\Gamma_\varepsilon)\varepsilon^{n-1}/(n-1)$ no caso geral. Como $\mathrm{med}(\Gamma_\varepsilon) \leq \mathrm{med}(\Gamma)$, obtemos a outra parcela na desigualdade $(**)$.

Para concluir o argmento, basta constatar que $\mathcal{V}_\varepsilon \subset \mathcal{W}_\varepsilon$. A Figura 4 ilustra esta fato.

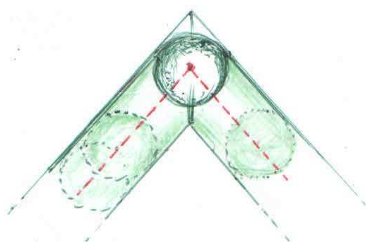

Figura 4

Exercício 9. *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ conjunto J-mensurável e $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções Riemann-integráveis. Mostre que fg é Riemann-integrável em A.*

Solução: Consequência imediata do Teorema 12.15.

Exercício 10. *Seja $\boldsymbol{I} = [0,1] \times [0,1]$ e considere a função $f : \boldsymbol{I} \to \mathbb{R}$ assim definida:*

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 2y & \textit{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

f é Riemann integrável em $\boldsymbol{I}$? As integrais iteradas existem? Justifique suas repostas.

Solução: Fixemos $x \in [0,1]$ e consideremos a função, $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\psi(y) = f(x,y)$.

- se $x \in \mathbb{Q}$, então $\psi(y) \equiv 1$ e $\int_0^1 \psi(y)\,dy = 1$;
- se $x \notin \mathbb{Q}$, então $\psi(y) = 2y$ e $\int_0^1 \psi(y)\,dy = 1$;

Portanto, $\int_0^1 f(x,y)\,dy = 1$ para todo $x \in [0,1]$ e podemos calcular a integral iterada:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = 1.$$

Por outro lado, se ficarmos $y \in [0,1]$ e considerarmos a função $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x,y)$, φ não é Riemann-integrável, pois é descontínua em todos os pontos de seu domínio (com exceção, é claro, se $y = 1/2$). Neste caso, não está definida a integral iterada

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy.$$

Exercício 11. *Seja $A = \mathbb{Q} \cap [0,1]$. Para cada $x \in A$, $x = p/q$ fração irredutível, considere o conjunto $S(x)$ assim definido: $S(0) = \{(0,0)\}$ e se $x \neq 0$,*

$$S(x) = \left\{ \left(\frac{n}{q}, \frac{m}{q} \right) \; ; \; n, m = 0, 1, \ldots, p \right\}.$$

Considere a função $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \textit{se } x \in A \textit{ e } (x,y) \in S(x), \\ 1 & \textit{senão.} \end{cases}$$

Mostre que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx \right) dy = 1,$$

mas f não é Riemann-integrável em $[0,1] \times [0,1]$.

Solução: Fixe $x \in [0,1]$ e considere a função $f_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $f_x(y) = f(x,y)$. Se $x \notin A$, então a aplicação $y \mapsto f_x(y) = f(x,y) = 1$ para todo $y \in [0,1]$. Se $x \in A$, então $x = p/q$ fração irredutível e

$$f_x(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \in \{0, 1/q, \ldots, p/q\} \\ 1 & \text{senão.} \end{cases}$$

Em ambos os casos, a aplicação $y \mapsto f_x(y)$ é Riemann integrável em A e

$$F(x) = \int_0^1 f(x,y)\,dy = 1, \quad \forall x \in [0,1]$$

e, consequentemente,

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy \right) dx = 1.$$

O mesmo argumento vale para a aplicação $x \mapsto f_y(x)$, com $y \in [0,1]$ fixado. Portanto, valem as integrais iteradas.

Para mostrar que f não é integrável no quadrado $[0,1]^2$, considere uma partição P de $[0,1]^2$ e $\{\boldsymbol{I}_1, \ldots, \boldsymbol{I}_k\}$ a família gerada. Podemos então escolher $q \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de modo que, para um qualquer pavê $\boldsymbol{I}_j$, existem $n, m \leq p$ tais que o par $(n/q, m/q)$ pertença a $\boldsymbol{I}_j$. Como em cada um desses pavês há pontos com coordenadas irracionais, temos $L(f,P) = 0$ e $U(f,P) = 1$.

Exercício 12. *Obtenha uma estimativa da constante C de em ternos de M e n.*

Solução: Pelo binômio de Newton, temos

$$(1 + \varepsilon M)^n = 1 + \varepsilon M + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k M^k.$$

Como $\varepsilon M < 1$, temos

$$\sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} \varepsilon^k M^k < \varepsilon M \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k} = \varepsilon M (2^n - n - 1).$$

Portanto, $(1 + \varepsilon M)^n < 1 + \varepsilon M(2^n - n)$ e temos a seguinte experessão para a constante C:

$$C = M(2^n - n)\det[T].$$

Exercício 13. *Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua e $T \subset \mathbb{R}^2$ o tiângulo com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$. Mostre que*

$$\int_T f(x+y)\,dxdy = \int_0^1 uf(u)\,du.$$

Solução: Considere $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $G(u,v) = (u - v, v)$ e os conjuntos

$$D = \big\{(u,v)\,;\, 0 \leq u \leq 1,\ 0 \leq v \leq u\big\},$$
$$T = \big\{(x,y)\,;\, 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1 - x\big\},$$

Observe que T é o triângulo com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$, D é o triângulo com vértices em $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ e $G(D)=T$. Considere também a função $F(x,y)=f(x+y)$.

Pelo Teorema de Mudança de variáveis, temos

$$\int_T F(x,y)\,dxdy = \int_D F\big(G(u,v)\big)|J_G(u,v)|\,dudv.$$

Como G é linear, $J_G(u,v)=\det[G]=1$. Assim, aplicando a fórmula acima e o Teorema de Fubini, temos

$$\int_T f(x,y)\,dxdy = \int_D f(u)\,dudv = \int_0^1 \left(\int_0^u f(u)\,dv\right) du = \int_0^1 uf(u)\,du.$$

Exercício 14. *Sejam $B_1(0)$ a bola aberta de $\mathbb{R}^2$ (relativa à norma euclidiana), de raio 1 e centro em zero, $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ uma função contínua e R_θ a matriz de rotação:*

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Considere a função g definida por

$$g(\theta) = \int_{B_1(0)} f(R_\theta x)\,dx.$$

Mostre que $g(\theta)=g(0)$ para todo $\theta\in\mathbb{R}$.

Solução: A bola $B_1(0)$ é invariante pelas rotações, isto é, $R_\theta\big(B_1(0)\big)=B_1(0)$, qualquer que seja $\theta\in\mathbb{R}$. Como $\det[R_\theta]=1$, a mudança de variável $y=R_\theta x$ nos dá $dy=dx$ e

$$g(\theta) = \int_{B_1(0)} f\big(R_\theta x\big)\,dx = \int_{B_1(0)} f(y)\,dy = g(0).$$

Logo, g é constante.

Exercício 15. *Sejam $\alpha\in\mathbb{R}$, $0<a<b<+\infty$ e*

$$D = \big\{x\in\mathbb{R}^n\,;\, a<\|x\|_2<b\big\}.$$

Considere $f:D\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=\|x\|_2^\alpha$. Mostre que

$$\int_D f(x)\,dx = \begin{cases} |S^{n-1}|(n+\alpha)^{-1}(b^{\alpha+n}-a^{\alpha+n}) & \text{se } \alpha+n\neq 0,\\ |S^{n-1}|\ln(b/a) & \text{se } \alpha+n=0. \end{cases}$$

Solução: Usando coordenadas esféricas, $f(x)=\|x\|_2^\alpha=\rho^\alpha$. Logo,

$$\int_D f(x)\,dx = |S^{n-1}|\int_a^b \rho^{\alpha+n-1}d\rho$$

e o resutado segue por integração elementar.

Exercício 16. *Seja* $\|x\|_p = \big(|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p\big)^{1/p}$, $p \geq 1$, *a norma* p *de* $\mathbb{R}^n$. *Determine os valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *para os quais é finita a integral*

$$\int_{B_1} \|x\|_p^\alpha \, dx, \quad \text{onde } \; B_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_2 \leq 1\}.$$

Solução: Como as normas em $\mathbb{R}^n$ são equivalentes, existem constantes positivas m e M tais que $m\|x\|_2 \leq \|x\|_p \leq M\|x\|_2$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Aplicando coordenadas esféricas, temos (veja (12.46):

$$\int_{B_1(0)} \|x\|_2^\alpha \, dx = \frac{2\pi^{\pi/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^1 \rho^{\alpha+n-1} d\rho = \begin{cases} \dfrac{2\pi^{\pi/2}}{(n+\alpha)\Gamma(n/2)} & \text{se } n+\alpha > 0 \\ +\infty & \text{se } n+\alpha \leq 0 \end{cases}$$

Portanto, segue da equicalência das normas que a integral é finita, se, e somente se, $\alpha > -n$.

Exercício 17. *Seja* $B_R(0)$ *a bola fechada de centro em zero e raio* $R > 0$ *de* $\mathbb{R}^n$, *relativamente à norma* $\|\ \|_1$, *isto é,*

$$B_R(0) = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n); |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n| \leq R\}.$$

Seja $V_n(R)$ *o volume de* $B_R(0)$.

(a) Prove que $V_n(R) = R^n V_n(1)$.

(b) Mostre que $V_n(1) = 2^n/n!$.

Solução: (a) Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é definida por $Tx = Rx$, então T é linear (homotetia) e $\det[T] = R^n$ e

$$V_n(R) = \int_{T(B_1(0))} dx = \int_{B_1(0)} R^n du = R^n V_n(1).$$

(b) Observe que $V_n(1) = 2^n V_n^+$, onde V_n^+ é o volume de

$$B_n^+ = \big\{x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_1 = 1,\, x_i \geq 0,\, i = 1, \ldots, n\big\}.$$

Então,

$$\begin{aligned} V_n^+ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_n} dx_n \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-1}} (1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)\, dx_n. \end{aligned}$$

Repare que a última inegral, cuja variável de integração é x_n, pode ser escrita da seguinte forma, denotando $\alpha = 1 - x_1 - \cdots - x_{n-1}$:

$$\int_0^\alpha (\alpha - x_n)\, dx_n = \frac{\alpha^2}{2} = \frac{(1 - x_1 - x_2 - \cdots - x_{n-1})^2}{2}$$

Assim, temos

$$V_n^+ = \frac{1}{2}\int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \cdots \int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}} (1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1})^2\, dx_{n-1}$$

e podemos repetir o processo considernado $\alpha = 1 - x_1 - \cdots - x_{n-2}$ na última integral:

$$\int_0^{1-x_1-\cdots-x_{n-2}} (1-x_1-x_2-\cdots-x_{n-1})^2\, dx_{n-1} = \int_0^{\alpha} (\alpha - x_{n-1})^2\, dx_{n-1} = \frac{\alpha^3}{3}.$$

E assim, sucessivamente, obtemos a fórmula

$$V_n(1) = 2^n V_n^+ = \frac{2^n}{n!}.$$

Exercício 18. *Sejam $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ função de classe C^1 e $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto J-mensurável. Considere a função $M : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$M(t) = \int_\Omega f(t,x)\, dx.$$

Mostre que M é de classe C^1 em $\mathbb{R}$ e

$$M'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, dx, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Solução: Seja $Q = [0,T]\times\Omega$ e denotemos $X = (t,x) \in Q$, $\Delta X = (h, \Delta t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Com f é de classe C^1, temos

$$f(X + \Delta X) = f(X) + f'(X)\Delta X + \epsilon(X, \Delta X),$$

com

$$\lim_{\Delta X \to 0} \frac{|\epsilon(X,\Delta X)|}{\|\Delta X\|} = 0$$

uniformemente nos compactos de Q. Em particular, se $K \subset Q$ é compacto, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$f(t+\Delta t, x) = f(t,x) + \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\Delta t + \epsilon(t,x,\Delta t)$$

com

$$\left|\frac{\epsilon(t,\Delta t,x)}{\Delta t}\right| < \varepsilon, \quad \forall (t,x) \in K.$$

Portanto, se $|\Delta t| < \delta$,

$$\left|\frac{M(t+\Delta t) - M(t)}{\Delta t} - \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)\, dx\right| \le \left|\int_\Omega \frac{\epsilon(t,\Delta t,x)}{\Delta t}\right| < \varepsilon c(\Omega).$$

Exercício 19. *Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 e $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ curva de classe C^1 tal que $\gamma(0) = 0$. Considere a função $F : (0, +\infty) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$F(t, r) = \int_{B_r(\gamma(t))} f(x)\, dx,$$

onde $B_r\big(\gamma(t)\big)$ denota a bola de aberta de centro em $\gamma(t)$ e raio $r > 0$. Mostre que F é de classe C^1 e calcule

$$\frac{\partial F}{\partial t}, \quad \frac{\partial F}{\partial r}.$$

Solução: (a) Seja $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ definida por $x = g(t, y) = y + \gamma(t)$. Então, g é de classe C^1 e $|J_g(t, y)| = 1$, o que implica $dx = dy$. Como $g(t, B_r(0)) = B_r(\gamma(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$F(t, r) = \int_{B_r(0)} f(g(t, y))\, dy = \int_{B_r(0)} f(y + \gamma(t))\, dy.$$

Pelo exercício anterior, F é de classe C^1 e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial t} &= \int_{B_r(0)} \frac{\partial}{\partial t} f\big(y + \gamma(t)\big)\, dy \\
&= \int_{B_r(0)} \big\langle \nabla f\big(y + \gamma(t)\big) : \gamma'(t) \big\rangle\, dy \\
&= \int_{B_r(\gamma(t))} \big\langle \nabla f(x) : \gamma'(t) \big\rangle\, dx
\end{aligned}$$

(b) Seja $g : (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ definida por $x = g(r, y) = ry + \gamma(t)$. Então, g é de classe C^1 e $|J_g(r, y)| = r^n$, o que implica $dx = r^n dy$. Como $g(r, B_1(0)) = B_r(\gamma(t))$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$F(t, r) = \int_{B_1(0)} f(g(t, y)) r^n\, dy = \int_{B_1(0)} f(ry + \gamma(t)) r^n\, dy.$$

Logo, F é de classe C^1 e

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial r} &= \int_{B_1(0)} \frac{\partial}{\partial r} \big[f\big(ry + \gamma(t)\big) r^n \big]\, dy \\
&= \int_{B_1(0)} \big[\big\langle \nabla f\big(ry + \gamma(t)\big) : r^n y \big\rangle + n r^{n-1} f(ry + \gamma(t)) \big]\, dy \\
&= \int_{B_1(0)} \Big[\big\langle \nabla f\big(ry + \gamma(t)\big) : y \big\rangle + \frac{n}{r} f(ry + \gamma(t)) \Big]\, r^n dy
\end{aligned}$$

Como $ry + \gamma(t) = x \iff y = \frac{1}{r}(x - \gamma(t)$, obtemos

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \int_{B_r(\gamma(t))} \Big[\Big\langle \nabla f(x) : \frac{1}{r}(x - \gamma(t) \Big\rangle + \frac{n}{r} f(x) \Big]\, dx.$$

Exercício 20. *Para cada $R > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, consideremos os conjuntos*

$$B_R(n) = \big\{ x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_2 \le R \big\}, \quad C_R(n) = \big\{ x \in \mathbb{R}^n \,;\, \|x\|_\infty \le R \big\}.$$

(1) Use coordenadas polares para calcular

$$I_R(2) = \int_{B_R(2)} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, dx.$$

(2) Mostre que $B_R(2) \subset C_R(2) \subset B_{\sqrt{2}R}(2)$ e conclua que

$$\sqrt{I_R(2)} \leq \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-r^2}\, dr \leq \sqrt{I_{\sqrt{2}R}(2)}.$$

(3) Usando (2) e o Teorema de Fubini , mostre que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{C_R(n)} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, dx = \pi^{n/2}.$$

(4) Considere $f_R : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_R(\alpha) = \int_{C_R(n)} \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx.$$

Mostre que $f_R(\alpha)$ é derivável em relação a α e calcule a derivada $f_R'(\alpha)$.

(5) Mostre que existe o limite

$$\lim_{R\to+\infty} f_R'(\alpha), \quad \forall \alpha > 0.$$

(6) Use os resultados anteriores para calcular

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, dx.$$

(7) Com o resultado de (3), a fórmula pode ser obtida diretamente a partir da seguinte astúcia: use coordenadas esféricas e o Teorema de Fubini para obter

$$\pi^{n/2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-s} s^{(n/2)-1} d\rho \left(\int_{S^{n-1}} d\omega\right) = \frac{1}{2}\Gamma(n/2)\left(\int_{S^{n-1}} d\omega\right).$$

Solução: (1) Usando coordenadas polares,

$$I_R(2) = 2\pi \int_0^R \mathrm{e}^{-r^2} r\, dr = \pi \int_0^{R^2} \mathrm{e}^{-u}\, du = \pi\big(1 - \mathrm{e}^{R^2}\big).$$

(2) Pelo Teorema de Fubini (em $\mathbb{R}^2$),

$$\int_{C_R(2)} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, dx = \left(\int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-r^2}\, dr\right)^2.$$

Como $B_R(2) \subset C_R(2) \subset B_{\sqrt{2}R}(2)$, temos a estimativa

$$\left(\pi\left(1 - \mathrm{e}^{R^2}\right)\right)^{1/2} \leq \int_{-R}^{R} \mathrm{e}^{-r^2}\, dr \leq \left(\pi\left(1 - \mathrm{e}^{2R^2}\right)\right)^{1/2}.$$

(3) Novamente, pelo Teorema de Fubini (agora em $\mathbb{R}^n$),

$$\left(\pi\left(1 - \mathrm{e}^{R^2}\right)\right)^{n/2} \leq \int_{C_R(n)} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, dx \leq \left(\pi\left(1 - \mathrm{e}^{2R^2}\right)\right)^{n/2},$$

de onde se conclui que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R(n)} \mathrm{e}^{-\|x\|_2^2}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{\|x\|_2^2}\, dx = \pi^{n/2}.$$

Obs: Repetindo o mesmo argumento acima, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2}.$$

(4) Se definirmos $g : (0,\infty) \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ por $g(\alpha, x) = \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}$, então g é de classe C^∞ e segue do Exercício 12.18,

$$f_R'(\alpha) = \int_{C_R(n)} \frac{\partial}{\partial\alpha} f(\alpha, x)\, dx = -\int_{C_R(n)} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx.$$

Observe que, formalmente, temos

$$\lim_{R\to\infty} f_R'(\alpha) = -\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx =: g(\alpha).$$

Se pudermos garantir que a convergência acima é uniforme em α, então, como $f_R(\alpha)$ converge pontualmente para $f(\alpha) = (\pi/\alpha)^{n/2}$, teremos

$$g(\alpha) = f'(\alpha) = -\frac{n}{2\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2}. \tag{12.3}$$

Mas, em vez de estudar essa possível convergência uniforme, vamos calcular (12.3) diretamente.

É claro que

$$\int_{B_R(n)} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx \leq -f_R'(\alpha) \leq \int_{B_{\sqrt{2}R(n)}} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx \tag{12.4}$$

Usando coordenadas esféricas, temos

$$\begin{aligned}\int_{B_R(n)} \|x\|_2^2\, \mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\, dx &= |S^{n-1}| \int_0^R \rho^{n+1}\, \mathrm{e}^{-\alpha\rho^2}\, d\rho = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \int_0^R \rho^{n+1}\, \mathrm{e}^{-\alpha\rho^2}\, d\rho \\ &= \frac{1}{\alpha\Gamma(n/2)}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2} \int_0^{\alpha R^2} u^{n/2}\, \mathrm{e}^{-u}\, du\end{aligned}$$

Sabemos que

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^{\alpha R^2} u^{n/2}\,\mathrm{e}^{-u}\,du = \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{n}{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Portanto, da desigualdade (12.4), obtemos

$$\lim_{R\to\infty} f_R'(\alpha) = -\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2\,\mathrm{e}^{-\alpha\|x\|_2^2}\,dx = -\frac{n}{2\alpha}\left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{n/2}.$$

Exercício 21. Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funções contínuas, $A \subset \mathbb{R}^n$ conjunto J-mensurável, $p, q \in (1, +\infty)$ tais que $1/p + 1/q = 1$. Mostre que

$$\left|\int_A fg\right| \le \left(\int_A |f|^p\right)^{1/p}\left(\int_A |g|^p\right)^{1/q}. \tag{12.5}$$

Estenda a desiguladade (12.5) para $A = \mathbb{R}^n$ supondo que as integrais impróprias de $|f|^p$ e $|g|^q$ existam.

Solução: Repita o argumento da prova do Corolário 2.10.

Exercício 22. *Seja G_n^+ o subconjunto de $\mathcal{M}_{n\times n}(R)$ das matrizes simétricas e positivas.*

a) Mostre que

$$\frac{1}{\sqrt{\det(A)}} = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Ax : x\rangle}{2}\right)dx, \quad \forall A \in G_n^+.$$

b) Mostre que G_n^+ é convexo e que a aplicação $A \mapsto \det(A)$ é log-côncava, isto é, $A \mapsto \ln\big(\det(A)\big)$ é côncava.

Solução: (a) Como A é matriz simétrica e positiva, o Teorema Espectral nos garante que A possui n autovalores positivos, $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. Mais precisamente, existe uma matriz unitária U tal que

$$U^T A U = D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{12.6}$$

Consideremos $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definido por $G(u) = Uu$. Então, para a substituição $x = G(u)$ temos $dx = |\det U| du = du$ e

$$\langle Ax : x\rangle = \langle AUu : Uu\rangle = \langle U^T AUu : u\rangle = \langle Du : u\rangle = \sum_{i-1}^{n} \lambda_i u_i^2.$$

Observe que a bola $B_R(0)$ (relativamente à norma euclidiana) é invariante por U, de modo que

$$\int_{B_R(0)} \exp\left(-\frac{\langle Ax : x\rangle}{2}\right)dx = \int_{B_R(0)} \exp\left(-\frac{\langle Du : u\rangle}{2}\right)du.$$

Com argumentos análogos aos da solução do Exercício 12.19, podemos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Du : u\rangle}{2}\right) du = \prod_{i=1}^{n} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\lambda_i u_i^2/2}\, du_i = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\sqrt{\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n}}.$$

Lembrando que $\det[A] = \det[D] = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$, concluímos a solução.

Observação: Uma segunda solução é considerar que toda matriz simétrica e positiva possui uma raiz quadrada, isto é, se $A \in G_n^+$, então existe $B \in G_n^+$ tal qe $B^2 = A$. Isso é consequência imediata do Teorema Espectral. De fato, se $A \in G_n^+$, então existe U unitária satisfazendo (12.6). Seja $\sqrt{D}$ a matriz definida por

$$\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

Então $B = U^T\sqrt{D}U$ é raiz quadrada de A.

Voltando ao problema, se $u = Bx$, temos $du = |\det(B)|\, dx$ e

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Ax : x\rangle}{2}\right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle B^2x : x\rangle}{2}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Bx : Bx\rangle}{2}\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\|u\|_2^2}{2}\right) \left|\frac{1}{\det(B)}\right| du = \frac{(2\pi)^{n/2}}{\det(B)}\end{aligned}$$

e concluímos a solução, já que $\det(B) = \sqrt{\det(A)}$.

(b) Queremos mostrar que

$$\det\big(\lambda A + (1-\lambda)B\big) \geq (\det A)^{\lambda}(\det B)^{1-\lambda}, \quad \forall \lambda \in [0,1]. \tag{12.7}$$

Seja $C = \lambda A + (1-\lambda)B$. Então $C \in G_n^+$ e

$$\frac{1}{\sqrt{\det(C)}} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\frac{\langle Cx : x\rangle}{2}\right) dx.$$

Para simplificar a notação, consideremos $\alpha = (2\pi)^{-n/2}$ e,

$$f(x) = \exp\left(-\frac{\langle Ax : x\rangle}{2}\right), \quad g(x) = \exp\left(-\frac{\langle Bx : x\rangle}{2}\right).$$

Então,

$$\exp\left(-\frac{\langle Cx : x\rangle}{2}\right) = f(x)^{\lambda} g(x)^{1-\lambda}.$$

Pela deigualdade de Holder (veja Exercício 12.21)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{\det(C)}} &= \alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x)^{\lambda} g(x)^{1-\lambda} a, dx \\
&\leq \alpha \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \right)^{1-\lambda} \\
&= \left(\alpha \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx \right)^{\lambda} \left(\alpha \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \right)^{1-\lambda} \\
&= \left(\frac{1}{\sqrt{\det(C)}} \right)^{\lambda} \left(\frac{1}{\sqrt{\det(C)}} \right)^{1-\lambda},
\end{aligned}$$

e a temos a desigualdade (12.7).

Exercício 23. *Seja* $\boldsymbol{u}$ *um vetor de* $\mathbb{R}^n$ *e considere a matriz* $A = [\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}]$.

(a) Mostre que A *é diagonalizável e seus autovalores são*

$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \quad \lambda_n = \|\boldsymbol{u}\|_2^2.$$

(b) Use este fato para mostrar que $\det(A) = 1 + \|\boldsymbol{u}\|_2^2$.

Solução: Se $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, a matrix A é, por definição,

$$A = \begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_2 & u_nu_2 & \cdots & u_n^2 \end{pmatrix}$$

Portanto, sendo A simétrica, ela é diagonalizável.

Observe que se $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$,

$$\begin{pmatrix} u_1^2 & u_1u_2 & \cdots & u_1u_n \\ u_2u_1 & u_2^2 & \cdots & u_2u_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_nu_2 & u_nu_2 & \cdots & u_n^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = (\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{w}) \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Portanto, o produto tensorial $\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}$ define uma transformação linear $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $L(\boldsymbol{w}) = \langle \boldsymbol{u} : \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{u}$. Em particular, podemos verificar diretamente que $\boldsymbol{u}$ é autovetor de L associaldo ao autovalor $\|\boldsymbol{u}\|_2^2$. Por outro lado, se $\boldsymbol{w}$ é ortogonal a $\boldsymbol{u}$, então $L(\boldsymbol{w}) = 0 = \langle \boldsymbol{u} : \boldsymbol{w} \rangle \boldsymbol{u}$. Como existem $n-1$ vetores ortogonais a $\boldsymbol{u}$, concluímos o item (a).

Seja $\beta = \{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_{n-1}\}$ uma base de autovetores de L. Então, a matriz de L em relação a essa base é diagonal, tendo na diagonal seus autovalores, isto é,

$$[L]_\beta = \begin{pmatrix} \|\boldsymbol{u}\|_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

e

$$[I+L]_\beta = \begin{pmatrix} 1+\|\boldsymbol{u}\|_2^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Como o determinante é invariante por mudança de bases, temos

$$\det\bigl(I + [\boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}]\bigr) = \det\bigl([I+L]_\beta\bigr) = 1 + \|\boldsymbol{u}\|_2^2.$$