

Seja $w = y dx - x dy + dz$ uma 1-forma em \mathbb{R}^3 , sejam $u, v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ funções $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Se $\eta = w - v du$ é fechada. Prove que u e v são funções que não dependem da variável z .

Pelo enunciado temos que w é 1-forma em \mathbb{R}^3 e $u, v: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, portanto u, v também são 1-forma. Também temos que η é fechado logo $d\eta = 0$, portanto:

$$\eta = w - v du \rightarrow d\eta = d(w - v du) = dw - d(v du) = 0$$

$$dw = d(v du) \\ d(y dx - x dy + dz) = dv \wedge du$$

$$dy \wedge dx - dx \wedge dy + d(dz) = dv \wedge du. \text{ Mas } d(dz) = 0 \text{ então:}$$

$$dy \wedge dx - dx \wedge dy = dv \wedge du$$

Portanto u, v não depende da variável z .

