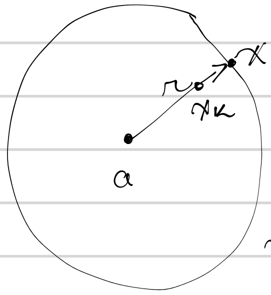
Conjuntos fechados: $X \subset \mathbb{R}^n$ e $a \in \mathbb{R}^n$, pontos de aderência a X se $a = \lim x_k$, $x_k \in X$.

Se $a \in X \rightarrow a$ é aderente a X.

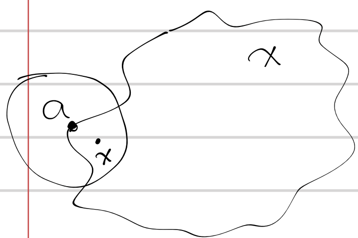


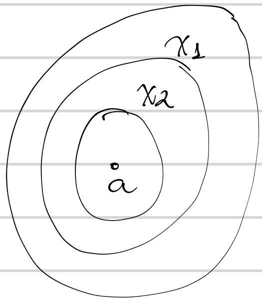
$x \in S(a,r)$
$|x-a| = r$
x é aderente a $B(a,r)$
$x = \lim x_k$
$x_k = a + \frac{k(x-a)}{k+1}$

$\bar{X}$: conjunto dos pontos aderentes a X
↳ fecho de X.

X é fechado quando: $X = \bar{X}$ e se $a = \lim x_k$, $x_k \in X$ $\rightarrow a \in X$

$B[a,r] = \overline{B(a,r)}$, temos que: $a \in \bar{X} \Leftrightarrow \forall r>0,\ B(a,r) \cap X \neq \emptyset$.

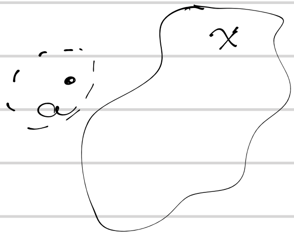




- Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\Leftrightarrow (\mathbb{R}^n - X) = X^c$ é aberto:

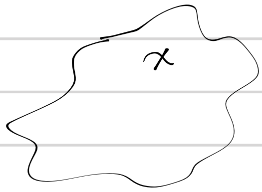
$a \in X^c \rightarrow a \in \bar{X}$

. Se X é fechado:



$B(a,r) \in X^c$

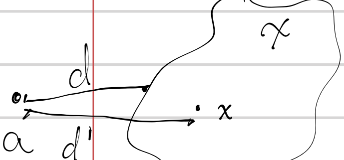
- $\bar{X}$ é fechado $(\bar{\bar{X}} = \bar{X})$:



, Basta que $\bar{\bar{X}} \subset \bar{X}$
Se $X \subset Y \rightarrow \bar{X} \subset \bar{Y}$
$\overline{X \cup Y} = \bar{X} \cup \bar{Y}$

$\overline{X \cap Y} \subset \bar{X} \cap \bar{Y}$

- $a \in \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^n$, $\inf\{|a-x|, x \in X\} = d(a,X) = \lim |a-x_k|$, onde $x_k \in X$
(x_k) é limitada em $\mathbb{R}^n$, toda sequência limitada em $\mathbb{R}^n$ possui uma sequência convergente $(x_k)_{k \in \mathbb{N}'}$, sendo X fechado então $d(a,X) = |a - \bar{x}|$, $\bar{x} \in X$



A reunião finita de conjuntos fechados é fechado: $\overline{F_1 \cup \ldots \cup F_n} = F_1 \cup \ldots \cup F_n$

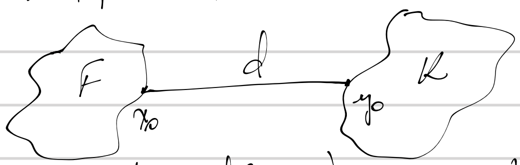
$(F_\lambda)_{\lambda \in L}$, família de conjuntos fechados $\rightarrow \cap F_\lambda$ é fechado

- Se $X \subset \mathbb{R}^n$ e $F \subset X$ sendo fechado em X, então ponto aderente a F:
se $a \in F$ é aderente $\rightarrow a \in F$
$F = G \cap X$ e G = fecho de F em $\mathbb{R}^n$

- Se $F \subset X$ fechado em $X \leftrightarrow (X - F)$ é aberto em X

Conjuntos compactos: é um conjunto limitado e fechado $\{ B[a,r]$
$X \subset \mathbb{R}^n$ compacto: X limitado e fechado

$F, K \subset \mathbb{R}^n$ e F é fechado e K compacto $\rightarrow \exists\, x_0 \in F$, $y_0 \in K$ tais que:
$|x_0 - y_0| = d(F,K)$, é a menor distância entre pontos dele.

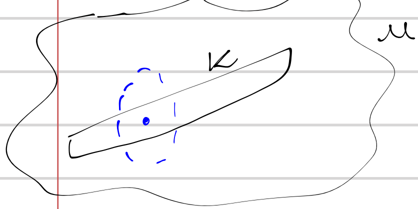


$d(X,Y) = \inf\{|x-y|,\ x \in X \text{ e } y \in Y\}$

$\exists\, x_0 \in F$ e $y_0 \in K$, $|x_0 - y_0| = d(F,K) = \inf\{|x-y|,\ x \in F \text{ e } y \in K\}$
$= \lim |x_k - y_k|,\ x_k \in F \text{ e } y_k \in K$

$\exists\, y_0 = \lim_{r \in \mathbb{N}'} y_r \in K$ e $(x_r)_{r \in \mathbb{N}'}$ em F, é limitada

- Se um compacto K e um aberto U estão contidos em $\mathbb{R}^n$: $K \subset U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow$
$\exists\, \varepsilon > 0,\ B(x,\varepsilon) \subset U\ \forall x \in K$



$x \in K,\ |y - x| < \varepsilon \rightarrow y \in U$

- Se $K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_k \supset \ldots$ compactos $\neq \emptyset \rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} K_k \neq \emptyset$

Teorema de Borel Lebesgue: "Cobertura"

$(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ é uma cobertura de X, quando $X \subset \bigcup_{\lambda \in L} C_\lambda$, isto é $\forall x \in X\ \exists\, \lambda \in L$, e $x \in C_\lambda$.

"Toda cobertura aberta de um conjunto compacto admite uma subcobertura finita."

Se for possível cobrir um compacto com uma família de abertos $(C_\lambda)_{\lambda \in L}$ então pode-se dispensar o compacto e ficar com a família finita de abertos.

Lema: Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto, $\forall\, \varepsilon > 0$ tem-se $K = K_1 \cup \ldots \cup K_k$, onde K_i é compacto e tem diâmetro menor do que ε.

- diâmetro é o sup das distâncias entre 2 elementos quaisquer do conjunto