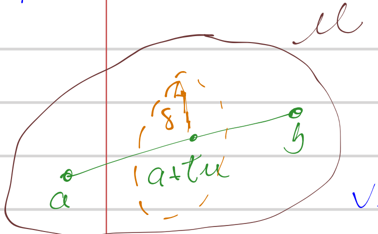
17) Sejam $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$ aberto, $[a,b] \subset \mathcal{U}$ um segmento de reta, $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Prove que, cada $y \in \mathbb{R}^n$ existe $c_y \in (a,b)$ tal que:

$$\langle f(b) - f(a), y \rangle = \langle f'(x).(c_y)(b-a), y \rangle$$

Temos que $\mathcal{U} \in \mathbb{R}^n$ é um aberto, e $[a,b] \in \mathcal{U}$ é um segmento de linha e $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ é uma função contínua em $[a,b]$ e diferenciável em (a,b). Para provar que todo $y \in \mathbb{R}^n$ existe $c_y \in (a,b)$ sendo que:

$$\langle f(b) - f(a), y \rangle = \langle f'(x)(c_y).(b-a), y \rangle$$

Desta forma temos $f: \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável em cada ponto do conjunto $\mathcal{U}$, então $u = b-a$ (I). Como $\mathcal{U}$ é um aberto e $[a,b] \subset \mathcal{U}$, temos que existe $\delta > 0$ tal que $a + tu \in \mathcal{U}$ para qualquer real $t \in (-\delta, 1+\delta)$.



Agora ao fixar um $y \in \mathbb{R}^n$, que é arbitrário definimos: $g: (-\delta, 1+\delta) \to \mathbb{R}^n$ para:
$g(t) = y.f(a+t)$, com $t \in [-\delta, 1+\delta]$, e y é um vetor $y = \{y_1, \dots, y_n\}$

Esta função g é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$, agora usando o teorema do valor médio para uma dimensão, temos que existe $\theta \in (0,1)$ sendo que: $g(1) - g(0) = g'(\theta)$., (II)
E voltando a (I), temos que:
$g(1) = y.f(a+tu)$, se $t=1 \to y.f(a+u)$ e como $u = b-a$, temos que: $g(1) = y.f(a+(b-a)) = y.f(b)$; e também,
$g(0) = y\, f(a+tu)$, se $t=0 \to y.f(a)$

Assim: $g(1) = y.f(b)$ e $g(0) = y.f(a)$., (III)

Portanto, temos que:
$g(t) = y.f(a+tu)$, derivando em $t \to g'(t) = y.f'(x)(a+tu).u$", se $t = \theta$ e $u = b-a$"
$g'(\theta) = y.f'(x)(a+\theta u).(b-a)$
$g'(\theta) = y.f'(x)(a+\theta(b-a)).(b-a) = y.f'(x)(a+\theta b - \theta a)(b-a) =$
$y.f'(x)(a(1-\theta)+\theta b)(b-a)$

E como $a(1-\theta) + b\theta \in \mathcal{U}$, tomamos $c_y = a(1-\theta) + b\theta$., (IV)

Assim ao substituir (III) e (IV), na equação (II), temos:

$$g(1) - g(0) = g'(\theta)$$
$$y \cdot f(b) - y \cdot f(a) = y \cdot f'(x)\,(a(1-\theta) + b\theta)(b-a)$$
$$y \cdot f(b) - y \cdot f(a) = y \cdot f'(x)\,(c_y)(b-a)$$

Como y é um vetor $(y = \{y_1, \dots, y_n\}) \in \mathbb{R}^n$ e o produto interno é comutativo no espaço vetorial real, temos:

$$y \cdot f(b) - y \cdot f(a) = y\, f'(x)(c_y)(b-a)$$

$$\langle f(b) - f(a), y \rangle = y f'(x)(c_y) \cdot b - y f'(x)(c_y) \cdot a$$

$$\langle f(b) - f(a), y \rangle = \langle f'(x)(c_y) b - f'(x)(c_y) \cdot a, y \rangle$$

$$\langle f(b) - f(a), y \rangle = \langle f'(x)(c_y)(b-a), y \rangle$$

$\blacksquare$