Se $X \subset \mathbb{R}^m$ tem volume zero, o mesmo ocorre com $\bar{X}$. É medida nula?

Por definição os conjuntos de medida nula possui aplicações invariantes na classe C^1 e tem interior vazio. Desta forma os conjuntos de medida nula são tão pequeno que seus complementares são não vazios. Assim dado $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula, e então $\text{med.}(X) = 0$ se para todo $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter uma sequência de cubos m-dimensionais abertos $C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots$ tais que: $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol. } C_i < \varepsilon$. Ou seja X tem volume menor do que ε, e como ε é um valor arbitrário muito pequeno, temos que: $\sum_{i=1}^{\infty} \text{vol. } C_1 \cong 0$.

Como $\bar{X}$ é o fecho de $X \subset \mathbb{R}^m$, ou seja, a fronteira onde todos os pontos pertencem a $\bar{X}$ no interior desde a fronteira, então.

Seja $\bar{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{X}_i$, mas $\bar{X} \supset X$, como X tem medida nula, então

$\bar{X} = \bigcup(\text{todos os pontos da fronteira}) + \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$. Assim dado $\varepsilon > 0$ podemos obter, para cada $i \in \mathbb{N}$, uma sequência de cubos abertos $C_1, C_2, \ldots, C_{ij}, \ldots$ tais que $X_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij}$ e $\sum_j \text{vol. } C_{ij} < \varepsilon/2^i$.

Então X está contido na reunião (enumerável) de todos os C_{ij}. Dado qualquer subconjunto finito $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(i,j) \in F \rightarrow i \le k, j \le k$, logo:

$$\sum_{(i,j) \in F} \text{Vol.}(C_{ij}) \le \sum_{j=1}^{k} \left[\sum_{i=1}^{k} \text{vol}(C_{ij}) \right] < \sum_{i=1}^{k} \varepsilon/2^i < \varepsilon$$

Portanto, seja qual for a maneira de enumerar os C_{ij} numa sequência, teremos $\sum_{ij} \text{vol.}(C_{ij}) \le \varepsilon$, ou seja $\text{med. } X = 0 \rightarrow \text{Vol.}(X) = 0$

Mas o fecho de X, dado por $\bar{X}$, contém somente os pontos da fronteira de X, então:

$\bar{X} = \sum_{ij} \text{vol. } (C_{ij}) \doteq \varepsilon$, onde ε é o raio em cada C_{ij}.

Como int. $(X) = \phi$ então X e $\bar{X}$ tem medida nula. Caso contrário o $int(X) \neq \phi$ porque $\bar{X}$ inclui somente os pontos da fronteira e com isso X não teria medida nula. Com isso contradiz o enunciado.