Teorema: $f: A \to \mathbb{R}$ é integrável $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$ existe uma partição P de A tal que $S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$.

Temos que $\overline{\int_A} f(x)\,dx = \inf_{P \supset P_0} S(f;P)$ e $\underline{\int_A} f(x)\,dx = \sup_{P \supset P_0} s(f,P)$

Corolário: Seja $f: A \to \mathbb{R}$ limitada. Para quaisquer partições P e Q do Bloco A, tem-se $s(f;P) \leq S(f;Q)$.

Resposta: Sejam σ o conjunto das somas inferiores e Σ o conjunto das somas superiores de f. Então:

$$\underline{\int_A} f(x)\,dx = \sup_{P \supset P_0} s(f;P) = \sigma \qquad \overline{\int_A} f(x)\,dx = \inf_{P \supset P_0} S(f;P) = \Sigma$$

Temos então que se $s \in \sigma$ e $S \in \Sigma$, então $s < S$ e com isso:

$\sup \sigma \leq \inf \Sigma$

Para f ser integrável então: $\sup \sigma = \inf \Sigma$ para todo $\varepsilon > 0$, mas:

$s = s(f;P) \in \sigma$ e $S = S(f;Q) \in \Sigma$, sendo $P \subset Q$. Assim:

$\sup \sigma = \inf \Sigma \to \sup \sigma - \inf \Sigma = 0$ ou $\sup \sigma - \inf \Sigma < \varepsilon$

Então se $\sup \sigma = \inf \Sigma \to \sup \sigma - \inf \Sigma = 0$, logo é integrável.
Agora se tomarmos uma bola de raio ε, temos que para f ser integrável, dado $\varepsilon > 0$, obtemos duas partições P' e P'' tais que $P = P' + P''$ e $P' \subset P''$, ou seja, P'' é mais refinada que P'. Então:
$s(f,P'') \leq S(f,P'')$ e $s(f,P') \leq S(f,P'')$, mas $s(f,P'') \geq s(f,P')$ e $S(f,P') \geq S(f,P'')$, então:

$$S(f,P') = s(f,P') + \frac{\varepsilon}{2} \to s(f,P') = S(f,P') - \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } S(f,P'') = s(f,P'') + \frac{\varepsilon}{2} \to$$

Pelo corolário quaisquer 2 partições P' e P'' de A, temos que: $s(f,P') \leq S(f,P'')$, então $S(f,P'') - s(f,P') < \varepsilon$ então:
$S(f,P') + S(f,P'') - s(f,P') + s(f,P'') < \varepsilon$
$S(f,P) - s(f,P) < \varepsilon$. Portanto é integrável.