Se $\underline{\int}_A \chi_\chi(x)\,dx = 0$ e $\overline{\int}_A \chi_\chi(x)\,dx = 1$, então $\int_A \chi_\chi(x)\,dx$ não é integrável.

Seja $f: A \to \mathbb{R}$ limitada no bloco $A \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que f é integrável quando sua integral inferior for igual à sua integral superior, então:

$$\underline{\int}_A f(x)\,dx = \overline{\int}_A f(x)\,dx = \int_A f(x)\,dx$$

Agora tomando o enunciado dado um bloco A dos números reais onde:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Então podemos separar todos os racionais e irracionais no bloco A. Temos que $\mathbb{Q}$ e $(A - \mathbb{Q})$ são densos no bloco A.

Tomamos a função característica do subconjunto $\mathbb{Q}$, e chamaremos $\mathbb{Q}$ de X, então:

$$\chi_X : A \to \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto x : \begin{cases} 0, & \text{se } x \notin X \\ 1, & \text{se } x \in X \end{cases}$$

Como $0 < 1$, então:

$$\underline{\int}_A \chi_X(x)\,dx = 0, \text{ para todo } x \notin X$$

$$\overline{\int}_A \chi_X(x)\,dx = 1, \text{ para todo } x \in X$$

Isto vale para toda a partição P do bloco A, e para toda subpartição de P em A. Então:

$m_X = 0$ e $M_X = 1$

$W_X = 1 > \varepsilon$

E portanto $s(\chi_X, P) = 0 \neq S(\chi_X, P) = 1$, portanto não é integrável, seja qualquer partição do bloco $A \in \mathbb{R}$.