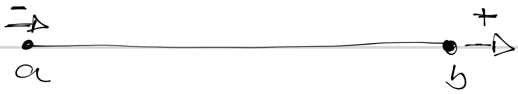
$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ função derivável

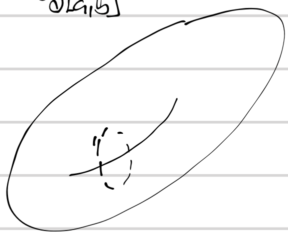
Teorema fundamental do Calculo: $\int_a^b f'(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$\partial[a,b] = \{a,b\}$
$= +b - a$



$$\int_{[a,b]} f'(x)\,dx = \int_{\partial[a,b]} f(x)\,dx = f(b) - f(a)$$

$w = f(x)\,dx$, $dw = f'(x)\,dx$; $\int_{[a,b]} dw = \int_{\partial[a,b]} w$, Teorema de Stokes,



X

$$\int_X dw = \int_{\partial X} w$$

$f:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$, diferencial

$f'(a):\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ aplicação linear
$v \to f'(a).v$

$f':\mathbb{R}^N \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M) \simeq \mathbb{R}^{M.N}$
$a \to f'(a)$

$f'':\mathbb{R}^N \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathcal{L}(\mathbb{R}^N,\mathbb{R}^M)) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R}^M)$
$a \to f''(a): \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$
$(v,w) \to f''(a).v.w$ Bilinear

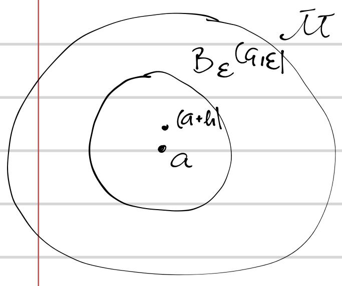
<u>Aplicações diferenciáveis</u>: $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$, f é diferenciável se existe $f'(a)$ tal que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a).h \right) = 0$$

Seja $f:U \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ uma aplicação U aberto: f é diferenciável em $a \in U$ se existe uma transformação linear $T:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ tal que

$$\lim_{h \to 0} \frac{|f(a+h) - f(a) - T.h|}{|h|} = 0 \quad , h \to Th$$



$(a+h) \in U$
$T:\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^M$ é chamado derivada de f em a e $T = Df(a)$ ou $T = f'(a)$ ou $T = df(a)$
$r(h) = f(a+h) - f(a) - T.h$
f é diferenciável se $f(a+h)$, se existe:

$h \to 0$

$f(a+h) = f(a) + T.h + r(h)$, com $\lim_{h\to 0} \frac{|r(h)|}{|h|} = 0 = \lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|}$

Aula 2 – 24/05/21; Observação: $\forall |h| < \varepsilon$, podemos definir ρ.

$\rho(h) = \begin{cases} \frac{r(h)}{|h|}, & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases}$. onde $f(a+h) = f(a) + f'(a).h + r(h)$, se f é diferenciável em $a \to \rho(h)$ é contínua em $h=0$ e $f(a+h) = f(a) + f'(a).h + \rho(h)|h|$

2) A derivada $f'(a)$ é única!
De fato, se temos outra $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear tal que: $f(a+h) = f(a) + T.h + r(h) \to T = f'(a)$

$\to \forall t \neq 0$, temos: $T(h) = \frac{T(th)}{t} = \frac{f(a+th) - f(a)}{t} \pm \frac{r(th)|h|}{|th|}$

Tomando o limite $t \to 0$, $T(h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = f'(a).h \to$
$T = f'(a)$

3) Se f é diferenciável em $a \to f$ é contínua em a. Exercício
O recíproco é falso, dê um exemplo.

4) Se $f(x) = c$, $\forall x \in U \subset \mathbb{R}^m$ - função constante $\to f$ é diferenciável em todos os pontos de U. E $f'(x) = 0$ $\forall x \in U$.

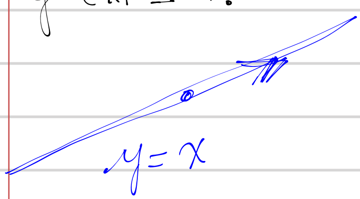
Fixa $x \in U$, $\underbrace{f(x+h)}_{c} = \underbrace{f(x)}_{c} + \underbrace{0}_{f'}.h + \underbrace{r(h)}_{0}$

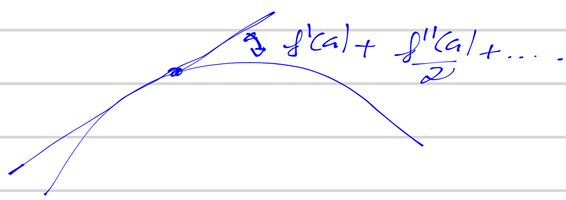
5) Se $f(x) = Tx$, $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ linear, então f é diferenciável em $\mathbb{R}^m$ e $f'(x) = T$ $\forall x \in \mathbb{R}^m$.

$f(x+h) = \underbrace{f(x)}_{\text{ponto}} + \underbrace{T.h}_{\text{dev. } f'(x)=T} + \underbrace{r(h)}_{\text{falta}}$

$\boxed{r(h) = f(x+h) - f(x) - T.h}$

$r(h) = T(x+h) - T.x - T.h \to r(h) = Tx + Th - Tx - Th = 0 \to$
Portanto $f'(x) = T$.





6) Transformações bilineares: $B: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ (linear em cada coordenada)

Temos que B é diferenciável em $(\underbrace{\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n}_{\text{Domínio}})$. Para $(a,b) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$,

$$\boxed{B'(a,b)\cdot(h,k) = B(a,k) + B(h,b)} \quad \forall (h,k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$$

Prova: Norma do sup.

Propriedade: dada B bilinear, existe uma constante $c>0$ tq $|B(h,k)| \leq c\,|h|\,|k|$ $\forall (h,k) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Seja $r(h,k) = B(a+h, b+k) - B(a,b) - B(a,k) - B(h,b)$

$$r(h,k) = \cancel{B(a,b)} + \cancel{B(a,k)} + \cancel{B(h,b)} + B(h,k) - \cancel{B(a,b)} - \cancel{B(a,k)} - \cancel{B(h,b)}$$

$$r(h,k) = B(h,k)$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{|(h,k)|_M} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{B(h,k)}{|(h,k)|_M} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{B(h,k)}{\sup\{|h|,|k|\}}$$

$\sup\{|h|,|k|\}$, $\exists\, c>0$ tal que $\dfrac{|B(h,k)|}{\sup\{|h|,|k|\}} \leq \dfrac{c\,|h|\,|k|}{\sup\{|h|,|k|\}}$

$$\underset{\downarrow\; 0}{0} \leq \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|B(h,k)|}{\sup\{|h|,|k|\}}}_{\downarrow\; 0} \leq c \cdot \underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h|\,|k|}{\sup\{|h|,|k|\}}}_{\downarrow\; 0}$$

→ Teorema do confronto

Produto interno: $\langle\, ,\, \rangle : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

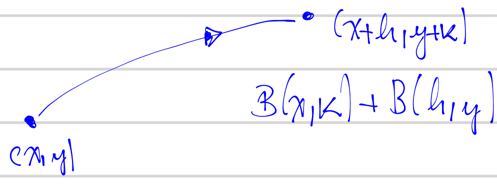
$$(x,y) \longrightarrow \langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

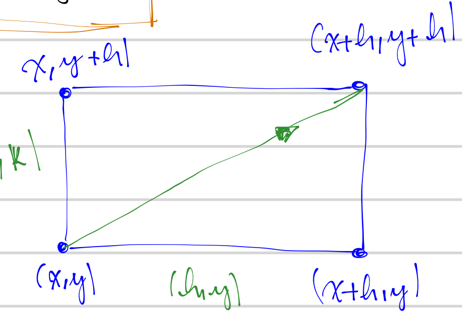
Como $\langle\, ,\, \rangle$ é bilinear $\longrightarrow$ $\langle\, ,\, \rangle$ é diferenciável em todos os pontos

$$\boxed{f(x,y) = \langle x,y \rangle \quad e \quad f'(x,y)(h,k) = \langle x,k \rangle + \langle h,y \rangle}$$

$x = (x_1, \dots, x_m)$
$y = (y_1, \dots, y_m)$
$h = (h_1, \dots, h_m)$
$k = (k_1, \dots, k_m)$

Exemplo: $f(x,y) = \langle g(x), h(y) \rangle$





Seja $f(x) = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$ e $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \to f'(x).v = \langle x, v\rangle + \langle v, x\rangle = 2\langle x, v\rangle$
$\forall v \in \mathbb{R}^n$ "O produto interno é comutativo"

Matriz inversível: $A \in M_{n\times n}$ é inversível $\leftrightarrow \det(A) \neq 0$, ou as colunas são L.I.

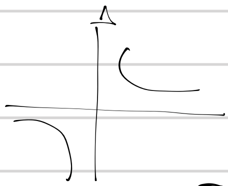
$GL(\mathbb{R}^n) = \{A \in M_{n\times n} : A$ é inversível$\}$ é um grupo linear.

$GL(\mathbb{R}^n) \subset \mathbb{R}^{n\times n}$

Exercício: Mostre que $GL(\mathbb{R}^n)$ é aberto. Ex: $n=1$, $GL(\mathbb{R}) = \{a : a \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\} \subset \mathbb{R}$ é aberto "Um aberto menos um ponto é aberto".

Vamos considerar: $f: \overset{\to \text{ abertos (está bem definida)}}{GL(\mathbb{R}^n)} \to L(\mathbb{R}^n)$
$X \longrightarrow f(x) = X^{-1}$

Aplicação inversa: $f(x) = 1/x \quad \forall x \neq 0$



Afirmação: f é uma função diferenciável em $f'(X).H = -X^{-1}.H.X^{-1}$, $\forall H \in L(\mathbb{R}^n)$ e $\forall X \in GL(\mathbb{R}^n)$

De fato, $r(h) = f(X+H) - f(X) + X^{-1}.H.X^{-1}$
$= (X+H)^{-1} - X^{-1} + X^{-1}.H.X^{-1}$

$r(h).(X+H) = I - X^{-1}(X+H) + X^{-1}.H.X^{-1}.(X+H)$
$= \cancel{I} - \cancel{I} - \cancel{X^{-1}H} + \cancel{X^{-1}H} + X^{-1}.H.X^{-1}(X) + X^{-1}HX^{-1}H$
$= X^{-1}HX^{-1}H$

$r(h)(X+H)(X+H)^{-1} = X^{-1}HX^{-1}H(X+H)^{-1}$

$$\boxed{r(h) = X^{-1}HX^{-1}H(X+H)^{-1}}$$

$|r(H)| = |X^{-1}HX^{-1}H(X+H)^{-1}| \leq |X^{-1}|^2|H|^2|(X+1)^{-1}|$

$0 \leq \underbrace{\dfrac{|r(H)|}{|H|}}_{0} \leq \underbrace{|X^{-1}|^2 \underset{\downarrow 0}{|H|}\, |(X+1)^{-1}|}_{\to 0}$, se $H \to 0$

$\hookrightarrow$ pelo teorema do confronto $\to \lim_{H\to 0} \dfrac{r(H)}{|H|} = 0$

Seja $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ e $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$, onde f_i são as chamadas funções coordenadas de f.
$f_i: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$

Exercício: f é diferenciável em $a \in U \leftrightarrow f_i$ é diferenciável em $a \in U$, $\forall i = 1, \ldots, n$. "Se quiser verificar se uma função é diferenciável, basta verificar se é para as coordenadas no ponto.

Derivada parcial: ① Dado $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ função diferenciável em $a \in U$,

$\to f'(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ aplicação linear, tomando a base canônica $\{e_1, \ldots, e_m\}$ de $\mathbb{R}^m$. ① Definimos a derivada parcial de f em relação a j-ésima coordenada no ponto $\underline{a}$ por: $\frac{\partial f}{\partial x_j} = f'(a) \cdot e_j = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+te_j) - f(a)}{t}$

$j = 1, \ldots, m$

Vetor da derivada parcial

Matriz Jacobiana: $f: U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$

Seja $a \in U$, $f'(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$, aplicação linear e tomando as bases canônicas de $\mathbb{R}^m$ e $\mathbb{R}^n$ temos que $f'(a)$ corresponde a uma matriz $Jf(a)_{n \times m}$;
(N = linhas, M = colunas), que é dada da seguinte forma: $f = (f_1, \ldots, f_n)$

Ex: $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\quad Jf(a,b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(a,b)}{\partial x} & \frac{\partial f(a,b)}{\partial y} \end{bmatrix}_{1 \times 2} = \begin{bmatrix} \nabla f(a,b) \end{bmatrix}$

$$Jf(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & & & \frac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{bmatrix}_{n \times m} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(a) \\ \vdots \\ \nabla f_n(a) \end{bmatrix}$$

$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$

Exemplo: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 \therefore f(x,y,z) = (x^2 + y^3 - z^2, x^2 - y^2)$

$$Jf(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2x & 3y & -2z \\ 2x & -2y & 0 \end{bmatrix}_{2 \times 3}$$