Se f é diferenciável em $a \to f$ é contínua em a. Mas o recíproco é falso.

Teorema: Se f é diferenciável em $p \in \mathbb{R} \to f$ é contínua em p,

Se f não for contínua $\to f$ não é derivável

Exemplo: $f(x) = \begin{cases} 2-x, & \text{se } x < 2 \\ -2x+1, & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$

Queremos saber se f é diferenciável em $p=2$, utilizando o teorema anterior, precisamos verificar a continuidade em $p=2$.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -2x+1 = -2\cdot 2+1 = -3$$

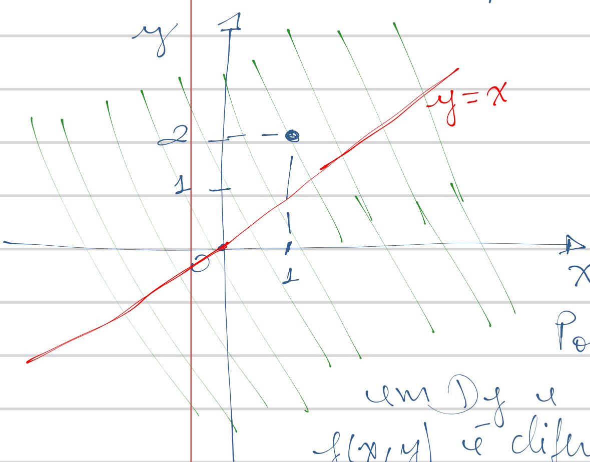
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 2-x = 2-2 = 0$$

Com isso temos que o limite não existe e portanto f não é contínua em $p=2$ e com isso não é derivável.

Teorema: Sejam $A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com A aberto, e $(x_0, y_0) \in A$.

As derivadas parciais de f existem em A e são contínuas em (x_0,y_0) $\to f$ é diferenciável em (x_0,y_0). Mas $\not\leftarrow$ f é diferenciável em (x_0,y_0).

Exemplo: $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y}$ é diferenciável no ponto $(1,2)$. Com efeito, o domínio de f é o conjunto: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \neq y\}$



Portanto D_f é um conjunto aberto. Temos que:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{0.(x-y) - 1.1}{(x-y)^2} = \frac{-1}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{0.(x-y) - 1(-1)}{(x-y)^2} = \frac{1}{(x-y)^2}$$

Portanto as derivadas parciais de f existem em D_f e são contínuas em $(1,2)$. Assim pelo teorema $f(x,y)$ é diferenciável em $(1,2)$.

Tomamos agora uma função $f(x,y)$ diferenciável em $B \subset D_f$, se $f(x,y)$ é diferenciável em todos os pontos de B. Temos que $f(x,y)$ é diferenciável

Tomamos a função: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x\,y}{x^2+y^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Temos as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{y^3 - x^2 y}{(x^2+y^2)^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^2 x}{(x^2+y^2)^2}, & se\ (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & se\ (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Embora f possui as derivadas parciais em $(0,0)$, a f não é contínua em $(0,0)$.

$$\lim_{t\to 0} f_x(0,t) = \lim_{t\to 0} \frac{(t^3 - 0 \cdot t)}{(0+t^2)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{t^3}{t^4} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} = \text{Não existe.}$$

$$\lim_{t\to 0} f_y(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{(t^3 - 0 \cdot t)}{(t^2+0)^2} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} = \text{Não existe}$$

Então a $f(x,y)$ não é contínua mas as derivadas parciais existem.