Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis no ponto $a \in U$, com $f(a) = g(a)$. Então $f'(a) = g'(a)$ se e somente se:

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = 0$$

Como f, g são diferenciáveis em a, e com $f(a) = g(a)$, temos:

$$f'(a) = g'(a) \to f(a+v) - \cancel{f(a)} - r_f(v) = g(a+v) - \cancel{g(a)} - r_g(v)$$

$$\to \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = \frac{r_f(v) - r_g(v)}{|v|}$$, isto porque $f(a) = g(a)$

$$\to \lim_{v \to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = \lim_{v \to 0} \frac{r_f(v) - r_g(v)}{|v|}$$

$$\to \lim_{v \to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = 0$$

Agora a volta: $\lim_{v \to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = 0 \to \lim_{t \to 0} \frac{f(a+tu) - g(a+tu)}{|tu|} = 0$

$$\to \lim_{t \to 0} \frac{f'(a)(tu) - g'(a)(tu) + r_f(tu) - r_g(tu)}{|tu|} = 0$$

$$\to \lim_{t \to 0} \pm \frac{f'(a).u - g'(a).u}{|u|} + \underbrace{\lim_{t \to 0} \frac{r_f(tu) - r_g(tu)}{|tu|}}_{\to 0} = 0$$

$$\to \lim_{t \to 0} \pm \frac{f'(a).u - g'(a).u}{|u|} = 0$$

$$\to f'(a).u - g'(a).u = 0, \ \forall u \in \mathbb{R}^m$$

$$\to f'(a) = g'(a)$$