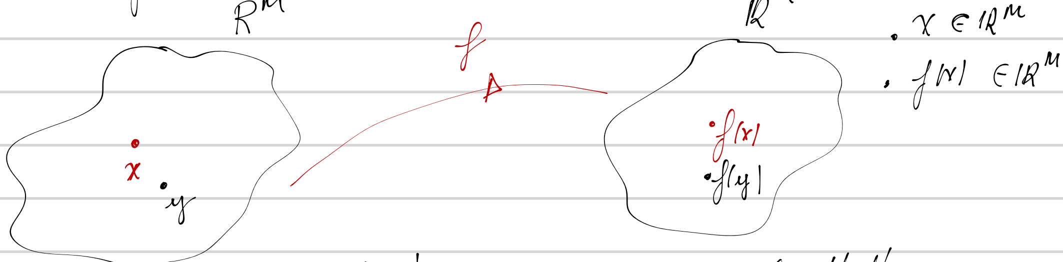
Seja $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ uma função de classe C^1 tal que $\|f'(x).v\| = \|v\|$ para todo $x, v \in \mathbb{R}^m$ (onde $\|.\|$ é a norma euclidiana). Prove que f satisfaz:

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^m$$

Corolário 3: Se a aplicação $f: U \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ é diferenciável no ponto $a \in U$, admite uma inversa $g = f^{-1}: V \to \mathbb{R}^m$, definida no aberto $V \subset \mathbb{R}^n$ e diferenciável no ponto $b = f(a)$, então $f'(a): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, cujo inverso é $g'(b): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Em particular, $m = n$.

Uma consequência do corolário acima, se $f: U \to V$ é um difeomorfismo entre abertos $U \subset \mathbb{R}^m$ e $V \subset \mathbb{R}^{n=m}$ (bijeção, com f e f^{-1} ambas diferenciáveis), então, para todo $x \in U$, a derivada $f'(x): \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo. Em particular, $m = n$ e $U, V \subset \mathbb{R}^m$ são abertos do mesmo espaço euclidiano.

Resposta: ① Dado $f: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1:



Foi dado que: $\|f'(x).v\| = \|v\| \quad \forall x, v \in \mathbb{R}^m$, onde $\|.\|$ é uma norma euclidiana.

Tomamos agora $x, y \in \mathbb{R}^m$, são arbitrários e $x \neq y$ e tomamos:

$$\alpha: [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longrightarrow \alpha(t) = \langle f(a + t(b-a)), b-a \rangle$$

Seja α contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$, então existe $\theta \in (0,1)$ tal que $\alpha(1) - \alpha(0) = \alpha'(\theta)$, então:

$$\langle f(y), y - x \rangle - \langle f(x), y - x \rangle = \langle f'(x + \theta(y-x))(y-x), y - x \rangle \longrightarrow$$

$$\langle f(y) - f(x), y - x \rangle = \langle f'(x + \theta(y-x))(y-x), y - x \rangle \longrightarrow$$

$$\langle f(y) - f(x), y - x \rangle - \langle f'(x + \theta(y-x))(y-x), y - x \rangle = 0$$

$$\langle f(y) - f(x) - f'(x + \theta(y-x))(y-x), y - x \rangle = 0, \quad y - x \neq 0 \longrightarrow$$

$f(y) - f(x) - f'(x + \theta(y-x))(y-x) = 0 \longrightarrow$

$f(y) - f(x) = f'(x + \theta(y-x))(y-x) \longrightarrow$

$\|f(y) - f(x)\| = \|f'(x + \theta(y-x))(y-x)\| \longrightarrow$

$\|f(y) - f(x)\| = \|y - x\|$, com isso temos que f é uma isometria $\forall x, y \in \mathbb{R}^m$.

ou: $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$, basta trocar a ordem de x e y no início.