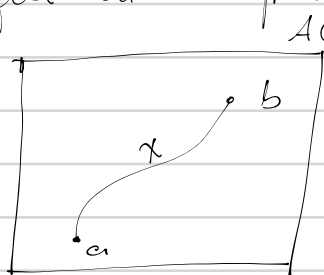


Mostre que um segmento em um retângulo tem medida nula.



Teorema 5: Um conjunto limitado  $x \subset \mathbb{R}^m$  é f-  
mensurável si, e somente si, sua fronteira  $\partial x$  tem  
medida nula.

Tomamos um bloco  $A \subset \mathbb{R}^m$  e  $\chi$  o conjunto dos pontos de descontini-  
dade da função característica:

$$\chi \chi = A \rightarrow \mathbb{R}, \chi \chi = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in [a, b] \\ 0, & \text{se } x \notin [a, b] \end{cases}$$

Desta forma  $\text{int.}(A)$  contém  $(0, 1]$ , mas um segmento é composto  
por pontos, e como cada ponto tem medida nula. Então um  
segmento é um conjunto de pontos de medida-nula.

Também podemos dizer que  $\bar{\chi} = \partial \chi$ , mas  $\partial \chi = \chi$  então  $\partial \chi$  também tem  
medida nula, como  $\chi = [a, b] \subset \text{int.}(A)$  e pela função característica  
temos que  $|A - \chi| > |\chi|$ , então o segmento  $[a, b]$  possui medida  
nula em relação ao bloco  $A$ .