Na aula foi demonstrado o Teorema de Mudança de Variável, faltou demonstrar o seguinte: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um m-bloco aberto e $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear inversível. Então:

$$\int_{T(A)} 1 = \int_A |\det T'|$$

① Dê uma prova deste fato, assim a prova do Teorema de Mudança de variável será completa.

Pelo teorema de mudança de variáveis temos:

"Seja $g: X \to \mathbb{R}^n$ uma função de classe C^1 injetora no aberto $X \subset \mathbb{R}^n$ tal que $g'(x)$ é não singular para todo $x \in X$. Se $f: g(x) \to \mathbb{R}$ é integrável, então $(f \circ g)|\det g'|: X \to \mathbb{R}$ é integrável e:

$$\int_{g(x)} f = \int_X (f \circ g)\, |\det g'|.$$

Como foi provado em aula o teorema é valido, com isso temos:

i) $g: X \to \mathbb{R}^n$ e $h: Y \to \mathbb{R}^n$, com $g(X) \subset Y$, então será válido para a composição $h \circ g: X \to \mathbb{R}^n$. De fato:

$$\int_{h \circ g} f = \int_{g(x)} (f \circ h)\, |\det h'| = \int_X [(f \circ h) \circ g]\, [|\det h'| \circ g] |\det g'| =$$

$$\int_X [(f \circ h) \circ g] |\det (h \circ g)'|.$$

ii) g é linear. De fato para todo retangulo aberto $V \subset X$ temos que:

$$\int_{g(V)} 1 = \int_V |\det g'|$$

Agora tomando i, ii podemos assumir para qualquer $x \in X$ que $g'(x) = I$, pois trocando g pela composição $g'(x)^{-1} \circ g$, temos que $(g'(x)^{-1} \circ g)'(x) = I$, e como o teorema é válido para $g'(x)$, será valido para $g'(x)^{-1} \circ g$ então teremos:

$g'(x) \circ g'(x)^{-1} \circ g = g.$

Tomamos agora por indução sobre n, e supomos que o teorema é válido para dimensão $n-1$.

Para cada $x_0 \in X$ é suficiente encontrar uma vizinhança aberta $U \subset X$ de x_0 para o qual o teorema é válido, então podemos supor que $g'(x_0) = I$.

Seja agora $h: X \to \mathbb{R}^n$ dada por $h(x) = (g_1(x), \ldots, g_{n-1}(x), x_n)$, onde $x = (x_1, \ldots, x_n)$, com isso $h'(x_0) = I$. Portanto existe uma vizinhança aberta $U' \subset X$ de x_0, tal que h é injetora e $\det h'(x) \neq 0$.

Logo fica bem definido que a função $k: h(U') \to \mathbb{R}^n$ por $k(x) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, g_n(h^{-1}(x)))$ e temos que $g = k \circ h$.

Como $(g \circ h^{-1})'(h(x_0)) = g'(x_0)(h'(x_0))^{-1} = I$, temos que:

$$\frac{\partial (g_n \circ h^{-1})}{\partial x_n}(h(x_0)) = 1 \to k'(h(x_0)) = I$$

Assim em alguma vizinhança aberta $V \subset h(U')$ de $h(x_0)$, a função k é injetora e $\det k'(x) \neq 0$. Seja $U = k^{-1}(V)$ temos a decomposição $g = k \circ h$ que satisfaz i, isto é com $h: U \to \mathbb{R}^n$ e $k: V \to \mathbb{R}^n$ com $h(U') \subset V$.

Agora para a função h, seja $W \subset U$ um retângulo da forma $W = D \times [a_n, b_n]$, onde D é um retângulo $n-1$ dimensional. Como h preserva a última coordenada, $h(W)$ está contido em um retângulo da forma $E \times [a_n, b_n]$, onde E é um retângulo $n-1$ dimensional.

Agora tomamos extensões por 0 fora de $h(W)$, e segue pelo teorema de Fubini que:

$$\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_n, b_n]} \left[\int_E 1 \, dx_1 \ldots dx_{n-1} \right] dx_n$$

Seja $h_{x_n}: D \to \mathbb{R}^{n-1}$, dada por $h_{x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = (g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_{n-1}(x_1, \ldots, x_n))$. Então cada h_{x_n} é evidentemente injetora, visto que h o é, e:

$$\det (h_{x_n})'(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \det h'(x_1, \ldots, x_n) \neq 0.$$

Além disso:

$$\int_E 1 \, dx_1 \dots dx_{N-1} = \int_{h_{x_N}} 1 \, dx_1 \dots dx_{N-1}$$

Podemos então aplicar o teorema no caso $N-1$, e temos:

$$\int_{h(W)} 1 = \int_{[a_N, b_N]} \left[\int_{h_{x_N}(D)} 1 \, dx_1 \dots dx_{N-1} \right] dx_N$$

$$= \int_{[a_N, b_N]} \left[\int_D |\det (h_{x_N})'(x_1, \dots, x_{N-1})| \, dx_1 \dots dx_{N-1} \right] dx_N$$

$$= \int_{[a_N, b_N]} \left[\int_D |\det (h'(x_1, \dots, x_{N-1})| \, dx_1 \dots dx_{N-1} \right] dx_N$$

$$= \int_W |\det h'|$$

Desta forma como $T: \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ é uma transformação linear invertível, então: $T(A) = h(W) \to A = W$, portanto:

$$\int_{T(A)} 1 = \int_A |\det T'|$$