Seja $f: A \to \mathbb{R}$ e $g: A \to \mathbb{R}$ integráveis, prove a desigualdade de Schwarz:

$$\left[\int_A f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leq \int_A f(x)^2 dx \cdot \int_A g(x)^2 dx$$

Vamos considerar: $p(\lambda)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ seja $p(\lambda)$ o polinômio dado por: $\int_A (f(x) + \lambda (g(x))^2 dx = \lambda^2 \int_A g^2(x) dx +$ $2\lambda \int_A f(x) \cdot g(x)\, dx + \int_A f^2(x)\, dx$. Como $p(\lambda)$ é elevado ao quadrado, logo $p(\lambda) \geq 0$ e portanto $\Delta p(\lambda) \leq 0$, ou seja se utilizarmos:

$$\Delta = b^2 - 4ac \to 4\left(\int_A f(x) \cdot g(x)\, dx\right)^2 - 4 \int_A g^2(x) dx \cdot \int_A f^2(x) dx \leq 0 \to$$

$$\left(\int_A f(x) \cdot g(x)\, dx\right)^2 \leq \int_A f^2(x)\, dx \cdot \int_A g^2(x)\, dx$$

Portanto temos a desigualdade de Schwarz.