1) Dê um exemplo onde a matriz jacobiana exista, mas a função não é diferenciada.

Obs: A existência de derivadas parciais num ponto dado não garante que a função é diferenciável naquele ponto.

Teorema: A aplicação $f: U \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in U$ se, e somente se, cada uma das suas funções-coordenadas $f_1, \dots, f_n: U \to \mathbb{R}$ é diferenciável nesse ponto.

É suficiente dar um exemplo de uma função cujas derivadas parciais existem em um ponto, mas tal que f é descontínua no mesmo ponto.

Exemplo: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definido por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{(x^4+y^2)}, & \text{se } f(x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{se } f(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Teorema: Se $f: U \to \mathbb{R}$ onde $U \subset \mathbb{R}$ é aberto, então f é diferenciável no ponto $x_0 \in U$, implica que f é contínua em x_0.

Tomamos o ponto $c = (0,0)$ e temos $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, então:

$$f'(c,v) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+hv) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(hv_1, hv_2) - f(0,0)}{h} =$$

" $f(c+hv) = f'(c).v$ "

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(hv_1)^2 . (hv_2)}{(hv_1)^4 + (hv_2)^2} - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^3 v_1^2 v_2}{h^2(h^2 v_1^4 + v_2^2)}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h^3} v_1^2 v_2}{\cancel{h^3}(h^2 v_1^4 + v_2^2)} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{v_1^2 v_2}{h^2 v_1^4 + v_2^2} = \frac{v_1^2 \cancel{v_2}}{v_2^{\cancel{2}}} = \frac{v_1^2}{v_2} \neq 0.$$ Então $f'(c,v)$ existe se $v_2 \neq 0$, se $v_2 = 0$, então $v = (1,0)$ e assim a derivada parcial será em relação a 1º variável.

Então: $f'(c,v) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+hv) - f(c)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(hv_1, 0) - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{(hv_1)^2 (0)}{(hv_1)^4 + (0)^2}}{h} = 0$

Portanto todas as derivadas parciais de f existe em c, contudo temos que f é descontínua em c. Ou seja, na origem.

Assim f é descontínua em c, temos que f não é diferenciável em c.
Então a existência de uma matriz Jacobiana em geral de uma função não implica que é diferenciável.