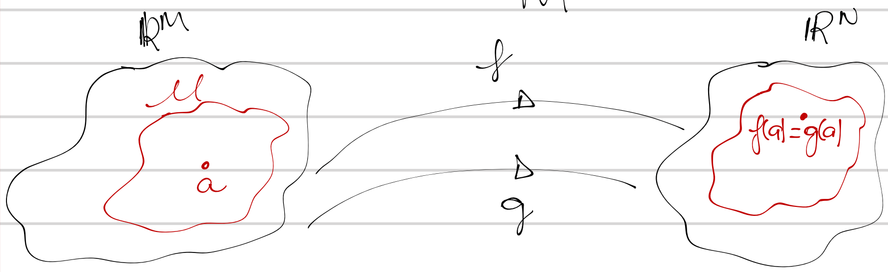
Seja $M \subset \mathbb{R}^m$ aberto e $f, g : M \to \mathbb{R}^n$ diferenciáveis no ponto $a \in M$, com $f(a) = g(a)$. Então $f'(a) = g'(a)$, se e somente se:

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|}$$



Tomamos uma aplicação $f : M \to \mathbb{R}^n$, definida no aberto $M \subset \mathbb{R}^m$, diz-se diferenciável no ponto $a \in M$ quando cada uma das suas funções-coordenadas $f_1, \dots, f_n : M \to \mathbb{R}$ é diferenciável nesse ponto. Com isso temos que para todo $v = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ tal que tal que $(a+v) \in M$ e para cada $i = 1, \dots, m$, tem-se:

$$f_i(a+v) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) . \alpha_j + r_i(v) \quad \text{com } \lim_{v \to 0} \frac{r_i(v)}{|v|} = 0$$

O mesmo vale para a g_i então:

$$g_i(a+v) - g_i(a) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) . \alpha_j + r_i(v) \quad \text{com } \lim_{v \to 0} \frac{r_i(v)}{|v|} = 0$$

Assim, $f_i(a) = f_i(a+v) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) . \alpha_j + r_i(v)$, e

$$g_i(a) = g_i(a+v) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) . \alpha_j + r_i(v)$$

Como $f_i(a) = g_i(a)$, por que $f(a) = g(a)$, então:

$$f_i(a+v) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) . \alpha_j + \cancel{r_i(v)} = g_i(a+v) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) . \alpha_j + \cancel{r_i(v)}$$

Subtraimos os $r_i(v)$, então:

$$f_i(a+v) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) . \alpha_j = g_i(a+v) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a) . \alpha_j$$

De acordo com a definição de matriz de uma transformação linear, para todo $v=(\alpha_1,\dots,\alpha_m)\in\mathbb{R}^m$ temos:

$$f'(a).v=(\beta_1,\dots,\beta_N), \text{ onde } \beta_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a).\alpha_j=\frac{\partial f_i}{\partial v}(a)$$

O mesmo vale p/ g, então:

$$g'(a).v=(\beta_1,\dots,\beta_N), \text{ onde } \beta_i=\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(a).\alpha_j=\frac{\partial g_i}{\partial v}(a)$$

Podemos definir a derivada direcional.

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{f(a+tv)-f(a)}{t}, \quad \frac{\partial g}{\partial v}(a)=\lim_{t\to 0}\frac{g(a+tv)-g(a)}{t}$$

Então:

$$\frac{\partial f}{\partial v}(a)=\left(\frac{\partial f_1}{\partial v}(a),\dots,\frac{\partial f_N}{\partial v}(a)\right)=f'(a).v$$

$$\frac{\partial g}{\partial v}(a)=\left(\frac{\partial g_1}{\partial v}(a),\dots,\frac{\partial g_N}{\partial v}(a)\right)=g'(a).v$$

Temos que a diferenciabilidade das funções coordenadas f_i se resumem na igualdade abaixo:

$$f(a+v)-f(a)=f'(a).v+r(v), \text{ com } \lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{|v|}=0$$

$$g(a+v)-g(a)=g'(a).v+r(v), \text{ com } \lim_{v\to 0}\frac{r(v)}{|v|}=0$$

Tomamos agora, $p(v)=\frac{r(v)}{|v|}$ $\forall v\neq 0$ tal que $(a+v)\in M$. Então:

$$f(a+v)-f(a)=f'(a).v+p(v).|v|, \text{ e } g(a+v)-g(a)=g'(a).v+p(v).|v|$$

Como $f(a)=g(a)$, então:

$$f(a+v)-f'(a).v-p(v).|v|=g(a+v)-g'(a).v-p(v).|v| \quad \div |v|$$

$$\frac{f(a+v)}{|v|}-\frac{f'(a).v}{|v|}-\cancel{p(v)}=\frac{g(a+v)}{|v|}-\frac{g'(a).v}{|v|}-\cancel{p(v)}, \text{ cancela.}$$

$$\frac{f(a+v)}{|v|}-\frac{g(a+v)}{|v|}=\frac{f'(a).v}{|v|}-\frac{g'(a).v}{|v|}$$

Se tomarmos limite de $V \to 0$, então:

$$\lim_{V\to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = \lim_{V\to 0} \frac{f'(a).v - g'(a).v}{|v|} = \frac{f'(a).0 - g'(a).0}{0} = 0$$

$$\lim_{V\to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = 0$$

Agora se $\lim_{V\to 0} \frac{f(a+v) - g(a+v)}{|v|} = 0 \to$ podemos rescrever:

$\lim_{V\to 0} \frac{f(a+V)}{|V|} = \lim_{V\to 0} \frac{g(a+v)}{|V|}$, mas

$f(a+v) = f'(a).v + f(a) + p(v).|v|$ e $g(a+v) = g'(a).v + g(a) + p(v).|v|$

Então: $\lim_{V\to 0} \frac{f(a+v)}{|v|} = \lim_{V\to 0} \frac{g(a+v)}{|v|}$, cancela os limites, e temos:

$\frac{f(a+v)}{|v|} = \frac{g(a+v)}{|v|} \to \frac{f'(a).V + f(a) + p(v)}{|v|} = \frac{g'(a).V + g(a) + p(v)}{|v|}$, se $(\times |v|$

$f'(a).v + \cancel{f(a)} + p(v).|v| = g'(a).v + \cancel{g(a)} + p(v).|v|$, mas $f(a) = g(a)$

$f'(a).v + \cancel{p(v)}.|v| = g'(a).v + \cancel{p(v)}.|v|$, podemos cancelar.

Então: $f'(a).v = g'(a).v$, mas como é o mesmo vetor V,

então temos a mesma matriz de transformação linear, dada por $V = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$, então:

$f'(a).v = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ onde $\beta_i = \frac{\partial f_i}{\partial v}(a)$

$g'(a).v = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ onde $\beta_i = \frac{\partial g_i}{\partial v}(a)$

E portanto $\frac{\partial f_i}{\partial v}(a) = \frac{\partial g_i}{\partial v}(a) \to f'(a) = g'(a)$