Seja $f: A \to B$ contínua tal que $|f(x) - f(y)| \geq c|x-y|$ com $c > 0$ constante e $x, y \in A$ quaisquer. Prove que, para todo $g: B \to \mathbb{R}$ integrável, a composta $g \circ f : A \to \mathbb{R}$ é integrável.

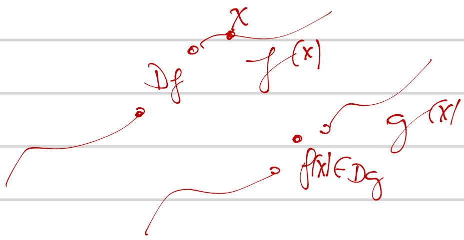
Primeiro notemos que $D_{g \circ f} \subset D_f \cup f^{-1}(D_g)$, assim tomemos

$g \circ f \Rightarrow g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$

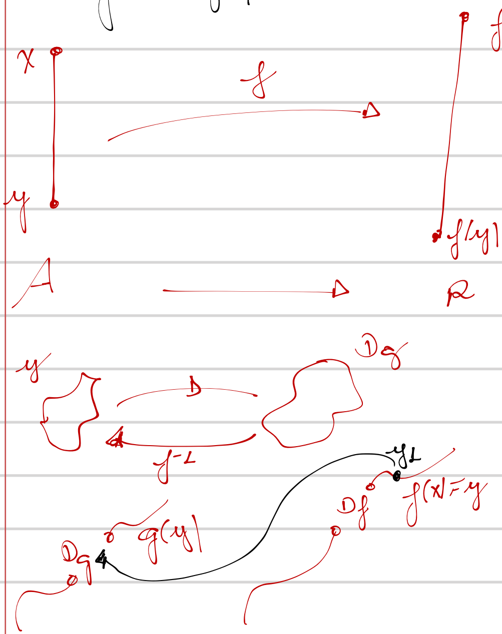
um $x \in D_{g \circ f}$ e supomos que $x \notin D_f \to f(x) \in D_g$, pois caso contrário g seria contínua em $f(x)$ e como estamos admitindo f contínua em x, então teríamos $g \circ f$ contínua em x, e isto é um absurdo pois tomamos $x \in D_{g \circ f}$, e com isso $f(x) \in D_g \to x \in f^{-1}(D_g)$ e portanto $D_{g \circ f} \subset D_f \cup f^{-1}(D_g)$.

x. gof

$D_{g \circ f} \subset D_f \cup f^{-1}(D_g)$



Note agora que $|f(x) - f(y)| \geq c|x-y|$ e $c > 0$ $\forall x, y \in A \to f$ é injetiva. Portanto existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de D_g e os pontos de $f^{-1}(D_g)$, com isso $\text{med}(D_g) = 0$ e resulta que $\text{med} f^{-1}(D_g) = 0$.



$\therefore |f(x) - f(y)| \geq c|x-y|$
$c > 0$

Além disso, supomos f contínua, o que implica que $D_f = \phi$ e portanto $D_{g \circ f} \subset f^{-1}(D_g) \to \text{med}_{g \circ f} = 0 \to g \circ f$ é integrável. Como a descontinuidade é muito pequena então $g \circ f$ é integrável.