

Na definição de conjuntos de medida nula podemos usar blocos fechados em vez de cubos.

Definição: Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ tem medida nula, e usaremos $\text{med. } X = 0$, quando, para todo $\varepsilon > 0$ dado, for possível obter uma sequência de cubos m -dimensionais abertos $C_1, C_2, \dots, C_i, \dots$ tais que: $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ e $\sum_{i=1}^{\infty} \text{Vol. } C_i < \varepsilon$.


Seja $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$, com $\text{med. } X_i = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Dado $\varepsilon > 0$ podemos obter, para cada $i \in \mathbb{N}$, uma sequência de cubos abertos $C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ij}, \dots$ tais que $X_i \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij}$ e $\sum_j \text{Vol. } C_{ij} < \varepsilon/2^i$.

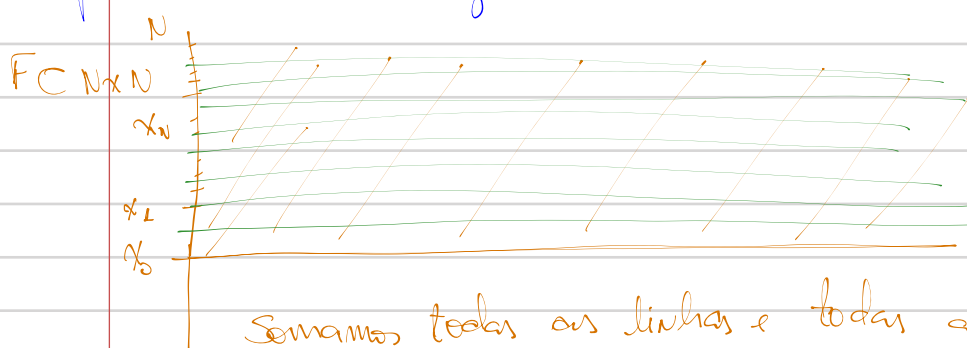
Então X está contido na reunião (enumerável) de todos os C_{ij} . Dado qualquer subconjunto finito $F \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ existe $K \in \mathbb{N}$ tal que $(i,j) \in F \rightarrow i \leq K, j \leq K$, logo:

$$\sum_{(i,j) \in F} \text{Vol. } (C_{ij}) \leq \sum_{j=1}^K \left[\sum_{i=1}^K \text{Vol. } (C_{ij}) \right] < \sum_{i=1}^K \varepsilon/2^i < \varepsilon$$

Portanto, seja qual for a maneira de enumerar os C_{ij} numa sequência, teremos $\sum_{i,j} \text{Vol. } (C_{ij}) < \varepsilon$. Assim, $\text{med. } X = 0$. Em particular, como

todo ponto tem evidentemente medida nula, todo conjunto enumerável é de medida nula.

X_i :  $\subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_{ij}$
 $\hookrightarrow \sum_j \text{Vol. } C_{ij} < \frac{\varepsilon}{2^i}$, onde $i=1, \dots, \infty$ representa cada linha de cubos e j representa as colunas de blocos em cada linha, como se fosse uma matriz.



$X \subset \bigcup C_{ij}, K \in \mathbb{N} \rightarrow (i,j) \in F \rightarrow i \leq K \text{ e } j \leq K$.
 Logo:
 $\sum_{i,j} \text{Vol. } (C_{ij}) \leq \sum_{i=1}^K \left[\sum_{j=1}^K \text{Vol. } (C_{ij}) \right] < \varepsilon \rightarrow \text{Med. } X = 0$.

Somamos todas as linhas e todas as colunas.