Corolário: Seja $f: M \to \mathbb{R}^n$ contínua num aberto $M \subset \mathbb{R}^m$, se o segmento $[a, a+h] \subset M$ e f é diferenciável nos pontos $(a, a+h)$, então para toda transformação linear $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ vale a desigualdade:

$$|f(a+h) - f(a) - T.h| \leq \sup |f'(a+th) - T| . |h| \quad \text{para } 0<t<1$$

Prova: Defina $g(x) = f(x) - T.x$ e $g: M \to \mathbb{R}^n$, g é contínua em M e diferenciável em $(a, a+h)$.
Aplicando desigualdade do valor médio para g:

$$|g(a+h) - g(a)| \leq |h| \sup |g'(a+th)| \quad \text{com } 0<t<1$$

$$|f(a+h) - T(a+h) - f(a) + Ta| \leq |h| \sup |f'(a+h) - T| \quad \text{com } 0<t<1$$

$$|f(a+h) - f(a) - T.h| \leq |h| \sup |f'(a+th) - T|$$

Teorema de Leibniz: Sejam $M \subseteq \mathbb{R}^m$ aberto e $f: M \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ contínua tal que $\partial_1 f: M \times [a,b] \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ é contínua. Então $\phi: M \to \mathbb{R}^n$ definida por $\phi(x) = \int_a^b f(x,t)\,dt$ é de classe C^1 e:

$$\phi'(x).h = \int_a^b \partial_1 f(x,t).h\,dt \quad \forall h \in \mathbb{R}^m$$

$f: \mathbb{R}^m \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$
$(x_1, \ldots, x_m, t) \to f(x_1, \ldots, x_m, t)$, $\partial_1 f(x,t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_m}\right)$

A f é contínua $f: M \times [a,b] \to \mathbb{R}^n$ e $\partial_1 f$ é contínua $\to$

$$\phi(x).h = \int_a^b \partial_1 f(x).h\,dt \to \phi \text{ é } C^1$$

Teorema de Clairaut-Schwartz: Se $f: M \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ possui todas as derivadas parciais até segunda ordem, não necessariamente temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \quad \forall i,j = 1, \ldots, m$$

Exemplo (Peano): Seja $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $f(x,y) = xy\, g(x,y)$ e g é função limitada de $\mathbb{R}^2$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = y \lim_{x \to 0} g(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y \to 0} \lim_{x \to 0} g(x,y)$$

Analogamente:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,y)-f(0,y)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{xyg(x,y)-0}{x} = y\lim_{x\to 0} g(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} g(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} g(x,y)$$

Seja $g(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\forall (x,y)\neq(0,0)$

se $y\neq 0$ e $x\to 0$, se $x\neq 0$ e $y\to 0$

$$\lim_{x\to 0} g(x,y) = -1 \neq \lim_{y\to 0} g(x,y) = 1$$

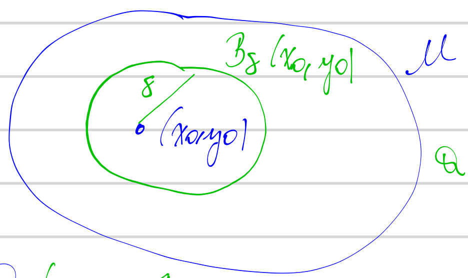
Assim $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$

Teorema de Clairaut-Schwartz: Seja $U\subset\mathbb{R}^n$ aberto, $f: U\to\mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Suponhamos que: $D_k D_j f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j}$ e $D_j D_k f$ $\forall k\neq j$ existem e são contínuas, então $\forall x_0 \in U$:

$$D_k D_j f(x_0) = D_j D_k f(x_0)$$

Prova: Primeiro assuma que $n=2$ e devemos mostrar que:

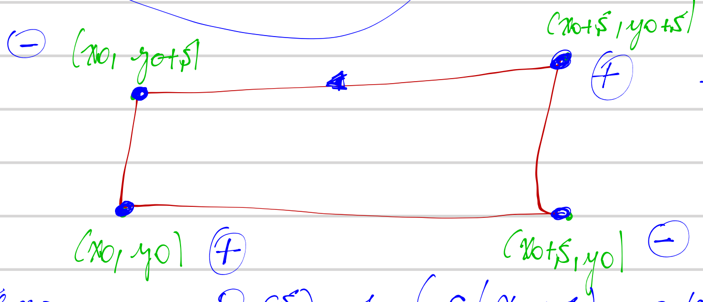
$$D_1 D_2 f(x_0,y_0) = D_2 D_1 f(x_0,y_0), \text{ para } (x_0,y_0)\in U\subset\mathbb{R}^2$$



Defina $Q: B_\delta(x_0,y_0)\to\mathbb{R}$

$Q: [0,\delta]\to\mathbb{R}$

$$Q(s) = \frac{1}{s^2}\left(f(x_0+s,y_0+s) - f(x_0,y_0+s) - f(x_0+s,y_0) + f(x_0,y_0)\right)$$



Defina: $g^s(x) = g(x) = f(x,y_0+s) - f(x,y_0)$ $\forall x\in\mathbb{R}$ tal que (x,y_0+s) e $(x,y_0)\in U$.

g é de classe C^1 e $g'(x) = D_1 f(x,y_0+s) - D_1 f(x,y_0)$

também temos que $Q(s) = \frac{1}{s^2}\left(g(x_0+s) - g(x_0)\right)$

Pelo teorema do valor médio a g. $\exists\, \xi(s)\in(x_0,x_0+s)$ tal que:

$$g'(\xi) = \frac{g(x_0+s)-g(x_0)}{s} \to Q(s) = \frac{1}{s}g'(\xi) = \frac{1}{s}\left(D_1 f(\xi,y_0+s) - D_1 f(\xi,y_0)\right)$$

Agora defina $h^{s}(y) = h(y) = D_1 f(\xi(s), y)$, $y \in \mathbb{R}$ e $(\xi, y) \in U$

Temos que h é contínua e diferenciável e $\exists\, h'(y) = D_2 D_1 f(\xi, y)$ é contínua $\longrightarrow$ h é de classe C^1 $\longrightarrow Q(s) = \frac{1}{s}(h(y_0+s) - h(y_0))$ $\longrightarrow$ *

Aplicando valor médio (T.V. médio para h) $\exists\, \theta \in (y_0, y_0+s)$ tal que
$h'(\theta) = \frac{h(y_0+s) - h(y_0)}{s}$ $\longrightarrow$ *

$$D_2 D_1 f(\xi, \theta) = \frac{h(y_0+s) - h(y_0)}{s}$$

$Q(s) = D_2 D_1 f(\xi(s), \theta(s))$, trocando x por y e fazendo o mesmo processo podemos achar $(\xi^*(s), \theta^*(s))$ tal que:

$$Q(s) = D_1 D_2 f(\xi^*(s), \theta^*(s))$$

$g(y) = f(x_0+s, y) - f(x_0, y)$

$$Q(s) = D_2 D_1 f(\xi(s), \theta(s)) = D_1 D_2 f(\xi^*(s), \theta^*(s))$$

e: $\xi^*(s) \in (x_0, x_0+s)$, $\theta^*(s) \in (y_0, y_0+s)$

Como $D_2 D_1 f$, $D_1 D_2 f$ são contínuas em U então:

$$\lim_{s \to 0} Q(s) = D_2 D_1 f(x_0, y_0) = D_1 D_2 f(x_0, y_0)$$

Se $n > 2$, $D_j D_i f(x_0^1, \ldots, x_0^n) = D_i D_j f(x_0^1, \ldots, x_0^n)$, podemos assumir que $i < j$.
$x_0 = (x_0^1, \ldots, x_0^n) \in U$, defina: $\phi(x, y) = f(x_0^1, \ldots, \underset{i}{x}, x_0^{i+1}, \ldots, \underset{j}{y}, x_0^{j+1}, \ldots, x_0^n)$

$\phi : \tilde{U} \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $D_i D_j f(x_0) = D_1 D_2 \phi(x_0^i, x_0^j)$ e $D_j D_i f(x_0) = D_2 D_1 \phi(x_0^i, x_0^j) \longrightarrow$
$D_i D_j f(x_0) = D_j D_i f(x_0)$

Caso geral: Em geral Teorema Clairaut-Schwartz, se $f : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ de classe $C^2(U)$ tal que $\exists\, D_i D_j f$ e $D_j D_i f$ existem e são contínuas em U $\forall\, i \neq j$. Então a segunda derivada $f''(a) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ e $a \in U$ é uma aplicação bilinear simétrica, isto é $f''(a).v.w = f''(a).w.v$.

Prova: De fato, seja $v = (v_1, \ldots, v_n)$ e $w = (w_1, \ldots, w_n)$, temos:

$f''(a).v.w = \sum_{i,j=1}^{m} v_i w_j \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathbb{R}^n$, esse vetor tem as seguintes entradas: $f''_k(a).v.w = \sum_{i,j}^{m} v_i w_j \frac{\partial^2 f_k(a)}{\partial x_i \partial x_j}$

onde $f = (f_1, \ldots, f_n)$ e $k = 1, \ldots, n$.

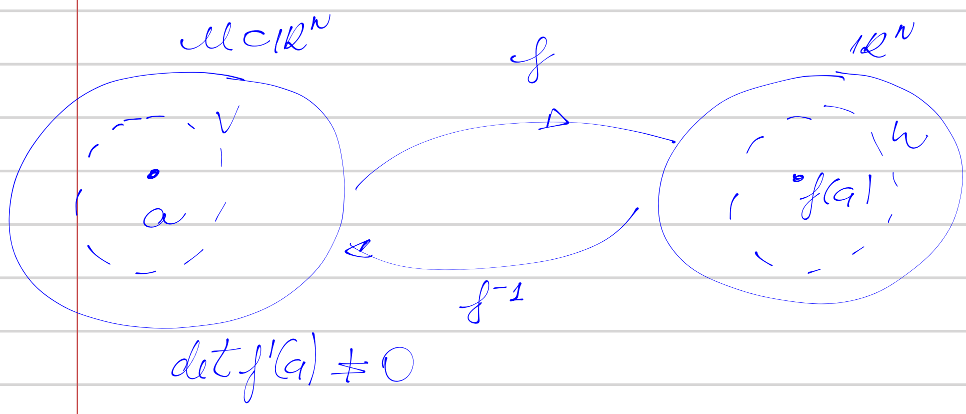
$f_k : U \to \mathbb{R}$ e $= \sum_{i,j=1}^{m} v_i w_j \dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i}(a)$ = clairaut-Schwartz

$= \sum_{i,j=1}^{m} w_j v_i \dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

$= f''_k(a) \cdot w \cdot v \quad \forall k = 1, \ldots, N$

Teorema da função inversa: Seja $f : U \subset \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, $f \in C^1(U)$ e $a \in U$ tal que $\det f'(a) \neq 0$, então existe uma vizinhança V de a e um aberto W de $f(a)$ tal que $f : V \to W$ (restrição), tem uma função inversa contínua $f^{-1} : W \to V$ que é diferenciável em todo $y \in W$ e:

$$(f^{-1})'(y) = [f'(f^{-1}(y))]^{-1}$$ Inversa da Jacobiana



$f'(a) \neq 0$

$\det J f(a) \neq 0$

Exercício: Se f é somente diferenciável em a com $\det J f(a) \neq 0$ o teorema da função inversa é válido?