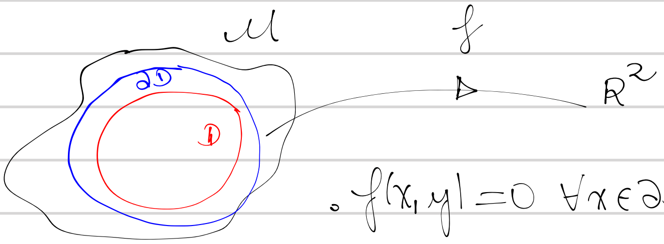
Seja $f: M \to \mathbb{R}^2$ uma função de classe C^∞ no aberto $M \subset \mathbb{R}^2$. Defina a função: $J(x,y) = \det f'(x,y)$ $\forall (x,y) \in M$

Suponha que $D \subset M$ é um domínio compacto cujo a borda ∂D seja uma curva lisa fechada. Se $f(x,y) = 0$ $\forall x \in \partial D$, prove que: $\iint_D J(x,y)\,dx\,dy = 0$



- M é aberto
- $J(x,y) = \det f'(x,y)$ $\forall (x,y) \in M$.
- $D \subset M$ e D é compacto
- ∂D é uma curva lisa e fechada
- $f(x,y) = 0$ $\forall x \in \partial D$

C^∞: Possui derivadas em todas as ordens e são contínuas.

Temos que $J(x,y) = \det f'(x,y)$, como f é de classe C^∞ pode ser derivadas muitas vezes e com $f'(x,y)$ existe então f é uma função contínua em M.

Temos também que $D \subset M$, e D é um domínio compacto, então D é um domínio limitado e fechado, assim D contém todos os seus pontos até seu limite, com isso D é limitado em D.

Como a f é de classe C^∞, então é derivável em todas as ordens e também contínua em $M \subset \mathbb{R}^2$. Temos que $\bar{D} = \text{int} D \cup \partial D = D \cup \partial D$.

Tomamos $x \in \partial D$, então $f(x,y) = 0 = \lim_{x \to x} f(x,y) \to \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $f(x,y)$ é derivável.

Como a $f(x,y)$ é contínua em $\bar{D}$, e $\bar{D}$ é compacto segue que a $f(\bar{D})$ é compacta. Assim a $f(x,y)$ é constante $\forall x \in \partial D$ ou $x \in D$, então $f(x,y) = c = 0$.

$$\iint_D J(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \det f'(x,y)\,dxy, \text{ então:}$$

$$J(f(x,y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_1} \\ \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_2} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Como $f(x,y) = 0 \to$
$f'(x,y) = 0$ $\forall x \in \partial D$
$\downarrow$

$$J(f(x,y)) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y_1} \\ 0 & \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_2} \end{bmatrix}, \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y) \cdot \frac{\partial f_2(x,y)}{\partial y_2} - \frac{\partial f_1}{\partial y_1}(x,y) \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x,y)\right] = \det$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \det f'(x,y)\,dx\,dy = \iint_D \left[\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y)\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x,y) - \frac{\partial f_2}{\partial y_1}(x,y)\cdot\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x,y)\right]dx\,dy = \iint_D \left[0\cdot\frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x,y) - \frac{\partial f_2}{\partial y_2}(x,y)\cdot 0\right]dx\,dy =$$

$$\iint_D \left[0-0\right]dx\,dy = 0$$