4) Seja $f: M \to \mathbb{R}$, definida no aberto $M \subset \mathbb{R}^m$, suponha que f atinge seu valor máximo (ou mínimo) num ponto $a \in M$, então qualquer derivada parcial de f (caso exista) em a é nula.

Definição: Temos f uma função, dizemos que f tem um máximo absoluto ou máximo global em c se $f(c) \geq f(x)$ $\forall x$ no domínio de f. Se f tem um máximo absoluto em c, então $f(c)$ é chamado de máximo valor de f.

Também dizemos que f tem um mínimo absoluto (ou mínimo global em c se $f(c) \leq f(x)$ para todo x no domínio de f, se f tem um mínimo absoluto em c, então $f(c)$ é chamado de valor mínimo de f.

Podemos dizer também que f tem um máximo relativo ou máximo local em c se existe um intervalo aberto contendo c sendo que $f(c) \geq f(x)$ $\forall x$ no intervalo aberto. E f tem um mínimo relativo ou mínimo local em c se existe um intervalo aberto contendo c sendo que $f(c) \leq f(x)$ para todo x no intervalo aberto.

Pelo Teorema de Fermat: "Se f tem um máximo ou mínimo local em c e f é diferenciável em c, então $f'(c) = 0$.

Aplicando para mais de uma variável: "Seja $z = f(x, y)$ ser uma função de duas variáveis que está definida e contínua sobre um conjunto aberto contendo o ponto (x_0, y_0). Supondo f_x e f_y cada uma existindo no ponto (x_0, y_0). Se f tem um máximo local em (x_0, y_0), então (x_0, y_0) é um ponto crítico de f. E vale o teorema de fermat desde que as derivadas parciais existem.

Prova: Suponha f tem um máximo local em c e f é diferenciável em c, então precisamos mostrar que $f'(c) = 0$.

Desta forma, iniciamos com $f'(c) \geq 0$ e $f'(c) \leq 0$, e portanto $f'(c) = 0$. Assim f tem um máximo local em c, o mesmo vale para f ter um mínimo local em c. Existe então um intervalo aberto I sendo que $f(c) \geq f(x)$ ou $f(c) \leq f(x)$ para todo $x \in I$. Como f é diferenciável em c, da definição de derivada temos:

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Como este limite existe, e ambos limites laterais são iguais a $f'(c)$, então:

$$\lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

Como $f(c)$ é um maximo ou mínimo local, temos que:

$$f(x) - f(c) \leq 0 \quad \text{ou} \quad f(x) - f(c) \geq 0 \quad \forall x \text{ proximo de } c$$

Portanto, para valores de x muito proximos de $\underline{c}$, mas $x > c$ ou $x < c$ temos que:

$$x > c \longrightarrow \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0 \quad e \quad x < c \longrightarrow \frac{f(x) - f(c))}{x - c} \geq 0$$

Com isso temos que $f'(c) \leq 0$ ou $f'(c) \geq 0$, Portanto $f'(c) = 0$ para $x = c$.

Assim pelo teorema de fermat, concluímos que se f tem um maximo ou mínimo local em $\underline{c}$, e $f'(c)$ existe em c então $f'(c) = 0$, temos portanto um ponto critico de f.

Agora tomamos $c \in R^n$ onde $n = 1, 2, 3, \ldots$, ou seja $c = \{x, y, \ldots\}$, portanto $f(c) = f(x, y, \ldots)$ e possui derivadas parciais em $\underline{c}$.

Assim $\underline{c}$ é um ponto critico de f em $\mathbb{R}^n$.