Aja J. A-DIR uma função limitada a foro No m-bloco ACIRM.
$Sipa$ : $C(f) = (\pi_i y) \in \mathbb{R}^{N+L} : \chi \in A, \Omega \leq y \leq f(x) \in \mathbb{R}$
C(f) = f(f) = f(f) = f(f)
Prove que fé intégravel se e somorité se c (f) e f-medicel. Meste caso, temos que f fx/dx = vol (C (g)).
Caro, remo que $f \times f $
Jé limitada e maior que Les Jes Jes Jes Jes Jes Jes Jes Jes Jes J
A & gro,
IR "
Como a l'A-DIR é limitada, le mos que su conjunto será limitado.
Como a f: A-AR é limitada, temos que sur conjunto será limitado, temamos o bloco fCIRM u sua função caractrerestica: $\chi_{\chi}: A \longrightarrow R \longrightarrow vol(A) = \int \chi_{\chi}(\chi) d\chi$
$\chi_{\chi}: A \longrightarrow R \longrightarrow vol(A) = \rho \chi_{\chi}(\chi) d\chi$
I
Como & CRICA, Semos que HI CRIAL é o conjunto dos
pontos a el sous que toda lizentanea de a (Va) contiemos
Como & CRMC IRM+1 Semos que IRM CIRM+1 é o conjunto dos pontos a e RM Sais que toda vizinhança de a (Val contiem os pontos de LPM a os pontos de (IPM+1 - RM). Também temos que RM+1 = (int RM) U SIRM V int (IPM+1 - RM), sendo RM+1 elma reuxião
disjunta.
'
Pelo Levema; "Um Conjunto limitado XCIR" à f-medevel se, e somente
Pelo teorema: "Um conjunto limitado XCIR" à f-medicel si, e somente se, sua ponteira DX tem medida mula."
Como C(f)=> (N/y) EIR "11 : X EA, O L y E f/x/ E a Somamos X CR" Agora  Mia D o conjunto dos pontos de des continuidade da função  característica:
Ma De conjunto des pontes de des continuidade da função
caracteristica:
Nx: A → R e o bloco A usta; XCACRM
Entre De 20 amine une ponto de 20 anie vos seis disconti
nuidade de Xx deux nortencer. a 2A entas:
Então DCDX, assim um ponto da DX que vão seja descontii— nuidade de Xx deve portencer a DA então: DX = DV(DXADA), e se X c int. (A) -> DX=D
Como a DA (é a reunião das forces próprias do bloco A) tem medida Mula, então med DX = 0 se, e somente se, med.D = 0.
medida Mula, então med 2x = 0 si, e somente se, med.D = 0.

Entar o Vol  $(x) = Vol(A) = \int \chi_x (x) dx$ . Agora Temamos y CRM+1 e y CA1 e D1 como o conjunto dos pontos de des continuidade da função característica em y.

yx: A1 -> R e X C A CRM C y C A1 C RM+1 Temos que 12 é um bloco que cobre 4, enfao; Dy = D1 V (Dyn DA1) e se y c int A1 -> Dy=D1 Asim D1 Lem medida vula e Dy=0 se, e somente se, med.D1=0
Desta forma como A E 1 e X ey, e med. Dy=0 então
y é 1-medével u os pontos de y são dados por E(f), com
line temos que C(f) é j-medével, mas f C E(f) então  $\int_{A} f(x) dx = Vol(x) \subset Vol(y) = Vol(C(f))$ Como C'Il é j-medérel temos que f é integrarel pois ned. N=O. Vamos fazur agna a volta, pelo Yeorema 7: "Sija NCR" um conjunto J-midrvel. Uma função limitada j. x-x R é viste grável, se e somente se, o confunto De dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula. Temos que ACA1 a DCD1 e med D1 = med D=0, témos também que C(f) é f-medirel a XCC(f). Então X é f-medirel, como f é uma função limitada em X, então f é unte quarel. Temo também que C(f) tem medida vula, logo Vol(C(f))=0, mas  $C(f)\supset f$ , untão Vol(x)=f for dx=0. Desta forma temos que vol(cf) c f fx/dx, mas anteriormente afirmamos que f f(x) ox < Vol (c(f)), então:  $\int f(x) dx = Vol(C(f))$