

Seja $f: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que para cada $x, v \in \mathbb{R}^m$ quaisquer tem-se:

$$\langle f'(x) \cdot v, v \rangle \geq \alpha |v|^2, \text{ onde } \alpha > 0 \text{ é uma constante}$$

Prove que $|f(x) - f(y)| \geq \alpha |x - y|$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^m$ arbitrários.

Conclua que $f(\mathbb{R}^m)$ é fechado, e daí, que f é um difeomorfismo de \mathbb{R}^m em \mathbb{R}^m .

Resposta: Como $f \in C^1$ pode ser entendida por f ser diferenciável, então definimos $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $\varphi(t) = \langle f(x + t(y-x)), y-x \rangle$.

Temos que $\varphi|_{[0,1]}$ é contínua e $\varphi|_{(0,1)}$ é diferenciável, então pelo

Teorema do Valor Intermediário (T.V.I.), existe $\theta \in (0, 1)$ tal que $\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(\theta)(1-0) \Rightarrow \langle f(y), y-x \rangle - \langle f(x), y-x \rangle =$

$$\langle f'(x + \theta(y-x))(y-x), y-x \rangle \Rightarrow \langle f(y) - f(x), y-x \rangle =$$

$$\langle f'(x + \theta(y-x))(y-x), y-x \rangle \Rightarrow | \langle f(y) - f(x), y-x \rangle | = | f'(x + \theta(y-x)) | \cdot$$

$$|y-x| \geq \alpha |y-x|^2, \text{ então:}$$

$$|f(y) - f(x)| \cdot |y-x| \geq | \langle f(y) - f(x), y-x \rangle | \geq \alpha |y-x|^2 \Rightarrow |f(y) - f(x)| \geq$$

$\alpha |y-x|, \forall x, y \in \mathbb{R}^m$. Agora se $x=y$ então a desigualdade é trivial.

Agora tomamos $f(\mathbb{R}^m)$ como fechado, assim seja $y \in \overline{f(\mathbb{R}^m)}$, e

$y = \lim f(x_k)$, e $(x_k) \subset \mathbb{R}^m$, temos que $|x_k - x_s| \leq \frac{1}{\alpha} |f(x_k) - f(x_s)|$,

onde (x_k) é de Cauchy e portanto converge. Seja $x = \lim x_k$,

da continuidade de f temos que $f(x) = \lim f(x_k) = y \Rightarrow y \in f(\mathbb{R}^m) \Rightarrow f(\mathbb{R}^m)$ é fechado. Pode-se notar que $f \in C^1$ e $f'(x) \cdot v \neq 0, \forall v \in \mathbb{R}^m$, então f é difeomorfismo global sobre sua imagem aberta $f(\mathbb{R}^m)$.

Portanto, f é um difeomorfismo de \mathbb{R}^n sobre si mesmo.