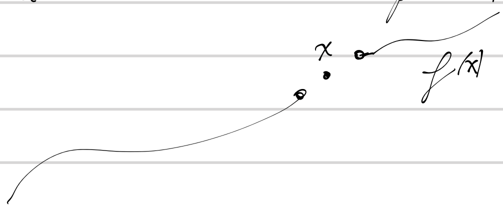
Teorema 7 = Teorema de Lebesgue: Seja $X \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto J-mensurável, uma função limitada $f: X \to \mathbb{R}$ é integrável se, e somente se, o conjunto D_f dos seus pontos de descontinuidade tem medida nula.

Se f é descontínua num ponto $x \in X$, existe uma sequência de pontos $x_k \in X$ tal que $(f(x_k))$ não converge para $f(x)$. Daí resulta que $\bar{f}$ também é descontínua no ponto x.



$\to$ $\bar{f}(x)$ também é descontínua

Assim os pontos de descontinuidade de $\bar{f}$, ou já eram descontinuidades de f ou estão na fronteira de X, então podemos escrever:

$$D_f \subset D_{\bar{f}} \subset D_f \cup \partial X$$

Como ∂X tem medida nula, vemos que med. $D_f = 0 \leftrightarrow$ med. $D_{\bar{f}} = 0$. Assim por definição, f integrável significa $\bar{f}$ integrável, ou seja, med. $D_f = 0$.