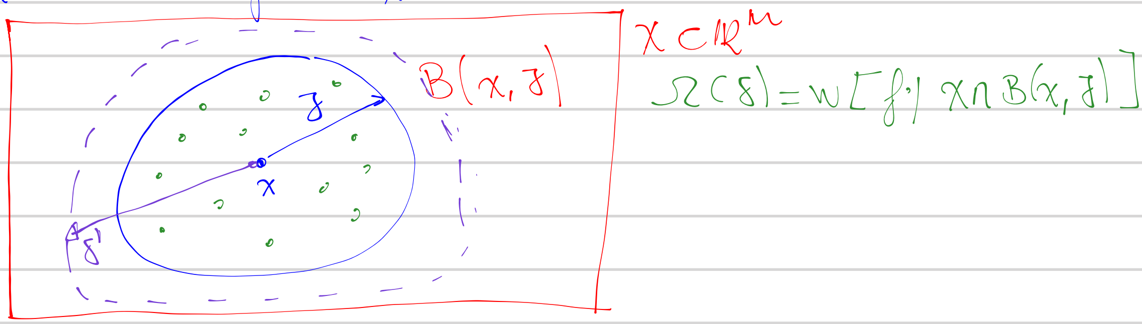
Mostre que:

1) $w(f; x) \geq 0 \quad \forall x \in X$

Seja $f: X \to \mathbb{R}$ limitada no conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$, ao fixarmos $x \in X$ e para cada $\delta > 0$, supomos um dado $\Omega(\delta) = w[f; X \cap B(x, \delta)]$, onde $\Omega(\delta)$ representa a oscilação de f no conjunto dos pontos de X que distam de δ do ponto x.



Isto define uma função não negativa: $\Omega(0, +\infty) \to \mathbb{R}$, temos que f é limitada, e Ω também é (mas é inferiormente). Se tomarmos
$\delta \leq \delta' \to \Omega(\delta) \leq \Omega(\delta')$
Portanto a oscilação em $\Omega(\delta')$ é superior a $\Omega(\delta)$, então tomamos $w(f; X)$ como o limite.

$$w(f; x) = \lim_{\delta \to 0} w[f; X \cap B(x, \delta)] = \inf_{\delta > 0} w[f; X \cap B(x; \delta)]$$

Se $\delta = 0$ o ponto é o centro da Bola e oscila até a maior das cotas superiores que é o maior valor de $\delta < \delta'$.
Então todas as oscilações de $w(f; X)$ oscilam de 0 até δ para todo $x \in X$.

2) $w(f; x) = 0 \iff f$ é contínua em x.

Como $w(f; X)$ são as oscilações dos pontos de x até a borda da $B(x, \delta)$, então se $w(f; X) = 0$ significa que:

$$w(f; x) = \lim_{\delta \to 0} w[f; x \cap B(x, \delta)] = w[f; x \cap B(x, 0)] = w[f; x \cap B(x)],$$

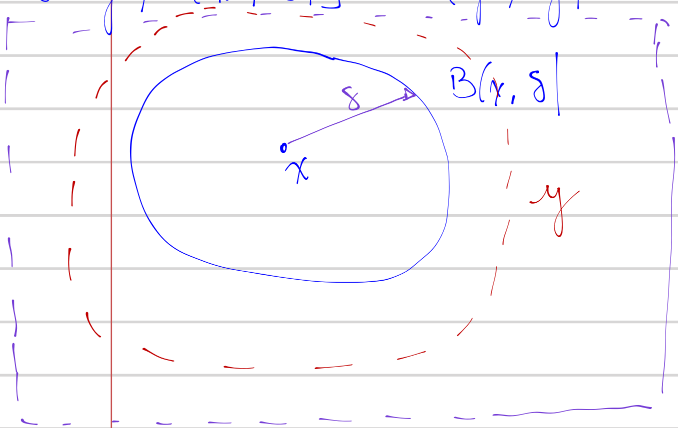
ou seja somente o ponto $x \in X$, logo não tem oscilação.
$w(f; x) = 0$
Se tomarmos agora para todo $\varepsilon > 0$ dado, podemos obter um

$\delta > 0$ tal que $y, z \in X \cap B(x, \delta) \to |f(y) - f(z)| \leq \varepsilon$ então $|y - z| < \delta$, temos que f é contínua. Portanto não tem variação, com isso:

$$w(f, x) = 0$$

3) Se $x \in int(Y)$ e $Y \subset X \to w(f, x) \leq w(f, Y)$

Seja $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset Y$, então: $w(f, x) \leq w[f, X \cap B(x, \delta)] = w[f, B(x, \delta)] \leq w(f, Y)$



$w(f, x) = \lim_{\delta \to 0} w[f, X \cap B(x, \delta)] \leq$
$w[f, X \cap B(x, \delta)] = w[f, B(x, \delta)]$
$\leq w(f, Y)$

Como $int(Y)$ são todos os pontos que não tocam na borda de Y, então $w(f, x) \leq w(f, Y)$.

4) Se $w(f, x) < c$ então existe $\delta > 0$ tal que $w(f, x) < c$ $\forall y \in X$, com $|y - x| < \delta$.

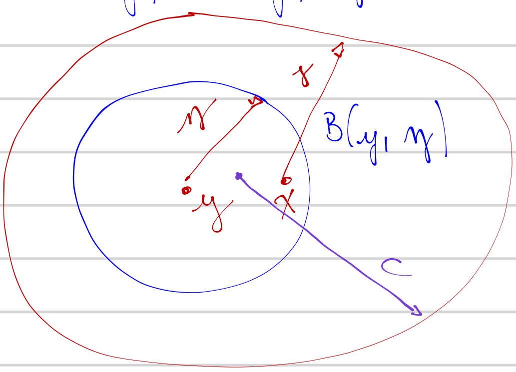
Temos que $w(f, x) = \lim_{\delta \to 0} w[f, X \cap B(x, \delta)] = \inf_{\delta > 0} w[f, X \cap B(x, \delta)]$,

ao fixarmos um c (constante), temos pela definição de limite, que existe $\delta > 0$ tal que $w[f, X \cap B(x, \delta)] < c$.

Se tomarmos um $y \in X \cap B(x, \delta)$ e $\eta > 0$ tal que: $B(y, \eta) \subset B(x, \delta)$.

Obtemos:

$w(f, x) \leq w[f, X \cap B(y, \eta)] \leq w[f, X \cap B(x, \delta)] < c$



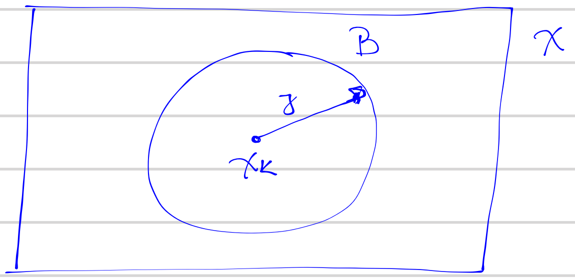
$B(x, \delta)$ Como $\eta < \delta$ e $x, y \in B(y, \eta)$, então:

$\forall y \in X \to |y - x| < \delta$.

5) Se $X \subset \mathbb{R}^m$ é fechado (respectivamente compacto) então para todo $c > 0$ o conjunto $\{x \in X : w(x) \geq c\}$ é fechado e respectivamente compacto.

Tomamos um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^N$ fechado e compacto, logo é limitado. Como é fechado possui uma sequência de pontos $x_k \in X$, com $k \in \mathbb{N}$ tal que $w(f; x_k) \geq c$ para todo $k \in \mathbb{N}$, sendo c uma constante definida em X.

$w(f; x) = w[f; X \cap B(x_k, \delta)]$ onde:
Então $w(f; x) = \inf_{\delta \geq c} w[f; X \cap B(x_k, \delta)]$



1 Desta forma $\lim x_k = x$ $\forall x \in X$, agora não podemos ter $w(f; x) < c$ isto em razão da propriedade 4. Como assumimos o raio δ e o $\inf_{\delta \geq c} [f; X \cap B(x_k, \delta)] = w(f; x)$, então toda oscilação deve ser maior do que c, com isso $|y - x| \geq \delta$ para todo $y, x \in X \cap B(x_k, \delta)$. Então $w(f; x) \geq c$ e o conjunto $\{x \in X : w(f; x) \geq c\}$, e portanto é fechado em $X \subset \mathbb{R}^m$.

Agora como todo conjunto fechado é limitado, ou seja, é compacto, temos que $w(f; x) = \inf_{\delta \geq c} [f; X \cap B(x_k, \delta)]$ é limitado em um raio δ cujo $w(f; x) \geq c$ e portanto é compacto.