

Seja $\alpha \in A^1(\mathbb{R}^3)$ e $\beta \in A^2(\mathbb{R}^3)$ tal que $\alpha \wedge \beta = 0$. Prove que existe $\gamma \in A^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $\beta = \alpha \wedge \gamma$.

O produto exterior $\wedge: \Omega^k \times \Omega^l = \Omega^{k+l}$, satisfaz a condição natural:

$$\alpha \wedge \beta = \sum_{I, j} a_I b_j dx_{Ij}, \text{ para } \alpha = \sum_I a_I dx_I \text{ e } \beta = \sum_j b_j dx_j$$

Temos que α é 1-forma, logo $\alpha = \sum_I a_I dx_I$ e β é 2-forma logo $\beta = \sum_j b_j dx_j \wedge dy_j$.

$$\text{Se } j=I, \text{ então: } \alpha \wedge \beta = \sum_{I, j} a_I b_j dx_I \wedge dx_j \wedge dy_j = \sum_{I, I} a_I b_I dx_I \wedge dx_I \wedge dy_I$$

Mas $dx_I \wedge dx_I = 0$. Então:

$$\alpha \wedge \beta = 0.$$

Agora precisamos encontrar um γ .

$$\alpha = \sum_I a_I dx_I \text{ e } \gamma = \sum_{I=j} b_I dy_I, \text{ assim:}$$

$$\alpha \wedge \gamma = \left(\sum_I a_I dx_I \right) \wedge \left(\sum_{I=j} b_I dy_I \right) = \sum_{I, j} a_I b_j dx_I \wedge dy_I$$

Portanto está provado.