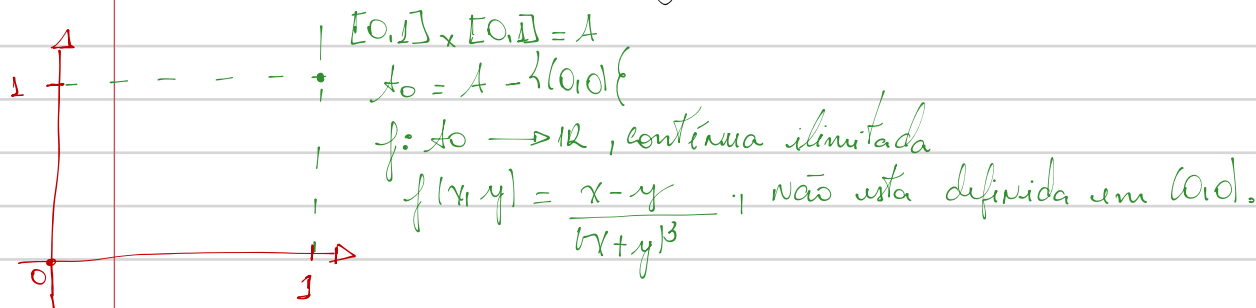


Sejam  $A = [0,1] \times [0,1]$ ,  $x_0 = A - \{(0,0)\}$  e  $f: x_0 \rightarrow \mathbb{R}$  a função contínua (ilimitada) definida por:

$$f(x,y) = \frac{x-y}{(x+y)^3}. \text{ Mostre que se tem:}$$

$$\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy = \frac{1}{2} \text{ e } \int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx = -\frac{1}{2}$$



Seja  $\int_0^1 dx \int_0^1 f(x,y) dy = 1/2 \rightarrow \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dy = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dy dx$

Seja  $I = \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dy$ , podemos reescrever o numerador então:

$$I = \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dy = \int_0^1 \frac{2x - (x+y)}{(x+y)^3} dy = \int_0^1 \frac{2x}{(x+y)^3} dy - \int_0^1 \frac{(x+y)}{(x+y)^3} dy = \int_0^1 \frac{2x}{(x+y)^3} dy - \int_0^1 \frac{1}{(x+y)^2} dy$$

Tomamos  $u = x+y \rightarrow du = dy$  (diferenciando com respeito a  $y$ ).

$$2x \int \frac{1}{u^3} du - \int \frac{1}{u^2} du = 2x \left[ \frac{u^{-2}}{-2} \right] - \left[ \frac{u^{-1}}{-1} \right]$$

$$\int x^N = \frac{x^{N+1}}{N+1}$$

$$2x \left[ \frac{1}{-2(x+y)^2} \right] - \left[ \frac{-1}{(x+y)} \right] = \left[ \frac{-x}{(x+y)^2} + \frac{1}{(x+y)} \right] = \left[ \frac{-x + x+y}{(x+y)^2} \right] = \frac{y}{(x+y)^2}$$

Agora tomamos a variável  $x$ , então:

$$\int_0^1 \left[ \frac{y}{(x+y)^2} \right]_0^1 dx = \int_0^1 \left[ \frac{1}{(x+1)^2} \right] dx, \text{ se } w = (x+1) \rightarrow dw = dx, \text{ em respeito a } x.$$

Os intervalos serão:  $w = x+1$ , se  $x=0 \rightarrow w=1$ , se  $x=1 \rightarrow w=2$ , logo:

$$\int_1^2 \frac{1}{w^2} dw = \int_1^2 w^{-2} dw \Rightarrow \left[ \frac{w^{-1}}{-1} \right]_1^2 = \left[ \frac{1}{w} \right]_1^2 = \left[ \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{1} \right) \right] =$$

$$\left[ \frac{-1}{2} + 1 \right] = \frac{-1+2}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \int_0^1 \int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3} dy dx = \frac{1}{2}$$

Agora tomamos  $\int_0^1 dy \int_0^1 f(x,y) dx = -\frac{1}{2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dx dy$ , assumimos que  $I = \int \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dx$ , agora vamos o numerador da integral como:

$$\int \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dx = \int \frac{(x+y) - 2y}{(x+y)^3} dx = \int \frac{(x+y)}{(x+y)^3} dx - \int \frac{2y}{(x+y)^3} dx = \int \frac{1}{(x+y)^2} dx - \int \frac{2y}{(x+y)^3} dx.$$

Se  $t = x+y \rightarrow dt = dx$ , assim:

$$\int \frac{1}{t^2} dt - 2y \int \frac{1}{t^3} dt = -\frac{1}{t} + \frac{2y}{2t^2} = -\frac{1}{t} + \frac{y}{t^2}, \text{ mas } t = x+y, \text{ então:}$$

$$\frac{1}{(x+y)^2} - \frac{1}{(x+y)} = \frac{y - (x+y)}{(x+y)^2} = \left( \frac{-x}{(x+y)^2} \right), \text{ agora:}$$

$$\int_0^1 \left[ \frac{-x}{(x+y)^2} \right]_0^1 dy = \int_0^1 \frac{1-1}{(1+y)^2} dy.$$

Se  $s = y+1 \rightarrow ds = dy$ , os intervalos de integração:

Se  $y=0 \rightarrow s=1$   
 Se  $y=1 \rightarrow s=2$  (Então:)

$$\int_1^2 \frac{-1}{s^2} ds = - \left[ \frac{-1}{s} \right]_1^2 = \left[ \frac{1}{s} \right]_1^2 = \left[ \frac{1}{2} - 1 \right] = -\frac{1}{2}, \text{ então:}$$

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{(x-y)}{(x+y)^3} dx dy = -\frac{1}{2}.$$



No livro do Elton é um corolário, nas aulas é o teorema de Fubini:  
Corolário:

Se  $f: A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável então:  $\int_{A_1} dx \left( \int_{A_2} f(x,y) dy \right) = \int_{A_2} dy \left( \int_{A_1} f(x,y) dx \right)$   
 $= \int_{A_1 \times A_2} f(x,y) dx dy$

Teorema de Fubini: Se  $f: A_1 \times A_2 \rightarrow \mathbb{R}$  é integrável, então as funções  $\varphi$  e  $\psi$  são integráveis e  $\int_{A_1} \varphi(x) dx = \int_{A_2} \psi(x) dx = \int_{A_1 \times A_2} f(x,y) dx dy$

Temos que o Teorema de Fubini falha por que a  $f(x,y)$  não é integrável em todo intervalo, temos que  $|f(x,y)|$  não está definida

a função é como:

$$\int f_x(y) dy = - \int f_y(x) dx \rightarrow \int f_x(y) dy + \int f_y(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Assim:  $\int f(x,y) dx dy + \int \bar{f}(x,y) dx dy = 1$ , que é maior do que  $\epsilon$ .  $1 > \epsilon$ .

Assim, é o intervalo inteiro e portanto não é integrável.