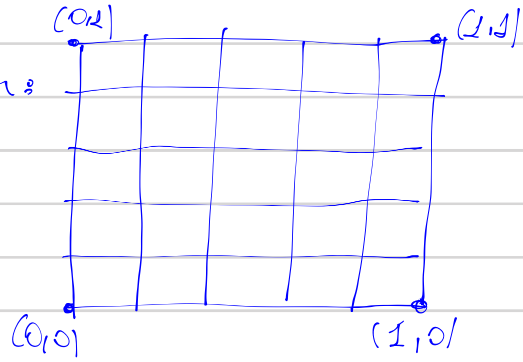
3) Seja $f:[0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 0, & \text{se } x \text{ racional, } y \text{ irracional} \\ 1/q, & \text{se } x \text{ racional, } y = p/q \end{cases}$$

Mostre que f é integrável e $\int_{[0,1]\times[0,1]} f = 0$.

Temos $f:[0,1]\times[0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ 1/q, & \text{se } x \in \mathbb{Q},\ y = p/q \end{cases}$$



Tomamos todas as somas inferiores $s(f,P)$ são limitadas inferiormente por 0, então:

$$\underline{\int_A} f(x,y)\,dx\,dy = \sup_P s(f,P) = 0 \quad \text{(que é a menor das cotas superiores)}$$

$$\overline{\int_A} f(x,y)\,dx\,dy = \inf_P S(f,P) = 0 \quad \text{(que é a maior das costas inferiores)}$$

Logo:

$$0 \leq \sup s(f,P) \leq \inf S(f,P) \leq 0 \longrightarrow \int_{[0,1]\times[0,1]} f = 0,$$ assim são limitadas inferiormente por 0. Agora para todo $\varepsilon > 0$ obteremos uma partição P tal que $S(f,P) < \varepsilon$ e com isso teremos que $\sup s(f,P) \geq 0$ e o $\inf S(f,P) \leq 0$.

Tomamos agora $\varepsilon > 0$ e $S = \{ p/q : p,q \in \mathbb{N},\ (p,q) = 1,\ 0 \leq p/q \leq 1,\ 1/q > \varepsilon/2 \}$, como $p,q \in \mathbb{N}$ temos que S é um conjunto finito. Seja $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ e definimos para todo $i = 1, \ldots, k$ as partições:

$$P_i = \left\{ \left[0, s_i - \frac{\varepsilon}{4k}\right], \left[s_i - \frac{\varepsilon}{4k}, s_i + \frac{\varepsilon}{4k}\right], \left[s_i + \frac{\varepsilon}{4k}, 1\right] \right\} \times [0,1]$$ e seja

$P = P_1 + \ldots + P_k$. Logo:

$$S(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} \operatorname{vol}\left([0,1]^2\right) + 1 \sum_{i=1}^{k} \operatorname{Vol}\left(\left[s_i - \frac{\varepsilon}{4k}, s_i + \frac{\varepsilon}{4k}\right] \times [0,1]\right) = \varepsilon$$

Como $\left[s_i - \frac{\varepsilon}{4k}, s_i + \frac{\varepsilon}{4k}\right]$ é uma partição muito pequena em relação ao intervalo $[0,1]$, então o produto cartesiano de:

$\left[s_i - \frac{\varepsilon}{4K}, s_i + \frac{\varepsilon}{4K}\right] \times [0,1]$, é um conjunto de partições ainda menores do que P e seu somatória cobrem uma área para $x \in \mathbb{Q}$ e $y = p/q$. Desta forma:

$$S(f, P) < \frac{\varepsilon}{2} \mathrm{vol}([0,1]^2) + 1 \sum_{i=1}^{K} \mathrm{vol}\left(\left[s_i - \frac{\varepsilon}{4K}, s_i + \frac{\varepsilon}{4K}\right]\right) = \varepsilon$$

Desta forma esta desigualdade cobre uma região que possui medida nula, logo pelo teorema de Lebesgue temos que:

$$S(f, P) = \bar{\int_A} f(x,y)\, dx\, dy < \varepsilon$$ e portanto integrável.

Com isso temos que $\int_{[0,1] \times [0,1]} f = 0$ e f é integrável.