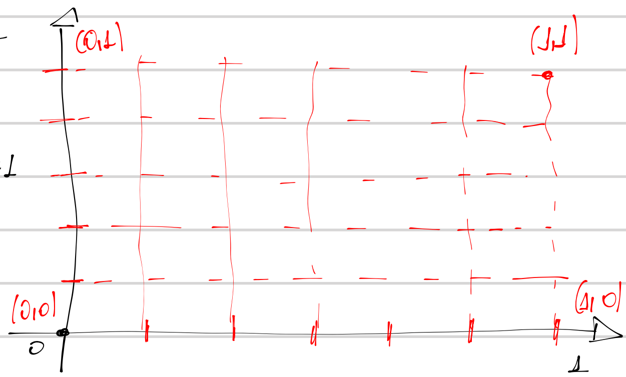
Seja $f: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \\ 1 - 1/q, & \text{se } x = p/q \text{ e } mdc(p,q) = 1 \text{ e } y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$

Mostre que $f$ é integrável.

Temos que $f: [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ 1 - 1/q, & \text{se } x = p/q \text{ e } mdc(p,q) = 1 \text{ e } y \in \mathbb{Q} \end{cases}$$




Desta forma temos que todas as somas superiores $S(f,P)$ são limitadas superiormente por 1, então:

$$\overline{\int_A} f(x,y)\,dx\,dy = \inf_P S(f,P) = 1$$

$$\underline{\int_A} f(x,y)\,dx\,dy = \sup_P s(f,P) = 1$$

Portanto:

$1 \leq \sup s(f,P) \leq \inf S(f,P) \leq 1 \to \int_{[0,1]\times[0,1]} f = 1$, assim é limitada superiormente por 1.

Tomamos agora $\varepsilon > 0$ e $S = \{ p/q : p, q \in \mathbb{N}, mdc(p,q) = 1, 0 \leq p/q \leq 1, (1 - 1/q) > \varepsilon/2 \}$.

Como $p, q \in \mathbb{N}$ temos que $S$ é um conjunto finito e seja $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ e definimos para todo $i = 1, \ldots, k$ as partições:

$$P_i = \left\{ \left[0, s_i - \frac{\varepsilon}{4k}\right], \left[s_i - \frac{\varepsilon}{4k}, s_i + \frac{\varepsilon}{4k}\right], \left[s_i + \frac{\varepsilon}{4k}, 1\right] \right\} \times [0,1] \text{, e seja}$$

$P = P_1 + P_2 + \ldots\ldots + P_k$, logo:

$$s(f, P) < \frac{\varepsilon}{2} vol([0,1]^2) + 1 \sum_{i=1}^{k} vol\left(\left[s_i - \frac{\varepsilon}{4k}, s_i + \frac{\varepsilon}{4k}\right] \times [0,1]\right)$$

Como $\left[s_i - \frac{\varepsilon}{4k}, s_i + \frac{\varepsilon}{4k}\right]$ é uma partição muito pequena em relação ao intervalo $[0,1]$, então o produto cartesiano de:

$$\left[s_i - \frac{\varepsilon}{4k}, s_i + \frac{\varepsilon}{4k}\right] \times [0,1]$$

É um conjunto de partições ainda menores do que $P$ e seu somatório cobrem uma área para $y \in \mathbb{Q}$ e $x = p/q$. Desta forma:

$$s(f, P) < \frac{\varepsilon}{2} vol([0,1]^2) + 1 \sum_{i=1}^{k} vol\left(\left[s_i - \frac{\varepsilon}{4k}, s_i + \frac{\varepsilon}{4k}\right]\right) = \varepsilon$$

Como $\varepsilon < 1$, temos que $f(x,y)$ oscila em $[1 - 1/q, 1]$, mas este intervalo possui uma oscilação muito pequena e esta desigualdade cobre uma região que possui medida nula, assim pelo teorema de Lebesgue temos que:

$$s(f, P) = \int_{A} f(x,y)\, dx\, dy < \varepsilon$$ e portanto a $f$ é integrável.

Com isso temos que $\int_{[0,1] \times [0,1]} f = 1$ e $f$ é integrável.