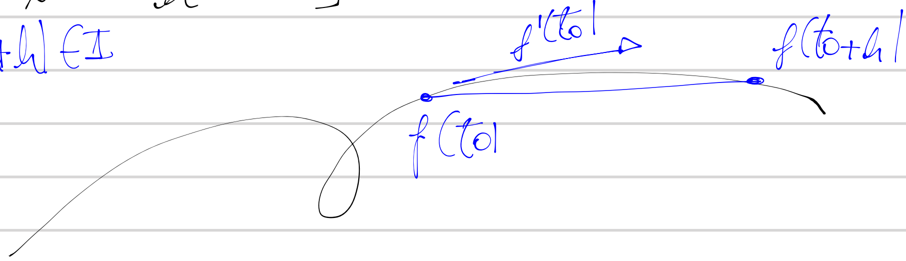
Caminhos diferenciáveis: $f: I \to \mathbb{R}^n$ e $t_0 \in I$, $\dfrac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}$, com $0<h$ e $(t_0+h) \in I$, então com n coordenadas:

$$\frac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h} = \left(\frac{f_1(t_0+h) - f_1(t_0)}{h}, \ldots\ldots, \frac{f_n(t_0+h) - f_n(t_0)}{h}\right)$$

Caso $\lim\limits_{h \to 0} \left[\dfrac{f(t_0+h) - f(t_0)}{h}\right] = f'(t_0)$ $\therefore$ vetor velocidade de f no ponto t_0

$h \neq 0$, $(t_0+h) \in I$



Este vetor possui como coordenadas as derivadas:

$$f'(t_0) = \left(f_1'(t_0), \ldots\ldots, f_n'(t_0)\right)$$

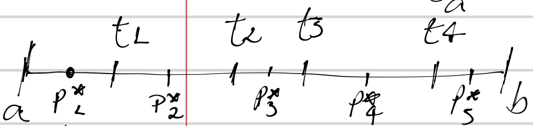
$f, g: I \to \mathbb{R}^n$, $\langle f, g\rangle: I \to \mathbb{R}$

$$\langle f, g\rangle(t) = \langle f(t), g(t)\rangle$$
$$\langle f, g\rangle'(t) = \langle f'(t), g(t)\rangle + \langle f(t), g'(t)\rangle$$

Desigualdade do valor médio: $f: I \to \mathbb{R}$ $= f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ diferenciável

$$\|f(b) - f(a)\| \leq M.(b-a) \quad = \quad M \geq \|f'(t)\| \ \forall t \in [a,b]$$

Integral do caminho: $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t), \ldots\ldots, \int_a^b f_n(t)\,dt\right)$



$P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_k = b\}$ (Partição, dizemos que Q refina P se $P \subset Q$.

Partição pontilhada: $P^* = (P, \xi)$ com $t_{i-1} \leq \xi_i \leq t_i$ com $i = 1, \ldots, k$ e $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_k)$

Temos uma soma de Rieman $\Sigma(F, P) = \Sigma(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)(t_i - t_{i-1})$

Cada partição P, ξ_p é um vetor cujas as coordenadas é a soma de Rieman das funções f_i.

$$\Sigma(f, P^*) = \left(\Sigma(f_i, P^*)\right)_{i=1}^{n}$$

$|f|^2 = \langle f, f \rangle$

Por definição $\lim_{|P| \to 0} \Sigma(P^*) = \int_a^b f(t)\,dt$ ① Derivada da Norma: $|f|' = \frac{\langle f, f' \rangle}{|f|}$

$|f|^2 = 2|f||f|' = 2\langle f, f' \rangle \to |f|' = \to$

A norma da partição é o maior comprimento de um intervalo da partição.

Assim é válido o teorema fundamental do Cálculo: $\int_a^b f'(t)\,dt = f(b) - f(a)$

Diferenciabilidade Uniforme: $\frac{f(t+h) - f(t)}{h} - f'(t)$, $f: I \to \mathbb{R}^n$, $t, t+h \in I$

$\forall \varepsilon > 0$ e $\forall t$ tal que $t, t+h \in I$, $\exists \delta > 0$ tal que $\left| \frac{f(t+h) - f(t)}{h} - f'(t) \right| < \varepsilon$ e $h \neq 0$.

Então: $|f(t+h) - f(t) - f'(t).h| < \varepsilon.|h|$

Teorema: Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 $\to$ f é uniformemente diferenciável.

$$f(t+h) - f(t) = \int_t^{t+h} f'(s)\,ds = \left| \int_t^{t+h} f'(s)\,ds - \int_t^{t+h} f'(t)\,ds \right| = \left| \int_t^{t+h} (f'(s) - f'(t))\,ds \right| < \frac{\varepsilon |h|}{(b-a)} \leq 1$$

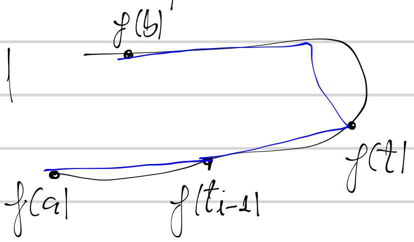
① Dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|h| < \delta \to |f'(s) - f'(t)| < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$

$$\left| \int_a^b f(t)\,dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt$$

Caminhos retificados: Dado um caminho de um intervalo compacto $[a,b]$.

$f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$, $P = \{a = t_0 < t_1 < \dots < t_k = b\}$, associamos $l(P)$ - caminho poligonal,

$$l(f, P) = l(P) = \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f(t_{i-1})|$$



Quando $P \subset Q \to l(P) \leq l(Q)$

Significa que: f é retificável: $\{l(P), P \in$ partição de $[a,b]\}$ é limitado, $\sup_P l(P) = l(f)$: comprimento de f.

Teorema: Se $\lim_{|P| \to 0} l(P) = l$ então é retificável e $l = l(f)$, para um dado caminho: $f: [a,b] \to \mathbb{R}^n$.

<u>Teorema</u>: Se $f:[a,b] \to \mathbb{R}^n$ é de classe $C^1 \Rightarrow f$ é retificável e
$\ell(f) = \int_a^b \|f'(t)\| \, dt$.