Teorema de Green: Seja $M \subset \mathbb{R}^2$ uma região compacta cuja borda ∂M seja união de 1-cubos singulares (curvas) orientados no sentido anti-horário. Então:

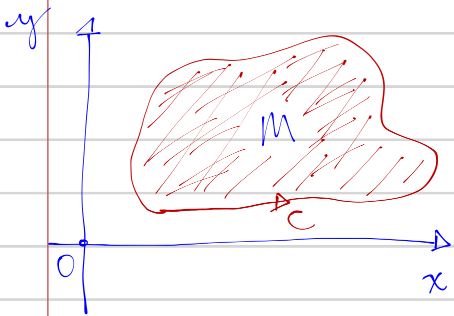
$$\int_{\partial M} \alpha\, dx + \beta\, dy = \int_M \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dx\, dy \qquad \text{II}$$

Tomamos $w = \alpha dx + \beta dy \longrightarrow dw = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dx \wedge dy$

Aplique o teorema de Stokes em II

Tomamos C como uma curva plana simples, fechada, contínua por trechos, orientada positivamente, e seja M a região delimitada por C. Se α e β têm derivadas parciais de primeira ordem contínuas sobre uma região aberta que contenha D, então:

$$\int_{C=\partial M} (\alpha dx + \beta dy) = \iint_M \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dA$$



Temos que $(\alpha dx + \beta dy)$ é uma 1-forma em $\mathbb{R}^2$. Chame $w = \alpha dx + \beta dy$, como α e β são funções de $\mathbb{R}^2$, a derivada exterior de w ficará:

$$dw = \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} dx + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy\right) \wedge dx + \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} dx + \frac{\partial \beta}{\partial y} dy\right) \wedge dy$$

$$dw = \frac{\partial \alpha}{\partial x} \cancelto{0}{dx \wedge dx} + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy \wedge dx + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial \beta}{\partial y} \cancelto{0}{dy \wedge dy}$$

$$dw = \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial \alpha}{\partial y} dy \wedge dx = \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \wedge dy + (-1) \frac{\partial \alpha}{\partial y} dx \wedge dy$$

$$dw = \frac{\partial \beta}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial \alpha}{\partial y} dx \wedge dy \longrightarrow dw = \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dx\, dy$$

Tomamos agora o teorema de Stokes:

Seja S uma superfície orientada, lisa por partes, cuja fronteira é formada por uma curva M fechada, simples, lisa por partes, com orientação positiva. Seja F um campo vetorial cujas as componentes têm derivadas parciais em uma região aberta, então:

Se w é uma $(k-1)$-forma em um aberto $A \subset \mathbb{R}^N$ e M é uma k-cadeia em A, então: $\int_M dw = \int_{\partial M} w$

$$\int_M \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial M} \frac{\partial \beta}{\partial x}\,dx\,dy - \int_{\partial M} \frac{\partial \alpha}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$= \int_{\partial M} \frac{\partial \beta}{\partial x}\,dx\,dy + \int_{\partial M} -\frac{\partial \alpha}{\partial y}\,dx\,dy$$

Como M é do tipo I, temos:

$$\int_{\partial M} -\frac{\partial \alpha}{\partial y}\,dx\,dy = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} -\frac{\partial \alpha}{\partial y}\,dy\,dx = \int_a^b [\alpha(x,\varphi_1(x)) - \alpha(x,\varphi_2(x))]\,dx$$

$$= \int_a^b \alpha(x,\varphi_1(x))\,dx - \int_a^b \alpha(x,\varphi_2(x))\,dx = \int_{\partial M} \alpha\,dx$$

De forma análoga para em:

$$\int_{\partial M} \frac{\partial \beta}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} \frac{\partial \beta}{\partial x}\,dx\,dy = \int_c^d \beta(\psi_2(y),y)\,dy - \int_c^d \beta(\psi_1(y),y)\,dy =$$

$$\int_{\partial M} \beta\,dy$$

Portanto: $\int_{\partial M} \alpha\,dx + \int_{\partial M} \beta\,dy = \int_{\partial M} (\alpha+\beta)\,dx\,dy = \int_{\partial M} \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) dx\,dy$