Seja A um conjunto $\int$-medível $\mathbb{R}^m$ e seja $\varepsilon > 0$ arbitrário. Mostre que existe um conjunto compacto $\int$-medível $C \subset A$ tal que:

$$\int_{A-C} 1 < \varepsilon.$$

<u>Resposta</u>: Por definição um conjunto é chamado $\int$-medível, se ele é limitado e sua fronteira possui medida nula, então como $A \subset \mathbb{R}^m$ é $\int$-medível logo ∂A possui medida nula. Então med.$(\partial A) = 0$.

Tomando a função característica para A: $A_x : A \to \mathbb{R}$, onde:

$$A_x = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in A \\ 0, \text{ se } x \notin A \end{cases} \longrightarrow Vol(A) = \int_A A_x(x)\,dx$$

Tomando uma partição P de A tal que a soma dos blocos de P que interceptam em A é menos do que ε, então dados $B_1, \dots, B_k$ em $\mathbb{R}^m$ com $A \subset B_1 \cup \dots \cup B_k$ temos que:

$$\sum vol(B_i) < \varepsilon, \text{ onde } i = 1, \dots, k, \text{ assim:}$$
$$Vol(A) = \int_A A_x(x)\,dx \leq \sum vol(B_i) < \varepsilon$$

Mas $A_x = 1$ se $x \in A$, então $\int_A A_x(x)\,dx = \int_A 1\,dx \leq \sum Vol(B_i) < \varepsilon$

Se tomarmos agora um conjunto $C \subset A$, onde: $A = C \cup \partial C$.
Então tomamos a função característica de C.

$$C_x = C \to \mathbb{R}, \text{ onde: } C_x = \begin{cases} 1, \text{ se } x \in C \\ 0, \text{ se } 0 \notin C \end{cases}$$

Temos com isso que se $C \subset A$, então: $C_x \leq A_x$. Então: $A = C \cup \partial C \to \partial C = A - C$

$$Vol.(C) \leq vol(A) \leq \sum Vol(B_i) < \varepsilon.$$

$$\int_A C_x(x)\,dx \leq \int_A A_x(x)\,dx \leq \sum vol(B_i) < \varepsilon$$

$$\int_A C_x(x)\,dx \leq \int_A C_x(x)\,dx + \int_A \partial C_x(x)\,dx \leq \sum vol(B_i) < \varepsilon$$

$$\int_A C_x(x)\,dx - \int_A C_x(x)\,dx \leq \int_A \partial C_x(x)\,dx \leq \sum vol(B_i) < \varepsilon$$

$$0 \leq \int_A \partial c_\chi(x)\,dx \leq \sum vol(B_i) < \varepsilon$$

Mas temos que A é J-medível, logo med $\partial A = 0$, então:

$$Vol(int.\,A) = \underline{\int}_A A_\chi(x)\,dx \quad e \quad vol(ext.\,A) = \overline{\int}_A A_\chi(x)\,dx = 0$$

$$\underline{\int}_A A_\chi(x)\,dx + \overset{\geq 0}{\cancel{\overline{\int}_A A_\chi(x)\,dx}} = \int_A 1\,dx \longrightarrow \underline{\int}_A A_\chi(x)\,dx = \int_A 1\,dx \leq \sum Vol(B_i) < \varepsilon$$

E sabemos que $\partial C = A - C \longrightarrow \int_{A-C} \partial c_\chi(x)\,dx \leq \underline{\int}_A A_\chi(x)\,dx \leq \sum Vol(B_i) < \varepsilon$

Mas os pontos $x \in \partial C$ também pertence a A, logo: $\partial C_\chi = 1$, se $x \in A$, isto porque $\partial C \in A$.

$$\int_{A-C} \partial C_\chi(x)\,dx = \int_{A-C} 1\,dx \leq \underline{\int}_A A_\chi(x)\,dx \leq \sum Vol(B_i) < \varepsilon, \text{ então:}$$

$\int_{A-C} \partial c_\chi(x)\,dx = \int_{A-C} 1\,dx < \varepsilon$ e portanto J-medível, como A é J-medível temos que $C \subset A$ é J-medível, então med $\partial C = 0$.

Assim como ∂C é limitado, logo C é compacto.