Seja $X \subset \mathbb{R}$, se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma sequência de blocos $\{A_i\}$ (abertos ou fechados) tal que $\sum vol(A_i) < \varepsilon$ e $X \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cup Y$, onde a medida $med(Y) = 0 \rightarrow med(X) = 0$

Suponhamos inicialmente A fechado, pelo teorema de Borel-Lebesgue, $A \subset B$, se considerarmos B fechado, então:

$$A \subset B \rightarrow \{A_i\} \subset \{B_i\} \rightarrow A_1, \ldots, A_K \ldots \subset B_1, \ldots, B_K \ldots$$

Na qual estão definidas as funções características, então:

$$\chi_A \leq \chi_B \rightarrow \chi_{A_1 \cup \ldots \cup A_K \cup \ldots} \leq \chi_{B_1 \cup \ldots \cup B_K \ldots} \rightarrow$$
$$\chi_{A_1} + \ldots + \chi_{A_K} + \ldots \leq \chi_{B_1} + \ldots + \chi_{B_K} + \ldots$$

Com isso: "B é fechado"

$$Vol. A = \int_B \chi_A(x)\,dx \leq \int_B \chi_B(x)\,dx \rightarrow \int_B \chi_{A_1}(x)\,dx + \ldots + \int_B \chi_{A_K}(x)\,dx + \ldots \leq$$
$$\int_B \chi_{B_1}(x)\,dx + \ldots + \int_B \chi_{B_K}(x)\,dx + \ldots \rightarrow Vol.(A_1 + \ldots + A_K + \ldots) \leq Vol.(B_1 + \ldots +$$
$$B_K + \ldots) \rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} Vol.(A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} Vol.(B_i) \rightarrow Vol.(A) \leq Vol(B)$$

Se $Y = B$ e $Med.(Y) = 0 \rightarrow med(A) = 0$.

Agora tomamos A aberto, e $me(B) = 0$. Então supomos que dado $Vol. D \leq \sum Vol.(B_i)$ para todo bloco fechado $D \subset A$, como $vol.(A) = sup.\{vol.(D) ; D$ é bloco fechado contido em $A\}$. Com isso segue-se que: $Vol.(A) \leq \sum Vol.(B_i)$. Como:

$$\sum Vol.(B_i) = 0 \rightarrow Vol.(D) \subset Vol(A) \leq \sum vol(B_1) = 0$$

Portanto $med(A) = 0$ e se $X = A$ e $Y = B$, então:

$$med.(B) = med(Y) = 0 \rightarrow med(A) = med(X) = 0$$