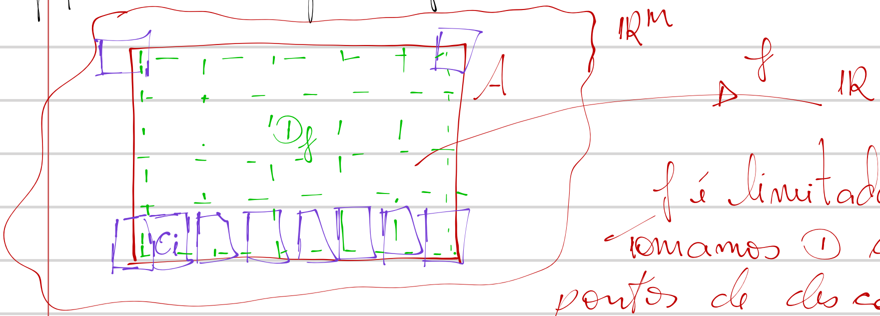
Uma função $f: A \to \mathbb{R}$, f é limitada e A um m-bloco e $A \subset \mathbb{R}^m$, então f é integrável $\Leftrightarrow$ o conjunto de pontos de descontinuidade de f, denotado por D_f tem medida nula.



f é limitada no domínio (bloco A), tomamos D como o conjuntos dos pontos de descontinuidade.

Vamos supor primeiro que med. $D_f = 0$, dado arbitrariamente $\varepsilon > 0$ e tomemos uma cobertura enumerável $D_f \subset \bigcup C_i'$ por cubos abertos tais que $\sum \text{Vol.}\, C_i' < \varepsilon/2K$, onde $K = M - m$ (diferença entre o sup. e o inf. de f em A) é a oscilação de f no bloco A.

K: é a oscilação entre o valor maximo e minimo, em relação a cobertura p/ um ajuste entre a ocupação, com menor perda.

Para cada ponto $x \in A - D_f$ tomemos um cubo aberto C_x'', contendo x, tal que a oscilação de f em $C_x'' \cap A$ seja inferior a $\varepsilon/(2\,\text{vol.}\, A)$
Como A é compacto, da cobertura aberta $A \subset (\bigcup C_i') \cup (\bigcup C_x'')$ podemos retirar uma subcobertura finita $A \subset C_1' \cup \dots \cup C_r' \cup C_1'' \cup \dots \cup C_s''$
Seja P uma partição de A tal que cada bloco (aberto) $B \in P$ esteja contido, ou num dos cubos C_i', ou num dos cubos C_j''.
A partição P pode ser obtida "prolongando-se as faces" dos cubos C_i' e C_j''. Mais precisamente, se $A = \prod_{k=1}^{m} [a_k, b_k]$ então $P = P_1 \times \dots \times P_m$ onde, para cada $k = 1, \dots, m$, P_k é o conjunto formado por a_k, b_k e mais as k-ésimas coordenadas dos vértices dos cubos C_i' e C_j''.
Indicaremos genericamente com a notação B' os blocos de P que estão que estão contidos em algum cubo C_i'. Os demais blocos de P (necessariamente contidos em cubos C_j'') serão chamados B''.
A soma dos volumes dos blocos B' é menor do que $\varepsilon/2K$ e em cada bloco B'' a oscilação de f não excede $\varepsilon/2\text{vol.}\,A$. Portanto, a partição P nos dá:

$$\sum_{B\in P} w_B \cdot Vol.\,B = \sum_{B'} w_{B'} \cdot Vol\,B' + \sum_{B''} w_{B''} \cdot Vol.\,B'' \leq K \cdot \sum Vol\,B' + \frac{\varepsilon}{2\,Vol.\,A} \sum Vol.\,B''$$

$$< K \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot K} + \frac{\varepsilon}{2\,Vol.\,A} \cdot Vol(A) = \varepsilon$$

Logo f é integrável. Reciprocamente, suponhamos f integrável. Temos $D_f = D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_i \cup \ldots$, onde $D_i = \{x \in A;\, w(f;x) \geq 1/i\}$. Para mostrar que D_f tem medida nula provaremos que, para cada $i \in \mathbb{N}$ med. $D_i = 0$. Seja então dado $\varepsilon > 0$, como f é integrável, existe uma partição P do bloco A, tal que $\sum_{B\in P} w_B \cdot Vol\,B < \varepsilon/i$. Indiquemos genericamente com B' os blocos da partição P que contêm algum ponto de D_i em seu interior. Para cada um desses blocos, temos $w_{B'} \geq 1/i$, em vista da propriedade:
"Se $x \in int.\,Y$ e $Y \subset X \rightarrow w(f;x) \leq w(f;Y)$", temos:

$$\frac{1}{i} \sum Vol.\,B' \leq \sum w_{B'} \cdot Vol.\,B' \leq \sum_{B\in P} w_B \cdot Vol\,B < \varepsilon/i$$

Multiplicando por i, temos: $\sum Vol.\,B' < \varepsilon$. Desta forma, $D_i \subset (\cup B') \cup Y$, onde Y é a reunião das faces próprias dos blocos $B \in P$ nas quais existe algum ponto de D_i. Sabe-se que Y tem medida nula, por:
"Seja $X \subset \mathbb{R}^m$. Se, para todo $\varepsilon > 0$, existe uma sequência de blocos A_i (abertos ou fechados) tais que $\sum Vol.\,A_i < \varepsilon$ e $X \subset (\cup A_i) \cup Y$, onde med. $Y = 0$, então X tem medida nula."

Então temos que med. $D_i = 0$, o que finaliza a demonstração.