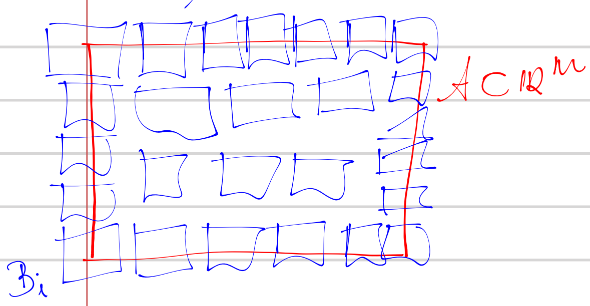
Se $A \subset \mathbb{R}^m$ um bloco, suponha que $A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$, com B_i blocos abertos em $\mathbb{R}^m$, então $0 < vol(A) \le \sum_{i=1}^{\infty} vol(B_i)$. Em particular, um m-bloco $A \subset \mathbb{R}^m$ não tem medida nula.



$\bigcup B_i$: cobertura enumerável por blocos abertos B_i

Suponhamos inicialmente A fechado e pelo teorema de Borel-Lebesgue, existe um K tal que $A \subset B_1 \cup \dots \cup B_K$.

Teorema (Borel-Lebesgue): Seja $F \subset \mathbb{R}$ um subconjunto limitado e fechado. Toda cobertura $F \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ de F por meio de abertos admite uma subcobertura finita $F \subset A_{\lambda_1} \cup \dots \cup A_{\lambda_N}$.

Considerando um bloco fechado B, contendo $B_1, \dots, B_K$, no qual estão definidas as funções características, temos:

$$\chi_A \le \chi_{B_1 \cup \dots \cup B_K} \le \chi_{B_1} + \dots + \chi_{B_K}$$

Segue-se que dados A, B blocos em $\mathbb{R}^m$ e com $B \subset \operatorname{int} A$ e a função característica de B, temos que χ_B é integrável e $\int_A \chi_B(x)\,dx = vol. B$.

E pelo teorema: Sejam $f, g: A \to \mathbb{R}$ funções integráveis no bloco $A \subset \mathbb{R}^m$. Então: Se $f(x) \ge 0$ para todo $x \in A$ então $\int_A f(x)\,dx \ge 0$. Equivalentemente: se $f(x) \le g(x)$ para todo $x \in A$ então $\int_A f(x)\,dx \le \int_A g(x)\,dx$. Então:

$$vol. A = \int_B \chi_A(x)\,dx \le \int_B \chi_{B_1}(x)\,dx + \dots + \int_A \chi_{B_K}(x)\,dx = vol. B_1 + \dots + vol. B_K \le \sum_{i=1}^{\infty} vol. B_i$$

Se o bloco A é aberto, temos $vol. D \le \sum vol. B_i$ para todo bloco fechado $D \subset A$. Como $vol\, A = \sup \{vol. D;\ D$ bloco fechado contido em $A\}$, segue-se que $vol. A \le \sum vol. B_i$.

Finalizamos que todo conjunto de medida nula tem interior vazio, pois se fosse $\operatorname{int}. X \ne \emptyset$ então X conteria algum bloco, logo X não tem medida nula.