

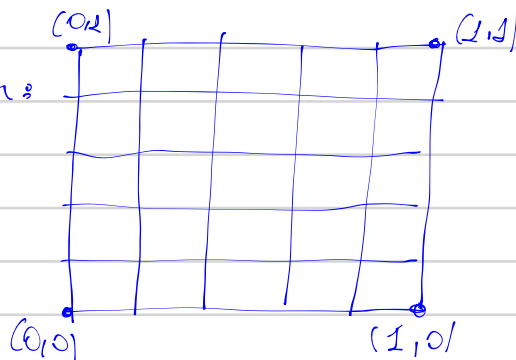
3) Seja $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \text{ é irracional} \\ 0, & \text{se } x \text{ racional, } y \text{ irracional} \\ 1/q, & \text{se } x \text{ racional, } y = p/q \end{cases}$$

Mostre que f é integrável e $\int_{[0,1] \times [0,1]} f = 0$.

Tomemos $f: [0,1] \times [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \text{ e } y \in \mathbb{R}/\mathbb{Q} \\ 1/q, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, y = p/q \end{cases}$$



Tomamos partições arbitrárias de $[a,b]$, então $P_1 = P_2 = 10 = x_0, x_1, \dots, x_N = 1$.

Agora $S(P_N, f) = \sum_i \sum_j P_N(x,y) \Delta x_i \Delta y_j$, onde $P_N(x,y)$ é o supremo de $f(x,y)$.

$$\text{Então } \sum_i \sum_j \left(\frac{1}{q} \right) \cdot \frac{1}{N} \cdot \frac{1}{N} = \frac{1}{qN^2} \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} V(P_N, f) = 0$$

Em seguida, tomamos o infimo: $L(P_N, f) = \sum_i \sum_j P_N(x,y) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_i \sum_j 0 \cdot \Delta x_i \Delta y_j = 0 \rightarrow \lim_{N \rightarrow \infty} L(P_N, f) = 0$.

Pelo teorema: $\int f(x) = \bar{\int} f(x) = \int f(x)$; então f é integrável, logo:

$$S(P_N, f) - L(f, P) = 0 \rightarrow S(f, P) = L(f, P) \text{ e portanto } f \text{ é integrável}$$

$$\int_{[0,1] \times [0,1]} f = 0.$$