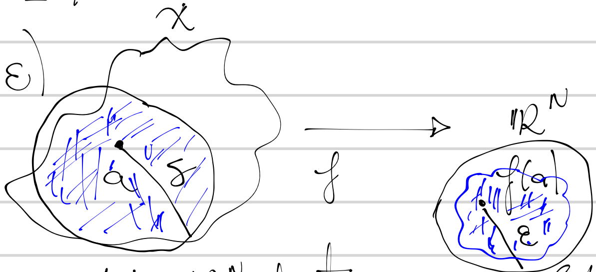
Aplicações Contínuas: $f: X \to \mathbb{R}^n$, $a \in X \subset \mathbb{R}^n$.

A f é contínua no ponto a, se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, $x \in X$ e $|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

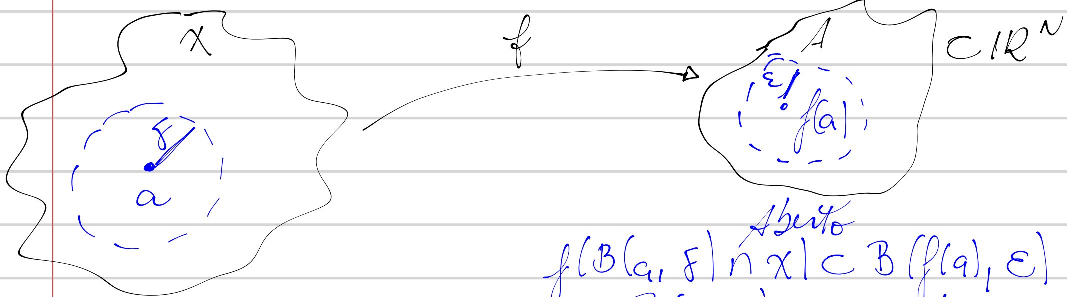
$f(B(a,\delta) \cap X) \subset B(a, \varepsilon)$



. f é contínua em todos os pontos do domínio

$f: X \to \mathbb{R}^n$ é contínua $\Leftrightarrow \forall A \subset \mathbb{R}^n$ aberto $\Rightarrow f^{-1}(A)$ é aberta em X.

$f(x) \in A \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$



$f(B(a,\delta) \cap X) \subset B(f(a), \varepsilon) \subset A$

$B(a,\delta) \cap X \subset A$

$a \in f^{-1}(A)$

$f^{-1}(A)$ é aberto em X

$f: X \to \mathbb{R}^n$ contínua $\Leftrightarrow \forall F \subset \mathbb{R}^n$ fechado, $f^{-1}(F)$ é fechada em X.

Toda aplicação: $f: X \to \mathbb{R}^n$ equivale a dizer que temos "n" funções reais contínuas:

$$\forall x \in X,\ f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \Rightarrow f_1, \ldots, f_n : X \to \mathbb{R}$$

A f é contínua no ponto $a \Leftrightarrow$ cada f é contínua nesse ponto

$f: X \to \mathbb{R}^n$ é contínua no ponto $a \Leftrightarrow$ para toda sequência de pontos $x_k \in X$ com limite $\lim x_k = a$ tem-se $\lim f(x_k) = f(a)$.

Ou seja: $f(\lim x_k) = \lim f(x_k)$

- Se $f: X \to \mathbb{R}^n$ é contínua, então para todo compacto $K \subset X$, tem-se $f(K)$ um compacto.

Teorema de Weierstrass: Se $f: K \to \mathbb{R}$ é contínua e K é compacto então existem $x_0, x_1 \in K$, tais que $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ $\forall x \in K$.

$\inf(K)$ $\sup(K)$ = imagem

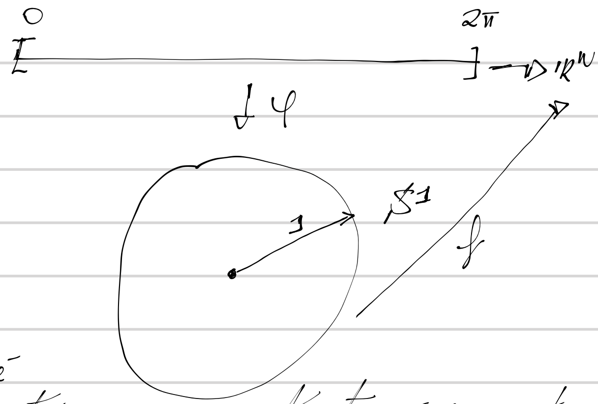
$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "f \circ \varphi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \mathbb{R}^n \\ L \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

. φ é contínua e sobrejetiva

K é compacto

L " "

Se $f \circ \varphi$ é contínua então f é contínua,



$f: S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad \varphi(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

$t \longrightarrow f(\cos t, \operatorname{sen} t)$

Cont $\longrightarrow$ f é contínua

Se $F \subset \mathbb{R}^n$ é fechado $\longrightarrow$ $f^{-1}(L)$ é fechado?

$\varphi^{-1} f^{-1}(F) = (f \circ \varphi)^{-1}(F)$ é fechado pois $f \circ \varphi$ é contínua, portanto é compacto e portanto $\varphi(\varphi^{-1} f^{-1}(F))$ é compacto. Como φ é sobrejetiva $f^{-1}(F)$ é compacto.

. Seja $f: K \longrightarrow L \subset \mathbb{R}^n$ uma bijeção contínua, então $f^{-1}: L \to K$ é contínua.

. Tomamos $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $X \subset \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$ tal que $|x - y| < \delta \longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

$s: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad s(x,y) = x + y$

$m: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad m(x,y) = x \cdot y$

Uma $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua $\leftrightarrow$ $\lim |x_k - y_k| = 0 \longrightarrow \lim |f(x_k) - f(y_k)| = 0$

. Se $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto então toda aplicação contínua $f: K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.

<u>Exemplo</u>: . Toda transformação linear $T: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é uniformemente contínua.

. Uma função Lipschitziana $f: X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ $\exists \ c > 0 : |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ $\forall x, y \in X$ é uniformemente contínua

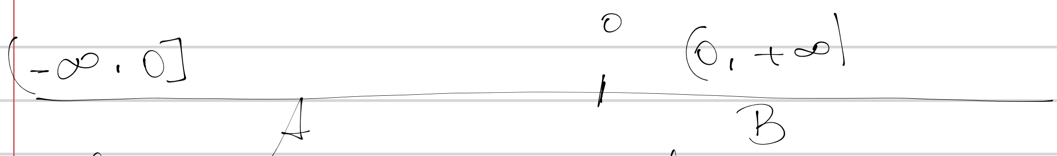
. Quando um domínio é compacto: $f: K \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua, $K \subset \mathbb{R}^n$ é compacto $\longrightarrow$ f é uniformemente contínua.

Do contrário: $\exists \ x_k, y_k \in \mathbb{R}$ tal que $\lim |x_k - y_k| = 0$. Mas $\lim |f(x_k) - f(y_k)| = 0$ é falsa.

<u>Homeomorfismo</u>: $X \subset \mathbb{R}^m$ $Y \subset \mathbb{R}^n$, $f: X \longrightarrow Y$ bijeção contínua e f^{-1} é contínua.

. Toda bola aberta em $\mathbb{R}^n$ é homeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Conjuntos Conexos: $X \subset \mathbb{R}^n$, uma cisão de X: $X = A \cup B$, tais que $A \cap \bar{B} = \emptyset$ e $\bar{A} \cap B = \emptyset$ (nenhum ponto de A é aderente a B, e nenhum ponto de B é aderente a A).



Cisão trivial: $\underset{A}{X} = X \cup \underset{B}{\emptyset}$, X conexo: toda cisão de X é trivial

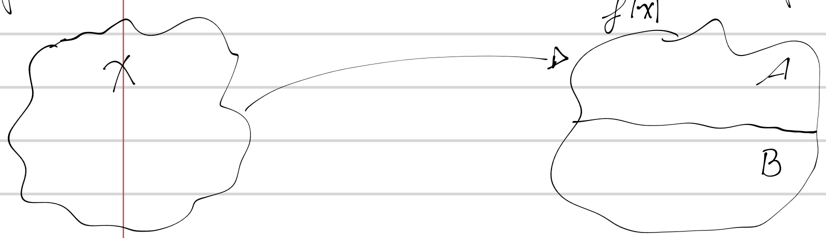
Exemplo: $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

. Se $X \subset \mathbb{R}$ é conexo $\to$ X é um intervalo

. Se $a, b \in X$, e $a < c < b$ $\to$ $c \in X$ e X é um intervalo

Teorema:

a) $f: X \to \mathbb{R}^n$ contínua e X conexo $\to$ $f(X)$ conexo.

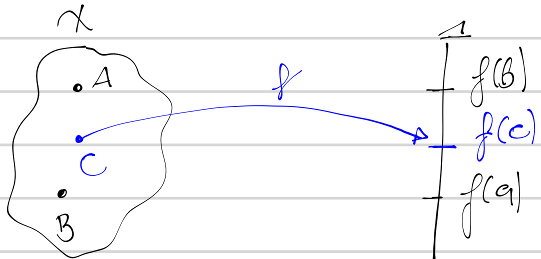


$f(X) = A \cup B$ cisão

$X = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$ – cisão trivial

$A = ff^{-1}(A) = \emptyset$ – trivial

Teorema do valor intermediário: Se $f: X \to \mathbb{R}$ é contínua e X é conexo $\to$ $f(X) \subset \mathbb{R}$ é intervalo.



b) $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$, $a \in X_\lambda$ conexo $\forall \lambda \in L$ $\to$ $X = \bigcup_{\lambda \in L} X_\lambda$ é conexo

$\underbrace{X = A \cup B}_{\text{cisão}}$, $a \in A$. $\forall \lambda \in L$, $X_\lambda = (X_\lambda \cap A) \cup (X_\lambda \cap B)$ é cisão

Como $a \in A$ $\to$ $X_\lambda \cap B = \emptyset$ e $B = \emptyset$.

c) $(X \times Y)$ conexo $\to$ X, Y é conexo.   d) X conexo, $X \subset Y \subset \bar{X}$ $\to$ Y é conexo

↳ produto cartesiano