UFMG

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática - ICEX
Análise II - 2021
Exame Especial - 06/09/2021

1. (20 pontos) Sejam $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tais que $g(x) = f(x) + (f(x))^5$. Se $g \in C^r$ (de classe C^r) então $f \in C^r$ (é de classe C^r).

2. (20 pontos) Sejam $g : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ contínua, com $g(t) > 0$ para todo $t \geq 0$ e $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$. Defina $f : U \to \mathbb{R}^2$ pondo

$$f(x, y) = \left(\int_0^{x+y} g(t)dt, \int_0^{y-x} g(t)dt \right).$$

   Mostre que f é um difeomorfismo sobre um aberto de $\mathbb{R}^2$.

3. (20 pontos) Defina $f : [-1, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ por $f(x, y) = x$, se $y \in \mathbb{Q}$ e $f(x, y) = 0$ em outro caso. Mostre:

   - $\int_0^1 \int_{-1}^1 f(x, y)dxdy$ existe, mas $\int_{-1}^1 \int_0^1 f(x, y)dydx$ não existe.
   - Calcule $\int_{-1}^1 \overline{\int_0^1} f(x, y)dydx$ e $\int_{-1}^1 \underline{\int_0^1} f(x, y)dydx$.
   - Mostre que f não é integrável em $[-1, 1] \times [0, 1]$.

4. (20 pontos) Seja $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 tal que para cada $x, v \in \mathbb{R}^m$ quaisquer tem-se

$$\langle f'(x) \cdot v, v \rangle \geq |\alpha||v|^2,$$

   onde $\alpha > 0$ é uma constante. Prove que $|f(x) - f(y)| \geq \alpha|x - y|$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$ arbitrários. Conclua que $f(\mathbb{R}^m)$ é fechado, e daí, que f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^m$ em $\mathbb{R}^m$.

5. (20 pontos) Seja A um conjunto J-medível $\mathbb{R}^m$ e seja $\epsilon > 0$ arbitrário. Mostre que existe um conjunto compacto J-medível $C \subset A$ tal que

$$\int_{A-C} 1 < \epsilon.$$

Professor Arturo Fernández