Exercício 1. Sejam $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_k \in S_n$ um produto de ciclos disjuntos. Então $|\sigma| = \text{mmc}(|\sigma|_1, \cdots, |\sigma|_k)$.

Solução:

Sejam $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ e $\sigma_1 = (j_{1,1} \cdots j_{1,t_1})$, $\cdots$, $\sigma_k = (j_{k,1} \cdots j_{k,t_k})$. Denotando

$$X_1 = \{j_{1,1}, \cdots, j_{1,t_1}\},\ \cdots,\ X_k = \{j_{k,1}, \cdots, j_{k,t_k}\},$$

temos que $X = X_1 \cup \cdots \cup X_k \cup X_0$, onde $X_0 = X \setminus \cup_{i=1}^k X_i$ (por exemplo, se $\sigma_1 = (1\,2\,4)$ e $\sigma_2 = (3\,6)$ são ciclos em S_7, então $X_1 = \{1, 2, 4\}$, $X_2 = \{3, 6\}$ e $X_0 = \{5, 7\}$). Vamos mostrar, primeiramente, que, dado $m \in \mathbb{N}$, se $\sigma_1^m \cdots \sigma_k^m = \text{id}_X$, então $\sigma_i^m = \text{id}_X$, para cada $i = 1, \cdots, k$. Para isso, observe que $\sigma_i|_{X \setminus X_i} = \text{id}_{X \setminus X_i}$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Além disso, dado $m \in \mathbb{N}$ e $x \in X \setminus X_i$, note que

$$\sigma_i^m(x) = \underbrace{\sigma_i \cdots \sigma_i}_{m \text{ vezes}}(x) = x,$$

já que $\sigma_i(x) = x$. Assim, se $\sigma_1^m \cdots \sigma_k^m = \text{id}_X$, então

$$\sigma_i^m|_{X_i} = (\sigma_1^m \cdots \sigma_k^m)|_{X_i} = \text{id}_{X_i}.$$

Portanto, $\sigma_i^m = \text{id}_X$, para cada $i = 1, \ldots, k$. Usando esse fato, vamos, agora, mostrar que $|\sigma| = \text{mmc}(|\sigma|_1, \cdots, |\sigma|_k)$.

Uma vez que $\sigma_1, \cdots, \sigma_k$ são ciclos disjuntos, temos que $\text{id}_X = \sigma^{|\sigma|} = \sigma_1^{|\sigma|} \cdots \sigma_k^{|\sigma|}$, logo $|\sigma_i|$ divide $|\sigma|$, ou seja, $|\sigma|$ é um múltiplo de $|\sigma_i|$, para cada $i = 1, \ldots, k$. Isso implica que $|\sigma|$ é um múltiplo de $\text{mmc}(|\sigma|_1, \cdots, |\sigma|_k)$, logo, em particular, $\text{mmc}(|\sigma|_1, \cdots, |\sigma|_k) \leq |\sigma|$. Denotando $M = \text{mmc}(|\sigma|_1, \cdots, |\sigma|_k)$, temos que

$$\sigma^M = \sigma_1^M \cdots \sigma_k^M = \text{id}_X.$$

Portanto, $|\sigma|$ divide M. Disso segue que $|\sigma| \leq M$. Dessa forma, concluímos que $|\sigma| = \text{mmc}(|\sigma|_1, \cdots, |\sigma|_k)$. ⊠